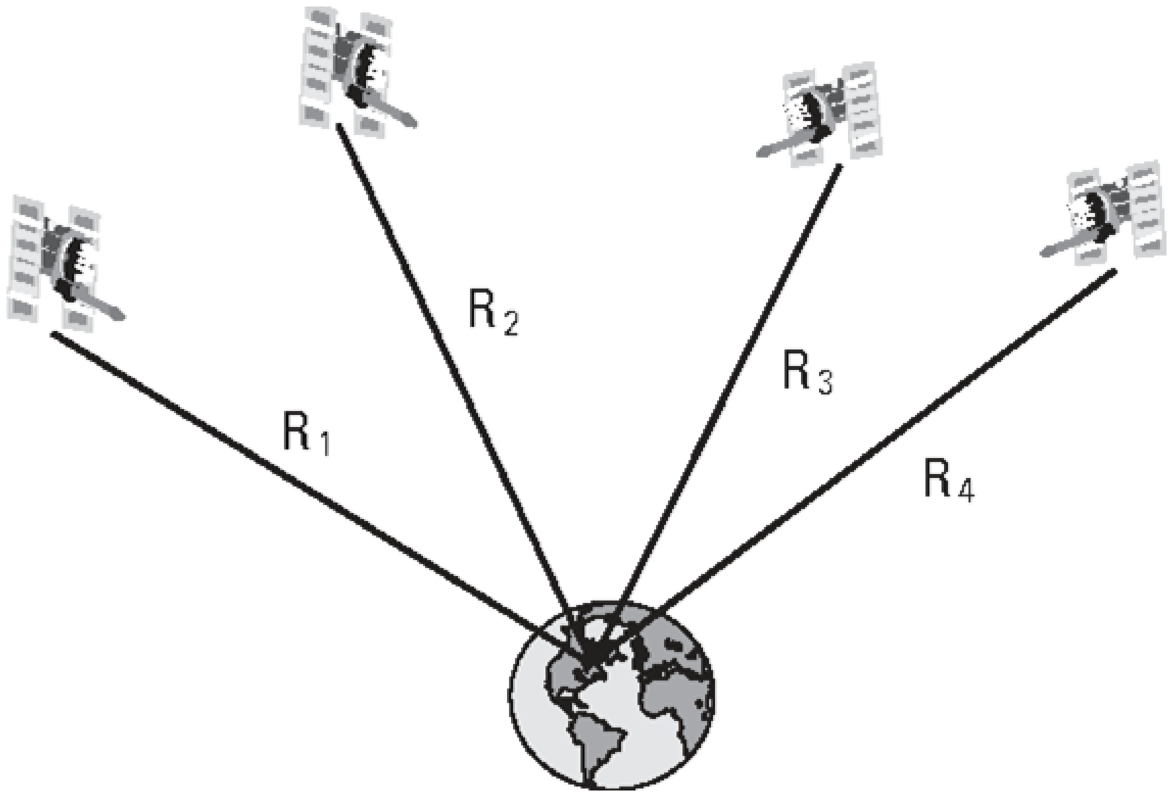
# Lineaire algebra 2

Orthogonaliteit en Kleinste kwadraten

H6-deel 1

Basis begrippen – orthogonale verzameling



# What to expect

- Introductie: waarom H6
- Deel 1:
  - Nodige begrippen als lengte, afstand
  - orthogonale verzameling, orthogonale projectie
- Deel 2:
  - Orthogonale projectie in $\mathbb{R}^n$
  - Gram-Schmidt Proces
  - QR factorisatie
- Deel 3:
  - Least square problems – kleinste kwadraten problemen
  - Inwendige product ruimten

# Intro (1): North American Datum (NAD)

GPS (=Global Positioning System) : Systeem om

⇒ te bepalen waar je bent

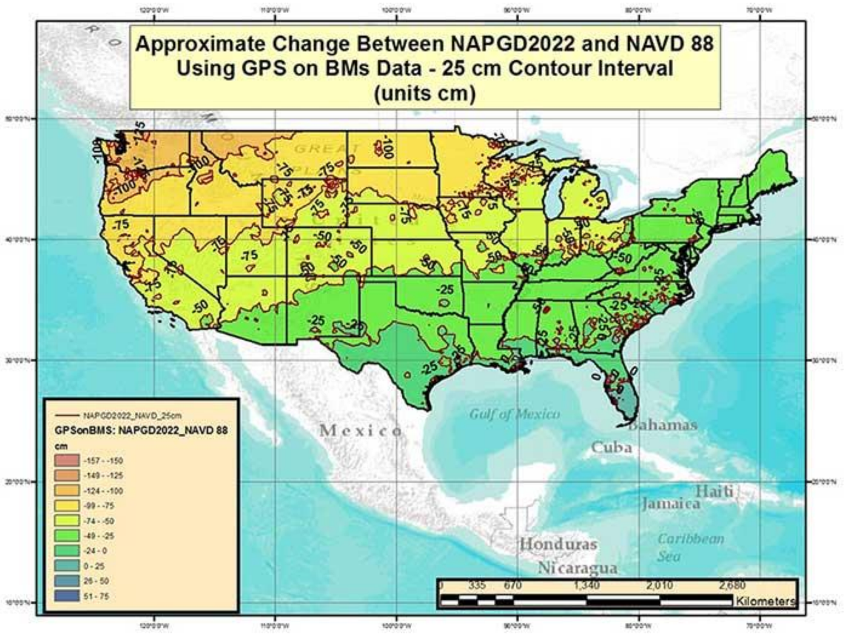
⇒ lokaties nieuwe referentie punten te bepalen

National Geodetic Survey  (1974) :

opmeten geografische

*positieaanduidingen* van het

Noord Americaans continent



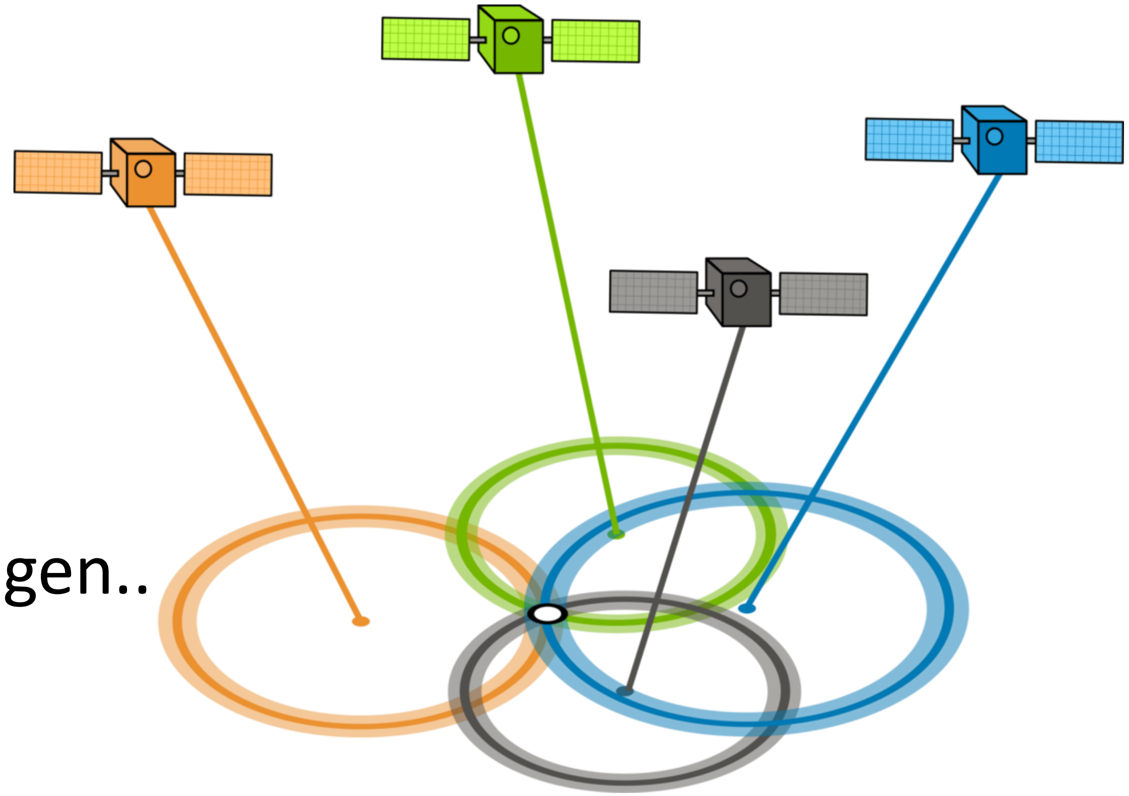
# Intro (2): Inconsistent systeem

NAD: stelsel van 1800.000x900.000

Opgemeten geografische data:

Basis voor

- landkaarten
- begrenzing gebieden
- civiele projecten: aanleg wegen..

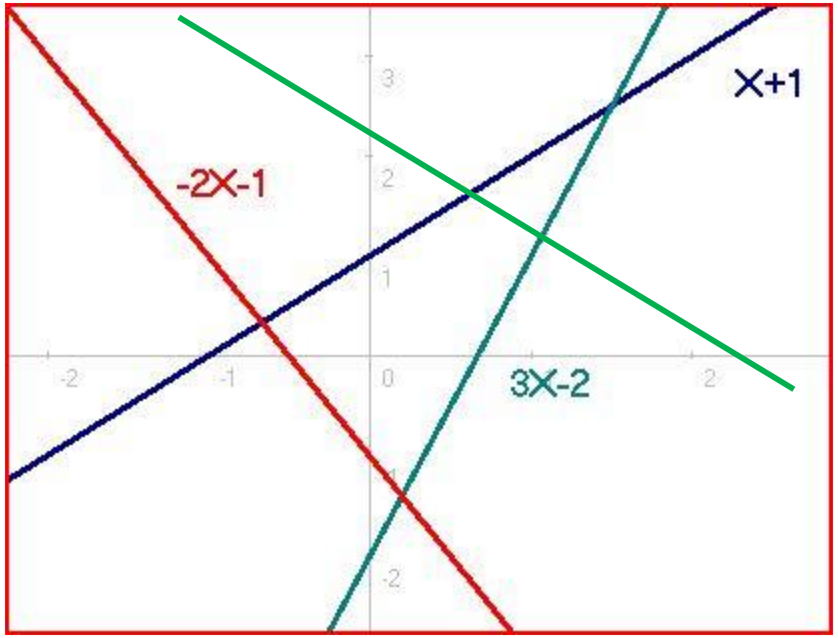


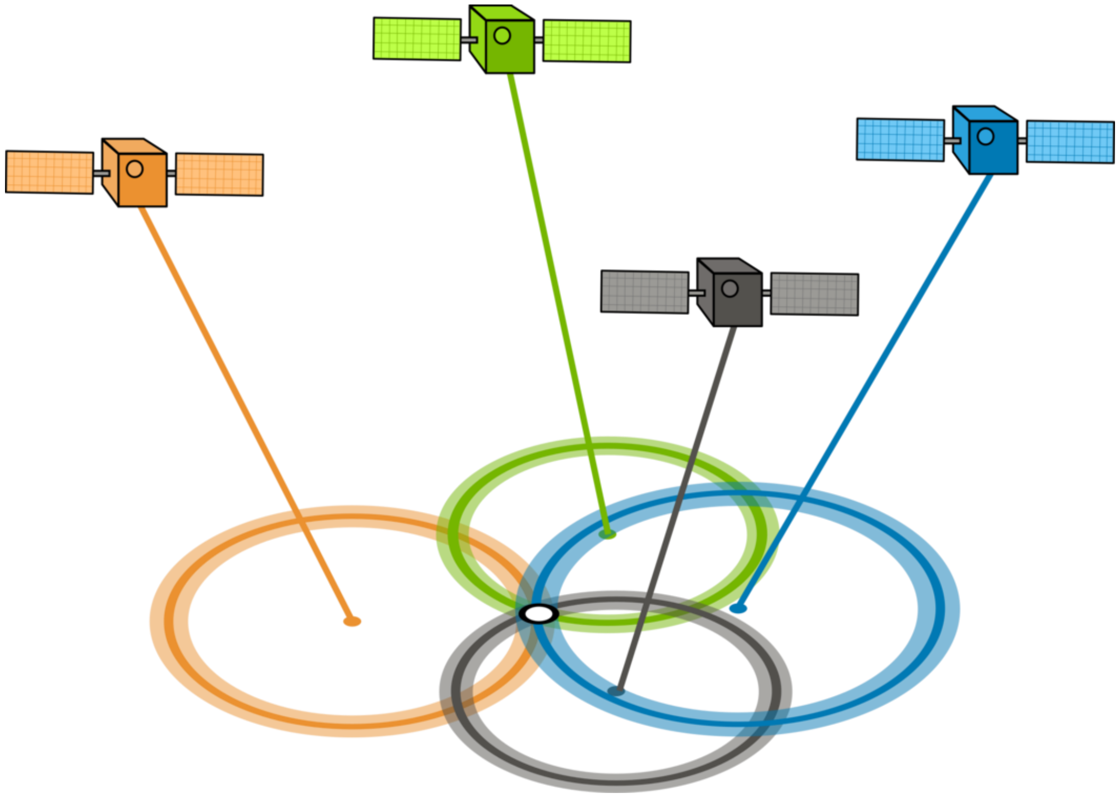
# Intro (3): Inconsistent systeem

NAD: stelsel van 1800.000x900.000

‘Klein inconsistent systeem‘

(Ter illustratie)



# Intro (4): Inconsistent systeem

Stelsel opgemeten data van NAD: Inconsistent en dus

⇒geen "oplossing"

⇒op zoek naar de beste *benadering* => a *least-square* solution

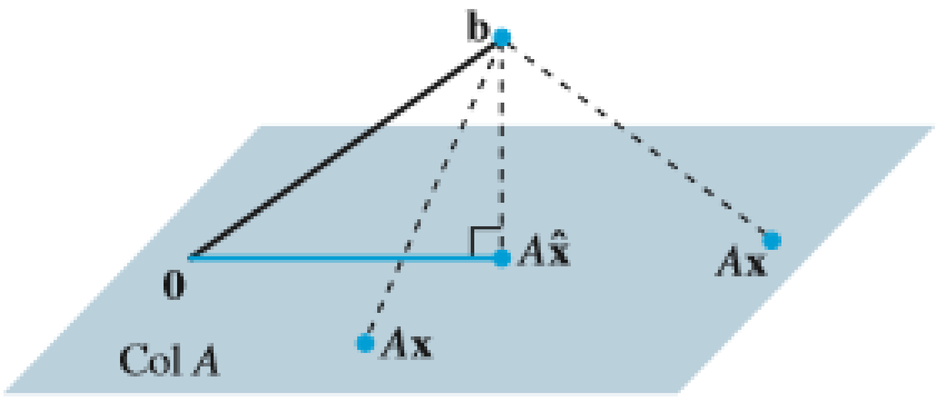



**FIGURE 1** The vector **b** is closer to $A\hat{\mathbf{x}}$ than to $A\mathbf{x}$ for other $\mathbf{x}$.

Zij op te lossen stelsel: A$\bar{x}$ =$\bar{b}$

doch stelsel inconsistent d.w.z

$\bar{b}$ ligt niet in col(A) m.a.w. voor geen enkele $\bar{x}$ geldt A$\bar{x}$ =$\bar{b}$

# Intro (5): Inconsistent systeem

Stelsel opgemeten data van NAD: Inconsistent

$\Rightarrow$geen “oplossing”

$\Rightarrow$Op zoek naar de beste benadering => a *least-square* solution

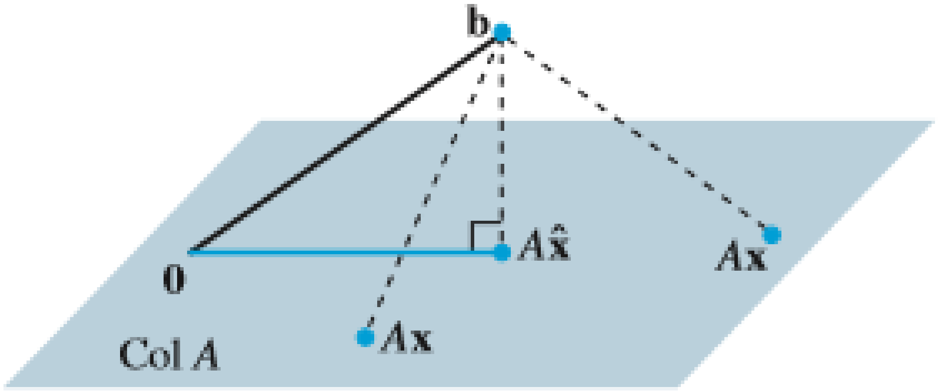



**FIGURE 1** The vector **b** is closer to $A\hat{\mathbf{x}}$ than to $A\mathbf{x}$ for other **x**.

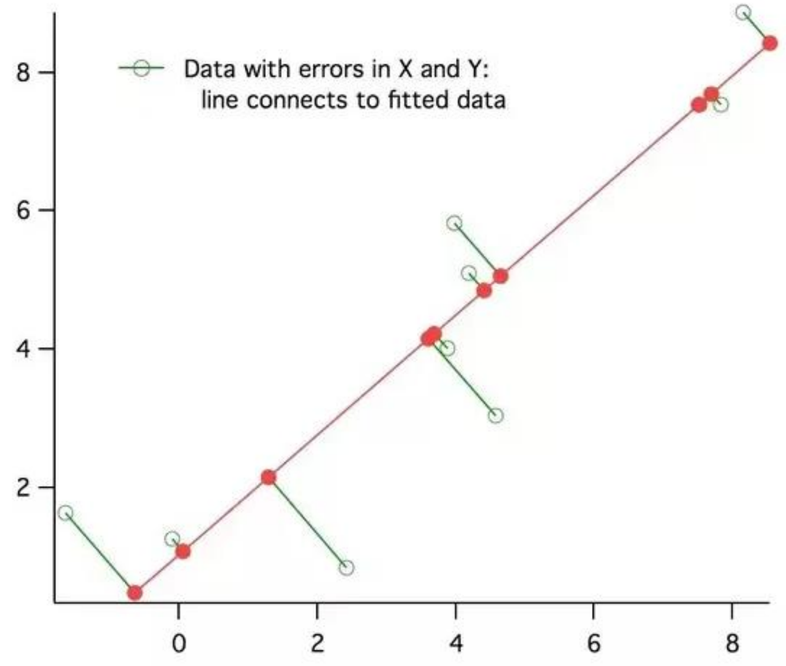
Ga na: Van alle ‘oplossingen’ / beelden in col(A), dus A$\bar{x}$, ligt A$\hat{x}$ het *dichts* bij $\bar{b}$.

A$\hat{x}$ = *loodrechte projectie* van $\bar{b}$ op de vectorruimte col(A)

# Intro (6): Nog een toepassing (a)

Regressie analyse: een statistische analysemethode om de relatie tussen variabelen te schatten.[1]

- Op zoek naar de 'beste' benadering voor een verzameling van (meet)punten.




(Hugh Daven, Ph.D. Statistics, University of Washington, 2017
www.quora.com – least square)

Beste benadering = het totaal van de gekwadrateerde afwijkingen in verticale zin van de punten t.o.v. de lijn is zo klein mogelijk.

[1)] Zie cursus statistiek voor meer informatie

# Intro (7): Nog een toepassing (b)

- Regressieanalyse wordt gebruikt om het effect te bepalen van één (of meerdere) verklarende variabele, zoals lengte of leeftijd, op een afhankelijke variabele zoals gewicht.

Je kunt regressieanalyse gebruiken om:

- **Samenhang tussen twee variabelen te bepalen** ( bv. leeftijd en waarde van een auto)
- **Verandering van de afhankelijke variabele voorspellen** (waarde van een auto naarmate deze ouder wordt)
- **Toekomstige waarde voorspellen** (waarde van een zes jaar oude auto)

(Lars van Heijst, 27 maart 2019) https://www.scribbr.nl/statistiek/regressieanalyse/

# Intro (8): Orthogonaliteit en least square

Samengevat – het waarom van H6:

- Veel praktische systemen (A$\bar{x}$ =$\bar{b}$) inconsistent
- Op zoek naar de ‘beste benadering’, ‘best approximated value’ of ‘best approximated function’

Dit betekent het bepalen van o.a.

- loodrechte projecties (kortste afstanden) => komt ook aan de orde bij
- Least square method

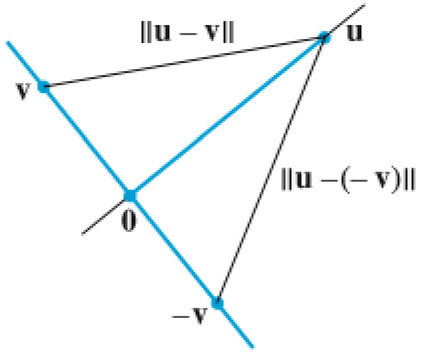

# Twee eenvoudige opdrachten

Noteer per paragraaf de (voor u) onbekende of nieuwe begrippen.

Leg per begrip in eigen bewoordingen (eventueel met een voorbeeld en/of schets, formule) uit wat er precies bedoeld wordt.

Bespreek deze binnen uw groep

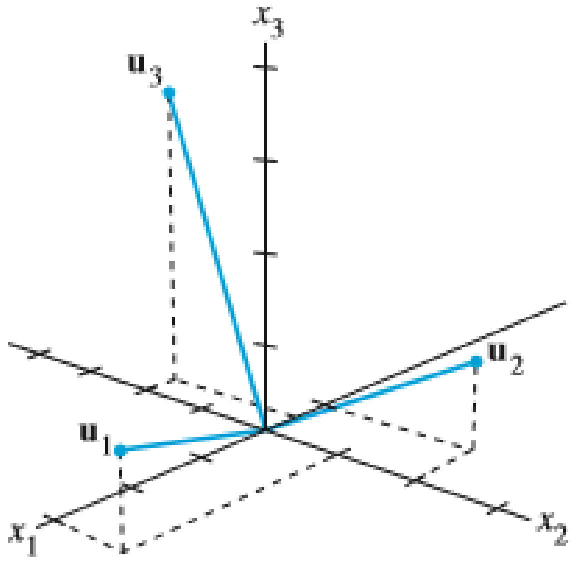

5 minutes




Afstand

ξ 6.1-6.2

Orthogonaal




Lengte van een vector

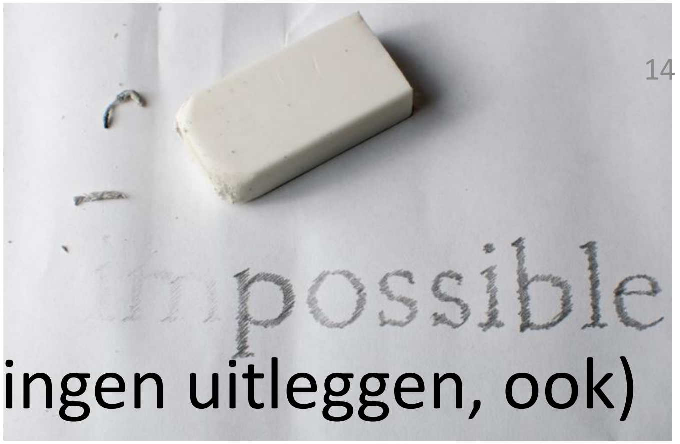
Orthonormale basis

Inwendig product

$U^T U = I$

Loodrechte projectie

# Lesdoelen 6.1-6.2




U kunt hierna (naast concepten in eigen bewoordingen uitleggen, ook)

1. De lengte (=norm) van een vector bepalen
2. Vectoren normaliseren
3. Nagaan als er sprake is van een orthogonale en ook orthonormale basis
4. Het orthogonaal complement van een vector(ruimte) bepalen
5. Loodrechte projecties berekenen alsook geometrisch interpreteren
6. Een vector ***y*** noteren als som van zijn orthogonale componenten

# Het inwendig product

Andere benamingen in $\mathbb{R}^n$: standaard inproduct

Berekening: levert een constante, een getal op.

Zij vectoren **u** en **v** in $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Het inwendig product van vectoren **u** en **v** :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

zie vb1 blz 331

# Eigenschappen inwendig product

Zij vectoren **u, v** en **w** in $\mathbb{R}^n$ en c een constant. Dan geldt:

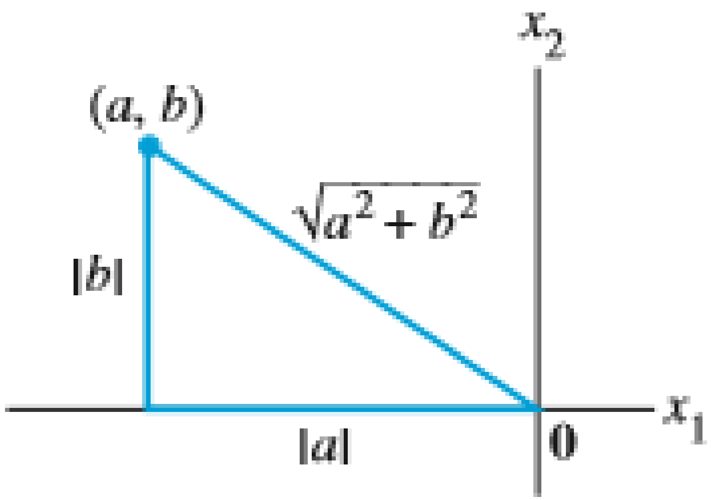
a. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

b. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

c. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$

d. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$, and $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ if and only if $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

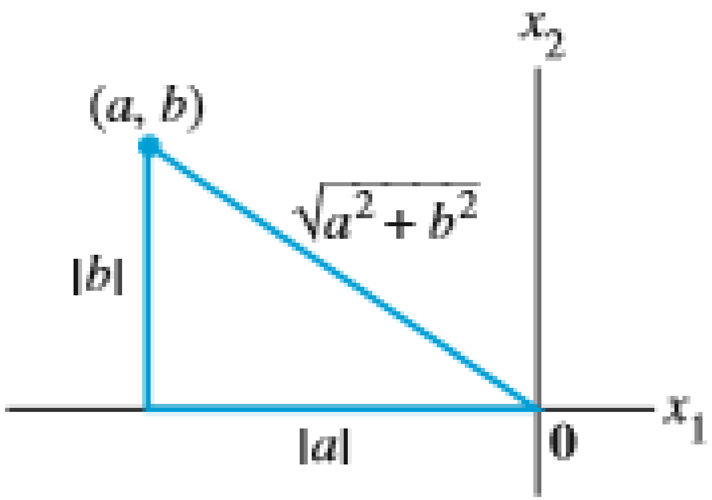
# Lengte of norm van een vector (1)




$\mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

# Lengte of norm van een vector (2)




$\mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$\mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^n$, with entries $v_1, \ldots, v_n$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2},$$

and $\quad \|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$


# Eenheidsvector en normaliseren

1. Geef een voorbeeld van een eenheidsvector in $\mathbb{R}^2$ en in $\mathbb{R}^n$


# Eenheidsvector en normaliseren

1. Geef een voorbeeld van een eenheidsvector in $\mathbb{R}^2$ en in $\mathbb{R}^n$

2. Gegeven een willekeurige vector in $\mathbb{R}^2$ bv $\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$

   Is dit een eenheidsvector? Zo ja, leg uit. Zo nee, maak het tot een eenheidsvector.

Zie ook blz 332


# Eenheidsvector en normaliseren

1. Geef een voorbeeld van een eenheidsvector in $\mathbb{R}^2$ en in $\mathbb{R}^n$

2. Gegeven een willekeurige vector in $\mathbb{R}^2$ bv $\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$

   Is dit een eenheidsvector? Zo ja, leg uit. Zo nee, maak het tot een eenheidsvector.

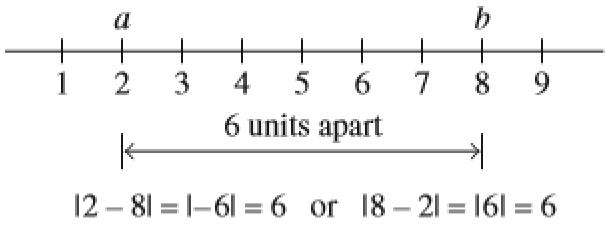
Zie ook blz 332

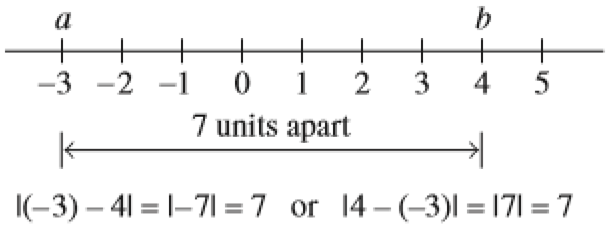
3. Wat wordt bedoeld met het normaliseren van een vector?

# Afstand (1)

In $\mathbb{R}$.

Afstand: hoeveelheid eenheden tussen een begin- en eindpunt $|a-b|$.

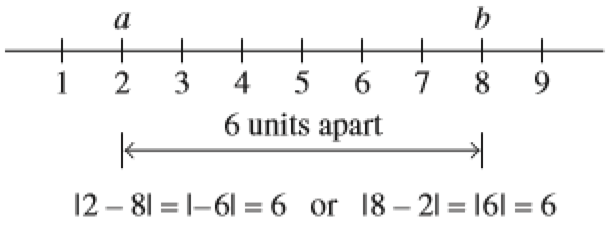


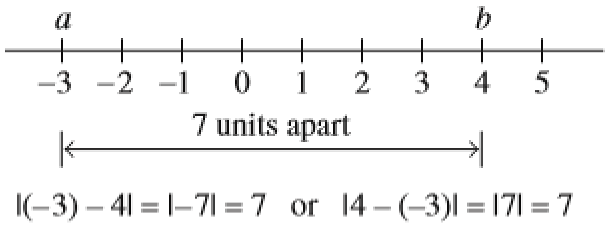



# Afstand (2)

In $\mathbb{R}$.

Afstand: hoeveelheid eenheden tussen een begin- en eindpunt $|a - b|$.

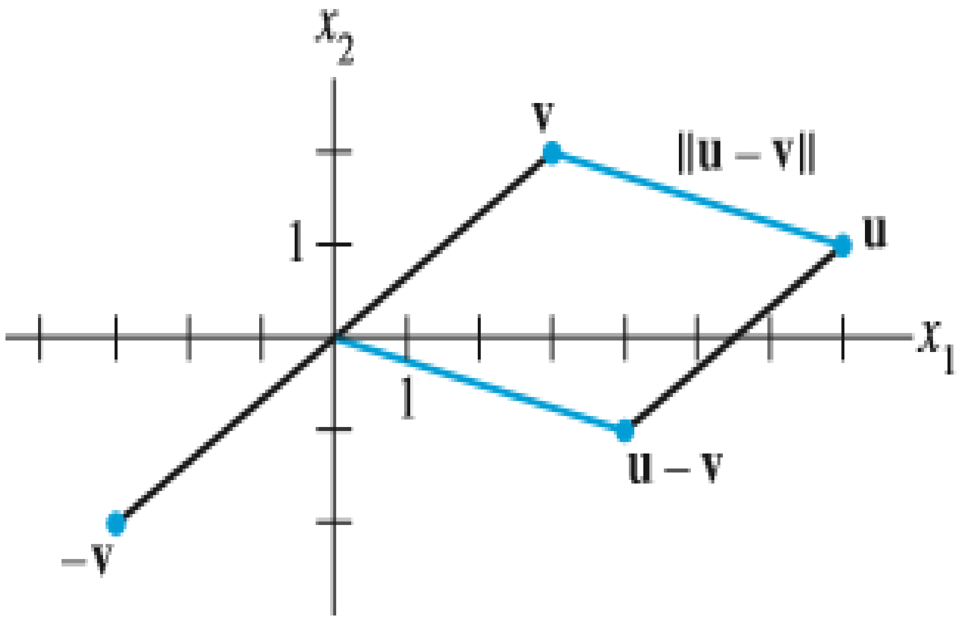



In $\mathbb{R}^n$ is de afstand tussen vectoren **u** en **v** gelijk aan de lengte **u - v**:

(Zie vb 4 blz 333)

$$\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$



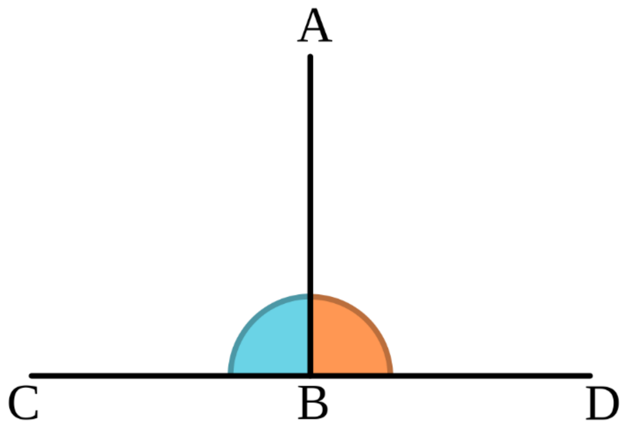
# Orthogonaal

⇒rechthoekig: de loodrechte stand van een vlak op een ander.

(Van Dale 1898)

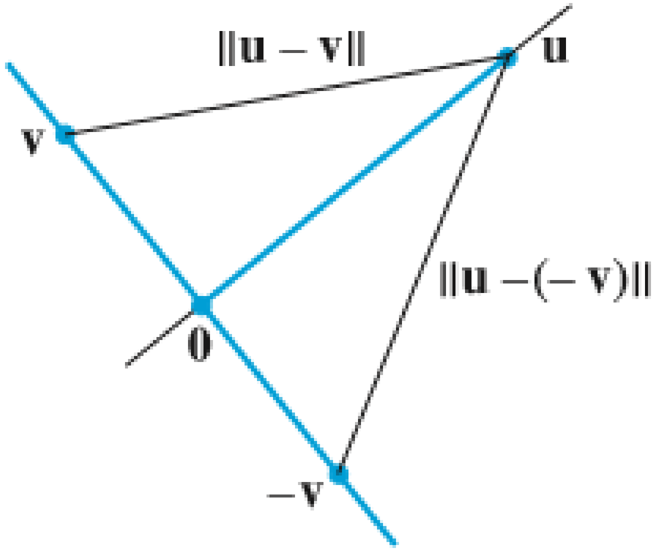
⇒Letterlijk 90 graden ten opzichte van elkaar. Het betekent dat twee zaken die orthogonaal zijn geheel onafhankelijke dimensies betreffen

(Drs. Markus van Alphen)



# Orthogonale vectoren

- Twee lijnen staan geometrisch loodrecht op elkaar d.e.s.d. als de afstand van **u** naar **v** gelijk is aan de afstand van **u** naar **–v**.




Twee vectoren in $\mathbb{R}^n$ staan loodrecht op elkaar (=orthogonaal) indien het inwendig product gelijk is aan nul : **u.v** = 0

Denk ook aan de stelling van Phytagoras




# Welke vectoren zijn orthogonaal

(Geef niet alleen het eindantwoord, maar motiveer eerst hoe je op orthogonaliteit kunt controleren)

a) $\begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix}$ , $\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

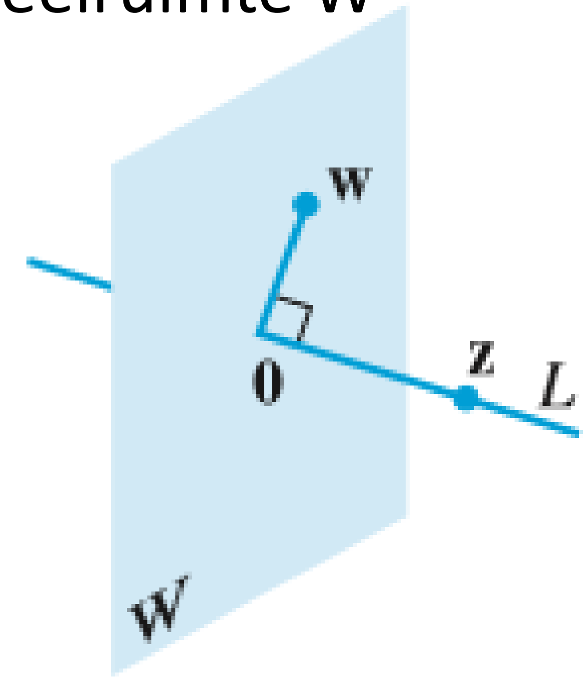
b) $\begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ , $\begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ 15 \\ -7 \end{bmatrix}$

# Het orthogonaal complement

Zij W een deelruimte van $\mathbb{R}^n$

vector **z** orthogonaal met elke vector **v** $\in$ W

=> **z** $\perp$ W lees: vector **z** is orthogonaal aan deelruimte W




**z** $\in$ L, we noteren dan:

L is gelijk aan W complement $L = W^{\perp}$

W is gelijk aan L complement $W = L^{\perp}$

# Put it together

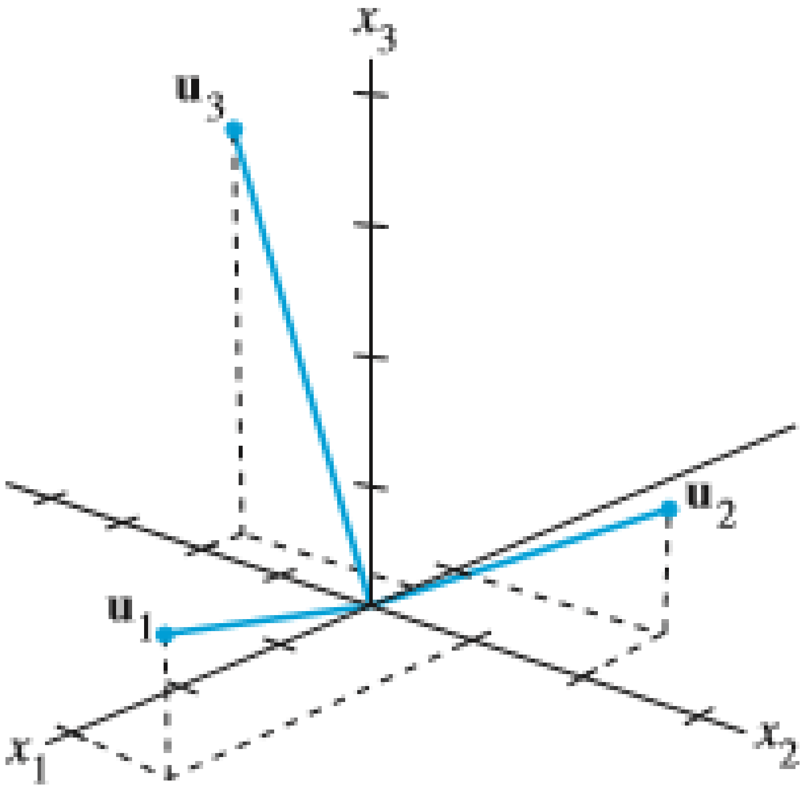
Gegeven een vector $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

Bepaal de verzameling van vectoren $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ oftewel de deelruimte H orthogonaal aan $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

# Orthogonale verzamelingen

Dit is een (deel)verzameling van vectoren $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ in $\mathbb{R}^n$ orthogonaal t.o.v. elkaar => vectoren zijn **lineair onafhankelijk** =>

vectoren vormen een ***basis***.




Basis in $\mathbb{R}^n$

orthogonaal

niet orthogonaal

(maak orthogonaal met Gram-Schmidt)

# Gewichtsfactoren $c_j$ van vector $\boldsymbol{y}$ bepalen (1)

Zij vector $\boldsymbol{y} \in$ W $\subset \mathbb{R}^n$ en een *orthogonale* basis voor W = $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$

Notatie $\boldsymbol{y}$ in gewichtsfactoren $c_j$ => $\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_p\boldsymbol{u}_p$

Vanwege orthogonale basis is $c_j$ eenvoudig te bepalen met

$$c_j = \frac{\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{u_j}}{\boldsymbol{u_j} \cdot \boldsymbol{u_j}} \qquad (j = 1, \cdots, p)$$

Ga na! (Bewijs dat het zo is).

# Gewichtsfactoren $c_j$ van vector ***y*** bepalen (2)

S is een orthogonale basis voor $\mathbb{R}^3$ $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$

Noteer de vector **y** als een linieare combinatie van de basis. $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -2 \\ 7/2 \end{bmatrix}$$

Oplossing: gevraagd $\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_3\boldsymbol{u}_3$

De basis S is orthogonal, dus $c_j = \frac{\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{u}_j}{\boldsymbol{u}_j \cdot \boldsymbol{u}_j}$

# Gewichtsfactoren $c_j$ van vector ***y*** bepalen (3)

Oplossing (vervolg):

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_3\cdot\mathbf{u}_3}\mathbf{u}_3 \\ &= \frac{11}{11}\mathbf{u}_1 + \frac{-12}{6}\mathbf{u}_2 + \frac{-33}{33/2}\mathbf{u}_3 \\ &= \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3\end{aligned}$$

Zie verder vb 2 blz 339

Hoe $c_j$ bepalen indien de basis niet orthogonaal was?

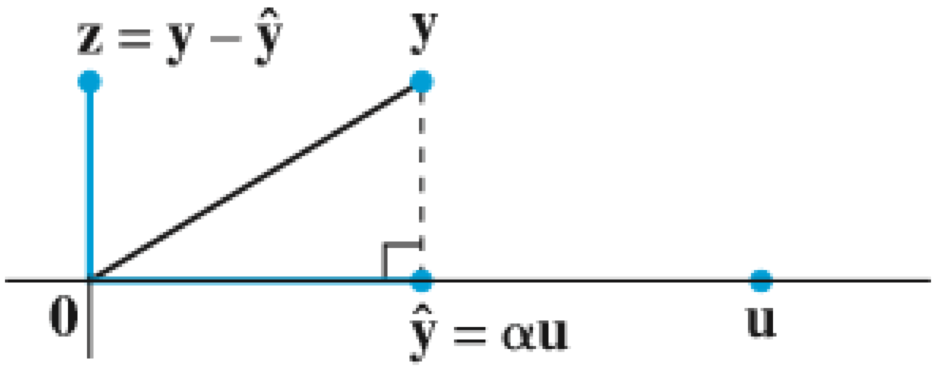
# Ontspannen in 10 minuten

Gegeven drie vectoren: $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \end{bmatrix}$

a) Toon aan dat de vectoren $\mathbf{u}_1$ **en** $\mathbf{u}_2$ een orthogonale basis vormen

b) Noteer de vector **x** met het gegeven in a) als een linieare combinatie van de basisvectoren $\mathbf{u}_1$ **en** $\mathbf{u}_2$ .

# Orthogonale projectie (1)




Elke ***y*** te noteren als $\boldsymbol{y} = \hat{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{z}$ of ook **z** = ***y*** - $\hat{\boldsymbol{y}}$

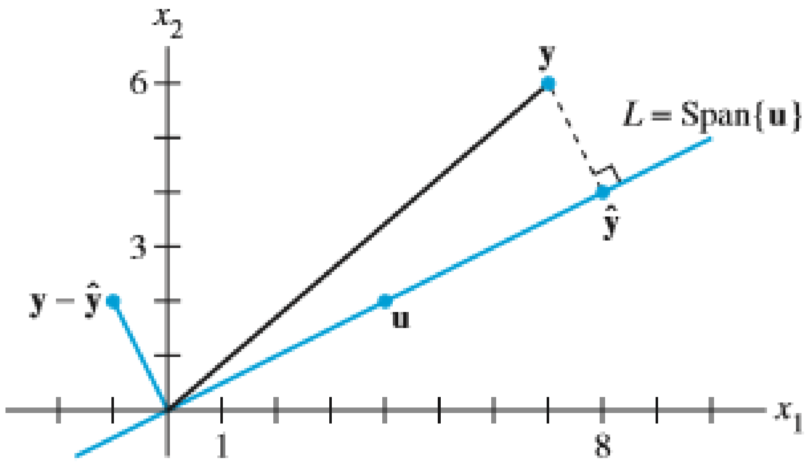
$\hat{y}$ = Loodrechte projectie van ***y*** op vector **u**

ookwel de notatie $\hat{\mathbf{y}} = \mathrm{proj}_L\, \mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\mathbf{u}$ met vector **u** in deelruimte L

**z** = Component van ***y*** orthogonaal aan **u**

# Orthogonale projectie (2)

- Vector ***y*** als som van twee orthogonale vectoren




- Bepaal ook de afstand van vector ***y*** tot deelruimte L

zie ook vb 3&4 blz 340-341


# Think – pair - share

Think (10 minutes) Bestudeer vb 3 blz 340 & maak opgave 13* van paragraaf 6.2

*Noteer vector ***y*** als de som van 2 orthogonale vectoren: 1 vector ligt in span{**u**}.

Pair (2 minutes)

Share (3 minutes)


5 minutes

# Geometrische interpretatie (1)

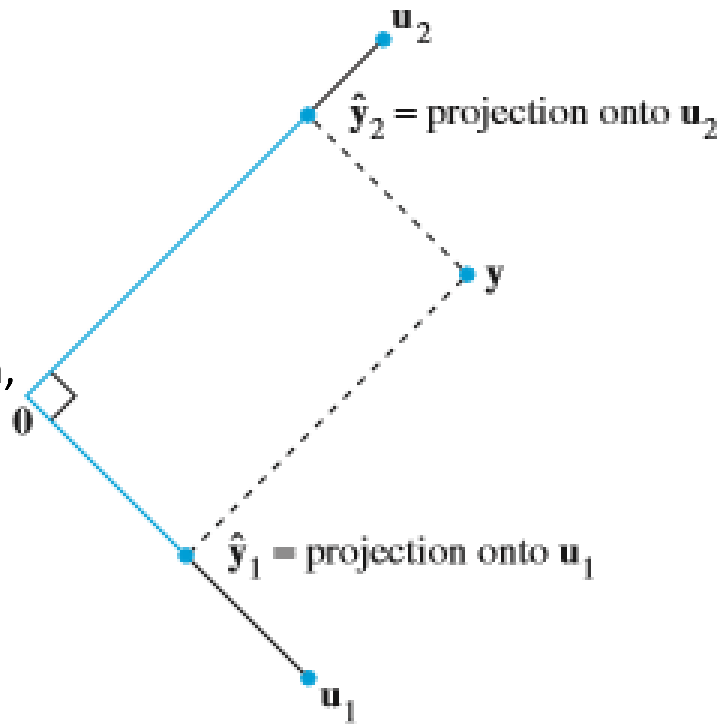
$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_p\boldsymbol{u}_p \text{ met } \quad c_j = \frac{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{u_j}}{\boldsymbol{u_j}\cdot\boldsymbol{u_j}} \qquad (j = 1, \cdots, p)$$

Bekijken in $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2$$

Vector y is de som van projecties op orthogonale coordinaatassen, opgespannen door orthogonale vectoren.

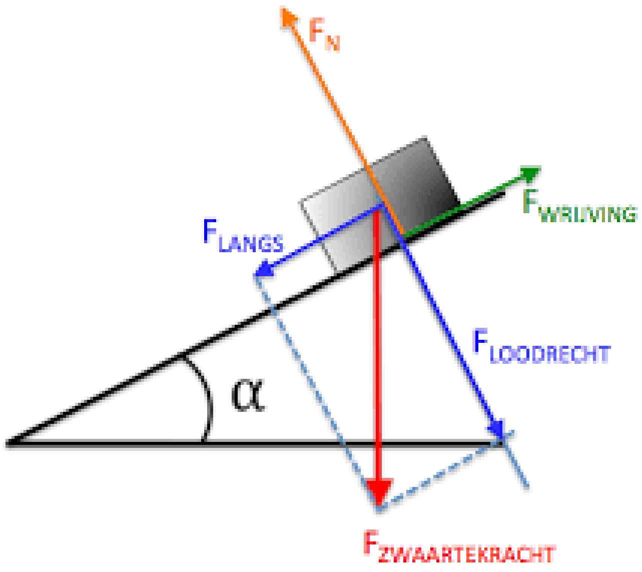
Elke term is een orthogonale projectie op een 1-dimensionale deelruimte



# Geometrische interpretatie (2)

Praktisch voorbeeld:

Zwaartekracht ontbonden in zijn orthogonale componenten




http://www.ptroquet.nl

# Orthonormale verzamelingen

⇒Een *orthogonale* verzameling van eenheidsvectoren.

⇒Hoe kun je aantonen als een basis S orthonormaal is?

⇒Gegeven een orthogonale basis. Hoe bekom je een orthonormale basis?

# Matrices U met orthonormale kolommen

Theorema 6.

Zij mxn matrix U.

De kolommen van U zijn **orthonormaal** <=> $U^TU = I$  zie vb6 blz 343

=> Transformatie **x**->U**x** behoudt lengte en orthogonaliteit


# Think – Pair – Share

Zijn onderstaande vectoren orthonormaal?

Zo ja, motiveer.

Zo nee, maak ze orthonormaal.

$$\begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$