

BENTUK PANGKAT, AKAR, DAN LOGARITMA

Standar Kompetensi :

Memecahkan masalah yang berkaitan dengan bentuk pangkat, akar, dan logaritma.

Kompetensi Dasar :

- Menggunakan aturan pangkat, akar, dan logaritma
- Melakukan manipulasi aljabar dalam perhitungan yang melibatkan pangkat, akar, dan logaritma.

Indikator :

- Mengubah bentuk pangkat negatif ke pangkat positif dan sebaliknya.
- Menyederhanakan bentuk aljabar yang memuat pangkat rasional
- Mengubah bentuk akar ke bentuk pangkat dan sebaliknya.
- Mengubah bentuk pangkat ke bentuk logaritma dan sebaliknya.

Tujuan Pembelajaran :

Setelah selesai pembelajaran siswa diharapkan dapat :

- Mengubah bentuk pangkat negatif ke bentuk pangkat positif dan sebaliknya
- Mengubah bentuk akar ke bentuk pangkat dan sebaliknya
- Menyederhanakan bentuk aljabar yang memuat pangkat rasional
- Mengubah bentuk pangkat ke bentuk logaritma
- Menyederhanakan bentuk aljabar yang memuat pangkat rasional

BAB I. PENDAHULUAN

A. Deskripsi

Dalam modul ini Anda akan mempelajari bilangan pangkat bulat positif, negatif, rasional, bentuk akar, merasionalkan penyebut, menentukan persamaan pangkat, dan menentukan nilai logaritma.

B. Prasyarat

Untuk mempelajari modul ini, para siswa diharapkan telah menguasai dasar-dasar penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian bilangan real.

C. Petunjuk Penggunaan Modul

Untuk mempelajari modul ini, hal-hal yang perlu Anda lakukan adalah sebagai berikut:

1. Untuk mempelajari modul ini haruslah berurutan, karena materi yang mendahului merupakan prasyarat untuk mempelajari materi berikutnya.
2. Pahami contoh-contoh soal yang ada, dan kerjakanlah semua soal latihan yang ada. Jika dalam mengerjakan soal Anda menemui kesulitan, kembalilah mempelajari materi yang terkait.
3. Kerjakanlah soal evaluasi dengan cermat. Jika Anda menemui kesulitan dalam mengerjakan soal evaluasi, kembalilah mempelajari materi yang terkait.

4. Jika Anda mempunyai kesulitan yang tidak dapat Anda pecahkan, catatlah, kemudian tanyakan kepada guru pada saat kegiatan tatap muka atau bacalah referensi lain yang berhubungan dengan materi modul ini. Dengan membaca referensi lain, Anda juga akan mendapatkan pengetahuan tambahan.

D. Tujuan Akhir

Setelah mempelajari modul ini diharapkan Anda dapat:

1. Menghitung bilangan pangkat bulat positif dan negatif,
2. Menghitung bilangan pangkat rasional
3. Menentukan bentuk akar
4. Merasionalkan penyebut,
5. Menentukan persamaan pangkat,
6. Menentukan nilai logaritma

BAB II PEMBELAJARAN

A. PANGKAT BULAT POSITIF

Jika $a \in \mathbb{R}$ dan $n > 1$, $n \in \mathbb{A}$ maka

$$a^n = \underbrace{a.a.a.a.a.a.a \dots a}$$

sebanyak n kali

a disebut bilangan pokok

n disebut pangkat / eksponen

Sifat-sifat eksponen bulat positif

Jika a dan b bilangan real, m dan n bilangan bulat positif

$$1. a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2. a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$3. (a^m)^n = a^{mn}$$

$$4. (a.b)^m = a^m \cdot b^m$$

$$5. \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Contoh :

Sederhanakan :

$$1. a^3 \cdot a^5 = a^{3+5} = a^8$$

$$2. a^7 : a^2 = a^{7-2} = a^5$$

$$3. (a^3 b^6 c^4)^2 = a^{3 \cdot 2} b^{6 \cdot 2} c^{4 \cdot 2} = a^6 b^{12} c^8$$

$$4. (a^8 : a^6)^3 = (a^{8-6})^3 = a^{2 \cdot 3} = a^6$$

$$5. \left(\frac{a^3 b^5}{ab^2}\right)^4 = (a^{3-1} \cdot b^{5-2})^4 = (a^2 b^3)^4 = a^8 b^{12}$$

B. PANGKAT BULAT NEGATIF DAN RASIONAL

$$\frac{1}{a^m} = \frac{a^0}{a^m} = a^{0-m} = a^{-m}$$

$$\text{Jadi } a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Bilangan rasional yaitu bilangan yang dapat dinyatakan dengan $\frac{a}{b}$ dan $a, b \in B$ dan $b \neq 0$.

$a^{\frac{n}{m}}$ merupakan bilangan dengan pangkat tak sebenarnya.

Contoh :

1. Nyatakan dengan eksponen positif :

a. $a^{-5} = \frac{1}{a^5}$

b. $\frac{12a^{-2}}{3b^{-5}} = \frac{4b^5}{a^2}$

2. Sederhanakan :

a. $\frac{a^3b^6}{a^5b^2} = a^{-2}b^4 = \frac{b^4}{a^2}$

b. $\left(b^{\frac{4}{5}}b^{-\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(b^{-\frac{2}{5}}\right)^{\frac{5}{2}} = b^{-1} = \frac{1}{b}$

c. $\frac{x^{\frac{9}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{4}{3}}} = \frac{x^{\frac{12}{2}}}{x^{\frac{4}{3}}} = x^{6-\frac{4}{3}} = x^{\frac{14}{3}}$

3. Sederhanakan :

a. $8^{\frac{4}{3}} = (2^3)^{\frac{4}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{4}{3}} = 2^4 = 16$

b. $(32)^{\frac{2}{5}} \cdot (27)^{\frac{1}{3}} = (2^5)^{\frac{2}{5}} (3^3)^{\frac{1}{3}} = 2^2 \cdot 3 = 12$

Tugas I

1. Selesaikan dengan menulis faktor perkaliannya.

a. 2^6

b. -3^4

c. $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$

d. $\left(-\frac{1}{3}\right)^0$

2. Sederhanakan :

a. $(a^3 \cdot b^4 \cdot c^6)(a \cdot b^3 \cdot c^2)^2$

b. $\left[\left(\frac{x^5y^6}{x^3y^2}\right)^3\right]^5$

$$c. \frac{27p^5q^{-3}}{9p^6q^{-4}}$$

$$d. \left(\frac{a^2b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}b^{-1}} \right)^{-\frac{3}{2}}$$

3. Tentukan nilai dari :

$$a. (64)^{\frac{1}{3}}(25)^{-\frac{1}{2}}$$

$$b. \frac{64^{\frac{1}{3}} \cdot 9^{\frac{3}{2}}}{64^{-\frac{2}{3}} \cdot 9^2}$$

4. Sederhanakan dan nyatakan dalam pangkat positif

$$a. \frac{x^{-1} + y^{-2}}{x^{-2} - y^{-1}}$$

$$b. \frac{a^{-2} + a^{-1} + a^0}{a^{-4} + a^{-3} + a^{-2}}$$

$$5. \text{ Hitunglah : } \frac{16^{\frac{3}{4}} + 8 \cdot 16^{-\frac{1}{2}} - 5}{27^{\frac{2}{3}} - 6 \cdot 27^{-\frac{1}{3}} + 3}$$

6. Nyatakan bentuk berikut tidak dengan pangkat negatif atau nol

$$a. 7^{-5}$$

$$b. (8x)^0$$

$$c. 8x^0$$

$$d. (-3)^2$$

7. Sederhanakan dan nyatakan dalam bentuk pangkat positif.

$$a. 2^{-3}$$

$$b. a^{-1} + b^{-1}$$

$$c. \left(\frac{3a^2b^{-3}}{a^{-5}b} \right)^{-2}$$

$$d. \frac{x^{-2}y - xy^{-2}}{x^{-1}y - xy^{-1}}$$

C. BENTUK AKAR

Bentuk akar adalah bilangan-bilangan dibawah akar yang hasilnya merupakan bilangan irasional.

Contoh : $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{8}, dsb$

Sifat-sifat bentuk akar :

$$1. \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$2. \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$3. \sqrt{a}(\sqrt{b} \pm \sqrt{c}) = \sqrt{ab} \pm \sqrt{ac}$$

$$4. m\sqrt{a} \pm n\sqrt{a} = (m \pm n)\sqrt{a}$$

$$5. \quad m\sqrt{a} \pm m\sqrt{b} = m(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})$$

$$6. \quad \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$

$$7. \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$8. \quad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

Contoh :

Sederhanakanlah :

$$1. \quad \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$$

$$2. \quad 2\sqrt{162} = 2\sqrt{81 \cdot 2} = 2 \cdot 9\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$$

$$3. \quad 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

$$4. \quad \sqrt{108} + \sqrt{48} = \sqrt{36 \cdot 3} + \sqrt{16 \cdot 3} = 6\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

$$5. \quad 4\sqrt{20} - 2\sqrt{45} = 4\sqrt{4 \cdot 5} - 2\sqrt{9 \cdot 5} = 4 \cdot 2\sqrt{5} - 2 \cdot 3\sqrt{5} = 8\sqrt{5} - 6\sqrt{5}$$

$$6. \quad 4\sqrt{6}(\sqrt{3} + 5\sqrt{2}) = 4\sqrt{18} + 20\sqrt{12} = 4\sqrt{9 \cdot 2} + 20\sqrt{4 \cdot 3} = 12\sqrt{2} + 40\sqrt{3}$$

$$7. \quad (3\sqrt{2} + \sqrt{6})(3\sqrt{2} - \sqrt{6}) = (3\sqrt{2})^2 + 3\sqrt{12} - 3\sqrt{12} - (\sqrt{6})^2 \\ = 18 - 6 = 12$$

Sederhanakan dan tulis dalam bentuk akar :

$$1. \quad \left(a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\frac{4}{3}} \cdot a = a^{\frac{7}{3}} = a^2 \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^2 \cdot \sqrt[3]{a}$$

$$2. \quad \left(x^{\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{5}{4}}\right)^2 = x^{\frac{3}{2}} \cdot y^{\frac{5}{2}} = x \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot y^2 \cdot y^{\frac{1}{2}} = x \cdot y^2 \sqrt{xy}$$

Nyatakan ke bentuk pangkat rasional :

$$1. \quad \sqrt[3]{a^2 \sqrt{a}} = \sqrt[3]{a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{a^{\frac{5}{2}}} = \left(a^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}}$$

$$2. \quad \sqrt{a^3 \sqrt{a \sqrt{a}}} = \sqrt{a^3 \sqrt{a \cdot a^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{a^3 \sqrt{a^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt{a \cdot a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{a^{\frac{3}{2}}} = \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{4}}$$

Tugas II

1. Sederhanakan :

$$a. \quad \sqrt{200}$$

$$b. \quad \sqrt{288}$$

$$c. \quad \sqrt{216}$$

$$d. \quad \sqrt{75} + \sqrt{50} - \sqrt{32}$$

$$e. \quad 2\sqrt{18} + 3\sqrt{12} - \sqrt{98}$$

2. Sederhanakan :

a. $5\sqrt{6}(3\sqrt{10} + \sqrt{15})$

b. $(\sqrt{7} + 3\sqrt{2})(\sqrt{7} - 3\sqrt{2})$

3. Diketahui $a = \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$ dan $b = \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{3}$

Tentukan $a.b$

4. Sederhanakan dan tulis dalam bentuk akar :

a. $\frac{a^{-\frac{1}{2}}.b^2}{a^{-1}.b^{\frac{3}{2}}}$

b. $\frac{x^{\frac{2}{3}}.y^{\frac{1}{2}}}{x^{-2}.y^3}$

5. Diketahui segitiga ABC sama kaki dengan $AB = AC = 8\sqrt{2}$ dan $BC = 8$.

Tentukan :

a. tinggi segitiga dari titik sudut A

b. Luas segitiga tersebut

D. MERASIONALKAN PENYEBUT

Contoh : Rasionalkan penyebutnya

1. $\frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

2. $\frac{6}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{6.(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{5 - 2} = \frac{6.(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{3} = 2.(\sqrt{5} - \sqrt{2})$

E. PERSAMAAN EKSPONEN

1. Jika $a^{f(x)} = a^p$ maka berlaku $f(x) = p$; $a \neq 0$

2. Jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ maka berlaku $f(x) = g(x)$; $a \neq 0$

Contoh :

Tentukan himpunan penyelesaian persamaan berikut :

a.

$$9^{2x-1} = 27$$

$$3^{2(2x-1)} = 3^3$$

$$3^{4x-2} = 3^3$$

$$4x - 2 = 3$$

$$4x = 5$$

$$x = \frac{5}{4}$$

Jadi HP = $\{\frac{5}{4}\}$

b.

$$2^{3x-1} = \sqrt{\left(\frac{1}{32}\right)^{x-4}}$$

$$2^{3x-1} = \sqrt{(2^{-5})^{x-4}}$$

$$2^{3x-1} = \sqrt{2^{20-5x}}$$

$$2^{3x-1} = 2^{\frac{1}{2}(20-5x)}$$

$$2^{3x-1} = 2^{10-\frac{5}{2}x}$$

$$3x-1 = 10-\frac{5}{2}x$$

$$6x-2 = 20-5x$$

$$11x = 22$$

$$x = 2$$

Tugas III

1. Rasionalkan penyebutnya :

a. $\frac{12}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

b. $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$

c. $\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}}$

2. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan berikut :

a. $5^{x+3} = 25^{x-2}$

b. $\sqrt{4^{2x+1}} = 64$

c. $\sqrt{16^{2x+4}} = (0,25)^{-3x-3}$

d. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} = \sqrt[3]{2^{3x+1}}$

F. LOGARITMA

Logaritma adalah kebalikan dari perpangkatan. Jadi apabila diketahui $a^x=b$ maka x dapat ditentukan dengan logaritma yang berbentuk $x = {}^a \log b$

a : bilangan pokok logaritma dengan $a > 0$, $a \neq 1$

b : Numerus , $b > 0$

Contoh :

* $2^5 = 32 \longrightarrow {}^2 \log 32 = 5$

* $3^{-4} = \frac{1}{81} \longrightarrow {}^3 \log \frac{1}{81} = -4$

Sifat-sifat logaritma

Bila a, b, c dan p bilangan real yang memiliki sifat $a > 0, b > 0, p > 0$ dan $p \neq 1$, maka berlaku :

1. ${}^p \log b = x$, maka $p^x = b$

2. ${}^p \log ab = {}^p \log a + {}^p \log b$

3. ${}^p \log \frac{a}{b} = {}^p \log a - {}^p \log b$

4. ${}^p \log a^n = n \cdot {}^p \log a$

5. ${}^p \log a \cdot {}^a \log b \cdot {}^b \log c = {}^p \log c$; $a \neq 1, b \neq 1$

6. ${}^a \log b = \frac{{}^p \log b}{{}^p \log a}$

7. ${}^p \log x = \frac{1}{{}_x \log p}$; $x \neq 1$

8. $a^{a \log x} = x$

9. ${}^{a^m} \log b^n = \frac{n}{m} \cdot {}^a \log b$

10. ${}^p \log 1 = 0$

11. ${}^p \log p = 1$

12. ${}^p \log p^n = n$

Contoh :

1. Sederhanakan :

a. ${}^2 \log 4 - {}^2 \log 6 + {}^2 \log 12 = {}^2 \log \frac{4 \cdot 12}{6} = {}^2 \log 8 = 3$

b. ${}^3 \log 4 \cdot {}^2 \log 125 \cdot {}^5 \log 81 = {}^3 \log 2^2 \cdot {}^2 \log 5^3 \cdot {}^5 \log 3^4$
 $= 2 \cdot {}^3 \log 2 \cdot 3 \cdot {}^2 \log 5 \cdot 4 \cdot {}^5 \log 3$
 $= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot {}^3 \log 2 \cdot {}^2 \log 5 \cdot {}^5 \log 3$
 $= 24 \cdot {}^3 \log 3$
 $= 24$

c. $36^{6 \log 3} = 36^{36 \log 9} = 9$

d. $\log 5 + \frac{1}{{}_4 \log 10} + \frac{1}{{}_{25} \log 100} = \log 5 + {}^{10} \log 4 + {}^{100} \log 25$
 $= \log 5 + \log 4 + \log 5$
 $= \log 100$
 $= 10$

2. Diketahui ${}^2 \log 3 = a$ dan ${}^3 \log 5 = b$

Nyatakan dengan a dan b bentuk-bentuk berikut :

$$a. {}^{16}\log 3 = {}^{2^4}\log 3 = \frac{1}{4} \cdot {}^2\log 3 = \frac{1}{4}a$$

$$b. {}^9\log 32 = {}^{3^2}\log 2^5 = \frac{5}{2} \cdot {}^3\log 2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{{}^2\log 3} = \frac{5}{2a}$$

Tugas IV

1. Tentukan nilai dari :

a. ${}^3\log 1/27$

b. ${}^9\log \frac{1}{3}$

2. Sederhanakan :

a. ${}^6\log 84 - {}^6\log 7 + {}^6\log \frac{1}{2}$

b. ${}^2\log \sqrt{8} + {}^{16}\log \frac{1}{4} + {}^4\log 64$

c. ${}^3\log 25 \cdot {}^{36}\log 27 \cdot {}^5\log 6$

3. Sederhanakan :

a. $\frac{\log 2\sqrt{2} + \log \sqrt{3} + \log 18}{\log 6}$

b. $\log(2\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \log(2\sqrt{3} - \sqrt{3})$

4. Diketahui ${}^2\log 3 = x$ dan ${}^5\log 2 = y$

Nyatakan dengan x dan y bentuk-bentuk berikut :

a. ${}^5\log 15$

b. ${}^2\log 45$

c. ${}^{18}\log 20$

BAB III PENUTUP

Setelah menyelesaikan modul ini, anda berhak untuk mengikuti tes untuk menguji kompetensi yang telah anda pelajari. Apabila anda dinyatakan memenuhi syarat ketuntasan dari hasil evaluasi dalam modul ini, maka anda berhak untuk melanjutkan ke topik/modul berikutnya.