

BILANGAN BENTUK PANGKAT, AKAR, DAN LOGARITMA

A. Bilangan Bentuk Pangkat

1. Pengertian bilangan bentuk pangkat

Jika  $n$  adalah sebuah bilangan bulat positif dan  $a$  adalah bilangan real, maka  $a^n$  didefinisikan sebagai perkalian  $n$  faktor yang masing-masing faktornya ialah  $a$ .

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ faktor}}$$

(dibaca:  $a$  berpangkat  $n$ )

dengan:  
 $a^n$  disebut bilangan berpangkat  
 $a$  disebut bilangan pokok  
 $n$  disebut pangkat atau eksponen

Latihan 1:  
Tentukanlah penjabaran dan nilai dari:

1.  $2^3 = \dots x \dots x \dots = \dots$
2.  $(-3)^4 = \dots$
3.  $-3^4 = \dots$

2. Sifat-sifat operasi hitung bilangan bentuk pangkat

Jika  $a, b, p, q, m$ , dan  $n$  bilangan real, maka berlaku sifat-sifat dan operasi bilangan:

- a.  $a^m \times a^n = a^{m+n}, a \neq 0$
- b.  $b^m : b^n = b^{m-n}, b \neq 0$
- c.  $(p^m)^n = p^{m \times n}, p \neq 0$
- d.  $(p \times q)^n = p^n \times q^n, p, q \neq 0$
- e.  $\left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{p^n}{q^n}, p, q \neq 0$
- f.  $b^0 = 1$
- g.  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$

Latihan 2:  
Bentuk sederhana dari:

1.  $10^3 \times 10^4 = 10^{\dots + \dots} = 10^{\dots}$
2.  $15^5 : 15^2 = \dots$
3.  $(2^3)^2 = \dots$
4.  $(-3x^2y)^2 = \dots$
5.  $\left(25\frac{1}{2}\right)^3 = \dots$
6.  $(-3)^0 = \dots$
7.  $15 - (3^{-2}) = \dots$
8.  $2a^2x3a^3 = \dots$

3. Penyederhanaan aljabar bentuk pangkat

Contoh:

$$\frac{(2x^2y)^3}{(3xy^2)^2} = \frac{2^3(x^2)^3y^3}{3^2x^2(y^2)^2}$$

$$= \frac{8x^6y^3}{9x^2y^4}$$

$$= \frac{8x^4}{9y}$$

Latihan 3:  
Bentuk sederhana dari:

1.  $\frac{9ab^6c^{12}}{12abc^{10}} = \dots$
2.  $(-3p^2q^3)^5 = \dots$
3.  $\frac{(2x^4)^2}{y^7} : \frac{(x^2)^{-3}}{yb} = \dots$

4. Penyelesaian persamaan bilangan bentuk pangkat  
Contoh:

$$\begin{aligned} 2^{2x+4} &= 4^{2x-2} \\ 2^{2x+4} &= (2^2)^{2x-2} \\ 2^{2x+4} &= 2^{4x-4} \\ 2x+4 &= 4x-4 \\ 2x-4x &= -4-4 \\ -2x &= -8 \\ x &= \frac{-8}{-2} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Latihan 4:  
Nilai x yang memenuhi persamaan berikut adalah:

1.  $27^{2x+3} = 9^{x-2}$
2.  $4^{2x-3} = 8^{2x-2}$
3.  $25^{x+4} = 5^{x-3}$
4.  $16^{2x+3} = 32^{x-2}$
5.  $144^{2x+3} = 12^{x-2}$

B. Bilangan Bentuk Akar  
1. Pengertian Bilangan Bentuk Akar

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad \text{dan} \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Latihan 5:  
Ubahlah menjadi bilangan bentuk akar:

1.  $p^{\frac{2}{3}} = \dots$
2.  $5x^{\frac{3}{2}} = \dots$
3.  $(2y)^{\frac{1}{3}} = \dots$

2. Sifat-sifat Operasi Hitung Bilangan Bentuk Akar  
Setiap bilangan real a dan b dan bilangan bulat m dan n, untuk  $\sqrt[n]{a}$  dan  $\sqrt[n]{b}$  bilangan real berlaku sifat:  
a.  $(\sqrt[n]{a})^n = \begin{cases} |a|, & \text{jika } n \text{ genap} \\ a, & \text{jika } n \text{ ganjil} \end{cases}$   
b.  $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$   
c.  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$   
d.  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \times n]{a}$

Latihan 6:

Selesaikanlah bentuk akar berikut ini!

1.  $\left(\sqrt[3]{23}\right)^3 = \dots$
2.  $\sqrt{21} \times \sqrt{15} = \dots$
3.  $\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \dots$
4.  $\sqrt[3]{\sqrt{15625}} = \dots$
5.  $\left(\sqrt{25} \times \sqrt{25}\right) + \left(\sqrt[3]{64}\right)^3 = \dots$

### 3. Operasi Bilangan Bentuk Akar

Jika a dan b bilangan rasional positif, maka berlaku operasi:

- a.  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{b} + \sqrt{a}$
- b.  $x\sqrt{a} + y\sqrt{a} = (x + y) \times \sqrt{a}$
- c.  $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$
- d.  $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
- e.  $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = a \times b$

Latihan 7:

Sederhanakanlah!

1.  $3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = \dots$
2.  $\sqrt{127} \times \sqrt{127} = \dots$
3.  $\sqrt{21} \times \sqrt{19} = \dots$
4.  $\left(\sqrt{19} \times \sqrt{17}\right)^2 = \dots$
5.  $2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 5\sqrt{3} = \dots$

### 4. Penyederhanaan Bilangan Bentuk Akar

Contoh:

$$\begin{aligned}\sqrt{27} &= \sqrt{9 \times 3} \\ &= \sqrt{9} \times \sqrt{3} \\ &= 3\sqrt{3}\end{aligned}$$

Latihan 8:

Bentuk sederhana dari:

1.  $\sqrt{72} - \sqrt{98} + \sqrt{32} - \sqrt{50} = \dots$
2.  $2\sqrt{8} + \sqrt{18} + \frac{1}{4}\sqrt{32} + \sqrt{200} = \dots$

### 5. Perasionalan Penyebut Pecahan

Jika a, b, p, q, dan k bilangan rasional, maka:

- a.  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a \times b}}{b}$
- b.  $\frac{k}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{k}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{k \times (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$
- c.  $\frac{k}{a\sqrt{b}} = \frac{k}{a\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{k \times \sqrt{b}}{a \times b}$
- d.  $\frac{a - \sqrt{b}}{p + \sqrt{q}} = \frac{a - \sqrt{b}}{p + \sqrt{q}} \times \frac{p - \sqrt{q}}{p - \sqrt{q}}$

$$\begin{aligned}
 \frac{a - \sqrt{b}}{p + \sqrt{q}} &= \frac{(a - \sqrt{b}) \times (p - \sqrt{q})}{(p + \sqrt{q}) \times (p - \sqrt{q})} \\
 &= \frac{(a \times p) - (a \times \sqrt{q}) - (p \times \sqrt{b}) + (\sqrt{b} \times \sqrt{q})}{p^2 - p\sqrt{q} + p\sqrt{q} - q} \\
 &= \frac{(a \times p) - (a \sqrt{q}) - (p \sqrt{b}) + (\sqrt{b} \times q)}{p^2 - q}
 \end{aligned}$$

Latihan 9:

Bentuk sederhana dari:

1.  $\frac{2}{3\sqrt{3}} = \dots$

2.  $\frac{5}{\sqrt{7} + \sqrt{22}} = \dots$

3.  $\frac{9 + \sqrt{11}}{7 - \sqrt{12}} = \dots$

4.  $\frac{\sqrt{11} - 7}{\sqrt{15} + 2} = \dots$

5.  $\frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b} - \sqrt{a+b}} = \dots$

#### 6. Penyelesaian Bentuk Akar Khusus

Penyelesaian bentuk akar dapat diselesaikan dengan cara mengkuadratkan kedua ruas.

Contoh:

Penyelesaian dari  $\sqrt{9 + 2\sqrt{14}}$  adalah ....

Jawab:

Misalkan:  $\sqrt{9 + 2\sqrt{14}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

Jika kedua ruas dikuadratkan, diperoleh:

$$\begin{aligned}
 9 + 2\sqrt{14} &= (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \\
 &= x + 2\sqrt{xy} + y \\
 9 + 2\sqrt{14} &= (x + y) + 2\sqrt{xy}
 \end{aligned}$$

Sehingga:  $x + y = 9$   
 $y = 9 - x \dots (1)$   
 dan

$$\begin{aligned}
 2\sqrt{xy} &= 2\sqrt{14} \\
 \sqrt{xy} &= \sqrt{14} \\
 xy &= 14 \dots (2)
 \end{aligned}$$

Substitusikan (1) ke (2):

$$\begin{aligned}
 xy &= 14 \\
 x(9 - x) &= 14 \\
 9x - x^2 &= 14 \\
 x^2 - 9x + 14 &= 0 \\
 (x - 2)(x - 7) &= 0 \\
 x - 2 = 0 \vee x - 7 = 0 \\
 x_1 = 2 \quad x_2 = 7
 \end{aligned}$$

Untuk  $x_1 = 2$ , maka  $y_1 = 7$

Untuk  $x_2 = 7$ , maka  $y_2 = 2$

Jadi  $\sqrt{9 + 2\sqrt{14}} = \sqrt{7} + \sqrt{2}$

Latihan 10:

Tentukanlah nilai dari:

1.  $\sqrt{10+2\sqrt{21}} = \dots$
2.  $\sqrt{12-2\sqrt{11}} = \dots$
3.  $\sqrt{32-10\sqrt{7}} = \dots$
4.  $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}\dots}} = \dots$
5.  $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\dots}}} = \dots$

7. Penyelesaian Persamaan Bentuk Akar

Nilai  $x$  yang memenuhi persamaan  $(\sqrt{8})^{x+2} = (\sqrt{16})^{x-1}$  adalah ....

Jawab:

$$\begin{aligned}(\sqrt{4})^{x+2} &= (\sqrt{16})^{x+2} \\(\sqrt{2^2})^{x+2} &= (\sqrt{2^4})^{x+2} \\ \left(2^{\frac{2}{2}}\right)^{x+2} &= \left(2^{\frac{4}{2}}\right)^{x+2} \\ 2^{x+2} &= (2^2)^{x+2} \\ 2^{x+2} &= 2^{2x+4} \\ x+2 &= 2x+4 \\ x &= -2\end{aligned}$$

Latihan 11:

Tentukan nilai  $x$  yang memenuhi persamaan berikut:

1.  $(\sqrt{4})^{x+2} = (\sqrt{8})^{x-1}$  4.
2.  $(\sqrt{8})^{x+2} = (\sqrt{2})^{x-1}$  5.
3.  $(\sqrt{9})^{2x-1} = (\sqrt{27})^{2x+1}$
4.  $(\sqrt{4})^{x-2} = (\sqrt{16})^{x-1}$
5.  $(\sqrt{25})^{x+2} = (\sqrt{125})^{2x-1}$

C. Logaritma

1. Konsep Dasar Logaritma

$${}^a\log b = x$$

jika dan hanya jika  $a^x = b$

dengan:

$a$  adalah bilangan pokok

$b$  adalah bilangan yang dilogaritmakan (*numerus*)

$x$  adalah bilangan hasil logaritma

Latihan 12:

1. Tentukanlah nilai  $x$ , jika  ${}^3\log 27 = x$  !
2. Tentukanlah nilai  $y$ , jika  ${}^5\log y = 3$  !
3. Tentukanlah nilai  $p$ , jika  ${}^p\log 32 = 5$  !

2. Sifat-sifat Operasi Hitung Logaritma

a.  ${}^n\log (a \times b) = {}^n\log a + {}^n\log b$

b.  $\frac{{}^n\log a}{{}^n\log b} = {}^n\log a - {}^n\log b$

c.  ${}^n\log a^p = p \times {}^n\log a$

d.  ${}^a\log b \times {}^b\log c = {}^a\log c$

- e.  $a^{\log b} = b$
- f.  ${}^a \log b = \frac{\log b}{\log a}$
- g.  ${}^a \log a = 1$

Latihan 13:

Bentuk sederhana dari:

1.  ${}^2 \log 21 = \dots$
2.  $\frac{{}^3 \log 22}{{}^3 \log 7} = \dots$
3.  ${}^2 \log 3 + {}^2 \log 6 - {}^2 \log 4 = \dots$

3. Penentuan nilai logaritma sesuai dengan sifat-sifat operasi hitung logaritma

Contoh:

Jika  ${}^2 \log 3 = a$  dan  ${}^3 \log 5 = b$ , tentukan  ${}^{15} \log 45$  !

Jawab:

$$\begin{aligned}
 {}^{15} \log 45 &= \frac{{}^3 \log 45}{{}^3 \log 15} \\
 &= \frac{{}^3 \log (9 \times 5)}{{}^3 \log (5 \times 3)} \\
 &= \frac{{}^3 \log 9 + {}^3 \log 5}{{}^3 \log 5 + {}^3 \log 3} \\
 &= \frac{{}^3 \log 3^2 + b}{b + 1} \\
 &= \frac{2 \times {}^3 \log 3 + b}{b + 1} \\
 &= \frac{2 + b}{b + 1}
 \end{aligned}$$

Latihan 14:

Penyelesaian dari:

1. Jika  ${}^2 \log 3 = x$  dan  ${}^3 \log 5 = y$ , tentukanlah nilai  ${}^6 \log 15$  !
2. Jika  $\log 2 = a$  dan  $\log 3 = b$ , tentukanlah nilai  ${}^5 \log 6$  !

4. Menyelesaikan persamaan logaritma

Contoh:

Tentukanlah nilai  $x$  yang memenuhi  ${}^2 \log (2x + 4) = 1$

Jawab:

$$\begin{aligned}
 {}^2 \log (2x + 4) &= 1 \\
 {}^2 \log (2x + 4) &= {}^2 \log 2 \\
 2x + 4 &= 2 \\
 2x &= -2 \\
 x &= -1
 \end{aligned}$$

Latihan 15:

Tentukanlah nilai  $x$  yang memenuhi  ${}^3 \log (x + 1) = 2$  !

Uji Kompetensi 1:

1. Bentuk sederhana dari  $\frac{9ab^6c^{12}}{12abc^{10}}$  adalah ....
    - a.  $3a^2b^7c^{22}$
    - b.  $\frac{3b^7c^{22}}{6}$
    - c.  $\frac{3b^5c^2}{4}$
    - d.  $\frac{a^2b^7c^{22}}{6}$
    - e.  $\frac{3b^5c^2}{2}$
  2. Bentuk sederhana dari  $(-3p^2q^3)^5$  adalah ....
    - a.  $p^{10}q^{15}$
    - b.  $-243p^7q^8$
    - c.  $243p^7q^8$
    - d.  $243p^{10}q^{15}$
    - e.  $-243p^{10}q^{15}$
  3. Bentuk sederhana dari  $\frac{(2x^4)^2}{y^7} : \frac{(x^2)^{-3}}{yb}$  adalah ....
    - a.  $8x^{-14}y^{-6}$
    - b.  $8x^2y^6$
    - c.  $8x^{14}y^{-6}$
    - d.  $8x^{14}y^6$
    - e.  $8x^{-14}y^6$
  4. Bentuk sederhana dari  $6\sqrt{27} - 3\sqrt{12} + 5\sqrt{48}$  adalah ....
    - a.  $-8\sqrt{3}$
    - b.  $-32\sqrt{3}$
    - c.  $32\sqrt{3}$
    - d.  $8\sqrt{3}$
    - e.  $8\sqrt{5}$
  5. Hasil kali dari  $(\sqrt{5} + \sqrt{11})(3\sqrt{5} - 7\sqrt{11})$  adalah ....
    - a.  $-62 - 4\sqrt{55}$
    - b.  $-62 + 4\sqrt{55}$
    - c.  $-62 + 10\sqrt{55}$
    - d.  $62 - 4\sqrt{55}$
    - e.  $62 + 10\sqrt{55}$
  6. Bentuk sederhana dari  $\frac{8}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$  adalah ....
    - a.  $2\sqrt{7} + \sqrt{3}$
    - b.  $2\sqrt{7} + 2\sqrt{3}$
    - c.  $2\sqrt{7} - \sqrt{3}$
    - d.  $2\sqrt{7} - 2\sqrt{3}$
    - e.  $\sqrt{7} + \sqrt{3}$
  7. Bentuk sederhana dari  $\sqrt{4 + \sqrt{12}}$  adalah ....
    - a.  $-\sqrt{3} + \sqrt{1}$
    - b.  $-\sqrt{3} - \sqrt{1}$
    - c.  $\sqrt{3} - 1$
    - d.  $\sqrt{3} + 1$
    - e.  $\sqrt{3} + 2$
  8. Jika  ${}^7\log 1 = x$ , maka nilai  $x$  yang memenuhi adalah ....
    - a. 0
    - b. 1
    - c. 2
    - d. 3
    - e. 4
  9. Nilai dari  ${}^5\log 150 - {}^5\log 24 + {}^5\log 4$  adalah ....
    - a. 1
    - b. 2
    - c. 3
    - d. 4
    - e. 5
  10. Jika  ${}^2\log 3 = p$  dan  ${}^2\log 5 = q$ , maka  ${}^2\log 225$  adalah ....
    - a.  $2(p + q)$
    - b.  $(p + q)$
    - c.  $2pq$
    - d.  $4pq$
    - e.  $2p + q$
- Uraian:
1. Bentuk sederhana dari  $\frac{(2xy)^3}{3p^2q} : \frac{4xy^3}{15pq^2}$  adalah ....
  2. Jika  $27^{2x+3} = 9^{x-2}$ , maka nilai  $x$  yang memenuhi adalah ....
  3. Bentuk sederhana dari  $\sqrt{75} + \sqrt{32} - \sqrt{12} - \sqrt{18}$  adalah ....
  4. Nilai dari  $\log 32 - \log 2 + \log 5 - \log 8 + \log 1$  adalah ....
  5. Jika  ${}^3\log 4 = x$  dan  ${}^4\log 5 = y$ , maka  ${}^{12}\log 15$  adalah ....