Nimvärdesperioder för oktalspel

Lovisa Colérus & Erland Arctaedius

26 mars 2012

Innehåll

1 Teori

1.1 Oktalkoder

Ett oktalspel består av ett antal rader med ett antal stenar i varje rad. Spelarna turas om att göra drag och den som inte kan göra ett drag förlorar (detta kallas ”normal play” vilket är det vi har arbetat med, om fallet är det omvända så kallas det ”misère play”). Beroende på reglerna så kan man få ta en hel rad, en ände av en rad eller mittpartiet av en rad. Ett kompakt sätt att beskriva reglerna ges genom så kallade oktalkoder (tal i bas åtta). Siffran på plats n avgör vilka drag som är tillåtna om man tar bort minst n stenar från raden.

En nolla betyder att man inte får ta n stenar från någon rad.

En etta betyder att man får ta n stenar om man då tar hela raden.

En tvåa betyder att man får ta n stenar om man tar från ena änden på raden.

En fyra betyder att man får ta n stenar från radens mitt.

Genom att addera talen som hör till de regler som gäller för n stenar så får man ett tal mellan noll och sju som beskriver när man får ta n stenar från en rad. [1][3]

Exempel: Om man har fyra högar med storlekarna 1, 2, 3 och 4 och oktalkoden .135 så får man:

Ta den enda stenen från högen med en sten
Ta alla stenarna från högen med två stenar
Ta två eller tre stenar från högen med tre stenar
Ta två stenar från högen med fyra stenar

Exempel: Oktalkoden .123 betyder att man får ta en sten endast om det är den enda stenen i raden, två stenar om man inte tar hela högen och börjar vid radens kant och tre stenar om man börjar i ena kanten och tar antingen en del eller hela raden.

Exempel: Oktalkoden .33333... betyder att man får ta hur många stenar man vill från en rad, men minst en sten och man får inte dela upp raden med sitt drag. Detta spel kallas nim och är mycket viktigt.

1.2 Sprague–Grundys sats

Sprague–Grundys sats säger att varje uppställning av ett oktalspel är ekvivalent med en uppställning av nim. Dessutom ger det oss en metod att beräkna denna. [1]

1.2.1 Mexregeln

Mex av en mängd av tal $\{n_{1,}n_{2,}n_{3,}...,n_k\}$ är det minsta naturliga tal som inte ingår i denna mängd. Detta skrivs som $mex(n_1,\ n_2,\ n_3...,\ n_k)$.

Exempel: $mex(0, 2, 3, 5) = 1$

Exempel: $mex(1, 5, 7) = 0$

1.2.2 Nimvärden

För en hög i ett spel som genom ett drag kan tas till högar med nimvärdena $n_{0,}n_1, n_2, n_3, ..., n_k$ så är $mex(n_0, n_1, n_2, n_3, ..., n_k)$ antalet stenar i nimhögen uppställningen motsvarar, detta kallas nimvärdet för den högen i det spelet. För nim finns en vinnande strategi för alla uppställningar och med hjälp av detta kan vi ta fram den vinnande strategin för vår uppställning genom nimvärdena. Nimvärden beräknas alltså rekursivt.[1][2][3][4]

Exempel: Högen med sju stenar i spelet .133 kan gå till 5 och 4.

Högens storlek	0	1	2	3	4	5	6	7
Nimvärde	0	1	1	2	0	0	1	1

Alltså så får sju nimvärdet $mex(0,0) = 1$

Ofta så blir serien av nimvärden för olika högar i ett spel periodisk efter ett antal högar. Analys av ett oktalspel går ut på att finna denna period.

1.3 Vinande strategi för nim

Nim har en vinnande strategi utarbetad för sig, genom att omvandla andra spel till ekvivalenta nimspel och använda denna strategi så får man reda på en vinnande strategi i originalspelet (genom att modifiera högarna i orginalspelet så att man gör rätt drag i nimspelet).

Strategin går ut på att omvandla varje hög till ett binärtal.[1][2]

Exempel: En hög med 7 stenar omvandlas till 111_2.

Exempel: En hög med 12 stenar omvandlas till 1100_2.

Man ställer dessa på varandra och skriver under dem en etta om det var ett udda antal ettor i kolumnen och en nolla om det var ett jämnt antal ettor.

Exempel: Ett spel med en hög med 7 stenar och en hög med 12 stenar blir:

$$\begin{array}{cccccc} 7 & = & 0 & 1 & 1 & 1_2 \\ 12 & = & 1 & 1 & 0 & 0_2 \\ \hline & & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

När alla högar har noll stenar, vilket innebär att alla binärtalen är noll och att "summan" då är noll, så har man just vunnit. Om man gör ett drag då summan är noll så kommer den vara icke-noll efter draget, är summan icke-noll så finns det alltid minst ett drag som gör summan till noll. Den vinnande strategin går alltså ut på att alltid lämna summan noll.

Exempel: Spelare ett har en vinnande strategi i spelet med en hög med 7 stenar och en hög med 12 stenar eftersom summan inte är noll från start. T.ex. kan han ta 5 stenar från högen med 12 stenar och vi får då:

$$\begin{array}{cccccc} 7 & = & 0 & 1 & 1 & 1_2 \\ 7 & = & 0 & 1 & 1 & 1_2 \\ \hline & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Vad än spelare två nu gör i den ena högen kan spelare ett härma i den andra högen. På så sätt är spelare ett garanterad att kunna göra ett drag, och kommer därmed vara den som gör sista draget.

2 Genomförande

2.1 Inledning

Vi har studerat oktalspel med oktalkod som börjar med ett antal ettor och åtföljs av ett antal treor. Dessa kommer vi benämna som .1-3-spel. För att lättare kunna ta fram perioderna utan att vi måste beräkna dem själva varje gång och få hjälp med att hitta perioden, skrev vi ett program som gjorde detta åt oss. Programmet beräknar nimvärden och hittar perioden för .1-3-spel, vilkas oktalkod vi skriver in (programmet hittas i del 3). Med hjälp av detta har vi funnit metoder för att beräkna .1-3-spels perioder utan att beräkna nimvärdena. Spelet .13 har perioden 0110 och denna används för att ta fram alla andra.

2.2 Resultat

2.2.1 Sats I

Om man lägger till en etta i oktalkoden för ett .1-3-spel med endast en trea så ändras perioden så att man lägger till en etta bredvid de andra ettorna i perioden och en nolla sist i perioden.

Explicit så betyder det att om koden har totalt n siffror varav den sista är 3 och de andra 1 så är den första siffran i perioden en nolla, följd av n ettor och sist $n - 1$ nollor.

Bevis

1. Perioden kan endast bestå av ettor och nollor. För att det ska finnas med en tvåa eller högre så måste man någon gång kunna gå till både en hög med värde ett och en hög med värde noll, men då man i 1-3-spel med endast en trea alltid bara kan gå till en hög så måste perioden innehålla endast ettor och nollor.

2. Perioden måste börja med en nolla då nimvärdet av en hög med noll stenar är noll.

3. Om koden innehåller totalt n siffror så måste de följande n talen vara ettor. Detta eftersom i högar med upp till n stenar måste man ta hela högen.

4. Sedan följer $n - 1$ nollor. Dessa är då högen är mellan$n + 1$och $2n$ stenar stor och vi tillåts då ta endast n stenar. Vi kommer då gå till högar med storlek mellan 1 och n vilka alla har nimvärde ett, så att nimvärdet blir noll.

5. Nu kommer trean låta oss gå tillbaka till högar med nimvärde noll och nimvärdet blir då ett tills högarna har storlek $3n$. Detta upprepas och perioden blir $2n$ lång.

Exempel

Oktalkod	n	Period
.13	2	0110
.113	3	011100
.1113	4	01111000
.11113	5	0111110000
.111113	6	011111100000

2.2.2 Sats II

Antag att det högsta nimvärdet i en period är n och till perioden hör en oktalkod med k antal ettor, följt av m antal treor. Då kan man ta fram perioden av nimvärden, genom att följa detta. Om vi ökar antalet treor i oktalkoden (vi har nu $m + 1$ treor) kommer nimvärdesperioden antingen

- Om vi inte har $k+1$ antal av n i perioden, kommer perioden att lägga till n, efter de andra n i perioden.
- Om vi har $k+1$ antal av n i perioden, kommer perioden att lägga till $n+1$ efter följden av n i perioden.

Exempel

Oktalkod	n	k	m	Period
.113	1	2	1	011100
.1133	2	2	2	0111200
.11333	2	2	3	01112200
.1113333	2	3	4	01111222000
.13333	3	1	4	0112230
.33333	5	0	5	012345

Bevis Anledningen till att vi börjar få de sista nollorna är att vi inte längre kan gå tillbaks till en hög med nimvärde noll. Om vi lägger till en trea till så kan vi gå längre tillbaks och kommer alltså få ett nollskilt tal. Om vi inte har $k + 1$ av det högsta kommer ingen av treorna peka på en hög med det högsta nimvärdet och därmed får vi ett till likadant tal. Om vi har $k + 1$ så kommer vi kunna gå till en hög med det högsta talet och därmed kommer vi få ett tal som är ett högre. Vi kommer också få en extra nolla i slutet eftersom det nya talet gör att det tar en gång längre innan vi kan gå till en hög med nimvärde noll igen.

3 Program

Programmet använder en algoritm kallad "haren och sköldpaddan" som bygger på två pekare där den ena rör sig dubbelt så snabbt som den andra. När de täcker två lika intervall så vet man att det är en multipel av periodlängden mellan dem. (För den som vill ha mer information om "haren och sköldpaddan" så kan det vara bra att veta att det på engelska kallas "Floyd's cycle-finding algorithm". Vi har själva utökat den för att klara av listor där nästa element beror på flera av de föregående.) Genom att använda den rekursiva definitionen av nimvärden beräknar programmet nimvärdet för olika högar. För att få beräkningarna att gå snabbare så sparas deras resultat så att nimvärdet för en hög aldrig behöver beräknas mer än en gång, vilket snabbar upp beräkningen betydligt. [5]

Källkoden till programmet finns i en bifogad fil (som kan öppnas med ett program som kan öppna komprimerade zip-filer, t.ex. 7z) och kan hämtas på http://ethna.se/oktalspel/. För att köra programmet så behöver man kompilera filerna med javac (version 1.6 eller senare). Själva körningen görs sedan genom att köra klassen Nimvarden. När programmet frågar efter oktalkoden så bör den skrivas in med en inledande punkt men utan nolla (t.ex. ".133").

Exempel på körning (från terminal, förutsatt att filerna ligger i samma mapp):

javac Nimvarden.java

java Nimvarden

.11133

Varje rad i utdatan representerar ett tal i perioden. Den första siffran är högens storlek där den hittades (kan användas för att se att resultatet är rimligt), den andra siffran är nimvärdet. Den näst sista raden är en siffra som är hur många steg algoritmen krävde innan den hittade perioden (detta kan också användas för att upptäcka felaktiga värden). Sista raden innehåller endast texten End. som visar att programmet avslutades korrekt. Utdatan från sessionen ovan är t.ex.:

S:9, N:0
S:10, N:1
S:11, N:1
S:12, N:1
S:13, N:1
S:14, N:2
S:15, N:0
S:16, N:0
S:17, N:0
8
End.

Detta bör tolkas som att perioden är 011112000.

4 Begränsningar

Vi valde att jobba med spel som endast började med ett antal ettor och följdes åt av ett antal treor därför att det var det enklaste fallet som inte var trivialt. Så fort vi lägger till att koden får innehålla fyra kommer antalet högar ändras på ett annat sätt, och det blir genast mer komplicerat. Även om man ska byta plats på ettor och treor (ex .13133) kommer perioden att ändras mycket, vi har inte försökt att studera detta eftersom vi ansåg att vi ville hålla en röd tråd och man kan arbeta vidare på detta i ett annat projekt. Då måste man ta hänsyn till var man lägger till treor/ettor, vi har endast lagt till dem i slutet, och vi måste alltså utforma ett nytt sätt att arbeta på, detta skulle avvika från den röda tråden. Vårt program klarar inte av att analysera spel med andra siffror än 0, 1 och 3 i sin oktalkod. Nollor i koden gör att spelet kan ta slut innan alla stenar är borta ur en/flera högar, detta blir en annan sorts teori för att hitta perioden, om den ens finns. Det är inte bevisat att alla koder har en periodisk följd av nimvärden, men man har ej heller hittat motbevis, men för "lätta" spel som de vi har behandlat är de periodiska. Däremot är det en öppen fråga om alla har en period av sina nimvärden, speciellt de med oändliga oktalkoder.

Misère-spel har vi inte behandlat därför att det är en helt annan teori för att hitta den vinnande strategin, och nimvärdena har inte samma relevans för lösningen. Den mesta forskningen inom oktalspel handlar om misére spel, eftersom de är den svåraste och mest outforskade delen i denna klass av spel. Misère-spel är långt bortom vår nivå, speciellt eftersom vi inte visste vad oktalspel var när vi började, utan utvecklade våra kunskaper under arbetets gång. Om vi skulle börja nu skulle vi antingen kunna försöka arbeta med misére spel, eller arbeta vidare och utveckla det vi gjort, ta reda på vad som händer när nollor läggs till och när talen i koden inte står i en viss ordning.

5 Källhänvisning

1. Winning Ways For Your Mathematical Plays
   Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy
   Academic Press 2001

2. Misère Games and Misère Quotients
   Aaron N. Siegel
   http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0612/0612616v2.pdf
   (senast ändrad 02/02/2008)

3. http://en.wikipedia.org/wiki/Octal_game
   (senast ändrad 19/07/2011)

4. http://en.wikipedia.org/wiki/Sprague%E2%80%93Grundy_theorem
   (senast ändrad 06/01/2012)

5. http://en.wikipedia.org/wiki/Cycle_detection#Tortoise_and_hare
   (senast ändrad 14/02/2012)