BENTUK AKAR DAN LOGARITMA

Disusun Oleh:

KELOMPOK II

IV-E MATEMATIKA

ABDUL RAIS P.	10536 4631 13
ROSDIANTI	10536 4627 13
NUR EKASARI	10536 4629 13
NURFAJRI INDAHSARI	10536 4628 13
RISKA ANDRIANA	10536 4630 13

Mata Kuliah :
Telaah Matematika SMA
Dosen :
Drs. Sabirin, M.Pd.

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH MAKASSAR
2015

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami sampaikan ke hadirat Tuhan Yang Maha Pemurah, karena berkat kemurahanNya makalah ini dapat kami selesaikan sesuai yang diharapkan. Dalam makalah ini kami membahas “BENTUK AKAR DAN LOGARITMA”, dalam menyelesaikan tugas mata kuliah Telaah Matematika SMA.

Dalam pembuatan makalah ini, penulis mendapat bantuan dari berbagai pihak, maka pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada : Drs. Sabirin, M.Pd. yang telah memberikan kesempatan dan memberi fasilitas sehingga makalah ini dapat selesai dengan lancar. Dan terima kasih pula kami ucapkan kepada bapak dan ibu dirumah yang telah memberikan bantuan materil maupun do’anya, sehingga pembuatan makalah ini dapat terselesaikan. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang membantu pembuatan makalah ini.

Akhir kata semoga makalah ini bisa bermanfaat bagi pembaca pada umumnya dan penulis pada khususnya, penulis menyadari bahwa dalam pembuatan makalah ini masih jauh dari sempurna untuk itu penulis menerima saran dan kritik yang bersifat membangun demi perbaikan kearah kesempurnaan. Akhir kata penulis sampaikan terimakasih.

Makassar, 28 Februari 2015

Kelompok II

A. MENGUBAH BENTUK PNGKAT KE BENTUK AKAR

Pengakaran (penarikan akar) suatu bilangan merupakan inversi dari pemangkatan suatu bilangan. Akar dilambangkan dengan notasi ” $\sqrt{\ }$ ”.

Akar ke-*n* atau akar pangkat *n* dari suatu bilangan *a* dituliskan sebagai $\sqrt[n]{a}$, dengan *a* adalah bilangan pokok/basis dan *n* adalah indeks/eksponen akar. Bentuk akar dan pangkat memiliki kaitan erat. Bentuk akar dapat diubah menjadi bentuk pangkat dan sebaliknya. Sebelum mempelajari bentuk akar, kamu harus memahami konsep bilangan rasional dan irrasional terlebih dahulu.

Bilangan rasional berbeda dengan bilangan irrasional. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dengan *a* dan *b* bilangan bulat dan $b \neq 0$. Bilangan rasional terdiri atas bilangan bulat, bilangan pecahan murni, dan bilangan pecahan desimal. Sedangkan, bilangan irrasional adalah bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan. Bilangan irrasional merupakan bilangan yang mengandung pecahan desimal tak berhingga dan tak berpola. Contoh bilangan irrasional, misalnya $\sqrt{2}$ = 1,414213562373..., *e* = 2,718..., π = 3,141592653… dan sebagainya.

Bilangan irrasional yang menggunakan tanda akar ($\sqrt{}$) dinamakan *bentuk akar*. Tetapi ingat, tidak semua bilangan yang berada dalam tanda akar merupakan bilangan irrasional. Contoh: $\sqrt{25}$ dan $\sqrt{64}$ bukan bentuk akar, karena nilai 25 adalah 5 dan nilai 64 adalah 8, keduanya bukan bilangan irrasional. Agar lebih jelas, perhatikan contoh berikut :

1. $\sqrt{20}$ adalah bentuk akar
2. $\sqrt[3]{27}$ adalah bukan bentuk akar, karena $\sqrt[3]{27}=3$

Adapun hubungan antara bentuk pangkat dan bentuk akar adalah seperti pada penjelasan di bawah ini :

Perlu diketahui bahwa bilangan berpangkat memiliki hubungan dengan bentuk akar. Perhatikan sifat di bawah ini :

Jika *a* adalah bilangan real dan *a* $\neq$ 0 dengan *a* > 0, $\frac{p}{n}$ dan , $\frac{m}{n}$ adalah bilangan pecahan *n* $\neq$ 0,

- Perhatikan bahwa $p^{\frac{1}{2}}$ x $p^{\frac{1}{2}}$ = $p^{\frac{1+1}{2}}$ = p^{1} = p

  Dan perhatikan bahwa $\sqrt{p} x \sqrt{p} = p$, sehingga dapat disimpulkan bahwa :

$p^{\frac{1}{2}}$ =

- Perhatikan Untuk kasus di bawah ini :

  $p^{\frac{1}{3}} x\, p^{\frac{1}{3}} x\, p^{\frac{1}{3}}$ = $p^{\frac{1+1+1}{3}}$ = p^{1} = p dan perhatikan juga bahwa $\sqrt[3]{p} x \sqrt[3]{p} x \sqrt[3]{p} = p,$ sehingga berdasarkan definisi dapat disimpulkan

  Secara umum dapat disimpulkan bahwa :

$p^{\frac{m}{n}}$ = $\sqrt[n]{p^{m}}$ =

B. OPERASI ALJABAR PADA BENTUK AKAR

a. Operasi Penjumlahan dan Pengurangan Bentuk Akar

Operasi penjumlahan dan pengurangan pada bentuk akar dapat dilakukan apabila bentuk akarnya senama. Bentuk akar senama adalah bentuk akar yang mempunyai eksponen dan basis sama. Untuk setiap *p, q* dan *r* adalah bilangan real dan *r* ≥ 0 , maka berlaku sifat- sifat berikut :

• $p\sqrt[n]{r} + q\sqrt[n]{r} = (p+q)\sqrt[n]{r}$ • $p\sqrt[n]{r} - q\sqrt[n]{r} = (p-q)\sqrt[n]{r}$

Perhatikan contoh berikut !

1. $3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = (3+4)\sqrt{5}$
   ¿ $7\sqrt{5}$
2. $2\sqrt[3]{4} - 4\sqrt[3]{4} = (3-4)\sqrt[3]{4}$
   ¿ $-\sqrt[3]{4}$
3. $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ = (tidak dapat disederhanakan karena akarnya tidak senama)
4. $3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{x} = (3-2)\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x}$

b. Operasi Perkalian dan Pembagian Bentuk Akar

Pada pangkat pecahan telah dinyatakan bahwa $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$.

Adapun sifat dari perkalian dan pembagian bentuk akar dapat dicermati pada beberapa contoh sebagai berikut :

1. $\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2^{\frac{3}{3}}=2^1=2$
2. $4\sqrt[3]{5}\times 5\sqrt[3]{7}=(4\times 5)\sqrt[3]{5\times 7}=20\sqrt[3]{35}$
3. 6

   6

   $(¿¿\frac{12}{35})=8\sqrt[35]{6^{12}}$

   $(¿¿\frac{1}{5}\times 6^{\frac{1}{7}})=8¿$

   $2\sqrt[5]{6}\times 4\sqrt[7]{6}=(2\times 4)¿$
4. $\frac{3\sqrt[3]{4}}{4\sqrt[3]{5}}=\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{4}{5}}$
5. $\frac{2\sqrt[4]{3}}{3\sqrt[4]{5}}=\frac{2}{3}\sqrt[4]{\frac{3}{5}}$

Berdasarkan contoh-contoh di atas, dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. $\sqrt[n]{a^n}=a$, $dimana\ a\ bilangan\ real\ dan\ a>0.$
2. $a\sqrt[n]{c}\times b\sqrt[n]{d}=ab\sqrt[n]{cd}$, $dimana\ a, b, c, dan\ d\ bilangan\ real,\ c>0\ dan\ d>0$
3. $\frac{a\sqrt[n]{c}}{b\sqrt[n]{d}}=\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$, $dimana\ a, b, c, dan\ d\ bilangan\ real, c>0\ dan\ d>0, d\neq 0$.

c. M

bentuk $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}$ dan $\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}$ dapat dituliskan sebagai $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ dan $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$. Pengerjaan seperti itu dinamakan *menarik akar kuadrat.* Untuk lebih memahami pengerjaan dalam menarik akar kuadrat, simaklah perkalian-perkalian berikut ini :

a) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2+2(\sqrt{a})(\sqrt{b})+(\sqrt{b})^2$

$¿a+2\sqrt{ab}+b$

$¿(a+b)+2\sqrt{ab}$

Jika kedua ruas ditarik akar kuadrat, maka diperoleh :

$$\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})$$

b) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2-2\left(\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b}\right)+\left(\sqrt{b}\right)^2$

$$\text{¿}\, a-2\sqrt{ab}+b$$

$$\text{¿}\left(a+b\right)-2\sqrt{ab}$$

Untuk lebih jelas, perhatikan contoh berikut :

Contoh :

Nyatakan bilangan-bilangan berikut ini dalam bentuk $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ atau $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

a. $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

b. $\sqrt{8+2\sqrt{60}}$

Jawab :

a. $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{\left(3+2\right)+2\sqrt{3\times 2}}$

$$\text{¿}\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

b. $\sqrt{8+2\sqrt{60}}=\sqrt{8+2\sqrt{60}}$

$$\text{¿}\sqrt{\left(5+3\right)+2\sqrt{5\times 3}}$$

$$\text{¿}\sqrt{5}+\sqrt{3}$$

C. MERASIONALKAN BENTUK AKAR

1. Menyederhanakan Bentuk Akar

Beberapa bentuk akar dapat disajikan dalam bentuk yang lebih sederhana. Penyederhanaan itu dapat dilakukan dengan cara menyatakan bilangan di bawah tanda akar sebagai perkalian dua bilangan. Satu di antara kedua bilangan itu harus dapat dinyakan dalam bentuk kuadrat murni.

> Untuk setiap *a* dan *b* bilangan bulat positif, maka berlaku :
>
> $$\sqrt{\left(a\times b\right)}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$$
>
> Dengan *a* atau *b* harus dapat dinyatakan dalam bentuk kuadrat murni.

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh dibawah ini!

Contoh

Sederhanakan bentuk-bentuk akar di bawah ini.

a) $\sqrt{108}$

b) $\sqrt{\frac{1}{8}}$

c) $\sqrt{4a^3b}$

Jawab :

a) $\sqrt{108}=\sqrt{(36\times 3)}=\sqrt{36}\times\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

b) $\sqrt{\frac{1}{8}}=\sqrt{\left(\frac{1}{16}\times 2\right)}=\sqrt{\frac{1}{16}}\times\sqrt{2}=\frac{1}{4}\sqrt{2}$

c) $\sqrt{4a^3b}=\sqrt{(4a^2\times ab)}=¿\quad \sqrt{4a^2}\times\sqrt{ab}=2a\sqrt{ab}$

Dari contoh di atas, tampak bahwa suatu akar dapat dituliskan sebagai perkalian Sebuah bilangan rasional dengan sebuag bentuk akar. Dengan perkataanm lain, bentuk akar semula dapat di, kita mengalikan dengan nyatakan dalam bentuk akar lain yang lebih sederhana.

2. Merasionalkan Penyebut Sebuah Pecahan

a. Pecahan berbentuk $\frac{a}{\sqrt{b}}$

Mengubah pecahan $\frac{12}{\sqrt{3}}$ menjadi $\frac{12}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$ dinamakan *merasionalkan penyebut pecahan.* Perhatikan bahwa dalam merasionalkan penyebut pecahan itu $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=1.$ dengan demikian, nilai pecahan $\frac{12}{\sqrt{3}}$ ekuivalen dengan $\frac{12}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ atau $4\sqrt{3}$ .Bentuk yang terakhir ini lebih mudah dihitung jika akan disajikan dalam pecahan decimal.

Dari uraian tersebut, kita dapat mengambil Sebuah kesimpulan sebagai berikut, Pecahan $\frac{a}{\sqrt{b}}$ (a bilangan rasional dan $\sqrt{b}$ merupakan bentuk akar), bagian penyebutnya dapat dirasionalkan dengan cara mengalikan pecahan itu dengan $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$, sehingga pecahan itu menjadi :

$a \quad a \quad \sqrt{b} \quad a\sqrt{b}$

Contoh

Rasionalkan penyebut pecahan-pecahan berikut ini.

a) $\frac{6}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{12}{\sqrt{18}}$

Jawab :

a) $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$= \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$= 2\sqrt{3}$

b) Bagian penyebut pecahan $\frac{12}{\sqrt{18}}$ kita sederhanakan terlebih dahulu menjadi $\frac{12}{\sqrt{18}} = \frac{12}{\sqrt{9} \times \sqrt{2}} = \frac{12}{3\sqrt{2}}$

Kemudian bentuk yang terakhir itu kita rasionalkan :

$$\frac{12}{\sqrt{18}}=\frac{12}{3\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

¿ $\frac{12\sqrt{2}}{6}$

¿ $2\sqrt{2}$

b. Merasionalkan Bentuk $\frac{a}{b\pm\sqrt{c}}$

Cara merasionalkan bentuk $\frac{a}{b\pm\sqrt{c}}$ adalah dengan mengalikan pembilang dan penyebut pecahan tersebut dengan bentuk sekawan dari penyebut $\pm\sqrt{c}$. Bentuk sekawan dari $b+\sqrt{c}$ adalah ¿ $\sqrt{c}$, sedangkan bentuk sekawan dari $b+\sqrt{c}$ adalah $b+\sqrt{c}$. Berikut penjelasanya masing-masing. Untuk merasionalkan bentuk $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$, yakni:

$$=> \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}+\sqrt{\boldsymbol{c}}}=\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}+\sqrt{\boldsymbol{c}}}\left(\frac{\boldsymbol{b}-\sqrt{\boldsymbol{c}}}{\boldsymbol{b}-\sqrt{\boldsymbol{c}}}\right)$$

$$=> \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}+\sqrt{\boldsymbol{c}}}=\frac{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}-\sqrt{\boldsymbol{c}})}{(\boldsymbol{b}+\sqrt{\boldsymbol{c}})(\boldsymbol{b}-\sqrt{\boldsymbol{c}})}$$

$$=> \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}+\sqrt{\boldsymbol{c}}}=\frac{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}-\sqrt{\boldsymbol{c}})}{\boldsymbol{b}^2+\ \boldsymbol{b}\sqrt{\boldsymbol{c}}-\ \boldsymbol{b}\sqrt{\boldsymbol{c}}-(\sqrt{\boldsymbol{c}}\,)^2}$$

$$=> \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}+\sqrt{\boldsymbol{c}}}=\frac{\boldsymbol{ab}-\boldsymbol{a}\sqrt{\boldsymbol{c}}}{\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{c}}$$

Untuk merasionalkan bentuk $\frac{a}{b-\sqrt{c}}$, yakni:

$$=> \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}-\sqrt{\boldsymbol{c}}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}-\sqrt{\boldsymbol{c}}}\left(\frac{\boldsymbol{b}+\sqrt{\boldsymbol{c}}}{\boldsymbol{b}+\sqrt{\boldsymbol{c}}}\right)$$

$$=> \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}-\sqrt{\boldsymbol{c}}} = \frac{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\sqrt{\boldsymbol{c}})}{(\boldsymbol{b}-\sqrt{\boldsymbol{c}})(\boldsymbol{b}+\sqrt{\boldsymbol{c}})}$$

$$=> \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}-\sqrt{\boldsymbol{c}}} = \frac{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\sqrt{\boldsymbol{c}})}{\boldsymbol{b}^2 - \boldsymbol{b}\sqrt{\boldsymbol{c}} + \boldsymbol{b}\sqrt{\boldsymbol{c}} - (\sqrt{\boldsymbol{c}}\,)^2}$$

$$=> \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}-\sqrt{\boldsymbol{c}}} = \frac{\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{a}\sqrt{\boldsymbol{c}}}{\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{c}}$$

Untuk memantapkan pemahaman Anda tentang cara merasionalkan bentuk

$\frac{a}{b \pm \sqrt{c}}$, silahkan simak contoh di bawah ini!

Contoh

Rasionalkan penyebut pecahan berikut ini :

a) $\frac{2}{\sqrt{2}+1}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}$

Jawab :

a) $\frac{2}{\sqrt{2}+1} = \frac{2}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$

¿ $\frac{2(\sqrt{2}-1)}{2-1}$

¿ $2(\sqrt{2}-1)$

b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2} \times \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+2}$

¿ $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)}{3-4}$

¿ $-(3+2\sqrt{3})$

c. Merasionalkan Bentuk $\frac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}}$

$$=> \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \left(\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}\right)\left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}\right)$$

$$=> \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2+\sqrt{b}.\sqrt{c}-\sqrt{b}.\sqrt{c}-(\sqrt{c})^2}$$

$$=> \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$$

Cara merasionalkan bentuk $\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}$ adalah dengan mengalikan pembilang dan penyebut pecahan tersebut dengan bentuk sekawan dari penyebut $\sqrt{b}\pm\sqrt{c}$. Bentuk sekawan dari $\sqrt{b}+\sqrt{c}$ adalah $\sqrt{b}-\sqrt{c}$, sedangkan bentuk sekawan dari $\sqrt{b}-\sqrt{c}$ adalah $\sqrt{b}+\sqrt{c}$. Berikut penjelasanya masing-masing. Untuk merasionalkan bentuk $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, yakni:

$$=> \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \left(\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}\right)\left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}\right)$$

$$=> \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2+\sqrt{b}.\sqrt{c}-\sqrt{b}.\sqrt{c}-(\sqrt{c})^2}$$

$$=> \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$$

Untuk merasionalkan bentuk $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$, yakni:

$$=> \frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \left(\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}\right)\left(\frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}\right)$$

$$=> \frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2-\sqrt{b}.\sqrt{c}+\sqrt{b}.\sqrt{c}-(\sqrt{c})^2}$$

$$=> \frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$$

Untuk memantapkan pemahaman Anda tentang cara merasionalkan bentuk $\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}$, silahkan simak contoh di bawah ini!

Contoh

Rasionalkan penyebut pecahan berikut ini!

a) $\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

Jawab :

a) $\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2}$

$= 3(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5+3}$

$= \frac{1}{2}(5+\sqrt{15})$

D. DEFINISI LOGARITMA

Logaritma adalah *invers dari perpangkatan*, yaitu mencari pangkat dari suatu bilangan pokok sehingga hasilnya sesuai dengan yang telah diketahui.

Adapun definisi logaritma adalah sebagai berikut :

> Misalkan *a* adalah bilangan positif (*a* > 0) dan *g* adalah bilangan positif yang tidak sama dengan 1 (0 < *g* < *1).*
>
> $$\mathbf{g^x = a} \textbf{ jika dan hanya jika } {}^{g}\log a = x$$

Keterangan :

- *g* disebut ***bilangan pokok*** atau ***basis logaritma***, dengan ketentuan 0 < *g* < *1* atau *g* > *1 (g > 0* dan *g* $\neq 1$ *).*
  Jika *g* = 10, bilangan pokok ini biasanya tidak dituliskan. Jadi, ${}^{10}\log 2$, ditulis $\log 2$.
  Jika *g* = *e* (*e* = 2,7128….) maka ${}^{e}\log a$ ditulis sebagai $\ln a$ (dibaca : ***logaritma natural*** dari *a*), yaitu dengan bilangan pokok *e*.

- *a* disebut ***numerus***, yaitu bilangan yang dicari logaritmanya, dengan ketentuan $a > 0$.
- *x* disebut ***hasil logaritma***, nilainya dapat positif, nol, atau negative.
- Bentuk $g^x = a$ dan $x = {}^g\log a$ merupakan dua pernyataan yang ekuivalen (setara), $g^x = a$ *disebut ekponensial* dan $x = {}^g\log a$ disebut *bentuk logaritma* dalam hubungan itu.

E. MENGUBAH BENTUK PANGKAT KE BENTUK LOGARITMA

Kita telah memahami definisi perpangkatan yaitu perkalian berulang. Bentuk umum bilangan berpangkat adalah $\boldsymbol{p^n = a}$.

Maksudnya $p^n = p$ x p x .....x p sebanyak n kali hasilnya = *a*. *p* disebut bilangan pokok, *n* disebut pangkat dan *a* disebut hasil perpangkatan. Jika bilangan pokok dan pangkatnya sudah diketahui, maka hasil perpangkatannya dengan segera dapat ditentukan.

Contoh: $2^4 = ...$

$5^3 = ...$

Dalam kasus tersebut, bilangan pokok dan pangkatnya sudah diketahui sehingga kita dapat menentukan hasil perpangkatannya sebagai berikut:

$2^4 = 16$ → 2.2.2.2 sebanyak 4 kali hasilnya = 16

$5^3 = 125$ → 5.5.5 sebanyak 3 kali hasilnya = 125

Sekarang, bagaimana kita dapat menentukan pangkatnya jika bilangan pokok dan hasil perpangkatannya diketahui?

Contoh: $2^x = 16$

$5^x = 125$

Masalah tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan notasi logaritma (disingkat *log*), seperti berikut:

$2^x = 16$ ditulis ${}^2\log 16 = x$, dan diperoleh ${}^2\log 16 = 4$ karena $2^4 = 16$

$5^x = 125$ ditulis ${}^5\log 125 = x$, dan diperoleh ${}^5\log 125 = 3$ karena $5^3 = 125$.

Dari contoh tersebut memperlihatkan hubungan antara perpangkatan dan logaritma, yang dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\boxed{\boldsymbol{g^x = a} \quad \leftrightarrow \quad {}^g\log a = x}$$

F. SIFAT-SIFAT LOGARIOTMA DAN PEMBUKTIAN

Definisi logaritma merupakan inverse dari perpangkatan, oleh karena itu terdapat 3 sifat dasar logaritma, yaitu :

> Misalkan a dan n bilangan real, $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka:
> 1. ${}^{a}\log a = 1$
> 2. ${}^{a}\log 1 = 0$
> 3. ${}^{a}\log a^{n} = n$

a. Pembuktian sifat-sifat logaritma tidak bisa dilakukan secara acak artinya ada sifat yang tidak bisa dibuktikan sebelum suatu sifat yang lain terbukti.

Berikut sifat-sifat logaritma dan pembuktiannya :

1. ${}^{a}\log b + {}^{a}\log c = {}^{a}\log bc$

   Bukti :

   Misal ${}^{a}\log b = m$ *dan* ${}^{a}\log c = n$,

   maka $a^{m} = b$ *dan* $a^{n} = c$

   $bc = a^{m}.a^{n}$

   $\Leftrightarrow bc = a^{(m+n)}$

   $\Leftrightarrow {}^{a}\log bc = m+n$

   $\Leftrightarrow {}^{a}\log bc = {}^{a}\log b + {}^{a}\log c$ *(terbukti)*

2. ${}^{a}\log b - {}^{a}\log c = {}^{a}\log \frac{b}{c}$

   Bukti :

   Misal ${}^{a}\log b = m$ *dan* ${}^{a}\log c = n$,

   maka $a^{m} = b$ *dan* $a^{n} = c$

   $\frac{b}{c} = \frac{a^{m}}{a^{n}}$

   $\Leftrightarrow \frac{b}{c} = a^{(m-n)}$

   $\Leftrightarrow {}^{a}\log \frac{b}{c} = m-n$

   $\Leftrightarrow {}^{a}\log \frac{b}{c} = {}^{a}\log b - {}^{a}\log c$ *(terbukti)*

3. ${}^{a^m}\log b^n = \frac{n}{m}\,{}^a\log b$

Bukti :

misal ${}^{a^m}\log b^n = c \Leftrightarrow (a^m)^c = b^n$

$(a^m)^c = b^n$

$\Leftrightarrow a^{mc} = b^n$

$\Leftrightarrow b = \sqrt[n]{a^{mc}}$

$\Leftrightarrow b = a^{\frac{mc}{n}}$

$\Leftrightarrow {}^a\log b = \frac{mc}{n}$

$\Leftrightarrow \frac{n}{m}\,{}^a\log b = c$

$\Leftrightarrow \frac{n}{m}\,{}^a\log b = {}^{a^m}\log b^n$ *(terbukti)*

Ini juga terbukti untuk $m = 1$

Sehingga ${}^a\log b^n = n.{}^a\log b$

Namun biasanya sifat ini dibuktikan secara terpisah dari pembuktian sifat 3 dan dibuktikan sebagai korelasi dari sifat 1 :

${}^a\log b^n = {}^a\log(b.b.b.b.\ \ldots\ .b$ *(sebanyak n kali)*)

dari sifat 1 didapatkan :

${}^a\log(b.b.b.b.\ \ldots\ .b$ *(sebanyak n kali)*) $= {}^a\log b + {}^a\log b + \ldots + {}^a\log b$ *(sebanyak n kali)*

$= n.{}^a\log b$ *(terbukti)*

4. ${}^a\log b = \frac{{}^c\log b}{{}^c\log a}$

Catatan : Pembuktian sifat ini menggunakan sifat 3 yang telah dibuktikan sebelumnya

Bukti :

misal ${}^a\log b = m \Leftrightarrow a^m = b$

$a^m = b$ (kemudian kedua ruas diberikan logaritma dengan basis c)

$\Leftrightarrow {}^c\log a^m = {}^c\log b$

$\Leftrightarrow m.{}^c\log a = {}^c\log b$ *(sifat 3)*

$\Leftrightarrow m = \frac{{}^c\log b}{{}^c\log a}$

$\Leftrightarrow {}^a\log b = \frac{{}^c\log b}{{}^c\log a}$ *(terbukti)*

tentu saja sifat ini berlaku untuk $c = 10$ sehingga ${}^a\log b = \frac{\log b}{\log a}$

Angka 10 sebagai bilangan pokok logaritma tidak perlu ditulis.

Berlaku juga untuk $c = b$ sehingga ${}^a\log b = \frac{1}{{}^b\log a}$

5. ${}^{a}\log b . {}^{b}\log c = {}^{a}\log c$

Bukti :

Sifat ini dapat dibuktikan dengan menggunakan sifat nomor 4 *(yang telah kita buktikan sebelumnya)* :

Untuk mempermudah penulisan, kita gunakan basis 10

${}^{a}\log b . {}^{b}\log c = \dfrac{\log b}{\log a} . \dfrac{\log c}{\log b} = \dfrac{\log c}{\log a} = {}^{a}\log c$ *(terbukti)*

6. $a^{{}^{a}\log b} = b$

Bukti :

Misal ${}^{a}\log b = c$

$a^{c} = b$

$\Leftrightarrow a^{{}^{a}\log b} = b$ *(terbukti)*

Untuk lebih mengetahui dari sifat-sifat logaritma, perhatikan contoh-contoh berikut!

Contoh:

1. Sederhanakanlah !
   a) ${}^{2}\log 4 + {}^{2}\log 8$
   b) ${}^{7}\log 217 - {}^{7}\log 31$
2. Jika ${}^{2}\log 3 = a$, nyatakan ${}^{8}\log 3$ dalam a.
3. Hitunglah ${}^{2}\log 5 \times {}^{5}\log 64$
4. Sederhanakan :
   a) $2^{{}^{2}\log 5}$
   b) $7^{{}^{7}\log 25}$

Jawab :

1. a) ${}^{2}\log 4 + {}^{2}\log 8 = {}^{2}\log(4 \times 8)$
$= {}^{2}\log 32 = 5$

b) ${}^{7}\log 217 - {}^{7}\log 31 = {}^{7}\log \left(\dfrac{217}{31}\right)$

2. ${}^{8}\log 3 = \dfrac{\log 3}{\log 8} = \dfrac{\log 3}{\log 3^{2}} = \dfrac{1}{3} \dfrac{\log 3}{\log 2} = \dfrac{1}{3}\ {}^{2}\log 3 = \dfrac{1}{3} a$

3. ${}^{2}\log 5 \times {}^{5}\log 64 = {}^{2}\log 64 = {}^{2}\log 2^{6} = 6$

4. a) $2^{{}^{2}\log 5} = 5$

b) $7^{{}^{7}\log 25} = 25$

G. PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN LOGARITMA

1. **Persamaan Logaritma**

Persamaan logaritma adalah persamaan yang variabelnya sebagai numerus atau sebagai bilangan pokok dari suatu logaritma. Perhatikan contoh berikut ini :

- $\log x + \log(2x+1) = 1$ merupakan persamaan logaritma yang numerusnya memuat variabel x.
- $^{5}\log 4m + {}^{5}\log m^{2} = 0$ merupakan persamaan logaritma yang numerusnya memuat variabel y.

Ada beberapa bentuk persamaan logaritma ini, diantaranya :

a) $^{a}\log f(x) = {}^{a}\log m$

Jika $^{a}\log f(x) = {}^{a}\log m$, $f(x) > 0$, maka $f(x) = m$.

Contoh soal :

Tentukan penyelesaian $^{2}\log(x-2) = 4$

Jawab :

$^{2}\log(x-2) = 4$

$^{2}\log(x-2) = {}^{2}\log 2^{4}$

$x - 2 = 2^{4}$

$x = 18$

Jadi, penyelesaian $^{2}\log(x-2) = 4$ adalah x = 18

b) $^{a}\log f(x) = {}^{a}\log g(x)$

Jika $^{a}\log f(x) = {}^{a}\log g(x)$, a > 0, a ≠ 1, $f(x) > 0$, dan x ¿) > 0 maka $f(x) = x$ g¿).

Contoh soal :

Tentukan penyelesaian $^{7}\log(10x+2) = {}^{7}\log$ ¿ $16x-8$ ¿

Jawab :

$^{7}\log(10x+2) = {}^{7}\log$ ¿ $16x-8$ ¿

10x + 2 = 16x – 8

10x – 16x = – 8– 2

– 6x = – 10

$x = \frac{10}{6}$

Sekarang selidiki apakah $f(x) > 0$, dan x ¿) > 0

$f\left(\frac{10}{6}\right) = 10\left(\frac{10}{6}\right) + 2$

¿ $\frac{100}{6} + 2$

$$¿\frac{100}{6}+\frac{12}{6}=\frac{112}{6}$$

$$g\left(\frac{10}{6}\right)=16\left(\frac{10}{6}\right)-8$$

$$¿\frac{160}{16}-\frac{128}{16}=\frac{42}{16}$$

Karena untuk x = $\frac{10}{6}$, $f(x)$ > 0, dan $\frac{x}{g¿}$) > 0,

maka x = $\frac{10}{6}$ merupakan penyelesaian. Jadi, penyelesaian $^{7}\log(10x+2)$ = ^{7} $\frac{16x-8}{\log ¿}$ adalah x = $\frac{10}{6}$

c) $^{f(x)}\log g(x)$ = $^{f(x)}\log h(x)$

Jika $^{f(x)}\log g(x)$ = $^{f(x)}\log h(x)$, $f(x)$ > 0, $\frac{x}{g¿}$) > 0, $\frac{x}{h¿}$) > 0, dan $f(x)$ ≠ 1, maka $\frac{x}{g¿}$) = $\frac{x}{h¿}$).

Contoh soal :

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan dibawah ini :

$^{x-3}\log(x+1)$ = $^{x-3}\log(4x+10)$

Jawab :

$^{x-3}\log(x+1)$ = $^{x-3}\log(4x+10)$

x + 1 = 4x + 10

x – 4x = 10 – 1

-3x = 9

x = -3

Sekarang selidiki apakah $f(x)$ > 0, $f(x)$ ≠ 1, $\frac{x}{¿}$) > 0 dan $\frac{x}{h¿}$) > 0 *f(-3)* = -3 – 3 = -6 < 0

g(x) = -3 + 1 = -2 < 0

Oleh karena untuk x = -3 $f(x)$ < 0 maka x = -3 bukan penyelesaian. Jadi, himpunan penyelesaian dari ${}^{x-3}\log(x+1)$ = ${}^{x-3}\log(4x+10)$ adalah $\varnothing$.

d) $\mathbf{{}^{a}\log f(x) = {}^{b}\log f(x)}$

Penyelesaiannya adalah : ***f(x)* = 1**

2. *Pertidaksamaan Logaritma*

Pada pembahasan sebelumnya, kalian telah mengetahui sifat – sifat fungsi logaritma, yaitu sebagai berikut :

- untuk a > 1, fungsi $f(x) = {}^{a}\log x$ merupakan fungsi naik. Artinya, untuk setiap setiap x_1, x_2 $\in R$ berlaku $x_1 < x_2$ jika dan hanya jika $f(x_1) < f(x_2)$.
- Untuk 0 < a < 1, fungsi $f(x) = {}^{a}\log x$ merupakan fungsi turun. Artinya, untuk setiap setiap x_1, x_2 $\in R$ berlaku $x_1 < x_2$ jika dan hanya jika $f(x_1) > f(x_2)$.

Sifat – sifat ini berguna untuk menyelesaikan pertidaksamaan logaritma.

<u>Contoh soal :</u>

Tentukan himpunan penyelesaian ${}^{3}\log(x+5) > 0$

Jawab :

${}^{3}\log(x+5) > 0$

${}^{3}\log(x+5) > {}^{3}\log 1$

x + 5 > 1 .... karena a > 1, maka fungsi naik

x > -4

perhatikan pula bahwa numerusnya harus lebih dari nol, berarti

x + 5 > 0. Di dapat x > -5

Jadi himpunan penyelesaian ${}^{3}\log(x+5) > 0$ adalah HP = { x | x > -5 atau x > -4 , x $\in R$ }.

DAFTAR PUSTAKA

http://mafia.mafiaol.com/2014/06/cara-merasionalkan-pecahan-bentuk-akar.html (diakses pada tanggal 27 Februari 2015)

Noormandiri, B.K dan Sucipto Endar, 2004. *Matematika SMA Untuk Kelas X*. Jakarta: Erlangga

Wirodikromo, Sartono. 2007. *Matematika untuk SMA Kelas X.* Jakarta : Erlangga

__________.2013. *Buku Matematika Siswa SMA/MA/SMK Kelas X.* Jakarta : Kemendikbud

__________.2013. *Buku Matematika Guru SMA/MA/SMK Kelas X.* Jakarta : Kemendikbud