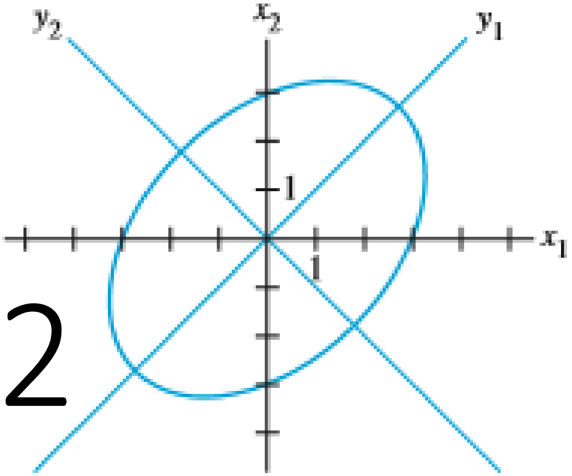
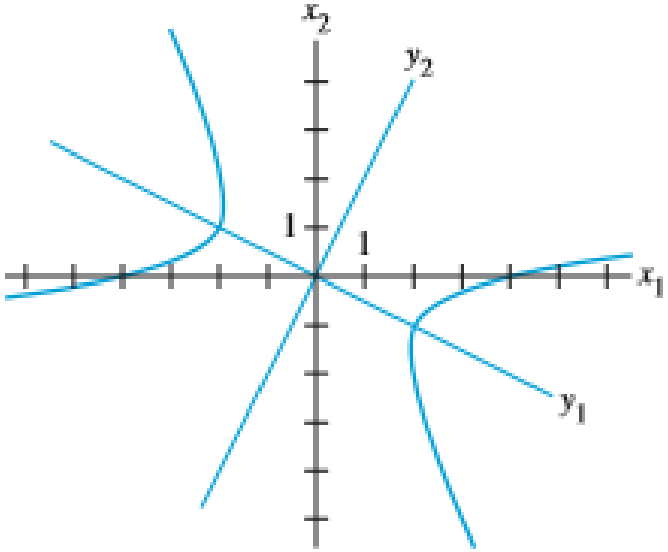




Lineaire algebra 2

Symmetrische matrices en Kwadratische vormen

H7.1 en 2

Introductie

Toepassingen symmetrische matrices:

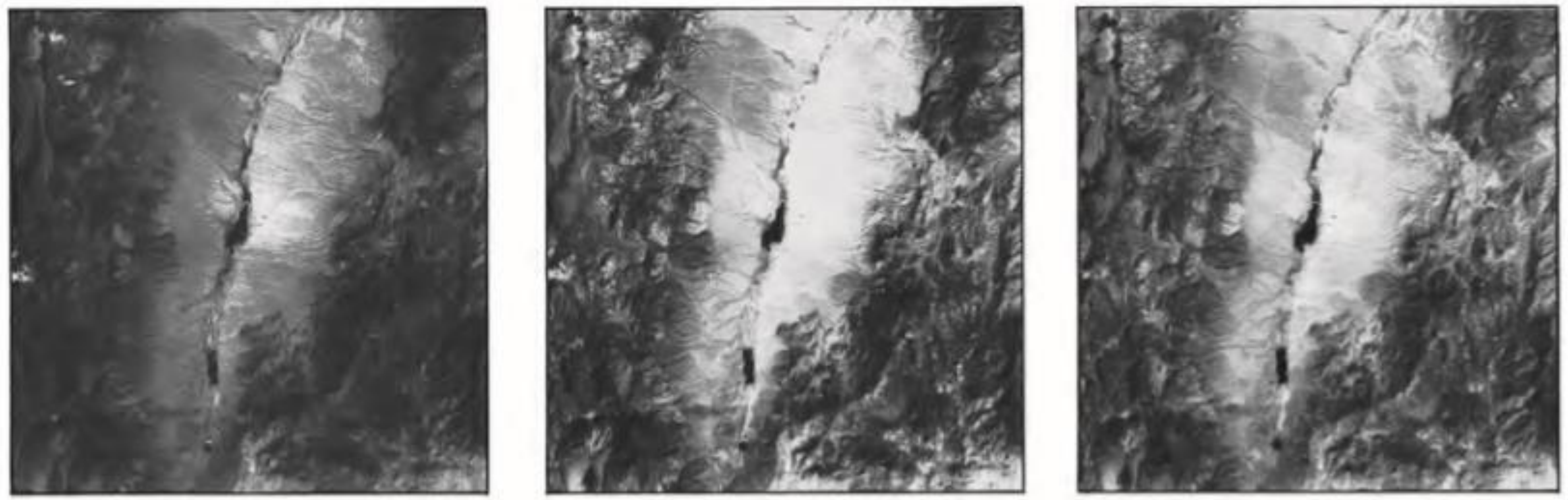
- Statistiek (correlatie matrices)
- Landmeetkunde
- Moleculaire chemie (afstandsmatrices)
- Numerieke wiskunde (gediscretiseerde partiele differentiaalvergelijkingen)
- Signaalanalyse en teledetectie

Symmetrische matrices zijn

$\Rightarrow$altijd diagonaliseerbaar

$\Rightarrow$te noteren in spectrale decompositie vorm

Toepassing Image processing: Railroad Valley, Nevada



(a) Spectral band 1: Visible blue. (b) Spectral band 4: Near infrared. (c) Spectral band 7: Mid-infrared.

1 image van hetzelfde gebied: simultane meting doch verschillend frequentiegebied.

Elke image geeft andere informatie over hetzelfde gebied

Pixel correspondeert met een observatie vector in $\mathbb{R}^3$ = signaalintensiteit in de drie spectraalbanden

Data van image => 3 x 4000.000 matrix

Multi dimensional karakter van de data refereert dan naar de drie spectrale dimensies

Lesdoelen 7.1

U kunt hierna

- de orthogonale diagonalisatie en
- de spectrale decompositievorm van een symmetrische matrix A bepalen

$$A = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T + \cdots + \lambda_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T$$

Begripsvorming:

- Wat wordt bedoeld met *symmetrische* matrices, en orthogonale matrices?
- Wat is het verschil tussen een diagonaliseerbare matrix A en een *orthogonaal* diagonaliseerbare A

Symmetrische matrices (1)

Definitie: Een *matrix A heet* **symmetrisch** als $A^T = A$

$\Rightarrow$Een symmetrische matrix is dus altijd <u>vierkant</u>

Voorbeeld van symmetrische matrices:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & -5 \\ 7 & -5 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$$

Niet symmetrisch:

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 7 \\ 8 & 0 & -5 \\ 7 & 3 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Quick question

Welke matrix is symmetrisch?

$a)\ \begin{bmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \end{bmatrix}$

$c)\ \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}$

$b)\ \begin{bmatrix} 5 & -3 & 7 \\ -3 & 2 & 5 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

$d)\ \begin{bmatrix} -2 & 8 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & -9 \end{bmatrix}$

Symmetrische matrices (2)

Belangrijkste eigenschap van een ***symmetrische*** matrix ***A:***

A is altijd diagonaliseerbaar

Theorema I: Matrix A symmetrisch => de eigenvectoren van A behorende bij ***verschillende*** λ_i zijn orthogonaal (Ga zelf na)

Symmetrische matrices (2)

Belangrijkste eigenschap van een ***symmetrische*** matrix ***A:***

A is altijd diagonaliseerbaar

Theorema I: Matrix A symmetrisch => de eigenvectoren van A behorende bij ***verschillende*** λ_i zijn orthogonaal (Ga zelf na)

Zie vb 2, p395. A symmetrisch en conform Thm 1 is A = PDP^{-1}

De eigenwaarden van A in vb 2 zijn λ_i = 8, 6, 3 (let op zijn verschillend)

Eigenvectoren van A zijn orthogonaal $\overline{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \overline{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \overline{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Symmetrische matrices (3)

Belangrijkste eigenschap van een ***symmetrische*** matrix ***A:***

A is altijd diagonaliseerbaar

Zie vb 2, p395. A symmetrisch en conform Thm 1 is A = PDP^{-1}

Dus P = $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ Maak kolommen van P Orthonormaal =>

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Noemen P dan een Orthogonale matrix

Orthogonale matrix (1)

Een **orthogonale** matrix is een *vierkante* matrix met *orthonormale* kolommen.

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(zie ook vb 7 van ξ6.2 blz 344)

Oefening 1

Welke matrix is een orthogonale matrix?

$$a)\ \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad b)\ \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Ga na:

1. Zijn ze vierkant?
2. Zijn de kolommen orthonormaal? => orthogonaal en norm = 1

Orthogonale matrix (2)

Een **orthogonale** matrix is een _vierkante_ matrix met _orthonormale_ kolommen.

$\Rightarrow$Indien P een orthogonale matrix dan geldt $P^TP = I$

$\Rightarrow$dwz P inverteerbaar met $P^{-1} = P^T$ (Zie ook thm 6 van ξ6.2 blz 343)

Vb2 blz 395. A symmetrisch en diagonaliseerbaar: $A = PDP^{-1}$

met in P orthonormale kolommen dan $P^{-1} = P^T$

Theorema

Eerder gezien:

Belangrijkste eigenschap van een ***symmetrische*** matrix ***A:***

A is altijd diagonaliseerbaar

Theorema:

A is **symmetrisch** ⇔ A is **vierkants en orthogonaal diagonaliseerbaar**

Dus $A = PDP^{-1} = PDP^{T}$

Oefening 2

Gegeven de matrix A en de daarbij horende eigenwaarden.

A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ met λ_i = 5, 2, -2

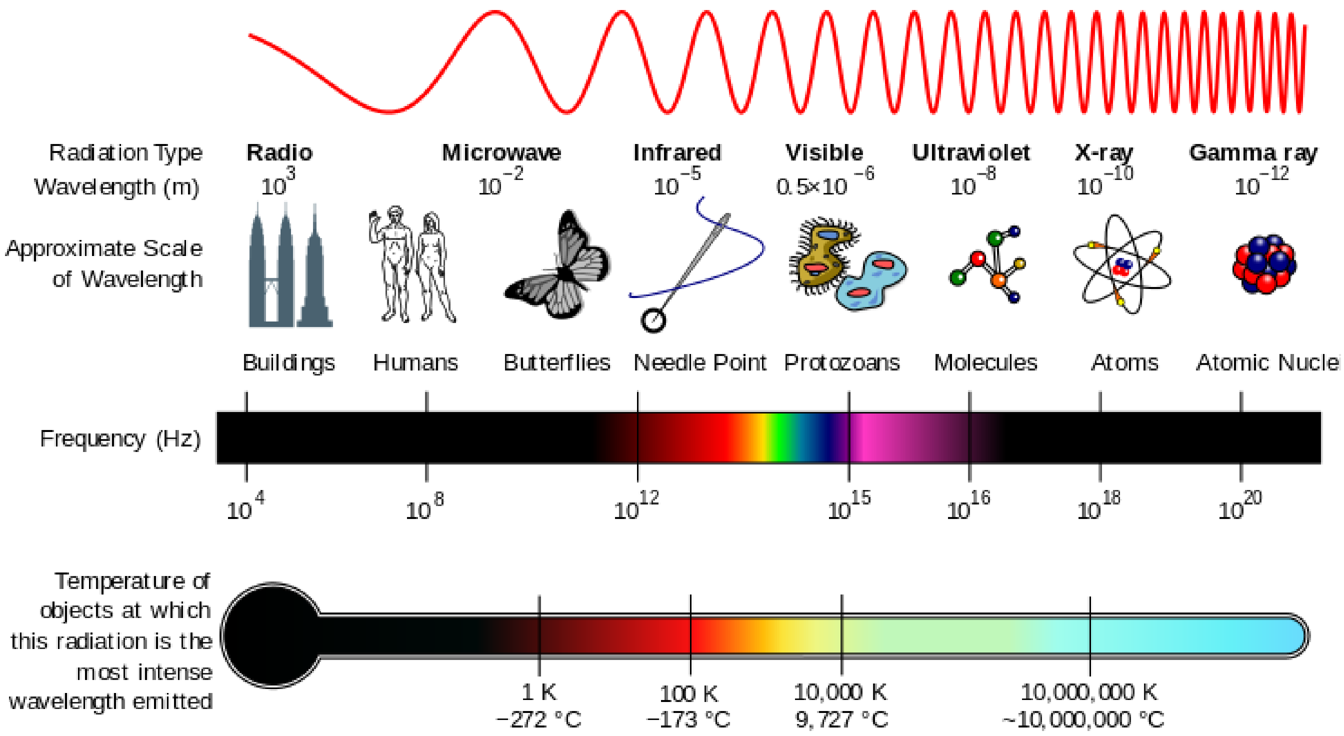
De matrix A is duidelijk orthogonaal diagonaliseerbaar. Explain.

Bepaal P^{-1}

Zie ook vb 3 blz 396 waarbij λ_i niet verschillend.

Spectraaldecompositie (1)

Spectrum = verloop van opeenvolgende kleuren of geluiden of andere verscheidenheden



Vb 1: Quantummechanica

Het spectrum van een gloeiend gas in termen van de (signaalintensiteit =) eigenwaarden λ_i zijn bv de energieniveau's van het atoom

Spectraaldecompositie (2)

Symmetrische matrix A is **orthogonaal diagonaliseerbaar**:

$\Rightarrow$Er is een ***orthonormale*** basis $\{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \dots\dots, \boldsymbol{u_n}\}$ van $\mathbb{R}^n$ met $\boldsymbol{u_i}$ eigenvector van A => A$\boldsymbol{u_i}$= $\lambda_i \boldsymbol{u_i}$

$\Rightarrow$Dus A =PDP^T met P = $(\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \dots\dots, \boldsymbol{u_n})$ en D = $\mathrm{diag}(\lambda_i, \dots, \lambda_n)$

Dan $A = PDP^T = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{u}_1 & \cdots & \lambda_n\mathbf{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix}$

Spectraaldecompositie (3)

$$\boxed{A = \lambda_1 \underbrace{\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T} + \lambda_2\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T + \cdots + \lambda_n\mathbf{u}_n\mathbf{u}_n^T}$$

=> Spectrale decompositie van A

Elke matrix is een projectiematrix, want $\mathbf{u_i u_i^T x} = (\mathbf{u_i^T x})\mathbf{u_i} = (\mathbf{x.u_i})\mathbf{u_i}$ is de (orthogonale) projectie van **x** langs de vector $\mathbf{u_i}$

Bestudeer vb 4 op blz 398 en practice problems op blz 399

Oefening 3

Noteer gegeven symmetrische matrix A in de vorm

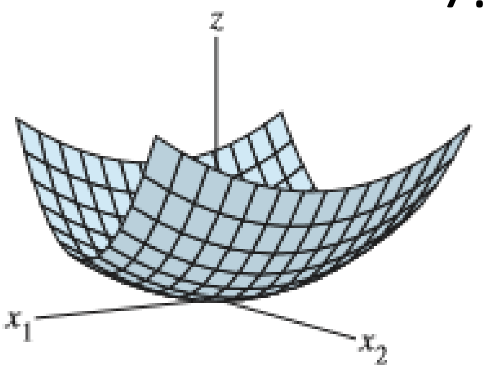
$$A = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T + \cdots + \lambda_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T$$

Ook wel: Bepaal de spectraaldecompositie van matrix A

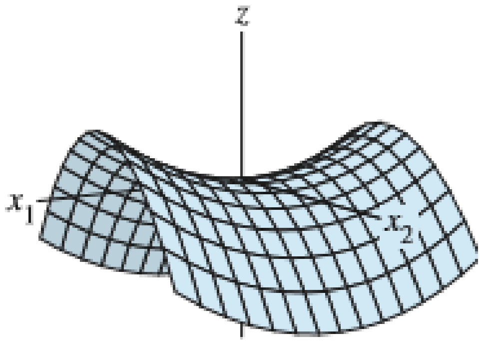
$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Kwadratische vormen

7.2



$z = 3x_1^2 + 7x_2^2$



$z = 3x_1^2 - 7x_2^2$

Kwadratische vorm

Kwadratische vorm: homogene veelterm van graad 2 bv ax_1^2-bx_1x_2+cx_2^2

Definitie: Een kwadratische vorm op $\mathbb{R}^n$ is een functie Q: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die voor elke $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ geschreven kan worden in de vorm $Q(\bar{x}) = \overline{x^T}A\bar{x}$ met A een symmetrische (nxn) matrix.

Deze *<u>symmetrische</u>* matrix A heet *<u>de matrix van de kwadratische vorm Q</u>*

Voorbeeld 1:

A = $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ en $Q(\bar{x}) = \overline{x^T}A\bar{x} = [x_1 \quad x_2]A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$=$[x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 4x_1 \\ 3x_2 \end{bmatrix} = 4x_1^2$+$3x_2^2$

Voorbeeld 2:

A = $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ en $Q(\bar{x}) = [x_1 \quad x_2]A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$=$[x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 7x_2 \end{bmatrix} = 3x_1^2$- 4$x_1x_2$+$7x_2^2$

Welke relatie herkent u in de matrix elementen en de coefficienten van Q?

Vb Toepassing in Operation research

Optimalisatie problematiek: Toewijzen van resources op een efficiente manier (= kosten besparend)

Vb: toewijzen resources voor het repareren van x mijl wegen en bruggen vs investering in y recreatie oorden.

$$4x^2 + 9y^2 \leq 36$$

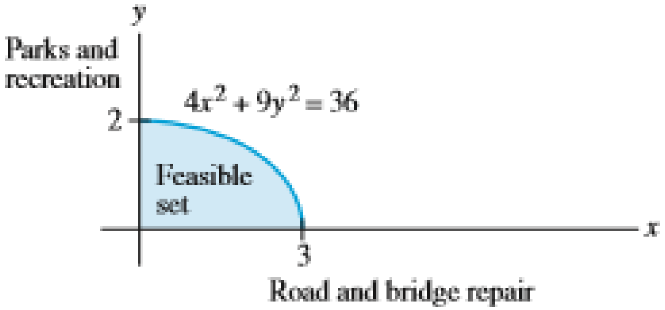


FIGURE 3 Public works schedules.

Lesdoelen 7.2

U leert:

- De kwadratische vorm Q van een symmetrische matrix bepalen.
- Omgekeerd, uit Q, de symmetrische matrix A bepalen
- Kwadratische vorm Q bepalen zonder kruisproducten

  (door variabele substitutie / vinden van P en D van A)
- Kwadratische vormen Q klassificeren: pos (semi)definiet, neg (semi)definiet, indefiniet

Voorbeeld symm matrix A en Q(**x**)

Zie vb 2 van 7.2 $Q(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 + 8x_2x_3$.

kruisproducten

a. Noteer Q(**x**) in de vorm $\overline{x^T} A\bar{x}$

b. Bereken Q(**x**) voor **x** = $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

Merk ook hier op:
De coefficienten van de kwadraten komen op de hoofdiagonaal en de coefficienten van de zgn kruisproducten worden conform ij posities verdeeld in de matrix

Oplossing a: Q(**x**) = $\overline{x^T} A\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Oplossing b: Q(1,2,-2)= $5(1) + 3(4) + 2(4) - 1(2) + 8(-4) = -9$ Hw opg 1

Q(x) zonder kruisproducten

Q(x) zonder kruisproducten => symm matrix van de kwadratische vorm, D, is dan een diagonaalmatrix

(figuur gebasseerd op vb 4 blz 402)

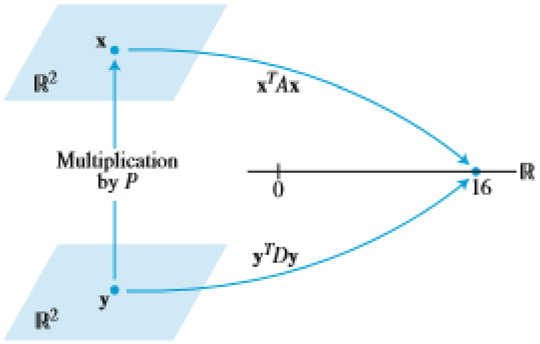


FIGURE 1 Change of variable in $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$.

Theorema: Zij A een nxn symmetrische matrix. Dan is een orthogonale variabele substitutie (eng: change of variable)

$\bar{x} = P\bar{y}$, die de kwadratische vorm $\overline{x^T} A\bar{x}$ transformeert naar een nieuwe kwadratische vorm $\overline{y^T} D\bar{y}$ zonder kruisproducten

P een inverteerbare matrix (met genormaliseerde eigenvectoren van A)

D = Diagonaal matrix van A

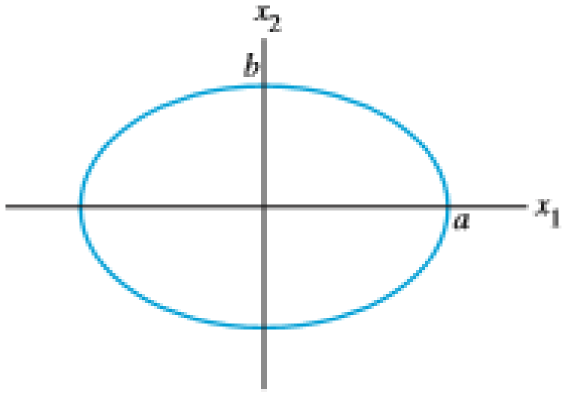
$\bar{y}$ een nieuwe variabele in $\mathbb{R}^n$

Geometrische kijk op de hoofdassen

De genormaliseerde eigenvectoren in matrix P worden de **hoofdassen** (eng = principal axes) van de kwadratische vorm $\overline{x}^T A \bar{x}$ genoemd

Grafiek in standaard positie: matrix A is geen diagonaal matrix

A geen diagonal matrix



$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1,\ a > b > 0$

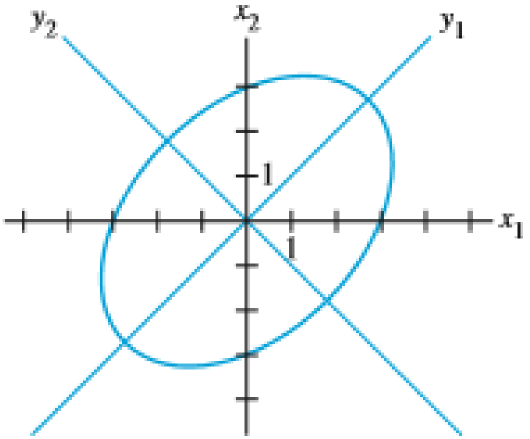
Nieuw coordinaat system

relatief aan staandaard systeem

vinden van hoofdassen

(genorm. eigenvectoren van A)

(zie ook vb 5 blz 404)



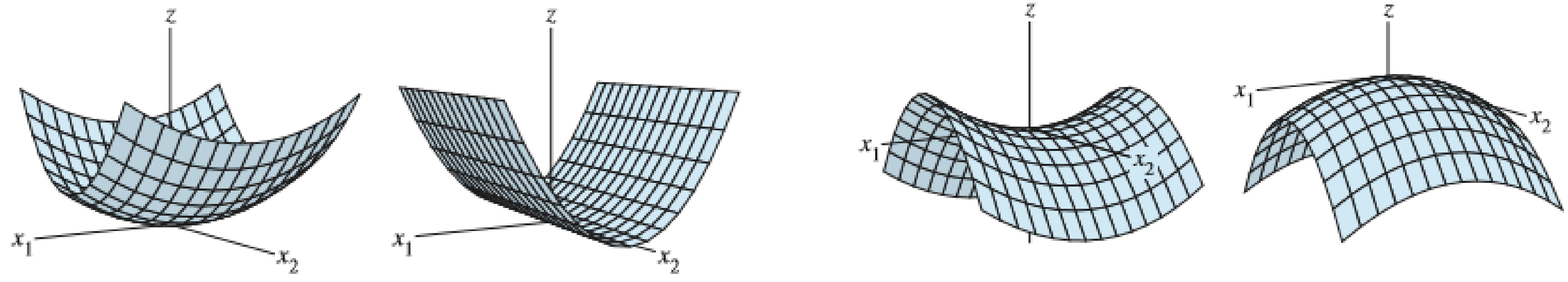
(a) $5x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 48$

Classificatie Kwadratische vormen

Definitie:

Een kwadratische vorm Q heet:

1. Positief definiet of definiet positief als Q(**x**) > 0 voor alle **x** $\neq$ 0
2. Negatief definiet of definiet negatief als Q(**x**) < 0 voor alle **x** $\neq$ 0
3. Indefiniet als Q(**x**) zowel pos als neg waarden aanneemt



(a) $z = 3x_1^2 + 7x_2^2$ (b) $z = 3x_1^2$ (c) $z = 3x_1^2 - 7x_2^2$ (d) $z = -3x_1^2 - 7x_2^2$

Classificatie Kwadratische vormen

Negatief semidefiniet indien $Q(\mathbf{x}) \leq 0$ voor alle $\mathbf{x}$ en $Q(\mathbf{x}) = 0$ voor zekere $x \neq 0$.

Analoog voor positief definiet

Theorema:

A een nxn symmetrische matrix. Een kwadratische vorm Q is

a. Pos def $\Leftrightarrow$ alle eigenwaarden van A zijn positief
b. Neg def $\Leftrightarrow$ alle eigenwaarden van A zijn negatief
c. Indefiniet $\Leftrightarrow$ A heeft zowel positieve als negatieve eigenwaarden