

BAB I PENDAHULUAN

A. Deskripsi

Dalam modul 15 ini akan dipelajari 4 Kegiatan Belajar, yaitu :

Kegiatan Belajar 1 adalah **Lingkaran**,

Kegiatan Belajar 2 adalah **Ellips**,

Kegiatan Belajar 3 adalah **Parabola**,

Kegiatan Belajar 4 adalah **Hiperbola**.

B. Prasyarat

Kemampuan awal yang perlu dipelajari untuk mempelajari Modul 14 ini adalah siswa telah mempelajari Konsep Bilangan Real.

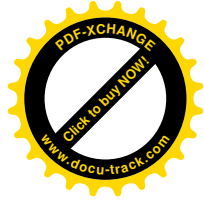
C. Tujuan Akhir

Setelah mempelajari kegiatan belajar pada Modul 14 ini diharapkan siswa dapat menerapkan konsep irisan kerucut untuk menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari.

D. Ceck Kemampuan

NO	PERTANYAAN	Ya	Tdk
1.	Dapatkah anda menentukan persamaan lingkaran yang pusatnya $O(0,0)$ dengan jari-jari r ?		
2.	Dapatkah anda menentuykan persamaan lingkaran yang pusatnya $A(a,b)$ dengan jari-jari r ?		
3.	Dapatkah anda menentukan persamaan ellips yang pusatnya $O(0,0)$ dengan panjang sumbu panjang 8 dan sumbu pendek 4.		
4.	Dapatkah anda menentukan persamaan ellips yang pusatnya $P(-2,5)$ dengan panjang sumbu panjang 8 dan sumbu pendek 4.		
5.	Dapatkah anda menentukan koordinat titik-titik api dari ellips $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$		
6.	Dapatkah anda menentukan persamaan ellips yang eksentrisitas numeriknya $e = \frac{2}{3}$ salah satu titik apinya $F(6,0)$.		
7.	apatkah anda menentukan titik api dan persamaan garis arah parabola $y^2 = 24x$.		
8.	Dapatkah anda menentukan persamaan garis yang menghubungkan titik M dan titik api parabola $y^2 = 20x$, jika absis titik M adalah 7.		
9.	Dapatkah anda menentukan nilai k sehingga persamaan $y = kx + 2$ menyinggung parabola $y^2 = 4x$.		
10	Dapatkah anda menentukan persamaan hiperbola yang pusatnya di $(0,0)$ jika eksentrisitasnya $\frac{13}{12}$ sedangkan jarak antara kedua fokus 10.		
11	Dapatkah anda menentukan persamaan hiperbola yang pusatnya di $(0,0)$ dan panjang sumbu hiperbola masing-masing 16 dan 12. Tentukan pula jarak antara dua fokus, persamaan direktrik, dan asimtot.		

Apabila Anda menjawab “TIDAK” pada salah satu pertanyaan di atas, pelajailah materi tersebut pada modul ini. Apabila Anda menjawab “YA” pada semua pertanyaan, maka lanjutkanlah dengan mengerjakan tugas, tes formatif dan evaluasi yang ada pada modul ini



BAB II PEMELAJARAN

A. Rancangan Belajar Siswa

Buatlah rencana belajar anda berdasarkan rancangan pembelajaran yang telah disusun oleh guru, untuk menguasai kompetensi menerapkan konsep Irisan Kerucut, dengan menggunakan format sebagai berikut :

No	Kegiatan	Pencapaian			Alasan perubahan bila diperlukan	Paraf	
		Tgl	Jam	Tempat		Siswa	Guru

Mengetahui,
Guru Pembimbing

Klaten, 2007
Siswa

(.....)

(.....)

Rumuskan hasil belajar anda sesuai standar bukti belajar yang telah ditetapkan.

1. Untuk penguasaan pengetahuan, Anda dapat membuat suatu ringkasan menurut pengertian Anda sendiri terhadap konsep-konsep yang berkaitan dengan kompetensi yang telah anda pelajari. Selain ringkasan Anda juga dapat melengkapi dengan klipng terhadap informasi-informasi yang relevan dengan kompetensi yang sedang Anda pelajari.
2. Administrasikan setiap tahapan kegiatan belajar/ lembar kerja yang Anda selesaikan
3. Setiap tahapan proses akan diakhiri, lakukanlah diskusi dengan guru pembimbing untuk mendapatkan persetujuan, dan apabila ada hal-hal yang harus dibetulkan / dilengkapi, maka Anda harus melaksanakan saran guru pembimbing.

Kegiatan Belajar

1. Kegiatan Belajar 1

a. Tujuan

Setelah mempelajari kegiatan belajar 1 ini, diharapkan anda dapat mendeskripsikan irisan kerucut yaitu lingkaran beserta pusat dan jari-jarinya, antara lain :

1. Memahami unsur-unsur lingkaran.
2. Menentukan persamaan lingkaran jika pusat dan jari-jarinya diketahui.
3. Menghitung panjang garis sekutu luar dan dalam dari dua lingkaran.
4. Dapat melukis garis singgung sekutu luar dan dalam dari dua lingkaran.
5. Dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan lingkaran.

b. Uraian Materi

Kurva lengkung sederhana dan teratur yang banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari adalah lingkaran. Buatlah kerucut dari kertas manila, kemudian potong sejajar bidang alas. Berbentuk apakah permukaan kerucut yang dipotong tadi? Permukaan kerucut yang dipotong tadi berbentuk lingkaran.

Dalam matematika, lingkaran didefinisikan sebagai himpunan titik-titik (pada bidang datar) yang memiliki jarak tetap terhadap suatu titik tertentu. Selanjutnya titik itu disebut pusat lingkaran. Sedangkan ruas garis yang menghubungkan tiap-tiap titik pada lingkaran dan titik pusat lingkaran disebut jari-jari lingkaran. Jadi lingkaran dapat dilukis jika titik pusat dan jari-jari lingkaran diketahui.

1. MENENTUKAN PERSAMAAN LINGKARAN

Ambil sembarang titik pada lingkaran misal

$T(x_1, y_1)$ dan titik O sebagai pusat lingkaran.

Tarik garis melalui T tegak lurus sumbu x misal di T_1 .

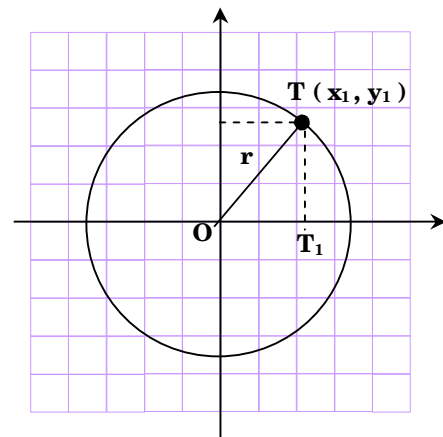
Pandang $\triangle OT_1T$ dan $\triangle OT_1T$ merupakan segitiga siku-siku, dimana membentuk sudut siku-siku di titik T_1 .

Sehingga berlaku teorema pythagoras :

$$OT_1^2 + T_1T^2 = OT^2$$

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2$$

Karena berlaku untuk semua titik pada lingkaran maka $x^2 + y^2 = r^2$



$$x^2 + y^2 = r^2$$

merupakan persamaan lingkaran yang pusatnya $O(0,0)$ dan jari-jari r

Contoh 1

- a. Persamaan lingkaran pusatnya $O(0,0)$ dan jari-jari 3 adalah : $x^2 + y^2 = 9$
- b. Persamaan lingkaran pusatnya $O(0,0)$ dan jari-jari 5 adalah : $x^2 + y^2 = 25$
- c. Persamaan lingkaran pusatnya $O(0,0)$ dan jari-jari 1 adalah : $x^2 + y^2 = 1$

Contoh 2

- a. $x^2 + y^2 = 16$ adalah lingkaran dengan pusat $O(0,0)$ dan jari-jari 4
- b. $x^2 + y^2 = 4$ adalah lingkaran dengan pusat $O(0,0)$ dan jari-jari 2

2. PERSAMAAN LINGKARAN PUSAT TIDAK PADA (0,0)

Ambil sebarang titik pada lingkaran misal $T(x_1, y_1)$ dan titik $P(a,b)$ sebagai pusat lingkaran. Tarik garis melalui T tegak lurus sumbu x misal di T_1 .

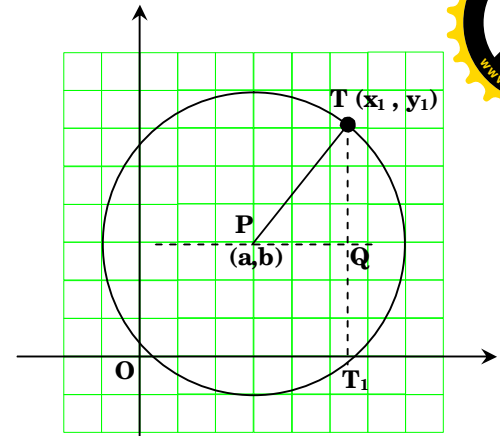
Buat garis yang melalui titik P sejajar sumbu x, sehingga memotong TT_1 di titik Q.

Pandang $\triangle PQT$. $\triangle PQT$ merupakan segitiga siku-siku di titik Q, $TQ = (y_1 - b)$ dan $PQ = (x_1 - a)$.

Sehingga berlaku teorema pythagoras :

$$PQ^2 + QT^2 = OT^2$$

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$$



Karena berlaku untuk setiap titik $T(x_1, y_1)$ pada lingkaran, maka berlaku : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
merupakan persamaan lingkaran pusat (a, b) dengan jari-jari r

Contoh 3

Tentukan persamaan lingkaran dengan :

- pusat $(2, 3)$ dan jari-jari 5
- pusat $(-3, 1)$ dan jari-jari 2
- pusat $(2, -2)$ dan jari-jari 1

Penyelesaian

- Persamaan lingkaran dengan pusat $(2, 3)$ dan jari-jari 5 adalah $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$
- Persamaan lingkaran dengan pusat $(-3, 1)$ dan jari-jari 2 adalah $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$.
- Persamaan lingkaran dengan pusat $(2, -2)$ dan jari-jari 1 adalah $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 1$

Contoh 4

Tentukan koordinat pusat dan jari jari lingkaran dengan persamaan $4x^2 + 4y^2 - 4x + 16y - 19 = 0$

Penyelesaian

$4x^2 + 4y^2 - 4x + 16y - 19 = 0$, kedua ruas dibagi 4 didapat $x^2 + y^2 - x + 4y - \frac{19}{4} = 0$

$x^2 + y^2 - x + 4y - \frac{19}{4} = 0$ dijadikan kuadrat sempurna sehingga didapatkan :

$$x^2 + y^2 - x + 4y = \frac{19}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + y^2 + 4y = \frac{19}{4}$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + 4 + 4y = \frac{19}{4} + \frac{1}{4} + 4$$

$(x - \frac{1}{2})^2 + (y + 2)^2 = 9$ Jadi Koordinat pusat lingkaran adalah $(\frac{1}{2}, -2)$ dan jari-jarinya 3

Contoh 5

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di titik $P(1, 3)$ dan melalui titik $Q(-2, 5)$

Penyelesaian

Jari-jari lingkaran adalah panjang :

$$r = PQ = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$$

$$r = PQ = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (3 - 5)^2}$$

$$r = PQ = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

Jadi persamaan lingkarannya adalah $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 13$

3. BENTUK UMUM PERSAMAAN LINGKARAN

Bentuk umum persamaan lingkaran didapat dengan menurunkan persamaan lingkaran yang berpusat tidak pada (0,0) berikut ini :

$$\begin{aligned}(x-a)^2 + (y-b)^2 &= r^2 \quad \rightarrow \quad x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 &= r^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 + Ax + By + C &= 0 \quad \text{dimana : } A = -2a \text{ atau } a = -\frac{1}{2}A \\ B &= -2b \text{ atau } b = -\frac{1}{2}B \\ C &= a^2 + b^2 - r^2\end{aligned}$$

Atau untuk mencari nilai r (jari-jari lingkaran) dari pers. di atas :

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{a^2 + b^2 - C} \\ r &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}A\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}B\right)^2 - C}\end{aligned}$$

Bentuk umum persamaan lingkaran adalah : $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
dengan pusat di $(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B)$ dan jari-jari $r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}A\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}B\right)^2 - C}$

Contoh 6

Tentukan koordinat pusat dan jari jari lingkaran dengan persamaan

$$4x^2 + 4y^2 - 4x + 16y - 19 = 0$$

Penyelesaian

$$4x^2 + 4y^2 - 4x + 16y - 19 = 0, \text{ kedua ruas dibagi 4 didapat}$$

$$x^2 + y^2 - x + 4y - \frac{19}{4} = 0$$

$$A = -1, B = 4 \text{ dan } C = -\frac{19}{4}, \text{ maka pusat lingkaran)}$$

$$\text{Jadi koordinat pusat lingkaran adalah } \left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right) = \left(\frac{1}{2}, -2\right)$$

$$\text{dan jari-jarinya } r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}A\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}B\right)^2 - C}$$

$$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (2)^2 - \left(-\frac{19}{4}\right)}$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{4} + 4 + \frac{19}{4}} = \sqrt{9} = 3$$

Bandingkan jawaban ini dengan contoh 4. Lebih mudah mana ?

Contoh 7

Tentukan persamaan lingkaran yang melalui tiga titik P(1,0), Q(0,1) dan R(2,2).

Penyelesaian

$$\text{Misal persamaan lingkaranya adalah } x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

$$\text{Titik P (1,0) pada lingkaran berarti : } 1^2 + 0^2 + A.1 + B.0 + C = 0$$

$$A + C = -1 \text{ atau } A = -1 - C \quad \text{pers. 1)}$$

$$\text{Titik Q (0,1) pada lingkaran berarti : } 0^2 + 1^2 + A.0 + B.1 + C = 0$$

$$B + C = -1 \text{ atau } B = -1 - C \quad \text{pers. 2)}$$

$$\text{Titik R (2,2) pada lingkaran berarti : } 2^2 + 2^2 + A.2 + B.2 + C = 0$$

$$2A + 2B + C = -8 \quad \text{pers. 3)}$$

$$\text{Substitusi pers. 1) dan pers. 2) pada pers. 3) maka didapat : } 2(-1 - C) + 2(-1 - C) + C = -8$$

$$-2 - 2C - 2 - 2C + C = -8$$

$$-3C = -4, \text{ maka nilai } C = \frac{4}{3}$$

$$\text{Dari pers. 1) didapat } A = -1 - \left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{7}{3}$$

Dari pers. 2) didapat $B = -1 - \left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{7}{3}$

Jadi persamaan lingkarannya adalah : $x^2 + y^2 - \frac{7}{3}x - \frac{7}{3}y + \frac{4}{3} = 0$

4. PERSAMAAN GARIS SINGGUNG LINGKARAN

Garis singgung lingkaran adalah suatu garis yang memotong lingkaran tepat pada satu titik.

a. Gradien garis singgung diketahui dan lingkaran berpusat di (0,0)

Misal persamaan garis singgung : $y = mx + k$. Sehingga ada satu titik pada lingkaran : $x^2 + y^2 = r^2$ yang memenuhi persamaan garis singgung di atas.

Akibatnya : $x^2 + (mx + k)^2 = r^2$

$$x^2 + m^2x^2 + 2mkx + k^2 = r^2$$

$$(1+m^2)x^2 + 2mkx + k^2 - r^2 = 0;$$

merupakan persamaan kuadrat dalam variabel x.

Agar persamaan kuadrat itu mempunyai satu harga x, maka harus terpenuhi syarat diskriminan dari persamaan itu sama dengan nol, yaitu : $D = 0$.

$$(2mk)^2 - 4 \cdot (1+m^2) \cdot (k^2 - r^2) = 0$$

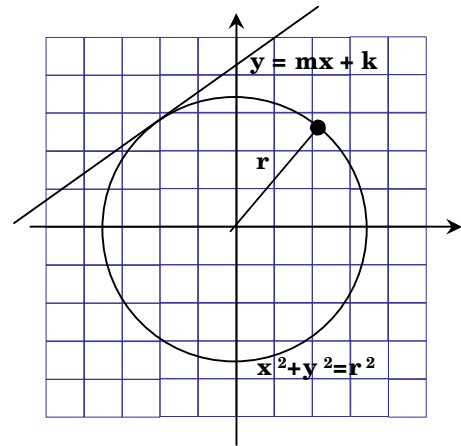
$$4m^2k^2 - 4(k^2 + m^2k^2 - r^2 - m^2r^2) = 0$$

$$-4(k^2 - r^2 - m^2r^2) = 0$$

$$k^2 - r^2(1+m^2) = 0$$

$$k = \pm r\sqrt{1+m^2}$$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah : $y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$



Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ dengan gradien : **m**
adalah : $y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$

Contoh 8

Tentukan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 16$ dengan gradien 3 !

Penyelesaian

Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ dengan gradien m adalah : $y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$

$$y = 3x \pm 4\sqrt{1+3^2}$$

$$y = 3x \pm 4\sqrt{10}$$

b. Gradien garis singgung diketahui dan lingkaran berpusat di (a, b)

Anda dapat menurunkan rumusnya dengan cara yang serupa dengan di atas. Anda dapat menemukan persamaan garis singgung lingkaran yang berpusat di (a,b) yaitu :

$$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1+m^2}$$

Persamaan garis singgung pada lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ dengan gradien : **m**
adalah : $y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1+m^2}$

Contoh 9

Tentukan garis singgung pada lingkaran $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$ dengan gradien 3 !

Penyelesaian

Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ dengan gradien m adalah

$$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1+m^2}$$

$$y - 1 = 3(x + 3) \pm 4\sqrt{1+(-2)^2}$$

$$y - 1 = 3x + 9 \pm 4\sqrt{5}$$

$$y = 3x + 10 \pm 4\sqrt{5}$$

c. Persamaan garis singgung jika titik singgungnya diketahui pada lingkaran berpusat di (0,0)

Misal titik singgungnya di T (x₁,y₁).

Persamaan garis : y - y₁ = m (x - x₁)

Dengan gradien $m = \tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Sehingga persamaan garis yang melalui TQ adalah

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad \text{pers. 1)}$$

T pada lingkaran sehingga berlaku : $x_1^2 + y_1^2 = r^2$

Q pada lingkaran sehingga berlaku : $x_2^2 + y_2^2 = r^2$

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \quad \text{atau} \quad x_1^2 - x_2^2 = y_2^2 - y_1^2$$

maka : $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = (y_2 - y_1)(y_2 + y_1)$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} = \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1} \quad \text{atau} \quad \frac{y_2 - y_1}{-(x_1 - x_2)} = -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1} \quad \text{atau} \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}$$

Sehingga : $y_2 - y_1 = -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1} (x_2 - x_1)$

Jika Q mendekati T sehingga hampir $x_2 = x_1$ dan $y_2 = y_1$, dimana TQ = 0

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1} (x - x_1)$$

$$(y - y_1) \cdot y_1 = -x_1 \cdot (x - x_1)$$

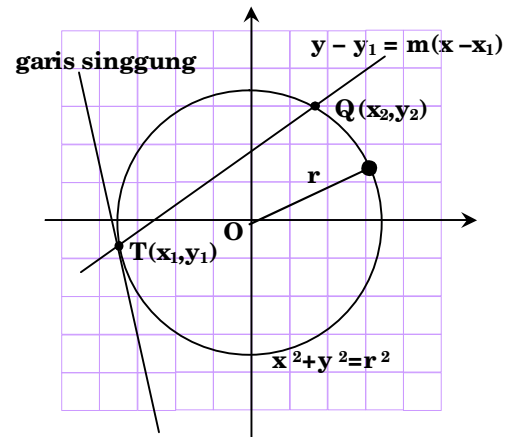
$$y_1 y - y_1^2 = -x_1 x + x_1^2$$

$$y_1 y + x_1 x = x_1^2 + y_1^2$$

$$y_1 y + x_1 x = r^2$$

Persamaan garis singgung dengan titik singgung (x₁,y₁) pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$

adalah : $y_1 y + x_1 x = r^2$



Contoh 10

Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ di titik (3,-4) !

Penyelesaian

Persamaan garis singgung dengan titik singgung (3,-4) pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ adalah $3x - 4y = 25$

d. Titik singgungnya diketahui pada lingkaran berpusat di (a, b)

Persamaan lingkaran yang berpusat di (a,b) adalah $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, dapat diubah menjadi $(x - a)(x - a) + (y - b)(y - b) = r^2$.

Analogi dengan yang anda pelajari di atas, maka persamaan garis singgungnya adalah :

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$$

Persamaan garis singgung dengan titik singgung (x₁,y₁) pada lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ adalah : $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$

$$x_1 x + y_1 y - a(x + x_1) - b(y + y_1) + a^2 + b^2 = r^2$$

$$x_1 x + y_1 y - a(x + x_1) - b(y + y_1) + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Dari persamaan : $x_1 x + y_1 y - a(x + x_1) - b(y + y_1) + a^2 + b^2 - r^2 = 0$, dengan mengingat : $a = -\frac{1}{2} A$

dan $b = -\frac{1}{2} B$ maka didapatkan : $x_1 x + y_1 y + \frac{1}{2} A (x + x_1) + \frac{1}{2} B (y + y_1) + (-\frac{1}{2} A)^2 + (-\frac{1}{2} B)^2 - r^2 = 0$.

Diingat : $r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}A\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}B\right)^2 - C}$ maka : $r^2 = \left(-\frac{1}{2}A\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}B\right)^2 - C$

$$C = \left(-\frac{1}{2}A\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}B\right)^2 - r^2$$

Maka persamaan akhir yang didapat : $x_1x + y_1y + \frac{1}{2}A(x + x_1) + \frac{1}{2}B(y + y_1) + C = 0$.

Persamaan garis singgung dengan titik singgung (x_1, y_1) pada lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ adalah : $x_1x + y_1y + \frac{1}{2}A(x + x_1) + \frac{1}{2}B(y + y_1) + C = 0$.

Contoh 11

Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 4 = 0$ di titik $(1,1)$!

Penyelesaian

Dari persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 4 = 0$ diperoleh $A = 6$, $B = -4$ dan $C = -3$. Jadi persamaan garis singgung di titik $(1,1)$ adalah :

$$x_1x + y_1y + \frac{1}{2}A(x + x_1) + \frac{1}{2}B(y + y_1) + C = 0$$

$$1.x + 1.y + 3(x + 1) + (-2)(y + 1) - 4 = 0$$

$$x + y + 3x + 3 - 2y - 2 - 4 = 0$$

$$4x - y - 3 = 0$$

Contoh 12

Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $(x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 16$ di titik $(2,2)$.

Penyelesaian

Persamaan garis singgung di titik $(1,1)$ adalah : $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$.

$$(2 - 6)(x - 6) + (2 + 2)(y + 2) = 16$$

$$-4(x - 6) + 4(y + 2) = 16 \quad \text{atau}$$

$$-4x + 24 + 4y + 8 = 16$$

$$-4x + 4y = -16, \text{ jika kedua ruas dikalikan } -\frac{1}{4}$$

$$\text{didapat : } x - y = 4$$

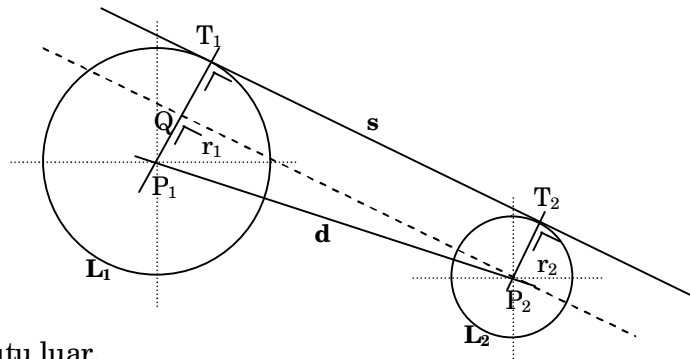
(merupakan persamaan garis singgung yang diminta)

5. PERSAMAAN GARIS SINGGUNG SEKUTU LUAR dan DALAM

a. Garis Singgung Sekutu Luar

Perhatikan gambar di samping.

Diketahui dua buah lingkaran masing-masing L_1 dan L_2 dengan jari-jari berurutan adalah r_1 dan r_2 dengan $r_1 > r_2$, sedangkan jarak antara titik pusat lingkaran itu adalah d .



T_1T_2 disebut ruas garis singgung sekutu luar.

Berapakah panjang ruas garis singgung sekutu luar yang menghubungkan kedua lingkaran tersebut?

Keterangan:

d = jarak kedua pusat

P_1 = pusat lingkaran 1

P_2 = pusat lingkaran 2

Perhatikan $\triangle P_1P_2Q$ siku-siku di Q .

$P_2Q = T_1T_2$ = panjang garis singgung luar (s)

$P_1P_2 = d$ dan $P_1Q = r_1 - r_2$

Dengan teorema Pythagoras didapat : $(P_2Q)^2 = (P_1P_2)^2 - (P_1Q)^2$

$$(P_2Q)^2 = (d)^2 - (r_1 - r_2)^2$$

$$(P_2Q) = \sqrt{(d)^2 - (r_1 - r_2)^2}$$

Panjang garis singgung sekutu luar antara dua lingkaran yang jari-jarinya r_1 dan r_2 dengan $r_1 > r_2$, serta jarak antara kedua pusat lingkaran d adalah : $s = \sqrt{(d)^2 - (r_1 - r_2)^2}$

Contoh 13

Tentukan panjang garis singgung sekutu luar antara lingkaran $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 4 = 0$ dan lingkaran $x^2 + y^2 + 12x + 14y - 15 = 0$.

Penyelesaian :

Lingkaran $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 4 = 0$ pusatnya di $(-1, 5)$ dan jari-jarinya 5

Lingkaran $x^2 + y^2 + 12x + 14y - 15 = 0$ pusatnya di $(-6, -7)$ dan jari-jarinya 10

Jarak kedua pusat lingkaran : $d = \sqrt{((-1) - (-6))^2 + (5 - (-7))^2}$

$$d = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

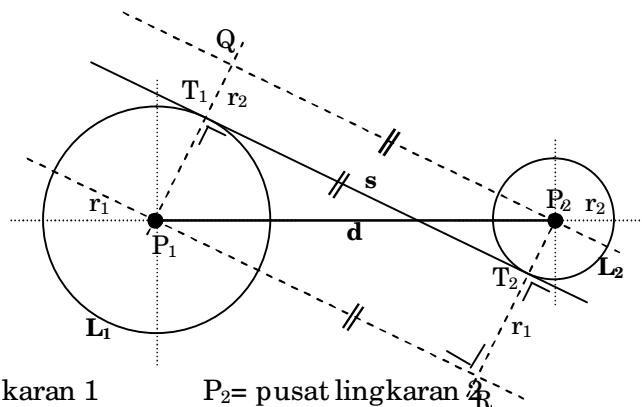
Panjang garis singgung sekutu luar : $s = \sqrt{13^2 - (10 - 5)^2}$

$$s = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$$

b. Garis Singgung Sekutu Dalam

Perhatikan gambar di samping. Diketahui dua buah lingkaran masing-masing L_1 dan L_2 dengan jari-jari berurutan adalah r_1 dan r_2 , sedangkan jarak antara titik pusat lingkaran itu adalah d . T_1T_2 disebut garis singgung sekutu dalam.

Berapakah panjang ruas garis singgung sekutu dalam yang menghubungkan kedua lingkaran tersebut ?



Keterangan:

d = jarak kedua pusat

P_1 = pusat lingkaran 1

P_2 = pusat lingkaran 2

Penyelesaian :

Buat garis melalui titik P_2 yang sejajar T_1T_2 , yaitu P_2R .

Buat garis melalui titik P_1 yang sejajar T_1T_2 , yaitu P_1Q . ket. 1)

$T_1T_2 \perp P_2R$ dan $T_1T_2 \perp P_1Q$ maka : $P_1Q \parallel P_2R$. ket. 2)

$T_1T_2 \parallel P_1R$ dan $T_1T_2 \parallel P_2Q$ maka : $P_2R \parallel P_1Q$. ket. 3)

Dari ket. 1), ket. 2) dan ket. 3) dapat disimpulkan bahwa bangun P_1QP_2R adalah bangun persegi panjang.

Pandang $\triangle P_1RP_2$, yaitu segitiga siku-siku di R. Maka berlaku teorema Pythagoras.

$$(P_1P_2)^2 = (P_1R)^2 + (P_2R)^2$$

$$(P_1P_2)^2 = (T_1T_2)^2 + (r_1 + r_2)^2$$

$$(T_1T_2)^2 = (P_1P_2)^2 - (r_1 + r_2)^2$$

$$(s)^2 = (d)^2 - (r_1 + r_2)^2$$

Maka panjang garis singgung sekutu dalam adalah : $s = \sqrt{(d)^2 - (r_1 + r_2)^2}$

Panjang garis singgung sekutu dalam antara dua lingkaran yang jari-jarinya r_1 dan r_2 , serta jarak antara kedua pusat d adalah : $s = \sqrt{(d)^2 - (r_1 + r_2)^2}$

Contoh 14

Tentukan panjang garis singgung sekutu dalam antara lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ dengan $x^2 + y^2 - 12x - 20y + 132 = 0$.

Penyelesaian

lingkaran pusatnya $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ di $(1, -2)$ dan jari-jarinya 1

Lingkaran $x^2 + y^2 - 12x - 20y + 132 = 0$ pusatnya di $(6, 10)$ dan jari-jarinya 2

Jarak kedua pusat lingkaran : $d = \sqrt{(1-6)^2 + ((-2)-10)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$

Panjang garis singgung sekutu dalam : $s = \sqrt{(d)^2 - (r_1 + r_2)^2}$
 $s = \sqrt{(13)^2 - (1+2)^2} = \sqrt{169-9} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

c. Rangkuman

- $x^2 + y^2 = r^2$ merupakan persamaan lingkaran yang pusatnya $O(0,0)$ dan jari-jari r
- $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ merupakan persamaan lingkaran pusat (a,b) dengan jari-jari r
- Bentuk umum persamaan lingkaran adalah $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ dengan pusat di $(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B)$ dan jari-jari $r = \sqrt{(-\frac{1}{2}A)^2 + (-\frac{1}{2}B)^2 - C}$
- Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ dengan gradien m adalah $y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$
- Persamaan garis singgung pada lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ dengan gradien m adalah $y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1+m^2}$
- Persamaan garis singgung dengan titik singgung (x_1, y_1) pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ adalah $x_1x + y_1y = r^2$
- Persamaan garis singgung dengan titik singgung (x_1, y_1) pada persamaan lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ adalah $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$
- Persamaan garis singgung dengan titik singgung (x_1, y_1) pada persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, adalah $x_1x + y_1y + \frac{1}{2}A(x + x_1) + \frac{1}{2}B(y + y_1) + C = 0$.
- Panjang garis singgung sekutu luar antara dua lingkaran yang jari-jarinya r_1 dan r_2 dengan $r_1 > r_2$, serta jarak antara kedua pusat = d adalah : $s = \sqrt{(d)^2 - (r_1 - r_2)^2}$
- Panjang garis singgung sekutu dalam antara dua lingkaran yang jari-jarinya r_1 dan r_2 , serta jarak antara kedua pusat d adalah : $s = \sqrt{(d)^2 - (r_1 + r_2)^2}$

d. Tugas Kegiatan Belajar

Agar anda memahami materi-materi dalam kegiatan belajar ini, kerjakan soal-soal latihan berikut ini.

- Tentukan persamaan lingkaran dengan syarat :
 - bertitik pusat di $P(3,-4)$ dan melalui $O(0,0)$
 - melalui titik-titik $K(3,1)$ dan $L(-1,3)$ dan titik pusatnya terletak pada garis $3x - y - 2 = 0$.
- Tentukan titik pusat dan jari-jari dari lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 + 8x + 4y + 4 = 0$.
- Tentukan persamaan lingkaran melalui titik $K(1,1)$, $L(1,-1)$ dan $M(2,0)$
- Tentukan harga k , agar garis $y = kx$ dan lingkaran $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$
 - berpotongan di dua titik
 - bersinggungan
 - tidak berpotongan
- Tentukan persamaan garis singgung yang melalui titik $O(0,0)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$
- Diketahui dua buah roda yang jarak kedua As adalah 78 cm, roda pertama jari-jarinya 50 cm dan roda kedua 20 cm. Pada kedua roda dipasang rantai. Tentukan panjang rantai yang tidak menempel di roda.

e. Test Formatif

- Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik $(3,4)$, $(5,0)$ dan $(0,5)$.
- Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 100$ yang melalui titik $(6,8)$

3. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$ dan apa keistimewaan dari lingkaran ini?
4. Tentukan panjang garis singgung persekutuan luar antara lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ dan $x^2 + y^2 - 20x + 36 = 0$

f. Kunci Jawaban Test Formatif

1. Misal persamaan lingkaran yang melalui titik (3,4), (5,0) dan (-5,0), adalah :
 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
 Titik (3,4) pada lingkaran: $9 + 16 + 3A + 4B + C = 0$ atau $3A + 4B + C = -25$
 Titik (5,0) pada lingkaran: $25 + 0 + 5A + 0 + C = 0$ atau $5A + C = -25$
 Titik (0,5) pada lingkaran: $25 + 0 - 5A + 0 + C = 0$ atau $-5A + C = -25$.
 Dari tiga persamaan di atas didapat $A = 0$, $B = 0$ dan $C = -25$
 Jadi persamaan lingkarannya adalah $x^2 + y^2 - 25 = 0$
2. Titik (6,8) pada lingkaran $x^2 + y^2 = 100$
 Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 100$ yang melalui titik (6,8) adalah
 $6x + 8y = 100$ atau $3x + 4y = 50$
3. Persamaan $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$ dapat diubah menjadi $x^2 + 8x + y^2 - 6y = 0$
 $x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 16 + 9$
 $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$
 Jadi pusat (-4, 3) dan jari-jari = 5. Anda dapat juga menggunakan cara lain.
4. Lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ pusatnya (0,0) dan jari-jarinya 2
 $x^2 + y^2 - 20x + 36 = 0$ pusatnya (10, 0) dan jari-jarinya 8
 Jarak kedua pusat = 10
 Panjang garis singgung luar $= \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}$
 $= \sqrt{10^2 - (8 - 2)^2}$
 $= \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$

g. Lembar Kerja Siswa

1. Diketahui sebuah persegi yang sisi-sisinya dinyatakan dengan persamaan $x = -2$, $x = 2$, $y = -2$ dan $y = 2$. Tentukan persamaan lingkaran yang :
 a. menyinggung sisi-sisi persegi. b. melalui titik-titik sudut persegi.
2. Tentukan persamaan lingkaran yang pusatnya (-1,1) dan menyinggung garis $g: 3x + 4y - 11 = 0$
3. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran dengan persamaan $9x^2 + 9y^2 - 6x + 12y - 4 = 0$!
4. Diketahui persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$
 a. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran.
 b. Dengan hasil dari jawaban a, gambarkan lingkaran tersebut.
 c. Dari hasil b, lukiskan titik-titik P (1,1), Q (5,-1) dan R (4,2). Tentukan kedudukan titiknya !
5. Diketahui lingkaran $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ dan titik K (3, -1)
 a. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran.
 b. Gambarkan lingkaran dan titik K pada sebuah diagram kartesius.
 c. Dari titik K buatlah garis singgung pada lingkaran, jika titik singgungnya adalah M maka berapakah panjang garis singgung KM ?

2. Kegiatan Belajar 2

a. Tujuan

Setelah mempelajari kegiatan belajar 2 ini, diharapkan siswa dapat :

1. Memahami unsur-unsur ellips
2. Menentukan persamaan ellips jika pusat dan jari-jarinya diketahui.
3. Dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan ellips.

b. Uraian Materi

Kurva lengkung sederhana dan teratur yang mempunyai dua sumbu simetri adalah Ellips. Buatlah model kerucut dari kertas manila, kemudian potong menurut bidang tidak sejajar

bidang alas tetapi tidak memotong bidang alas kerucut. Berbentuk apakah permukaan kerucut yang terpotong ? Permukaan kerucut yang terpotong berbentuk ellips. Dalam matematika ellips didefinisikan sebagai himpunan titik-titik (pada bidang datar) yang jumlah jaraknya terhadap dua titik tertentu tetap besarnya. Selanjutnya dua titik itu disebut Titik Fokus Ellips.

1. UNSUR-UNSUR ELLIPS

Perhatikan gambar ellips berikut ini:

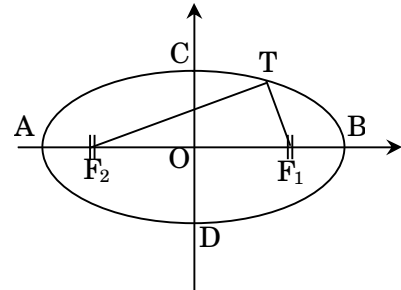
Keterangan:

Titik O disebut koordinat titik pusat ellips. Titik A, B, C dan D disebut koordinat titik-titik puncak ellips.

Titik F_1 dan F_2 disebut koordinat titik-titik fokus ellips.

\overline{AB} dan \overline{CD} berturut-turut disebut sumbu mayor (sumbu panjang) dan sumbu minor (sumbu pendek).

$AB = TF_1 + TF_2$



2. PERSAMAAN ELLIPS DENGAN PUSAT DI (0,0)

Misalkan $F_1F_2 = 2c$, merupakan jarak antara dua titik fokus. Maka $F_1(c,0)$ dan $F_2(-c,0)$. Misalkan jumlah jarak yang tetap itu adalah $2a$. Ambil sembarang titik pada ellips misal $T(x_1, y_1)$ dan titik O sebagai pusat ellips.

Berdasarkan definisi ellips, yaitu:

$$TF_1 + TF_2 = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2} = 2a - \sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2}$$

Jika kedua ruas dikuadratkan maka didapatkan :

$$\Leftrightarrow (x_1 - c)^2 + y_1^2 = 4a^2 + (x_1 + c)^2 + y_1^2 - 4a\sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2}$$

$$\Leftrightarrow (x_1^2 - 2x_1c + c^2) + y_1^2 = 4a^2 + (x_1^2 + 2x_1c + c^2) + y_1^2 - 4a\sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2}$$

$$\Leftrightarrow -4x_1c - 4a^2 = -4a\sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2}$$

Jika kedua ruas dibagi -4 kemudian dikuadratkan didapatkan :

$$\Leftrightarrow (x_1c + a^2)^2 = a^2 \{ (x_1 + c)^2 + y_1^2 \}$$

$$\Leftrightarrow (x_1^2c^2 + a^4 + 2x_1ca^2) = a^2(x_1^2 + 2x_1c + c^2) + a^2y_1^2$$

$$\Leftrightarrow a^2(a^2 - c^2) = (a^2 - c^2)x_1^2 + a^2y_1^2$$

Karena $a > c$ maka $a^2 - c^2 > 0$ sehingga dapat kita misalkan $a^2 - c^2 = b^2$ sehingga persamaan diatas menjadi : $a^2b^2 = b^2x_1^2 + a^2y_1^2$.

Dari persamaan $a^2b^2 = b^2x_1^2 + a^2y_1^2$ apabila masing-masing ruas dibagi dengan a^2b^2 maka

$$\text{akan didapatkan : } \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

Karena $T(x_1, y_1)$ adalah titik yang diambil, maka setiap titik pada garis ellips akan memenuhi

$$: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ dan } \frac{c}{a} \text{ disebut \textbf{eksentrisitas numeric} dan ditulis } e. \text{ Karena } a > c \text{ maka nilai dari}$$

e adalah : $0 < e < 1$.

$$\text{Persamaan ellips dengan pusat di } O(0,0) \text{ adalah : } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Contoh 1 :

Tentukan persamaan ellips yang berpusat di $O(0,0)$ dengan sumbu panjang dan sumbu pendek berturut-turut : a. 8 dan 6 b. 4 dan 2

Penyelesaian

a. Sumbu panjang = 8, berarti $a = 4$. Sumbu pendek = 6, berarti $b = 3$

Jadi persamaan ellipsnya adalah :

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \quad \text{atau} \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

b. Sumbu panjang = 4, berarti $a = 2$. Sumbu pendek = 2, berarti $b = 1$

Jadi persamaan ellipsnya adalah :

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1 \quad \text{atau} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$$

Contoh 2 :

Tentukan persamaan ellips yang titik apinya terletak pada sumbu x, simetri terhadap titik O, sumbu panjangnya 20 dan eksentrisitas numerik $e = \frac{3}{5}$

Penyelesaian

Sumbu panjang $2a = 20$, berarti $a = 10$

$e = \frac{3}{5}$ berarti $\frac{c}{a} = \frac{3}{5}$. Dari persamaan tersebut maka nilai $c = 6$

Karena $a^2 - c^2 = b^2$ maka nilai dari b adalah :

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^2 = 10^2 - 6^2 \rightarrow b^2 = 64$$

Jadi persamaan ellips adalah : $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

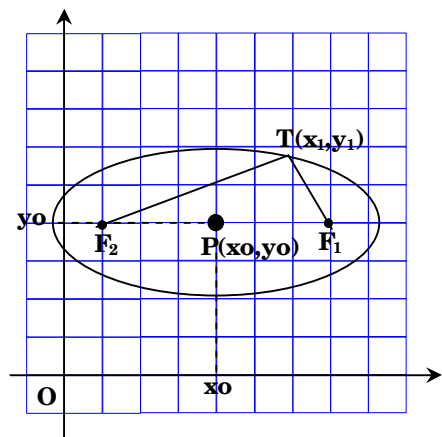
3. PERSAMAAN ELLIPS DENGAN PUSAT TIDAK PADA (0,0)

Dengan cara yang sama, ambil sebarang titik pada ellips misal $T(x_1, y_1)$ dan titik $P(x_0, y_0)$ sebagai pusat ellips, maka akan didapat persamaan ellips yaitu:

$$\frac{(x_1 - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y_1 - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Persamaan ellips yang berpusat di $P(x_0, y_0)$ adalah :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$



Contoh 3 :

Tentukan persamaan ellips yang berpusat di $(5, -3)$ dengan sumbu panjang dan sumbu pendek berturut-turut 6 dan 4.

Penyelesaian

Sumbu panjang = 6, berarti $a = 3$

Sumbu pendek = 4, berarti $b = 2$

Jadi persamaan ellipsnya adalah : $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

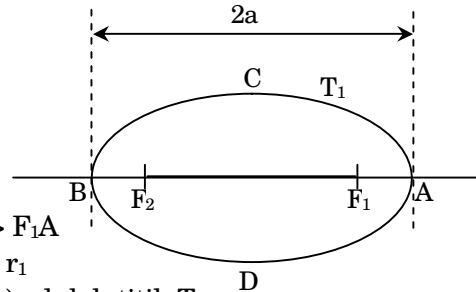
$$\frac{(x-5)^2}{3^2} + \frac{(y-(-3))^2}{2^2} = 1$$

$$\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$

4. SKETSA ELLIPS

Dapatkah anda membuat gambar ellips? Buatlah dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Gambarlah di bukumu titik F_1 , F_2 dan panjang $2a > F_1F_2$. Tentukan titik A dan B pada perpanjangan garis F_1F_2 sedemikian hingga $F_2B = F_1A$ dan $AB = 2a$
2. $F_2B + F_1A = (2a - F_1F_2)$
3. Titik T_1 diperoleh sebagai berikut:
 - a) Buat lingkaran dengan pusat F_1 dan jari-jari $r_1 > F_1A$
 - b) Dari B busurkan lingkaran dengan jari-jari $2a - r_1$
 - c) Perpotongan lingkaran pada langkah (a) dan (b) adalah titik T_1 .
 - d) Lakukan langkah yang sama dengan mengganti peran F_1 dengan F_2 dan sebaliknya. Akan didapat titik-titik C dan D yang memenuhi definisi ellips. Hubungkan titik-titik itu dengan kurva mulus akan didapat sketsa ellips.



5. PERSAMAAN GARIS SINGGUNG ELLIPS

Garis singgung ellips adalah suatu garis yang memotong ellips tepat pada satu titik.

a. Gradien diketahui dengan pusat P (0,0)

Misal persamaan garis singgung : $y = mx + k$

Sehingga ada satu titik pada ellips: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ yang memenuhi persamaan garis

singgung di atas. Akibatnya : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+k)^2}{b^2} = 1$

\Leftrightarrow jika kedua ruas dikalikan a^2b^2 didapat : $b^2x^2 + a^2(mx+k)^2 = a^2b^2$

$\Leftrightarrow (b^2 + a^2m^2)x^2 + a^2k^2 + 2a^2mkx - a^2b^2 = 0$

$\Leftrightarrow (b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2mkx + a^2(k^2 - b^2) = 0$

Garis akan menyinggung ellips, jika titik-titik potong berimpit atau memotong di satu titik. Hal ini terjadi apabila persamaan kuadrat di atas mempunyai dua akar yang sama atau apabila diskriminannya sama dengan nol.

$D = 0$

$\Leftrightarrow (2a^2mk)^2 - 4 \cdot (b^2 + a^2m^2) \cdot a^2(k^2 - b^2) = 0$

$\Leftrightarrow (4a^4m^2k^2) - 4a^2 \cdot (b^2k^2 - b^4 + a^2m^2k^2 - a^2m^2b^2) = 0$

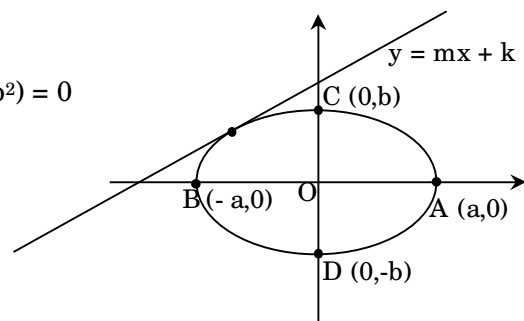
$\Leftrightarrow b^2k^2 - (b^2 + a^2m^2)b^2 = 0$

$\Leftrightarrow k^2 - (b^2 + a^2m^2) = 0$

$\Leftrightarrow k = \pm \sqrt{b^2 + a^2m^2}$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah :

$$y = mx \pm \sqrt{b^2 + a^2m^2}$$



Contoh 4 :

Tentukan persamaan garis singgung pada ellips $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, jika garis singgung itu membentuk sudut 45° dengan sumbu x positif.

Penyelesaian

Garis singgung itu membentuk sudut 45° dengan sumbu x positif berarti gradien $m = \tan 45^\circ$

$$m = 1. \text{ Persamaan garis singgungnya : } y = mx \pm \sqrt{b^2 + a^2 m^2}$$

$$y = 1.x \pm \sqrt{3^2 + 4^2 \cdot 1^2}$$

$$y = x \pm \sqrt{25} \text{ atau } y = x \pm 5$$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah : $y = x + 5$ atau $y = x - 5$

Contoh 5 :

Carilah persamaan garis singgung pada ellips $x^2 + 4y^2 = 20$ yang tegak lurus ke garis $2x - 2y - 13 = 0$.

Penyelesaian

$$2x - 2y - 13 = 0$$

$$y = (2x - 13)/2$$

$$y = x - \frac{13}{2}$$

Jadi gradien garis $2x - 2y - 13 = 0$ adalah $m_1 = 1$. Karena garis singgung tegak lurus garis

$$2x - 2y - 13 = 0, \text{ maka gradien garis singgung : } m_2 = -\frac{1}{m_1} = -1$$

Persamaan ellips $x^2 + 4y^2 = 20$ dapat diubah menjadi : $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ dengan membagi

$$\text{kedua ruas dengan 20. Persamaan garis singgungnya adalah : } y = mx \pm \sqrt{b^2 + a^2 m^2}$$

$$y = -1x \pm \sqrt{5 + 20 \cdot (-1)^2}$$

$$y = -x \pm 5$$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah $y + x - 5 = 0$ atau $y + x + 5 = 0$

b. Gradien diketahui dengan pusat P (x₀ , y₀)

Dengan cara yang serupa dengan di atas dapat ditemukan persamaan garis singgung ellips yang tidak berpusat di (0,0) misal di P (x₀ , y₀) yaitu :

$$y - y_0 = m(x - x_0) \pm \sqrt{b^2 + a^2 m^2}$$

Contoh 6 :

Tentukan persamaan garis singgung pada ellips $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ jika garis singgung itu membentuk sudut 135° dengan sumbu x positif.

Penyelesaian

Garis singgung itu membentuk sudut 135° dengan sumbu x positif berarti gradien $m = \tan 135^\circ = -1$.

$$\text{Persamaan garis singgungnya : } y - y_0 = m(x - x_0) \pm \sqrt{b^2 + a^2 m^2}$$

$$y + 2 = -1(x - 3) \pm \sqrt{9 + 16 \cdot (-1)^2}$$

$$y + 2 = -x + 3 \pm \sqrt{25}$$

$$y + 2 = -x + 3 \pm 5$$

$$y + 2 = -x + 3 + 5 \text{ atau } y + 2 = -x + 3 - 5$$

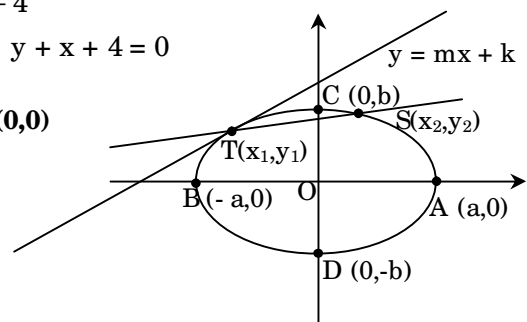
$$y = -x + 6 \text{ atau } y = -x - 4$$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah $y + x - 6 = 0$ atau $y + x + 4 = 0$

c. Titik singgungnya diketahui dengan pusat P (0,0)

Misal titik singgungnya di T (x₁,y₁) dan titik S (x₂,y₂) suatu titik pada ellips, sedangkan

persamaan ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, maka berlaku :



Untuk titik T (x_1, y_1) : $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ pers. (1)

Untuk titik S (x_2, y_2) : $\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$ pers. (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh :

$$b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = b^2 x_2^2 + a^2 y_2^2$$

$$b^2 x_1^2 - b^2 x_2^2 = a^2 y_2^2 - a^2 y_1^2$$

$$b^2 (x_1^2 - x_2^2) = -a^2 (y_1^2 - y_2^2)$$

$$b^2 (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = -a^2 (y_1 + y_2)(y_1 - y_2)$$

$$\frac{-b^2 (x_1 + x_2)}{a^2 (y_1 + y_2)} = \frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)} \quad \text{pers. (3)}$$

Persamaan garis yang melalui T (x_1, y_1) dan S (x_2, y_2) adalah : $y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x - x_1)$

Pers. (3) disubstitusikan akan diperoleh : $y - y_1 = \frac{-b^2 (x_1 + x_2)}{a^2 (y_1 + y_2)} (x - x_1)$

Jika titik S mendekati T sedemikian S dekat dengan T, maka hampir $x_2 = x_1$ dan $y_2 = y_1$, dimana TS = 0

$$y - y_1 = \frac{-b^2 (2x_1)}{a^2 (2y_1)} (x - x_1) \Leftrightarrow y - y_1 = \frac{-b^2 (x_1)}{a^2 (y_1)} (x - x_1) \text{ kedua ruas dikalikan } a^2 y_1$$

$$a^2 y_1 (y - y_1) = -b^2 (x_1) (x - x_1)$$

$$a^2 y_1 y - a^2 y_1^2 + b^2 x_1 x - b^2 x_1^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 y_1 y + b^2 x_1 x - (a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2) = 0$$

$$a^2 y_1 y + b^2 x_1 x - a^2 b^2 = 0$$

$$a^2 y_1 y + b^2 x_1 x = a^2 b^2$$

Jika kedua ruas dibagi $a^2 b^2$ akan diperoleh : $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

Persamaan garis singgung di titik singgung T (x_1, y_1) adalah :

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

Contoh 7 :

Carilah persamaan garis singgung pada ellips $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ di titik yang absisnya 5.

Penyelesaian

Titik-titik pada ellips yang absisnya 5, ordinatnya diperoleh dari : $\frac{5^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2$

Jadi titik singgungnya P(5,2) dan Q(5, -2)

Persamaan garis singgung di P adalah : $\frac{5x}{30} + \frac{2y}{24} = 1$

Persamaan garis singgung di Q adalah : $\frac{5x}{30} - \frac{2y}{24} = 1$

d. Titik singgungnya diketahui dengan pusat P(x_0, y_0)

Dengan cara yang sama seperti diatas, untuk ellips $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$, maka persamaan garis singgung di titik singgung (x_1, y_1) adalah :

$$\frac{(x - x_0)(x_1 - x_0)}{a^2} + \frac{(y - y_0)(y_1 - y_0)}{b^2} = 1$$

Contoh 8 :

Carilah persamaan garis singgung pada ellips $\frac{(x-2)^2}{20} + \frac{(y+3)^2}{5} = 1$ di titik yang ordinatnya -2.

Penyelesaian :

Titik-titik pada ellips yang ordinatnya -2 diperoleh absis :

$$\frac{(x-2)^2}{20} + \frac{(y+3)^2}{5} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{20} + \frac{(-2+3)^2}{5} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{20} + \frac{1}{5} = 1 \text{ kedua ruas dikalikan dengan 20 maka diperoleh :}$$

$$(x-2)^2 + 4 = 20$$

$$x^2 - 4x + 4 + 4 - 20 = 0$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x-6)(x+2) = 0$$

$$x = 6 \text{ atau } x = -2$$

Jadi titik singgungnya A(6,-2) atau B(-2,-2)

$$\text{Persamaan garis singgung di A(6,-2) : } \frac{(x-2)(6-2)}{20} + \frac{(y+3)(-2+3)}{5} = 1$$

$$\frac{(x-2).4}{20} + \frac{(y+3).1}{5} = 1 \text{ kedua ruas dikalikan dengan 20 maka diperoleh :}$$

$$(x-2).4 + (y+3).4 = 20$$

$$4x - 8 + 4y + 12 = 20$$

$$4x + 4y = 16$$

$$x + y = 4 \quad \text{Jadi persamaan garis singgung di A : } x + y - 4 = 0$$

$$\text{Persamaan garis singgung di B(-2,-2) : } \frac{(x-2)(-2-2)}{20} + \frac{(y+3)(-2+3)}{5} = 1$$

$$\frac{(x-2)(-4)}{20} + \frac{(y+3)(1)}{5} = 1 \text{ kedua ruas dikalikan dengan 20 maka diperoleh :}$$

$$(x-2)(-4) + (y+3).4 = 20$$

$$-4x + 8 + 4y + 12 = 20$$

$$-4x + 4y = 0$$

$$-x + y = 0 \quad \text{Jadi persamaan garis singgung di B : } -x + y = 0$$

c. Rangkuman

- Persamaan ellips dengan pusat di O (0,0) adalah : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- Persamaan ellips dengan pusat di titik P (x₀,y₀) adalah : $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$
- Persamaan garis singgung pada ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dengan gradient **m** dan pusat di :
 - Titik O (0,0) adalah : $y = mx \pm \sqrt{b^2 + a^2 m^2}$
 - Titik P (x₀,y₀) adalah : $y - y_0 = m(x - x_0) \pm \sqrt{b^2 + a^2 m^2}$

4. Persamaan garis singgung di T (x_1, y_1) dengan pusat O (0,0) adalah : $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$
5. Persamaan garis singgung di T (x_1, y_1) dengan pusat P (x_0, y_0) adalah :

$$\frac{(x - x_0)(x_1 - x_0)}{a^2} + \frac{(y - y_0)(y_1 - y_0)}{b^2} = 1$$

d. Tugas Kegiatan Belajar

Agar anda memahami materi ellips ini, kerjakan soal-soal berikut secara mandiri.

1. Tentukan persamaan ellips yang titik apinya terletak pada sumbu x dan simetris terhadap O yang memenuhi syarat jarak kedua titik apinya adalah 4 dan jarak kedua garis arah arahnya adalah 5.
2. Tentukan koordinat titik-titik api dari ellips $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$
3. Tentukan persamaan ellips yang eksentrisitas numeriknya $e = \frac{2}{3}$ salah satu titik apinya F(6,0).
4. Tentukan nilai **m** sehingga garis $y = -x + m$, menyinggung ellips $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$

e. Test Formatif

1. Tentukan garis arah dari ellips $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$
2. Tentukan persamaan ellips dengan pusat (1,2) dan eksentrisitasnya $\frac{4}{5}$ sedangkan direktriknya $4x = 25$
3. Tentukan panjang garis mayor, minor dan persamaan garis singgung pada ellips $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{32} = 1$ melalui titik (5, 4)
4. Buatlah sketsa ellips $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$. Tentukan koordinat kordinat titik fokus dan keempat puncaknya.

f. Kunci Jawaban Test Formatif

1. Dari ellips $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ didapat $a = 10$, $b = 6$ dan $c = 8$
 Persamaan garis arah $x = \frac{100}{8} = \frac{25}{2}$ dan $x = -\frac{100}{8} = -\frac{25}{2}$
2. Eksentrisitasnya $\frac{4}{5} = \frac{c}{a}$ atau $c = \frac{4}{5}a$
 Direktriknya $4x = 25$ atau $x = \frac{25}{4}$, sedangkan $x = \frac{a^2}{c}$, dengan demikian didapat $\frac{a^2}{c} = \frac{25}{4}$ atau
 $a^2 = \frac{25}{4}c \Leftrightarrow a^2 = \frac{25}{4} \cdot \frac{4}{5}a \Leftrightarrow$ atau $a = 5$ dan $c = 4$, akibatnya $b = 3$
 Jadi persamaan ellipsnya adalah $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$
3. Panjang garis mayor = $2\sqrt{50} = 10\sqrt{2}$
 Panjang minor = $2\sqrt{32} = 8\sqrt{2}$
 Persamaan garis singgung pada ellips $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{32} = 1$ melalui titik (5, 4) adalah $\frac{5x}{50} + \frac{4y}{32} = 1$
4. Ellips $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$ dapat diubah menjadi :
 $9x^2 - 36x + 25y^2 + 50y - 164 = 0$
 $9(x^2 - 4x) + 25(y^2 + 2y) - 164 = 0$

$$9(x^2 - 4x + 4) + 25(y^2 + 2y + 1) - 164 = 36 + 25$$

$$9(x - 2)^2 + 25(y + 1)^2 = 225, \text{ kedua ruas dibagi dengan 225 didapat } \frac{(x - 2)^2}{25} + \frac{(y + 1)^2}{9} = 1$$

Dari persamaan ini $a = 5$, $b = 3$ dan $c = 4$

Koordinat-kordinat titik fokus adalah $(6, -1)$ dan $(-2, -1)$ dan koordinat keempat puncaknya adalah $(7, -1)$, $(-3, -1)$, $(2, 2)$ dan $(2, -4)$. Anda dapat membuat sketsa dari hasil jawaban ini.

g. Lembar Kerja Siswa

1. Tentukan persamaan ellips yang pusatnya di $(0,0)$ dengan focus di $F_1 (-4,0)$ dan $F_2 (4,0)$ serta panjang sumbu mayor 10 satuan !
2. Diketahui ellips dengan persamaan $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$
 - a. Selidiki letak titik A $(-4,3)$ terhadap ellips tersebut !
 - b. Tentukan persamaan garis singgung ellips yang melalui titik $(-4,3)$!
3. Diketahui garis $g : y = mx + 2$ dan ellips yang persamaannya $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.
Tentukan batas-batas m , supaya :
 - a. garis g memotong ellips di dua titik yang berlainan.
 - b. garis g menyinggung ellips.
 - c. garis g tidak memotong dan tidak menyinggung ellips.
4. Diketahui ellips dengan persamaan $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, tentukan :
 - a. koordinat titik puncak dan koordinat titik ujung sumbu minor.
 - b. koordinat titik api.
 - c. panjang sumbu mayor dan minor.
 - d. persamaan direktris.
 - e. panjang latus rectum .
 - f. sketsalah ellips tersebut.
5. Diketahui ellips dengan persamaan $100x^2 + 36y^2 = 1$, tentukan :
 - a. koordinat titik puncak dan koordinat titik ujung sumbu minor.
 - b. koordinat titik api.
 - c. panjang sumbu mayor dan minor.
 - d. persamaan direktris.
 - e. panjang latus rectum .
 - f. sketsalah ellips tersebut.

3. Kegiatan Belajar 3

a. Tujuan

Setelah mempelajari kegiatan belajar 3 ini, diharapkan siswa dapat :

1. Memahami unsur-unsur parabola
2. Menentukan persamaan parabola dan dapat menggambar grafiknya
3. Dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan hiperbola.

b. Uraian Materi

Kurva lengkung sederhana dan teratur yang mempunyai satu sumbu simetri adalah Parabola. Buatlah model kerucut dari kertas manila. Atau plastisin (sering disebut malam). Iris dengan bidang yang tegak lurus alas kerucut. Berbentuk apakah permukaan kerucut yang teriris ? Permukaan kerucut yang teriris berbentuk parabola. Parabola diperoleh dengan mengiris bangun kerucut sejajar garis pelukisnya.

Dalam matematika parabola didefinisikan sebagai himpunan titik-titik (pada bidang datar) yang memiliki jarak tetap terhadap suatu titik tertentu dan suatu garis tertentu pula. Selanjutnya titik itu disebut fokus parabola, sedangkan garis itu disebut garis arah atau **direktris**. Parabola dapat dilukis jika diketahui garis arah dan titik fokus yang terletak pada suatu garis, di mana garis itu tegak lurus garis arah.

1. Menentukan Persamaan Parabola

d. Puncaknya O (0,0)

Ambil sebarang titik pada parabola misal T(xi ,yi) dan titik O sebagai puncak parabola. Tarik garis melalui T tegak lurus garis arah yang diketahui misal di P. Hubungkan garis melalui titik T dan F. Berdasarkan definisi parabola : $TF = TP$. Pandang $\triangle TQF$.

$\triangle TQF$ merupakan segitiga siku-siku, dimana membentuk sudut siku-siku di titik Q. Sehingga berlaku teorema pythagoras :

$$QT^2 + QF^2 = TF^2$$

$$\sqrt{QT^2 + QF^2} = TP, \text{ dimana } TF = TP$$

$$\sqrt{QT^2 + QF^2} = (xi + \frac{1}{2}p) = \left[\sqrt{QT^2 + QF^2} \right]^2 = (xi + \frac{1}{2}p)^2$$

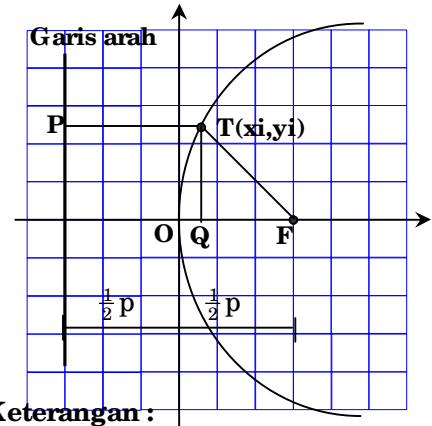
$$QT^2 + QF^2 = (xi + \frac{1}{2}p)^2$$

$$yi^2 + (\frac{1}{2}p - xi)^2 = (xi + \frac{1}{2}p)^2$$

$$yi^2 + \frac{1}{4}p^2 - pxi + xi^2 = xi^2 + pxi + \frac{1}{4}p^2$$

$$yi^2 = 2pxi$$

Titik T (xi,yi) berada pada parabola. Sehingga rumus $yi^2 = 2pxi$ akan berlaku untuk semua titik (x,y) yang berada pada parabola.



Keterangan :

Titik F disebut titik api, koordinatnya $F(\frac{1}{2}p, 0)$.

Titik O disebut titik puncak.

Garis $x = -\frac{1}{2}p$ disebut garis arah atau direktris

Sumbu x merupakan sumbu simetri dari parabola

Persamaan parabola yang puncaknya O (0,0) dan sumbu simetrisnya x adalah :

$$y^2 = 2px$$

Contoh 1 :

Tentukan persamaan parabola yang puncaknya di O, sumbu simetrinya berimpit dengan sumbu x dan parabola terletak di kanan sumbu y dan melalui titik (1,2)

Penyelesaian

Misal persamaan parabolanya $y^2 = 2px$ (karena terletak di setengah bidang bagian kiri).

Titik (1,2) pada parabola berarti : $4 = 2p$ atau $p = 2$

Jadi persamaan parabolanya adalah $y^2 = 4x$

Contoh 2 :

Tentukan persamaan parabola puncaknya di (0,0) dan koordinat titik apinya F(4,0).

Penyelesaian

Misal persamaan parabolanya $y^2 = 2px$

Koordinat titik apinya F(4,0), berarti $\frac{1}{2}p = 4$ atau $p = 8$

Jadi persamaan parabolanya adalah $y^2 = 16x$

Contoh 3 :

Tentukan persamaan parabola yang puncaknya di (0,0), sumbu simetrinya sumbu x dan persamaan garis arahnya $x + 5 = 0$.

Penyelesaian

Misal persamaan parabolanya $y^2 = 2px$

Persamaan garis arahnya $x + 5 = 0$ berarti $\frac{1}{2}p = 5$ atau $p = 10$

Jadi persamaan parabolanya adalah $y^2 = 20x$

e. Puncaknya $P(x_p, y_p)$

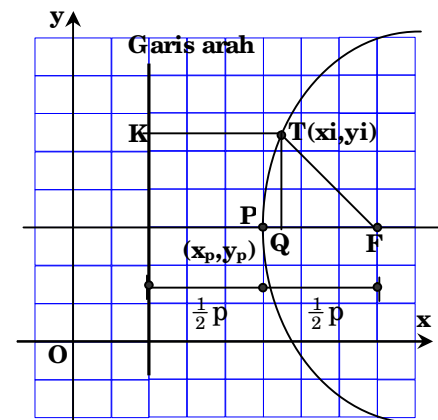
Ambil sebarang titik pada parabola misal $T(x_i, y_i)$ dan titik $P(a, b)$ sebagai puncak parabola.

Tarik garis melalui T tegak lurus garis arah yang diketahui misal di K. Hubungkan garis melalui titik T dan F.

Berdasarkan definisi parabola : $TF = TK$.

Dengan menggunakan cara yang sama seperti di atas, anda dapat menjabarkan bahwa persamaan parabola yang puncaknya $P(x_p, y_p)$ dan sumbu simetrinya sejajar sumbu x

adalah : $(y - y_p)^2 = 2 \cdot p \cdot (x - x_p)$



Keterangan :

Titik F disebut titik api, koordinatnya $F(\frac{1}{2}p, y_p)$.

Titik $P(x_p, y_p)$ disebut puncak parabola

Garis $x = -\frac{1}{2}p + a$ disebut garis arah atau direktris

Persamaan parabola yang puncaknya $P(x_p, y_p)$ dan sumbu simetrinya sejajar sumbu x adalah : $(y - y_p)^2 = 2 \cdot p \cdot (x - x_p)$

Contoh 4 :

Tentukan persamaan parabola yang puncaknya di $(3, 4)$ dan garis arahnya $x = 1$

Penyelesaian

Garis arahnya $x = 1$ berarti $-\frac{1}{2}p + 3 = 1$ atau $\frac{1}{2}p = 2$ maka $p = 4$

Jadi persamaan parabolanya adalah $(y - 4)^2 = 8(x - 3)$

2. Persamaan Garis Singgung Parabola

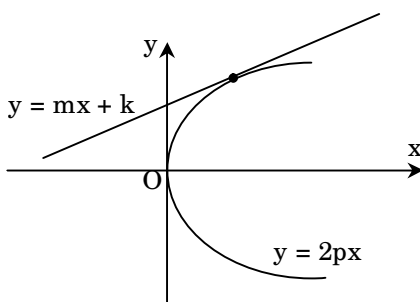
Garis singgung parabola adalah suatu garis yang memotong parabola tepat pada satu titik.

a. Gradien diketahui

a.1. Puncak titik O (0,0)

Misal persamaan garis singgung : $y = mx + k$. Sehingga ada satu titik pada parabola : $y^2 = 2px$ yang memenuhi persamaan garis singgung di atas.

Akibatnya :



$$(mx + k)^2 = 2px$$

$$m^2x^2 + 2mkx + k^2 = 2px$$

$m^2x^2 + (2mk - 2p)x + k^2 = 0$; merupakan persamaan kuadrat dalam variabel x.

Agar persamaan kuadrat itu mempunyai satu harga x, maka harus terpenuhi syarat diskriminan dari persamaan itu sama dengan nol, yaitu : $D = 0$.

$$(2mk - 2p)^2 - 4 \cdot m^2k^2 = 0$$

$$4 \cdot (mk - p)^2 - 4 \cdot m^2k^2 = 0$$

$$4 \cdot (m^2k^2 - 2mkp + p^2) - 4m^2k^2 = 0$$

$$-8mkp + 4p^2 = 0$$

$$-2mkp + p^2 = 0$$

$$p.(p - 2mk) = 0$$

$$p = 0 \text{ atau } p = 2mk, \text{ didapat } k = \frac{p}{2m}$$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah $y = mx + \frac{p}{2m}$

Persamaan garis singgung dengan gradient m pada parabola $y^2 = 2px$ atau puncak titik O (0,0)

$$\text{adalah : } y = mx + \frac{p}{2m}$$

Contoh 5 :

Tentukan persamaan garis singgung dengan gradien 2 pada parabola $y^2 = 8x$

Penyelesaian

$$y^2 = 8x \text{ berarti } p = 4$$

Persamaan garis singgung dengan gradien 2 pada parabola $y^2 = 8x$ adalah $y = mx + \frac{p}{2m}$

$$\text{yaitu : } y = 2x + 1$$

a.2. Puncak titik P (x_p, y_p)

Dengan cara yang serupa dengan di atas, anda dapat menemukan persamaan garis singgung parabola yang berpuncak di P (x_p, y_p) yaitu :

Persamaan garis singgung dengan gradient m pada parabola dengan puncak P (x_p, y_p) adalah :

$$y - y_p = m.(x - x_p) + \frac{p}{2m}$$

Contoh 6 :

Tentukan persamaan garis singgung yang gradiennya membentuk sudut 45° dengan sumbu x dan menyinggung parabola $(y - 4)^2 = 8(x - 3)$

Penyelesaian

$(y - 4)^2 = 8(x - 3)$ berarti $p = 4$ dan koordinat puncaknya (3,4)

Gradiennya membentuk sudut 45° dengan sumbu x berarti $m = 1$ (masih ingat dari mana asalnya?). Jadi persamaan garis singgungnya adalah :

$$y - y_p = m.(x - x_p) + \frac{p}{2m}$$

$$y - 4 = 1(x - 3) + 2 \text{ atau } y = x + 3$$

b. Titik singgung diketahui

b.1. Puncak titik O (0,0)

Misal titik singgungnya di P (x_i, y_i)

Persamaan garis : $y = mx + k$

Karena garis singgung memotong parabola yaitu di tepat satu titik, maka berlaku :

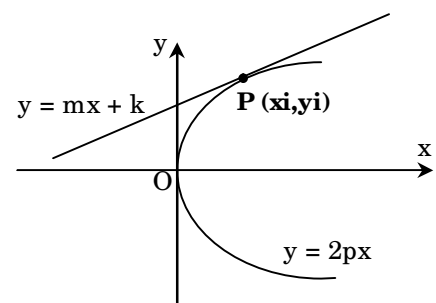
$$(mx + k)^2 = 2px$$

$$y_i^2 + m^2(x - x_i)^2 + 2m y_i(x - x_i) = 2px$$

$m^2x^2 + (2mk - 2p)x + k^2 = 0$; merupakan persamaan kuadrat dalam variabel x. Karena ada satu titik potong dengan parabola maka absisnya adalah :

$$x_i = -\frac{b}{2a} = -\frac{(2mk - 2p)}{2m^2} = \frac{p - 2k}{m^2} \quad \dots \text{ pers. 1)}$$

$$y = mx + k, \text{ maka : } y_i = m \cdot \frac{p - 2k}{m^2} + k \Leftrightarrow y_i = \frac{p}{m} \quad \dots \text{ pers. 2)}$$



Jika $y_i = \frac{p}{m}$ maka nilai dari $m = \frac{p}{y_i}$. Jadi gradient garis singgung adalah $m = \frac{p}{y_i}$

Karena titik P (x_i, y_i) terdapat pada parabola maka berlaku : $y_i^2 = 2p.x_i$

Setelah dilakukan substitusi pers. 1) dan pers. 2) diperoleh nilai $k = \frac{y_i}{2}$

Jadi $y = \frac{p}{y_i} + \frac{y_i}{2}$ dan jika kedua ruas dikalikan dengan y_i maka akan didapatkan :

$$y_i.y = px + \frac{y_i^2}{2} \text{ dan } y_i^2 = 2p.x_i \text{ maka : } y_i.y = px + \frac{2p.x_i}{2} \Leftrightarrow y_i.y = px + p.x_i \text{ atau } y_i.y = p(x + x_i)$$

Persamaan garis singgung melalui titik P (x_i, y_i) pada parabola $y^2 = 2px$ adalah :
 $y_i.y = p(x + x_i)$

Contoh 7 :

Tentukan persamaan garis singgung melalui titik P(-2,4) pada parabola $y^2 = -8x$

Penyelesaian

Dari $y^2 = -8x$ didapat $p = -4$

Titik P(-2,4) terletak pada parabola $y^2 = -8x$

Persamaan garis singgung melalui titik P adalah :

$$\begin{aligned} y_i.y &= p(x + x_i) \\ 4y &= -4.(x - 2) \\ y &= -x + 2 \end{aligned}$$

Contoh 8 :

Tentukan persamaan garis singgung melalui titik P(-2,-3) pada parabola $y^2 = 8x$

Penyelesaian

Dari $y^2 = 8x$ didapat $p = 4$

Titik P(-2,-3) tidak terletak pada parabola $y^2 = 8x$

Misal titik singgungnya S(x_o, y_o).

Maka persamaan garis singgung melalui S adalah : $y.y_o = 4(x + x_o)$.

Titik P(-2, -3) terletak pada garis singgung maka : $-3y_o = 4(-2+x_o)$

atau $4x_o + 3y_o - 8 = 0 \dots$ pers. 1)

S pada parabola, maka $y_o^2 = 8.x_o$ atau $x_o = \frac{1}{8}.y_o^2 \dots$ pers. 2)

Substitusi pers. 2) pada pers. 1) didapatkan :

$$4\left(\frac{1}{8}.y_o^2\right) + 3y_o - 8 = 0$$

$$\frac{1}{2}.y_o^2 + 3y_o - 8 = 0$$

$$y_o^2 + 6.y_o - 16 = 0$$

$$(y_o + 8)(y_o - 2) = 0$$

$$y_o = -8 \text{ atau } y_o = 2$$

Untuk $y_o = -8$ didapat $x_o = 8$ dan untuk $y_o = 2$ didapat $x_o = \frac{1}{2}$

Jadi: Persamaan garis singgung melalui (8,-8) adalah $-8y = 4.(x + 8) \Leftrightarrow x + 2y + 8 = 0$.

Persamaan garis singgung melalui $(2, \frac{1}{2})$ adalah $2y = 4.(x + \frac{1}{2}) \Leftrightarrow 2x - y + 1 = 0$.

b.2. Puncak titik P (x_p, y_p)

Dengan cara yang serupa dengan di atas, anda dapat menemukan persamaan garis singgung parabola di titik T (x_i, y_i) yang tidak berpuncak di di P (x_p, y_p) yaitu :

$$(y_i - y_p)(y - y_p) = p(x + x_i - 2x_p)$$

Persamaan garis singgung parabola puncak di P (x_p, y_p) dan melalui titik T (x_i, y_i) adalah :

$$(y_i - y_p)(y - y_p) = p(x + x_i - 2x_p)$$

Contoh 9 :

Tentukan persamaan garis singgung melalui titik $P(5, -8)$ pada parabola $(y - 4)^2 = 8(x - 3)$

Penyelesaian

Dari parabola $(y - 4)^2 = 8(x - 3)$ didapat $p = 4$ dan puncaknya $(3, 4)$

Titik $(5, -8)$ terletak pada parabola $(y - 4)^2 = 8(x - 3)$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah :

$$(y_i - y_p)(y - y_p) = p(x + x_i - 2x_p)$$

$$(-8 - 4)(y - 4) = 4(x + 5 - 6)$$

$$-12(y - 4) = 4(x - 1)$$

$$-12y + 48 = 4x - 4$$

$$4x + 12y = 52$$

c. Rangkuman

Persamaan parabola yang puncaknya $O(0,0)$ dan sumbu simetrisnya x adalah : $y^2 = 2px$

Persamaan parabola yang puncaknya $P(x_p, y_p)$ dan sumbu simetrisnya sejajar sumbu x adalah :

$$(y - y_p)^2 = 2 \cdot p \cdot (x - x_p)$$

Persamaan garis singgung dengan gradien m pada parabola $y^2 = 2px$ atau puncak titik $O(0,0)$

$$\text{adalah : } y = mx + \frac{p}{2m}$$

Persamaan garis singgung dengan gradient m pada parabola dengan puncak $P(x_p, y_p)$ adalah :

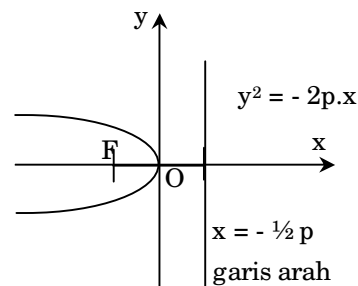
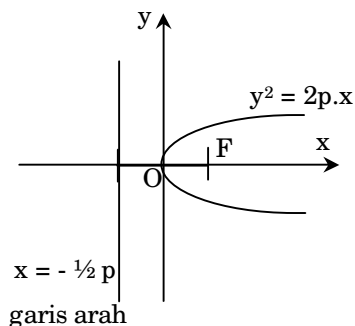
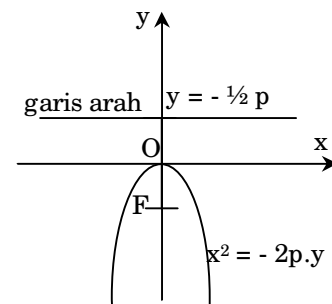
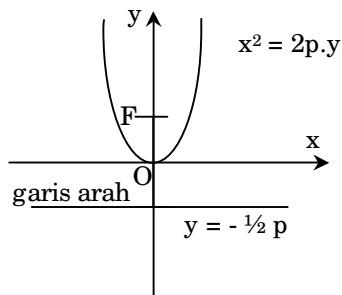
$$y - y_p = m \cdot (x - x_p) + \frac{p}{2m}$$

Persamaan garis singgung melalui titik $P(x_i, y_i)$ pada parabola $y^2 = 2px$ adalah : $y_i \cdot y = p(x + x_i)$

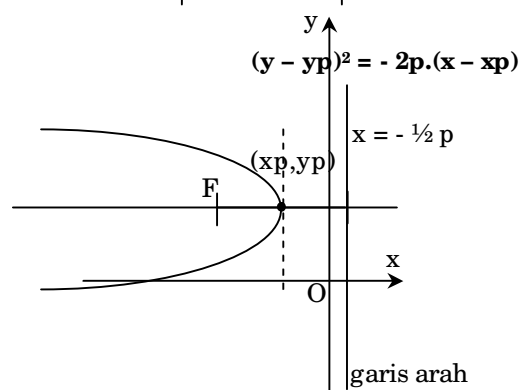
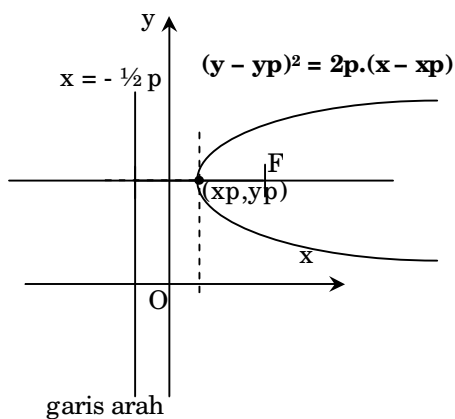
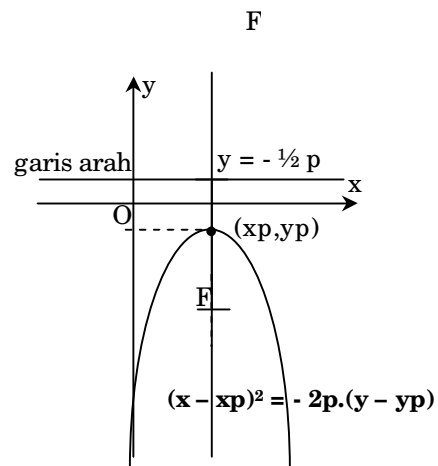
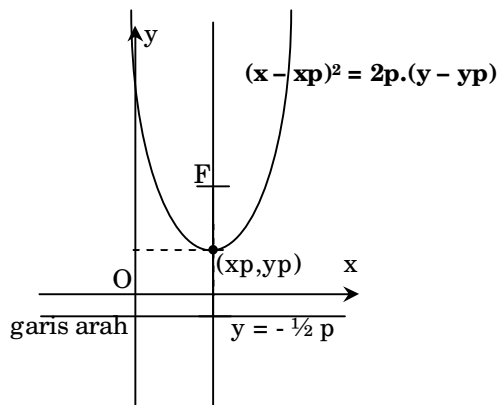
Persamaan garis singgung parabola puncak di $P(x_p, y_p)$ dan melalui titik $T(x_i, y_i)$ adalah :

$$(y_i - y_p)(y - y_p) = p(x + x_i - 2x_p)$$

Grafik parabola yang berpuncak di $O(0,0)$ antara lain :



Grafik parabola yang berpuncak di P (x_p, y_p)



d. Tugas Kegiatan Belajar

1. Tentukan titik api dan persamaan garis arah parabola $y^2 = 24x$
2. Carilah persamaan garis yang menghubungkan titik M dan titik api parabola $y^2 = 20x$, jika absis titik M adalah 7.
3. Tentukan nilai k sehingga persamaan $y = kx + 2$ menyinggung parabola $y^2 = 4x$.
4. Diketahui puncak parabola adalah $A(6, -3)$ dan persamaan garis arahnya $3x - 5y + 1 = 0$, tentukan titik api dari parabola.

e. Test Formatif

1. Buatlah sketsa grafik parabola $y^2 = 4x$ dan $x^2 = -4y$
2. Tentukan persamaan parabola yang berpuncak di titik pangkal O dan melalui $(6, -6)$ serta menyinggung sumbu y.
3. Tentukan persamaan garis singgung yang melalui $(-2, -3)$ pada parabola $y^2 = 8x$
4. Tentukan puncak, sumbu simetri, fokus dan direktrik dari parabola dengan persamaan $y^2 = -6x$.

f. Kunci Jawaban Test Formatif

1. Parabola $y^2 = 4x$ puncaknya $(0,0)$, dan melalui titik $(1,1)$, $(2,4)$, $(-1, 1)$, $(-2, 4)$ yang dicari dengan menggunakan tabel berikut. Anda dapat membuat sketsa sendiri !

x	- 1	- 2	1	2
y	1	4	1	4

Parabola $x^2 = -4y$ puncaknya $(0,0)$, dan melalui titik $(1,-4)$, $(2,-8)$, $(-1, 4)$, $(-2, 8)$ yang dicari dengan menggunakan tabel berikut. Anda dapat membuat sketsa sendiri !

x	- 1	- 2	1	2
y	4	8	- 4	- 8

2. Parabola yang berpuncak di titik pangkal O dan menyingung sumbu y, bentuk umumnya adalah $x^2 = 2py$. Melalui (6,-6), maka $36 = -12p$, didapat $p = -3$
Jadi persamaan parabola yang diminta adalah $x^2 = -6y$
3. Titik (-2, -3) tidak pada parabola $y^2 = 8x$.
Dari $y^2 = 8x$ didapat $p = 4$
Misal titik singgungnya (a,b), maka persamaan garis singgungnya adalah $by = 4(x + a)$.
Garis singgung ini melalui titik (-2, -3) maka $-2b = 4(-3 + a)$ atau $4a + 2b = 12$ (1)
Sedangkan (a, b) pada parabola $y^2 = 8x$ maka berlaku $b^2 = 8a$ (2)
Eliminasi dari (1) dan (2) didapat $a = 2$ dan $b = 4$ atau $a = 4,5$ dan $b = -6$
Jadi persamaan garis singgungnya adalah :
 $4y = 4(x + 2)$ atau $y = x + 2$, atau $-6y = 4(x + 4,5)$ atau $4x + 6y + 18 = 0$
4. Persamaan parabola $y^2 = -8x$ Puncak di (0,0)
Persamaan sumbu simetri adalah $y = 0$ atau sumbu x
Koordinat fokus adalah (-2, 0); Persamaan direktris adalah $x = 2$

g. Lembar Kerja Siswa

1. Tentukan persamaan parabola yang puncaknya di O (0,0) dengan persamaan direktrisnya sebagai berikut :
a. $x = -3$ b. $x = 2$ c. $y = -3$ d. $y = 1$
2. Tentukan koordinat titik puncak, koordinat fokus, persamaan sumbu simetris, persamaan direktris dan panjang latus rectum dari tiap-tiap parabola berikut :
a. $(y - 1)^2 = 4(x + 2)$ c. $x^2 - 2x - 6y + 19 = 0$
b. $(x + 2)^2 = -2(y - 1)$ d. $y^2 - 4y + 4x + 8 = 0$
3. Tentukan persamaan parabola yang puncaknya di titik P (2,4) dan fokusnya di F (5,4) !
4. Parabola dengan persamaan : $y^2 + 4y - 4x + 8 = 0$
a. nyatakan persamaan parabola itu dalam bentuk $(y - b)^2 = 4p(x - a)$
b. kemudian tentukan koordinat titik puncak, persamaan sumbu simetri, koordinat fokus, persamaan direktris.
5. Tentukan persamaan-persamaan parabola yang puncaknya di O (0,0) dengan fokus sebagai berikut :
a. F (1,0) b. F (-1,0) c. F (0,2) d. F (0,-2)
6. Tentukan persamaan garis singgung parabola : $y^2 = 8x$ di titik (2,4) !
7. Tentukan persamaan garis singgung parabola : $y^2 = -6x$ dengan gradien -2 !

4. Kegiatan Belajar 4

a. Tujuan

Setelah mempelajari Kegiatan Belajar 4 ini, diharapkan siswa dapat mendeskripsikan hiperbola sesuai dengan ciri-cirinya.

1. Memahami unsur-unsur hiperbola.
2. Menentukan persamaan hiperbola dan dapat menggambar grafiknya.
3. Dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan hiperbola.

b. Uraian Materi

Kurva lengkung sederhana dan teratur yang mempunyai dua sumbu simetri adalah Hiperbola. Hiperbola merupakan bangun datar yang diperoleh dengan mengiris bangun ruang kerucut yang saling bertolak belakang memotong tegak lurus bangun kerucut tersebut tetapi tidak memotong puncak kerucut.

Dalam matematika hiperbola didefinisikan sebagai himpunan titik-titik (pada bidang datar) yang selisih jaraknya terhadap dua titik tertentu tetap besarnya. Selanjutnya dua titik itu

disebut Titik Fokus Hiperbola. Jadi hiperbola dapat dilukis jika diketahui dua titik fokus hiperbola dan suatu ruas garis yang panjangnya kurang dari jarak kedua titik fokus itu diketahui.

3. Unsur-unsur Hiperbola

Perhatikan gambar hiperbola berikut ini:

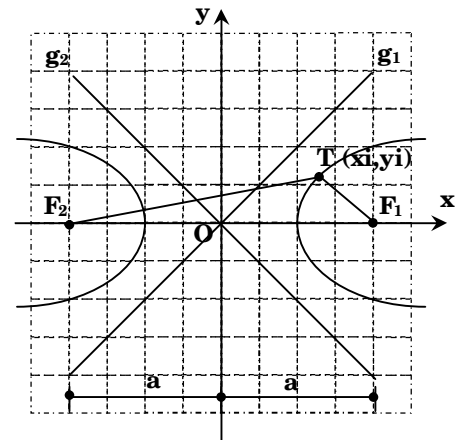
Keterangan:

Titik O disebut koordinat titik pusat Hiperbola

Titik A dan B disebut koordinat titik-titik puncak hiperbola.

Titik F_1 dan F_2 disebut koordinat titik-titik fokus hiperbola.

AB dan CD berturut-turut disebut sumbu mayor (sumbu panjang) dan sumbu minor (sumbu pendek).



4. Menentukan Persamaan Hiperbola

2.1. Persamaan Hiperbola dengan Pusat pada O (0,0)

Misalkan $|F_1F_2| = 2c$ merupakan jarak antara dua titik focus. Maka $F_1(c,0)$ dan $F_2(-c,0)$. Misalkan selisih jarak yang tetap itu adalah $2a$.

Ambil sembarang titik pada hiperbola misalkan $T(x_i, y_i)$ dan titik O sebagai pusat hiperbola.

Berdasarkan definisi hiperbola, yaitu :

$$|TF_2| - |TF_1| = 2a$$

$$\sqrt{(x_i + c)^2 + y_i^2} - \sqrt{(c - x_i)^2 + y_i^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x_i + c)^2 + y_i^2} = 2a + \sqrt{(c - x_i)^2 + y_i^2}$$

Jika kedua ruas dikuadratkan, maka :

$$(x_i + c)^2 + y_i^2 = 4a^2 + (c - x_i)^2 + y_i^2 + 4a\sqrt{(c - x_i)^2 + y_i^2}$$

$$x_i^2 + 2x_i.c + c^2 + y_i^2 = 4a^2 + c^2 - 2x_i.c + x_i^2 + y_i^2 + 4a\sqrt{(c - x_i)^2 + y_i^2}$$

$$2x_i.c = 4a^2 - 2x_i.c + 4a\sqrt{(c - x_i)^2 + y_i^2} \Leftrightarrow 4x_i.c - 4a^2 = 4a\sqrt{(c - x_i)^2 + y_i^2}$$

$$x_i.c - a^2 = a\sqrt{(c - x_i)^2 + y_i^2} \text{ Jika kedua ruas dikuadratkan maka akan didapatkan :}$$

$$(x_i.c - a^2)^2 = a^2 \{ (c - x_i)^2 + y_i^2 \}$$

$$x_i^2.c^2 - 2x_i.c.a^2 + a^4 = a^2(c^2 - 2x_i.c + x_i^2) + a^2y_i^2$$

$$x_i^2.c^2 - a^2x_i^2 - a^2y_i^2 = a^2c^2 - a^4 \Leftrightarrow x_i^2(c^2 - a^2) - a^2y_i^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Karena $c > a$ maka $c^2 - a^2 > 0$ sehingga kita misalkan $c^2 - a^2 = b^2$ sehingga persamaan di atas menjadi : $x_i^2b^2 - a^2y_i^2 = a^2b^2$

$$\text{Masing-masing ruas dibagi dengan } a^2b^2 \text{ diperoleh : } \frac{x_i^2}{a^2} - \frac{y_i^2}{b^2} = 1$$

Karena titik $T(x_i, y_i)$ berada pada hiperbola maka berlaku untuk semua titik (x, y)

pada hiperbola, sehingga disimpulkan persamaan hiperbolanya adalah : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Garis asimtot hiperbola adalah suatu garis yang melalui pusat hiperbola dan menyinggung hiperbola di jauh tak berhingga titik. Misal persamaan garis yang melalui pusat hiperbola dan memotong hiperbola : $y = mx$

Sehingga minimal ada satu titik pada hiperbola : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ yang memenuhi persamaan

garis di atas. Akibatnya : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx)^2}{b^2} = 1$

$$x^2 b^2 - a^2 (mx)^2 = a^2 b^2$$

$$x^2 (b^2 - a^2 m^2) = a^2 b^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2 m^2}$$

Maka nilai x adalah : $x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2 m^2}}$ sehingga nilai y adalah : $y = \pm \frac{mab}{\sqrt{b^2 - a^2 m^2}}$

Jadi koordinat-koordinat titik potongnya adalah :

$$\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2 m^2}}, \frac{mab}{\sqrt{b^2 - a^2 m^2}} \right) \text{ dan } \left(\frac{-ab}{\sqrt{b^2 - a^2 m^2}}, \frac{-mab}{\sqrt{b^2 - a^2 m^2}} \right)$$

Jika $b^2 - a^2 m^2 > 0$ maka ada dua titik potong yang berlainan .

Jika $b^2 - a^2 m^2 < 0$ maka tidak ada titik potong atau titik potongnya khayal .

Jika $b^2 - a^2 m^2 = 0$ maka titik potongnya di jauh tak berhingga.

Hal yang terakhir menyatakan bahwa $b^2 - a^2 m^2 = 0$ jika $m = \pm \frac{b}{a}$ maka garis $y = mx$ menyinggung hiperbola di tak berhingga.

Jadi garis-garis $y = \pm \frac{b}{a} x$ disebut asimtot-asimtot hiperbola.

Persamaan asimtot juga dapat dinyatakan dengan : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ dan $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$; dengan membagi kedua ruas dengan b.

Dari uraian materi di atas dapat diambil beberapa catatan sebagai berikut :

1. Persamaan hiperbola : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
2. Pusatnya di O (0,0) maka : Fokus di $F_1 (c,0)$ dan $F_2 (-c,0)$
3. Puncaknya di A (a,0) dan B (-a,0)
4. Persamaan asimtotnya : $y = \pm \frac{b}{a} x$
5. Eksentrisitas numeriknya : $e = \frac{c}{a} > 1$
6. Persamaan garis arah : $x = \pm \frac{a^2}{c}$

Contoh 1 :

Diketahui persamaan parabola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

Tentukan Koordinat puncak, fokus, pusat, persamaan asimtot dan eksentrisitas numerik. Juga buat sketsa hiperbolanya.

Penyelesaian

Dari parabola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

didapat : $a = 4,$

$b = 3$

$c^2 - a^2 = b^2$

$c^2 - 16 = 9$ atau $c^2 = 25$, didapat $c = 5$
(kenapa -5 tidak digunakan?)

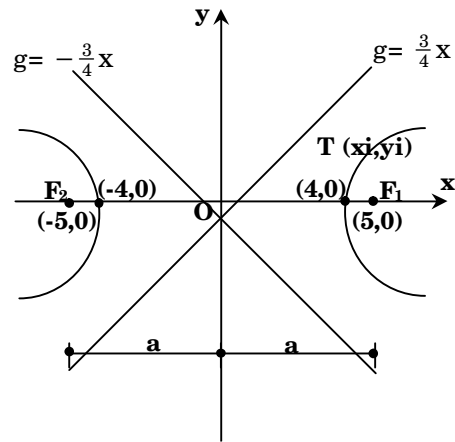
Koordinat pusat adalah $O(0,0)$

Koordinat puncak adalah $B(-4,0)$ dan $A(4,0)$

Koordinat Fokus $F_1(5,0)$ dan $F_2(-5,0)$

Persamaan asimtot adalah $y = \frac{3}{4}x$ dan $y = -\frac{3}{4}x$

Eksentrisitas numeriknya adalah $e = \frac{5}{4}$



2.2. Persamaan Hiperbola dengan Pusat pada $P(x_p, y_p)$

Dengan cara yang sama, ambil sebarang titik pada lingkaran misal $T(x_i, y_i)$ dan titik $P(x_p, y_p)$ sebagai pusat hiperbola, maka akan didapat persamaan

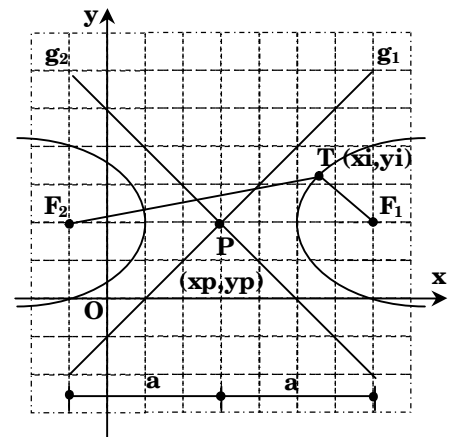
hiperbola yaitu : $\frac{(x - x_p)^2}{a^2} - \frac{(y - y_p)^2}{b^2} = 1$

Pusatnya di $P(x_p, y_p)$, focus di $F_1(x_p + c, y_p)$ dan $F_2(x_p - c, y_p)$.

Puncaknya di $A(x_p + a, y_p)$ dan $B(x_p - a, y_p)$.

Persamaan asimtotnya : $y - y_p = \pm \frac{b}{a}(x - x_p)$

Eksentrisitas numeriknya : $e = \frac{c}{a} > 1$



Contoh 2 :

Diketahui hiperbola dengan persamaan $\frac{(x-2)^2}{3} - \frac{(y-8)^2}{1} = 1$

Tentukan Koordinat puncak, fokus, pusat, persamaan asimtot dan eksentrisitas numerik.

Penyelesaian

Dari $\frac{(x-2)^2}{3} - \frac{(y-8)^2}{1} = 1$ didapat : $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, $x_p = 2$, $y_p = 8$ dan $c = 2$

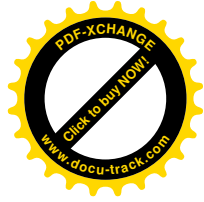
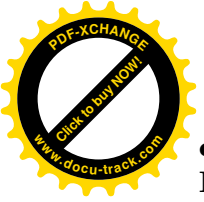
Pusatnya di $(2, 8)$

Fokus di $F_1(4, 8)$ dan $F_2(0, 8)$;

Puncak di $A(2 + \sqrt{3}, 8)$ dan $B(2 - \sqrt{3}, 8)$

Persamaan asimtotnya $y - 8 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 2)$

Eksentrisitas numeriknya $e = \frac{2}{\sqrt{3}} > 1$



c. Rangkuman

Persamaan parabola yang puncaknya $O(0,0)$ dan sumbu simetrinya sumbu x adalah $y^2 = 2px$

Persamaan parabola yang puncaknya $P(a,b)$ dan sumbu simetrinya sejajar sumbu x adalah :

$$(y - b)^2 = 2p(x - a)$$

Persamaan garis singgung dengan gradien m pada parabola $y^2 = 2px$ adalah $y = mx + \frac{p}{2m}$

Persamaan garis singgung pada parabola yang berpuncak di (a,b) yaitu : $y - b = m(x - a) + \frac{p}{2m}$

Jadi persamaan garis singgung melalui titik (x_1, y_1) pada parabola $y^2 = 2px$ adalah $y_1 y = p(x + x_1)$

Persamaan garis singgung parabola di titik $T(x_1, y_1)$ yang tidak berpuncak di (a,b) yaitu :

$$(y_1 - b)(y - b) = p(x + x_1 - 2a)$$

d. Tugas Kegiatan Belajar 1

Untuk lebih memahami apa yang anda pelajari, kerjakan latihan berikut secara mandiri.

1. Tentukan persamaan hiperbola yang pusatnya di $(0,0)$ dan panjang sumbu hiperbola masing-masing 16 dan 12. Tentukan pula jarak antara dua fokus, persamaan direktrik, dan asimtot.
2. Tentukan persamaan hiperbola yang pusatnya di $(0,0)$ jika eksentrisitasnya $\frac{13}{12}$ sedangkan jarak antara kedua fokus 56.
3. Diketahui hiperbola $9x^2 - 16y^2 = 144$. Tentukan direktrik (garis arah), fokus, dan puncaknya. Gambar sketsa grafiknya !
4. Diketahui hiperbola $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$. Tentukan direktrik (garis arah), fokus, dan puncaknya. Gambar sketsa grafiknya !
5. Temukan persamaan hiperbola yang titik-titik apinya terletak pada sumbu x , simetris terhadap O dan melalui titik $M(-5,3)$ dan eksentrisitas numeriknya $e = 2$.

e. Test Formatif KB 1

1. Diketahui hiperbola pusatnya di $(0,0)$, eksentrisitas $\frac{13}{12}$ dan jarak kedua fokus adalah 39. Tentukan persamaan hiperbola tersebut !
2. Diketahui hiperbola $x^2 - 16y^2 - 4x - 32y - 28 = 0$. Tentukan koordinat fokus dan puncak hiperbola !
3. Tentukan persamaan garis singgung $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ yang sejajar garis $x + y + 1 = 0$
4. Tentukan persamaan garis singgung $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{8} = 1$ yang melalui titik $(6, 2)$.

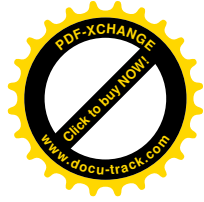
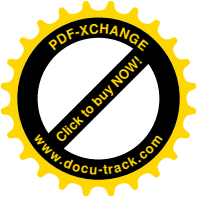
f. Kunci Jawaban Test Formatif

1. $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$
2. Jadi koordinat fokus adalah $(\sqrt{17}, 0)$ dan $(-\sqrt{17}, 0)$ dan koordinat puncak parabola adalah $(-4, 0)$ dan $(4, 0)$
3. $y = -x \pm \sqrt{28}$
4. $\frac{6x}{24} - \frac{2y}{8} = 1$

g. Lembar Kerja Siswa

1. Diketahui hiperbola dengan persamaan : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, tentukanlah :

- a. koordinat titik puncak, koordinat titik ujung sumbu minor dan koordinat fokus.
 - b. nilai eksentrisitas, persamaan direktris dan persamaan asimtot.
 - c. panjang latus rectum.
 - d. gambarkan sketsa hiperbola tersebut.
2. Tentukan persamaan hiperbola yang berpusat di O (0,0) jika :
 - a. fokus $F_1 (-8,0)$, $F_2 (8,0)$ dan titik pucak $A_1 (-7,0)$ dan $A_2 (7,0)$.
 - b. fokus $F_1 (0,-3)$, $F_2 (0,3)$ dan titik pucak $A_1 (0,-2)$ dan $A_2 (0,2)$.
 3. Tentukan persamaan hiperbola yang pusatnya di O (0,0) jika diketahui :
 - a. fokus di $F_1 (-5,0)$ dan $F_2 (5,0)$ dengan sumbu mayor 6 satuan.
 - b. fokus di $F_1 (0,-5)$ dan $F_2 (0,5)$ dengan sumbu mayor 8 satuan.
 4. Tentukan persamaan hiperbola yang pusatnya di O (0,0) jika diketahui :
 - a. sumbu utama berimpit dengan sumbu-x melalui titik (3,1) dan (9,5).
 - b. titik puncak di (-6,0) dan (6,0), persamaan asimtot $y = -\frac{4}{3}x$ dan $y = \frac{4}{3}x$
 5. Diketahui hiperbola dengan persamaan : $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$, tentukanlah :
 - a. koordinat titik pusat, puncak dan fokus.
 - b. persamaan sumbu utama, sumbu sekawan, panjang sumbu mayor dan minornya.
 - c. persamaan asimtot, nilai eksentrisitas dan persamaan direktris.
 - d. panjang latus rectum dan sketsakanlah hiperbola tersebut !
 6. Tentukan persamaan hiperbola yang pusatnya di titik (3,2) dan salah satu puncaknya (7,2) serta panjang sumbu imaginernya 6 satuan !
 7. Tunjukkan bahwa garis $x - y + 2 = 0$ memotong hiperbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$ di dua titik berlainan, kemudian tentukan koordinat titik-titik potongnya.
 8. Tentukan nilai a agar garis : $4x + y + a = 0$ menyinggung hiperbola $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{48} = 1$, kemudian tentukan titik singgungnya !



EVALUASI KOMPETENSI

A. Pilihan Ganda

- Jari-jari lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$ adalah ...
a. 3 b. 4 c. 6 d. 8 e. 10
- Letak titik P ($\sqrt{2}, \sqrt{3}$) terhadap lingkaran $x^2 + y^2 + 4x - 9y - 7 = 0$ adalah ...
a. di dalam b. di luar c. pada garis d. di pusat e. memotong
- Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ yang melalui titik (3,4) adalah ...
a. $3x - 4y - 25 = 0$ c. $4y - 3x - 25 = 0$ e. tidak ada
b. $3x + 4y + 25 = 0$ d. $3x + 4y - 25 = 0$
- Suatu ellips mempunyai sumbu panjang 15 satuan dan sumbu pendek 9 satuan, maka jarak kedua fokusnya adalah ...
a. 6 satuan b. 12 satuan c. 18 satuan d. 24 satuan e. 30 satuan
- Koordinat fokus ellips dengan persamaan $25x^2 + 16y^2 = 400$ adalah ...
a. $(\pm 3, 0)$ b. $(0, \pm 3)$ c. $(\pm 4, 0)$ d. $(0, \pm 4)$ e. $(0, \pm 5)$
- Eksentrisitas ellips dengan persamaan $5x^2 + 9y^2 = 180$ adalah ...
a. $e = 2/5$ b. $e = 3/7$ c. $e = 5/6$ d. $e = 2/3$ e. $e = 7/9$
- Persamaan parabola dengan titik puncak (a,b) dan fokus F ($a + \frac{1}{2}p, b$) adalah ...
a. $y^2 = 2p.(x - a) + b^2$ c. $y^2 - b^2 = -2p.(x - a)$ e. $(y - a)^2 = 2p.(x - b)$
b. $(y + b)^2 = 2p.(x + a)$ d. $(y - b)^2 = 2p.(x - a)$
- Kurva lengkung $x = 8 - y^2$ adalah parabola dengan puncak di ...
a. (8,0) b. (0,0) c. (0,8) d. (0,-8) e. (-8,0)
- Koordinat fokus dari hiperbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ adalah ...
a. $(\pm 5, 0)$ b. $(0, \pm 5)$ c. (5,5) d. (0,0) e. (5,-5)
- Panjang latus rectum hiperbola $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ adalah ...
a. $25/2$ b. $16/2$ c. $13/2$ d. 6 e. $9/2$

B. Essay

- Tentukan persamaan lingkaran dengan syarat :
a) bertitik pusat di P (3,-4) dan melalui O (0,0)
b) melalui titik-titik K (3,1) dan L (-1,3) dan titik pusatnya terletak pada garis $3x - y - 2 = 0$
- Tentukan titik pusat dan jari-jari dari lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 + 8x + 4y + 4 = 0$.
- Tentukan koordinat titik-titik api dari ellips $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$
- Tentukan persamaan ellips yang eksentrisitas numeriknya $e = \frac{2}{3}$ salah satu titik apinya di F (6,0).
- Tentukan titik api dan persamaan garis arah parabola $y^2 = 24x$
- Diketahui hiperbola $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$. Tentukan direktrik (garis arah), fokus, dan puncaknya.