South East Asian Conference on Mathematics and Its Applications 2010
Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya
SEACMA 2010

PENGGUNAAN IMAGE METHOD PADA PENENTUAN HARGA OPSI SAHAM KARYAWAN MODEL VERR

Rudianto Artiono

Jurusan Matematika, Universitas Negeri Surabaya
Jl. Raya Ketintang Surabaya, Kampus UNESA Ketintang, Surabaya 60231 – Indonesia

e-mail : rudianto_82@yahoo.com

Abstrak. *Opsi Saham Karyawan merupakan opsi yang memberikan hak kepada karyawan untuk membeli sebagian saham perusahaan dalam suatu periode tertentu di masa mendatang dengan harga tertentu yang telah disepakati pada saat opsi tersebut diberikan. Penentuan harga opsi saham karyawan dilakukan dengan menggunakan langkah-langkah sebagai berikut: 1) mencari bentuk PDP dari OSK model VERR menggunakan prinsip martingale, 2) mentransformasi bentuk PDP yang diperoleh menjadi persamaan difusi menggunakan metode image, dan 3) menyelesaikan persamaan difusi menggunakan transformasi fourier. Pada makalah ini akan dibahas tentang penggunaan image method untuk mentransformasi PDP harga opsi saham karyawan menjadi persamaan difusi.*

Kata Kunci*: Image Method, Persamaan Diferensial Parsial, Opsi Saham Karyawan*

1. Pendahuluan

Beberapa tahun belakngan ini, perusahaan-perusahaan di Indonesia mulai mengembangkan sistem pemberian kompensasi pada karyawannya. Kompensasi yang diberikan tidak hanya berupa kompensasi tunai seperti pemberian gaji dan bonus, tetapi dikembangkan pula kompensasi non tunai seperti pengikutsertaan dalam program pensiun, pengikutsertaan program asuransi dan pemberian opsi saham karyawan.

Pemberian opsi saham karyawan (OSK) memberikan hak kepada karyawan untuk membeli sebagian saham perusahaan dalam suatu periode tertentu di masa mendatang dengan harga yang telah ditentukan pada saat opsi tersebut diberikan. Dengan adanya pemberian OSK, diharapkan karyawan dapat menumbuhkan rasa memiliki terhadap perusahaan sehingga secara tidak langsung dapat menumbuhkan rasa tanggung jawab sekaligus semangat kerja pada karyawan untuk turut serta memajukan perusahaan.

Pemberian OSK sangat bergantung pada kepentingan perusahaan dan perilaku karyawan dalam perusahaan tersebut, hal ini mengakibatkan penentuan harga OSK sedikit berbeda dengan penentuan harga opsi pada umumnya. Dalam penentuan harga OSK terdapat fitur-fitur yang dapat mengakomodasi kepentingan perusahaan dan kepentingan karyawan seperti misalnya fitur *vesting period* (masa menunggu). Fitur ini dapat digunakan oleh perusahaan untuk menahan karyawannya agar tetap bekerja di perusahaan sampai dengan jangka waktu tertentu. Selain itu, masih terdapat pula beberapa fitur lain yang dapat digunakan oleh perusahaan.

Pada makalah ini, fitur-fitur yang digunakan adalah: 1) *Vesting period*, penerima OSK dapat melakukan *exercise* setelah melewati periode waktu tertentu, 2) *Exit rate*, penentuan harga OSK memperhatikan kemungkinan karyawan yang menerima OSK keluar dari perusahaan baik secara sukarela maupun karena PHK, 3) *Reload*, penerima OSK yang telah melakukan *exercise* terhadap opsinya, dapat menerima OSK yang baru dengan proporsi tertentu, dan 4) *Reset*, OSK yang telah melewati masa tunggu namun tidak dilakukan *excercise* karena dalam keadaan *out of the money* maka dapat dilakukan pengaturan kembali tentang kesepakatan yang ada dalam kontrak OSK.

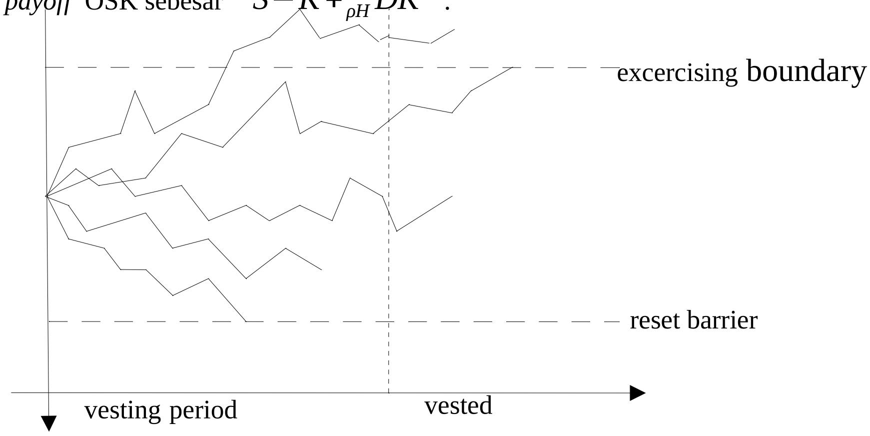
2. Pembahasan

2.1 Penentuan Harga Opsi Saham Karyawan

Pada penentuan harga OSK, waktu yang digunakan dibedakan menjadi 2 daerah waktu yaitu harga OSK pada saat *vesting period* dan harga OSK setelah *vesting* period. Pada saat *vesting period*, harga OSK dinotasikan dengan $V(S,t;K)$, dengan *S* adalah harga saham, *t* waktu pada saat *vesting period*, dan *K strike price*. Setelah *vesting period*, harga OSK dinotasikan dengan *C*(*S;K*). Harga OSK setelah *vesting period* tidak bergantung oleh waktu artinya pemilik opsi dapat melakukan *exercise* kapanpun pemilik opsi mengingkan untuk melakukan *exercise*. Perlu diperhatikan pula bahwa *strike price* dari opsi dapat berubah setelah melewati masa *resetting* dan *reloading*.

Setelah *vesting period*, penerima OSK mempunyai kesempatan untuk memutuskan kapan saat yang tepat untuk melakukan *excercise* sehingga akan diperoleh harga opsi yang optimal. Menurut Karatzas dan Wang (2000), Strategi optimal dalam melakukan *excercise* adalah ketika harga saham *S* telah mencapai level tertentu.

Pada gambar 1 diperlihatkan *payoff* OSK berdasarkan 5 kemungkinan pergerakan harga saham. Pada saat awal diberikan, harga OSK sebesar *DK*. Kemungkinan pertama, jika harga saham menyentuh *reset barrier*, dengan adanya fitur *reset* mengakibatkan *payoff* OSK sebesar $\rho_L DlK$. Kemungkinan kedua, jika terjadi *employment shock* sebelum *vesting period* mengakibatkan karyawan keluar dari perusahaan, maka *payoff* OSK sebesar 0 (hangus). Kemungkinan ketiga, jika dilakukan *excercise* dengan segera disebabkan karena adanya *employment shock* setelah *vesting period* namun belum mencapai *exercise boundary* yang diharapkan maka *payoff* OSK sebesar $max(S-K,0)$. Kemungkinan keempat, jika dilakukan *excercise* ketika harga saham mencapai *excercise boundary* dan telah melewati *vesting period* atau kemungkinan kelima dilakukan *excercise* dengan segera setelah opsi melewati *vesting period* dan harga saham telah berada di atas *exercise boundary*. Kemungkinan keempat dan kelima memberikan *payoff* OSK sebesar $S-K+\rho_H DK$.



Gambar 1: Diagram payoff dari OSK

Selanjutnya dari *payoff* yang telah diperoleh, akan ditentukan harga OSK pada saat awal opsi tersebut diberikan. Penentuan harga OSK pada saat *vesting period* bergantung pada harga OSK yang diperoleh pada saat melakukan penentuan harga OSK setelah *vesting period*.

Dengan menggunakan metode martingale, diperoleh persamaan diferensial parsial untuk harga OSK pada saat *vesting period* dan setelah *vesting period*. Setelah itu akan dicari solusi dari masing-masing persamaan diferensial parsial

2.2 Persamaan Diferensial Parsial untuk Harga Opsi Saham Karyawan

Penentuan harga OSK setelah *vesting period* sama seperti penentuan harga opsi *American perpetual* dengan tambahan *lower barrier* untuk *reset*. Harga OSK pada saat $S \geq hK$, memberikan *payoff* yang didalamnya disertakan pula *reload option* yang baru yaitu:

$$C(S,K)=S-K+\rho_H DK \quad (1)$$

Harga OSK pada saat $S=lK$ yaitu ketika harga saham menyentuh *barrier*, maka OSK akan digantikan dengan ρ_L *reset option* yang baru yaitu:

$$C(lK;K)=\rho_L DlK \quad (2)$$

Harga OSK pada saat $lK<S<hK$ diperoleh dari penurunan ekspektasi *payoff* harga OSK secara umum:

$$C(t,S;K)=E_{t,S}\left[e^{-r(\tau_s-t)}\left[S(\tau_s)-K\right]^+\right]$$

τ_s adalah *stopping time*

Untuk mendapatkan bentuk persamaan diferensial dari ekspektasi $C(t,S;K)$ maka digunakan *Discounted Feynman Kac Theorem*. Berikut ini merupakan persamaan diferensial parsial untuk harga opsi saham karyawan setelah *vesting* period adalah

$$(r-q)S\frac{\partial C}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}-rC=\frac{\partial C}{\partial T}\,(4)$$

selanjutnya *stopping time* untuk OSK setelah *vesting period* ada 2 kemungkinan yaitu disebabkan karena *employment shock* atau disebabkan karena harga saham telah menyentuh level batas yang diinginkan. Sehingga harga OSK dapat pula dinyatakan sebagai berikut:

$$C(t,S;K)=E_{t,S}\left[e^{-r(\tau_\lambda\wedge\tau_B-t)}\left[S(\tau_\lambda\wedge\tau_B)-K\right]^+\right]$$

τ_λ adalah *stopping time* karena *employment shock*

τ_B adalah *stopping time* karena telah mencapai level batas yang diinginkan

$\tau_\lambda\wedge\tau_B$ adalah waktu minimal antara τ_λ dan τ_B

waktu terjadinya *employment shock* mengikuti proses poisson berdistribusi eksponensial sehingga peluang terjadinya adalah sebagai berikut:

$$P(\tau_\lambda\in dt)=\lambda e^{-\lambda t}\,dt$$

harga OSK yang dipengaruhi oleh *employment shock* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$C_p(S;K)=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}C(t,S;K)\,dt$$

karena harga opsi $C(t,S;K)$ memenuhi persamaan (4) maka $C_p(S;K)$ dapat diperoleh dengan cara mengintegralkan persamaan (4) di kedua ruas. Diperoleh hasil pengintegralan adalah

$$\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}+(r-q)S\frac{\partial C}{\partial S}-(r+\lambda)C+\lambda\max(S-K,0)=0\,(6)$$

harga OSK setelah *vesting period* memenuhi persamaan diferensial (6). Dalam perhitungan selanjutnya mencari solusi persamaan diferensial tersebut harga OSK $C_p(S,K)$ yang dinotasikan dengan $C(S,K)$

Penentuan harga OSK pada saat *vesting period* sama seperti penentuan harga *European option* dengan harga opsi bergantung ke harga OSK setelah *vesting period* yaitu pada saat akhir *vesting period*

$$V(S,T;K)=C(S,K)\,(7)$$

Pada saat mencapai *barrier* $S=lK$ maka opsi digantikan oleh ρ_L *reload option* yang baru

$$V(lK,t;K)=\rho_L DlK \qquad 0\le t<T\,(8)$$

Harga OSK pada saat $S>lK\,dan\,0\le t<T$ diperoleh dari penurunan ekspektasi harga OSK setelah *vesting period* tepat pada saat *vesting period* berakhir yaitu pada saat *T*. Misal $V(t,S;K)$ menyatakan harga OSK pada saat *vesting period*. Harga OSK pada saat *vesting period* didefinisikan sebagai berikut:

$$+\text{¿}\,1_{(\tau_\lambda > T)}$$
$$e^{-r(T-t)}\left[S(T)-K\right]^{\text{¿}}$$
$$\text{¿}$$
$$V(t,S;K)=E_{t,S}\,\text{¿}$$

Jika pada saat *vesting period* terjadi *employment shock* yang mengakibatkan karyawan meninggalkan perusahaan maka OSK dinyatakan hangus. Sedangkan, jika pada saat *vesting period* tidak terjadi *employment shock* maka harga OSK yang dipengaruhi oleh *exit rate* yang mengikuti proses poisson dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$+\text{¿}$$
$$e^{-(\lambda+r)(T-t)}\left[S(T)-K\right]^{\text{¿}}$$
$$\text{¿}$$
$$V(t,S;K)=E_{t,S}\,\text{¿}$$

Untuk mendapatkan bentuk persamaan diferensial dari ekspektasi $V(t,S;K)$ digunakan cara yang sama seperti di atas sehingga diperoleh bentuk persamaan sebagai berikut:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+(r-q)S\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}-(\lambda+r)V=0 \quad (11)$$

Persamaan diferensial yang diperoleh sama seperti persamaan diferensial standar *Black Scholes* kecuali adanya tambahan bentuk $-\lambda V$ yang menyatakan adanya pembatasan untuk tidak menjual OSK. Selanjutnya akan dicari solusi dari persamaan diferensial untuk harga OSK saat *vesting period*. Persaman diferensial yang diperoleh akan ditransformasi menjadi bentuk persamaan difusi, sehingga untuk mencari solusinya dapat menggunakan cara-cara yang ada dalam penurunan solusi pada persamaan difusi.

2.3 Penggunaan Image Method Untuk Mencari Solusi PDP

Pada makalah ini hanya akan dibahas penggunaan *image method* untuk mencari solusi persamaan diferensial parsial dari harga opsi saham karyawan pada saat *vesting period*. Penentuan harga OSK ini bergantung pada solusi persamaan diferensial parsial dari harga opsi saham karyawan setelah *vesting period*. Dari bentuk persamaan differensial pada persamaan (6) diperoleh solusi adalah

$$C(S;K)=\begin{cases} S-K+\rho_H DK & S\geq hK \quad (12)\\ a_1 K\left(\frac{S}{K}\right)^{\kappa_1}+a_2 K\left(\frac{S}{K}\right)^{\kappa_2}+\frac{\lambda}{(q+\lambda)}S-\frac{\lambda K}{(r+\lambda)} & K\leq S<hK \quad (13)\\ b_1 K\left(\frac{S}{K}\right)^{\kappa_1}+b_2 K\left(\frac{S}{K}\right)^{\kappa_2} & lK\leq S<K \quad (14)\\ \rho_L DlK & 0\leq S<lK \quad (15)\end{cases}$$

dengan

$$a_1=\frac{1}{\kappa_1-\kappa_2}\left\{-\left(\rho_H D-\frac{r}{\lambda+r}\right)\kappa_2 h^{-\kappa_1}+\frac{q}{\lambda+q}(1-\kappa_2)h^{1-\kappa_1}\right\}$$

$$a_2=\frac{1}{\kappa_1-\kappa_2}\left\{\left(\rho_H D-\frac{r}{\lambda+r}\right)\kappa_1 h^{-\kappa_2}+\frac{q}{\lambda+q}(\kappa_1-1)h^{1-\kappa_2}\right\}$$

$$b_1=\frac{1}{\kappa_1-\kappa_2}\left\{-\left(\rho_H D-\frac{r}{\lambda+r}\right)\kappa_2 h^{-\kappa_1}+\frac{q}{\lambda+q}(1-\kappa_2)h^{1-\kappa_1}\frac{+\lambda}{\lambda+q}\left(1-\frac{(r-q)\kappa_1}{\lambda+r}\right)\right\}$$

$$b_2=\frac{1}{\kappa_1-\kappa_2}\left\{\left(\rho_H D-\frac{r}{\lambda+r}\right)\kappa_1 h^{-\kappa_2}+\frac{q}{\lambda+q}(\kappa_1-1)h^{1-\kappa_2}\frac{+\lambda}{\lambda+q}\left(\frac{(r-q)\kappa_1}{\lambda+r}-1\right)\right\}$$

Selanjutnya akan dicari solusi untuk persamaan diferensial parsial pada saat *vesting period* yang bergantung pada solusi persamaan diferenisal di atas. Dari bentuk persamaan diferensial parsial pada persamaan (11) akan dicari solusi menggunakan metode image. Metode ini digunakan karena adanya *reset barrier* dari fitur *reset*. Sehingga untuk mencari solusinya diperlukan bentuk PDP lainnya yang sama dengan persamaan (11).

Misal didefinisikan $g(S)$ pada $S>0$ sebagai berikut

$$g(S)=\begin{cases} S+(\rho_H D-1)K-\left[b_1 K\left(\frac{S}{K}\right)^{\kappa_1}+b_2 K\left(\frac{S}{K}\right)^{\kappa_2}\right] & S\geq hK \quad (16)\\ (a_1-b_1)K\left(\frac{S}{K}\right)^{\kappa_1}+(a_2-b_2)K\left(\frac{S}{K}\right)^{\kappa_2}+\frac{\lambda}{\lambda+q}S-\frac{\lambda}{\lambda+r}K & K\leq S\leq hK \quad (17)\\ 0 & 0<S<K \quad (18)\end{cases}$$

dan misal $W(S,t;K)$ adalah solusi dari PDP berikut

$$\frac{\partial W}{\partial t}+(r-q)S\frac{\partial W}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 W}{\partial S^2}-(\lambda+r)W=0 \quad (19)$$

di $S>0$ dan $0\leq t<T$ dengan kondisi akhir $W(S,T;K)=g(S)$

Untuk mencari solusi dari persamaan (19), dilakukan transformasi

$$S=Ke^x \quad (20)$$

$$t=T-\frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2} \quad (21)$$

$$W(S,t;K)=KY(x,\tau) \quad (22)$$

$$Y(x,\tau)=e^{\alpha x+\beta\tau}Z(x,\tau) \quad (23)$$

sehingga diperoleh persamaan panas sebagai berikut:

$$\frac{\partial Z}{\partial\tau}=\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \quad (24)$$

persamaan difusi ini terdefinisi pada interval $0<S<\infty.$ Selanjutnya, karena adanya fitur *reset*, maka harus diperhatikan keberadan *reset barrier* pada interval tersebut. Persamaan difusi yang terdefinisi dengan adanya *reset barrier* diselesaikan dengan menggunakan metode image.

Metode image menurut Hadlock (1999) digunakan untuk mencari solusi dari persamaan difusi *semi infinite* $0<x<\infty$. Metode ini diturunkan dari persamaan difusi *infinite* $-\infty<x<\infty$ tetapi pada salah satu ujungnya terdapat penghalang $(x=0)$. Untuk mendapatkan temperatur panas di suatu titik pada interval $0<x<\infty$, dilakukan dengan cara menambahkan sumber panas imajiner pada interval $-\infty<x<0$ yang merupakan cermin dari sumber panas sebenarnya. Sumber panas imajiner identik dan hasil pencerminan dari sumber panas sebenarnya. Misal sumber panas sebenarnya berada pada posisi *y* maka penambahan sumber panas imajiner harus terletak pada posisi *–y*.

Jika keberadaan penghalang tidak diperhatikan terlebih dahulu, maka panas yang berasal dari sumber panas sebenarnya akan menjalar ke arah sumbu *x* positif dan sumbu *x* negatif, demikian juga panas yang dihasilkan oleh sumber panas imajiner.

Sekarang jika keberadaan penghalang diperhatikan, maka panas yang dihasilkan dari sumber panas sebenarnya, untuk panas yang menjalar ke arah sumbu *x* negatif akan dipantulkan oleh penghalang menuju sumbu *x* positif, demikian pula panas yang dihasilkan oleh sumber panas imajiner, untuk panas yang menjalar ke arah sumbu *x* positif akan dipantulkan kembali ke arah sumbu *x* negatif. Hal ini mengakibatkan temperatur panas di suatu titik bertambah besar dengan tambahan panas hasil pemantulan oleh penghalang. Temperatur panas hasil pemantulan penghalang untuk panas yang dihasilkan oleh sumber panas sebenarnya dapat dipandang sebagai panas yang dihasilkan oleh sumber panas imajiner. Sehingga temperatur panas di suatu titik pada interval $0<x<\infty$ dapat dinyatakan sebagai hasil penjumlahan temperatur panas oleh sumber panas sebenarnya dengan sumber panas imajiner.

Persamaan difusi (22) yang terdefinisi pada interval $0<S<\infty$ dapat dipandang sebagai persamaan difusi yang terdefinisi pada interval $0<S<x_0$ dan $x_0<S<\infty$ dengan $x_0=lK$

adalah *reset barrier*. Misal ada $U(S,t;K)$ yang memenuhi persamaan (19) yang terdefinisi pada interval $x_0 < S < \infty$ (memperhatikan keberadaan *reset barrier*). Kondisi akhir dari $U(S,t;K)$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$U(S,T;K)=\begin{cases} S+(\rho_H D-1)K-\left[b_1 K\left(\frac{S}{K}\right)^{\kappa_1}+b_2 K\left(\frac{S}{K}\right)^{\kappa_2}\right] & S\geq hK \quad (25)\\ (a_1-b_1)K\left(\frac{S}{K}\right)^{\kappa_1}+(a_2-b_2)K\left(\frac{S}{K}\right)^{\kappa_2}+\frac{\lambda}{\lambda+q}S-\frac{\lambda}{\lambda+r}K & K\leq S\leq hK \quad (26)\\ 0 & lK<S<K \quad (27)\end{cases}$$

Dengan melakukan transformasi balik, dan menggunakan *image method* diperoleh solusi dari $U(S,t;K)$ adalah

$$U(S,t;K)=K e^{\alpha x+\beta\tau}Z_1(x,\tau)+K e^{\alpha x+\beta\tau}Z_2(x,\tau)\,(28)$$

menggunakan sifat *invariance* pada persamaan difusi dengan sifat translasi dan perubahan tanda maka diperoleh

$$Z_2(x,\tau)=-Z_1(2x_0-x,\tau)\,(29)$$

diperoleh x_0 dengan harga saham yang bersesuaian dengan *barrier*. Misal *X* harga saham yang bersesuaian dengan *barrier* maka

$$x_0=\ln\frac{X}{K}\,(30)$$

dengan tranformasi balik pada persamaan (20), (21), (22), dan (23) diperoleh

$$Z_2(x,\tau)=-e^{-\alpha\left(\ln\frac{X^2}{SK}\right)-\beta\tau}\frac{W\left(\frac{X^2}{S},t;K\right)}{K}\,(31)$$

substitusi pada persamaan (28) sehingga diperoleh

$$U(S,t;K)=W(S,t;K)-\left(\frac{S}{X}\right)^{-(k-1)}W\left(\frac{X^2}{S},t;K\right)(32)$$

Selanjutnya untuk mencari $V(S,t;K)$ yang merupakan solusi dari persamaan (6) dengan kondisi akhirnya adalah $C(S;K)$ yang terdefinisi pada persamaan (12), (13), (14), dan (15) maka $V(S,t;K)$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$V(S,t;K)=U(S,t;K)+\left[b_1 K\left(\frac{S}{K}\right)^{\kappa_1}+b_2 K\left(\frac{S}{K}\right)^{\kappa_2}\right]$$

Dari persamaan (32) diperoleh harga OSK saat *vesting period* adalah

$$V(S,t;K)=W(S,t;K)-\left(\frac{S}{X}\right)^{-(k-1)}W\left(\frac{X^2}{S},t;K\right)+\left[b_1 K\left(\frac{S}{K}\right)^{\kappa_1}+b_2 K\left(\frac{S}{K}\right)^{\kappa_2}\right](33)$$

Selanjutnya akan dicari $W(S,t;K)$ yang merupakan solusi dari persamaan difusi yang berasal dari persamaan (19). Persamaan difusi yang diperoleh, diselesaikan dengan menggunakan transformasi fourier, sehingga diperoleh solusinya adalah

$$Z(x,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}Z(\eta,0)e^{\frac{-(x-\eta)^2}{4\tau}}d\eta$$

substitusi

$$x'=\frac{\eta-x}{\sqrt{2\tau}}$$

diperoleh

$$Z(x,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty}Z\left(\sqrt{2\tau}\,x'+x,0\right)e^{\frac{-1}{2}x'^2}dx'\,(34)$$

Selanjutnya mencari syarat awal $Z\left(\sqrt{2\tau}x'+x,0\right)$ dari tranformasi balik pada kondisi akhir $W(S,t;K)$ yaitu

$W(S,T;K)=max(S-K,0)$

Jika memperhatikan *exercise boundary* maka $W(S,T;K)$ dapat dinyatakan sebagai

$$W(S,T;K)=max(S-hK,0)+max(S-K,0)(35)$$

Untuk $S\geq hk$ maka *strike price* adalah hK

$$W(S,T;K)=S+(\rho_H D-1)(hK)-a_1(hK)\left(\frac{S}{hK}\right)^{\kappa_1}-a_2(hK)\left(\frac{S}{hK}\right)^{\kappa_2}-\frac{\lambda}{\lambda+q}S+\frac{\lambda}{\lambda+r}(hK)$$

dari (22) dapat diperoleh

$$Y(x,\tau)=\frac{S}{hK}+(\rho_H D-1)-a_1\left(\frac{S}{hK}\right)^{\kappa_1}-a_2\left(\frac{S}{hK}\right)^{\kappa_2}-\frac{\lambda}{\lambda+q}\left(\frac{S}{hK}\right)+\frac{\lambda}{\lambda+r}$$

dari (20) dan (21) untuk x yang bersesuaian dengan *strike price* hK adalah x_h diperoleh

$$Y(x,0)=e^{x_h}+(\rho_H D-1)-a_1\left(e^{x_h}\right)^{\kappa_1}-a_2\left(e^{x_h}\right)^{\kappa_2}-\frac{\lambda}{\lambda+q}\left(e^{x_h}\right)+\frac{\lambda}{\lambda+r}$$

Untuk $K\leq S<hk$ maka *strike price* adalah K

$$W(S,T;K)=(a_1-b_1)K\left(\frac{S}{K}\right)^{\kappa_1}+(a_2-b_2)K\left(\frac{S}{K}\right)^{\kappa_2}+\frac{\lambda}{\lambda+q}S-\frac{\lambda}{\lambda+r}K$$

Dari (22) dapat diperoleh

$$\frac{W(S,T;K)}{K}=(a_1-b_1)\left(\frac{S}{K}\right)^{\kappa_1}+(a_2-b_2)\left(\frac{S}{K}\right)^{\kappa_2}+\frac{\lambda}{\lambda+q}\frac{S}{K}-\frac{\lambda}{\lambda+r}$$

dari (20) dan (21) untuk x yang bersesuaian dengan *strike price* K adalah x diperoleh

$$Y(x,0)=(a_1-b_1)\left(e^x\right)^{\kappa_1}-(a_2-b_2)\left(e^x\right)^{\kappa_2}+\frac{\lambda}{\lambda+q}e^x-\frac{\lambda}{\lambda+r}$$

Selanjutnya dari (23) diperoleh

$$Z(x,0)=e^{\frac{1}{2}(k-1)x}Y(x,0)$$

$$Z(x,0)=e^{\frac{1}{2}(k+1)x_h}+(\rho_H D-1)e^{\frac{1}{2}(k-1)x_h}-a_1 e^{\frac{1}{2}(k-1+2\kappa_1)x_h}-a_2 e^{\frac{1}{2}(k-1+2\kappa_2)x_h}-\frac{\lambda}{\lambda+q}e^{\frac{1}{2}(k+1)x_h}$$
$$\frac{+\lambda}{\lambda+r}e^{\frac{1}{2}(k-1)x_h}+(a_1-b_1)e^{\frac{1}{2}(k-1+2\kappa_1)x}+(a_2-b_2)e^{\frac{1}{2}(k-1+2\kappa_2)x}+\frac{\lambda}{\lambda+q}e^{\frac{1}{2}(k+1)x}$$
$$\frac{-\lambda}{\lambda+r}e^{\frac{1}{2}(k-1)x}$$

kondisi awal yang diperlukan

$$Z\left(\sqrt{2\tau}x'+x,0\right)=e^{\frac{1}{2}(k+1)\left(\sqrt{2\tau}x_h'+x_h\right)}+(\rho_H D-1)e^{\frac{1}{2}(k-1)\left(\sqrt{2\tau}x_h'+x_h\right)}-a_1e^{\frac{1}{2}(k-1+2\kappa_1)\left(\sqrt{2\tau}x_h'+x_h\right)}$$
$$-a_2e^{\frac{1}{2}(k-1+2\kappa_2)\left(\sqrt{2\tau}x_h'+x_h\right)}-\frac{\lambda}{\lambda+q}e^{\frac{1}{2}(k+1)\left(\sqrt{2\tau}x_h'+x_h\right)}+\frac{\lambda}{\lambda+r}e^{\frac{1}{2}(k-1)\left(\sqrt{2\tau}x_h'+x_h\right)}$$
$$+(a_1-b_1)e^{\frac{1}{2}(k-1+2\kappa_1)\left(\sqrt{2\tau}x'+x\right)}+(a_2-b_2)e^{\frac{1}{2}(k-1+2\kappa_2)\left(\sqrt{2\tau}x'+x\right)}+\frac{\lambda}{\lambda+q}e^{\frac{1}{2}(k+1)\left(\sqrt{2\tau}x'+x\right)}$$
$$\frac{-\lambda}{\lambda+r}e^{\frac{1}{2}(k-1)\left(\sqrt{2\tau}x'+x\right)}$$

Dari persamaan (34) akan diintegralkan masing-masing suku yang ada di kondisi awal yang diperoleh sebagai berikut. Dari hasil pengintegralan tersebut, diperoleh

$$Z(x,\tau)=e^{\frac{1}{2}(k+1)x_h+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}N\left(d_1^h\right)+(\rho_H D-1)e^{\frac{1}{2}(k-1)x_h+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau}N\left(d_2^h\right)-¿$$

$$a_1 e^{\frac{1}{2}(k-1+2\kappa_1)x_h+\frac{1}{4}(k-1+2\kappa_1)^2\tau} N(d_3^h) - a_2 e^{\frac{1}{2}(k-1+2\kappa_2)x_h+\frac{1}{4}(k-1+2\kappa_2)^2\tau} N(d_4^h)$$

$$\frac{-\lambda}{\lambda+q} e^{\frac{1}{2}(k+1)x_h+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1^h) + \frac{\lambda}{\lambda+r} e^{\frac{1}{2}(k-1)x_h+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2^h)$$

$$+(a_1-b_1) e^{\frac{1}{2}(k-1+2\kappa_1)x+\frac{1}{4}(k-1+2\kappa_1)^2\tau} N(d_3) + ¿$$

$$(a_2-b_2) e^{\frac{1}{2}(k-1+2\kappa_2)x+\frac{1}{4}(k-1+2\kappa_2)^2\tau} N(d_4)$$

$$\frac{+\lambda}{\lambda+q} e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1) - \frac{\lambda}{\lambda+r} e^{\frac{1}{2}(k-1)x_h+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2)$$

Dari persamaan (23), nilai α dan β dapat diperoleh

$$Y(x,\tau) = e^{\frac{-1}{2}(k-1)x-\left(\frac{1}{4}(k-1)^2+2\frac{(\lambda+r)}{\sigma^2}\right)\tau} Z(x,\tau)$$

dengan $Z(x,\tau)$ yang telah diperoleh maka akan menghasilkan

$$Y(x,\tau) = e^{-(\lambda+r)(T-t)}\left[\frac{S}{K} e^{(r-q)(T-t)} N(d_1^h) + (\rho_H D-1) N(d_2^h) + \frac{\lambda}{\lambda+q}\left\{\frac{S}{K} e^{(r-q)(T-t)} N(d_1) d - \frac{S}{K} e^{(r-q)(T-t)} N(d_1^h)\right\} - \right.$$

Dari persamaan (22) diperoleh

$$S e^{(r-q)(T-t)} N(d_1^h) + (\rho_H D-1) KN(d_2^h) + ¿$$

$$¿$$

$$W(S,t;K) = e^{-(\lambda+r)(T-t)} ¿$$

dengan

$$\theta_1 = \kappa_1\left(r-q+\frac{1}{2}\sigma^2(\kappa_1-1)\right)$$

$$\theta_2 = \kappa_2\left(r-q+\frac{1}{2}\sigma^2(\kappa_2-1)\right)$$

Sehingga diperoleh harga opsi saham karyawan adalah

$$V(S,t;K) = W(S,t;K) - \left(\frac{S}{X}\right)^{-(k-1)} W\left(\frac{X^2}{S},t;K\right) + \left[b_1 K\left(\frac{S}{K}\right)^{\kappa_1} + b_2 K\left(\frac{S}{K}\right)^{\kappa_2}\right]$$

Dengan memasukan nilai $W(S,t;K)$ dan $W\left(\frac{X^2}{S},t;K\right)$ dari persamaan 34.

3. Penutup

Penggunaan *image method* pada saat mencari solusi persamaan diferensial parsial harga OSK model VERR memberikan formula untuk menentukan harga opsi sebagai berikut:

$$V(S,t;K) = W(S,t;K) - \left(\frac{S}{X}\right)^{-(k-1)} W\left(\frac{X^2}{S},t;K\right) + \left[b_1 K\left(\frac{S}{K}\right)^{\kappa_1} + b_2 K\left(\frac{S}{K}\right)^{\kappa_2}\right]$$

dengan rumus untuk menentukan nilai $W(S,t;K)$ dan $W\left(\frac{X^2}{S},t;K\right)$ adalah

$$S e^{(r-q)(T-t)} N(d_1^h) + (\rho_H D-1) KN(d_2^h) + ¿$$

$$¿$$

$$W(S,t;K) = e^{-(\lambda+r)(T-t)} ¿$$

dan

$$\theta_1 = \kappa_1\left(r-q+\frac{1}{2}\sigma^2(\kappa_1-1)\right)$$

$$\theta_2 = \kappa_2 \left(r - q + \frac{1}{2} \sigma^2 (\kappa_2 - 1) \right)$$

Daftar Pustaka

Carr, Peter. (1998), *Randomization And The American Put*, Review of Financial Studies 11, 597-626

Carr, Peter and Linnetsky, Vadim. (2000), *The Valuation of Executive Stock Option in an Intensity-Based Framework*, European Finance Review 4: 211-230

Cvitanic, Jaksa, Zvi Wiener, and Fe rnando Zapatero. (2004), *Analytic Pricing of Employee Stock Option*, University of Southern California

Faoso, Telaumbanua. (2000): Opsi Saham Karyawan, Bisnis Indonesia Halaman Depan Edisi 29 May 2000, http://groups.yahoo.com/group/saham/message/14997

Hadlock, C.R. (1999), *Mathematical Modelling in Environment*, The Mathematical Association of America.

Kimura, Toshikazu. (2004), *Alternative Randomization for Valuing American Option*, Daiwa International Workshop on Financial Engineering

Karatzas, Ioannis, and Hui Wang. (2000), *A Barrier Option of American type*, Applied Mathematics & Optimization 42, 259-279

Kusumastuti, W. Chasanah. (2007): Penentuan Konsentrasi Polutan Hasil Dispersi Dari Cerobong Asap Pabrik Dengan *Gaussian Plume Model*, Tugas Akhir Program Sarjana, Institut Teknologi Bandung

McDonald, Robert. (2003), *Derivatives Market*, Addison Wesley

Murni, Dewi. (1995): Proses Poisson, Tesis Program Master, Institut Teknologi Bandung

Ross, M. Sheldon. (1996), *Stochastic Process*, John Wiley & Sons, Inc. New York

Shreve, E. Steven. (1996), *Stochastic Calculus And Finance*, Springer Finance Textbook

Shreve, E. Steven. (2004), *Stochastic Calculus For Finance II Continuous-Time Models*, Springer Finance Textbook

Sircar, Ronnie and Xiong, Wei. (2006), *A general Framework for Evaluating Executive Stock Options*, Journal of Economic Dynamics & Control 31, 2317-2349

Strauss, W.A. (1992), *Partial Differential Equation: An Introduction*, John Wiley & Sons, Inc. New York

Wilmott, Paul, Sam Howison, and Jeff Dewynne. (1995), *The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge University Press