S 型曲线算法设计

设计从空间中一个点到另一个点的运动方法很多种, 常见的有三阶多项式、五阶多项式、梯形曲线、三阶 S 型曲线、四阶 S 型曲线等等。这里我们探讨三阶 S 型曲线, 这里的 S 表示的速度曲线是 S 型, 后面文档所述 S 型均为三阶 S 型。

一般我们知道 S 型曲线分为七个阶段, 加加速、匀加速、加减速、匀速、减减速、匀减速、减加速。对于实际工程应用来说, 可能以上阶段中有部分阶段由于位移或者速度或者加速度的原因, 我们会对这些参数重新修正, 将其中的某些段剔除掉, 保留一些基本的阶段。而且我们采用对速度曲线对称性处理, 这样的话, 运动阶段至少有加加速、加减速、减减速、减加速这四个阶段。除了以上四个阶段（后续文档所述四段均指以上四段）之外, 我们需要添加匀速段、匀加速段、匀减速段, 而匀减速和匀加速段是成对出现的, 所以, 我们可能出现的运动可能会有四种可能, 除了前面所提到的四个阶段之外, 可能会有, 无匀速段无匀加速匀减速段、有匀速段无匀加速匀减速段、无匀速段有匀加速匀减速段、有匀速段有匀加速匀减速段这些阶段。

实际中的计算与策略如下（求各个阶段时间, 根据对称性, 加加速时间t_j、匀加速时间t_a、加减速时间t_j、匀速时间t_v、减减速时间t_j、匀减速时间t_a、减加速时间t_j）:

一、根据加速度a和j值, 可求得j时间t_j, 因为j的值是定值, 所以求得$jerk$时间为$t_j = a/j$, a可能达不到最大值, 这里假设能达到最大值的时候去求, 后面会根据实际的参数计算调整这个t_j;

二、求$jerk$时间t_j, 匀加速时间t_a, 匀速时间t_v。四段（加加速、加减速、减减速、减加速）的最小位移$X_{tab} = 2j \cdot t_j^3$和最大速度$V_{tab} = j \cdot t_j^2$, 下面介绍求法, 假如速度曲线只有四段, 速度和加速度曲线如下图 1.0 所示:

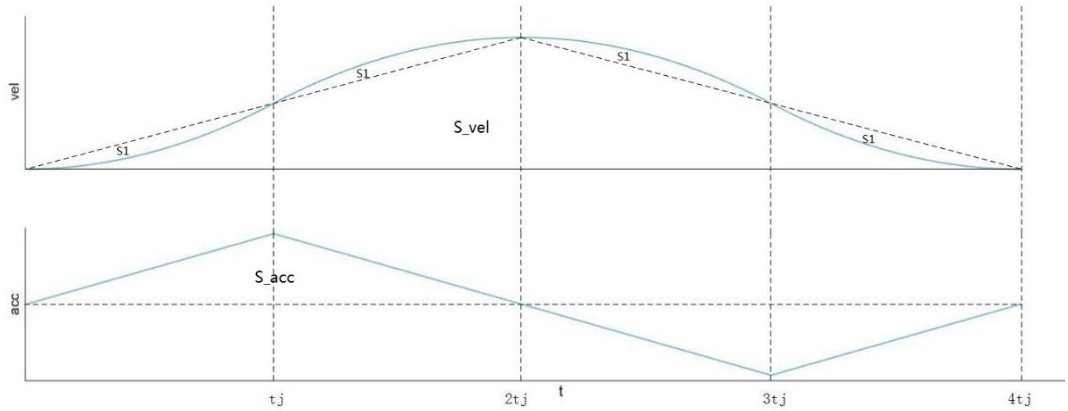

图 1.0 四段运动速度、加速度曲线

从图中可以看到, 到达最大速度时候为时间是$2 \cdot t_j$时, 值的大小是加速度图中$2 \cdot t_j$之前的三角面积S_acc, $S\_acc = V_{tab} = j \cdot t_j^2$, acc的最大值为$j \cdot t_j$, 最小位移X_{tab}为S_vel, 即速度曲线的在$4t_j$时间内的面积, 因为速度的对称性, $S1$的所有面积都相同, 所以只用求三角面积即可。得到$X_{tab} = 2j \cdot t_j^3$。

三、根据以上求得的V_{tab}和X_{tab}求得值跟用户所设定的V和X比较, 得出不同结果;

1、当用户设定速度V相对比较大, 位移X设定的比较小的时候。也就是$V_{tab} < \mathrm{V}, X_{tab} > X$时, 说明用户设定速度V超出了$2t_j$时间段所能到达的最大速度$V_{tab}$, 但是位移$X$过小, 因此七段里面只有四段。加速度曲线如图 1.0 所示。根据上图和公式$X = 2j \cdot t_j^3$, 求得新的时间$t_j = \sqrt[3]{X/(2 \cdot j)}$, $t_a = 0$, $t_v = 0$。

2、当用户设定的V比较小，加速度a还未达到最大值，速度已经达到了用户设定的速度V，而位移X相对比较长，也就是$V_{tab} > \mathrm{V}, X_{tab} < X$，这时，加入匀速段。根据公式$V = j \cdot t_j^2$求出$t_j = \sqrt[2]{V/j}$。现求出四段的总位移$X_4 = 2j \cdot t_j^3$，那么只剩下匀速段位移$X_{tab} - X_4$。匀速段时间$t_v = (X_{tab} - X_4)/V$。匀加速时间$t_a = 0$。曲线如下图 1.1 所示：

图 1.1 有匀速段的速度、加速度曲线

3、当用户设定的速度V和X都比V_{tab}、X_{tab}小时，即$V_{tab} > V, X_{tab} > X$，这时候，可以理解为速度曲线应该被以最大加速度a和$jerk$算出来的曲线包裹在内，如下图 1.2 所示：

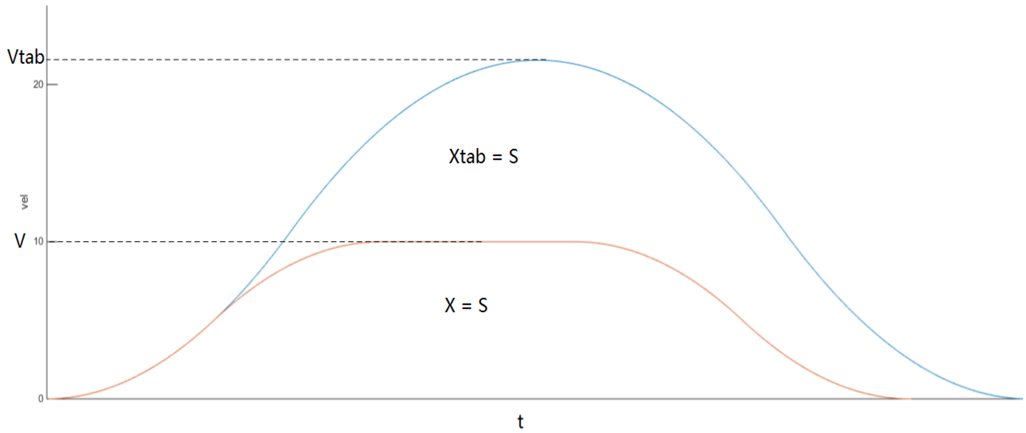

图 1.2 速度曲线包裹

由于位移X和速度V的原因，会出现有匀速段和无匀速段两种情况，因此我们可以分别求出以位移X为约束的情况下，加加速段时间$t_{jx} = \sqrt[3]{X/(2 \cdot j)}$和以速度$V$为约束下的加加速段时间$t_{jv} = \sqrt[2]{V/j}$

i、当$t_{jx} > t_{jv}$时，说明到达设定位移X时，速度已经达到V，所以应当加入匀速段，如图 1.2 所示，此时$t_j = t_{jv}$ 、$t_v = (X_{tab} - X_4)/V$、$t_a = 0$；

ii、当$t_{jx} < t_{jv}$时，说明到达设定位移X时，速度仍满足要求，因此$t_j = t_{jv}$ 、$t_v = 0$、$t_a = 0$，如下图 1.3 所示

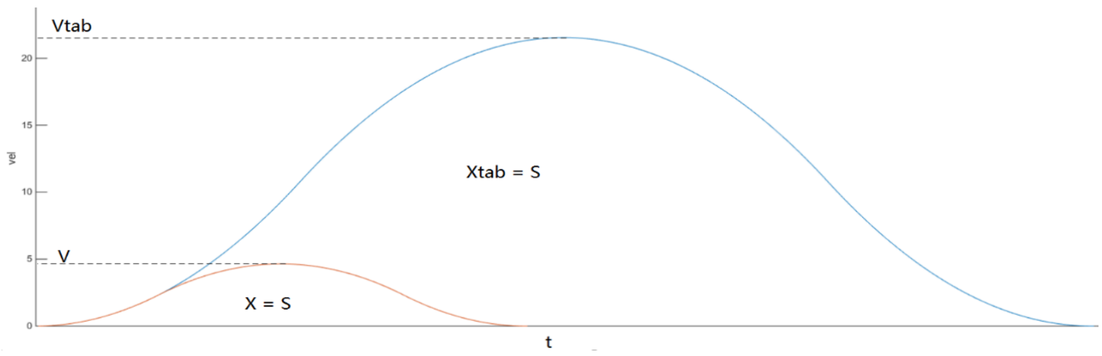

图 1.3 $t_{jx} < t_{jv}$时速度曲线

4、当$V_{tab} < V, X_{\text{tab}} < X$时，说明速度跟位移都没有超出设定值最大值$V$、$X$，这时候无法判断出轨迹应该加入匀速段还是加入匀加速匀减速段，这时可以尝试加入匀加速匀减速段。这时候，加速度必定能达到最大值，所以$t_j = a/j$，再以V为约束，根据加速度曲线图 1.4 可以得出加速度图中的面积$S = V = t_j^2 \cdot j + t_{av} \cdot t_j \cdot j$, 即可求出$t_{av} = (V - j \cdot t_j^2)/(j \cdot t_j)$, t_{av}表示以速度为约束下的加速度时间；若以X为约束，根据图 1.4 中速度曲线得出面积$S = X = (2t_j + t_{ax}) \cdot (t_j + t_{ax}) \cdot t_j \cdot j$, 可求得以位移$X$为约束下的$t_{ax} = -1.5t_j + 0.5\sqrt{t_j^2 + 4X/(j \cdot t_j)}$, 负根舍去。

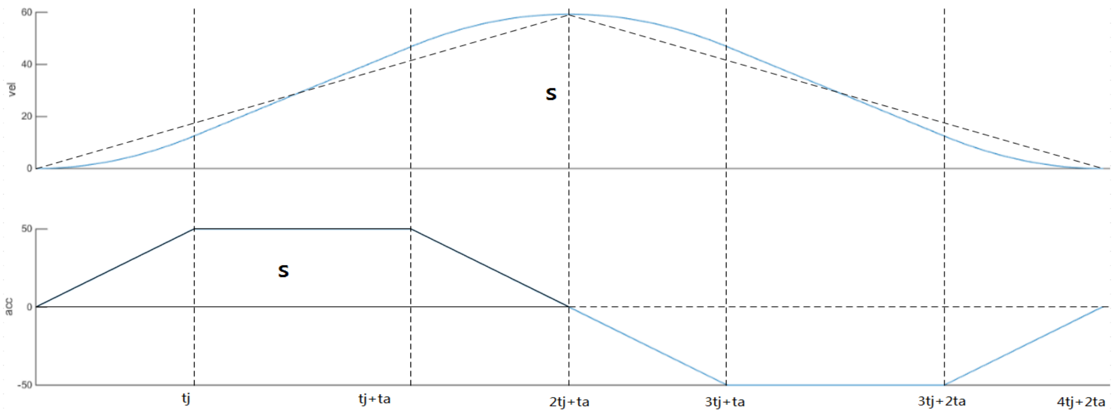

图 1.4 $V_{tab} < V, X_{\text{tab}} < X$条件下加入加速度段时速度加速度曲线

i、当$t_{av} > t_{ax}$时，说明加了加速度段之后，位移X已经达到，速度未达到设定的最大值V，因此无匀速段，只有匀加速匀减速段，$t_a = t_{ax}$，$t_v = 0$。曲线如上图 1.4 所示；

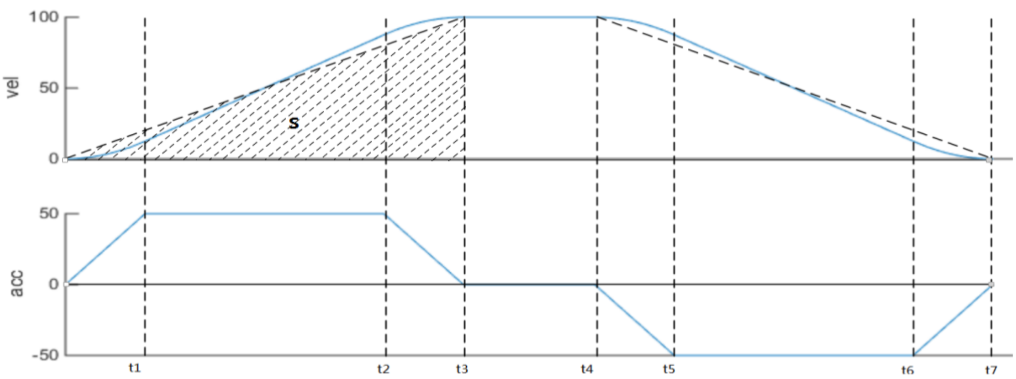

图 1.5 $t_{av} < t_{ax}$条件下加入匀速段时速度加速度曲线

ii、当$t_{av} < t_{ax}$时，应加入匀速段，那么$t_a = t_{av}$，根据位移X计算匀速段时间t_v，如上图

1.5 所示，阴影部分面积为S，那么$t_v = (X - 2S)/V$，$S = (2t_j + t_a)\cdot(t_j + t_a)\cdot t_j \cdot j/2$（根据加速度面积公式以及速度曲线面积公式计算），或者$S = t_3 \cdot V/2$，图 1.5 中，$t_1 = t_j$、$t_2 = t_1 + t_a$、$t_3 = t_2 + t_j$、$t_4 = t_3 + t_v$、$t_5 = t_4 + t_j$、$t_6 = t_5 + t_a$、$t_7 = t_6 + t_j$。

至此，当前各阶段时间参数计算完成。

四、根据上面所计算出的时间参数生成曲线轨迹，一般来说，生成轨迹有两种方法，离散或者解析，不推荐离散法，下面分别介绍。

1、离散法，这种方法通过积分的形式来生成加速度、速度、位移曲线，这种方法，相对简单，只需要不断积分即可得到想要的曲线，但是由于时间上的离散，导致加速度、速度、位移有误差。计算的时候求得上面各个阶段$t_1 \sim t_7$时间后，需要根据离散之后的时间以位移X约束反算j，这样才可以保证位移上无偏差，而加速度和速度有可能达不到理论上的值。

求法：根据上面求得的t_j，t_a，t_v，以及取相应的时间间隔T_s，求各个阶段点数$n_j = ceil(t_j/T_s)$、$n_a = ceil(t_a/T_s)$、$n_v = ceil(t_v/T_s)$，$ceil()$函数返回大于或者等于表达式的最小整数。然后求离散后时间$t'_j = n_j \cdot T_s$、$t'_a = n_a \cdot T_s$、$t'_v = n_v \cdot T_s$、然后以新的时间和位移X约束反算j'。对于以上不同情况下V和X以及V_{tab}和X_{tab}，j'的计算也不相同。

i、当$V_{tab} < \mathrm{V}, X_{tab} > X$时，求得$j' = X/(2\cdot t_j'^3)$，参照前面所述公式;

ii、当$V_{tab} > \mathrm{V}, X_{tab} < X$时，求得$j' = X/(t'_v + 2t'_j)/t_j'^2$;

iii、当$V_{tab} > V, X_{tab} > X$时，求得$\begin{cases} t_{jx} > t_{jv} & j' = X/(t'_v + 2t'_j)/t_j'^2 \\ t_{jx} < t_{jv} & j' = X/(2\cdot t_j'^3) \end{cases}$;

iv、当$V_{tab} < V, X_{\mathrm{tab}} < X$时，求得$\begin{cases} t_{av} > t_{ax} & j' = 4X/(4(t'_a + 1.5t'_j)^2 - t_j'^2)/t'_j \\ t_{av} < t_{ax} & j' = X/(2t_j'^3 + (t'_v + 3t'_a)\cdot t_j'^2 + (t'_a \cdot t'_v + t_a'^2)\cdot t'_j) \end{cases}$;

当计算新的j'之后，同时可求得各个阶段点的个数，$n_1 = n_j$、$n_2 = n_1 + n_a$、$n_3 = n_2 + n_j$、$n_4 = n_3 + n_v$、$n_5 = n_4 + n_j$、$n_6 = n_5 + n_a$、$n_7 = n_6 + n_j$。

积分生成轨迹，$j'' = \begin{cases} j' & 0 < n \le n_1 \\ 0 & n_1 < n \le n_2 \\ -j' & n_2 < n \le n_3 \\ 0 & n_3 < n \le n_4 \\ -j' & n_4 < n \le n_5 \\ 0 & n_5 < n \le n_6 \\ j' & n_6 < n \le n_7 \end{cases}$；可基于上个周期求出当前第 i 个周期的值$a''(i) = a''(i-1) + T_s \cdot j''$、$V''(i) = V''(i-1) + a''(i)\cdot T_s$、$X''(i) = X''(i-1) + V''(i)\cdot T_s$。$j''$、$a''$、$V''$、$X''$表示每个周期的实际值，初始值均为 0。

2、解析法：这种方法相对离散法来说，在数值误差上很小，但生成曲线的表达式相对复杂。根据上面介绍的方法求得t_j、t_a、t_v得到七段时间的时间间隔点$t_1 = t_j$、$t_2 = t_1 + t_a$、$t_3 = t_2 + t_j$、$t_4 = t_3 + t_v$、$t_5 = t_4 + t_j$、$t_6 = t_5 + t_a$、$t_7 = t_6 + t_j$。求得各阶段a''、V''、X''。

加速度$a''(t) = \begin{cases} j\cdot t & 0 < t \le t_1 \\ a_m & t_1 < t \le t_2 \\ a_m - j\cdot(t - t_2) & t_2 < t \le t_3 \\ 0 & t_3 < t \le t_4 \\ -j\cdot(t - t_4) & t_4 < t \le t_5 \\ -a_m & t_5 < t \le t_6 \\ -a_m + j\cdot(t - t_6) & t_6 < t \le t_7 \end{cases}$；$(a_m = j\cdot t_1)$；

$$速度V''(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot j\cdot t^2 & 0<t\le t_1\\ V_1''+a_m\cdot(t-t_1) & t_1<t\le t_2\\ V_2''+a_m\cdot(t-t_2)-\frac{1}{2}\cdot j\cdot(t-t_2)^2 & t_2<t\le t_3\\ V_3'' & t_3<t\le t_4\\ V_4''-\frac{1}{2}\cdot j\cdot(t-t_4)^2 & t_4<t\le t_5\\ V_5''-a_m\cdot(t-t_5) & t_5<t\le t_6\\ V_6''-a_m\cdot(t-t_6)+\frac{1}{2}\cdot j\cdot(t-t_6)^2 & t_6<t\le t_7\end{cases};\begin{cases}V_1''=\frac{1}{2}\cdot j\cdot t_1^2\\ V_2''=V_1''+a_m\cdot(t_2-t_1)\\ V_3''=V_2''+a_m\cdot(t_3-t_2)-\\ \frac{1}{2}\cdot j\cdot(t_3-t_2)^2\\ V_4''=V_3''\\ V_5''=V_4''-\frac{1}{2}\cdot j\cdot(t_5-t_4)^2\\ V_6''=V_5''-a_m\cdot(t_6-t_5)\end{cases}$$

$$位移X''(t)=\begin{cases}\frac{1}{6}\cdot j\cdot t^3 & 0<t\le t_1\\ X_1''+V_1''\cdot(t-t_1)+\frac{1}{2}\cdot a_m\cdot(t-t_1)^2 & t_1<t\le t_2\\ X_2''+V_2''\cdot(t-t_2)+\frac{1}{2}\cdot a_m\cdot(t-t_2)^2-\frac{1}{6}\cdot j\cdot(t-t_2)^3 & t_2<t\le t_3\\ X_3''+V_3''\cdot(t-t_3) & t_3<t\le t_4\\ X_4''+V_4''\cdot(t-t_4)-\frac{1}{6}\cdot j\cdot(t-t_4)^3 & t_4<t\le t_5\\ X_5''+V_5''\cdot(t-t_5)-\frac{1}{2}\cdot a_m\cdot(t-t_5)^2 & t_5<t\le t_6\\ X_6''+V_6''\cdot(t-t_6)-\frac{1}{2}\cdot a_m\cdot(t-t_6)^2+\frac{1}{6}\cdot j\cdot(t-t_6)^3 & t_6<t\le t_7\end{cases};$$

$$\begin{cases}X_1''=\frac{1}{6}\cdot j\cdot t_1^3\\ X_2''=X_1''+V_1''\cdot(t_2-t_1)+\frac{1}{2}\cdot a_m\cdot(t_2-t_1)^2\\ X_3''=X_2''+V_2''\cdot(t_3-t_2)+\frac{1}{2}\cdot a_m\cdot(t_3-t_2)^2-\frac{1}{6}\cdot j\cdot(t_3-t_2)^3\\ X_4''=X_3''+V_3''\cdot(t_4-t_3)\\ X_5''=X_4''+V_4''\cdot(t_5-t_4)-\frac{1}{6}\cdot j\cdot(t_5-t_4)^3\\ X_6''=X_5''+V_5''\cdot(t_6-t_5)-\frac{1}{2}\cdot a_m\cdot(t_6-t_5)^2\end{cases}$$

；以上为解析法求得的结果；

至此，S 型曲线算法设计到此结束。

附各图所使用的设定参数

图	位移$X(mm)$	速度$V(mm/s)$	加速度(mm/s^2)	加加速度(mm/s^3)
图 1.0	20	100	50	100
图 1.1	100	20	50	100
图 1.2	20	100	50	100
	10	10	50	100
图 1.3	20	10	50	100
	2	10	50	100
图 1.4	100	100	50	100
图 1.5	500	100	50	100

By：Tiny-2018/12/11

非对称 S 型曲线算法

下面介绍一种另一种 S 型曲线，为非对称 S 型曲线，在上述所表达的曲线中，匀加速匀减速段是成对出现的，也就是说速度曲线是对称的，非对称 S 型曲线顾名思义，就是说匀加速段跟匀减速段并不是成对出现，它们的不对称是因为加速度跟减速度不相同所产生的。

设定值有 S、V、A、D、J，T1~T7 为各段时间间隔，时间间隔计算策略如下；

判断 V 是否能达到；

i、$V > A^2/J$，存在匀加速段：

$$\begin{cases} T_1 = T_3 = \dfrac{A}{J} \\ T_2 = \dfrac{V}{A} - T_1 \end{cases}$$

ii、$V \le A^2/J$，不存在匀加速段：

$$\begin{cases} T_1 = T_3 = \sqrt{V/J} \\ T_2 = 0 \end{cases}$$

iii、$V > D^2/J$，存在匀减速段：

$$\begin{cases} T_5 = T_7 = \dfrac{D}{J} \\ T_6 = \dfrac{V}{D} - T_1 \end{cases}$$

iv、$V \le D^2/J$，不存在匀减速段：

$$\begin{cases} T_5 = T_7 = \sqrt{V/J} \\ T_6 = 0 \end{cases}$$

那么可以求出加速段跟减速段的距离$S_a = J \cdot T_1 \cdot (T_1 + T_2) \cdot (2T_1 + T_2)/2$ ①，$S_d = J \cdot T_5 \cdot (T_5 + T_6) \cdot (2T_5 + T_6)/2$ ②；

一、$S_a + S_d \le S$，此时加入匀速段，同时求得$T_4 = (S - S_a - S_d)/V$，按前面计算公式求得T_1~T_7，规划到此结束；

二、$S_a + S_d > S$，此时无匀速段，是否有匀加、匀减速段，需进一步判断；

首先取加速度和减速度较小的那个来计算，因为实际过程中，由于加加速度相同，所以加速度、减速度较小的先达到。$A = min(A, D), D = max(A, D)$；如若设定值中$A > D$，那么只需将$T_1$~$T_3$与$T_5$~$T_7$调换即可；

求得$T_1 = T_3 = A/J$，$T_2 = 0.0$，$T_5 = T_7 = A/J$，$T_6 = 0.0$，如果以最小加速度A运动的距离都超过S，那么无匀加速、匀减速段；根据①式、②式求S_a'、S_d'；

i、$S_a' + S_d' > S$，那么无匀加、匀减速段；

$T_1 = \sqrt[3]{S/(2 \cdot J)}$；$T_3 = T_5 = T_7 = T_1$；$T_2 = T_4 = T_6 = 0.0$；规划到此结束。

ii、$S_a' + S_d' \ge S$，那么有匀加速段，是否有匀减速段需进一步判断；

假如可以达到D，计算各个时间段：

$T_1 = T_3 = A/J$；$T_5 = T_7 = D/J$；根据公式$V' = A \cdot (T_1 + T_2) = J \cdot T_5^2$，求出$T_2 = J \cdot \frac{T_5^2}{A} - T_1$，$T_4 = T_6 = 0.0$；

根据①式、②式求S_a''、S_d''；

(1)、$S_a'' + S_d'' \ge S$；无匀减速段，有匀加速段，重新计算T_1~T_7；

$\begin{cases} A\cdot(T_1+T_2)= \ J\cdot T_5^2= \ V'' \\ \frac{V''}{2}\cdot(2T_1+T_2)+V''\cdot T_5=S \end{cases}$公式化简得到一元四次方程$\frac{J^2}{2\cdot A}\cdot T_5^4+\mathrm{J}\cdot T_5^3+\frac{\mathrm{J}}{2}\cdot T_5^2-S=0$;解出得到T_5（后面会介绍解法），$T_2=J\cdot\frac{T_5^2}{A}-T_1$；$T_4=T_6=0.0$；$T_1=T_3=A/J$；$T_7=T_5$；规划结束。

(2)、$S_a''+S_d''<S$；有匀减速、匀加速段，重新计算$T_1\sim T_7$；

$\begin{cases} A\cdot(T_1+T_2)=D\cdot(T_5+T_6)= \ V''' \\ \frac{V'''}{2}\cdot(2T_1+T_2)+\frac{V'''}{2}\cdot(2T_5+T_6)=S \end{cases}$化简得二次方程$\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{D}\right)\cdot V'''^2+(T_1+T_5)\cdot V'''-2S=0$；求得$V'''$，同时可求得各个时间间隔$T_1\sim T_7$：$T_1=T_3=A/J$；$T_5=T_7=D/J$；$T_2=\frac{V'''}{\mathrm{A}}-T_1$；$T_6=\frac{V'''}{D}-T_5$；规划到此结束。

至此，各个时间间隔$T_1\sim T_7$计算结束，$t_1=T_1$、$t_2=t_1+T_2$、$t_3=t_2+T_3$、$t_4=t_3+T_4$、$t_5=t_4+T_5$、、、生成轨迹参照对称型解析法，需要注意的是有个别求法不相同了：

$$a''(t)=\begin{cases} j\cdot t & 0<t\le t_1 \\ a_m & t_1<t\le t_2 \\ a_m-j\cdot(t-t_2) & t_2<t\le t_3 \\ 0 & t_3<t\le t_4 \\ -j\cdot(t-t_4) & t_4<t\le t_5 \\ -d_m & t_5<t\le t_6 \\ -d_m+j\cdot(t-t_6) & t_6<t\le t_7 \end{cases}$$；$(a_m=j\cdot t_1)$ $(d_m=j\cdot T_7)$；

$$速度\begin{cases} V_1''=\frac{1}{2}\cdot j\cdot t_1^2 \\ V_2''=V_1''+a_m\cdot(t_2-t_1) \\ V_3''=V_2''+a_m\cdot(t_3-t_2)-\frac{1}{2}\cdot j\cdot(t_3-t_2)^2 \\ V_4''=V_3'' \\ V_5''=V_4''-\frac{1}{2}\cdot j\cdot(t_5-t_4)^2 \\ V_6''=V_5''-d_m\cdot(t_6-t_5) \end{cases}$$

$$位移\begin{cases} X_1''=\frac{1}{6}\cdot j\cdot t_1^3 \\ X_2''=X_1''+V_1''\cdot(t_2-t_1)+\frac{1}{2}\cdot a_m\cdot(t_2-t_1)^2 \\ X_3''=X_2''+V_2''\cdot(t_3-t_2)+\frac{1}{2}\cdot a_m\cdot(t_3-t_2)^2-\frac{1}{6}\cdot j\cdot(t_3-t_2)^3 \\ X_4''=X_3''+V_3''\cdot(t_4-t_3) \\ X_5''=X_4''+V_4''\cdot(t_5-t_4)-\frac{1}{6}\cdot j\cdot(t_5-t_4)^3 \\ X_6''=X_5''+V_5''\cdot(t_6-t_5)-\frac{1}{2}\cdot d_m\cdot(t_6-t_5)^2 \end{cases}$$

附：解四次方程，https://wenku.baidu.com/view/3b45750216fc700abb68fc85.html

By：Tiny-2019/05/07

基于正弦曲线的 S 型曲线算法

下面再提出一种基于正弦曲线的 S 型曲线算法

设定值有 S、V、A、D、J，T1~T7 为各段时间间隔，时间间隔计算策略如下；

判断 V 是否能达到；

i、$V > A^2 \cdot \frac{\frac{\pi}{J}}{2}$，存在匀加速段：

$$\begin{cases} T_1 = T_3 = \dfrac{\pi \cdot A}{2 \cdot J} \\ T_2 = (V - A \cdot \dfrac{\pi^2}{2 \cdot J})/V \end{cases}$$

ii、$V \le A^2 \cdot \frac{\frac{\pi}{J}}{2}$，不存在匀加速段：

$$\begin{cases} T_1 = T_3 = \sqrt{v \cdot \dfrac{\pi}{2 \cdot J}} \\ T_2 = 0 \end{cases}$$

iii、$V > D^2/J$，存在匀减速段：

$$\begin{cases} T_5 = T_7 = \dfrac{\pi \cdot D}{2 \cdot J} \\ T_6 = (V - D \cdot \dfrac{\pi^2}{2 \cdot J})/V \end{cases}$$

iv、$V \le D^2/J$，不存在匀减速段：

$$\begin{cases} T_5 = T_7 = \sqrt{v \cdot \dfrac{\pi}{2 \cdot J}} \\ T_6 = 0 \end{cases}$$

那么可以求出加速段跟减速段的距离S_a①，S_d ②；

一、$S_a + S_d \le S$，此时加入匀速段，同时求得$T_4 = (S - S_a - S_d)/V$，按前面计算公式求得T_1~T_7，规划到此结束；

二、$S_a + S_d > S$，此时无匀速段，是否有匀加、匀减速段，需进一步判断；

首先取加速度和减速度较小的那个来计算，因为实际过程中，由于加加速度相同，所以加速度、减速度较小的先达到。$A = min(A, D)$，$D = max(A, D)$；如若设定值中$A > D$，那么只需将T_1~T_3与T_5~T_7调换即可；

求得$T_1 = T_3 = \frac{\pi \cdot A}{2 \cdot J}$，$T_2 = 0$，$T_5 = T_7 = \frac{\pi \cdot D}{2 \cdot J}$，$T_6 = 0$，如果以最小加速度$A$运动的距离都超过$S$，那么无匀加速、匀减速段；根据①式、②式求$S_a'$、$S_d'$；

i、$S_a' + S_d' > S$，那么无匀加、匀减速段；

$T_1 = \sqrt[3]{(\pi * S)/4/J}$；$T_3 = T_5 = T_7 = T_1$；$T_2 = T_4 = T_6 = 0$；规划到此结束。

ii、$S_a' + S_d' \ge S$，那么有匀加速段，是否有匀减速段需进一步判断；

假如可以达到D，计算各个时间段：

$T_1 = T_3 = \frac{\pi \cdot A}{2 \cdot J}$；$T_5 = T_7 = \frac{\pi \cdot D}{2 \cdot J}$；根据公式$V' = A \cdot (T_1 + T_2) = D \cdot T_5$，求出$T_2 = D \cdot$

$T_5/A - T_1$，$T_4 = T_6 = 0$；

根据①式、②式求S''_a、S''_d；

⑴、$S''_a + S''_d \geq S$；无匀减速段，有匀加速段，重新计算$T_1 \sim T_7$；

$\begin{cases} A \cdot (T_1 + T_2) = \ 2 \cdot J \cdot T_5^2/\pi = \ V'' \\ \frac{V''}{2} \cdot (2T_1 + T_2) + V'' \cdot T_5 = S \end{cases}$ 公式化简得到一元四次方程$a \cdot T_5^4 + b \cdot T_5^3 + c \cdot T_5^2 - e = 0$;解出得到$T_5, V'' = 2 * T_5 * J * T_5/\pi, T_2 = V''/A - T_1; T_6 = 0; T_7 = T_5; T_4 = 0; T_3 = T_1$；规划结束。

⑵、$S''_a + S''_d < S$；有匀减速、匀加速段，重新计算$T_1 \sim T_7$；

$\begin{cases} A \cdot (T_1 + T_2) = D \cdot (T_5 + T_6) = \ V''' \\ \frac{V'''}{2} \cdot (2T_1 + T_2) + \frac{V'''}{2} \cdot (2T_5 + T_6) = S \end{cases}$化简得二次方程$\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{D}\right) \cdot V'''^2 + (T_1 + T_5) \cdot V''' - 2S = 0$；求得$V'''$，同时可求得各个时间间隔$T_1 \sim T_7$：$T_1 = T_3 = \frac{\pi \cdot A}{2 \cdot J}$；$T_5 = T_7 = \frac{\pi \cdot D}{2 \cdot J}$；$T_2 = \frac{V'''}{\mathrm{A}} - T_1$；$T_6 = \frac{V'''}{D} - T_5$；规划到此结束。

至此，各个时间间隔$T_1 \sim T_7$计算结束，$t_1 = T_1$、$t_2 = t_1 + T_2$、$t_3 = t_2 + T_3$、$t_4 = t_3 + T_4$、$t_5 = t_4 + T_5$。。。

生成轨迹参见 matlab 代码；

By：Tiny-2019/06/19