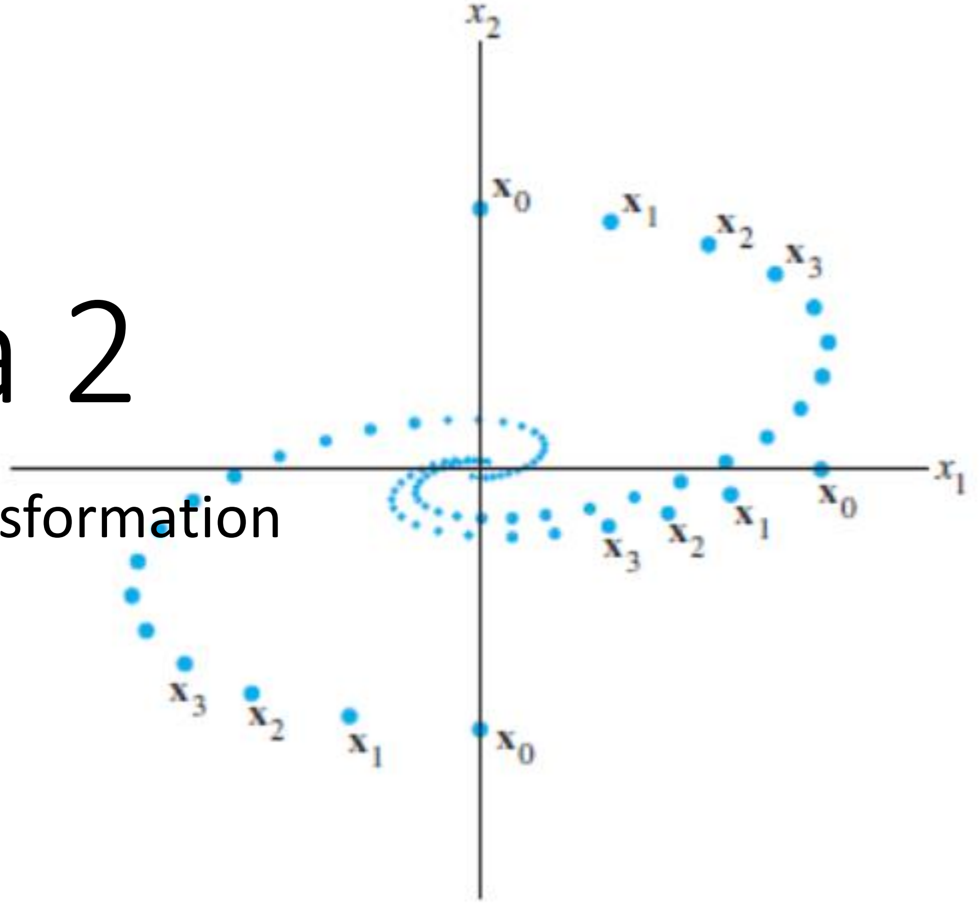
Lineaire algebra 2

Diagonalisatie, Eigenvectoren & Lin Transformation

Deel 2 – 3

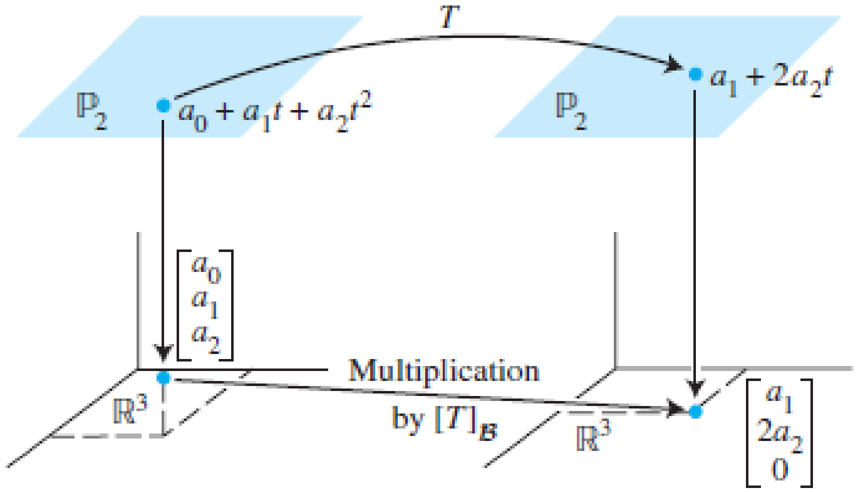
ξ5.3 en 5.4

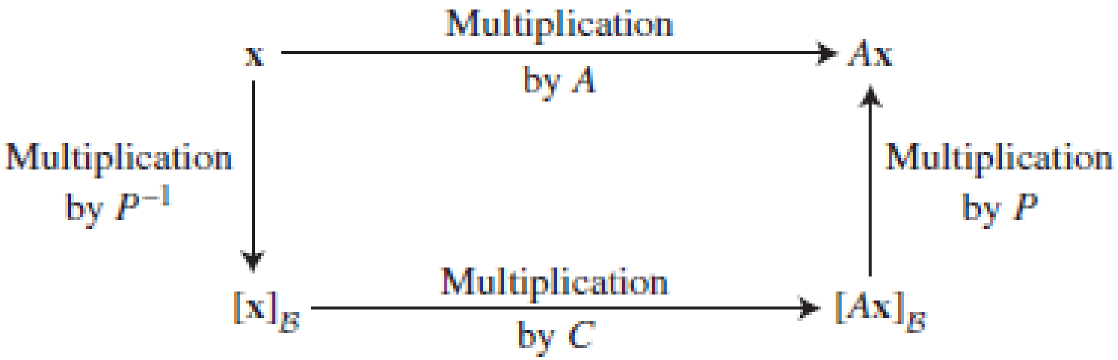


Lesdoelen

U kunt hierna

1. Aantonen als een matrix A diagonaliseerbaar is of niet
2. Een matrix A noteren in de vorm A = PDP^{-1} (Diagonaliseren van A)
3. De basis $\mathcal{B}$ voor R^n en $\mathcal{B}$-matrix voor transformatie T bepalen





Diagonalisatie van Matrix A (1)

$A = PDP^{-1}$ met

- D de diagonaalmatrix bestaande uit de eigenwaarden λ_i
- P de matrix bestaande uit de eigenvectoren horende bij resp. λ_i
- P^{-1} de inverse van P

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{bmatrix}$$

Diagonalisatie van Matrix A (2)

$A = PDP^{-1}$ met

- D de diagonaalmatrix bestaande uit de eigenwaarden λ_i
- P de matrix bestaande uit de eigenvectoren horende bij resp. λ_i
- P^{-1} de inverse van P

<u>Voorbeeld.</u>

$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ Diagonaliseer A = Bepaal PDP^{-1} = Bepaal eigenwaarden en daarbij horende eigenvectoren van A

Opl: Eigenwaarden zijn 5 en 3…..Ga zelf na! Dus $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Een eigenvector van 5 en 3 is $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ resp. $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ Dus $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

Let op: eigenwaarden en eigenvectoren in dezelfde volgorde plaatsen!!

Wat is het nut van diagonaliseren?(1)

Voorbeeld. Berekenen van A^k

If $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, then $D^2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix}$

$$D^3 = DD^2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{bmatrix}$$

$$D^k = \begin{bmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix} \quad \text{for } k \geq 1$$

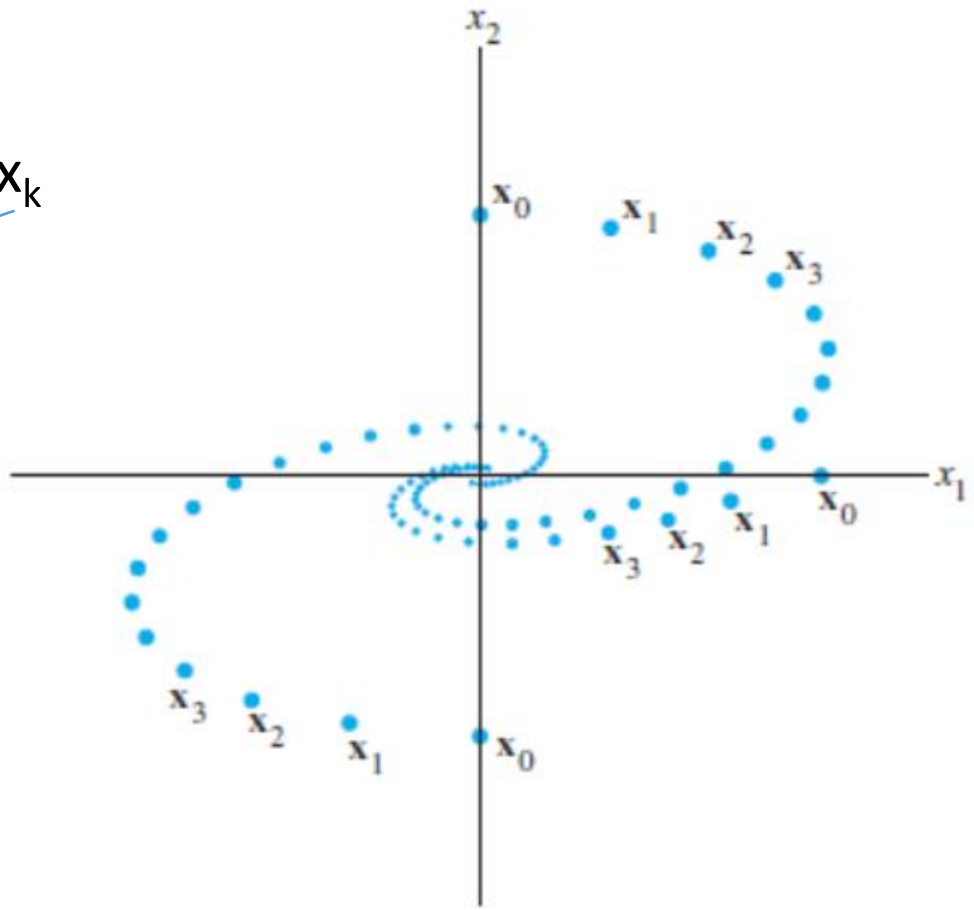
If $A = PDP^{-1}$ for some invertible P and diagonal D, then A^k is also easy to compute,

Het vermenigvuldigen van matrices A.A.A.…A kan dus een lastige klus zijn
Met diagonaal matrices => eenvoudiger en sneller

Wat is het nut van diagonaliseren?(2)

Vb populatie dynamika => gevlekte uil

- Wat is de populatie vector in jaar k? $x_{k+1} = Ax_k$
- $x_1 = Ax_0$
- $x_2 = A.x_1 = A.(Ax_0)=A^2x_0$
- $x_3 = A.x_2 = A.(A^2x_0)=A^3x_0$
- …..
- $x_{k+1} = A.x_k = A.(A^kx_0)=A^{k+1}x_0$



Laten we A^k nader bekijken.

Wat is het nut van diagonaliseren?(3)

Vb populatie dynamika => gevlekte uil

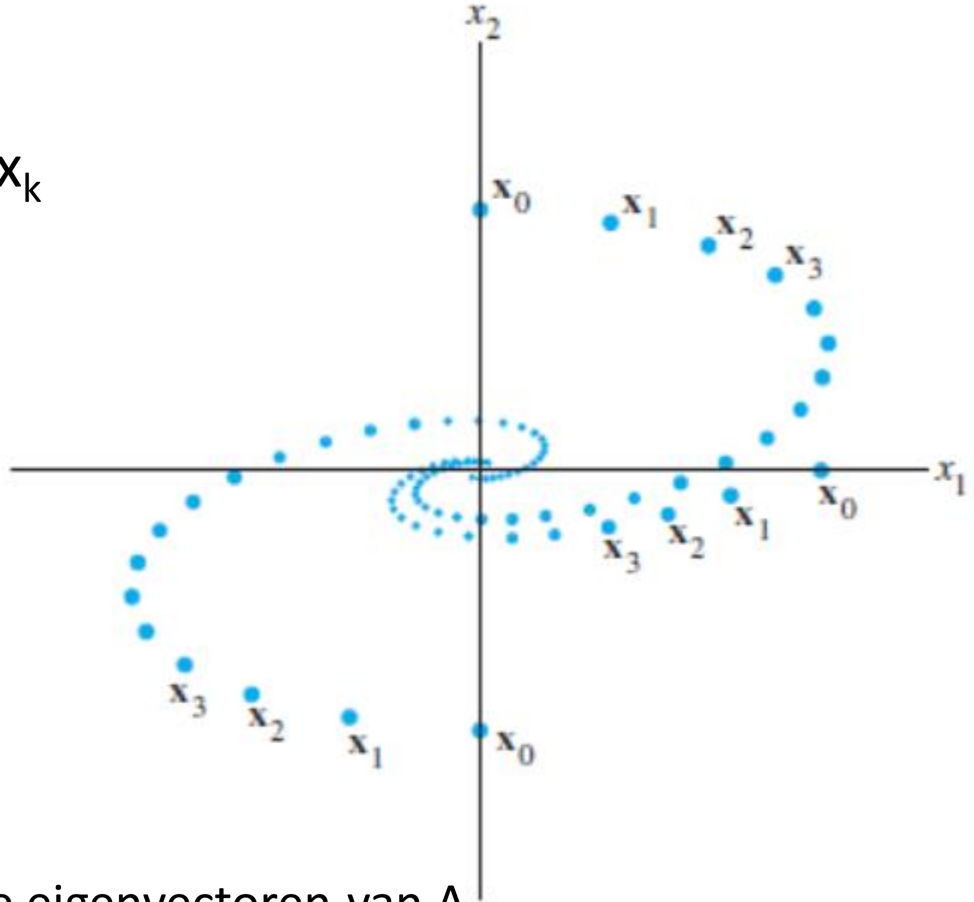
- Wat is de populatie vector in jaar k? $x_{k+1} = Ax_k$
- $x_{k+1} = A.x_k = A.(A^k x_0) = A^{k+1} x_0$

A diagonaliseerbaar => $A = PDP^{-1}$

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD\underbrace{(P^{-1}P)}_{I}DP^{-1} = PDDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

$$A^3 = (PDP^{-1})A^2 = \underbrace{(PDP^{-1})P}_{I}D^2P^{-1} = PDD^2P^{-1} = PD^3P^{-1}$$

$$\boxed{\text{In general, for } k \geq 1,\quad A^k = PD^kP^{-1}}$$



- Zullen verderop zien dat er een verband is tussen T**x** en de eigenvectoren van A

Wanneer is A diagonaliseerbaar?

nxn matrix A = PDP^{-1} ⇔ A heeft n lineair onafhankelijke eigenvectoren

d.w.z. de eigenvectoren van A vormen een basis voor R^n

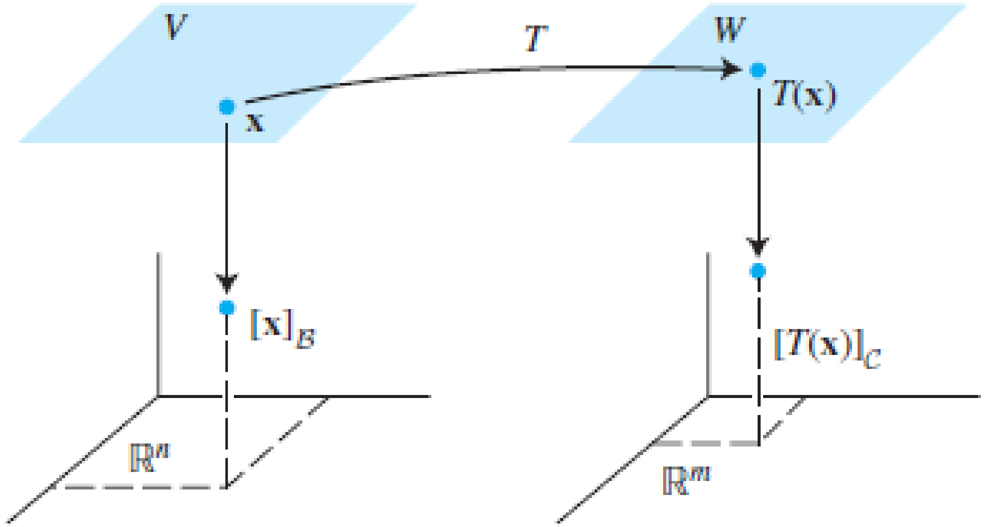
Voldoende criteria is:

nxn matrix A heeft *n verschillende* eigenwaarden => A diagonaliseerbaar

Geen n verschillende λ => A diagonaliseerbaar indien som v/d dimensie van de resp. eigenruimten gelijk is aan n

Zie vb 3 t/m 6 van ξ5.3

Break (10 minutes) or make some homeweork



A linear transformation from V to W.

Eigenvectoren en Lineaire transformaties

$\mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x}$

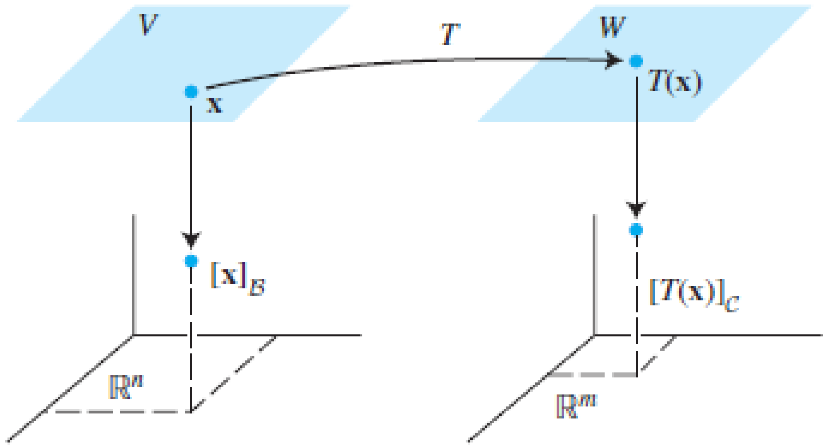
$\mathbf{u} \rightarrow D\mathbf{u}$

Matrix M van een lineaire transformatie T (1)

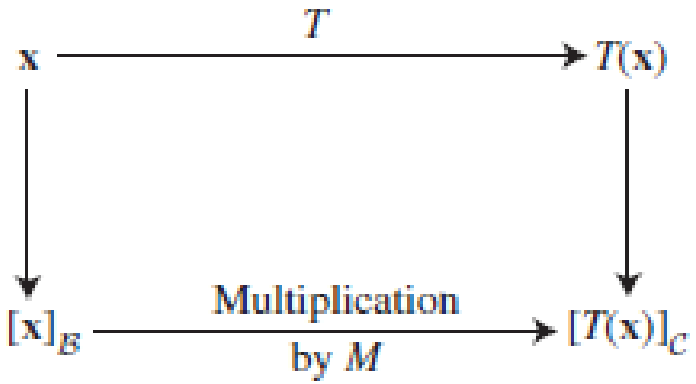
Zij vectorruimten V (n-dimensional) en W (m-dimensional)

Zij vector **x** in V en $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ in R^n en het beeld T(**x**) in W en $[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}}$ in R^m

T : V-> W is te noteren als een matrix vermenigvuldiging $[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}} = M\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$



A linear transformation from V to W.



Matrix M van een lineaire transformatie T (2)

Zij transformatie T van V (n-dimensional) naar V (n-dimensional)

met basis $\mathcal{B}$ in R^n

Dan Matrix M = $[T]_{\mathcal{B}}$ genoemd de $\boxed{\boldsymbol{\mathcal{B}}\textbf{-matrix van T}}$

The $\mathcal{B}$-matrix for $T : V \to V$ satisfies $[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$, for all $\mathbf{x}$ in V

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{x} \arrow[r, "T"] \arrow[d] & T(\mathbf{x}) \arrow[d] \\
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "\text{Multiplication}", "\text{by } {[T]_{\mathcal{B}}}"'] & {[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}}}
\end{tikzcd}
$$

Representatie van de diagonaal matrix

$A = PDP^{-1}$ met D een nxn diagonaal matrix

Stel $\mathcal{B}$ de *basis* voor R^n gevormd door de *eigenvectoren in P*

=> de diagonaal matrix D is de $\mathcal{B}$–matrix voor de transformatie $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$

Zie hier de relatie eigenvectoren en lineaire transformatie T

De volgende afbeeldingen zijn gelijk:

$\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$

$\mathbf{u} \to D\mathbf{u}$

Eigenvectoren en Lineaire transformatie (1)

Voorbeeld. Define $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ by $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, where $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

Bepaal een basis $\mathcal{B}$ voor vectorruimte R^2 zodanig dat de $\mathcal{B}$ – matrix van T een diagonaalmatrix is.

Oplossing:

Indien de $\mathcal{B}$ – matrix van T een diagonaalmatrix is, dan is $A = PDP^{-1}$

De $\mathcal{B}$ – matrix is in deze gelijk aan de diagonaalmatrix D en de basis is gelijk aan de vectoren in P.

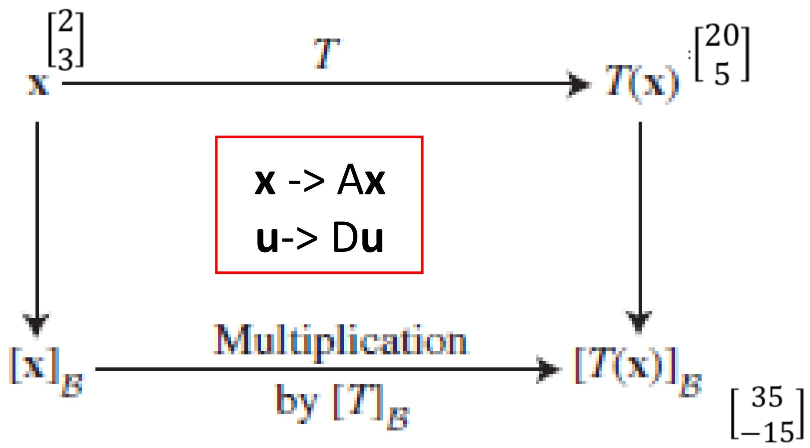
In vb2 op blz 282 blijkt dat $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ and $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Dus is $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\}$

Eigenvectoren en Lineaire transformatie (2)

Define $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ by $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, where $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$



Stel **x** = $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ => A**x** = $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 5 \end{bmatrix}$

Coordinaatvector [A**x**] $_{\mathcal{B}}$=> $\begin{bmatrix} 20 \\ 5 \end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2 = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

[A**x**] $_{\mathcal{B}} \Rightarrow\ x_1 = 35; x_2 = -15 \Rightarrow$ [A**x**] $_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 35 \\ -15 \end{bmatrix}$

Eigenvectoren en Lineaire transformatie (3)

Define $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ by $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, where $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}
\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} \mathbf{x} \arrow[rr, "T"] \arrow[d] & & T(\mathbf{x}) \begin{bmatrix}20\\5\end{bmatrix} \arrow[d] \\
\begin{bmatrix}7\\-5\end{bmatrix} {[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[rr, "\text{Multiplication}", "\text{by } {[T]_{\mathcal{B}}}"'] & & {[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}}} \begin{bmatrix}35\\-15\end{bmatrix}
\end{tikzcd}$$

x -> A**x**
u-> D**u**

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = y_1\boldsymbol{b}_1 + y_2\boldsymbol{b}_2 = y_1\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + y_2\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$ => $\mathbf{u} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\-5\end{bmatrix}$

Coordinaatvector D.**u** $= \begin{bmatrix}5 & 0\\0 & 3\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}7\\-5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}35\\-15\end{bmatrix}$

Transformatie levert hetzelfde beeld op:

x -> A**x**
u-> D**u**

Bron: dr.ir.G.vanDijk

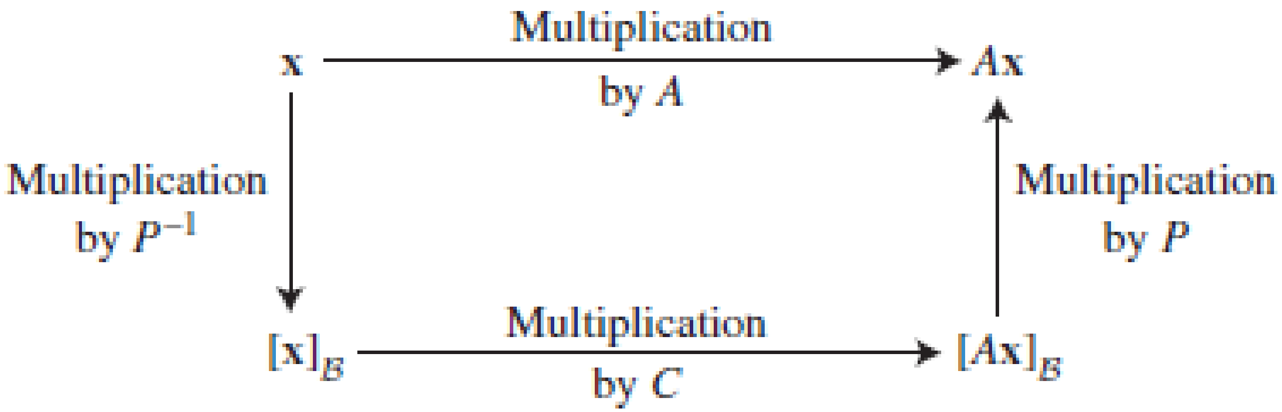
A niet diagonaliseerbaar & $\mathcal{B}$ – matrix van T

Zij gegeven een matrix A en een matrix P met voldoende basisvectoren

Matrix A te noteren als $A = PCP^{-1}$ dan is C de $\mathcal{B}$ – matrix van T :

$[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP =$

$P^{-1}PCP^{-1}P = C$



Zie vb4 blz 292