BAB I

LOGIKA MATEMATIKA

1.1 Pengertian Logika

Secara etimologis, logika berasal dari kata Yunani yaitu *logos* yang artinya kata, ucapan, pikiran secara utuh, atau bisa juga berarti ilmu pengetahuan. Dalam arti luas, logika adalah suatu cabang ilmu yang mengkaji penurunan-penurunan kesimpulan yang valid dan tidak valid. Proses berpikir yang terjadi di saat menarik kesimpulan dari pernyataan-pernyataan yang diketahui benar atau dianggap benar juga sering disebut dengan penalaran (*reasoning*).

1.2 Pernyataan

Kalimat adalah susunan kata-kata yang memiliki arti yang dapat berupa :

- Pernyataan, contoh: “Jendela itu terbuka”.
- Pertanyaan, contoh: “Apakah jendela itu terbuka?”.
- Perintah, contoh: “Tutup jendela itu!”.
- Permintaan, contoh: “Tolong jendelanya ditutup”.

Dari empat macam kalimat tersebut, hanya Pernyataan saja yang memiliki nilai benar atau salah, tetapi tidak sekaligus benar atau salah. Membicarakan tentang kebenaran, dalam arti, bilamana suatu pernyataan yang dimuat di dalam suatu kalimat disebut benar dan bilamana disebut salah. Dan bilamana suatu kalimat dikategorikan sebagai kalimat yang bernilai benar atau salah. Untuk menjawab pertanyaan tersebut terdapat dua teori yang berkaitan dengan kriteria kebenaran, yaitu : teori korespondensi dan teori koherensi.

1.2.1 Teori Korespondensi

Teori korespondensi menyatakan bahwa suatu kalimat akan bernilai benar jika hal-hal yang terkandung di dalam pernyataan tersebut sesuai atau cocok dengan keadaan yang sesungguhnya. Cara penarikan kesimpulannya adalah dengan melihat keadaan sebenarnya atau fakta. Contoh: “Islamabad adalah ibukota Negara Pakistan”.

Contoh tersebut merupakan suatu pernyataan bernilai benar karena kenyataannya memang demikian, yaitu benar Islamabad memang benar merupakan ibukota Negara Indonesia. Namun pernyataan “Lahore adalah ibukota Negara Pakistan”, menurut teori ini akan bernilai salah karena hal-hal yang terkandung di dalam pernyataan itu tidak sesuai dengan kenyataannya.

1.2.2 Teori Koherensi

Teori koherensi menyatakan bahwa suatu kalimat akan bernilai benar jika pernyataan yang telah (teoritis) dengan cara menggunakan kebenaran yang ada dengan melihat keadaan sebenarnya yang telah disepakati kebenarannya. Mengacu pada aturan yang telah ditetapkan untuk aturan matematika. Contoh: (1) Semua manusia akan mati. (2) Jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah 180^0 .

Jadi baik pernyataan (1) maupun (2) akan sama-sama bernilai benar, namun dengan alasan yang berbeda. Pernyataan (1) bernilai benar karena pernyataan tersebut menyimpulkan kenyataan atau fakta yang sebenarnya. Buktinya adalah sampai detik ini, belum pernah ada orang yang hidup kekal dan abadi. Akan tetapi, pernyataan (1) tersebut akan bernilai salah jika sudah ditemukan suatu alat atau obat yang sangat canggih sehingga aka nada orang yang tidak bisa mati lagi.

Sedangkan pernyataan (2) bernilai benar karena pernyataan itu konsisten atau tidak bertentangan dengan yang sudah disepakati kebenarannya dan konsisten juga dengan teorema sebelumnya yang sudah terbukti. Itulah sekilas tentang teori korespondensi dan teori koherensi yang memungkinkan kita untuk dapat menentukan benar atau tidaknya suatu pernyataan.

<u>Latihan 1.1</u>

1. Manakah di antara kalimat berikut yang merupakan pernyataan?
   a) $x+3=2$
   b) $x+3=2$ adalah suatu pernyataan.
   c) 111 adalah bilangan prima.
   d) Tadi pagi Fahmi bertanya: “Pak Guru kapan ulangan?”.
   e) $2n+1$ untuk $n \in A$ adalah bilangan ganjil.

2. Andi berbohong pada hari Senin, Selasa, dan Rabu, sedangkan pada hari-hari yang lain ia berkata benar. Teman karibnya, si Badu berbohong pada hari Kamis, Jumat, dan Sabtu, sedangkan pada hari-hari yang lain ia berkata benar. Pada suatu hari, Andi berkata: “Kemarin adalah hari di mana saya berbohong”. Badu lalu menimpali: “Kemarin adalah hari di mana saya berbohong juga”.
   a) Pada hari-hari apakah mereka berdua dapat menyatakan hal itu.
   b) Jika mereka berdua sama-sama menyatakan bahwa hari kemarin adalah hari di mana mereka berkata benar, pada hari-hari apakah mereka berdua dapat menyatakan hal itu?

3. Pada suatu rumah makan, Andi seorang sopir sedang duduk mengelilingi meja berbentuk persegi dengan tiga orang temannya. Ketiga teman Andi tersebut bekerja Kelasi, Pilot, dan Markonis. Tentukan pekerjaan Budi jika: Andi duduk di sebelah kiri Chandra, Budi duduk di sebelah kanan kelasi, dan Dani yang duduk berhadapan dengan Chandra bukannlah seorang Pilot.

4. Ada tiga orang siswa yaitu Toni, Didi, dan Hory. Ditentukan bahwa:
   a) Toni tidak pernah berbohong. Didi kadang-kadang berbohong. Sedangkan Hory selalu berbohong.
   b) Mereka memakai kaos Hijau, Kuning, dan Merah.

c) Siswa yang memakai kaos kuning, menyatakan bahwa siswa yang berkaos Merah adalah Hory.
d) Siswa yang memakai kaos merah, menyatakan bahwa dirinya adalah Didi.
e) Siswa terakhir yang memakai kaos hijau, menyatakan bahwa siswa yang berkaos merah adalah Toni.

Bedasarkan keterangan di atas, tentukan warna kaos yang dipakai tiap siswa.

1.3 Perangkai/Perakit

Sering disebut dengan operasi. Dari satu atau dua pernyataan dapat diberikan perangkai "tidak", "dan", "atau", "jika … maka …", dan "… jika dan hanya jika …" sehingga terbentuk suatu negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi. Sub bagian ini akan membahas tentang perangkai tersebut.

1.3.1 Negasi (Negation)

Negasi merupakan lawan dari pernyataan atau mengingkari dari pernyataan tersebut. Negasi atau ingkaran dilambangkan sebagai berikut $\neg atau \quad atau - ¿$. Contoh:

P : Ayam goreng itu mahal, sehingga

P : Ayam goreng itu tidak mahal atau tidaklah benar bahwa ayam goreng itu mahal

Jika P bernilai benar maka P akan bernilai salah, Namun jika P bernilai salah maka P akan bernilai benar. Seperti ditunjukkan oleh tabel kebenaran di bawah ini :

P	P
B S	S B

Note :

~S = B
~B = S
~ ~S = S
~ ~B = B

1.3.2 Konjungsi (Conjunction)

Konjungsi adalah suatu pernyataan majemuk yang ditandai dengan tanda dan , tetapi , namun . Dan lambangnya adalah $\wedge$. Contoh: Ambil pisau dan garpu.

P	*Q*	***P*** $\wedge$ *Q*
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

➔ Ambil pisau dan garpu
➔ Ambil garpu saja
➔ Ambil pisau saja
➔ Tidak mengambil apa-apa

Bedasarkan penjelasan di atas, dapat disimpulkan bahwa suatu konjungsi $P \wedge Q$ akan bernilai benar jika hanya komponen keduanya bernilai benar sedangkan nilai kebenaran yang selain itu akan bernilai salah sebagaimana ditunjukkan pada tabel kebenaran di atas.

Contoh pernyataan yang tidak sesuai dengan tabel yaitu : “Sate ayam dan sate kambing”.

P	*Q*	***P*** $\wedge$ *Q*
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

➔ Membeli sate ayam dan sate kambing
➔ Hanya membeli sate ayam
➔ Hanya membeli sate kambing
➔ Tidak membeli keduanya

1.3.2 Disjungsi (Disjunction)

Disjungsi adalah suatu pernyataan majemuk yang ditandai dengan kata atau . Dengan lambang $\vee$. Contoh: ambil pulpen atau pensil.

P	Q	$P \vee Q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

- ➔ Mengambil keduanya
- ➔ Ambil pulpen saja
- ➔ Ambil pensil saja
- ➔ Tidak mengambil apa-apa

Dinamakan dengan *conjunction inclusive*

Bedasarkan penjelasan di atas, dapat disimpulkan bahwa suatu disjungsi $P \vee Q$ akan bernilai salah jika hanya komponen keduanya bernilai salah sedangkan nilai kebenaran yang selain itu akan bernilai benar sebagaimana ditunjukkan pada tabel kebenaran di atas.

Contoh pernyataan yang tidak sesuai dengan tabel yaitu : “Naik bis atau naik motor”.

P	Q	$P \vee Q$
B	B	S
B	S	B
S	B	B
S	S	S

- ➔ Naik bis atau motor
- ➔ Menaiki keduanya
- ➔ Naik bis saja
- ➔ Naik motor saja
- ➔ Tidak menaiki keduanya

Dinamakan dengan *disjunction exclusive*.

1.3.3 Implikasi (Implication)

Dilambangkan dengan $\rightarrow atau \Rightarrow$. Perbedaannya hanya pada nilai kebenarannya. Jika dengan lambang $\rightarrow$ maka nilai kebenarannya belum diketahui, sedangkan dengan lambang $\Rightarrow$ nilai kebenarannya sudah diketahui. Biasa ditandai dengan “Jika … maka …”. Contoh: Jika besok tidak hujan maka Paman akan datang.

P	*Q*	*P* → *Q*
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

- ➔ Besok tidak hujan tapi Paman datang
- ➔ Besok tidak hujan tapi Paman tidak datang
- ➔ Besok hujan tapi Paman datang
- ➔ Besok hujan tapi Paman tidak datang

Dengan demikian bahwa implikasi $P \rightarrow Q$ hanya akan bernilai salah dimana P bernilai benar namun Q -nya bernilai salah, sedangkan selain itu implikasi bernilai benar seperti ditunjukkan pada tabel kebenaran di atas.

Contoh pernyataan yang tidak sesuai dengan tabel yaitu : “Jika ia kaya, maka mempunyai pesawat terbang”.

P	*Q*	*P* → *Q*
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

- ➔ Ia kaya tapi punya pesawat terbang
- ➔ Ia kaya tapi tidak punya pesawat terbang
- ➔ Ia tidak kaya tapi punya pesawat terbang
- ➔ Ia tidak kaya tapi tidak punya pesawat terbang

1.3.4 Biimplikasi (Biimplication)

Biasa ditandai dengan … jika dan hanya jika … . Contoh : “Kambing hidup jika dan hanya jika dia bernapas”.

P	*Q*	*P* ↔

- ➔ Kambing hidup + bernapas

		Q	
B	B	B	➔ Kambing hidup + tidak bernapas
B S	S B	S S	➔ Kambing tidak hidup + bernapas ➔ Kambing tidak hidup + tidak bernafas
S	S	B	

Dengan demikian bahwa biimplikasi dua pernyataan P dan Q hanya akan bernilai benar jika kedua pernyataan keduanya bernilai sama.

Contoh pernyataan yang tidak sesuai dengan tabel yaitu : "Bendera ada bintang jika dan hanya jika dimiliki oleh negara Jepang ".

$\boldsymbol{P}$	Q	$\boldsymbol{P} \leftrightarrow Q$	
B B S S	B S B S	S S S B	➔ Bendera ada bintang + punya Jepang ➔ Bendera ada bintang + bukan punya Jepang ➔ Bendera tidak ada bintang + punya Jepang ➔ Bendera tidak ada bintang + bukan punya Jepang

Latihan 1.2

1. Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan berikut!
   a) $3+2=6 \Leftrightarrow 4+2=5$
   b) $3+2=5 \Rightarrow 4+2=5$
   c) $3+2=5$ atau Jakarta ibukota DI Aceh.
   d) Jika $x^2=4\ maka\ x=2$.
   e) Jika $x=-2\ maka\ x^2=4$.
   f) Jika $3x+4=2\ dan\ x \in B,\ maka\ x=-1$.

2. Jika $p: 10\ habis\ dibagi\ 5$.
   $q: 8\ adalah\ bilangan\ prima$.
   Tentukan negasi dari pernyataan berikut ini lalu tentukan nilai kebenarannya.

a) p

b) q

c) $p \wedge q$

d) $p \vee q$

e) $p \wedge \ q$

f) $p \wedge q$

g) $p \wedge \ q$

h) $p \Rightarrow q$

i) $p \Leftrightarrow q$

j) $(p \vee \ q) \Rightarrow (\ p \vee q)$

3. Jika a : Lisa gadis yang cantik dan

   b : Lisa gadis yang cerdas,

   Nyatakan pernyataan di bawah ini dengan menggunakan a,b, dan simbol-simbol logika metematika lalu tentukan negasinya.
   a) Lisa gadis yang cantik namun tidak cerdas.
   b) Lisa gadis yang tidak cantik dan tidak cerdas.
   c) Meskipun Lisa bukanlah gadis yang cantik namun ia gadis yang cerdas.
   d) Lisa gadis yang cantik sekaligus juga gadis yang cerdas.
   e) Tidak benar bahwa Lisa gadis yang cantik dan cerdas.
   f) Jika Lisa gadis yang cantik maka ia tidak cerdas.
   g) Jika Lisa gadis yang tidak cantik maka ia tidak cerdas.

4. Buatlah negasi dari pernyataan ini.
   a) $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \ p \vee q$
   b) $p \wedge q \Rightarrow (q \wedge \ q \Rightarrow r \wedge q)$
   c) $[(\ p \Rightarrow r) \vee (p \Rightarrow \ q)] \wedge r$

1.4 Ingkaran Atau Negasi Suatu Pernyataan

KUNCI JAWABAN

<u>Latihan 1.1</u>

1. a) Merupakan suatu pernyataan terbuka, karena belum bisa ditentukan benar atau salah.
   b) Merupakan suatu pernyataan tertutup, karena bisa ditentukan benar atau salah, dan pernyataan tersebut bernilai benar.
   c) Merupakan suatu pernyataan tertutup, karena bisa ditentukan benar atau salah, dan pernyataan tersebut bernilai salah.
   d) Merupakan suatu pernyataan tertutup, dengan menggunakan cara korespondensi.

   e) Merupakan suatu pernyataan tertutup, karena bisa ditentukan benar atau salah, dan pernyataan tersebut bernilai benar.

2. **J** = berkata benar
   B = berbohong

f)	**Senin**	**Selasa**	**Rabu**	**Kamis**	**Jumat**	**Sabtu**	**Minggu**
Andi	**B**	**B**	**B**	**J**	**J**	**J**	**J**
Badu	**J**	**J**	**J**	**B**	**B**	**B**	**J**

   a) Kamis

   b) Selasa, Rabu, Jumat, dan Sabtu.

3. Dhani (Markonis)

   Andi (Sopir) **MEJA** Budi (Pilot)

4. H = hijau
   K = kuning

   M = merah

Toni	H	H	K	K	M	M
Didi	K	M	H	M	H	K
Hory	M	K	M	H	K	H

Latihan 1.2

1. a) S ⇔ S : B
   b) B ⇒ S : S
   c) B ˅ S : B
   d) S
   ∴ (belum tentu) Jika $x \neq 2\, maka\, x^2 \neq 4$,
   Ambil $x = -2 \neq 2\, sehingga\, akibatnya\, x^2 = 4$

   ~~Jika $x = -2\, maka\, x^2 = 4$~~
   Jika $x^2 \neq 4\, maka\, x \neq -2$

   e) B
   f) (B ˄ **S)** ⇒ S

   S ⇒ S : B

2. $p : 10\, habis\, dibagi\, 5$: B

   $q : 8\, adalah\, bilangan\, prima$: S

   a) 10 tidak habis dibagi 5 : S
   b) $8\, adalah\, bukan\, bilangan\, prima$: B
   c) 10 habis dibagi 5 dan $8\, adalah\, bilangan\, prima$: B ˄ S : S
   d) 10 habis dibagi 5 atau $8\, adalah\, bilangan\, prima$: B ˅ S : B
   e) 10 tidak habis dibagi 5 dan $8\, adalah\, bukan\, bilangan\, prima$: S ˄ B : S
   f) 10 tidak habis dibagi 5 dan $8\, adalah\, bilangan\, prima$: S ˄ S : S
   g) 10 habis dibagi 5 dan $8\, adalah\, bukan\, bilangan\, prima$: B ˄ B : B
   h) Jika $10\, habis\, dibagi\, 5$, maka $8\, adalah\, bilangan\, prima$: B ⇒ S : S
   i) $10\, habis\, dibagi\, 5$ jika dan hanya jika $8\, adalah\, bilangan\, prima$: B ⇔ S : S
   j) ¿ ¿ 10 habis dibagi 5 atau ¿ $8\, adalah\, bukan\, bilangan\, prima$ ¿⇒¿ 10 tidak habis dibagi 5 atau $8\, adalah\, bilangan\, prima$) : (B ˅ B) ⇒ (S ˅ S) :

   B ⇒ S : S

3.