Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа № 3

Дисциплина Моделирование

Тема Марковские цепи

Студент Ильясов И. М.

Группа ИУ7-73Б

Преподаватель Рудаков И.В.

Москва, 2020 г.

Формализация задачи

Необходимо для сложной системы S, имеющей не более 10 состояний, определить среднее время нахождения системы в предельных состояниях, т.е. при установившемся режиме работы. Требуется вывести матрицу, в которой на пересечении строк и столбцов будет расположена интенсивность перехода. Размерность системы задается.

Теоретическая часть

Марковский процесс – это случайный процесс, обладающий следующим свойством – для каждого момента времени t_0 вероятность любого состояния системы в будущем $(t > t_0)$ зависит только от ее состояния в настоящем, т.е. при $t = t_0$ не зависит от того, когда и каким образом система перешла в это состояние. Марковский процесс не зависит от того, как данный процесс развивался в прошлом.

Для решения поставленной задачи требуется составить систему уравнений Колмогорова, имеющие следующий вид:

$$F = (P'(t), P(t), \lambda) = 0$$

Данные уравнения составляются по следующим принципам – в левой части каждого из уравнений стоит производная вероятности i-ого состояния, а в правой части стоит сумма произведений вероятностей всех состояний, умноженная на интенсивности соответствующих потоков событий, из которой вычли суммарную интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженная на вероятность данного i-ого состояния. Ниже приведен пример для системы, имеющей 4 состояния:

$$\begin{matrix} 0 & \lambda_{01} & \lambda_{02} & \lambda_{03} \\ \lambda_{10} & 0 & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{20} & \lambda_{21} & 0 & \lambda_{23} \\ \lambda_{30} & \lambda_{31} & \lambda_{32} & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} p'_0 = \lambda_{10}p_1 + \lambda_{20}p_2 - (\lambda_{01} + \lambda_{02})p_0 \\ p'_1 = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{31}p_3 - (\lambda_{10} + \lambda_{13})p_1 \\ p'_2 = \lambda_{02}p_0 + \lambda_{32}p_3 - (\lambda_{20} + \lambda_{23})p_2 \\ p'_3 = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2 - (\lambda_{31} + \lambda_{32})p_3 \end{cases}$$

Для получения предельных вероятностей, то есть вероятностей в стационарном режиме работы при $t \to \infty$, необходимо приравнять левые части уравнений к нулю. Таким образом, получается система линейных уравнений. Для решения полученной системы необходимо добавить условие нормировки: $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Результаты работы

Ниже приведены результаты работы программы для систем с 2, 4, 6, 8, 10 количеством состояний.

```
Input size of system: 2
+--------+--------+--------+
| States |   1    |   2    |
+--------+--------+--------+
|   1    |  0.0   | 0.9919 |
|   2    | 0.4411 |  0.0   |
+--------+--------+--------+


+--------+----------------------+-------+
| States | Marginal probability |  Time |
+--------+----------------------+-------+
|   1    |        0.3078        |  1.39 |
|   2    |        0.6922        | 1.391 |
+--------+----------------------+-------+
```

Рисунок 1 – результат при размерности системы равной 2.

Input size of system: 4

States	1	2	3	4
1	0.0	0.5031	0.5797	0.7263
2	0.0335	0.0	0.16	0.3675
3	0.0389	0.946	0.0	0.0917
4	0.0664	0.1952	0.0162	0.0

States	Marginal probability	Time
1	0.0283	2.116
2	0.3438	1.373
3	0.0746	8.706
4	0.5533	5.335

Рисунок 2 – результат при размерности системы равной 4.

Input size of system: 6

States	1	2	3	4	5	6
1	0.0	0.1149	0.6327	0.1945	0.1699	0.8344
2	0.0874	0.0	0.0098	0.464	0.6999	0.2801
3	0.8802	0.9902	0.0	0.2888	0.1487	0.4244
4	0.4841	0.9906	0.6883	0.0	0.5706	0.1583
5	0.3876	0.3036	0.7843	0.5301	0.0	0.5798
6	0.7558	0.846	0.5933	0.2155	0.9627	0.0

States	Marginal probability	Time
1	0.1846	0.942
2	0.2759	2.293
3	0.1448	31.436
4	0.1102	1.671
5	0.1642	1.576
6	0.1202	1.499

Рисунок 3 – результат при размерности системы равной 6.

Input size of system: 8

States	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.0	0.7758	0.5474	0.5452	0.389	0.9484	0.9737	0.0954
2	0.313	0.0	0.2191	0.5832	0.6594	0.9791	0.1107	0.8375
3	0.4637	0.4256	0.0	0.888	0.1061	0.2005	0.1228	0.3899
4	0.282	0.5642	0.7614	0.0	0.9813	0.7728	0.1189	0.4639
5	0.6436	0.7057	0.9842	0.1164	0.0	0.3547	0.3944	0.9704
6	0.3157	0.6824	0.5333	0.1486	0.1429	0.0	0.8771	0.5448
7	0.4484	0.2451	0.548	0.1017	0.7427	0.8794	0.0	0.4301
8	0.6333	0.9494	0.5238	0.6117	0.3014	0.0172	0.1847	0.0

States	Marginal probability	Time
1	0.093	1.696
2	0.1438	1.769
3	0.1777	2.178
4	0.107	1.155
5	0.0938	2.292
6	0.1445	1.317
7	0.0975	2.774
8	0.1427	2.103

Рисунок 4 – результат при размерности системы равной 8.

Input size of system: 10

States	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.0	0.4532	0.4982	0.7829	0.9282	0.9129	0.5438	0.3152	0.248	0.4293
2	0.1396	0.0	0.5667	0.8512	0.9559	0.1039	0.1011	0.5341	0.5132	0.872
3	0.2758	0.1796	0.0	0.4456	0.6427	0.9397	0.7717	0.0177	0.0261	0.489
4	0.9037	0.6552	0.1005	0.0	0.337	0.4349	0.01	0.6318	0.5533	0.4089
5	0.9181	0.3873	0.5638	0.9315	0.0	0.9241	0.5847	0.7142	0.091	0.0165
6	0.1194	0.6469	0.2344	0.7126	0.9547	0.0	0.6219	0.4805	0.7964	0.852
7	0.2053	0.07	0.2897	0.4303	0.6393	0.0741	0.0	0.6648	0.4963	0.9424
8	0.3858	0.0155	0.1629	0.5965	0.0777	0.8155	0.9633	0.0	0.5619	0.9231
9	0.7959	0.6622	0.6367	0.9464	0.7294	0.8409	0.1504	0.8001	0.0	0.9469
10	0.6028	0.2649	0.0153	0.746	0.6111	0.1397	0.5859	0.031	0.9014	0.0

States	Marginal probability	Time
1	0.0927	0.83
2	0.0746	1.881
3	0.0738	3.512
4	0.1501	2.043
5	0.108	0.944
6	0.0903	3.745
7	0.1093	1.606
8	0.0931	1.897
9	0.0705	1.238
10	0.1377	1.869

Рисунок 5 – результат при размерности системы равной 10.

Вывод

В результате выполнения лабораторной работы был смоделирован Марковский процесс. Также были найдены предельные вероятности и время нахождения сложной системы в предельных состояниях.