Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ________«Информатика и системы управления»_______________________

КАФЕДРА _______«Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»___

Лабораторная работа № _1_

Тема Задача Коши. Приближенный метод Пикара. Численный метод Эйлера.

Студент ___Ильясов И. М.___

Группа __ИУ7-63Б__

Оценка (баллы) _______________

Преподаватель __Градов В. М._

Москва, 2020 г.

Цель работы:

Изучить методы решения задачи Коши для ОДУ, применив приближенный аналитический метод Пикара и численный метод Эйлера в явном и неявном варианте.

Задание:

Решить уравнение, не имеющее аналитического решения:

$$\begin{cases} u'(x) = x^2 + u^2 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Данную задачу можно решить, используя **метод Пикара**:

$$y^s(x) = n + \int_0^x f\left(t, y^{(i-1)}(t)\right) dt$$

$$y^{(0)} = n$$

Для приведенного выше в задании примера получаем:

- Первое приближение: $y^{(1)}(x) = 0 + \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}$
- Второе приближение: $y^{(2)}(x) = 0 + \int_0^x [t^2 + (\frac{t^3}{3})^2] dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$
- Третье приближение: $y^{(3)}(x) = 0 + \int_0^x [t^2 + (\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63})^2] dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + 2 * \frac{x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}$
- Четвертое приближение: $y^{(4)}(x) = 0 + \int_0^x [t^2 + (\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + 2 * \frac{x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535})^2] dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + 2 * \frac{x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535} + 2 * \frac{x^{15}}{93555} + 2 * \frac{x^{19}}{3393495} + 2 * \frac{x^{19}}{2488563} + 2 * \frac{x^{23}}{86266215} + \frac{x^{23}}{99411543} + 2 * \frac{x^{27}}{3341878155} + \frac{x^{31}}{109876902975}$

Также данную задачу можно решить, используя **численные методы**:

- Явная схема Эйлера: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$
- Неявная схема Эйлера: $y_{n+1} = y_n + h(f(x_{n+1}, y_{n+1}))$

Рассмотрим неявную схему подробнее:

$f(x_n, y_n) = x_n^2 + y_n^2$

$y_{n+1} = y_n + h(x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2)$

$hy_{n+1}^2 - y_{n+1} + (y_n + hx_{n+1}^2) = 0$

$D = b^2 - 4ac = 1 - 4 * h * (y_n + h(x_n + h)^2)$

$$y_{n+1} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{D}}{2h}$$

Ниже приведен листинг программы:

```
# Метод Пикара
def picar_method(n, h, x, y0):
    def f1(t):
        return t ** 3 / 3
    def f2(t):
        return f1(t) + t ** 7 / 63
    def f3(t):
        return f2(t) +  (t ** 11) * (2 / 2079) + (t ** 15) / 59535
    def f4(t, f3):
        return f3 + (t ** 15)*(2 / 93555) + (t ** 19)*(2 / 3393495) + \
                    (t ** 19)*(2 / 2488563) + (t ** 23)*(2 / 86266215) + \
                    (t ** 23)*(1 / 99411543) + (t ** 27)*(2 / 3341878155) + \
                    (t ** 31)*(1 / 109876902975)

    y_out = [[y0, y0]]
    for i in range(n-1):
        x += h
        y_f3 = f3(x)
        y_out.append([y_f3, f4(x, y_f3)])
    return y_out


# Явный Эйлера
def explicit_euler_method(n, h, x, y):
    y_out = []
    for i in range(n):
        try:
            y += h * func(x, y)
            y_out.append(y)
            x += h
        except OverflowError:
            y_out.append('Overflow')
            for j in range(i, n - 1):
                y_out.append('-----')
            break
    return y_out


# Неявный Эйлера
def implicit_euler_method(n, h, x, y):
    y_out = [y]
    for i in range(n):
        D = 1 - 4 * h * (y + h * ((x + h)**2))
        if D < 0:
            y_out.append('Neg discr')
            for j in range(i, n - 2):
                y_out.append('-----')
            break
        y = (1 - sqrt(D)) / (2 * h)
        y += h * (func(x, y) + func(x + h, y + h * func(x,y))) / 2
        x += h
        y_out.append(y)
    return y_out
```