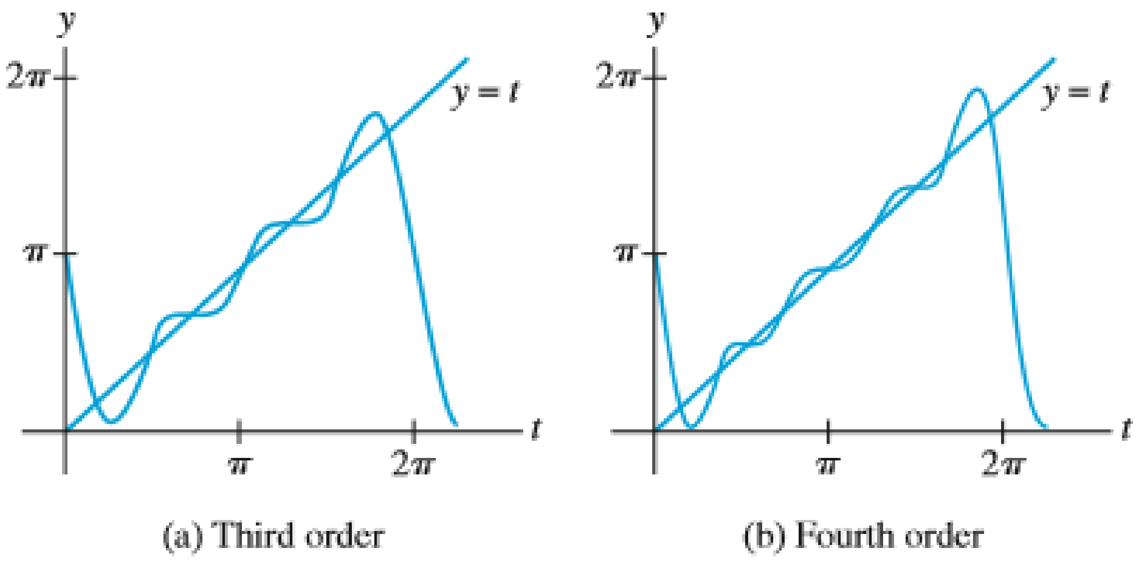
Lineaire algebra 2

Orthogonaliteit en Kleinste kwadraten

H6-deel 3B

Inwendige product ruimte

6.7



Fourier approximations of the function $f(t) = t$.

What to expect

- Introductie: waarom H6
- Deel 1:
  - Nodige begrippen als lengte, afstand
  - orthogonale verzameling, orthogonale projectie
- Deel 2:
  - Orthogonale projectie in $\mathbb{R}^n$
  - Gram-Schmidt Proces
  - QR factorisatie
- Deel 3:
  - Least square problems – kleinste kwadraten problemen
  - Inwendige product ruimten

Introductie

Eerder kennis gemaakt met geometrische concepten in ruimte $\mathbb{R}^n$: lengte, afstand, orthogonale projectie (als beste benadering) etc.

Deze konden wij berekenen of bepalen o.b.v. eigenschappen van het inwendig product (zie ook theorema 1 in 6.1 en de eerste drie definities)

Voor andere vectorruimten V (van bv polynomen) worden de concepten veralgemeniseerd door een inwendig product te definiëren voor V. We spreken dan van **inwendig productruimte**.

Inwendig productruimte (1)

Dit is een <u>vectorruimte</u> ***met*** het inwendig product als additionele structuur:

Aan elk paar van vectoren $\bar{u}$ en $\bar{v}$ in de ruimte wordt een scalaire grootheid (bekend als het inwendig product, $< \bar{u}, \bar{v} >$) *geassocieerd*.

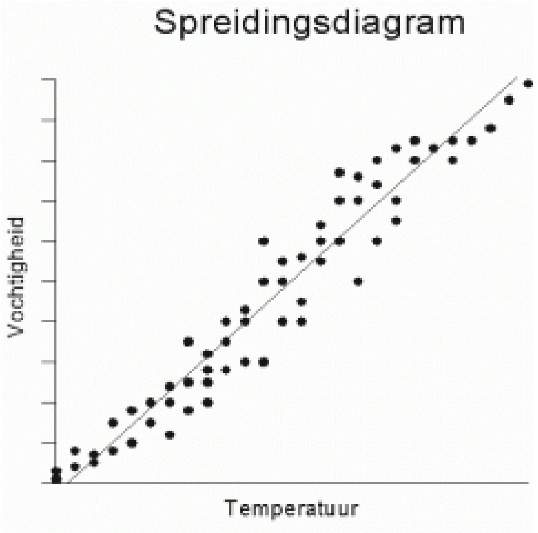
Een inwendig product gedefinieerd voor een vectorruimte V voldoet aan de volgende axioma's. Voor alle $\bar{u}$, $\bar{v}$ en $\bar{w}$ in V en alle constanten c:

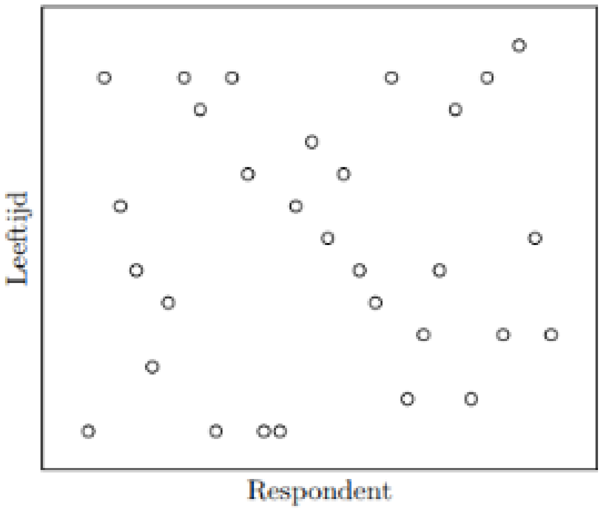
1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$
2. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
3. $\langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
4. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ and $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ if and only if $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

Inwendig productruimte (2)

De intuïtieve meetkundige begrippen als lengte van een vector, afstand, hoek tussen twee vectoren etc. en ook orthogonaliteit, projectie etc. worden met het inwendig product op <u>meer generale en toch formele wijze ingevoerd</u> in een vectorruimte V bv in de vectorruimte van polynomen graad n, $\mathbb{P}_n$

Vb. In de statistiek wordt met orthogonaliteit, $<\bar{u}, \bar{v}>$ = 0 bedoeld dat er *geen* samenhang (=correlatie) is tussen twee Variabelen (=grootheden)





Statistiek: samenhang vs geen samenhang

Inwendig productruimte (3)

Afhankelijk van de *aard van het object* heeft een terminologie als lengte, afstand, orthogonaliteit van objecten een specifieke betekenis.

Ander voorbeeld : Fourier reeks / Fourier analyse

Dit is een gewogen *som van* sinussen en cosinussen die een ***benadering*** vormt van een willekeurige periodieke functie f(x):

$$\tilde{f}(x) = a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + \ldots$$

$\Rightarrow$De sinussen en cosinussen zijn orthogonaal (hier is de benadering uitgedrukt als een lin combinatie van orthogonale basisvectoren)

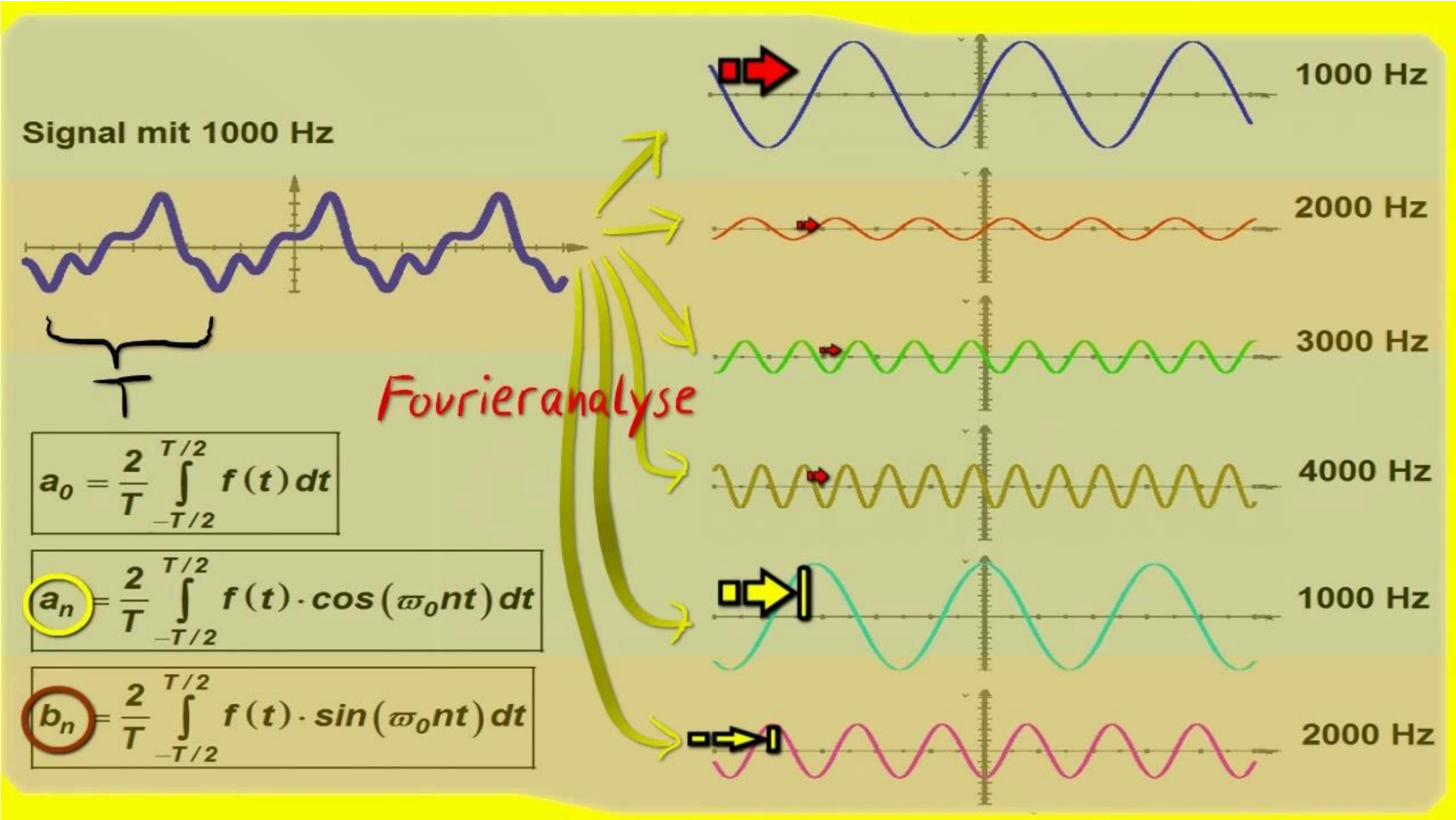
$\Rightarrow$ Coefficienten a_i en b_i => minimale afstand tussen daadwerkelijke f en benaderde $\tilde{f}$

Toepassingen Fourier analyse:

Elektronica, akoestiek, kwantummechanica, mechanica (dynamica, aerodynamica, sterkteleer etc)

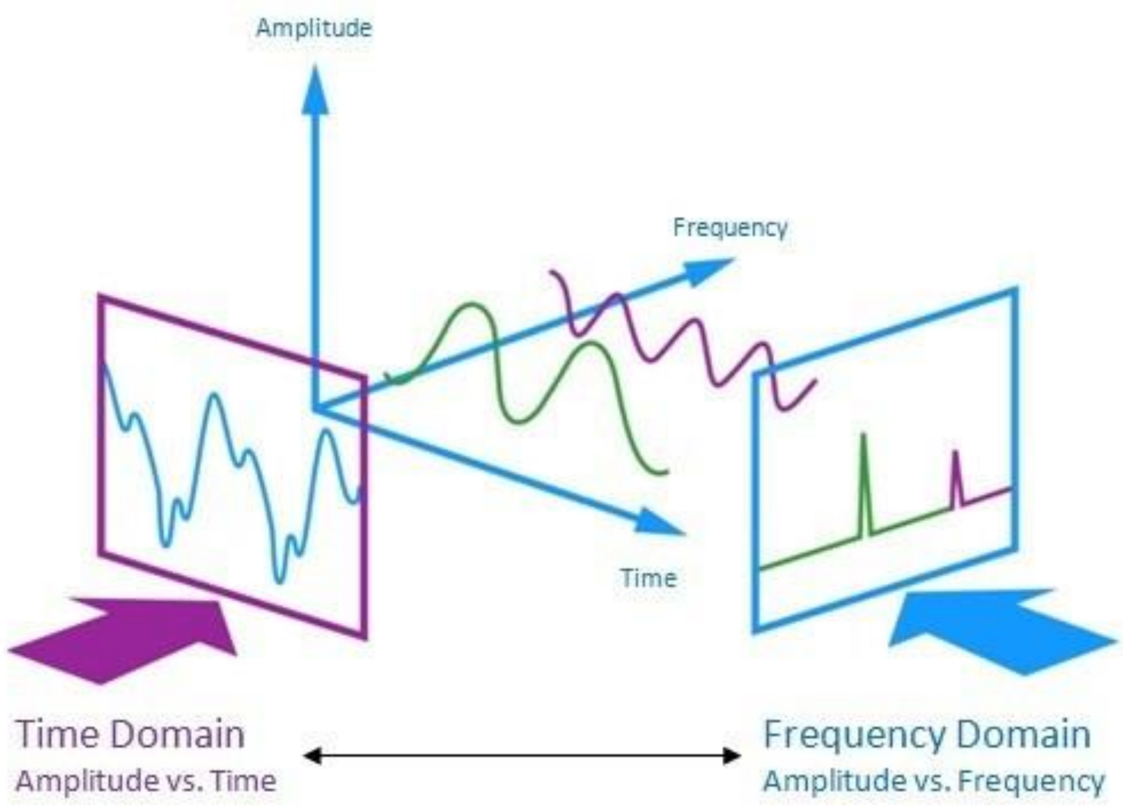
Fourier analyse

https://youtu.be/U0DepaaCRRs



Fourier analyse

Signal Analysis for a Morse Decoder



Lesdoelen 6.7

De terminologie als lengte, afstand, orthogonaliteit van objecten heeft afh van de aard een specifieke betekenis bekeken vanuit het gedefinieerd inwendig product.

U kunt hierna van een gegeven inwendig product*ruimte* het volgende bepalen:

Lengte, afstand, orthogonale basis (met GS), de beste benadering (orthogonale projectie), ..

Verder kunt u ook vaststellen als een gegeven inwendig product

$< f, g >$ voor een vectorruimte V voldoet aan de axioma’s 1 t/m 4