PENERAPAN MEKANIKA KUANTUM SUPERSIMETRIK DALAM MASALAH RADIAL DAN PERSAMAAN DIRAC DERAJAT PERTAMA

Elida Lailiya Istiqomah
UNSW Sydney

SKRIPSI

PENERAPAN MEKANIKA KUANTUM SUPERSIMETRIK DALAM MASALAH RADIAL DAN PERSAMAAN DIRAC DERAJAT PERTAMA

Elida Lailiya Istiqomah

03/171226/PA/09791

Departemen Pendidikan Nasional

Universitas Gadjah Mada

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Yogyakarta

2007

THESIS

APPLICATIONS OF SUPERSYMMETRIC QUANTUM MECHANICS IN THE RADIAL PROBLEMS AND FIRST ORDER DIRAC EQUATION

Elida Lailiya Istiqomah

03/171226/PA/09791

Department of National Education

Gadjah Mada University

Faculty of Mathematics and Natural Sciences

Jogjakarta

2007

SKRIPSI

PENERAPAN MEKANIKA KUANTUM SUPERSIMETRIK DALAM MASALAH RADIAL DAN PERSAMAAN DIRAC DERAJAT PERTAMA

Elida Lailiya Istiqomah

03/171226/PA/09791

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh
derajat Sarjana S1 Program Studi Fisika pada Jurusan Fisika

Departemen Pendidikan Nasional

Universitas Gadjah Mada

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Yogyakarta

2007

THESIS

APPLICATIONS OF SUPERSYMMETRIC QUANTUM MECHANICS IN THE RADIAL PROBLEMS AND FIRST ORDER DIRAC EQUATION

Elida Lailiya Istiqomah

03/171226/PA/09791

Submitted to complete the requirements for the degree of Sarjana S1
Physics Study Program of Physics Department

Department of National Education

Gadjah Mada University

Faculty of Mathematics and Natural Sciences

Jogjakarta

2007

SKRIPSI

PENERAPAN MEKANIKA KUANTUM SUPERSIMETRIK DALAM MASALAH RADIAL DAN PERSAMAAN DIRAC DERAJAT PERTAMA

Elida Lailiya Istiqomah
03/171226/PA/09791

Dinyatakan lulus ujian skripsi oleh tim penguji
pada tanggal 9 Oktober 2007

Tim Penguji

Dr.rer.nat. M. Farchani Rosyid	Juliasih Partini, M.Si.
Pembimbing I	Penguji I
	Dr. Kamsul Abraha
	Penguji II

Kupersembahkan

Bagi DIA Sang Maha Pintar
yang menciptakan segala keteraturan alam

Untuk Bapak dan Ibunda, Mbah Putri,
Adikku Novida dan Farid tersayang

"Bukankah Dia mendapatimu sebagai seorang yatim, lalu Dia melindungimu. Dan Dia mendapatimu sebagai seorang yang bingung, lalu Dia memberikan petunjuk.
Dan Dia mendapatimu sebagai seorang yang kekurangan, lalu Dia memberikan kecukupan."

(Q.S. Adh Dhuha : 6-8)

Pangati – ati iku setengah saka keslametan.

(Pepeling Jawa)

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, wa syukurillah.....

Tiada kata yang mampu dituliskan untuk mengungkapkan rasa syukur bahagia atas nikmat yang begitu besar. Sesungguhnya segala sesuatu, ilmu yang bermanfaat, pengetahuan yang mencerahkan jalan manusia, adalah dari Allah SWT semata, yang Maha Esa tiada duanya, Maha Pemberi dan Maha Penyayang bagi seluruh ciptaan-Nya, serta Maha Pintar yang tiada satupun mampu menyamai-Nya. Semoga setiap ilmu pengetahuan yang bertambah seiring berlarinya waktu senantiasa menuntun kita untuk semakin mengakui kebesaran-Nya dan meraih ridho Ilahi.

Puji syukur kepada Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan perkuliahan dan skripsi ini dengan lancar. Tiada kata yang dapat melukiskan puji syukur penulis kepada-Nya atas pertolongan yang tak henti-henti dalam proses penulisan skripsi ini. Setelah lebih dari 4 tahun penulis berjuang di bidang fisika, yang tidak pernah terduga akan mendalaminya, akhirnya penulis bisa memberikan sebuah karya kecil untuk memenuhi syarat wajib kelulusan. Dengan mengumpulkan pemahaman dalam SKS demi SKS masa panjang kuliah yang melelahkan sekaligus mengasyikkan, menjemukan namun penuh kenangan dan hikmah, akhirnya penulis sampai pada masa akhir perkuliahan dan merampungkan penulisan skripsi ini.

Segenggam kumpulan tulisan yang tersusun dalam sebuah skripsi ini memang tidak menyuguhkan suatu penemuan. Kendati demikian, karya ini mencoba menggabungkan, bahkan menggali sebuah kajian yang mungkin hingga saat ini masih belum banyak disinggung, khususnya di bangku perkuliahan. Ada sebentuk kepuasan tersendiri saat bisa menemukan konsep yang selama ini tidak terpikirkan, membayangkannya pun belum pernah.

Pada awalnya saya merasa tidak cocok menekuni bidang ini, yang penuh dengan kerumitan dan banyak konsep-konsep sukar dicerna. Bahkan kata kunci dalam memahami skripsi ini, $\mathfrak{SUPERSYMMETRY}$, begitu asing di telinga sehingga memusingkan dan terasa ambigu. Saya menganggap tidak ada kesesuaian antara topik ini dengan fisika inti, bidang yang waktu itu sangat saya sukai. Begitu tercengangnya saat menyadari kekeliruan dalam pikiran saya selama ini. Dan akhirnya kembali saya harus berucap syukur atas kemudahan yang telah dilalui. Di samping itu, semakin tersadar saya dalam memahami makna ilmu pengetahuan yang bernama fisika secara nyata dan yang sebenarnya. Allah menciptakan segala sesuatu dengan keteraturan, keseimbangan, kesetangkupan, simetri...

> *"Yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Kamu sekali-kali tidak melihat pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang. Maka lihatlah berulang-ulang, adakah kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang?"*
>
> (Q.S. Al Mulk : 3)

Dalam setiap tahapan pembelajaran, begitu banyak hal yang saya dapat, namun hal ini secara langsung juga mengingatkan saya pribadi bahwa masih banyak pula hal yang belum saya ketahui. Sering saya pusing dengan hal-hal baru dan kemudian mencoba mengatasi pertanyaan- pertanyaan yang belum terjawab, satu demi satu. Bahkan hingga detik ini dan selamanya, proses itu masih saja terjadi dan terus berulang. Inilah pembelajaran dalam hidup.

⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂

Selama perkuliahan dan penulisan skripsi banyak pihak yang telah membantu apapun kepada penulis. Bapak, **Alm. Drs. Sholikhin Salam** dan ibunda, **Sri Yuliyanti** tercinta, yang tidak henti-hentinya memberikan curahan perhatian, cinta dan kasih sayang, ananda tiada akan dapat membalas seluruh pengorbanan yang telah dilimpahkan. Skripsi ini sebagai salah satu wujud takzim ananda, atas ridho dan doa yang selalu diberikan. Kepada mbah putri, terima kasih atas doa yang selalu diberikan pada cucumu. Untuk keluarga pakdhe Sudijono terima kasih atas semua bantuannya. Buat kedua adikku tersayang, Novida dan Farid, terima kasih atas segala dukungan dan keceriaan yang mengisi hari-hari kita.

Terima kasih banyak atas segenap waktu yang telah diluangkan oleh **Dr. rer. nat. Muhammad Farchani Rosyid**, selaku dosen pembimbing skripsi, yang memberikan tema skripsi yang awalnya begitu asing namun menarik, bahan perkuliahan dan berbagai pemahaman mengenai berbagai konsep. Terima kasih pula atas dorongan, semangat, motivasi dan teladan dalam setiap bimbingan yang diberikan dengan kesabaran. Penulis ingin tetap berkolaborasi dalam memahami konsep-konsep baru sehingga dapat menghasilkan karya yang lebih baik lagi. Semoga Allah SWT membalas semua kebaikan yang telah Bapak berikan.

Terima kasih pula untuk Drs. Guntur Maruto, S.U., selaku dosen wali / pembimbing akademik selama 4 tahun, yang telah memberi arahan dan bimbingan yang kontinu serta memantau perkembangan akademik setiap semester sehingga penulis dapat menjalani masa perkuliahan dengan lancar. Pada seluruh dosen dan staf jurusan fisika, Alm. Prof. Muslim, Bu Zahara, Bu Palupi, Bu Juli, Pak Kamsul, Pak Arief, Pak Kuwat, dll, terima kasih atas ilmu yang telah dibagikan kepada penulis.

Kepada sahabat-sahabatku fisikawati angkatan 2003: Zumie, Tasya, Sulis, Wurie, teteh Nia, Anisa, Sofie, Nadhia, Tuta, ukhti Immel, Astin, Ayu, dll, terima kasih atas kebersamaan yang indah selama kuliah. Buat neng Lutfie, terima kasih atas dorongan yang membawaku ke fisika teori, belajar denganmu jadi lebih menyenangkan. Terima kasih banyak atas bantuan selama penyusunan skripsi sejak awal hingga akhirnya bisa terselesaikan untuk Leo, Dodo, Firdaus dan Frenky. Untuk mas Timmy, mbak Ria, mas Ardhi, mbak Latief, terima kasih atas segala masukan yang diberikan. Untuk teman-teman pecinta Astrofisika, Dito, Atsna, Nana, Pri, mas Joko, semoga kita bisa terus bersama-sama menggali ilmu. Untuk Vevy, Fina, Merry, dan teman-teman fisika angkatan 2005, kejarlah terus cita-citamu.

Kepada pihak-pihak lain yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah banyak memberi bantuan untuk penulis, terima kasih atas semua yang telah diberikan. Semoga Allah selalu membimbing kita semua.

Penulis berharap agar skripsi ini dapat memberikan wacana baru yang dapat menjadi langkah awal bagi ide dan gagasan kreatif selanjutnya. Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak lepas dari berbagai kesalahan dan masih sangat jauh dari kesempurnaan, untuk itu penulis mohon maaf. Akhirnya, *tiada gading yang tak retak*, kesempurnaan tiada lain hanyalah milik Allah Ta'ala...

Yogyakarta, Oktober 2007 - Romadhon 1428 H

Elida Lailiya Istiqomah

DAFTAR ISI

ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN

$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan riil.
$\mathbb{C}$	Himpunan bilangan kompleks.
$\mathbb{R}^n$	Produk kartesis n buah himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$.
$a \in A$	a adalah anggota himpunan A.
$\forall$	Untuk setiap.
$B \subset A$	Himpunan B adalah subhimpunan dari himpunan A.
$A \to B$	Pemetaan dari himpunan A ke himpunan B.
$\otimes$	Produk/hasil kali tensor antara dua operator yang masing-masing berada dalam suatu ruang vektor.
$\delta^{(n)}$	Fungsi delta Dirac.
$:=$	Definisi
∞	Tak terhingga.
$d^n x$	Sama dengan $dx^1 dx^2 \cdots dx^n$ atau $dx^0 dx^1 \cdots dx^{n-1}$.
$\int_{-\infty}^{\infty}$	Integral meliputi seluruh domain *integrand*.
∇	Operator nabla pada ruang koordinat.
$\lvert\cdot\rangle$	Vektor ket.
$\langle\cdot\rvert$	Vektor bra.
$\langle\cdot\lvert\cdot\rangle$	Hasil kali skalar antara vektor ket dan vektor bra.
h	Tetapan Planck. Dalam satuan SI besarnya adalah $6,626 \times 10^{-34}$J.s.
e	Muatan listrik elementer. Dalam satuan SI besarnya adalah $1,602 \times 10^{-19}$C.
c	Laju rambat cahaya pada ruang hampa. Dalam satuan SI besarnya adalah $2,998 \times 10^8 \mathrm{m/s}$.

INTISARI

PENERAPAN MEKANIKA KUANTUM SUPERSIMETRIK DALAM MASALAH RADIAL DAN PERSAMAAN DIRAC DERAJAT PERTAMA

Oleh :

Elida Lailiya Istiqomah

03/171226/PA/09791

Telah dilakukan kajian mengenai konsep supersimetri dalam mekanika kuantum serta penerapannya pada masalah radial dan persamaan Dirac derajat pertama. SUSY dalam masalah radial dibahas dengan memanfaatkan operator tangga. Pembahasan SUSY dalam masalah radial dibatasi untuk sistem minimal berdimensi tiga. SUSYQM untuk sistem relativistik (persamaan Dirac) ditelusuri menggunakan alih ragam Foldy-Wouthuysen.

Kata kunci : supersimetri, mekanika kuantum, masalah radial, persamaan Dirac, alih ragam Foldy-Wouthuysen

ABSTRACT

APPLICATIONS OF SUPERSYMMETRIC QUANTUM MECHANICS IN THE RADIAL PROBLEMS AND FIRST ORDER DIRAC EQUATION

By :

Elida Lailiya Istiqomah

03/171226/PA/09791

The concept of supersymmetry in quantum mechanics and its applications to radial problems and first order Dirac equation have been discussed. SUSY in the radial problems be applied to three and higher dimensions, also be handled using ladder operator techniques. SUSYQM for relativistic systems (Dirac equation) are discussed using Foldy-Wouthuysen transformation.

Keywords : supersymmetry, quantum mechanics, radial problems, Dirac equation, Foldy-Wouthuysen transformation

BAB I

PENDAHULUAN

1. Latar Belakang Masalah

Pada abad ke-20, bidang ilmu fisika mengalami pergeseran dalam memahami alam, yaitu pada dua paradigma. Pertama, yaitu *Mekanika Kuantum*, dan yang kedua adalah *Relativitas*. Penggabungan antara keduanya disebut *Teori Medan Kuantum* yang di dalamnya muncul konsep *anti-materi*. Pada abad ke-21, fisika diarahkan pada tingkatan penggabungan yang lain, misalnya penggabungan antara *Mekanika Kuantum* dan *Relativitas Khusus*, teori gravitasi Einstein. Penggabungan ini belum memperoleh hasil yang memuaskan, terganjal oleh *inkonsistensi matematis*, ketakberhinggaan, dan kebolehjadian yang negatif. Salah satu kunci untuk mengatasinya adalah konsep tentang supersimetri. Supersimetri awalnya diperkenalkan pada bidang kajian Fisika Energi Tinggi (*High Energy Physics, HEP*) dalam usaha memperoleh penjelasan terpadu dari semua interaksi mendasar di alam.

Supersimetri, atau yang sering disingkat SUSY[1], muncul pertama kali pada tahun 1971 ketika Ramond mengajukan konsep tentang fungsi gelombang untuk fermion bebas berdasarkan struktur *dual model* untuk boson. Kemudian, John Schwarz dan Neveu membangun *dual theory* yang menggunakan aturan anti komutasi untuk operator, yang sesuai dengan tipe osilator harmonik *dual model* konvensional untuk boson.

Namun SUSY yang 'sebenarnya' baru muncul pada 1974 oleh *Julius Wess* dan *Bruno Zumino* dalam artikelnya yang berjudul *A Lagrangian Model Invariant Under Supergauge Transformations*, [Wess dan Zumino , 1974]. Mereka mendefinisikan set transformasi *supergauge* dalam 4 dimensi dan menunjukkan hubungannya dengan

[1] Dari asal kata dalam bahasa Inggris : SUPERSYMMETRY.

teori medan bebas Lagrangan.

Supersimetri adalah kesetangkupan yang dapat mempertukarkan antara fermion dan boson dalam sebuah operasi invarian. Seperti yang telah diketahui dalam fisika partikel, semua partikel yang paling mendasar (*elementary particles*) dan partikel gabungan[2] (*composite particles*), yang sejauh ini telah teramati adalah boson atau fermion, bergantung pada spinnya. Boson adalah partikel pembawa gaya yang memiliki ciri khusus pada spin berupa kelipatan bilangan bulat, misalnya foton. Boson mematuhi statistik Bose-Einstein dan nama *boson* ini sendiri diambil dari nama fisikawan India, Satyendra Nath Bose. Sedangkan *fermion* yang diambil dari nama fisikawan asal AS kelahiran Italia, Enrico Fermi, adalah partikel penyusun materi yang memiliki spin berupa kelipatan setengah dari bilangan bulat dan mematuhi statistik Fermi-Dirac. Hingga saat ini diyakini bahwa fermion terdiri dari quark dan lepton, quark adalah penyusun proton dan netron (keduanya komposit) sedangkan lepton adalah sebutan untuk elektron, muon, tauon dan neutrino.

SUSY merupakan kesetangkupan tingkat tinggi yang tak lazim, mengingat fermion dan boson memiliki perbedaan dalam banyak hal. Misalnya, ketika dua boson yang identik berkondensasi, dalam sudut pandang asas larangan Pauli, tidak ada dua fermion identik dapat mengisi keadaan yang sama. Hal ini kemudian diubah bahwa partikel-partikel tersebut dapat berkelakuan secara setangkup, sebab pada fermion berlaku kaitan komutasi, sedangkan pada boson berlaku kaitan antikomutasi. Aljabar yang menjelaskan SUSY adalah aljabar Lie berderajat yang mengatur kombinasi dari hubungan komutasi dan antikomutasi.

Dalam teori supersimetri yang paling sederhana, setiap boson memiliki pasangan fermion yang sesuai dan setiap fermion memiliki pasangan boson yang sesuai pula. Pasangan fermion dari boson yang ada memiliki nama yang diperoleh dengan

[2]Partikel komposit dibuat atau dibentuk dari partikel yang lebih mendasar (*fundamental*).

menggantikan suku "on" pada akhir nama boson dengan "no", atau menambahkan suku "ino", seperti gluino, fotoino, wino dan zino. Pasangan boson dari fermion yang ada memiliki nama yang diperoleh dengan menambahkan huruf "s" pada awal nama fermion, misalnya selektron, squark, dan slepton.

Dorongan utama dalam mempelajari SUSY (dari sudut pandang fisika partikel) adalah

1. SUSY memberikan landasan yang tepat untuk penggabungan materi dan gaya,
2. SUSY mengurangi perbedaan antara kuantum dan gravitasi,
3. SUSY memberikan jawaban untuk masalah hierarki (*hierarchy problem*) dalam Teori Kesatuan Agung atau Grand Unified Theory (GUT).

Mekanika kuantum dipakai untuk menjelaskan tiga dari empat interaksi mendasar yaitu interaksi elektromagnetik, lemah dan kuat. Interaksi elektromagnetik dan interaksi lemah telah digabungkan dalam teori elektrolemah (*electroweak theory*), sedangkan teori elektrolemah dan interaksi kuat hingga kini masih dicoba untuk menggabungkannya dalam teori kesatuan agung (GUT). Konsep supersimetri diperkenalkan dalam usaha memperoleh GUT tersebut dengan menggabungkan kedua partikel mendasar, boson dan fermion, yang sifat-sifatnya berbeda.

Alam semesta ini seharusnya bisa dijelaskan dengan satu teori tunggal, yang berlaku baik pada dunia makro maupun mikro. Para ilmuwan dari berbagai kalangan terus memburu teori tunggal ini yang merupakan kunci utama memahami alam semesta sesungguhnya bekerja. Inilah isu utama di kalangan para fisika teoritis. Salah satu upaya yang dilakukan adalah menggabungkan materi dan gaya, dua hal yang memiliki kelakuan berbeda di alam ini.

Penggabungan antara boson dan fermion secara langsung merupakan penggabungan antara materi dan gaya karena boson adalah partikel pembawa gaya sedangkan fermion adalah partikel penyusun materi. Materi dan gaya pada dasarnya adalah dua hal yang sangat berbeda, namun dengan teori supersimetri keduanya dapat dipertukarkan sehingga perbedaan yang ada menjadi berkurang. Dengan disatukannya materi dan gaya maka perbedaan antara kuantum dan gravitasi berkurang sehingga penelusuran yang menuju GUT menjadi lebih mudah.

Ciri-ciri SUSY yang penting antara lain

1. Partikel dengan spin yang berbeda, yaitu boson dan fermion, dapat dikelompokkan bersama dalam *supermultiplet*,

2. Simetri internal seperti isospin atau SU(3) dapat tergabung dalam ‘supermultiplet’.

3. Perbedaan dalam teori medan SUSY sangat berkurang.

Konsep supersimetri hingga saat ini terus mendapat perhatian fisikawan dengan berbagai makalah yang bermunculan yang memaparkan kaitan antara SUSY dan konsep-konsep fisika. Supersimetri muncul dalam bentuk yang berbeda pada tiap penerapannya. Dalam artikelnya [Cooper, et. al., 1995], Cooper dkk. memaparkan konsep sederhana tentang supersimetri dalam mekanika kuantum dan hubungannya dengan proses stokhastik klasik, yang sebelumnya pernah dijelaskan pada 1979 oleh G. Parisi dan N. Sourlas. Hubungan antara SUSY dengan sistem ketidakteraturan (*chaotic systems*) dengan menggunakan teori matriks acak (*random matrix theory*) dapat dilihat pada [Efetov , 1997] dan [Mirlin , 1999].

Keberadaan partikel supersimetri atau "superpartners" juga menarik perhatian para peneliti di laboratorium, misalnya *Large Hadron Collider* di CERN yang sejak 1995 mencoba menemukan pasangan W boson, serta penelitian di Fermilab yang mencari pasangan quark dan gluon. Hingga saat ini belum ada eksperimen yang mendukung teori supersimetri ini namun bukan tidak mungkin hal tersebut akan segera terbukti seiring dengan penelitian yang terus dikembangkan.

2. Perumusan Masalah

Dari uraian tersebut telah dijelaskan bahwa konsep supersimetri muncul dalam upaya merumuskan teori kesatuan agung (GUT) yang menyatukan ketiga interaksi dunia mikro. Supersimetri muncul untuk memberikan jawaban pada masalah hierarki GUT yang mencoba menggabungkan materi dan gaya, sehingga perbedaan diantara keduanya berkurang. Penggabungan ini dilakukan dengan menggunakan aljabar yang dapat mempertukarkan kedua partikel mendasar yang menyusun materi dan gaya, yaitu boson dan fermion.

Dalam upaya memperoleh teori kesatuan agung (GUT), supersimetri dikembangkan dalam ranah mekanika kuantum yang mempelajari skala mikro dan mencakup ketiga interaksi mendasar tersebut. Oleh sebab itu, supersimetri harus dapat diterapkan dalam berbagai masalah di dalam mekanika kuantum.

Dalam skripsi ini, supersimetri ditinjau dalam dua masalah mekanika kuantum yang sederhana sehingga memudahkan pemahaman dalam melihat kaitan SUSY secara langsung. Pertama, SUSY ditinjau dalam persamaan Schrödinger, khususnya pada bagian radialnya. Kedua, SUSY ditinjau dalam persamaan Dirac derajat pertama yang menerangkan partikel spin $\frac{1}{2}$. Dipilih kedua masalah tersebut karena keduanya sering dijumpai dalam kaitannya dengan bidang yang meliputi mekanika kuantum lainnya.

3. Ruang Lingkup Kajian

Kajian skripsi ini dibatasi hanya pada penelusuran aljabar supersimetri dalam mekanika kuantum dan tidak membahas bidang lain. Penerapannya dalam mekanika kuantum juga dibatasi hanya pada dua masalah, yaitu masalah radial dan persamaan

Dirac derajat pertama sehingga tidak pula melibatkan kajian mengenai masalah mekanika kuantum lainnya. Selain itu, tidak dipaparkan keterkaitan antara kedua bidang penerapan supersimetri tersebut, yaitu persamaan Dirac dan masalah radial.

4. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah:

1. Merumuskan aljabar yang mendasari konsep supersimetri dalam lingkup kajian mekanika kuantum.

2. Menunjukkan bahwa konsep SUSYQM berlaku dalam masalah radial, minimal pada kasus berdimensi tiga dan lebih mudah diterapkan dengan menggunakan teknik operator tangga.

3. Menunjukkan penerapan SUSYQM dalam persamaan Dirac orde pertama dengan menggunakan alih ragam Foldy-Wouthuysen.

4. Menunjukkan kesetaraan antara konsep SUSYQM, persamaan Dirac dan alih ragam Foldy-Wouthuysen sehingga kaitan tersebut menyebabkan SUSYQM dapat diterapkan di dalamnya.

5. Tinjauan Pustaka

Penjelasan tentang supersimetri dalam mekanika kuantum secara singkat dipaparkan oleh Avinash Khare [Khare , 2004] sebagai landasan untuk memahami konsep supersimetri dalam mekanika kuantum. Paparan yang lebih terperinci disajikan dalam bukunya yang disusun bersama-sama dengan Fred Cooper dan Uday Sukhatme. Penjelasan yang sama juga dapat dilihat pada buku karangan [Bagchi , 2000] yang juga menjelaskan supersimetri dalam mekanika klasik dan sistem non linier. Dalam buku tersebut juga dijelaskan penerapan mekanika kuantum supersimetrik dalam berbagai masalah yang bersesuaian, salah satunya pada masalah radial. Sedangkan dalam artikel [Blockley , 2000], Blockley dan Stedman membahas aljabar supersimetri mendasar dengan contoh yang sederhana.

Dalam makalahnya [Hughes et. al. 1 , 1986], Hughes dkk. secara ringkas menjelaskan supersimetri dalam persamaan Dirac derajat pertama untuk sistem Landau-Hall. Artikel ini kemudian disempurnakan dalam makalah selanjutnya yang lebih urut dan terperinci yaitu [Hughes et. al. 2 , 1986] yang lebih menekankan pada telaah mekanika kuantum supersimetrik dan pangkat dua hamiltonan Pauli dan Dirac. Dalam menjelaskan kaitan tersebut mereka menggunakan alih ragam Foldy-Wouthuysen [Foldy dan Wouthuysen , 1949] yang awalnya digunakan untuk menjabarkan pendekatan nonrelativistik bagi teori Dirac. Untuk memperjelas pemahaman dalam hubungan SUSYQM dan persamaan Dirac, Beckers dan Debergh dalam artikelnya [Beckers dan Debergh , 1990] memaparkan kesetaraan keduanya dalam kaitan alih ragam uniter Foldy-Wouthuysen.

6. Sistematika Penulisan

Skripsi ini ditulis dalam lima bab, dengan penjelasan bab demi bab adalah sebagai berikut:

- Pada bab I dikemukakan latar belakang penelitian yang dilakukan, tujuan penelitian, tinjauan pustaka, sistematika penulisan, serta penjelasan mengenai metode pelaksanaan penelitian.

- Bab II berisi penjelasan mengenai konsep-konsep dasar supersimetri dalam mekanika kuantum, dimulai dengan hubungan SUSY dengan masalah osilator harmonik. Dijelaskan pula bentuk-bentuk matematis dalam SUSYQM.

- Bab III membahas hubungan antara konsep SUSYQM dan masalah radial, baik pada kasus 3 dimensi maupun lebih. Bab ini juga menguraikan penerapan SUSYQM dalam masalah radial dengan menggunakan operator tangga.

- Pada bab IV dibahas aspek-aspek penting dalam memahami persaman Dirac dan alih ragam Foldy-Wouthuysen. Bab ini adalah pengantar sebelum mempelajari penerapan SUSYQM selanjutnya.

- Bab V membahas penerapan SUSYQM dalam persamaan Dirac derajat pertama beserta alih ragam yang digunakannya. Dalam bab ini dibahas pula mengenai kaitan kesetaraan yang terjalin antara SUSYQM, persamaan Dirac dan alih ragam Foldy-Wouthuysen.

- Bab VI berisi kesimpulan mengenai hasil kajian yang telah dilakukan serta saran-saran untuk kajian mendatang mengenai topik-topik yang telah berkaitan dengan topik yang dikemukakan dalam skripsi ini.

7. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah kajian teoritis terhadap supersimetri yang ditinjau dalam mekanika kuantum, serta penerapan konsep tersebut dalam beberapa aspek yang membuktikan kesesuaian dengan teori supersimetri yang dimaksud.

BAB II

PRINSIP DASAR SUPERSIMETRI DALAM MEKANIKA KUANTUM

1. SUSY dan Masalah Osilator Harmonik

SUSY memberikan penjelasan yang elegan tentang struktur dan kesetangkupan pada persamaan Schrödinger. Untuk memahami SUSY dalam mekanika kuantum nonrelativistik secara sederhana[1] dan mempelajari SUSY bekerja, pembahasan akan dimulai pada masalah osilator harmonik.

Dalam penjabaran prinsip dasar SUSYQM ini dipilih keterkaitannya dengan masalah osilator harmonik. Hal ini dikarenakan osilator harmonik menempati posisi istimewa, antara lain :

- Osilator harmonik merupakan penghampiran (pendekatan) yang sangat baik bagi gerakan sebarang benda di sekitar posisi setimbangnya, yaitu titik tempat potensial partikel bernilai minimum.
- Perilaku sebagian besar sistem kontinu, seperti getaran atom-atom pada medium elastis (misalnya dinamika fonon dalam kristal dan perambatan bunyi dalam zat padat maupun zat cair) dan medan elektromagnet dalam rongga, dapat dideskripsikan dengan teori osilator harmonik.
- Osilator harmonik berperan penting dalam pemerian (deskripsi) sekumpulan partikel identik yang secara kuantum semuanya memiliki keadaan yang sama. Tingkat-tingkat energi osilator harmonik terpisah secara seragam : selisih antar

[1] SUSY yang diterapkan ke dalam mekanika kuantum sering disingkat SUSYQM, dari asal kata dalam bahasa Inggris : Supersymmetric Quantum Mechanics. Dalam beberapa referensi ada pula yang disingkat SSQM atau SQM.

tingkat energi yang berturutan selalu sama, yaitu sebesar $\hbar\omega$.

- Tata cara penyelesaian persaman swanilai dalam osilator harmonik memberikan suatu gambaran untuk memperoleh swanilai dengan memanfaatkan perilaku yang harus dipenuhi oleh swafungsi di $x \to \pm\infty$.

Ditinjau hamiltonan pada osilator harmonik, yang diberi simbol H_B, yaitu[2]

$$H_B = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m{\omega_B}^2x^2, \tag{II.1}$$

dengan ω_B menunjukkan frekuensi alamiah osilator dan $\hbar = h/2\pi$, tetapan Planck tersusutkan.

Selanjutnya, akan digunakan sistem satuan sehingga $\hbar = m = 1$ dan $p = -i\frac{d}{dx}$. Oleh karena itu, persamaan (II.1) menjadi

$$H_B = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}{\omega_B}^2x^2.$$

Didefinisikan operator turun b dan operator naik $b^\dagger$ menurut

$$b = \frac{i}{\sqrt{2\omega_B}}(p - i\omega_B x) \quad \text{dan} \quad b^\dagger = -\frac{i}{\sqrt{2\omega_B}}(p + i\omega_B x). \tag{II.2}$$

Hamiltonan pada persamaan (II.1) menjadi

$$H_B = \frac{1}{2}\omega_B\{b^\dagger, b\}, \tag{II.3}$$

dengan $\{b^\dagger, b\}$ adalah antikomutator antara b dan $b^\dagger$, yakni $\{b^\dagger, b\} = b^\dagger b + bb^\dagger$. Kedua operator, b dan $b^\dagger$, apabila dikenakan pada swakeadaan tenaga, $|n\rangle$, mem-

[2]Pada pembahasan selanjutnya akan dijelaskan alasan penggunaan simbol tersebut.

berikan

$$b|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \qquad b^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

Operator cacah boson, $N_B = b^\dagger b$, memenuhi persamaan swanilai

$$N_B|n\rangle = n|n\rangle,$$

dengan $n = n_B$.

Syarat pengkuantuman kanonik, $[q, p] = i$, diubah dalam bentuk b dan $b^\dagger$ menjadi

$$[b, b^\dagger] = 1, \tag{II.4}$$

$$[b, b] = 0, \qquad [b^\dagger, b^\dagger] = 0,$$

$$[b, H_B] = \omega_B b, \qquad \text{dan} \qquad [b^\dagger, H_B] = -\omega_B b^\dagger.$$

Dengan menggunakan persamaan (II.4) diperoleh

$$H_B = \omega_B(b^\dagger b + \frac{1}{2}) = \omega_B(N_B + \frac{1}{2})$$

dan spektrum tenaganya

$$E_B = \omega_B(n_B + \frac{1}{2}).$$

Bentuk persamaan (II.3) menunjukkan secara tidak langsung bahwa H_B setangkup terhadap pertukaran b dan $b^\dagger$. Hal ini menunjukkan partikel yang dimaksud memenuhi statistik Bose-Einstein. Itulah sebabnya hamiltonan tersebut diberi simbol H_B.

Selanjutnya diamati penempatan operator b dan $b^\dagger$ dalam hubungannya dengan osilator fermionik yang akan ditinjau. Hal ini memberikan hasil berupa hamiltonan fermionik

$$H_F = \frac{\omega_F}{2}[a^\dagger, a],$$

dengan a dan $a^\dagger$ adalah operator turun dan naik pada osilator fermionik yang memenuhi syarat

$$\{a, a^\dagger\} = 1, \tag{II.5}$$

$$\{a, a\} = 0 \qquad \text{dan} \qquad \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0. \tag{II.6}$$

Analogi bagi N_B adalah operator cacah fermionik, $N_F = a^\dagger a$.

Syarat "nilpotency" pada persamaan (II.6) membatasi N_F pada swanilai 0 dan 1 yaitu

$$\begin{aligned} {N_F}^2 &= (a^\dagger a)(a^\dagger a) \\ &= (a^\dagger a) \\ &= N_F \\ N_F(N_F - 1) &= 0 \end{aligned} \tag{II.7}$$

Persamaan (II.7) cocok dengan asas larangan Pauli. Sifat antisetangkup yang dimiliki H_F terhadap pertukaran a dan $a^\dagger$ menunjukkan objek (partikel-partikel) yang memenuhi statistik Fermi-Dirac. Partikel-partikel yang demikian ini disebut *fermion*. Seperti b dan $b^\dagger$ pada persamaan (II.2), operator a dan $a^\dagger$ juga memenuhi wakilan yang cocok. Dalam bentuk matriks Pauli dapat disajikan sebagai

$$a = \frac{1}{2}\sigma_- \qquad a^\dagger = \frac{1}{2}\sigma_+, \tag{II.8}$$

dengan $\sigma_\pm = \sigma_1 \pm i\sigma_2$ dan $[\sigma_+, \sigma_-] = 4\sigma_3$, serta mengingat bentuk

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{II.9}$$

Dengan menggunakan syarat persamaan (II.5), Hamiltonan fermion dapat dinyatakan sebagai

$$H_F = \omega_F(N_F - \frac{1}{2}).$$

Hamiltonan tersebut memiliki spektrum

$$E_F = \omega_F(n_F - \frac{1}{2}), \qquad n_F = 0, 1.$$

Dalam pengembangan SUSY, diperhatikan sistem gabungan (superposisi) antara osilator bosonik dan fermionik. Tenaga E dari penjumlahan E_B dan E_F adalah

$$E = \omega_B(n_B + \frac{1}{2}) + \omega_F(n_F - \frac{1}{2}). \tag{II.10}$$

Dari persamaan (II.10) ini dapat dilihat bahwa E tidak berubah jika terjadi penurunan satu bilangan kuantum bosonik $(n_B \to n_B - 1)$ dan sekaligus kenaikan satu bilangan kuantum fermionik $(n_F \to n_F + 1)$ (dan sebaliknya) dengan frekuensi alamiah sama, $\omega_B = \omega_F$. Kesetangkupan yang demikian disebut SUPERSYMMETRY (SUSY).

Apabila $\omega_B = \omega_F$, spektrum tenaga superposisi osilator fermion dan boson diberikan oleh

$$E = \omega(n_B + n_F), \tag{II.11}$$

dengan $\omega := \omega_B = \omega_F$.

Ditinjau pada keadaan dasar (*groundstate*), persamaan (II.11) memberikan

$n_B = n_F = 0$. Keadaan ini disebut SUSY tak rusak (*SUSY unbroken*). Keadaan yang bernilai nol ini $(n_B = n_F = 0)$ muncul karena hilangnya pengaruh boson dan fermion pada tenaga keadaan dasar supersimetri.

Tenaga untuk keadaan dasar masing-masing osilator bosonik $E_B = \frac{\omega_B}{2}$ dan osilator fermionik $E_F = -\frac{\omega_F}{2}$, kedunya bernilai tidak nol. Spektrum tenaganya merosot (*degenerate*) untuk keduanya (fermion dan boson). Kemerosotan SUSY muncul karena turun / naiknya satu bilangan kuantum bosonik dan naik / turunnya satu bilangan kuantum fermionik secara bersamaan. Pembangkitnya diungkapkan dalam bentuk $ba^\dagger$ (atau $b^\dagger a$).

Jika didefinisikan kuantitas Q dan $Q^\dagger$, sebagai

$$Q = \sqrt{\omega} b \otimes a^\dagger \qquad Q^\dagger = \sqrt{\omega} b^\dagger \otimes a, \tag{II.12}$$

dapat dibuktikan bahwa supersimetri memiliki hamiltonan

$$\begin{aligned} H_s &= \omega(b^\dagger b + a^\dagger a) \\ &= \{Q, Q^\dagger\}. \end{aligned} \tag{II.13}$$

Hamiltonan H_s berkomutasi dengan kedua operator Q dan $Q^\dagger$, yaitu

$$[Q, H_s] = 0 \qquad [Q^\dagger, H_s] = 0. \tag{II.14}$$

Sementara itu berlaku kaitan antikomutasi[3]

$$\{Q, Q\} = 0 \qquad \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0. \tag{II.15}$$

Dengan melihat persamaan (II.14), Q dan $Q^\dagger$ adalah operator supermuatan

[3]Penjelasan dan pembuktian persamaan ini dapat dilihat pada LAMPIRAN A.

(*supercharge*), yaitu swadamping (*self-adjoint*) satu dari yang lain.

Dari persamaan (II.13)-(II.15), dapat dilihat pula bahwa $Q, Q^\dagger$ dan H_s, ketiganya (satu dengan yang lain) memenuhi aljabar yang mencakup komutator dan sekaligus antikomutator. Aljabar ini disebut aljabar berderajat (*graded algebra*). Manfaat Q dan $Q^\dagger$ adalah untuk mengubah keadaan bosonik (fermionik) menjadi keadaan fermionik (bosonik) ketika dioperasikan. Hal ini dapat ditulis

$$\begin{aligned} Q|n_B, n_F\rangle &= \sqrt{\omega n_B}|n_B - 1, n_F + 1\rangle, \quad n_B \neq 0, n_F \neq 1 \\ Q^\dagger|n_B, n_F\rangle &= \sqrt{\omega(n_B + 1)}|n_B + 1, n_F - 1\rangle, \quad n_F \neq 0. \end{aligned} \tag{II.16}$$

Akan tetapi jika ditinjau pada kasus :

- untuk $n_B = 0, n_F = 1,$ maka $Q|n_B, n_F\rangle = 0,$ dan
- untuk $n_F = 0,$ maka $Q^\dagger|n_B, n_F\rangle = 0.$

Untuk melihat makna fisis Hamiltonan SUSY, H_s, digunakan persamaan (II.2) dan (II.8) untuk operator bosonik dan fermionik. Dari persamaan (II.13) :

$$H_s = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 x^2)^{\bullet}\| + \frac{1}{2}\omega\sigma_3, \tag{II.17}$$

dengan $^{\bullet}\|$ adalah matriks satuan (2×2). Persamaan (II.17) ini menunjukkan bahwa H_s sesuai dengan osilator bosonik dengan sebuah elektron yang berada pada medan magnet luar.

Dua komponen H_s pada persamaan (II.17) dapat diproyeksikan menjadi

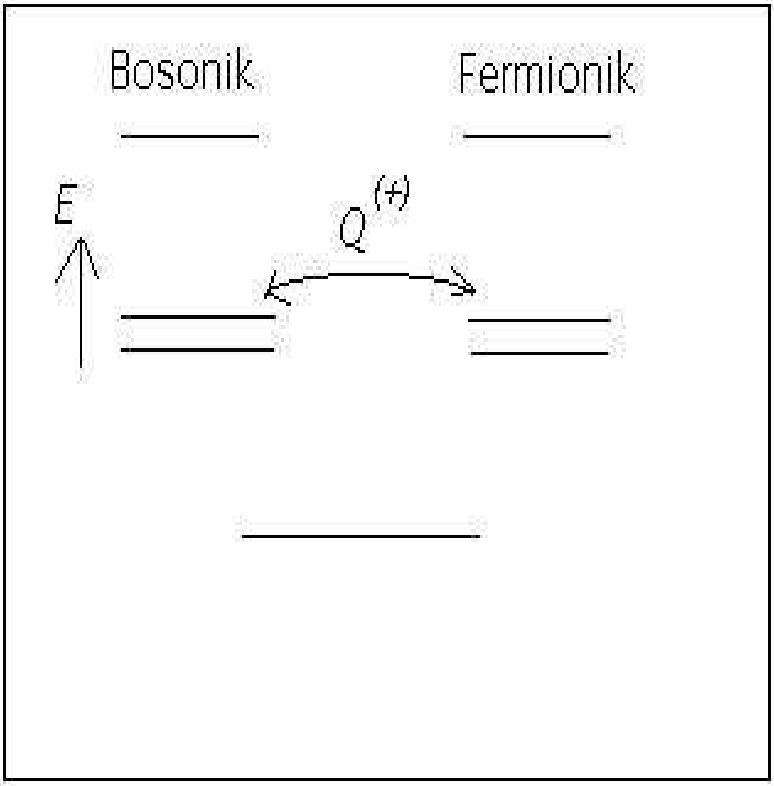
$$\begin{aligned} H_+ &= -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}(\omega^2 x^2 - \omega) \\ &\equiv \omega b^\dagger b \\ H_- &= -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}(\omega^2 x^2 + \omega) \end{aligned}$$

$$\equiv \quad \omega b b^{\dagger}. \tag{II.18}$$

Dengan menggunakan persamaan (II.4), H_s dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} H_s &\equiv \text{diag}\,(H_-, H_+) \\ &= \omega(b^{\dagger}b + \frac{1}{2})^{\bullet}\| + \frac{\omega}{2}\sigma_3. \end{aligned} \tag{II.19}$$

Dari persamaan (II.18) terlihat bahwa H_+ dan H_- tidak lain adalah realisasi / perwujudan dua Hamiltonan osilator harmonik yang sama dengan tetapan pergeseran $\pm\omega$ dalam spektrum tenaganya. Dapat diamati pula bahwa $H_\pm$ adalah hasil dari produk operator b dan $b^{\dagger}$ secara langsung dan berkebalikan, serta merupakan bentuk eksplisit yang dipengaruhi oleh persamaan (II.2) dan (II.8).



Gambar II.1: Spektrum sistem supersimetri dalam SUSYQM. Keadaan dasar tidak merosot dan pada tingkat tenaga nol semua keadaan eksitasi merosot ganda.

2. Superpotensial dan Pengaturan Hamiltonan SUSY

Dari persamaan (II.18) diperoleh

$$V_{\pm}(x) = \frac{1}{2}[W^2(x) \mp W'(x)] \tag{II.20}$$

dengan $W(x) = \omega x$, disebut *superpotensial*, yaitu potensial yang dimiliki oleh Hamiltonian partikel supersimetri, dan bermanfaat untuk memeriksa syarat dalam kaitannya dengan keadaan supersimetri rusak secara spontan (*spontaneously broken*).

Struktur umum dari $V_\pm$ pada persamaan (II.20) menunjukkan kemungkinan bahwa koordinat x dapat ditempatkan pada persamaan (II.18) dengan fungsi $W(x)$. Dalam bentuk persamaan (II.20), $V_\pm$ berada pada ungkapan umum Hamiltonian SUSY, yaitu

$$H_s = \frac{1}{2}(p^2 + W^2)^\bullet\| + \frac{1}{2}\sigma_3 W'. \tag{II.21}$$

Analog dengan persamaan (II.12), supermuatan dapat ditulis sebagai

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & W + ip \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; Q^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ W - ip & 0 \end{pmatrix}. \tag{II.22}$$

Q dan $Q^\dagger$ dapat digabung menjadi persamaan (II.13) dan H_s berkomutasi dengan Q dan $Q^\dagger$ seperti pada persamaan (II.14). Dapat diamati bahwa persamaan (II.21),(II.22) (II.13) dan (II.14) secara umum memberi dasar nonrelativistik bagi H_s yang memenuhi semua kriteria / persyaratan formal Hamiltonian SUSY.

Selanjutnya dalam bentuk $W(x)$, operator bosonik b dan $b^\dagger$ diubah ke dalam bentuk yang lebih umum yaitu

$$\begin{aligned} \sqrt{2\omega}b \to A &= W(x) + \frac{d}{dx} \\ \text{dan} \qquad \sqrt{2\omega}b^\dagger \to A^\dagger &= W(x) - \frac{d}{dx}. \end{aligned} \tag{II.23}$$

Jika dinyatakan dengan operator A dan $A^\dagger$, H_s berbentuk

$$2H_s = \frac{1}{2}\{A, A^\dagger\}^\bullet\| + \frac{1}{2}\sigma_3[A, A^\dagger]. \tag{II.24}$$

Sementara dalam bentuk matriks, H_s merupakan matriks diagonal, yaitu

$$\begin{aligned} H_s &\equiv \text{diag }(H_-, H_+) \\ &= \frac{1}{2}\text{diag }(AA^\dagger, A^\dagger A) \end{aligned} \tag{II.25}$$

dengan H_+= bosonik dan H_-= fermionik, yang merupakan wakilan dari H_s.

Kedua $H_\pm$ dapat diselesaikan bersama-sama dengan mengambil perubahan variabel $W = gu'/u$, dengan g adalah parameter perubahan yang dapat bernilai positif atau negatif, sehingga $H_\pm$ menjadi

$$2H_\pm = -\frac{d^2}{dx^2} + (g^2 \pm g)(\frac{u'}{u})^2 \mp g(\frac{u''}{u}).$$

Jelas bahwa parameter g berpengaruh pada pertukaran antara boson dan fermion : $g \to -g$, $H_+ \leftrightarrow H_-$. Untuk menunjukkan cara prosedur ini bekerja, sebagai contoh diambil superpotensial yang sesuai dengan SUSY sistem Liouville dengan superpotensial $W(x) = \frac{2g}{a}\exp(\frac{ax}{2})$, dengan g dan a adalah parameter. Kemudian u diberikan sebagai

$$u(x) = \exp\left[2\sqrt{2}\{\exp(\frac{ax}{2})\}/a^2\right]$$

Hamiltonan H_+ memenuhi

$$(-\frac{d^2}{dx^2} + W^2 - W')\psi_+ = 2E_+\psi_+$$

Dengan mengubah $y = \frac{4\sqrt{2}}{a^2}g\exp(\frac{ax}{2})$, persamaan Schrödinger untuk H_+ menjadi

$$\frac{d^2}{dy^2}\psi_+ + \frac{1}{y}\frac{d}{dy}\psi_+ + (\frac{1}{2g} - \frac{1}{4})\psi_+ + \frac{8E_+}{a^2y^2}\psi_+ = 0 \tag{II.26}$$

Persamaan Schrödinger untuk H_- dapat diperoleh dengan menganti $g \to -g$ pada persamaan (II.26) yang berarti mengubah $y \to -y$. Swafungsi yang berhubungan diberikan oleh fungsi hipogeometrik konfluent (*confluent hypogeometric*).

Jika dilihat analogi masalah osilator harmonik, khususnya persamaan (II.18), V dinyatakan dalam W yaitu $V = \frac{1}{2}(W^2 - W') + \lambda$, dengan λ = tetap, serupa dengan tenaga tingkat dasar E_0 pada H_+:

$$V(x) - E_0 = \frac{1}{2}(W^2 - W'). \tag{II.27}$$

Hal ini menunjukkan bahwa V dan V_+ dapat berbeda dengan nilai tenaga tingkat dasar E_0 dari H.

Jika $W_0(x)$ adalah penyelesaian khusus, penyelesaian umum dari persamaan (II.27) diberikan oleh

$$W(x) = W_0(x) + \frac{\exp[2\int_x W_0(\tau)\mathrm{d}\tau]}{\beta - \int_x \exp[2\int_y W_0(\tau)\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}y}, \qquad \beta \in \mathbb{R}. \tag{II.28}$$

Persamaan Schrödinger menjadi

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) - E_o\right]\psi_0 = 0.$$

Penyelesaiannya diberikan oleh

$$\begin{aligned}\psi_0(x) \quad = \quad & A\exp\left[-\int_x W(\tau)\mathrm{d}\tau\right] + B\exp\left[-\int_x W(\tau)\mathrm{d}\tau\right] \\ & \int_x \exp\left[2\int_y W(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}y, \qquad A, B \in \mathbb{R}\end{aligned} \tag{II.29}$$

dan diasumsikan $\psi(x) \in L^2(\infty, -\infty)$. Jika persamaan (II.28) disubstitusikan ke persamaan (II.29) maka fungsi gelombangnya sama dengan ketika $W_0(x)$ khusus atau penyelesaian umum persamaan (II.27) digunakan pada persamaan (II.29).

Pada superaljabar SUSYQM(2) yang hanya mempunyai dua pembangkit antikomutasi, digunakan operator Q dan $Q^\dagger$ yakni supermuatan yang didefinisikan oleh persamaan (II.22). Oleh sebab itu, persamaan (II.13), (II.14), (II.23) dan (II.24), dapat pula diubah dengan memperkenalkan set operator hermitan, Q_1 dan Q_2, yaitu

$$Q = \frac{(Q_1 + iQ_2)}{2} \quad \text{dan} \quad Q^\dagger = \frac{(Q_1 - iQ_2)}{2}. \tag{II.30}$$

Persamaan (II.13) diubah menjadi $H_s = Q_1^2 = Q_2^2$, maka

$$\{Q_i, Q_j\} = 2\delta_{ij} H_s. \tag{II.31}$$

Persamaan (II.14) menjadi

$$[Q_i, H_s] = 0 \qquad i = 1, 2. \tag{II.32}$$

Dalam bentuk superpotensial, $W(x)$, Q_1 dan Q_2 dapat ditulis sebagai

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 W - \sigma_2 \frac{p}{\sqrt{m}}) \qquad \text{dan} \qquad Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 \frac{p}{\sqrt{m}} - \sigma_2 W).$$

Dalam perhitungan persamaan (II.32), Q_1 dan Q_2 adalah konstanta gerak, yakni $\dot{Q}_1 = 0$ dan $\dot{Q}_2 = 0$. Dari persamaan (II.31) diperoleh bahwa tenaga pada tingkat sebarang bernilai tak negatif. Hal ini karena

$$\begin{aligned} E_\psi &= <\psi|H_s|\psi> \\ &= <\psi|Q_1^\dagger Q_1|\psi> \\ &= <\phi|\phi> \geqslant 0, \end{aligned} \tag{II.33}$$

dengan $|\phi\rangle = Q_1|\psi\rangle$ dan menggunakan persamaan (II.31) pada bagian H_s.

Untuk SUSY yang eksak berlaku

$$Q_1|0\rangle = 0 \qquad Q_2|0\rangle = 0$$

Jadi, $|\phi\rangle \neq 0$ menunjukkan adanya keadaan vakum yang merosot $|0\rangle'$ dan $|0\rangle$ yang berhubungan dengan supermuatan, yang menunjukkan adanya kerusakan simetri[4] secara spontan.

Tidak adanya tenaga vakum adalah ciri khusus bentuk SUSY tak rusak. Untuk osilator harmonik dengan Hamiltonan berupa persamaan (II.3), dapat dikatakan bahwa H_B tetap invarian pada pertukaran operator b dan $b^\dagger$. Namun tidak demikian halnya untuk keadaan vakum[5] yang memenuhi $b|0\rangle$. Dalam kasus SUSY tak rusak, hamiltonan supersimetri dan keadaan vakum, keduanya invarian oleh pertukaran $Q \leftrightarrow Q^\dagger$.

3. Arti Fisis dari Hamiltonan Supersimetri

Hamiltonan SUSY untuk kasus osilator harmonik diberikan oleh persamaan (II.21). Untuk memperoleh arti fisis hamiltonan supersimetri, parameter massa (m) dimasukkan kembali ke dalam H_s sehingga didapat

$$H_s = \frac{1}{2}(\frac{p^2}{m} + W^2)^{\bullet}\| + \frac{1}{2}\sigma_3\frac{W'}{\sqrt{m}}. \qquad \text{(II.34)}$$

[4]Simetri rusak (*broken symmetry*) diartikan sebagai suatu keadaan dasar sistem atau keadaan vakum dari suatu teori medan kuantum relativistik yang memiliki kesetangkupan lebih rendah dibandingkan dengan Hamiltonan yang mendefinisikan sistem tersebut. Contohnya dalam fisika partikel adalah model Weinberg-Salam tentang teori elektrolemah (*electroweak theory*).

[5]Keadaan vakum adalah keadaan dasar dalam teori medan kuantum relativistik. Keadaan vakum tidak berarti keadaan tanpa sesuatu. Dalam ruang lingkup mekanika kuantum, keadaan vakum memiliki tenaga titik-nol sehingga menimbulkan fluktuasi vakum.

Jika dibandingkan dengan hamiltonan Schrödinger untuk elektron (massa m dan muatan $-e$) yang dipengaruhi medan magnet luar

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\frac{p^2}{m} + \frac{e^2}{m}\vec{A}^2) + \frac{ie}{2m}div\vec{A} - \frac{e}{m}\vec{A}.\vec{p} + \frac{|e|}{2m}\vec{\sigma}.\vec{B}, \tag{II.35}$$

dengan $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}$ adalah vektor potensial, diperoleh bahwa persamaan (II.35) menjadi persamaan (II.34) untuk kasus khusus pada saat $\vec{A} = (0, \frac{\sqrt{m}}{2|e|}W, 0)$. Untuk mengamati pentingnya momen magnet elektron, digunakan bentuk persamaan (II.35), tanpa menyusutkannya menjadi persamaan (II.34). Dapat dilihat bahwa masalah sederhana yaitu elektron pada pengaruh medan magnet luar menunjukkan keberadaan SUSY.

Jika diasumsikan medan magnet $\vec{B}$ =konstan dan sejajar pada sumbu Z yaitu $\vec{B} = B\hat{k}$, maka

$$\begin{aligned} \vec{A}.\vec{p} &= \frac{1}{2}BL_z \\ 4\vec{A}^2 &= r^2B^2 - (\vec{r}.\vec{B})^2 \\ &= (x^2+y^2)B^2. \end{aligned} \tag{II.36}$$

Hasilnya, $\mathcal{H}$ menjadi

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left[p_z^2 + (p_x^2 + p_y^2)\right] + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) - \omega(L_z - \sigma_3). \tag{II.37}$$

Terpisah dari gerak bebas dalam arah z, $\mathcal{H}$ menjelaskan dua osilator harmonik dalam bidang-xy, juga termasuk pasangan momentum orbital dan spin. Dalam persamaan (II.37), ω adalah frekuensi Larmor : $\omega = \frac{eB}{2m}$ dan $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$. Dalam pendekatan kuantisasi osilator, bentuk pasangan momentum orbital dan spin menjadi

$$\omega(L_z - \sigma_3) = -i\omega(b_x^\dagger b_y - b_y^\dagger b_x) + \omega\sigma_3.$$

Namun dengan mengatur bentuk yang berupa

$$
\begin{aligned}
B^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}(b_x^\dagger + ib_y^\dagger) \\
B &= \frac{1}{\sqrt{2}}(b_x - ib_y),
\end{aligned}
\tag{II.38}
$$

maka persamaan (II.37) dapat diubah menjadi

$$
\frac{1}{2}(H - \frac{p_z^2}{2m}) = \omega(B^\dagger B + \frac{1}{2})\mathbb{1} + \frac{\omega}{2}\sigma_3
$$

yang bentuknya mirip dengan persamaan (II.19). Kesimpulannya, persamaan Pauli dua-dimensi, (II.35), memberikan contoh sederhana mengenai perwujudan SUSY dalam sistem fisis.

4. Sifat - Sifat Pasangan Hamiltonan

Sifat penting yang dimiliki oleh hamiltonan supersimetri, H_s, yaitu komponen pasangan H_+ dan H_- adalah *isospektral*. Untuk lebih jelasnya, diperhatikan persamaan swanilai berikut

$$
H_+\psi_n^+ = E_n^+\psi_n^+. \tag{II.39}
$$

Persamaan tersebut dapat diubah ke dalam bentuk

$$
\begin{aligned}
H_-(A\psi_n^+) &= \frac{1}{2}AA^\dagger(A\psi_n^+) \\
&= A(\frac{1}{2}A^\dagger A\psi_n^+) \\
&= E_n^+(A\psi_n^+).
\end{aligned}
\tag{II.40}
$$

Dapat dilihat bahwa E_n^+ juga merupakan anggota spektrum tenaga bagi H_-. Namun, $A\psi_0^+$ bernilai nol karena ψ_0^+ menjadi penyelesaian keadaan dasar H_+ yang memenuhi

$$-(\psi_0^+)'' + (W^2 - W')\psi_0^+ = 0.$$

Bentuk penyelesaian yang memenuhi adalah

$$\psi_0^+ = C \exp\left(-\int_x W(y)\mathrm{d}y\right), \qquad C = \text{konstanta}. \tag{II.41}$$

Dapat disimpulkan bahwa spektrum H_+ dan H_- identik kecuali untuk keadaan dasar $(n = 0)$ yang tidak merosot. Ini adalah contoh dari SUSY tak rusak (vakum yang tidak merosot). Namun, jika SUSY rusak (secara spontan) maka H_+ dengan H_- tidak memiliki fungsi gelombang pada keadaan dasar yang ternormalisasi dan spektrum H_+ dan H_- sama. Dengan kata lain, ketidakmerosotan SUSY pada keadaan dasar akan hilang.

Untuk ψ_0 yang ternormalisasi pada satu-dimensi, dapat dilihat dari persamaan (II.41) bahwa $\int W(y)\mathrm{d}y \to 0$ untuk $|x| \to \infty$. Untuk mewujudkan keadaan ini, salah satu cara yang digunakan adalah dengan mengatur $W(x)$ sehingga memiliki tanda yang berbeda, yaitu $x \to \pm\infty$. Dengan kata lain, $W(x)$ adalah fungsi ganjil. Sebagai contoh, dalam kasus $W(x) = \omega x$. Jika $W(x)$ adalah fungsi genap, maka $W(x)$ bertanda sama, pada $x \to \pm\infty$, syarat normalisasi tidak dapat dipenuhi. Contoh lainnya adalah $W(x) = x^2$.

Dari persamaan (II.39) dan (II.40) dapat juga dilihat untuk masalah swanilai yang umum dari $H_\pm$, yaitu

$$\begin{aligned} H_+\psi_{n+1}^{(+)} &= E_{n+1}^{(+)}\psi_{n+1}^{(+)} \\ H_-\psi_n^{(-)} &= E_n^{(-)}\psi_n^{(-)}. \end{aligned} \tag{II.42}$$

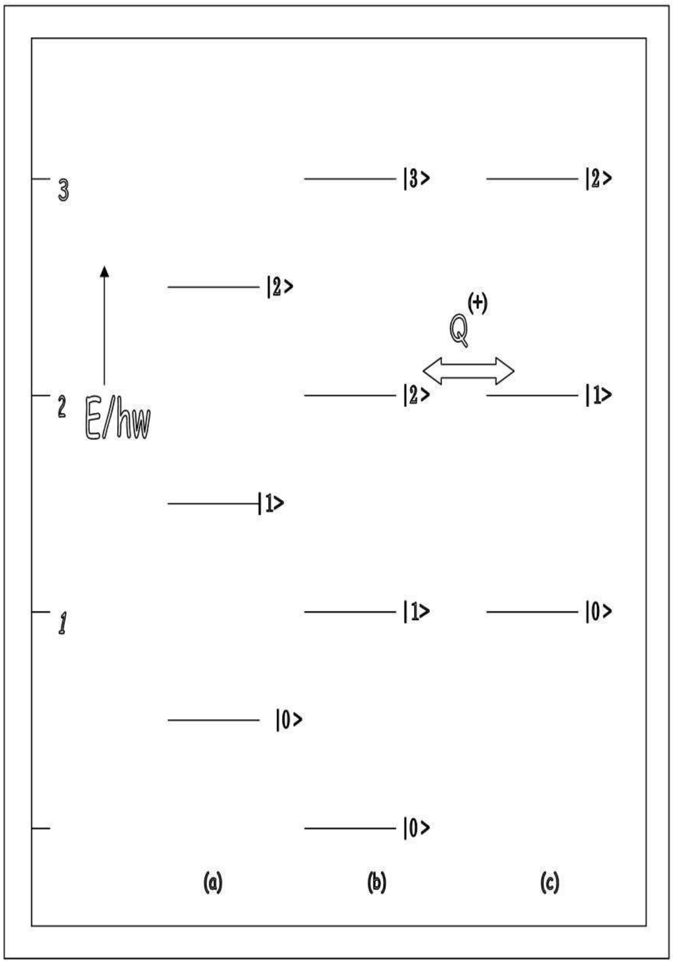
Jika $A\psi_0^+ = 0$, untuk swakeadaan ternormalisasi ψ_0^+ dari H_+, karena $H_+\psi_0^+ \equiv \frac{1}{2}A^\dagger\psi_0^+ = 0$, maka swakeadaan ternormalisasi juga merupakan keadaan dasar dari H_+ dengan swanilai $E_0^+ = 0$. H_- tidak memiliki swakeadaan ternormalisasi dengan nilai tenaganya nol.

Untuk membuktikan hubungan antara spektrum dan fungsi gelombang H_+ dan H_-, digunakan kaitan antara persamaan (II.25) dan (II.42). Persamaan swanilainya menjadi

$$\begin{aligned} H_+(A^\dagger\psi_n^-) &= \frac{1}{2}A^\dagger A(A^\dagger\psi_n^-) \\ &= A^\dagger H_-\psi_n^- \\ &= E_n^-(A^\dagger\psi_n^-) \\ \text{dan} \qquad H_-(A\psi_n^+) &= \frac{1}{2}AA^\dagger(A\psi_n^+) \\ &= AH_+\psi_n^+ \\ &= E_n^+(A\psi_n^+). \end{aligned} \tag{II.43}$$

Jadi, jelas bahwa spektrum dan fungsi gelombang H_+ dan H_- dihubungkan oleh

$$\begin{aligned} E_n^- = E_{n+1}^+, n = 0, 1, 2, ...; E_0^+ &= 0 \\ \psi_n^- &= (2E_{n+1}^+)^{-\frac{1}{2}}A\psi_{n+1}^+ \\ \psi_{n+1}^+ &= (2E_n^-)^{-\frac{1}{2}}A^\dagger\psi_n^-. \end{aligned} \tag{II.44}$$



Gambar II.2: (a) Spektrum osilator harmonik. (b) Spektrum $H_- = \omega b b^\dagger = H_{osc} - \frac{1}{2}$. (c) Spektrum $H_+ = \omega b^\dagger b = H_{osc} + \frac{1}{2}$. (b) dan (c) dihubungkan dengan Hamiltonan supersimetri, seperti pada Gambar II.1.

BAB III

SUSY DALAM MASALAH RADIAL

1. SUSY dan Masalah Radial Tiga Dimensi

Teknik SUSY dapat diterapkan pada sistem mekanika kuantum 3 dimensi atau lebih. Pertama, akan ditinjau terlebih dahulu masalah 3-dimensi. Persamaan Schrödinger tak gayut waktu yang mempunyai potensial bersimetri bola, $V(r)$, dapat ditulis dalam koordinat polar bola r, θ, ϕ menurut[1]

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]u(r,\theta,\phi)$$
$$+V(r)u(r,\theta,\phi)=Eu(r,\theta,\phi). \qquad \text{(III.1)}$$

Untuk persamaan (III.1) hendak dilakukan pemisahan variabel yang memisahkan fungsi dengan variabel r, θ dan ϕ dengan menulis fungsi gelombangnya menjadi

$$u(r,\theta,\phi)\equiv R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi),$$

dengan $R(r)$ adalah bagian radial dan bagian sudutnya $\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ adalah harmonik bola $Y(\theta,\phi)$. Bentuk persamaan radialnya menjadi

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left[V(r)-E+\frac{l(l+1)}{2r^2}\right]R=0. \qquad \text{(III.2)}$$

[1]diambil penyederhanaan $\hbar = m = 1$.

Suku turunan orde pertama diubah dengan membuat alih ragam $R \rightarrow \chi(r)/r$ sehingga persamaan (III.2) dapat diringkas menjadi

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2\chi}{dr^2} + \left[V(r) - E + \frac{l(l+1)}{2r^2}\right]\chi = 0. \tag{III.3}$$

Dalam persamaan Schrödinger, persamaan (III.3) setara dengan masalah 1 dimensi dan padanya dapat diterapkan konsep SUSY. Namun, tidak semua persamaan radial $r \in (0, \infty)$ dapat dipecahkan.

Untuk mengamati SUSY bekerja pada sistem-sistem berdimensi lebih tinggi, selanjutnya akan diawali dengan kasus khusus potensial Coulomb. Pada pembahasan ini akan dibedakan antara dua kemungkinan yang sesuai dengan bilangan kuantum utama, n, yang tetap dan bilangan kuantum momentum sudut l, yang boleh bervariasi, atau kasus sebaliknya yaitu n bervariasi namun l tetap.

A. Kasus 1 : n tetap dan l bervariasi

Dalam pembahasan ini potensialnya adalah $V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$. Oleh karena itu persamaan pada bagian radialnya menjadi

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2} - E_n - \frac{1}{r} + \frac{l(l+1)}{2r^2}\right]\chi_{nl}(r) = 0, \tag{III.4}$$

dengan $\chi_{nl}(0) = 0, E_n = -\frac{1}{2n^2}$ dan r pada skala e yang sesuai.[2]

Dari persamaan (II.20) diperoleh bahwa superpotensial untuk persamaan (III.4) yang memenuhi

$$V_+ \;=\; \frac{1}{2}\left(W^2 - W'\right)$$

[2]Alih ragam yang digunakan adalah bentuk $r \rightarrow \frac{\hbar^2}{\mu}\frac{1}{Ze^2}r$.

$$= \quad -\frac{1}{r} + \frac{l(l+1)}{2r^2} + \frac{1}{2(l+1)^2}, \qquad \text{(III.5)}$$

memiliki penyelesaian yang berupa

$$W(r) = \frac{1}{l+1} - \frac{l+1}{r}.$$

Akibat dari penyelesaian tersebut adalah pasangan SUSY V_+ yaitu

$$\begin{aligned} V_- &\equiv \frac{1}{2}\left(W^2 + W'\right) \\ &= -\frac{1}{r} + \frac{(l+1)(l+2)}{2r^2} + \frac{1}{2(l+1)^2}. \end{aligned} \qquad \text{(III.6)}$$

Sedangkan deret Bohr untuk persamaan (III.5) dimulai dari $(l+1)$ dengan energi $\frac{1}{2}\left[(l+1)^2 - n^{-2}\right]$, dapat dilihat dari persamaan (III.6) bahwa tingkat terendah untuk V_- diawali pada $n = l+2$ dengan $n \geq l+2$. SUSY memberikan penjelasan yang masuk akal dari spektrum H_+ dan H_- yang berhubungan dengan kemerosotan hidrogenik $ns - np$. Secara lebih khusus, jika diambil $l = 0$ diperoleh H_+ untuk menjelaskan tingkat ns dengan $n \geq 1$, serta H_- sesuai dengan tingkat np dengan $n \geq 2$. Dari keterangan ini diperoleh suatu pembuktian bahwa SUSY memunculkan hubungan diantara keadaan dengan syarat n tetap namun l berbeda.

Jika SUSY diterapkan dalam potensial osilator isotropik $V(r) = \frac{1}{2}r^2$ maka akan diperoleh persamaan Schrödinger yaitu

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{2}r^2 + \frac{l(l+1)}{2r^2} - \left(n + \frac{3}{2}\right)\right]\chi_{nl}(r) = 0, \qquad \text{(III.7)}$$

dengan n dihubungkan dengan l yaitu

$$n = l, l+2, l+4, ... \qquad \text{(III.8)}$$

Dari persamaan (III.7), superpotensial $W(r)$ dan pasangan potensial SUSY diperoleh sebagai

$$\begin{aligned} W(r) &= r - \frac{l+1}{r}, \\ V_+(r) &= \frac{1}{2}r^2 + \frac{l(l+1)}{2r^2} - \left(l + \frac{3}{2}\right), \\ V_-(r) &= \frac{1}{2}r^2 + \frac{(l+1)(l+2)}{2r^2} - \left(l + \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \tag{III.9}$$

Pada persamaan ini mulai muncul kesulitan. Terdapat ciri yang tidak diinginkan pada V_+ dan V_- yaitu keduanya hanya melengkapi hubungan antara tingkat l dan $(l+1)$ yang tidak muncul dari persamaan (III.8). Contoh ini menunjukkan bahwa SUSY tidak dapat diterapkan secara langsung dalam sistem yang berdimensi lebih tinggi.

Alih ragam supersimetrik dapat diterapkan pada masalah radial hanya jika dikenakan pada seluruh wilayah $(-\infty, \infty)$. Dalam pembahasan selanjutnya akan ditunjukkan bahwa beberapa kasus memunculkan aturan yang berbeda tentang SUSY. Hal ini berguna untuk menghubungkan keadaan pada kasus l yang sama namun n berbeda dan muatan elektron Z. Yang menarik, hal ini juga menjelaskan lompatan tenaga pada dua bagian sistem osilator isotropik.

B. Kasus 2 : l tetap dan n bervariasi

Alih ragam yang sesuai untuk mengubah $r \in (0, \infty)$ menjadi $x \in (-\infty, \infty)$ adalah $r = e^x$. Bentuk persamaan (III.3) mengalami alih ragam sehingga menjadi

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \left[\{V(e^x) - E\}\, e^{2x} + \frac{1}{2}\left(l + \frac{1}{2}\right)^2\right]\Psi = 0, \tag{III.10}$$

dengan $\chi(r) \to e^{x/2}\Psi(x)$. Perlu dicatat bahwa E tidak jauh berperan dalam swanilai pada persamaan (III.10).

Persamaan (III.10) dalam hubungannya dengan potensial Coulomb dapat ditulis sebagai

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2\Psi}{dx^2}+\left[-e^x-E_n e^{2x}+\frac{1}{2}\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\right]\Psi=0, \qquad \text{(III.11)}$$

yang menjelaskan masalah potensial Morse. Dari persamaan (III.11) superpotensial $W(x)$ dan $V_\pm(x)$ diperoleh

$$\begin{aligned}
W(x) &= \frac{e^x}{n}+\left(\frac{1}{2}-n\right),\\
V_+(x) &= \frac{e^{2x}}{2n^2}-e^x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-n\right)^2,\\
V_-(x) &= \frac{e^{2x}}{2n^2}-\left(1-\frac{1}{n}\right)e^x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-n\right)^2.
\end{aligned} \qquad \text{(III.12)}$$

Setelah diamati bahwa ungkapan V_- bergantung pada x, selanjutnya dilakukan alih ragam balik ke peubah sebelumnya r, untuk mendapatkan pasangan SUSY, sehingga diperoleh

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}-E_n-\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{r}+\frac{l(l+1)}{2r^2}\right]\chi'_{nl}(r)=0. \qquad \text{(III.13)}$$

Sifat nontrivial pemetaan $r \to e^x \to r$ berasal dari hasil koefisien suku $\frac{1}{r}$ pada persamaan (III.4) yang mengalami perubahan oleh faktor gayut-n dalam persamaan (III.4). Untuk memahami persamaan (III.13) didefinisikan lagi $(1-\frac{1}{n})r$ sebagai peubah baru, dengan membagi persamaan (III.13) dengan faktor $(1-\frac{1}{n})^2$. Hal ini menyebabkan didefinisikan kembali muatan inti Z dengan membawanya ke bentuk eksplisit persamaan (III.13): $Z \to Z\left(1-\frac{1}{n}\right)$. Kemudian ditentukan tingkat kemerosotan untuk memperoleh keadaan diantaranya, pada kasus l sama namun n

dan Z berbeda. Secara lebih khusus, persamaan (III.4) dikenai keadaan dengan bilangan kuantum $n, l,$ dan tenaganya $-\frac{Z^2}{n^2}\frac{me^4}{\hbar^2}$. Persamaan (III.13) digunakan untuk menghitung keadaan dengan bilangan kuantum $(n-1), l$ dan muatan inti $Z(1-\frac{1}{n})$ yang memiliki tenaga yang sama.

Pada cara ini, model dapat digunakan untuk menentukan hubungan interatomik SUSY antara keadaan iso-elektronik ion di bawah perubahan simultan bilangan kuantum utama dan muatan inti.

Selanjutnya diperhatikan masalah osilator isotropik sebagai penerapan lanjutan dari pembahasan ini. Di sini persamaan Schrödinger diberikan oleh persamaan (III.7) dengan tingkat tenaga diberikan oleh persamaan (III.8). Dengan mengikuti petunjuk tentang alih ragam sebagian, yaitu dari $(0,\infty)$ ke $(-\infty,\infty)$ dan dipilih $x = 2\ln r$ maka diperoleh

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \left[\frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{4}\left(n+\frac{3}{2}\right)e^x + \frac{1}{8}\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\right]\Psi = 0. \qquad \text{(III.14)}$$

Persamaan di atas memberikan[3]

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{e^x}{2} - \frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right), \\ V_+(x) &= \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{4}\left(n+\frac{3}{2}\right)e^x + \frac{1}{8}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2, \\ V_-(x) &= \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{4}\left(n+\frac{1}{2}\right)e^x + \frac{1}{8}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2. \end{aligned} \qquad \text{(III.15)}$$

Disyaratkan untuk melakukan alih ragam persamaan Schrödinger bagi V_- kembali ke bagian separuh untuk menentukan pasangan SUSY yang cocok dengan

[3]Swanilai yang berhubungan dengan V_+ adalah $\frac{1}{8}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(l+\frac{1}{2}\right)^2\right]$. Jadi, untuk $n \geq l$ (dan n tetap) tingkat tenaga terendah bernilai nol.

persamaan (III.7) sehingga diperoleh

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{2}r^2+\frac{l(l+1)}{2r^2}-\left(n+\frac{3}{2}\right)+2\right]\chi'_{nl}(r)=0. \tag{III.16}$$

Mudah dilihat bahwa karena faktor tambahan 2 pada persamaan di atas, perbedaan tingkat tenaga antara persamaan (III.7) dan persamaan (III.16) sesuai dengan persamaan (III.8).

2. Masalah Radial Menggunakan Operator Tangga dalam SUSYQM

Masalah radial juga dapat diselesaikan dengan teknik operator tangga. Keuntungannya adalah tidak perlu ada bentuk eksplisit superpotensial. Diperkenalkan terlebih dahulu notasi ket untuk menyatakan persamaan radial (III.3) dalam bentuk

$$\begin{aligned} H_l|N,l\rangle &\equiv \left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2}+V(r)+\frac{l(l+1)}{2r^2}\right]|N,l\rangle \\ &= E_l^N|N,l\rangle. \end{aligned} \tag{III.17}$$

N menyatakan bilangan kuantum radial untuk masalah Coulomb $n=N+l+1$ dan untuk kasus osilator isotropik $n=2N+l, N=0,1,2,$...dst.

Selanjutnya diberikan operator A, yaitu

$$A=\sum_N \alpha_l^N|N',l'\rangle\langle N,l|, \tag{III.18}$$

yang memetakan ket $|N,l\rangle$ ke $|N',l'\rangle$. Kemudian diperkenalkan pula

$$A^\dagger=\sum_N \beta_l^N|N,l\rangle\langle N',l'|,$$

dengan $\alpha_l^N=(\beta_l^N)^*$.

Dari persamaan (III.17) dan (III.18) diperoleh pemahaman bahwa $A^\dagger$ dan A adalah operator naik dan turun, yang dapat ditunjukkan dalam bentuk

$$\begin{aligned} A|N,l\rangle &= \alpha_l^N|N-i,l+j\rangle, && \text{(III.19)} \\ A^\dagger|N-i,l+j\rangle &= \beta_l^N|N,l\rangle, && \text{(III.20)} \end{aligned}$$

dengan $N' = N-i$ dan $l' = l+j$. Lebih lanjut diperoleh hubungan

$$\begin{aligned} A^\dagger A|N,l\rangle &= |\alpha_l^N|^2|N,l\rangle, \\ AA^\dagger|N-i,l+j\rangle &= |\alpha_l^N|^2|N-i,l+j\rangle; \qquad i,j=0,1,2,.... && \text{(III.21)} \end{aligned}$$

Langkah selanjutnya adalah memasukkan faktorisasi Hamiltonan yang berupa

$$\begin{aligned} A^\dagger A &= H_l + F, \\ AA^\dagger &= H_l + j + F, && \text{(III.22)} \end{aligned}$$

F dan G adalah skalar yang tidak bergantung pada bilangan kuantum N. Dengan memasukkan persamaan (III.17) ke dalam persamaan (III.22) diperoleh hasil

$$|\alpha_l^N|^2 = E_l^N + F. \qquad \text{(III.23)}$$

Lebih jauh diperoleh

$$\begin{aligned} (H_{l+j}+G)A|N,l\rangle &= AA^\dagger A|N,l\rangle \\ &= A\left(E_l^N + F\right)|N,l\rangle, && \text{(III.24)} \end{aligned}$$

yang menyatakan bahwa

$$H_{l+j}[A|N,l\rangle] = \left\{E_l^N + F - G\right\}[A|N,l\rangle]. \tag{III.25}$$

Persamaan di atas menunjukkan bahwa $A|N,l\rangle$ adalah swaket dari H_{l+j}. Namun karena swanilai $H_{l'}$ telah diketahui yaitu $E_{l'}^{N'}$ dari persamaan (III.17), hubungan untuk $N' = N - i$ dan $l' = l + j$ adalah

$$E_{l+j}^{N-i} = E_l^N + F - G. \tag{III.26}$$

Selanjutnya, dengan menerapkan pengulangan operator A dalam $|N,l\rangle$, urutan swaket dapat diubah dalam bentuk

$$A^k|N,l\rangle = \alpha_l^N \alpha_{l+j}^{N-i} ... \alpha_{l+(k-1)j}^{N-(k-1)i}|N-ki, l+kj\rangle,$$

dengan k adalah bilangan bulat positif dan menjelaskan berapa kali A dimasukkan ke dalam $|N,l\rangle$. Karena ini tidak boleh bernilai tak hingga, N berhingga sampai urutan terakhir, sehingga dapat ditulis $A|0,l\rangle = 0$ untuk $N = 0$ yang membatasi $\alpha_l^0 = 0$. Selanjutnya, dari persamaan (III.23) ditentukan $F = -F_l^0$. Hal ini juga konsisten untuk memilih $i = 1$ karena k adalah bilangan bulat positif ≥ 1 dan N dapat bernilai 0,1,2,... . Dari persamaan (III.26) diperoleh

$$G = \left(E_l^N - E_l + j^N - 1\right) - E_l^0. \tag{III.27}$$

Jadi, SUSY dalam operator $AA^\dagger$ dan $A^\dagger A$ menghasilkan spektrum yang sama untuk swanilai

$$|\alpha_l^N|^2 = E_l^N - E_l^0,$$

bersesuaian dengan swaket $|N,l\rangle$ dan $|N-i,l+j\rangle$ kecuali untuk keadaan dasar yang memenuhi

$$H_l|0,l\rangle = A^\dagger A|0,l\rangle \quad = 0.$$

Kemudian dapat didefinisikan Hamiltonan supersimetrik yang mirip dengan persamaan (II.25)

$$\begin{aligned} H_s &= \frac{1}{2}\text{diag}\,(AA^\dagger, A^\dagger A) \\ &\equiv \text{diag}\,(H_-, H_+), \end{aligned} \tag{III.28}$$

dengan melihat kembali bentuk persamaan (II.40). Dengan kata lain, pada keadaan dasar tidak terjadi kemerosotan (SUSY yang eksak) dan hanya dihubungkan dengan H_+. $H_\pm$ pada persamaan (III.28) memiliki wakilan

$$H_+ = H_l - E_l^0 \qquad H_- = H_{l+j} - G, \tag{III.29}$$

dengan G diberikan oleh persamaan (III.27).

Selanjutnya akan dibahas beberapa penerapan persamaan (III.29).

A. Masalah Coulomb

Dalam masalah Coulomb, potensial dan tingkat tenaganya diberikan oleh

$$V(r) = -\frac{1}{r},$$

$$E_l^N = -\frac{1}{2(N+l+1)^2},$$

Dari persamaan (III.27) dapat ditentukan nilai G yaitu

$$G = -\frac{1}{2(N+l+1)^2} + \frac{1}{2(N-1+l+j+1)^2} + \frac{1}{2(l+1)^2}.$$

Untuk mengubah G menjadi N yang independen, perlu ditambahkan syarat $j = 1$. Pasangan Hamiltonian supersimetrik menjadi

$$H_+ = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{2r^2} - \frac{1}{r} + \frac{1}{2(l+1)^2}, \tag{III.30}$$

$$H_- = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{(l+1)(l+2)}{2r^2} - \frac{1}{r} + \frac{1}{2(l+1)^2}. \tag{III.31}$$

Pasangan potensial yang bersesuaian dengan kedua Hamiltonian di atas berturut-turut identik dengan persamaan (III.5) dan (III.6), sehingga dapat disimpulkan sama seperti penjelasan sebelumnya.

B. Masalah osilator isotropik

Dalam kasus osilator isotropik, potensial dan tingkat tenaganya diberikan oleh

$$V(r) = \frac{1}{2}r^2,$$

$$E_l^N = 2N + l + \frac{3}{2}.$$

Seperti pada masalah Coulomb sebelumnya, dari persamaan (III.27) diperoleh G yang berupa

$$G = 2 - \left(l + j + \frac{3}{2}\right),$$

dengan ciri dalam kasus ini yaitu N tidak memiliki batasan nilai bagi parameter j. Pasangan Hamiltonian supersimetrik dapat diturunkan dari persamaan (III.29) sehingga menjadi

$$H_{+} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{2r^2} + \frac{r^2}{2} - \left(l + \frac{3}{2}\right), \tag{III.32}$$

$$H_{-} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{(l+j)(l+j+1)}{2r^2} + \frac{r^2}{2} - \left(l + j + \frac{3}{2}\right) + 2. \tag{III.33}$$

Kasus khusus dari persamaan (III.32) dan (III.33) yaitu saat $j = 0$ berhubungan dengan kombinasi sebelumnya pada persamaan (III.7) dan (III.16). Persamaan (III.32) dan (III.33) merupakan perkiraan umum dan tepat tentang perbedaan energi dua bagian.

Kemudian dengan menggunakan teknik operator tangga, dapat pula diperoleh pemahaman tentang supersimetri pada kedua masalah Coulomb dan osilator isotropik. Perlu ditekankan bahwa dalam memperoleh hasil tersebut, tidak diperlukan bentuk persyaratan superpotensial. Keberadaan operator A dan $A^\dagger$ cukup sebagai penghubung supersimetrik.

3. SUSY dalam D Dimensi

Dalam bagian sebelumnya telah dijelaskan penerapan SUSY pada masalah radial 3 dimensi. Selanjutnya, akan dibahas masalah radial dalam dimensi yang lebih tinggi (D dimensi). Persamaan Schrödinger radial dalam D dimensi yaitu (penjelasan turunan yang lebih terperinci dapat dilihat pada LAMPIRAN B)

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2} - \frac{D-1}{2r}\frac{d}{dr} + \frac{l(l+D-2)}{2r^2} + V(r)\right] R = ER,$$

dengan r dalam bentuk x_i pada koordinat kartesan D dimensi diberikan oleh

$$r = \left[\sum_{i=1}^{D} x_i^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Seperti pada persamaan (III.2), dalam kasus ini suku turunan orde pertama juga dapat diubah dengan menggunakan alih ragam $R \to r^{-\frac{D-1}{2}}\chi(r)$. Sehingga diperoleh bentuk

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\alpha_l}{2r^2} + V(r)\right]\chi = E\chi,$$

dengan

$$\alpha_l = \frac{1}{4}(D-1)(D-3) + l(l+D-2). \tag{III.34}$$

Sekarang akan dibahas penerapannya pada beberapa kasus.

A. Potensial Coulomb

Spektrum tenaga yang berhubungan dengan potensial Coulomb $V(r) = -\frac{1}{r}$ adalah

$$E_l^N = -\frac{1}{2}\frac{1}{\left[N + l + \left(\frac{D-1}{2}\right)\right]^2}. \tag{III.35}$$

Dalam persamaan (III.35), N dan l berturut-turut adalah bilangan kuantum radial dan momentum sudut.

Dari persamaan (III.27) diperoleh

$$\begin{aligned} G &= -\frac{1}{\left[N + l + \left(\frac{D-1}{2}\right)\right]^2} \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{1}{\left[l + \left(\frac{D-1}{2}\right)\right]^2} \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{1}{\left[N - 1 + l + j + \left(\frac{D-1}{2}\right)\right]^2}. \end{aligned} \tag{III.36}$$

Dengan mengatur $j = 1$ maka mudah diperoleh bahwa G menjadi saling bebas terhadap N menurut

$$G = \frac{1}{2}\frac{1}{\left[l + \left(\frac{D-1}{2}\right)\right]^2}.$$

Kemudian, hasil umum untuk $H_\pm$ dalam ruang D dimensi berupa

$$\begin{aligned}
H_+ &\equiv H_l - E_l^0 \\
&= -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\alpha_l}{2r^2} - \frac{1}{r} + \frac{1}{2}\left[l + \frac{1}{2}(D-1)\right]^{-2}, \\
H_- &\equiv H_{l+1} + G \\
&= -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\alpha_{l+1}}{2r^2} - \frac{1}{r} + \frac{1}{2}\left[l + \frac{1}{2}(D-1)\right]^{-2}, \qquad \text{(III.37)}
\end{aligned}$$

dengan α_l diberikan oleh persamaan (III.34). Untuk kasus 3 dimensi, hasil ini sesuai dengan persamaan (III.30) dan (III.31).

B. Potensial osilator isotropik

Untuk potensial osilator isotropik $V(r) = \frac{1}{2}r^2$, tingkat tenaganya adalah

$$E_l^N = \left(2N + l + \frac{1}{2}D\right), \qquad D \geq 2.$$

Dari persamaan (III.27) diperoleh

$$G = 2 - \left(l + j + \frac{D}{2}\right),$$

yang saling bebas terhadap N. Hasil ini memberikan Hamiltonan isospektral yang berupa

$$H_+ = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\alpha_l}{2r^2} + \frac{1}{2}r^2 - \left(l + \frac{D}{2}\right),$$

$$H_- = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\alpha_{l+j}}{2r^2} + \frac{1}{2}r^2 - \left(l + j + \frac{D}{2}\right) + 2.$$

Hasil tersebut dapat dibandingkan dengan persamaan (III.32) dan (III.33) untuk kasus $D = 3$.

Dari pembahasan tersebut dapat disimpulkan bahwa SUSY dapat diterapkan dalam masalah radial baik 3 dimensi maupun yang lebih tinggi. Alih ragam dapat dikenakan dari masalah Coulomb ke osilator isotropik maupun sebaliknya dan hasil-nya merupakan penyajian yang umum pada D dimensi.

BAB IV

TEORI DIRAC TENTANG PARTIKEL SPIN 1/2 DAN PENDEKATAN NON-RELATIVISTIKNYA

Sebelum membahas penerapan SUSYQM selanjutnya, yaitu pada persamaan Dirac, terlebih dahulu akan dijelaskan beberapa hal mendasar yang perlu dipahami. Berikut ini akan dijelaskan konsep persamaan Dirac dalam teori Dirac dan alih ragam Foldy-Wouthuysen yang merupakan bagian penting dalam memahami penerapan mekanika kuantum supersimetrik dalam persamaan Dirac tersebut.

Dengan alih ragam kanonik yang dikenakan pada Hamiltonan Dirac untuk partikel bebas, wakilan teori Dirac diamati pada keadaan tenaga positif dan negatif yang terpisah, diwakili oleh fungsi gelombang komponen-dua. Wakilan ini memainkan peranan penting, berupa operator-operator baru untuk posisi dan wakilan spin partikel yang secara nyata merupakan arti fisis dari operator tersebut pada wakilan konvensional. Alih ragam wakilan baru juga dibuat dalam kasus interaksi partikel dengan medan elektromagnetik luar.

1. Persamaan Dirac dalam Mekanika Kuantum Relativistik

Persamaan Dirac adalah salah satu persamaan gelombang dalam mekanika kuantum relativistik yang disusun oleh fisikawan Inggris, Paul Dirac, pada 1928 dan memberikan penjabaran tentang partikel mendasar spin $1/2$, seperti elektron. Persamaan ini konsisten dengan prinsip mekanika kuantum dan teori relativitas khusus.

Di dalam mekanika kuantum relativistik, keadaan sebuah partikel dapat disajikan dalam koordinat ruang waktu 4 dimensi, yaitu $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 =$

$ict = ix_0$. Alih bentuk linier yang berupa

$$x_\mu \rightarrow x_\mu{}' = a_{\mu\nu} x_\nu, \tag{IV.1}$$

dengan koefisien $a_{\mu\nu}$ memenuhi syarat ortogonalitas

$$a_{\mu\nu} a_{\mu\varrho} = \delta_{\nu\varrho}, a_{\nu\mu} a_{\varrho\mu} = \delta_{\nu\varrho}.$$

Alih ragam yang demikian ini disebut *alih ragam Lorentz homogen*. Grup Lorentz homogen terdiri atas beberapa macam alih ragam, dari satu sistem inersial ke sistem inersial lainnya tanpa mengubah titik pusat (origin).

Vektor berdimensi 4 (atau sering disebut *vektor-empat*) V_μ adalah sebuah set beranggotakan empat, yaitu V_1, V_2, V_3, V_4, yang memenuhi alih ragam pada persamaan (IV.1) dalam kerangka koordinat berdimensi 4. Vektor-empat mengalami alih ragam yang sama seperti pada koordinat x_μ, sehingga $x_\mu \rightarrow V_\mu{}' = a_{\mu\nu} V_\nu$.

Sedangkan tensor berdimensi 4 (atau *tensor-empat*) dalam tingkat kedua adalah sebuah set berjumlah 16 anggota $T_{\mu\nu}$, yang memenuhi alih ragam pada persamaan (IV.1). Tensor empat mengalami alih ragam seperti produk koordinat $x_\mu x_\nu$ menurut hubungan

$$T_{\mu\nu} \rightarrow T'\mu\nu = a_{\mu\alpha} a_{\nu\beta} T_{\alpha\beta}.$$

2. Partikel Dirac Bebas

Partikel Dirac bebas bermassa m, operator momentum p dan spin $\frac{1}{2}$, disajikan dalam persamaan Dirac menurut

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(r,t)}{\partial t} = H_D \Psi(r,t), \tag{IV.2}$$

dengan Hamiltonan yang tak gayut waktu menurut [1]

$$\begin{aligned} H_D &= -i\hbar c\alpha.\nabla + mc^2\beta \\ &= c\alpha.\mathbf{p} + mc^2\beta \\ &= (\alpha.\mathbf{p} + \beta m), \end{aligned} \tag{IV.3}$$

dan α, β adalah matriks Hermitan 4×4 yang memenuhi persamaan

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}; \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \tag{IV.4}$$

$$\alpha_1^1 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1,$$

$$\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0, \qquad \alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i = 2\delta_{ik}.$$

Swafungsi operator Hamiltonian memenuhi persamaan

$$(\beta m + \alpha \cdot \mathbf{p})\Psi = E\Psi$$

Pada pendekatan nonrelativistik, yaitu ketika momentum partikel bernilai kecil jika dibandingkan dengan m $(p << m)$, partikel Dirac spin $\frac{1}{2}$ dapat disajikan dalam fungsi gelombang komponen-dua pada teori Pauli. Metode yang biasanya digunakan untuk menunjukkan bahwa teori Dirac adalah teori Pauli pada pendekatan ini berdasarkan kenyataan bahwa dua dari empat komponen fungsi Dirac nilainya menjadi kecil ketika momentumnya kecil. Kemudian ditulis persamaaan yang memenuhi empat komponen dan menyelesaikannya dengan pendekatan: dua dari per-

[1] Digunakan sistem satuan $\hbar, c = 1$.

samaan untuk *komponen kecil*. Dengan mengganti penyelesaian tersebut pada sisa dua persamaan (yang lainnya), dapat diamati hasil berupa pasangan persamaan untuk *komponen besar* yang pada dasarnya adalah persamaan spin Pauli.

Metode tersebut menunjukkan kesetaraan teori Dirac dan Pauli yang menemui kesulitan, jika dianggap pada pendekatan yang melebihi derajat terendah.Pada teori Dirac, operator yang mewakili kecepatan partikel adalah operator α yang komponennya hanya memiliki swanilai ± 1. Sedangkan pada teori Pauli, operator yang mewakili kecepatan partikel adalah p/m yang berupa komponen dengan swanilai berupa semua bilangan real. Komponen yang berbeda dalam operator kecepatan pada teori Dirac tidak rukun dan diukur serentak dengan ketepatan berubah-ubah, sedangkan komponen yang berbeda dalam operator kecepatan pada teori Pauli bersifat rukun serta dapat diukur serentak dengan ketelitian yang berubah-ubah. Dari sini lalu timbul pertanyaan, bagaimana mungkin operator yang wakilan pada peubah fisisnya sama namun pada dua teori tersebut mempunyai sifat-sifat yang berbeda?

Dari penjelasan di atas dapat diperoleh pernyataan bahwa hubungan antara teori Dirac dan teori Pauli sama sekali tidak bisa dijelaskan dari metode yang biasanya, yaitu fungsi gelombang komponen-empat diubah ke komponen-dua, dan pada penjelasan selanjutnya sangat diperlukan hubungan antara kedua teori tersebut. Pembahasan selanjutnya akan ditampilkan metode lain untuk mengubah dari fungsi gelombang komponen-empat ke komponen-dua pada teori Dirac. Metode ini berupa alih ragam ke wakilan baru untuk teori Dirac, dengan meletakkan teori dalam bentuk tertutup analogi dengan teori Pauli dan memperbolehkan perbandingan langsung dari keduanya. Secara khusus akan ditunjukkan bahwa:

1. Untuk partikel Dirac bebas, ada wakilan teori Dirac untuk tenaga relativistik dan non-relativistik, keadaan tenaga positif dan keadaan tenaga negatif terpisah dijelaskan dengan fungsi gelombang komponen-dua.

2. Ada operator posisi yang lain pada teori Dirac, disamping operator posisi yang biasanya dikenal. Operator ini mempunyai sifat derivatif waktu yang berupa $\mathbf{p}/(m^2+p^2)^{1/2}$ untuk keadaan tenaga positif dan $-\mathbf{p}/(m^2+p^2)^{1/2}$ untuk keadaan tenaga negatif, dalam hubungannya dengan konsep kecepatan partikel. Operator posisi yang baru ini sering disebut operator rerata posisi, dan dalam pendekatan nonrelativistik ditafsirkan sebagai operator posisi pada teori Pauli.

3. Komponen z dari operator spin, $\sigma = (1/2i)[\alpha \times \alpha]$, pada teori Dirac bukanlah konstanta gerak, sehingga ada operator spin lain pada teori Dirac yaitu σ (yang dinamakan operator rerata-spin), dengan komponen z berupa konstanta gerak. Pada pendekatan nonrelativistik, operator σ adalah salah satu dari yang diartikan sebagai operator spin pada teori Pauli.

Alasan mendasar untuk menerangkan mengapa komponen empat secara umum digunakan dalam menjelaskan keadaan tenaga positif/negatif dalam wakilan teori Dirac, yaitu persamaan (IV.3), adalah karena Hamiltonan pada persamaan tersebut mengandung operator ganjil, khususnya pada bagian operator α. Jika dimungkinkan untuk membuat alih ragam kanonik pada persamaan (IV.3) yang mengubahnya menjadi bentuk yang bebas dari operator ganjil, maka akan dimungkinkan pula untuk membuat wakilan keadaan tenaga positif dan negatif dengan fungsi gelombang yang hanya memiliki dua komponen pada tiap keadaan dan pasangan komponen yang lainnya bernilai nol. Penjelasan selanjutnya akan menunjukkan berlakunya alih ragam kanonik semacam ini.

3. Alih Ragam Foldy-Wouthuysen

Alih ragam Foldy-Wouthuysen adalah suatu alih ragam uniter yang mengubah pasangan operator dari komponen besar ke komponen kecil. Alih ragam ini dipaparkan pertama kali oleh Leslie L. Foldy dan Siegfried A. Wouthuysen [Foldy dan Wouthuysen , 1949] untuk menemukan alih ragam yang sesuai dalam kasus persamaan Dirac dengan pasangan elektromagnetik minimal.

Sebelum dibahas lebih lanjut, terlebih dahulu akan dijelaskan mengenai operator ganjil dan genap pada teori Dirac. Operator ganjil pada teori Dirac adalah matriks Dirac yang mengandung elemen matriks diagonal dalam wakilan Pauli-Dirac, yaitu $\alpha, \beta\alpha, \gamma^5 = -i\alpha^1\alpha^2\alpha^3$ dan $\beta\gamma^5$. Sedangkan operator genap adalah matriks Dirac yang tidak mempunyai elemen matriks diagonal dalam wakilan Pauli-Dirac, misalnya $1, \beta, \sigma = \frac{1}{2i}[\alpha \times \alpha]$ dan $\beta\sigma$. Produk dari dua buah matriks genap atau dua buah matriks ganjil menghasilkan matriks genap, sedangkan produk dari sebuah matriks genap dan sebuah matriks ganjil menghasilkan matriks ganjil.

Jika S adalah operator Hermitan, dan berlaku alih ragam sebagai berikut

$$\Psi' = U_F\Psi = e^{iS}\Psi, \tag{IV.5}$$

dan jika dikenakan pada persamaan (IV.3) menjadi

$$\begin{aligned} i(\partial\Psi'/\partial t) &= e^{iS}H\Psi \\ &= e^{iS}He^{-iS}\Psi' \\ &= H'\Psi'. \end{aligned} \tag{IV.6}$$

Akan dicari S dengan H' yang tidak mengandung operator ganjil. Hal ini dapat dilakukan sebagai berikut

$$\begin{aligned} e^{iS} &= e^{\beta\alpha\cdot\hat{\mathbf{p}}\theta} \\ &= \cos\theta + \beta\alpha\cdot\hat{\mathbf{p}}\sin\theta, \qquad \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/|p|, \end{aligned} \tag{IV.7}$$

$$
\begin{aligned}
H' &= (\cos\theta + \beta\alpha\cdot\hat{\mathbf{p}}\sin\theta)(\alpha\cdot\hat{\mathbf{p}} + \beta m)(\cos\theta - \beta\alpha\cdot\hat{\mathbf{p}}\sin\theta) \\
&= (\beta m + \alpha\cdot\mathbf{p})(\cos\theta - \beta\alpha\cdot\hat{\mathbf{p}}\sin\theta)^2 \\
&= (\beta m + \alpha\cdot\mathbf{p})\exp(-2\beta\alpha\cdot\hat{\mathbf{p}}\theta) \\
&= (\beta m + \alpha\cdot\mathbf{p})\left(\cos 2\theta - \frac{m}{|p|}\sin 2\theta\right) \\
&\quad +\beta(m\cos 2\theta + |p|\sin 2\theta). \qquad \text{(IV.8)}
\end{aligned}
$$

Untuk menghilangkan suku$(\alpha\cdot p)$, dipilih $\tan 2\theta = |p|/m$, sehingga

$$H' = \beta\sqrt{m^2 + |p|^2}.$$

hal ini sama seperti hamilton pertama yang dicoba, kecuali untuk faktor β yang juga memberikan penyelesaian tenaga negatif. Ditinjau untuk kasus

$$
\begin{aligned}
H &= \alpha\cdot(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + \beta m + e\Phi \\
&= \beta m + \mathcal{O} + \mathcal{E}, \qquad \text{(IV.9)}
\end{aligned}
$$

dengan

$$\mathcal{O} = \alpha\cdot(\mathbf{p} - e\mathbf{A}), \qquad \mathcal{E} = e\Phi, \qquad \beta\mathcal{O} = -\mathcal{O}\beta, \qquad \beta\mathcal{E} = \mathcal{E}\beta. \qquad \text{(IV.10)}$$

Ditinjau alih ragam kanonik yang dibangkitkan oleh operator Hermitan

$$S = -(i/2m)\beta\mathcal{O}.$$

Penyajian S dapat dibentuk dengan perluasan nonrelativistik pada hamiltonan H' dalam deret $1/m$. Akan diekspansikan bentuk ini ke $\frac{p^4}{m^3}$ dan $\frac{p\times(E,B)}{m^2}$.

$$
\begin{aligned}
H\Psi &= i\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-iS}\Psi'\right) \\
&= e^{-iS} i\frac{\partial \Psi'}{\partial t} + \left(i\frac{\partial}{\partial t}e^{-iS}\right)\Psi'. \\
\Rightarrow i\frac{\partial \Psi'}{\partial t} &= \left[e^{-iS}\left(H - i\frac{\partial}{\partial t}\right)e^{-iS}\right]\Psi' \\
&= H'\Psi'. \qquad \text{(IV.11)}
\end{aligned}
$$

S dijabarkan dalam deret $1/m$ dan nilainya sangat kecil dalam pendekatan nonrelativistik.

$$
e^{iS}He^{-iS} = H + i[S,H] + \frac{i^2}{2!}[S,[S,H]] + \cdots + \frac{i^n}{n!}[S,[S,\cdots[S,H]]].
$$

$S = \mathcal{O}\left(\frac{1}{m}\right)$ diharapkan dalam tingkat ketelitian tertentu yaitu

$$
\begin{aligned}
H' &= H + i[S,H] - \frac{1}{2}[S,[S,H]] - \frac{i}{6}[S,[S,[S,H]]] \\
&\quad + \frac{1}{24}[S,[S,[S,[S,\beta m]]]] - \dot{S} - \frac{i}{2}\left[S,\dot{S}\right] + \frac{1}{6}\left[S,\left[S,\dot{S}\right]\right]. \qquad \text{(IV.12)}
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, akan dihilangkan operator ganjil satu demi satu dalam $1/m$ dan mengulanginya sampai pada derajat yang diharapkan. Orde pertama $[O(1)]$:

$$
H' = \beta m + \mathcal{E} + \mathcal{O} + i[S,\beta]m.
$$

Untuk menghilangkan $\mathcal{O}$, dipilih $S = -\frac{i\beta\mathcal{O}}{2m}$,

$$
\begin{aligned}
i[S,H] &= -\mathcal{O} + \frac{\beta}{2m}[\mathcal{O},\mathcal{E}] + \frac{1}{m}\beta\mathcal{O}^2 \\
\frac{i^2}{2}[S,[S,H]] &= -\frac{\beta\mathcal{O}^2}{2m} - \frac{1}{8m^2}[\mathcal{O},[\mathcal{O},\mathcal{E}]] - \frac{1}{2m^2}\mathcal{O}^3
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\frac{i^3}{3!}\left[S,\left[S,\left[S,H\right]\right]\right] &= \frac{\mathcal{O}^3}{6m^2}-\frac{1}{6m^3}\beta\mathcal{O}^4\\
\frac{i^4}{4!}\left[S,\left[S,\left[S,\left[S,H\right]\right]\right]\right] &= \frac{\beta\mathcal{O}^4}{24m^3}\\
-\dot{S} &= \frac{i\beta\dot{\mathcal{O}}}{2m}\\
-\frac{i}{2}\left[S,\dot{S}\right] &= -\frac{i}{8m^2}\left[\mathcal{O},\dot{\mathcal{O}}\right]. \qquad \text{(IV.13)}
\end{aligned}$$

Semua suku dikumpulkan sehingga menjadi

$$\begin{aligned}
H' &= \beta\left(m+\frac{\mathcal{O}^2}{2m}-\frac{\mathcal{O}^4}{8m^3}\right)+\mathcal{E}-\frac{1}{8m^2}\left[\mathcal{O},\left[\mathcal{O},\mathcal{E}\right]\right]\\
&\quad -\frac{i}{8m^2}\left[\mathcal{O},\dot{\mathcal{O}}\right]+\frac{\beta}{2m}\left[\mathcal{O},\mathcal{E}\right]-\frac{\mathcal{O}^3}{3m^2}+\frac{i\beta\dot{\mathcal{O}}}{2m}\\
&= \beta m+\mathcal{E}'+\mathcal{O}'. \qquad \text{(IV.14)}
\end{aligned}$$

Sekarang $\mathcal{O}'$ adalah $\mathcal{O}\left(\frac{1}{m}\right)$, H' dapat dialihragamkan menjadi S' dengan menghilangkan $\mathcal{O}'$,

$$S'=\frac{-i\beta}{2m}\mathcal{O}'=\frac{-i\beta}{2m}\left(\frac{\beta}{2m}\left[\mathcal{O},\mathcal{E}\right]-\frac{\mathcal{O}^3}{3m^2}+\frac{i\beta\dot{\mathcal{O}}}{2m}\right).$$

Setelah alih ragam dalam bentuk S', maka

$$\begin{aligned}
H''=e^{-iS'}\left(H'-i\frac{\partial}{\partial t}\right)e^{-iS'} &= \beta m+\mathcal{E}'+\frac{\beta}{2m}\left[\mathcal{O}',\mathcal{E}'\right]+\frac{i\beta\dot{\mathcal{O}}'}{2m}\\
&= \beta m+\mathcal{E}'+\mathcal{O}'', \qquad \text{(IV.15)}
\end{aligned}$$

dengan $\mathcal{O}''$ adalah $\mathcal{O}\left(\frac{1}{m^2}\right)$ yang dapat dihilangkan dengan alih ragam ketiga, $S''=\frac{-i\beta\mathcal{O}''}{2m}$, berupa

$$\begin{aligned}
H''' &= e^{iS''}\left(H''-i\frac{\partial}{\partial t}\right)e^{-iS''}\\
&= \beta m+\mathcal{E}'
\end{aligned}$$

$$= \quad \beta\left(m+\frac{\mathcal{O}^2}{2m}-\frac{\mathcal{O}^4}{8m^3}\right)+\mathcal{E}-\frac{1}{8m^2}\left[\mathcal{O},\left[\mathcal{O},\mathcal{E}\right]\right]-\frac{i}{8m^2}\left[\mathcal{O},\dot{\mathcal{O}}\right] \quad \text{(IV.16)}$$

Ditinjau kembali produk operator untuk memperoleh ketelitian yang diinginkan,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{O}^2}{2m} &= \frac{\left(\alpha\cdot(\mathbf{p}-e\mathbf{A})\right)^2}{2m} \\
&= \frac{e}{2m}\Sigma\cdot\mathbf{B} \\
\frac{1}{8m^2}\left([\mathcal{O},\mathcal{E}]+i\dot{\mathcal{O}}\right) &= \frac{e}{8m^2}\left(-i\alpha\cdot\nabla\Phi-i\alpha\cdot\dot{\mathbf{A}}\right) \\
&= \frac{ie}{8m^2}\alpha\cdot\mathbf{E} \\
\left[\mathcal{O},\frac{ie}{8m^2}\alpha\cdot\mathbf{E}\right] &= \frac{ie}{8m^2}\left[\alpha\cdot p,\alpha\cdot E\right] \\
&= \frac{ie}{8m^2}\sum_{i,j}\alpha^i\alpha^j\left(-i\frac{\partial E^j}{\partial x^i}\right)+\frac{e}{4m^2}\Sigma\cdot E\times p \\
&= \frac{e}{8m^2}\left(\nabla\cdot E\right)+\frac{ie}{8m^2}\Sigma\cdot\left(\nabla\times E\right) \\
&\quad +\frac{e}{4m^2}\Sigma\cdot E\times p. \qquad \text{(IV.17)}
\end{aligned}$$

Jadi, hamiltonan efektif untuk derajat yang diharapkan adalah

$$\begin{aligned}
H''' &= \beta\left(m+\frac{p-e\mathbf{A}^2}{2m}-\frac{p^4}{8m^3}\right)+e\Phi-\frac{e}{2m}\beta\Sigma\cdot B \\
&= -\frac{ie}{8m^2}\Sigma\cdot\left(\nabla\times E\right)-\frac{e}{4m^2}\Sigma\cdot E\times p-\frac{e}{8m^2}\left(\nabla\cdot E\right). \qquad \text{(IV.18)}
\end{aligned}$$

Tiap suku mempunyai arti fisis masing-masing. Suku pertama dalam tanda kurung adalah perluasan dari

$$\sqrt{\left(p-e\mathbf{A}\right)^2+m^2}$$

dan $-p^4/(8m^3)$ adalah ralat relativistik untuk tenaga kinetik. Suku kedua yaitu

$$-\frac{ie}{8m^2}\Sigma\cdot\left(\nabla\times E\right)-\frac{e}{4m^2}\Sigma\cdot E\times p,$$

adalah tenaga spin-orbit. Dalam potensial statik setangkup bola, suku ini mempunyai bentuk yang biasa dikenal.

BAB V

PENERAPAN MEKANIKA KUANTUM SUPERSIMETRIK DALAM PERSAMAAN DIRAC DERAJAT PERTAMA

Dalam bab ini akan ditunjukkan perwujudan prinsip mekanika kuantum supersimetrik dalam persamaan Dirac yang menjelaskan partikel Dirac tak bermassa dalam medan magnet. Sistem ini relevan dengan efek Hall kuantum bilangan bulat. Dalam memperoleh supersimetri derajat pertama, digunakan operator akar pangkat dua. Pembahasan yang lebih terperinci juga akan diberikan pada masalah supersimetri dalam konteks pangkat dua Hamiltonan Pauli relativistik.

1. Pendahuluan

Penemuan mengejutkan tentang efek Hall kuantum bilangan bulat yang diperkenalkan oleh fisikawan dengan kemungkinan kebolehjadiannya adalah perkembangan baru menyangkut konstanta struktur-halus. Hal ini bersifat lazim dalam tingkatan kuantum. Penjelasan teoritis mengenai gejala ini dikembangkan oleh Laughlin dan beberapa ilmuwan lainnya. Sistem yang dipelajari oleh Laughlin adalah elektron tanpa spin, nonrelativistik yang terkungkung dalam bidang, dengan medan listrik seragam di dalam bidang dan medan magnet tegak lurus pada bidang. Hamiltonan yang sesuai adalah Hamiltonan Pauli dan penyelesaian masalah swanilainya adalah deret aras Landau, semuanya merosot ganda kecuali keadaan dasarnya.

Penjelasan ini dapat dilihat dengan menyertakan sifat-sifat grup translasi magnetik dalam bidang. Kesimpulan Laughlin mengalami perubahan karena diperkenalkannya konsep tentang spin elektron. Tentu saja, sekarang diketahui bahwa tidak ada ralat relativistik dalam penjelasan Laughlin.

Beberapa ilmuwan menyelidiki mekanika kuantum tentang elektron dalam medan magnet seragam. Hal ini dapat ditelaah lebih lanjut pada konteks supersimetri dalam mekanika kuantum. Sebagai contoh, jika elektron nonrelativistik dengan momen magnet Pauli memiliki perbandingan giromagnetik bernilai dua ditempatkan dalam sistem Laughlin, berlaku konsep supersimetri.

Dalam teori Dirac, perbandingan giromagnetik yang bernilai dua muncul secara otomatis. Lebih lanjut[1], Hamiltonan Dirac pangkat dua mengandung medan magnet seragam yang secara matematis berbentuk sama dengan supersimetri Hamiltonan Pauli. Supersimetri ini hanya sebuah perwujudan dalam spektrum tenaga pangkat dua karena aljabar mekanika kuantum SUSYQM(2) melibatkan operator diferensial derajat kedua dalam perwujudannya.

Penjelasan di atas menunjukkan bahwa konsep supersimetri dapat ditemukan dalam perumusan persamaan Dirac derajat pertama. Dalam pembahasan selanjutnya akan dijelaskan penerapan SUSYQM pada spektrum yang diamati dari Hamiltonan Dirac derajat pertama. Penjelasan selanjutnya akan dipilih pada model Hamiltonan yang menguraikan fermion Dirac tak bermassa dalam medan magnet yang seragam dan konstan. Tidak adanya medan magnet, secara mendasar, mungkin dapat diperbaiki dengan mempercepat sistem. Selain itu pula, meskipun pendekatan *"tak bermassa"* tidak memiliki arti fisis, namun akan berguna secara langsung dalam perluasan konsep lain yang lebih umum.

[1]Terdapat hubungan antara keadaan ini dengan osilator harmonik nonrelativistik.

2. Model dan Penyelesaiannya

Persamaan Dirac dengan pasangan elektromagnetik minimal untuk spinor tak bermassa adalah

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\Psi &\equiv \left[(\partial_t - ieA_t)\gamma^0 + (\partial + ie\mathbf{A}).\gamma\right]\Psi \\ &= 0. \end{aligned} \tag{V.1}$$

Digunakan wakilan chiral dalam matriks Dirac menurut

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

dengan $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, didefinisikan oleh persamaan (II.9).

Medan magnet yang seragam dan konstan dapat dituliskan dalam bentuk

$$A_t = 0, \qquad A_x = -By, \qquad A_y = 0, \qquad A_z = 0,$$

dengan $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = B\hat{z}$. Kemudian partikel akan membentuk gerak siklotron dalam bidang $x - y$. Operator $\mathfrak{D}$ diberikan oleh

$$\mathfrak{D} = \gamma^0\partial/\partial t + \gamma.\nabla - ieBy\gamma^1. \tag{V.2}$$

Dipilih batasan $eB > 0$.

Penyelesaian persamaan (V.1) dapat diperoleh melalui metode Feynman–Gell-Mann. Mula-mula persamaan Dirac (V.1) dikalikan dengan operator Dirac $\mathfrak{D}$, sehingga menghasilkan persamaan komponen-empat derajat kedua yang berupa

$$\mathfrak{D}\mathfrak{D}\Phi = 0. \tag{V.3}$$

Persamaan (V.3) memiliki 8 penyelesaian yang tak gayut Φ. Penyelesaian Ψ dari persamaan (V.1) diberikan oleh

$$\Psi = \mathfrak{D}\Phi. \tag{V.4}$$

Penyelesaian yang berjumlah 8 tersebut diperoleh dari dua kali jumlah penyelesaian yang tak gayut. Persamaan (V.2) menunjukkan bahwa $\mathfrak{D}$ dapat ditulis sebagai

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\partial_t + \partial_z & -D_- \\ 0 & 0 & +D_+ & -\partial_t - \partial_z \\ -\partial_t - \partial_z & +D_- & 0 & 0 \\ -D_+ & -\partial_t + \partial_z & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dengan

$$\begin{aligned} D_+ &\equiv \partial/\partial x - ieBy + i\partial/\partial y \\ \text{dan} \quad D_- &\equiv D_+^\dagger = -\partial/\partial x + ieBy + i\partial/\partial y. \end{aligned} \tag{V.5}$$

Kemudian, persamaan (V.3) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\mathfrak{D}\Phi &\equiv \left[\left(\partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2 - 2ieBy\partial_x + e^2B^2y^2\right) I + eB\sigma^{12}\right] \Phi \\ &= \left[\left(\partial_t^2 - \partial_z^2 + D_+D_-\right) I + eB\left(I + \sigma^{12}\right)\right] \Phi \\ &= 0. \end{aligned} \tag{V.6}$$

I yang dimaksud pada persamaan di atas adalah matriks identitas 4×4 dan $\sigma^{12} = \frac{1}{2}i\left[\gamma^1, \gamma^2\right]$ adalah matriks diagonal 4×4 yang elemen-elemennya tidak nol (1,-1,1,-1).

Dalam mengamati persamaan (V.6) digunakan kaitan komutasi

$$[D_-, D_+] = 2eB.$$

Hal ini menunjukkan bahwa D_+danD_- adalah operator naik dan turun pada osilator harmonik yang tidak ternormalisasi.

Persamaan (V.6) mengandung rasio giromagnetik yang bernilai dua, yang dapat diselesaikan dengan cara *ansatz*. Penyelesaian tersebut adalah

$$\Phi_{n\epsilon\tau\sigma}(t,x,y,z) \equiv \exp\left[i\epsilon\left(-\omega_n t + k_x x + k_z z\right)\right] g_{n\epsilon\sigma}(y)\chi_{\tau\sigma}, \tag{V.7}$$

dengan $\chi_{\tau\sigma}$ dipilih sebagai swaspinor komponen-4 yang bernilai tetap, tak gayut, dan berjumlah 4, dari matriks

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & \\ & -I \end{pmatrix},$$

dan

$$\gamma^5\chi_{\tau\sigma} = \tau\chi_{\tau\sigma} \qquad \sigma^{12}\chi_{\tau\sigma} = \sigma\chi_{\tau\sigma},$$

dengan $\tau, \sigma = \pm 1$. Matriks γ^5 dan σ^{12} saling berkomutasi satu dan lainnya dengan operator $\mathfrak{D}\mathfrak{D}$. Kemudian spinor $\chi_{\tau\sigma}$ berturut-turut mengisi matriks pada kolom pertama hingga keempat, dan di tempat lain bernilai nol.

Penyelesaian persamaan (V.7) juga diberi label ϵ untuk tenaga, dan bilangan bulat $n \geq 0$. Bilangan bulat ini muncul karena fungsi $g_{n\epsilon\sigma}(y)$ dalam persamaan (V.7) diperoleh berupa fungsi osilator harmonik, yang pusatnya berpindah dari titik asal (origin) dengan jumlah yang bergantung pada momentum x, k_x.

Kekekalan, Hermitan, namun produk skalarnya definit-non positif untuk tiap dua penyelesaian Φ dan Φ' persamaan (V.6) adalah

$$\langle\Phi|\Phi'\rangle \equiv i\int d^3x \Phi^*(t,x)\overleftrightarrow{\partial}/\partial t\Phi'(t,x). \tag{V.8}$$

Dalam hubungannya dengan produk skalar, lengkap, set ortogonal dari penyelesaian persamaan (V.6) untuk tenaga yang diberikan, yaitu $\phi_{n\epsilon\tau\sigma}$ dari persamaan (V.7), dengan

$$\begin{aligned} g_{n\epsilon\sigma}(y) &= \exp\left[-\frac{1}{2}eB(y-\epsilon k_x/eB)^2\right] \\ & \quad \times H_{n-1/2-1/2\sigma}\left((eB)^{1/2}(y-\epsilon k_x/eB)\right), \end{aligned} \tag{V.9}$$

$$\omega_n = +\left(k_z^2 + 2neB\right)^{1/2}, \tag{V.10}$$

dan H_n adalah polinomial Hermit. Dengan penyelesaian ini untuk $\Phi_{n\epsilon\tau\sigma}$ diperoleh identitas

$$\begin{aligned} D_+\Phi_{n\epsilon\tau\sigma}(y) &= -i(eB)^{1/2}\Phi_{n+1,\epsilon\tau\sigma}(y), \\ \text{dan} \quad D_-\Phi_{n\epsilon\tau\sigma}(y) &= +i(eB)^{1/2}(2n-1-\sigma)\times\Phi_{n-1,\epsilon\tau\sigma}(y). \end{aligned} \tag{V.11}$$

Persaman (V.7) adalah 4 sistem persamaan diferensial derajat kedua yang menghasilkan 8 penyelesaian yang tak gayut, $\phi_{n\epsilon\tau\sigma}$, untuk setiap nilai momentum k_x dan k_z. Bentuk fungsional dari penyelesaian tersebut tidak bergantung terhadap τ. Oleh karena itu, terdapat keadaan merosot ganda pada 8 penyelesaian ini, meskipun saling tak gayut karena spinor $\chi_{\tau\sigma}$ bersifat ortogonal, sesuai dengan persamaan (V.8). Selain itu, tenaganya saling bebas terhadap k_x. Hal inilah yang sering dikenal dengan *tingkat kemerosotan Landau* dan mencerminkan kesetangkupan translasi magnetik pada bidang $x-y$.

Sebagai lanjutan dari metode Feynman–Gell-Mann, digunakan persamaan (V.4) untuk memperoleh penyelesaian persamaan (V.1). Karena persamaan (V.1) adalah persamaan diferensial derajat pertama, tidak semua penyelesaian Ψ yang diperoleh dari $\mathfrak{D}\psi$ bersifat linear dan tak gayut, sesuai dengan produk skalar Hermitan

$$\begin{aligned} \langle\Psi|\Psi'\rangle &= \int d^3x\overline{\Psi}(t,x)\gamma^0\Psi'(t,x) \\ &= \int d^3x\Psi^\dagger(t,x)\Psi'(t,x). \end{aligned} \tag{V.12}$$

Aspek penting yang lain dari persamaan di atas adalah jika persamaan tersebut ditulis dalam bentuk Hamiltonian

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H_D\Psi. \tag{V.13}$$

dengan H_D adalah matriks 4×4 yang berupa

$$H_D = \begin{pmatrix} h_D & 0 \\ 0 & -h_D \end{pmatrix}, \tag{V.14}$$

dan h_D adalah matriks 2×2 menurut

$$h_D = \begin{pmatrix} -i\partial/\partial z & iD_- \\ -iD_+ & i\partial/\partial z \end{pmatrix}, \tag{V.15}$$

diperoleh bahwa $[H_D,\gamma^5]=0$ tetapi $[H_D,\sigma^{12}]\neq 0$. Hal ini berarti bahwa swanilai σ dari σ^{12} tidak dapat digunakan sebagai label bagi penyelesaian H_D.

3. Supersimetri dan Pangkat Dua Hamiltonan Pauli Relativistik

Dalam BAB II telah dikemukakan bahwa sistem mekanika kuantum dikatakan *supersimetrik* jika terdapat sejumlah operator Q_i, i=1,2,...,N yang bersifat komutatif dengan Hamiltonian SUSY, yaitu persamaan (II.32), dan antikomutatif untuk menghasilkan Hamiltonian SUSY, yaitu persamaan (II.31). Superaljabar pada kedua persamaan itu disebut SUSYQM(N). Pembahasan selanjutnya akan menggunakan superaljabar SUSYQM(2) yang hanya mempunyai dua pembangkit antikomutasi sehingga digunakan operator Q dan $Q^\dagger$ seperti pada persamaan (II.30) serta superaljabar SUSYQM(2) yaitu persamaan (II.13)-(II.15).

H_s memiliki swaspektrum dengan set pasangan merosot pada tingkat boson dan fermion, serta dengan keadaan dasar boson tunggal. Operator Q mengubah swakeadaan fermionik $|F\rangle$ menjadi swakeadaan bosonik $|B\rangle$ dan alih ragam baliknya dikerjakan oleh $Q^\dagger$, yang dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{aligned} Q|F\rangle &= E^{1/2}|B\rangle \\ \text{dan} \quad Q^\dagger|B\rangle &= E^{1/2}|F\rangle, \end{aligned} \tag{V.16}$$

dengan E adalah swatenaga $|B\rangle$ dan $|F\rangle$. Untuk supersimetri yang tak rusak, kedua Q dan $Q^\dagger$ dapat saling menghilangkan keadaan dasar $|0\rangle$ sehingga dapat ditulis sebagai

$$Q|0\rangle = Q^\dagger|0\rangle = 0. \tag{V.17}$$

Persamaan (V.17) dan superaljabar pada persamaan (II.13)-(II.15) menunjukkan bahwa swatenaga keadaan dasar *harus bernilai nol*, yaitu

$$H_s|0\rangle = 0. \tag{V.18}$$

Superaljabar pada persamaan (II.13)-(II.15) dan (V.18) menjelaskan bahwa H_s mempunyai swanilai yang semuanya harus bernilai lebih besar atau sama dengan nol.

Selanjutnya, diperhatikan aturan superaljabar SUSYQM(2) pada sistem yang dijelaskan dengan pangkat dua Hamiltonan Pauli relativistik :

$$(H^2)_{RP} = (H_D)^2,$$

dengan H_D diberikan oleh persamaan (V.14) dan (V.15). Terdapat hubungan antara sistem ini dengan osilator harmonik supersimetrik nonrelativistik yang telah dibahas pada BAB II. Didefinisikan

$$Q_{RP} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h_D & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad Q^\dagger_{RP} = \begin{pmatrix} 0 & h_D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{V.19}$$

sehingga diperoleh bahwa

$$\left\{ Q_{RP}, Q^\dagger_{RP} \right\} = (H^2)_{RP}. \tag{V.20}$$

Operator Q_{RP} dan $Q^\dagger_{RP}$ memenuhi aljabar SUSYQM(2) pada persamaan (II.13)-(II.15) yang berupa

$$\left\{ Q_{RP}, \gamma^5 \right\} = \left\{ Q^\dagger_{RP}, \gamma^5 \right\} = 0.$$

Kemudian, pembangkit supersimetri Q_{RP} dan $Q^\dagger_{RP}$ dikenakan pada swavektor $(H^2)_{RP}$ untuk mengubah swanilai τ dari γ^5 dan juga mengubah bentuk ϵ dari tenaga Dirac. Namun, karena swanilai $(H^2)_{RP}$ adalah pangkat dua dari tenaga, Q_{RP} dan $Q^\dagger_{RP}$ berhubungan dengan swakeadaan merosot pada sistem Pauli relativistik.

Penting untuk dicatat bahwa hamiltonan Dirac dapat ditulis sebagai[2]

$$H_D = \gamma^0 (Q^\dagger_{RP} - Q_{RP}) \tag{V.21}$$

Hubungan semacam ini bisa disajikan karena kedua Q_{RP} dan H_D adalah akar dari $(H^2)_{RP}$.

Dapat dikatakan bahwa "keadaan dasar" dari $(H^2)_{RP}$ benar-benar merupakan tingkat set infinit, yang diberi label peubah kontinu k_z, yang dapat dilihat dari per-

[2]Dalam definisi (V.19), beberapa parameter perubahan dianggap tetap sehingga membentuk persamaan (V.21).

samaan (V.7), (V.9) dan (V.10).

Tenaga keadaan dasar berupa $\omega_0^2 = k_z^2$, yang bernilai nol hanya ketika $k_z = 0$. Dari persamaan (V.17) dan (V.18) dan penjelasan lain yang berkaitan, SUSYQM(2) dalam persamaan (V.20) adalah simetri tak rusak pada sistem Pauli relativistik derajat kedua, hanya pada pendekatan $k_z \to 0$. Hal yang penting, pendekatan ini mirip dengan pengamatan pada efek Hall terkuantisasi.

Kerusakan supersimetri untuk $k_z = 0$ dapat dilihat secara jelas dengan mengenakan Q_{RP} pada persamaan (V.19) dalam swavektor keadaan dasar persamaan (V.7), (V.9) dan (V.10). Sehingga diperoleh

$$Q_{RP}\Phi_{0\epsilon\tau-}(0,x,y,z) = -\epsilon k_z \Phi_{0\epsilon--}(0,x,y,z).$$

Meskipun bagian dari swavektor keadaan dasar, secara khusus $\phi_{0\epsilon+-}$ namun ini tentu dihapus oleh Q_{RP} sehingga sisa $Q_{0\epsilon--}$ tidak ada.

4. Supersimetri dan Hamiltonan Dirac

Dalam subbab ini akan diteliti keberadaan SUSY untuk partikel pada sistem yang dijelaskan masing-masing oleh Hamiltonan Dirac orde pertama H_D, persamaan (V.13) dan (V.14). Dari hasil yang diperoleh pada pembahasan sebelumnya, yaitu pada subbab 3, selanjutnya akan dibuktikan bahwa operator Q_D dan $Q_D^\dagger$ adalah akar dari H_D.

Cara yang paling mudah untuk memperoleh Q_D dan $Q_D^\dagger$ yaitu pertama, menemukan bentuk diagonal H_D' dari H_D. Untuk melihat bahwa bentuk diagonal H_D' dapat dibangun, perlu dicatat bahwa $(H_D)^2 = (H^2)_{RP}$ adalah diagonal namun H_D' dimasukkan sebagai bagian dari akar diagonal $(H^2)_{RP}$.
Kedua, setelah diperoleh operator Q_D' dan ${Q_D'}^\dagger$ dari H_D', keduanya harus diubah ke

basis H_D. Alih ragam *Foldy-Wouthuysen (FW)* dari H_D ke H'_D adalah cara langsung untuk mengerjakan hal ini.

Diperkenalkan alih ragam Foldy-Wouthuysen (FW) sebagai berikut

$$H'_D = U^{-1} H_D U, \tag{V.22}$$

dengan

$$U = \exp(\frac{1}{2}\gamma^3 \Pi_\perp \cdot \gamma_\perp \theta) \tag{V.23}$$

dalam persamaan (V.23) didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} \Pi_\perp \cdot \gamma_\perp &= \Pi^1\gamma^1 + \Pi^2\gamma^2, \\ \Pi^1 &= k_x - eBy, \\ \Pi^2 &= k_y. \end{aligned} \tag{V.24}$$

Lebih lanjut, didefinisikan

$$\begin{aligned} \tan\xi\theta &= \frac{\xi}{k_z} \\ \text{dan} \quad \xi^2 &= -(\Pi_\perp \cdot \gamma_\perp)^2. \end{aligned} \tag{V.25}$$

Persamaan (V.22) dan (V.23) dapat dikombinasikan pada H'_D sebagai

$$H'_D = \begin{pmatrix} (D_-D_+ - \partial_z^2)^{\frac{1}{2}} & & & \\ & -(D_+D_- - \partial_z^2)^{\frac{1}{2}} & & \\ & & -(D_-D_+ - \partial_z^2)^{\frac{1}{2}} & \\ & & & (D_+D_- - \partial_z^2)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Dalam kasus supersimetri tak rusak, diambil batasan[3] $k_z = 0$, sehingga menjadi

$$H'_D(k_z = 0) = \begin{pmatrix} \sqrt{D_- D_+} & & & \\ & -\sqrt{D_+ D_-} & & \\ & & -\sqrt{D_- D_+} & \\ & & & \sqrt{D_+ D_-} \end{pmatrix}. \quad \text{(V.26)}$$

Spektrum $H'_D(k_z = 0)$ tersusun atas 4 bagian. Tiap-tiap bagian tersebut dihubungkan dengan sebuah operator yang berada pada diagonal persamaan (V.26). Mulai dari bagian kiri paling atas dan menuju ke bagian kanan paling bawah, 4 operator tersebut menunjukkan

1. tenaga positif dan $e\vec{B} \cdot \vec{S}_z > 0$,
2. tenaga negatif dan $e\vec{B} \cdot \vec{S}_z > 0$,
3. tenaga negatif dan $e\vec{B} \cdot \vec{S}_z < 0$,
4. tenaga positif dan $e\vec{B} \cdot \vec{S}_z < 0$,

dengan $\vec{S}_z$ menunjukkan operator spin dalam arah sumbu z. Namun perlu diingat bahwa pembangkit SUSY pada SUSYQM (2) menghubungkan satu spektrum bosonik menjadi satu spektrum fermionik. Hanya dua dari keempat spektrum di atas yang dapat ditampung secara bersamaan. Selanjutnya, akan didiskusikan pilihan berbeda yang dapat diijinkan oleh persamaan (V.26).

Pembahasan diawali dengan membentuk SUSYQM(2) yang berhubungan de-

[3] Meskipun pada dasarnya kerusakan supersimetri dapat diwujudkan dalam bentuk $k_z \neq 0$, rancangan ini sulit untuk diterapkan.

ngan dua spektrum tenaga-positif. Pembangkit SUSY dapat ditulis

$$Q'_D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{D_-} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad {Q'_D}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{D_+} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{V.27}$$

Operator tersebut membangkitkan spektrum tenaga positif, karena

$$\begin{aligned} \left\{Q'_D, {Q'_D}^\dagger\right\} &= H'_D(k_z = 0, \epsilon = +1) \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{D_-D_+} & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & \sqrt{D_+D_-} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{V.28}$$

Kemudian, ditinjau superaljabar yang berhubungan dengan keadaan tenaga negatif pada persamaan (V.26). Dalam subbab sebelumnya telah dikemukakan bahwa hamiltonan yang dihubungkan dengan superaljabar SUSYQM(2) harus memiliki swanilai positif atau nol. Oleh karena itu, keadaan tenaga negatif tidak dihubungkan dengan SUSYQM(2). Jika didefinisikan

$$\widetilde{Q}'_D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{D_-} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \widetilde{Q}'^\dagger_D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{D_+} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{V.29}$$

kemudian diambil

$$\begin{aligned}\left\{\widetilde{Q}'_D, \widetilde{Q}'^{\dagger}_D\right\} &= -H'_D(k_z=0, \epsilon=-1) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \sqrt{D_+D_-} & & \\ & & \sqrt{D_-D_+} & \\ & & & 0 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{V.30}$$

kecuali untuk tanda minus di depan hamiltonan, superaljabar ini mematuhi hubungan komutasi SUSYQM(2) pada persamaan (II.13)-(II.15). Hubungan superaljabar ini dan SUSYQM(2) setara dengan hubungan antara aljabar kompak SO(3) dan aljabar nonkompak SO(2,1).

Kemudian menurut

$$H'_D(k_z=0) = \left\{Q'_D, {Q'_D}^{\dagger}\right\} - \left\{\widetilde{Q}'_D, \widetilde{Q}'^{\dagger}_D\right\}, \tag{V.31}$$

juga diperoleh bahwa

$$H_D(k_z=0) = \left\{Q_D, {Q_D}^{\dagger}\right\} - \left\{\widetilde{Q}_D, \widetilde{Q}^{\dagger}_D\right\}, \tag{V.32}$$

dengan

$$\begin{aligned}Q_D &= UQ'_DU^{-1}, \\ \widetilde{Q}_D &= U\widetilde{Q}'_DU^{-1}.\end{aligned} \tag{V.33}$$

Dapat dibangun aljabar yang berhubungan dengan spektrum tenaga positif dan negatif dari persamaan (V.26). Sebagai contoh, didefinisikan

$$X'_D = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{D_-} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad {X'_D}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{D_+} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{V.34}$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} \left\{X'_D, {X'_D}^\dagger\right\} &= H'_D(k_z = 0, \tau = +1) \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{D_- D_+} & & & \\ & -\sqrt{D_+ D_-} & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{V.35}$$

Namun, aljabar ini bukan superaljabar karena X'_D dan ${X'_D}^\dagger$ bersifat komutatif menghasilkan $H'_D(k_z = 0, \tau = +1)$. Lebih lanjut, X'_D dan ${X'_D}^\dagger$ tidak tetap dalam geraknya.

5. Kesetaraan Supersimetri dengan Persamaan Dirac-Alih Ragam Foldy Wouthuysen

Berikut ini akan diperlihatkan ciri-ciri yang menghubungkan antara prinsip SUSYQM dan teori Dirac. Penjabaran sistem SUSYQM secara lebih mudahnya dapat dijelaskan oleh supermuatan ganjil $Q^a (a = 1, 2, ..., N)$ yang membangkitkan H_s. H_s sendiri dicirikan oleh hubungan yang berbentuk

$$\left\{Q^a, Q^b\right\} = 2\delta^{ab} H_s,$$

$$[Q^a, H_s] = 0, \qquad a = 1, 2, ..., N.$$

Kemudian didefinisikan hamiltonan bak-Dirac (H_{bD}) sebagai jumlahan bagian ganjil dan genap dengan bagian ganjil diberikan oleh supermuatan dikalikan $\sqrt{2}$ (untuk memudahkan) dan bagian genap mengandung massa. Hal ini dapat disajikan sebagai

$$H_{bD} = \sqrt{2}Q + \beta m.$$

Karena supermuatan bersifat ganjil, maka

$$\{Q, \beta\} = 0,$$

sehingga

$$\begin{aligned} (H_{bD})^2 &= 2\,[Q]^2 + m^2 \\ &= 2H_s + m^2. \end{aligned} \tag{V.36}$$

Hasil tersebut berhubungan dengan perubahan wakilan dari teori Dirac melalui alih ragam Foldy-Wouthuysen yang bersifat uniter, yaitu

$$\begin{aligned} H_{FW} &= U H_{bD} U^{-1} \\ &= \beta\left(2H_s + m^2\right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{V.37}$$

sehingga berlaku kaitan

$$[H_{FW}]^2 = [H_{bD}]^2\,.$$

Alih ragam Foldy-Wouthuysen tersebut diamati dalam bentuk:

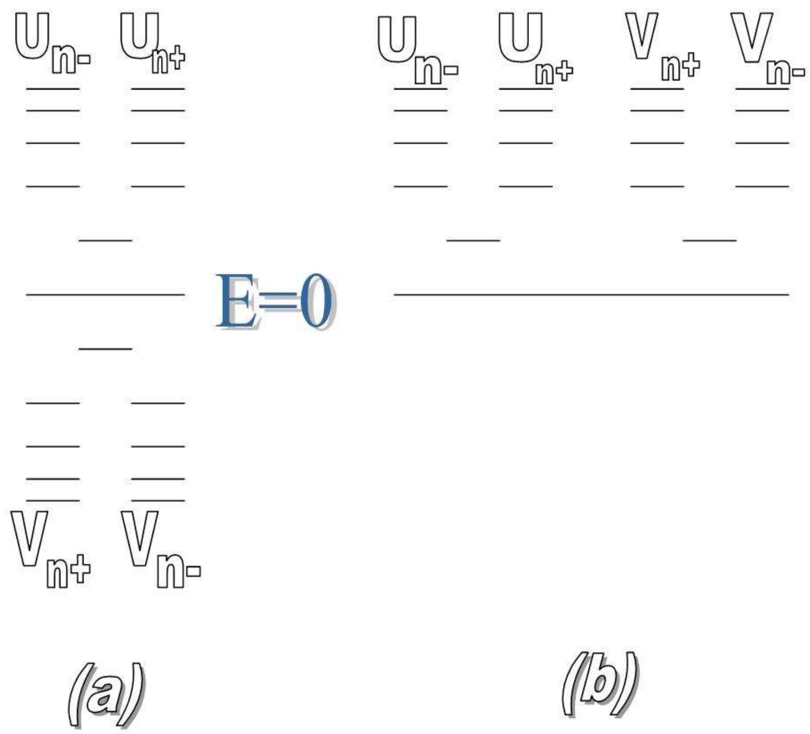
$$U = e^{iS},$$

$$\begin{aligned}
S &= S^\dagger, \\
S &= -\frac{i}{2}\beta Q H^{-1}\theta, \\
\tan\theta &= \sqrt{2}\frac{H}{m}, \\
[\theta, \beta] &= 0, \\
\{H_{bD}, S\} &= 0,
\end{aligned} \tag{V.38}$$

dengan H adalah genap dan didefinisikan sebagai akar positif dari H_s. Alih ragam ini juga dapat ditulis sebagai

$$U = \frac{E + \sqrt{2}\beta Q + m}{[2E(E+m)]^{1/2}}, \qquad E \equiv \left(2H_s + m^2\right)^{1/2}.$$

Jadi, alih ragam Foldy-Wouthuysen menghilangkan bagian ganjil dari hamiltonan Dirac (yang diungkapkan dengan mudah dalam bentuk supermuatan ganjil) dan menghasilkan bagian genap dalam hubungannya dengan hamiltonan supersimetrik non-relativistik.



Gambar V.1: (a) Skema tingkat tenaga elektron relativistik dalam medan magnet seragam. Jika kemerosotan kontinu tidak diperhatikan, kedua keadaan tenaga positif dan negatif merosot ganda kecuali untuk keadaan tak merosot yang berada di dekat nilai $E = 0$. (b) Setelah dianggap bahwa elektron dengan tenaga negatif sebagai positron dengan tenaga positif, keduanya, elektron dan positron, mempunyai tingkat tenaga yang sama. Ada lipat-empat (*fourfold*) kemerosotan yang terjadi, kecuali untuk keadaan dasar yang mengalami kemerosotan ganda.

BAB VI

PENUTUP

1. Kesimpulan

Penelusuran konsep supersimetri dalam mekanika kuantum serta penerapannya dalam masalah radial dan persamaan Dirac derajat pertama memberikan hasil sebagai berikut :

1. Supersimetri adalah kesetangkupan yang melestarikan tenaga total dalam sistem gabungan antara osilator bosonik dan fermionik, jika terjadi penurunan satu bilangan kuantum bosonik dan satu bilangan kuantum fermionik secara bersamaan. Aljabar supersimetri dalam mekanika kuantum memenuhi persamaan

$$\{Q_i, Q_j\} = \delta_{ij} H_s$$

$$[Q_i, H_s] = 0, \qquad i = 1, 2, ..., N.$$

2. SUSYQM dapat diterapkan pada masalah radial, minimal berdimensi tiga dan telah dibahas pada masalah Coulomb dan osilator isotropik. Penyelesaiannya lebih mudah jika menggunakan operator tangga yang disajikan dalam bentuk Hamiltonannya yaitu

$$H_+ = H_l - E_l^0 \qquad H_- = H_{l+j} - G,$$

dengan

$$E_{l+j}^{N-i} = E_l^N + F - G,$$

dan

$$G = \left(E_l^N - E_l + j^N - 1\right) - E_l^0.$$

3. SUSYQM dapat dihubungkan dengan persamaan Dirac derajat pertama menggunakan alih ragam Foldy Wouthuysen yang kesetaraannya disajikan dalam bentuk

$$U = \frac{E + \sqrt{2}\beta Q + m}{[2E(E+m)]^{1/2}}, \qquad E \equiv \left(2H_s + m^2\right)^{1/2}.$$

2. Saran

Kajian mekanika kuantum supersimetrik ini masih dibatasi pada dua masalah, yaitu masalah radial dan persamaan Dirac orde pertama. Penerapan SUSYQM dalam masalah mekanika kuantum lainnya perlu untuk digali dan dicari hubungannya sehingga menguatkan teori SUSYQM. Kajian supersimetri di luar fisika kuantum, misalnya pada sistem nonlinier, mekanika klasik, fisika zat padat bahkan pada sistem ketidakteraturan (*chaotic systems*), juga memungkinkan untuk mendukung teori supersimetri ini.

DAFTAR PUSTAKA

Bagchi, B.K., 2000, *Supersymmetry in Quantum and Classical Mechanics*, Chapman and Hall/CRC Press, New York

Beckers, J., and Debergh, N., 1990, *Supersymmetry, Foldy-Wouthuysen Transformations, and Relativistic Oscillators*, Phys.Rev. D 42, 1255-1259

Blockley, C.A., 1985, *Simple Supersymmetry: 1. Basic Examples*, European Journal Physics 6, 218-224

Boas, M.L., 1996, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, edisi kedua, John Wiley & Sons, Inc., New York

Constantinescu, F., and Magyari, E., 1978, *Problems in Quantum Mechanics*, Pergamon Press

Cooper, F., et. al., 1995, *Supersymmetry and Quantum Mechanics*, Physics Reports, 251, 267-385

Efetov, K., 1978, *Supersymmetry in disorder and chaos*, Cambridge University Press

Foldy, L.L. and Wouthuysen, S.A., 1949, *On the Dirac Theory of Spin 1/2 Particles and Its Non-Relativistic Limit*, Phys.Rev. 78, 29-36

Griffiths, D.J., 1994, *Introduction to Quantum Mechanics*, Prentice Hall, Inc., New Jersey

Hughes, R.J., Kostelecky, V.A., and Nieto, M.M., 1986, *Supersymmetry in a First Order Dirac Equation For A Landau System*, Physics Letters B 171, 226-230

Hughes, R.J., Kostelecky, V.A., and Nieto, M.M., 1986, *Supersymmetric Quantum Mechanics in a First Order Dirac Equation*, Phys.Rev. D 34, 1100-1107

Khare, A., 2004, *Supersymmetry in Quantum Mechanics*, arXiv:math-ph/0409003 v1 1 September 2004

Mirlin, A., 1999, *Statistics of energy levels and eigenfunctions in disordered and chaotic systems: Supersymmetry approach*, cond-mat/0006421

Muslim, 1997, *Modul Program S1 Fisika: Pendahuluan Fisika Kuantum*, Jurusan Fisika FMIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta

Rosyid, M.F., 2002, *Diktat Mata Kuliah Matematika Untuk Fisika Teori I*, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Jurusan Fisika Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta

Rosyid, M.F., 2005, *Mekanika Kuantum*, Laboratorium Fisika Atom dan Fisika Inti, Jurusan Fisika Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta

Ryder, L.H., 1996, *Quantum Field Theory*, edisi kedua, Cambridge University Press, Cambridge

Sutopo, 2003, *Pengantar Fisika Kuantum*, Jurusan Fisika FMIPA UM, Malang

Wess, J., and Zumino, B., 1974, *A Lagrangian Model Invariant Under Supergauge Transformations*, Phys. Lett. B 49 (1974) 52

LAMPIRAN A

PEMBUKTIAN PERSAMAAN (II.13) - (II.15)

Berikut ini akan dijelaskan produk tensor antara dua operator.

Andaikan $\hat{\Omega}_1$ dan $\hat{\Omega}_2$ berturut-turut merupakan operator pada ruang $\mathcal{H}_1$ dan $\mathcal{H}_2$. Produk tensor antara $\hat{\Omega}_1$ dan $\hat{\Omega}_2$ adalah objek $\hat{\Omega}_1 \otimes \hat{\Omega}_2$ yang berkelakuan

$$(\hat{\Omega}_1 \otimes \hat{\Omega}_2)(\psi \otimes \varphi) = (\hat{\Omega}_1 \psi) \otimes (\hat{\Omega}_2 \varphi),$$

untuk setiap $\psi \otimes \varphi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Karena $\hat{\Omega}_1 \psi$ berada di $\mathcal{H}_1$ dan $\hat{\Omega}_2 \varphi$ berada di $\mathcal{H}_2$, maka dengan sendirinya $(\hat{\Omega}_1 \otimes \hat{\Omega}_2)(\psi \otimes \varphi)$ berada di $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Jadi, $\hat{\Omega}_1 \otimes \hat{\Omega}_2$ merupakan operator pada $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

Karena $(\hat{\Omega}_1 \otimes \hat{I}_2)(\psi \otimes \varphi) = (\hat{\Omega}_1 \psi) \otimes \varphi$, maka operator $\hat{\Omega}_1$ dapat diwakili dalam ruang $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ oleh operator $\hat{\Omega}_1 \otimes \hat{I}_2$, dengan $\hat{I}_2$ adalah operator identitas pada $\mathcal{H}_2$, sedangkan operator $\hat{\Omega}_2$ dapat diwakili oleh operator $\hat{I}_1 \otimes \hat{\Omega}_2$, dengan $\hat{I}_1$ adalah operator identitas pada $\mathcal{H}_1$.

Selanjutnya sifat dari produk tensor tersebut akan diterapkan pada persamaan (II.12) dengan a dan $a^\dagger$ adalah operator pada ruang $\mathcal{H}_1$, b dan $b^\dagger$ adalah operator pada ruang $\mathcal{H}_2$ serta Q dan $Q^\dagger$ adalah operator pada ruang $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

Antikomutator antara Q dan $Q^\dagger$ berupa

$$\begin{aligned}
\{Q, Q^\dagger\} &= QQ^\dagger + Q^\dagger Q \\
&= (\sqrt{\omega} b \otimes a^\dagger)(\sqrt{\omega} b^\dagger \otimes a) + (\sqrt{\omega} b^\dagger \otimes a)(\sqrt{\omega} b \otimes a^\dagger) \\
&= \omega (b \otimes a^\dagger)(b^\dagger \otimes a) + \omega (b^\dagger \otimes a)(b \otimes a^\dagger) \\
&= \omega \left[(bb^\dagger \otimes a \dagger a) + (b^\dagger b \otimes aa^\dagger) \right] \\
&= \omega \left[\left(1 + b^\dagger b\right) \otimes a \dagger a + b^\dagger b \otimes (1 - a^\dagger a) \right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \omega\left[a \dagger a b^{\dagger} b \otimes a \dagger a + b^{\dagger} b - b^{\dagger} b \otimes a^{\dagger} a\right] \\
&= \omega\left(b^{\dagger} b + a^{\dagger} a\right) \\
&= H_s. \qquad \text{(A.1)}
\end{aligned}
$$

Hasil tersebut sesuai dengan persamaan (II.13).

Selanjutnya kaitan komutasi antara Q dan H_s berupa

$$
\begin{aligned}
[Q, H_s] &= Q H_s - H_s Q \\
&= \left(\sqrt{\omega} b \otimes a^{\dagger}\right)\left(\omega\left(b^{\dagger} b + a^{\dagger} a\right)\right) - \left(\omega\left(b^{\dagger} b + a^{\dagger} a\right)\right)\left(\sqrt{\omega} b \otimes a^{\dagger}\right) \\
&= \left(\sqrt{\omega} b \otimes a^{\dagger}\right)\left(\omega\left(b^{\dagger} b + a^{\dagger} a\right)\right) - \left(\sqrt{\omega} b \otimes a^{\dagger}\right)\left(\omega\left(b^{\dagger} b + a^{\dagger} a\right)\right) \\
&= 0. \qquad \text{(A.2)}
\end{aligned}
$$

Hal yang sama untuk komutasi antara $Q^{\dagger}$ dan H_s yaitu

$$
\begin{aligned}
[Q^{\dagger}, H_s] &= Q^{\dagger} H_s - H_s Q^{\dagger} \\
&= \left(\sqrt{\omega} b^{\dagger} \otimes a\right)\left(\omega\left(b^{\dagger} b + a^{\dagger} a\right)\right) - \left(\omega\left(b^{\dagger} b + a^{\dagger} a\right)\right)\left(\sqrt{\omega} b^{\dagger} \otimes a\right) \\
&= \left(\sqrt{\omega} b^{\dagger} \otimes a\right)\left(\omega\left(b^{\dagger} b + a^{\dagger} a\right)\right) - \left(\sqrt{\omega} b^{\dagger} \otimes a\right)\left(\omega\left(b^{\dagger} b + a^{\dagger} a\right)\right) \\
&= 0. \qquad \text{(A.3)}
\end{aligned}
$$

Kedua persamaan di atas sesuai dengan persamaan (II.14).

Sedangkan kaitan antikomutasinya adalah

$$
\begin{aligned}
\{Q, Q\} &= QQ + QQ, \\
&= \omega(bb \otimes a^{\dagger} a^{\dagger}) + \omega(bb \otimes a^{\dagger} a^{\dagger}),
\end{aligned}
$$

dari persamaan (II.6) diperoleh kaitan $a^{\dagger} a^{\dagger} = -a^{\dagger} a^{\dagger}$, sehingga

$$
= \omega(bb \otimes a^{\dagger} a^{\dagger}) + \omega(bb \otimes (-a^{\dagger} a^{\dagger})),
$$

$$
\begin{aligned}
&= \omega(bb \otimes a^\dagger a^\dagger) - \omega(bb \otimes a^\dagger a^\dagger), \\
&= 0, && \text{(A.4)}
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
\{Q^\dagger, Q^\dagger\} &= Q^\dagger Q^\dagger + Q^\dagger Q^\dagger, \\
&= \omega(b^\dagger b^\dagger \otimes aa) + \omega(b^\dagger b^\dagger \otimes aa), \\
&\quad \text{dari persamaan (II.6) diperoleh kaitan } aa = -aa, \text{ sehingga} \\
&= \omega(b^\dagger b^\dagger \otimes aa) + \omega(b^\dagger b^\dagger \otimes (-aa)), \\
&= \omega(b^\dagger b^\dagger \otimes aa) - \omega(b^\dagger b^\dagger \otimes aa), \\
&= 0, && \text{(A.5)}
\end{aligned}
$$

yang sesuai dengan persamaan (II.15).

LAMPIRAN B

PERSAMAAN SCHRÖDINGER DALAM POTENSIAL SETANGKUP BOLA

Dalam koordinat Kartesan, persamaan Schrödinger di bawah pengaruh potensial $V(r)$ disajikan dalam bentuk

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_D^2\psi(\vec{r}) + V(r)\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}), \tag{B.1}$$

dengan

$$\vec{r} = (x_1, x_2, ..., x_D), \quad r = |\vec{r}|$$

$$\nabla_D^2 = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Selanjutnya dilakukan alih ragam persamaan (B.1) ke koordinat kutub D dimensi, yang dihubungkan oleh koordinat Kartesan berupa

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3......\sin\theta_{D-1} \\
x_2 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3......\sin\theta_{D-1} \\
x_3 &= r\cos\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4......\sin\theta_{D-1} \\
x_4 &= r\cos\theta_3\sin\theta_4\sin\theta_5......\sin\theta_{D-1} \\
&\vdots \\
x_j &= r\cos\theta_{j-1}\sin\theta_j\sin\theta_{j+1}......\sin\theta_{D-1} \\
&\vdots \\
x_{D-1} &= r\cos\theta_{D-1}\sin\theta_{D-1} \\
x_D &= r\cos\theta_{D-1},
\end{aligned} \tag{B.2}$$

dengan

$$D = 3, 4, 5, \cdots,$$

$$0 < r < \infty, \qquad 0 \leq \theta_1 < 2\pi,$$

$$0 \leq \theta_j \leq \pi, \qquad j = 2, 3, ..., D-1.$$

Laplasian ∇_D^2 dapat ditulis sebagai

$$\nabla_D^2 = \frac{1}{h}\sum_{i=0}^{D-1}\frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(\frac{h}{h_i^2}\frac{\partial}{\partial\theta_i}\right), \tag{B.3}$$

dengan

$$\theta_0 = r, \quad h = \prod_{i=0}^{D-1} h_i,$$

dan faktor skala h_i diberikan oleh

$$h_i^2 = \sum_{k=1}^{D}\left(\frac{\partial x_k}{\partial\theta_i}\right)^2, i = 0, 1, 2, ..., D-1.$$

Jika dijabarkan secara gamblang maka akan menjadi

$$\begin{aligned}
h_0^2 &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial\theta_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial\theta_0}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial x_D}{\partial\theta_0}\right)^2 = 1\\
h_1^2 &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial\theta_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial\theta_1}\right)^2 = r^2\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3...\sin^2\phi_{D-1}\\
h_2^2 &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial\theta_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial\theta_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial\theta_2}\right)^2 = r^2\sin^2\theta_3\sin^2\theta_4...\sin^2\phi_{D-1}\\
&\vdots\\
h_j^2 &= r^2\sin^2\theta_{j+1}\sin^2\theta_{j+2}...\sin^2\theta_{D-1}\\
&\vdots\\
h_{D-1}^2 &= r^2.
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Kemudian h adalah

$$\begin{aligned} h &= h_0 h_1 ... h_{D-1} \\ &= r^{D-1} \sin\theta_2 \sin^2\theta_3 \sin^3\theta_4 ... \sin^{D-2}\theta_{D-1}. \end{aligned} \quad \text{(B.5)}$$

Dari persamaan (B.3), suku pertama ∇_D^2 adalah

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial\theta_0}\frac{h}{h_0^2}\frac{\partial}{\partial\theta_0} \\ &= \frac{1}{r^{D-1}\sin\theta_2\sin^2\theta_3 ... \sin^{D-2}\theta_{D-1}}\frac{\partial}{\partial r}r^{D-1}\sin\theta_2 ... \sin^{D-2}\theta_{D-1}\frac{\partial}{\partial r} \\ &= \frac{1}{r^{D-1}}\frac{\partial}{\partial r}r^{D-1}\frac{\partial}{\partial r}. \end{aligned} \quad \text{(B.6)}$$

Sedangkan suku terakhir ∇_D^2 adalah

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial\theta_{D-1}}\frac{h}{h_{D-1}^2}\frac{\partial}{\partial\theta_{D-1}} \\ &= \frac{1}{r^{D-1}\sin\theta_2\sin^2\theta_3 ... \sin^{D-2}\theta_{D-1}}\frac{\partial}{\partial\theta_{D-1}}\frac{r^{D-1}\sin\theta_2 ... \sin^{D-2}\theta_{D-1}}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta_{D-1}} \\ &= \frac{1}{r^2\sin^{D-2}\theta_{D-1}}\frac{\partial}{\partial\theta_{D-1}}\sin^{D-2}\theta_{D-1}\frac{\partial}{\partial\theta_{D-1}}. \end{aligned} \quad \text{(B.7)}$$

Suku ∇_D^2 yang lain berbentuk

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\frac{h}{h_j^2}\frac{\partial}{\partial\theta_j} \\ &= \frac{1}{r^{D-1}\sin\theta_2 ... \sin^{j-1}\theta_j\sin^j\theta_{j+1} ... \sin^{D-2}\theta_{D-1}}\frac{\partial}{\partial\theta_j} \\ &\quad \frac{r^{D-1}\sin\theta_2 ... \sin^{j-1}\theta_j ... \sin^{D-2}\theta_{D-1}}{r^2\sin^2\theta_{j+1} ... \sin^2\theta_{D-1}}\frac{\partial}{\partial\theta_j} \\ &= \frac{1}{r^2\sin^2\theta_{j+1} ... \sin^2\theta_{D-1}}\left(\frac{1}{\sin^{j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\sin^{j-1}\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right). \end{aligned} \quad \text{(B.8)}$$

Dengan menggunakan persamaan (B.6)-(B.8), diperoleh wakilan persamaan (B.3) yang berupa

$$\begin{aligned}\nabla_D^2 &= \frac{1}{r^{D-1}}\frac{\partial}{\partial r}r^{D-1}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\sum_{j=1}^{D-2}\frac{1}{\sin^2\theta_{j+1}\ldots\sin^2\theta_{D-1}} \\ & \left(\frac{1}{\sin^{j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\sin^{j-1}\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right) \\ & +\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin^{D-2}\theta_{D-1}}\frac{\partial}{\partial\theta_{D-1}}\sin^{D-2}\theta_{D-1}\frac{\partial}{\partial\theta_{D-1}}\right), \end{aligned} \tag{B.9}$$

sehingga Laplasian ∇_D^2 mematuhi hubungan

$$\nabla_D^2 = \frac{1}{r_{D-1}}\frac{\partial}{\partial r}r^{D-1}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{L_{D-1}^2}{r^2}, \tag{B.10}$$

dengan

$$L_n^2 = \sum_{i,j} L_{i,j}L_{i,j},$$

$$i = 1, 2, \cdots, j-1, \qquad j = 2, \cdots, D,$$

dan bagian momentum sudut L_{ij} didefinisikan sebagai tensor setangkup yang berupa

$$L_{ij} = -L_{ji} = x_i p_j - x_j p_i,$$

$$i = 1, 2, ..., j-1, \qquad j = 2, ..., D.$$

Untuk membuktikan persamaan (B.10), pertama kali yang perlu diingat adalah p_k dapat diungkapkan sebagai

$$\begin{aligned} p_k = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_k} &= -i\hbar\sum_{r=0}^{D-1}\left(\frac{\partial\theta_r}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial\theta_r} \\ &= -i\hbar\sum_{r=0}^{D-1}\left(\frac{1}{h_r^2}\frac{\partial x_k}{\partial\theta_r}\right)\frac{\partial}{\partial\theta_r}, \end{aligned} \tag{B.11}$$

dengan menggunakan hubungan

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{D-1} \frac{\partial x_l}{\partial x_i}\frac{\partial x_l}{\partial \theta_r} &= \delta_{ir} h_i^2, \\ \sum_{l=0}^{D-1} \frac{\partial \theta_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_l}{\partial \theta_i} &= \delta_{kl}. \end{aligned} \tag{B.12}$$

Kemudian, hubungan komutasi menjadi (penjelasan lebih lengkap dapat dilihat pada LAMPIRAN C)

$$[L_{ij}, L_{kl}] = i\hbar\delta_{jl}L_{ik} + i\hbar\delta_{ik}L_{jl} - i\hbar\delta_{jk}L_{il} - i\hbar\delta_{il}L_{jk}. \tag{B.13}$$

Lebih lanjut, jika diatur

$$L_k^2 = \sum_{i,j} L_{ij}L_{ij},$$

$$i = 1, 2, ..., j-1; \qquad j = 2, 3, ..., k+1.$$

maka diperoleh (lihat LAMPIRAN C)

$$\begin{aligned} L_1^2 &= -\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} \\ L_2^2 &= -\left(\frac{1}{\sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\sin\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2} - \frac{L_1^2}{\sin^2\theta_2}\right) \\ &\vdots \\ L_k^2 &= -\left(\frac{1}{\sin^{k-1}\theta_k}\frac{\partial}{\partial\theta_k}\sin^{k-1}\theta_k\frac{\partial}{\partial\theta_k} - \frac{L_{k-1}^2}{\sin^2\theta_k}\right) \\ &\vdots \\ L_{D-1}^2 &= \left(\frac{1}{\sin^{D-2}\theta_{D-1}}\frac{\partial}{\partial\theta_{D-1}}\sin^{D-2}\theta_{D-1}\frac{\partial}{\partial\theta_{D-1}} - \frac{L_{D-2}^2}{\sin^2\theta_{D-1}}\right). \end{aligned} \tag{B.14}$$

Kemudian dari persamaan (B.9) diperoleh

$$\nabla_D^2 = \frac{1}{r^{D-1}}\frac{\partial}{\partial r}r^{D-1}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{L_{D-1}^2}{r^2}. \tag{B.15}$$

Dari persamaan (B.14) jelas bahwa karena $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{D-1}$ saling bebas, operator $L_1^2, L_2^2, \cdots, L_{D-1}^2$ saling rukun (*commute*). Oleh karena itu, operator-operator tersebut memiliki swafungsi yang sama, yaitu $Y(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{D-1})$ yang memenuhi persamaan

$$L_k^2 Y(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{D-1}) = \lambda_k Y(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{D-1}), \tag{B.16}$$

dengan λ_k adalah swanilai dari L_k^2. Karena fungsi potensial tidak bergantung pada t, $Y(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{D-1})$ dapat diungkapkan sebagai

$$Y(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{D-1}) = \prod_{k-1}^{D-1} \Theta_k(\theta_k). \tag{B.17}$$

Kemudian dari persamaaan (B.16) diperoleh

$$\frac{Y}{\Theta_1(\theta_1)} L_1^2 \Theta_1(\theta_1) = \lambda_1 Y,$$

dengan L_1^2 hanya bergantung pada θ_1. Hal ini juga dapat ditulis

$$L_1^2 \Theta_1(\theta_1) = \lambda_1 \Theta_1(\theta_1).$$

Hal yang sama juga berlaku untuk $L_2^2 Y = \lambda_2 Y$ sehingga diperoleh

$$L_2^2 \Theta_1(\theta_1)\Theta_2(\theta_2) = \lambda_2 \Theta_1(\theta_1)\Theta_2(\theta_2),$$

dengan L_2^2 hanya bergantung pada θ_1 dan θ_2.

Selanjutnya, dengan menggunakan bentuk eksplisit L_2^2 maka didapatkan

$$-\left[\frac{L_1^2}{\sin^2\theta_2} - \frac{1}{\sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right)\right]\Theta_1(\theta_1)\Theta_2(\theta_2) = \lambda_2\Theta_1(\theta_1)\Theta_2(\theta_2)$$

atau

$$\frac{\Theta_2(\theta_2)}{\sin^2\theta_2}L_1^2\Theta_1(\theta_1) - \frac{\Theta_1(\theta_1)}{\sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\sin\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\Theta_2(\theta_2) = \lambda_2\Theta_1(\theta_1)\Theta_2(\theta_2)$$

atau

$$\frac{\Theta_2(\theta_2)}{\sin^2\theta_2}\lambda_1\Theta_1(\theta_1) - \frac{\Theta_1(\theta_1)}{\sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\sin\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\Theta_2(\theta_2) = \lambda_2\Theta_1(\theta_1)\Theta_2(\theta_2)$$

atau

$$\frac{\lambda_1\Theta_2(\theta_2)}{\sin^2\theta_2} - \frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2}\Theta_2(\theta_2) - \cot\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\Theta_2(\theta_2) = \lambda_2\Theta_2(\theta_2)$$

sehingga

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2} + \cot\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2} - \frac{\lambda_1}{\sin^2\theta_2}\right)\Theta_2(\theta_2) = \lambda_2\Theta_2(\theta_2). \tag{B.18}$$

Dianggap

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_k^2} + (k-1)\cot\theta_k\frac{\partial}{\partial\theta_k} - \frac{\lambda_{k-1}}{\sin^2\theta_k}\right)\Theta_k(\theta_k) = \lambda_k\Theta_k(\theta_k). \tag{B.19}$$

Ditinjau kembali persamaan swanilai

$$L_{k+1}^2 Y = \lambda_{k+1}Y,$$

yang diperluas menjadi

$$-\left(\frac{1}{\sin^k\theta_{k+1}}\frac{\partial}{\partial\theta_{k+1}}\sin^k\theta_{k+1}\frac{\partial}{\partial\theta_{k+1}} - \frac{L_k^2}{\sin^2\theta_{k+1}}\right)Y = \lambda_{k+1}Y,$$

hal tersebut dapat juga dinyatakan sebagai

$$-\frac{Y}{\Theta_{k+1}(\theta_{k+1})}\frac{1}{\sin^k\theta_{k+1}}\frac{\partial}{\partial\theta_{k+1}}\sin^k\theta_{k+1}\frac{\partial}{\partial\theta_{k+1}}\Theta_{k+1}(\theta_{k+1})+\frac{\lambda_k Y}{\sin^2\theta_{k+1}}=\lambda_{k+1}Y$$

atau

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_{k+1}^2}+k\cot\theta_{k+1}\frac{\partial}{\partial\theta_{k+1}}-\frac{\lambda_k}{\sin^2\theta_{k+1}}\right)\Theta_{k+1}(\theta_{k+1})=\lambda_{k+1}\Theta_{k+1}(\theta_{k+1}).$$

Penjabaran di atas menunjukkan bahwa jika persaman (B.19) berlaku untuk k, maka persamaan ini juga berlaku untuk $k+1$. Telah ditunjukkan pula pada persamaan (B.18) bahwa hal ini digunakan pada kasus $k=2$. Oleh karena itu, dengan prinsip induksi persamaan (B.19) berlaku untuk $\forall k=2,3,\cdots,D-1$.

Selanjutnya ditinjau persamaan

$$L_k^2(\lambda_{k-1})=-\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_k^2}+(k-1)\cot\theta_k\frac{\partial}{\partial\theta_k}-\frac{\lambda_{k-1}}{\sin^2\theta_k}\right).$$

Kemudian diperoleh

$$L_1^2\Theta_1(\theta_1)=\lambda_1\Theta_1(\theta_1),$$

$$L_k^2(\lambda_{k-1})\Theta_k(\theta_k)=\lambda_k\Theta_k(\theta_k),\qquad k=2,3,\cdots,D-1. \tag{B.20}$$

Swanilai λ_k untuk $k=2$ adalah

$$\lambda_1=l_1^2,$$

$$\lambda_2=l_2(l_2+1),$$

dengan

$$l_2=0,1,2,\cdots,$$

$$l_1 = -l_2, -l_2 + 1, \cdots, l_2 - 1, l_2.$$

Kemudian diperoleh

$$\lambda_{k-1} = l_{k-1}(l_{k-1} + k - 2),$$

dengan l_{k-1} adalah bilangan bulat. Dengan mengatur

$$L_k^+(l_{k-1}) = \frac{\partial}{\partial \theta_k} - l_{k-1} \cot \theta_k,$$

$$L_k^-(l_{k-1}) = -\frac{\partial}{\partial \theta_k} - (l_{k-1} + k - 2) \cot \theta_k,$$

maka hal ini mengikuti induksi

$$\lambda_k = l_k(l_k + k - 1).$$

Akhirnya, dari persamaan (B.17) dan (B.20)

$$\begin{aligned} & L_{D-1}^2 Y_{l_{D-1}, l_{D-2}, \ldots, l_2, l_1} (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{D-1}) \\ &= l_{D-1} (l_{D-1+D-2}) Y_{l_{D-1}, l_{D-2}, \ldots, l_2, l_1} (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{D-1}), \end{aligned} \tag{B.21}$$

dengan $Y_{l_{D-1}, l_{D-2}, \ldots, l_2, l_1}$ adalah bentuk umum harmonik bola dan

$$\begin{aligned} l_{D-1} &= 0, 1, 2, \cdots, \\ l_{D-2} &= 0, 1, 2, \cdots, l_{D-1}, \\ &\vdots \\ l_1 &= -l_2, -l_2 + 1, \cdots, l_2 - 1, l_2. \end{aligned} \tag{B.22}$$

Dimasukkan ke persamaan (B.1)

$$\psi(r) = R(r)Y_{l_{D-1},l_{D-2},\ldots,l_1}(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{D-1})$$

dan menggunakan persamaan (B.15) dan (B.21), diamati bahwa bagian radial dari persamaan Schrödinger berupa

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{D-1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{l(l+D-2)}{r^2}\right]R(r) + V(r)R(r) = ER(r).$$

Untuk menghilangkan derivatif pertama, dilakukan substitusi yaitu

$$R(r) = r^{(1-N)/2}u(r),$$

sehingga persamaannya menjadi

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{\alpha_l}{r^2}u(r)\right] + V(r)u(r) = Eu(r),$$

dengan $\alpha_l = \frac{1}{4}(D-1)(D-3) + l(l+D-2)$.

LAMPIRAN C

PEMBUKTIAN PERSAMAAN (B.13) DAN (B.14)

Ditinjau suatu komponen momentum sudut yang didefinisikan sebagai berikut

$$L_{ij} = -L_{ji} = x_i p_j - x_j p_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, j-1, \quad j = 2, \cdots, D. \tag{C.1}$$

Hal tersebut dapat juga ditulis dalam bentuk

$$L_k^2 = \sum_{i,j} L_{ij} L_{ij}, \qquad i = 1, 2, \cdots, j-1, \quad j = 2, 3, \cdots, k+1.$$

Dalam lampiran ini, pertama akan dibuktikan kaitan komutasi momentum sudut yaitu persamaan (B.13) $(\hbar = 1)$ yang berupa

$$[L_{ij}, L_{kl}] = i\delta_{jl} L_{ik} + i\delta_{ik} L_{jl} - i\delta_{jk} L_{il} - i\delta_{il} L_{jk}. \tag{C.2}$$

Ditinjau suatu kaitan komutasi menurut

$$[x_i, p_j] = i\delta_{ij}$$

dan

$$[x_i, x_j] = 0 = [p_i, p_j],$$

sehingga ruas kanan persamaan (C.2) menjadi

$$\begin{aligned}
&= (x_j p_l - p_l x_j)(x_i p_k - x_k p_i) + (x_i p_k - p_k x_i)(x_j p_l - x_l p_j) \\
&\quad - (x_j p_k - p_k x_j)(x_i p_l - x_l p_i) - (x_i p_l - p_l x_i)(x_j p_k - x_k p_j) \\
&= x_j p_l x_i p_k - p_l x_j x_i p_k - x_j p_l x_k p_i + p_l x_j x_k p_i + x_i p_k x_j p_l
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -p_k x_i x_j p_l - x_i p_k x_l p_j + p_k x_i x_l p_j - x_j p_k x_i p_l + p_k x_j x_i p_l \\
& + x_j p_k x_l p_i - p_k x_j x_l p_i - x_i p_l x_j p_k + p_l x_i x_j p_k + x_i p_l x_k p_j - p_l x_i x_k p_j \\
= \; & x_j p_l \left(p_k x_i + i\delta_{ik}\right) + x_i p_k \left(p_l x_j + i\delta_{jl}\right) - x_j p_k \left(p_l x_i + i\delta_{il}\right) \\
& - x_i p_l \left(p_k x_j + i\delta_{jk}\right) - x_j p_l \left(p_i x_k + i\delta_{ik}\right) - x_i p_k \left(p_j x_l + i\delta_{jl}\right) \\
& + x_j p_k \left(p_i x_l + i\delta_{il}\right) + x_i p_l \left(p_j x_k + i\delta_{jk}\right) + p_l x_k \left(x_j p_i - p_j x_i\right) + p_k x_l \left(x_i p_j - x_j p_i\right) \\
= \; & x_j p_i \left(-p_l x_k + p_k x_l\right) - x_i p_j \left(-p_l x_k + p_k x_l\right) + \left(p_k x_l - p_l x_k\right) L_{ij} \\
& \qquad \text{[menggunakan definisi persamaan (C.1)]} \\
= \; & \left(x_j p_i - x_i p_j\right) \left(p_k x_l - p_l x_k\right) + \left(p_k x_l - p_l x_k\right) L_{ij} \\
= \; & L_{ji} \left(x_l p_k - x_k p_l\right) + \left(x_l p_k - x_k p_l\right) L_{ij} \\
= \; & L_{ij} L_{kl} - L_{kl} L_{ij} \\
= \; & \text{[ruas kiri persamaan (C.2)].}
\end{aligned} \tag{C.3}
$$

Selanjutnya diberikan hubungan menurut

$$
\begin{aligned}
L_i^2 f &= L_{12}^2 f \\
&= L_{12} L_{12} f \\
&= \left(x_1 p_2 - x_2 p_1\right) \left(x_1 p_2 - x_2 p_1\right) f \\
&= -\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) f
\end{aligned} \tag{C.4}
$$

untuk fungsi perubahan f sehingga

$$
\begin{aligned}
\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) f &= \sum_{j=0}^{D-1} \frac{1}{h_j^2} \left(x_1 \frac{\partial x_2}{\partial \theta_j} - x_2 \frac{\partial x_1}{\partial \theta_j}\right) \frac{\partial f}{\partial \theta_j} \\
&= \sum_{j=0}^{D-1} \frac{x_1^2}{h_j^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\frac{x_2}{x_1}\right) \right\} \frac{\partial f}{\partial \theta_j}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{D-1} \frac{x_1^2}{h_j^2}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\tan\theta_1\right)\frac{\partial f}{\partial\theta_j} \\
&= \frac{x_1^2}{h_1^2}\sec^2\theta_1\frac{\partial f}{\partial\theta_1} \\
&= \frac{r^2\cos^2\theta_1\sin^2\theta_2\cdots\sin^2\theta_{D-1}}{r^2\sin^2\theta_2\cdots\sin^2\theta_{D-1}}\sec^2\theta_1\frac{\partial f}{\partial\theta_1} \\
&= \frac{\partial f}{\partial\theta_1}. \qquad \text{(C.5)}
\end{aligned}
$$

Kemudian

$$L_1^2 = -\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}$$

dan

$$L_2^2 = \sum_{j=2,3}\sum_{i=1}^{j-1} L_{ij}L_{ij} = L_1^2 + L_{13}L_{13} + L_{23}L_{23}, \qquad \text{(C.6)}$$

dengan

$$L_{13}^2 f = \left(x_1p_3 - x_3p_1\right)^2 f = -\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 f, \qquad \text{(C.7)}$$

$$L_{23}^2 f = \left(x_2p_3 - x_3p_2\right)^2 f = -\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 f. \qquad \text{(C.8)}$$

Ditinjau

$$
\begin{aligned}
\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2}\right) f &= \sum_{j=0}^{D-1}\frac{1}{h_j^2}\left(x_2\frac{\partial x_3}{\partial\theta_j} - x_3\frac{\partial x_2}{\partial\theta_j}\right)\frac{\partial f}{\partial\theta_j} \\
&= \sum_{j=0}^{D-1}\frac{1}{h_j^2}x_2^2\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\frac{x_3}{x_2}\right)\frac{\partial f}{\partial\theta_j} \\
&= \sum_{j=0}^{D-1}\frac{x_2^2}{h_j^2}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\cot\theta_2\csc\theta_1\right)\frac{\partial f}{\partial\theta_j} \\
&= \frac{x_2^2}{h_1^2}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\cot\theta_2\csc\theta_1\right)\frac{\partial f}{\partial\theta_1} + \frac{x_2^2}{h_2^2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\cot\theta_2\csc\theta_1\right)\frac{\partial f}{\partial\theta_2} \\
&= -\frac{r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\cdots\sin^2\theta_{D-1}}{r^2\sin^2\theta_2\cdots\sin^2\theta_{D-1}}\cot\theta_2\csc\theta_1\cot\theta_1\frac{\partial f}{\partial\theta_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{r^2\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{D-1}}{r^2\sin^2\theta_3\cdots\sin^2\theta_{D-1}}\times\csc^2\theta_2\csc\theta_1\frac{\partial f}{\partial\theta_2} \\
= & -\cos\theta_1\cot\theta_2\frac{\partial f}{\partial\theta_1}-\sin\theta_1\frac{\partial f}{\partial\theta_2}. \qquad \text{(C.9)}
\end{aligned}
$$

Lalu

$$
\begin{aligned}
\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_3}-x_3\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 f &= \left(\cos\theta_1\cot\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_1}+\sin\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right) \\
&\quad \left(\cos\theta_1\cot\theta_2\frac{\partial f}{\partial\theta_1}+\sin\theta_1\frac{\partial f}{\partial\theta_2}\right) \\
&= -\sin\theta_1\cos\theta_1\cot^2\theta_2\frac{\partial f}{\partial\theta_1}+\cos^2\theta_1\cot^2\theta_2\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_1^2} \\
&\quad +\cos^2\theta_1\cot\theta_2\frac{\partial f}{\partial\theta_2}+\sin\theta_1\cos\theta_1\cot\theta_2\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_1\partial\theta_2} \\
&\quad -\sin\theta_1\cos\theta_1\csc^2\theta_2\frac{\partial f}{\partial\theta_1} \\
&\quad +\sin\theta_1\cos\theta_1\cot\theta_2\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_1\partial\theta_2}+\sin^2\theta_1\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_2^2}. \qquad \text{(C.10)}
\end{aligned}
$$

Selanjutnya

$$
\begin{aligned}
(x_1p_3-x_3p_1) &= \sum_{j=0}^{D-1}\frac{x_1^2}{h_j^2}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\frac{x_3}{x_1}\right)\frac{\partial f}{\partial\theta_j} \\
&= \frac{x_1^2}{h_1^2}\frac{\partial f}{\partial\theta_1}\cot\theta_2\sec\theta_1\tan\theta_1+\frac{x_1^2}{h_2^2}\frac{\partial f}{\partial\theta_2}\left(-\csc^2\theta_2\right)\sec\theta_1 \\
&= \frac{r^2\cos^2\theta_1\sin^2\theta_2\cdots\sin^2\theta_{D-1}}{r^2\sin^2\theta_2\cdots\sin^2\theta_{D-1}}\cot\theta_2\sec\theta_1\tan\theta_1\frac{\partial f}{\partial\theta_1} \\
&\quad -\frac{r^2\cos^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3\cdots\sin^2\theta_{D-1}}{r^2\sin^2\theta_3\cdots\sin^2\theta_{D-1}}\csc^2\theta_2\sec\theta_1\frac{\partial f}{\partial\theta_2} \\
&= \sin\theta_1\cot\theta_2\frac{\partial f}{\partial\theta_1}-\cos\theta_1\frac{\partial f}{\partial\theta_2} \\
(x_1p_3-x_3p_1)^2 f &= \left(\sin\theta_1\cot\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_1}-\cos\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right) \\
&\quad \left(\sin\theta_1\cot\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_1}-\cos\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right) f
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sin\theta_1\cos\theta_1\cot^2\theta_2\frac{\partial f}{\partial\theta_1} + \sin^2\theta_1\cot^2\theta_2\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_1^2} \\
&\quad + \sin\theta_1\cos\theta_1\csc^2\theta_2\frac{\partial f}{\partial\theta_1} - \cos\theta_1\sin\theta_1\cot\theta_2\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_1\partial\theta_2} \\
&\quad + \sin^2\theta_1\cot\theta_2\frac{\partial f}{\partial\theta_2} - \sin\theta_1\cos\theta_1\cot\theta_2\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_1\partial\theta_2} \\
&\quad + \cos^2\theta_1\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_2^2}. \qquad \text{(C.11)}
\end{aligned}
$$

Dengan menambahkan persamaan (C.10) dan (C.11) maka diperoleh

$$
L_{13}^2 f + L_{23}^2 f = -\left(\cot^2\theta_2\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_1^2} + \cot\theta_2\frac{\partial f}{\partial\theta_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial\theta_2^2}\right),
$$

dan digunakan juga persamaan (C.7) dan (C.8). Kemudian dari persamaan (C.6) dihasilkan

$$
\begin{aligned}
L_2^2 f &= -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_1^2} + \cot^2\theta_2\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_1^2} + \cot\theta_2\frac{\partial f}{\partial\theta_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial\theta_2^2}\right) \\
&= -\left(\csc^2\theta_2\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_1^2} + \cot\theta_2\frac{\partial f}{\partial\theta_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial\theta_2^2}\right) \\
&= -\left[\frac{1}{\sin^2\theta_2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_1^2} + \frac{1}{\sin\theta_2}\left(\cos\theta_2\frac{\partial f}{\partial\theta_2} + \sin\theta_2\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_2^2}\right)\right] \\
&= -\left[\frac{1}{\sin^2\theta_2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_1^2} + \frac{1}{\sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin\theta_2\frac{\partial f}{\partial\theta_2}\right)\right] \\
&= -\left[-\frac{L_1^2 f}{\sin^2\theta_2} + \frac{1}{\sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin\theta_2\frac{\partial f}{\partial\theta_2}\right)\right]. \qquad \text{(C.12)}
\end{aligned}
$$

Secara umum dinyatakan

$$
L_k^2 = -\left[\frac{1}{\sin^{k-1}\theta_k}\frac{\partial}{\partial\theta_k}\sin^{k-1}\theta_k\frac{\partial}{\partial\theta_k} - \frac{L_{k-1}^2}{\sin^2\theta_k}\right].
$$