Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ________________«Информатика и системы управления»________________________

КАФЕДРА ________«Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»_________

Домашнее задание № 1

Дисциплина Математическая статистика

Студент _Ильясов И. М._

Вариант _9_

Группа _ИУ7-63Б_

Оценка (баллы) _________________

Преподаватель _Власов П. А._

Москва, 2020 г.

Задача №1
(Предельные теоремы теории вероятностей)

С использованием неравенства Чебышева оценить вероятность того, что частота появления грани с четным числом очков при 10000 бросках правильной игральной кости отклонится от вероятности ее появления не более чем на 0.01. Сравнить найденное значение с результатом, полученными с использованием интегральной теоремы Муавра-Лапласа.

Решение

Так как отдельные испытания независимы, то значит испытания проводятся по схеме Бернулли. Вероятность появления грани с четным числом очков при бросании правильной игральной кости $p = \frac{1}{2}$, вероятность появления грани с нечетным числом очков – $q = \frac{1}{2}$. Общее количество бросков $n = 10000$.

Используя **неравенство Чебышева**, оценим вероятность того, что частота появления грани с четным числом очков при 10000 бросках правильной игральной кости отклонится от вероятности ее появления не более чем на 0.01:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) > 1 - \frac{p*q}{n*\varepsilon^2},$$

где $p = q = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = 0.01$, $n = 10000$.

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{2}\right| \leq 0.01\right) > 1 - \frac{\frac{1}{2}*\frac{1}{2}}{10000*0.01^2} = 0.75$$

Используем **интегральную теорему Муавра-Лапласа** для оценки искомой вероятности:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon * \sqrt{\frac{n}{p*q}}\right) = 2\Phi\left(0.01 * \sqrt{\frac{10000}{\frac{1}{2}*\frac{1}{2}}}\right) = 2\Phi(2) \approx$$

$$\approx 2 * 0.477 \approx 0.9544.$$

Ответ:

- $\boldsymbol{P = 0.75}$ – по неравенству Чебышева;
- $\boldsymbol{P \approx 0.9544}$ – по интегральной теореме Муавра-Лапласа.

Задача №2
(Метод моментов)

С использованием метода моментов для случайной выборки $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ *из генеральной совокупности X найти точечные оценки указанных параметров заданного закона распределения.*

Закон распределения: $f_X(x) = \frac{3*\theta^3}{x^4}, x > \theta$.

Решение

Неизвестный параметр – $\theta \implies r = 1$.

Найдем момент первого порядка (математическое ожидание):

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x * f(x)dx) =$$

$$= \int_{\theta}^{+\infty} \left(x * \frac{3*\theta^3}{x^4}dx\right) = 3*\theta^3 * \int_{\theta}^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx = \left(3*\theta^3 * -\frac{1}{2*x^2}\right)\Bigg|_{\theta}^{+\infty} =$$

$$= 3*\theta^3 * \left(0 + \frac{1}{2*\theta^2}\right) = \frac{3*\theta}{2}.$$

Приравняем теоретические моменты к их выбранным аналогам и найдем неизвестный параметр:

$$MX = \overline{x} = \frac{3*\theta}{2};$$

$$\theta = \frac{2*\overline{x}}{3};$$

Ответ: $\boldsymbol{\theta = \frac{2*\overline{x}}{3}}$ **при** $\boldsymbol{x > \theta}$.

Задача №3
(Метод максимального правдоподобия)

С использованием метода максимального правдоподобия для случайной выборки $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ *из генеральной совокупности* X *найти точечные оценки параметров заданного закона распределения. Вычислить выборочные значения найденных оценок для выборки* $\overrightarrow{x_5} = (x_1, \dots, x_5)$.

Закон распределения: $f_X(x) = \theta * x^{-(\theta+1)}, x > 1$.

Выборка $\overrightarrow{x_5}$: $(4, 16, 22, 7, 17)$.

Решение

Найдем функцию правдоподобия:

$$\alpha(x_1, \dots, x_n, \theta) = P\{X = x_1\} * P\{X = x_2\} * \dots * P\{X = x_n\} =$$
$$= \theta * x_1^{-(\theta+1)} * \dots * \theta * x_n^{-(\theta+1)} = \theta^n * (x_1 * \dots * x_n)^{-(\theta+1)}.$$

Прологарифмируем обе части:

$$\ln L = \ln\left(\theta^n * (x_1 * \dots * x_n)^{-(\theta+1)}\right) = \ln \theta^n + \ln(x_1 * \dots * x_n)^{-(\theta+1)} =$$
$$= n * \ln \theta - (\theta + 1) * (\ln x_1 + \dots + \ln x_n).$$

Необходимое условие экстремума $\Longrightarrow \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - (\ln x_1 + \dots + \ln x_n) = 0;$$

$$\theta = \frac{n}{\ln x_1 + \dots + \ln x_n} = \frac{5}{\ln 4 + \ln 16 + \ln 22 + \ln 7 + \ln 17} = \frac{5}{\ln 167552} \approx \frac{5}{12.029};$$

Достаточное условие экстремума $\Longrightarrow \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} \neq 0$:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} = -\frac{n}{\theta^2} = \begin{vmatrix} n > 0 \\ \theta > 0 \end{vmatrix} \Longrightarrow -\frac{n}{\theta^2} < 0 \Longrightarrow \theta - \text{точка максимума.}$$

Ответ:

$$\boldsymbol{\theta = \frac{5}{\ln 4 + \ln 16 + \ln 22 + \ln 7 + \ln 17} = \frac{5}{\ln 167552} \approx \frac{5}{12.029}}.$$

Задача №4
(Доверительные интервалы)

С помощью $n = 5$ секундомеров, позволяющих производить измерения со средним квадратичным отклонением $\sigma = 0.15$ с, получены следующие значения времени вывода космического аппарата на орбиту (в секундах):

425.5, 425.3, 426.1, 425.7, 425.9.

Полагая, что ошибки измерения секундомеров подчинены нормальному закону, построить 90%-ный доверительный интервал для среднего времени вывода аппарата на орбиту.

Решение

Пусть $\vec{X}$ – время вывода аппарата на орбиту, ξ – ошибка измерения секундомера. Тогда $g(\vec{X}, m) = \alpha * (m - \overline{X})$, а $M[\vec{X}] = m, D[\vec{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$. Получается, что $M[g(\vec{X}, m)] = 0$, а $D[g(\vec{X}, m)] = \alpha^2 * D[\vec{X}] = \alpha^2 * \frac{\sigma^2}{n}$. Так как закон распределения $g(\vec{X}, m)$ нормальный (как линейная комбинация независимых нормальных случайных величин), полагаем, что $\alpha = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}$.

Получаем центральную статистику: $g(\vec{X}, m) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} * (m - \overline{X}) \sim N(0, 1)$.

$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} * (m - \overline{X}) = h_{\alpha_1} \Rightarrow \underline{m}(\vec{X}) = \overline{X} + h_{\alpha_1} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} * (m - \overline{X}) = h_{1-\alpha_2} \Rightarrow \overline{m}(\vec{X}) = \overline{X} + h_{1-\alpha_2} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

При этом $\gamma = 0.9$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.05$.

$$\gamma = P\{h_{\alpha_1} < g(\vec{X}, m) < h_{1-\alpha_2}\} = P\{\underline{m}(\vec{X}) < m < \overline{m}(\vec{X})\}.$$

При этом среднее арифметическое равно:

$$\overline{X} = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{5} * (425.5 + 425.3 + 426.1 + 425.7 + 425.9) = 425.7.$$

Тогда получим доверительный интервал:

$$\underline{m} = 425.7 + (-1.645) * 0{,}067 = 425.59;$$

$$\overline{m} = 425.7 + 1.645 * 0{,}067 = 425.81.$$

Ответ: (425.59, 425.81).