Рубежный контроль №1

по математической статистике

Ильясов Идрис Магомет-Салиевич

Группа ИУ7-63Б

Вариант – 63

14.05.2020 г

Общее количество листов в работе: 3

Ильясов Идрис Магомет-Салиевич.
Группа ИУ7-63Б

КОММЕНТАРИИ

Задание 1.

$$f_X(x) = \frac{2\lambda^2}{x^3}, \quad x \geq \lambda, \quad \lambda > 0$$

$\hat{\lambda}(\vec{X}) = \frac{2n-1}{2n} \min\limits_{x=\overline{1;n}} \{X_k\}$. Явл-ся ли оценка $\hat{\lambda}(\vec{X})$ а) несмещенной; б) эффективной по Рао-Крамеру?

Решение.

а) $F_X(x) = \int\limits_{\lambda}^{x} \frac{2\lambda^2}{x^3} dx = 2\lambda^2 \cdot \int\limits_{\lambda}^{x} x^{-3} dx = 2\lambda^2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} \Big|_{\lambda}^{x} =$

$= 2\lambda^2 \cdot \frac{1}{-2x^2} \Big|_{\lambda}^{x} = 2\lambda^2 \cdot \left(\frac{1}{-2x^2} + \frac{1}{2\lambda^2} \right) = 1 - \frac{\lambda^2}{x^2}$

$Y = \min\limits_{k=\overline{1;n}} \{X_k\};$

$F_y(Y) = P\{Y < y\} = 1 - P\{Y > y\} = 1 - P\{(X_1 > y) \ldots$

$\ldots (X_n > y)\} = 1 - \prod\limits_{i=1}^{n} P\{X_i > y\} = 1 - \prod\limits_{i=1}^{n} (1 - F_i(y))$

$F_y(Y) = 1 - (1 - 1 + \frac{\lambda^2}{x^2}) = 1 - \frac{\lambda^{2n}}{y^{2n}};$

$f_y(Y) = \frac{dF_y(Y)}{dy} = \frac{2n\lambda^{2n}}{y^{2n+1}}$

$M[Y] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f(y) dy = \int\limits_{\lambda}^{+\infty} \frac{y 2n\lambda^{2n}}{y^{2n+1}} dy = \int\limits_{\lambda}^{+\infty} \frac{2n\lambda^{2n}}{y^{2n}} dy =$

$= 2n\lambda^{2n} \int\limits_{\lambda}^{+\infty} \frac{1}{y^{2n}} dy = \frac{2n\lambda}{2n-1};$

$M[\hat{\lambda}] = \frac{2n-1}{2n} \cdot M[Y] = \frac{\cancel{(2n-1)} \cdot \cancel{2n}\lambda}{\cancel{2n} \cdot \cancel{(2n-1)}} = \lambda$

Получается, что $M[\hat{\lambda}] = \lambda \Rightarrow$ оценка $\hat{\lambda}(\vec{X})$ явл-ся несмещенной.

б) Чтобы проверить эф-ть по Рао-Крамеру, нужно найти показатель эффектив-ти, который равен

$e(\hat{\lambda}) = \frac{1}{I(\lambda) D[\hat{\lambda}]}$. $I = n I_0(\lambda)$, где

$I_0(\lambda) = M\{[\frac{\partial \ln f(X, \lambda)}{\partial \lambda}]^2\};$

$DX = M[X^2] - (MX)^2$

?

Ильясов Идрис Магомет-Салиевич
Группа ИУ7-63Б

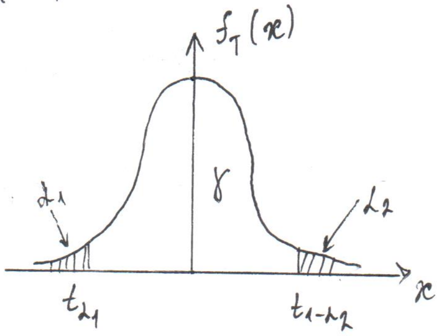
КОММЕНТАРИИ

Задание 2.

$X \sim N(m, \sigma^2)$, где m и σ^2 неизвестны. Построить для m доверительный интервал уровня $\gamma = 0{,}9$, если после $n = 16$ испыт. получены значения $\bar{x} = 3{,}52$, $S^2(\vec{x}) = 1{,}21$

<u>Решение.</u> Из нашего условия следует, что $X \sim N(m, \sigma^2)$, но m и σ^2 неизвестны. Нужно построить для m доверительный интервал. То есть получается нужно построить доверит. интервал для мат. ожидания норм. случайн. вел. при неизвестной дисперсии и мат. ожидании. Используем центральную статистику (распредел. Стьюдента).

$$\frac{m - \bar{x}}{S(x_n)} \sqrt{n} \sim St(n-1) \sim St(15)$$



$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2}$$

$$t_{\alpha_2} = t_{1-\frac{1-\gamma}{2}} = t_{\frac{1+\gamma}{2}}$$

$$\gamma = P\left\{ -t_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{m - \bar{x}}{S}\sqrt{n} < t_{\frac{1+\gamma}{2}} \right\}$$

$$\gamma = P\left\{ \bar{x} - \frac{S t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + \frac{S t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \right\}$$

$$\underline{m}(\vec{x}) = \bar{x} - \frac{S \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}; \quad \overline{m}(\vec{x}) = \bar{x} + \frac{S \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}};$$

$$\frac{1+\gamma}{2} = \frac{1{,}9}{2} = 0{,}95; \quad t_{0{,}95} = 1{,}753 \text{ (таблица квантилей)}$$

$$\frac{t_{\frac{1+\gamma}{2}} \cdot S}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}753 \cdot 1{,}1}{\sqrt{16}} \approx 0{,}482$$

$$\underline{m}(\vec{x}) = 3{,}52 - 0{,}482 \approx \underline{3{,}038}$$

$$\overline{m}(\vec{x}) = 3{,}52 + 0{,}482 \approx \underline{4{,}002}$$

Ответ: доверит. интервал уровня 0,9 для m: $(3{,}038; 4{,}002)$