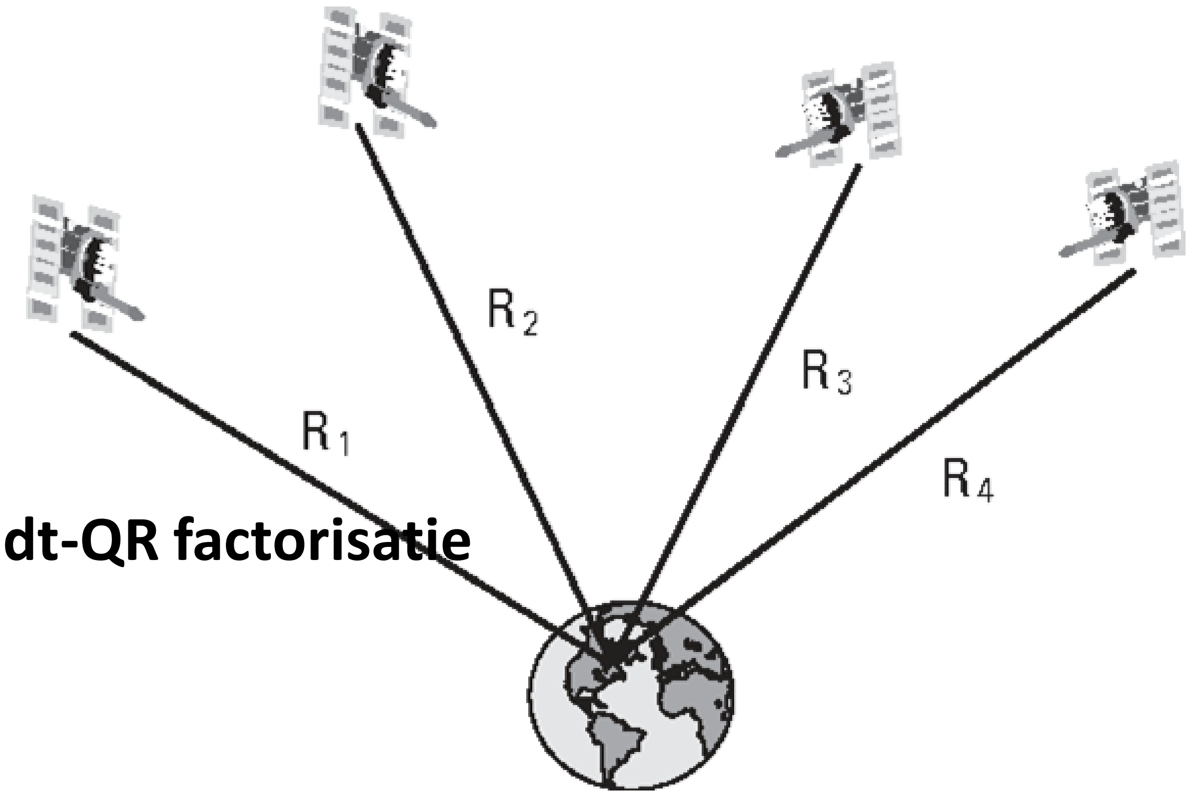
Lineaire algebra 2

Orthogonaliteit en Kleinste kwadraten

H6-deel 2

Orthogonale projectie in $\mathbb{R}^n$ – Gram Schmidt-QR factorisatie

6.3 en 6.4

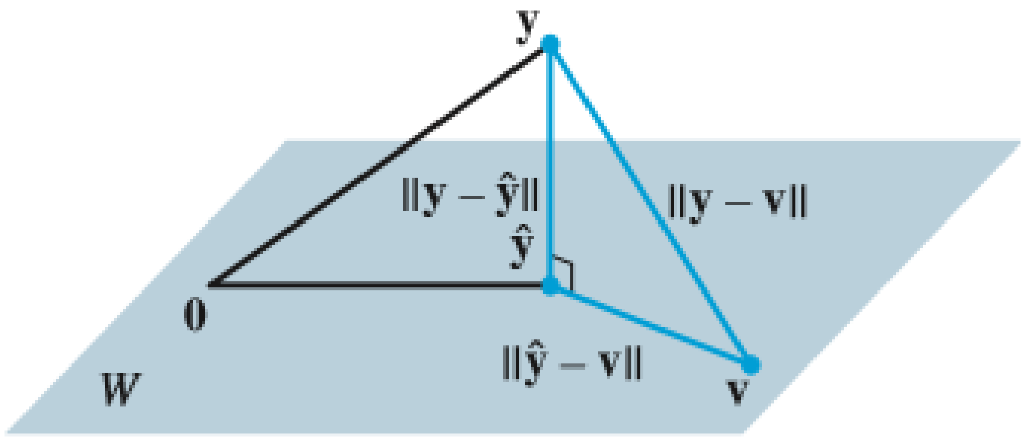


What to expect

- Introductie: waarom H6
- Deel 1:
  - Nodige begrippen als lengte, afstand
  - orthogonale verzameling, orthogonale projectie
- Deel 2:
  - Orthogonale projectie in $\mathbb{R}^n$
  - Gram-Schmidt Proces
  - QR factorisatie
- Deel 3:
  - Least square problems – kleinste kwadraten problemen
  - Inwendige product ruimten

Quick Question

Welke $\boldsymbol{x} \in$ W ligt het *dichtsbij* $\boldsymbol{y}$? Of welke $\boldsymbol{x} \in$ W *nadert* $\boldsymbol{y}$ het *best*? Explain



a. **0**

b. **v**

c. orthogonale projectie van **y** op W

d. $\widehat{\boldsymbol{y}}$

e. none of the above

Lesdoelen 6.3-6.4 (1)

U kunt hierna (naast concepten in eigen bewoordingen uitleggen, ook)

1. Van gegeven vector y de orthogonale projectie in $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ bepalen

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \cdots + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_p}{\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_p}\mathbf{u}_p$$

2. Vector y in $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ noteren als de som van twee orthogonale componenten: $\boldsymbol{y} = \hat{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{z}$

Lesdoelen 6.3-6.4 (2)

U kunt hierna (naast concepten in eigen bewoordingen uitleggen, ook)

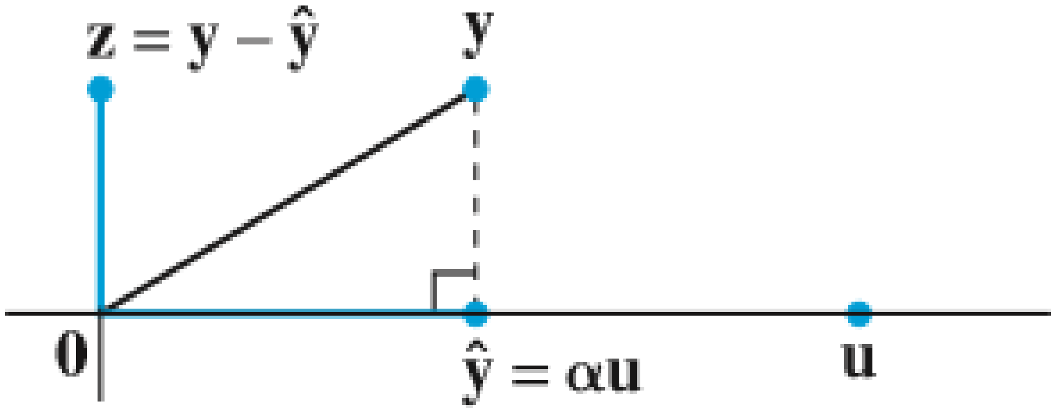
1. Van gegeven vector y de orthogonale projectie in $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ bepalen

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \cdots + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_p}{\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_p}\mathbf{u}_p$$

2. Vector y in $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ noteren als de som van twee orthogonale componenten: $\boldsymbol{y} = \hat{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{z}$
3. De afstand $\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|$ berekenen
4. Mbv de Gram-Schmidt methode voor A een orthogonale (en ook orthonormale) basis voor col A construeren
5. De QR factorisatie bepalen van mxn matrix A

Kortste afstand, loodrechte projectie, beste benadering, dichtsbij

Orthogonale projectie in $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ (1)

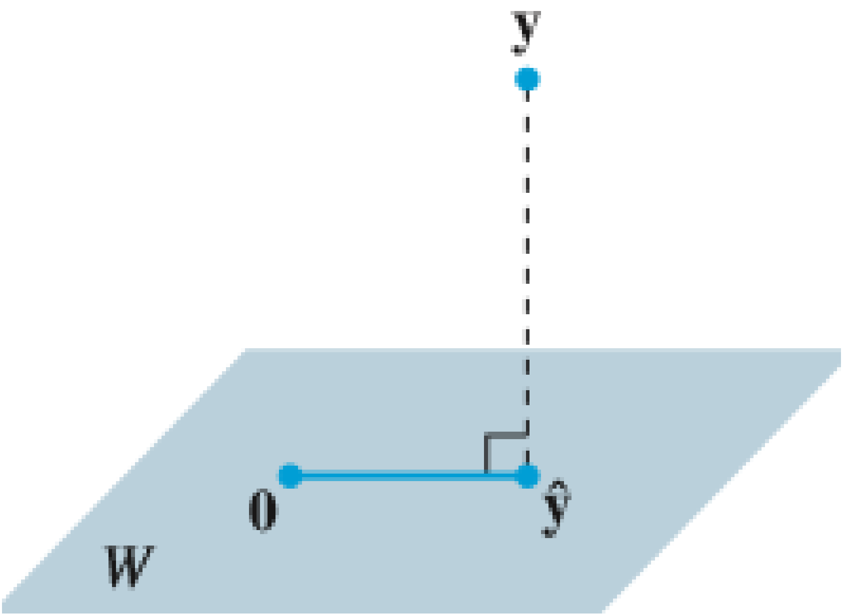


Refresh: Loodrechte projectie van punt y in $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$

(of ook van vector **y** op vector u) en elke ***y*** te noteren als $\boldsymbol{y} = \ \widehat{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{z}$

=> Belangrijke analogie in ruimte $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$

Orthogonale projectie in $\mathbb{R}^n$ (2)



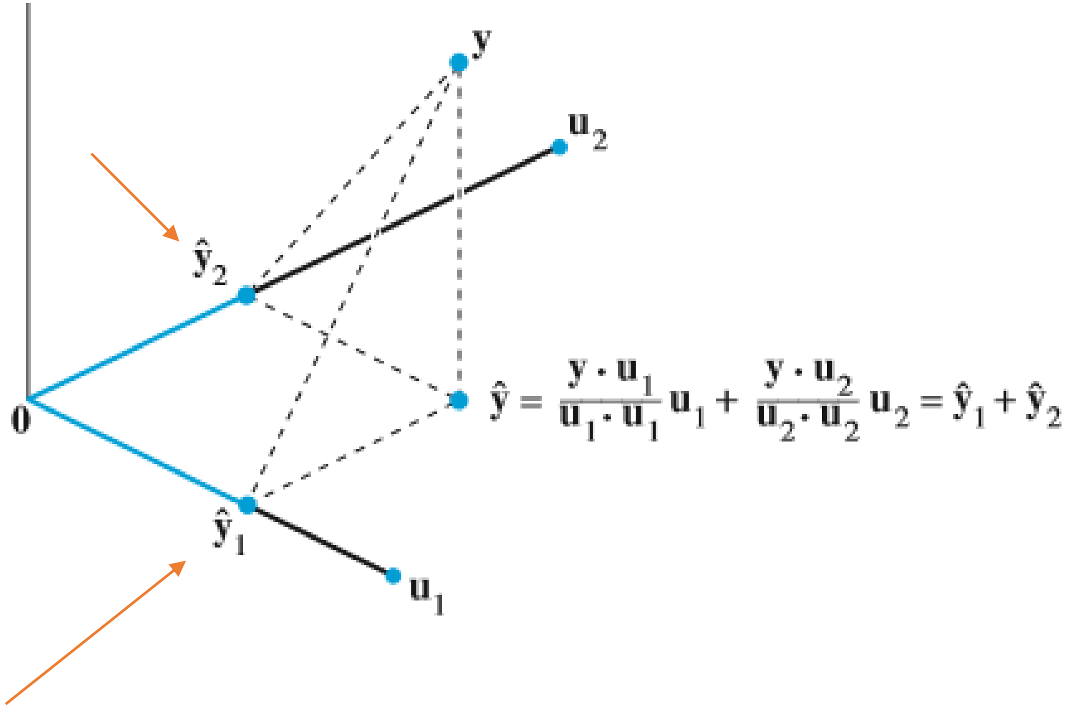
Belangrijke analogie in ruimte $\mathbb{R}^n$

$\hat{y}$ = Loodrechte projectie van vector y $\in \mathbb{R}^n$ op ruimte W $\subset \mathbb{R}^n$

Wat houdt dat geometrisch in?

Geometrische interpretatie

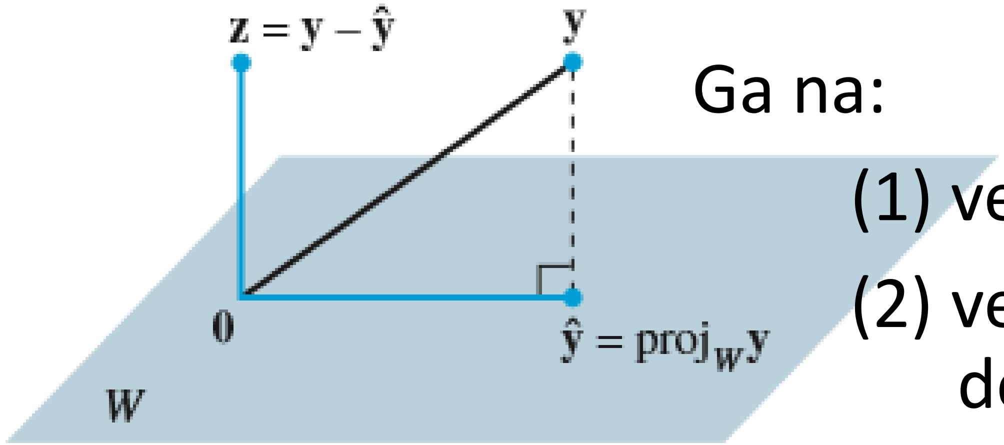
De orthogonale projectie van vector **y** op W, dus $\hat{\boldsymbol{y}}$, is de som van orthogonale projecties op één –dimensionale projecties die orthogonaal zijn op elkaar. Ter illustratie de projectie van **y** op een *vlak* in $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$



let op $\hat{\boldsymbol{y}}_1 \perp \hat{\boldsymbol{y}}_2$

Orthogonale decompositie theorema (1)

De som van vector y kan ook hier genoteerd worden als $\boldsymbol{y} = \hat{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{z}$



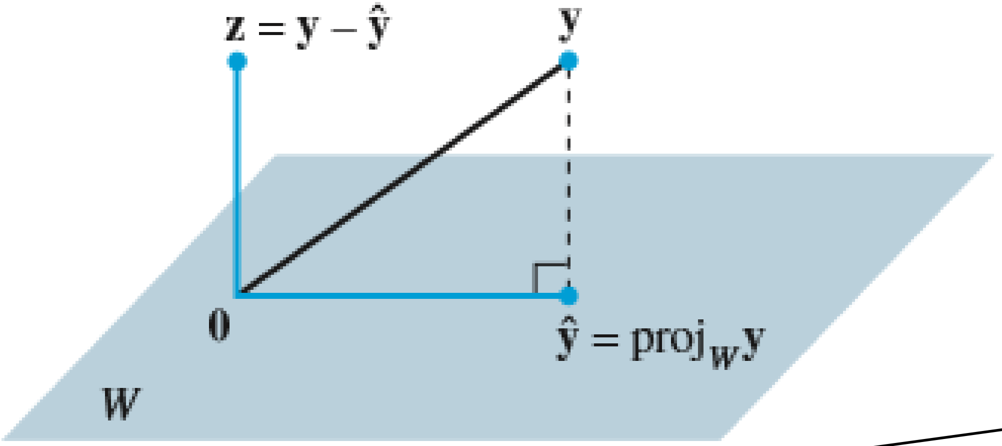
Ga na:

(1) vector $\hat{y}$ is uniek en $\hat{y} \in$ W en (y- $\hat{y}$) $\perp$ W

(2) vector $\hat{y}$ is uniek en ligt als element van deelruimte W het *dichtsbij* **y**

De kleinste kwadraten methode is gebasseerd op deze twee eigenschappen.
(later meer hierover – in deel 3)

Orthogonale decompositie theorema (2)



$\boldsymbol{y} = \hat{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{z}$

met $\hat{\boldsymbol{y}}$= $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_p u_p$

z = $\boldsymbol{y}$ - $\hat{\boldsymbol{y}}$

proj$_W$**y** = $\hat{\boldsymbol{y}}$ in W en $\boldsymbol{z}$ in W$^{\perp}$

Lees: orthogonale projectie van vector y op deelruimte W

Met orthogonale basis is de lin. combinatie $\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \cdots + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_p}{\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_p}\mathbf{u}_p$

Oefening (7 minutes)

Think (5 minutes) – Pair (2 minutes) – Share

Gegeven de basis S = $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_4\}$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Noteer vector **x** als de som van 2 orthogonale componenten:

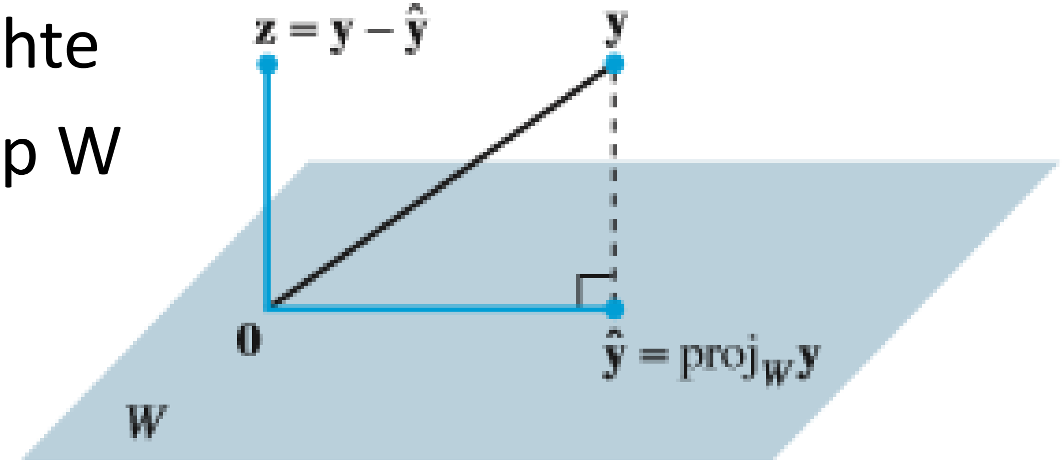
1 component ligt in deelruimte W en de andere in deelruimte V

W = $\text{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ en V = $\text{Span}\{\mathbf{u}_4\}$

Welke controle check kunt u doen aan het einde?

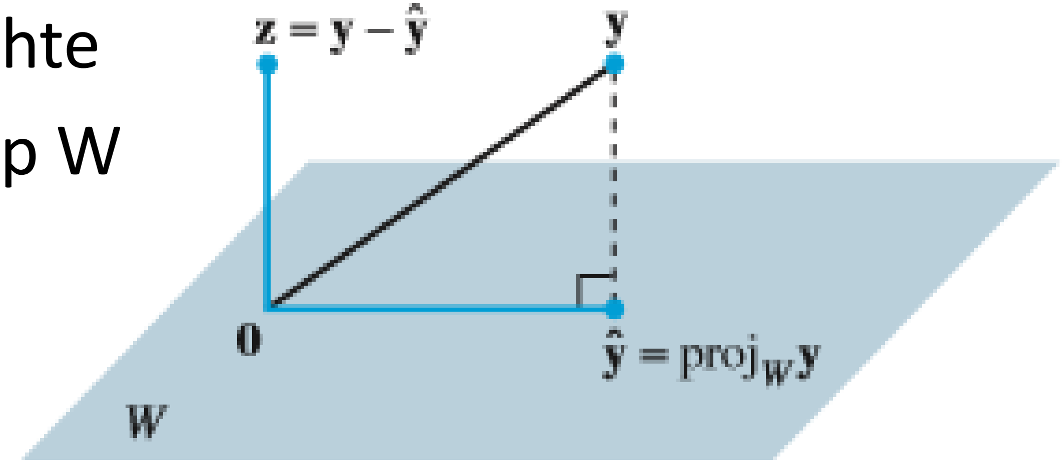
Best approximation theorem (1)

Het punt in W *dichtsbij* y $= \ \hat{\boldsymbol{y}}$ = loodrechte projectie van **y** op W



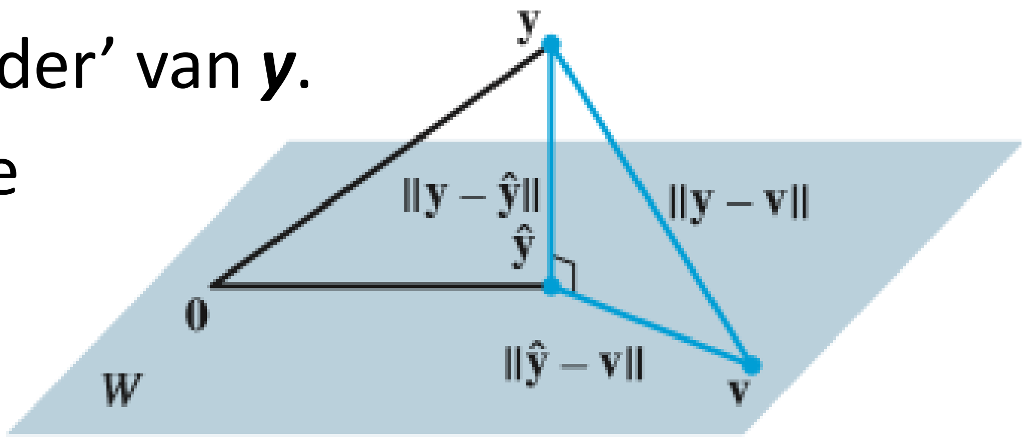
Best approximation theorem (2)

Het punt in W *dichtsbij* y $= \hat{\boldsymbol{y}}$ = loodrechte projectie van ***y*** op W



Ga na: elk ander punt v∈W en v≠$\hat{\boldsymbol{y}}$ ligt 'verder' van ***y***.

Met loodrechte projectie ook te bepalen de afstand: $\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\| < \|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|$



Meditate on this: afstand = beste benadering

Bestudeer voorbeelden 3 en 4 op blz 351.

Ga na wat de essentie is van beide voorbeelden.

Waarom wordt de nadruk gelegd op het bepalen van $\text{proj}_W \mathbf{y}$

Wanneer zou u $\text{proj}_W \mathbf{y}$ willen of moeten uitrekenen?

(5 minutes)

If the basis is **orthonormal**

Eerder gezien dat $\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \cdots + \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_p}{\mathbf{u}_p\cdot\mathbf{u}_p}\mathbf{u}_p$ met basis U **orthogonaal.**

Hoe ziet bovenstaande formule eruit indien er sprake is van een ***orthonormale*** basis U? Motiveer (5 minutes)

Caution:

Er is een verschil tussen a.b en ab. Het eerste is het inwendig product.

5 minutes

Some exercise is good for you

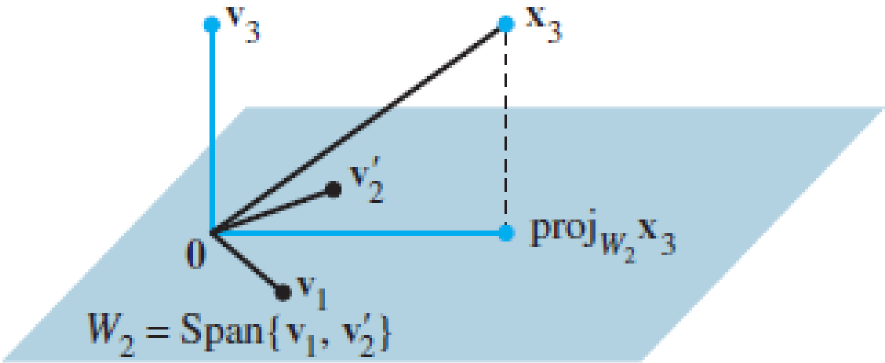
Gegeven de vectoren $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

a. Toon aan de de verzameling $\{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}\}$ een orthogonale verzameling is
b. Bepaal de orthogonale projectie van $\boldsymbol{y}$ op span $\{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}\}$

Think (5 minutes)

Pair (2 minutes)

Share (3 minutes)

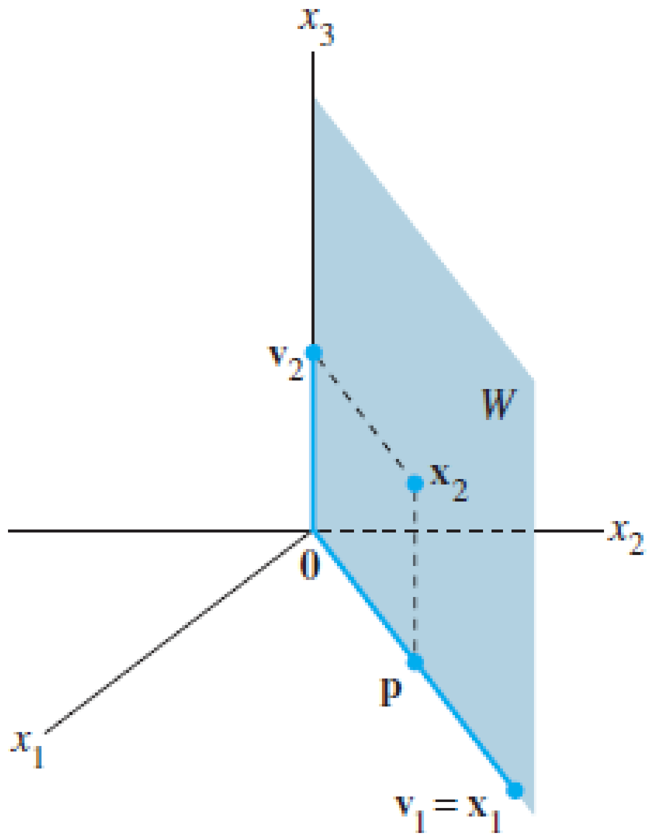


6.4 Gram-Schmidt

Een eenvoudige algoritme voor het construeren van een orthogonale (of orthonormale) basis voor een willekeurige niet-nul deelruimte W van $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$

Niet orthogonale basis (1)

Eerder (in deel 1) opgemerkt:

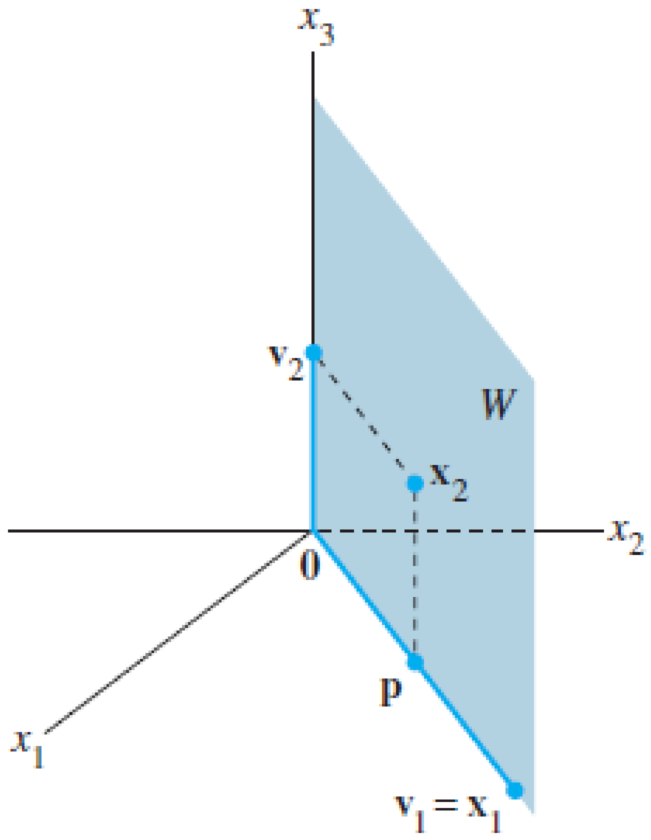


Basis in $\mathbb{R}^n$ → orthogonaal
→ niet orthogonaal

(maak orthogonaal met Gram-Schmidt

Niet orthogonale basis (2)

Eerder (in deel 1) opgemerkt:



Basis in $\mathbb{R}^n$ → orthogonaal

Basis in $\mathbb{R}^n$ → niet orthogonaal

(maak orthogonaal met Gram-Schmidt

Zij deelruimte W = span {$\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}$}

Merk op: span {$\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}$} is **niet** orthogonaal

Gram-Schmidt methode (1)

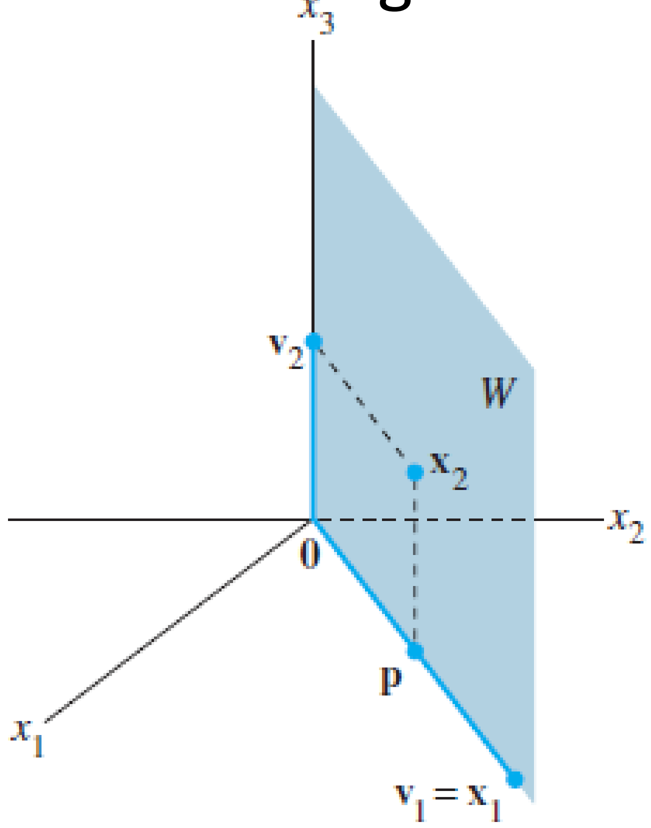
Zij basis W = $\{\boldsymbol{x}_{1,} \cdots, \boldsymbol{x}_p\}$ met W $\subset \mathbb{R}^n$ en basis W niet orthogonaal

- Definieer of kies je eerste vector $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{x}_1$
- $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \frac{\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1} \boldsymbol{v}_1$

Orthogonale projectie van tweede basisvector x_2 op eerste basisvector $x_1 = v_1$

Nieuwe vector v_2 is het orthogonaal complement van v_1.

Ga na! Denk aan $\boldsymbol{y} = \hat{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{z}$



Gram-Schmidt methode (2)

Zij basis W = $\{\boldsymbol{x}_{1,} \cdots, \boldsymbol{x}_p\}$ met W $\subset \mathbb{R}^n$ en basis W niet orthogonaal

- Definieer $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{x}_1$
- $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \frac{\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1} \boldsymbol{v}_1$ let op: je maakt orthogonaal t.o.v. v_1
- $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{x}_3 - \frac{\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1} \boldsymbol{v}_1 - \frac{\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{v}_2}{\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_2} \boldsymbol{v}_2$ let op: je maakt orthogonaal t.o.v. v_1 en v_2
- $\vdots$
- $\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{x}_p - \frac{\boldsymbol{x}_p \cdot \boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1} \boldsymbol{v}_1 - \frac{\boldsymbol{x}_p \cdot \boldsymbol{v}_2}{\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_2} \boldsymbol{v}_2 - \cdots - \frac{\boldsymbol{x}_p \cdot \boldsymbol{v}_{p-1}}{\boldsymbol{v}_{p-1} \cdot \boldsymbol{v}_{p-1}} \boldsymbol{v}_{p-1}$
- Dan geldt dat $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_p\}$ een orthogonale basis is voor W .

Bovendien geldt dat $Span\,\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k\} = Span\,\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}$ voor $1 \leq k \leq p$

Gram-Schmidt methode (3)

Soms krijg je breuken gedurende het proces bv. $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$

Verschaal de vector om verder rekenwerk eenvoudig te houden.

Dus maak van $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$ vector $\mathbf{v}_2' = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en ga dan verder

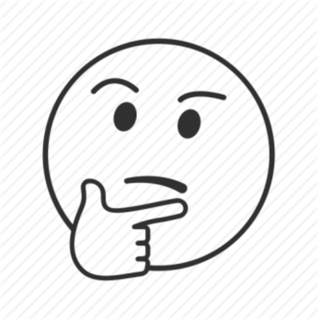
met de GS - methode

Orthonormale basis

- Eenvoudig te construeren vanuit een orthogonale basis $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$
- Normaliseer (=verschaal) de orthogonale vectoren $\boldsymbol{v}_i$'s

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$$

Some brain food



Bestudeer vb 1 en 2 op blz 354 – 355

Maak van 6.4 opgave 3, 5 en 7

Opgave 3 en 5: Gegeven een basis voor W. Is de basis orthogonaal? Indien niet, construeer een orthogonale basis.

Opgave 7: Construeer een orthonormale basis voor de deelruimte in opgave 3

QR factorisatie van matrices (1)

Zij matrix A een mxn matrix met lin. onafhankelijke kolommen =>

A te factoriseren als A = QR

nxn inverteerbare <u>boven</u>driehoeksmatrix met <u>positieve</u> elementen op de diagonaal

mxn matrix met orthonormale kolommen als basis voor Kol A

QR factorisatie van matrices (2)

Zij matrix A een mxn matrix met lin. onafhankelijke kolommen =>

A te factoriseren als A = QR

nxn inverteerbare bovendriehoeksmatrix met positieve elementen op de diagonaal

mxn matrix met orthonormale kolommen als basis voor Kol A

Dwz indien A geen orthogonale kolommen bevat en om A te factoriseren in QR :

- Construeer orthogonale kolommen uit A en maak orthonormaal => Q
- Q orthonormal, dus $Q^TQ = I \Rightarrow R = Q^TA$. Ga na!
- Controle middel: QR = A

QR factorisatie van matrices (3)

Zij matrix A een mxn matrix met lin. onafhankelijke kolommen =>

A te factoriseren als A = QR

nxn inverteerbare bovendriehoeksmatrix met positieve elementen op de diagonaal

mxn matrix met orthonormale kolommen als basis voor Kol A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/\sqrt{12} & 0 \\ 1/2 & 1/\sqrt{12} & -2/\sqrt{6} \\ 1/2 & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{6} \\ 1/2 & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 3/\sqrt{12} & 2/\sqrt{12} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

zie verder vb 4 blz 357-358

Oef!!

De QR-factorisatie komen we later weer tegen.

Gegeven een matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

De orthogonale basis van col A = $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$

Bepaal de QR-factorisatie van A