MAKALAH
TURUNAN DAN FUNGSI

Di Susun Oleh:

MUHAMMAD IHSAN
NPM. 178130090

`

PROGRAM STUDI TEKNIK MEASIN
FAKULTAS TEKNIK
UNIVERSITAS MEDAN AREA
2017

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Turunan adalah salah satu cabang ilmu matematika yang digunakan untuk menyatakan hubungan kompleks antara satu variabel tak bebas dengan satu atau beberapa variabel bebas lainnya. Konsep turunan sebagai bagian utama dari kalkulus dipikirkan pada saat yang bersamaan oleh Newton dan Leibniz dari tahun 1665 sampai dengan tahun 1675 sebagai suatu alat untuk menyelesaikan berbagai masalah dalam geometri dan mekanika. Sir Isaac Newton (1642 - 1727) , ahli matematika dan fisika bangsa Inggris dan Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), ahli matematika bangsa Jerman dikenal sebagai ilmuwan yang menemukan kembali kalkulus. Kalkulus memberikan bantuan tak ternilai pada perkembangan beberapa cabang ilmu pengetahuan lain. Dewasa ini kalkulus digunakan sebagai suatu alat bantu yang utama dalam menyelesaikan berbagai permasalahan ilmu pengetahuan dan teknologi.

1.2 Tujuan

1. Menjelaskan pengertian turunan fungsi
2. Mengetahui sifat dan aturan turunan dalam perhitungan turunan fungsi aljabar
3. Mengetahui turunan untuk menentukan karakteristik suatu fungsi aljabar dan memecahkan masalah
4. Merancang model matematika dari masalah yang berkaitan dengan ekstrim fungsi aljabar
5. Menyelesaikan model matematika dari masalah yang berkaitan dengan ekstrim fungsi aljabar dan penafsirannya
6. Mengetahui penerapan turunan fungsi aljabar dalam bidang farmasi

1.3 Rumusan masalah

1. Apa pengertian turunan fungsi?
2. Bagaimana cara menggunakan sifat dan aturan turunan dalam perhitungan turunan fungsi aljabar
3. Bagaimana cara menentukan karakteristik suatu fungsi aljabar dan memecahkan masalah
4. Bagaimana merancang model matematika dari masalah yang berkaitan dengan ekstrim fungsi aljabar
5. Bagaimana menyelesaikan model matematika dari masalah yang berkaitan dengan ekstrim fungsi aljabar dan penafsirannya
6. Bagaimana penerapan turunan fungsi aljabar dalam bidang farmasi

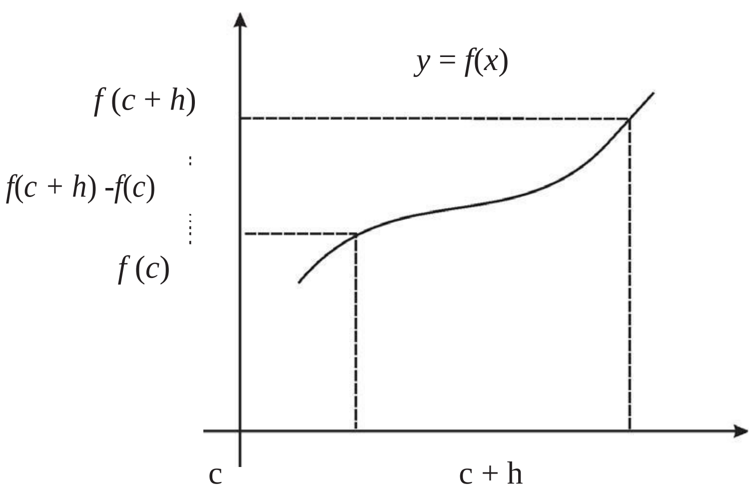
BAB II
PEMBAHASAN

2.1 Turunan Fungsi

2.1.1 Pengertian Turunan

Sebelum kita membahas suatu turunan suatu fungsi lebih mendalam, marilah kita mengingat kembali pembahasan sebelumnya mengenai limit suatu fungsi. Apa hubungan turunan fungsi dengan limit fungsi?

Perhatikan fungsi $y = f(x)$ pada domain $c \le x \le c + h$ dalam gambar 5.2.



Nilai fungsi $y = f(x)$ pada domain c δ x δ $c + h$ berubah dari $f(x)$ untuk $x = c$ sampai dengan $f(x + h)$ untuk $x = c + h$. Sehingga perubahan rata– rata nilai fungsi f terhadap x dinyatakan sebagai berikut.

Bentuk limit seperti ini disebut turunan (derivatif) fungsi f pada $x =c$. Apabila turunan fungsi $f(x)$ dinyatakan dengan $f\,'\,(x)$ (dibaca $f(x)$ aksen), maka dapat didefinisikan bahwa:

h
o
0 h

Untuk lebih memahami tentang pengertian turunan fungsi, perhatikan contoh berikut ini:

Jika $f(x) = \frac{1}{x}$, maka tentukan turunan dari $f(x)$!

Jawab:

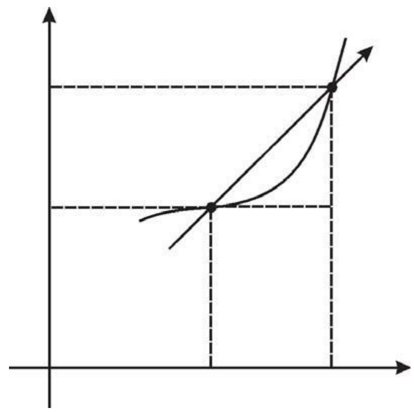
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x - x - h}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{xh(x+h)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x^2 + xh} \\
&= -\frac{1}{x^2}
\end{aligned}
$$

2.1.2 Notasi Turunan Fungsi

Ada beberapa notasi yang dapat digunakan untuk menuliskan lambang turunan fungsi $y = f(x)$. Notasi turunan fungsi $f(x)$ yang telah kita pelajari, yaitu $f'(x)$ diperkenalkan oleh seorang matematikawan Perancis bernama Louis Lagrange (1936–1813). Jika $y = f(x)$ maka $y' = f'(x)$.

Notasi lain yang dapat digunakan adalah notasi turunan fungsi yang diperkenalkan seorang matematikawan Jerman bernama Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). Notasi Leibniz menyatakan turunan fungsi y variabel x, yaitu dengan

$\frac{dy}{dx}$ atau y'. Perhatikan gambar di bawah ini!



Lihatlah gradien garis singgung *AB* pada gambar 5.4. Variabel *x* berubah menjadi *x* + э*x* sehingga variabel *y* berubah menjadi *y* + э*y* atau variabel *f*(*x*) berubah menjadi *f*(*x* + э*x*). Jadi, dapat dinyatakan э*y* = *f*(*x* + э*x*) – *f*(*x*).

Jika э*x* merupakan pengganti *h*, maka:

$$f'(x) = \lim_{h \text{o} 0} \frac{f(x \_ h) \_ f(x)}{h}$$

$$= \lim_{\text{э}x \text{ o} 0} \frac{f(x \_\text{э}x) \_ f(x)}{\text{э}x}$$

$$= \lim_{\text{э}x \text{ o} 0} \frac{\text{э}f}{\text{э}x}$$

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

$\frac{\text{э}y}{\text{э}x}$ merupakan gradien tali busur *AB*. Bila э*x* mendekati nol, maka gradien tali busur mendekati gradien garis singgung di *A*. Dengan menggunakan notasi Leibniz $\frac{dy}{dx}$, gradien garis singgung dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{dy}{d\,x} \quad \lim_{\text{э}x \text{ o} 0} \frac{\text{э}y}{\text{э}x} \quad y\chi \text{ atau } \frac{df(x)}{dx} \quad \lim_{\text{э}x \text{ o} 0} \frac{f(x \_\text{э}x) \_ f(x)}{\text{э}x} \quad f\,\chi(x)$$

Untuk lebih jelasnya, simaklah contoh berikut ini.

Contoh:

Bila diketahui $y = 3x^2 - 1$, maka tentukan $\dfrac{dy}{dx}$!

Jawab:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h)^2 - 1 - (3x^2 - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 1 - 3x^2 + 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6xh + 3h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 6x + 3h$$

Jadi, turunan pertama $y = 3x^2 - 1$ adalah $6x$.

2.1.3 Teorema Turunan Fungsi

Semua fungsi $y = f(x)$ dapat diturunkan fungsinya menggunakan definisi turunan yang telah Anda pelajari. Namun, bila menentukan turunan suatu fungsi yang lebih rumit, maka akan rumit dan terlalu lama dalam menyelesaikannya. Untuk mempermudah perhitungan, Anda dapat menggunakan bentuk–bentuk umum yang disajikan sebagai teorema– teorema dasar turunan fungsi.

a. Teorema 1

Misalkan, $f(x) = 20$ maka turunan pertama fungsi $f'(x) = 0$. Maka dapat disimpulkan bahwa:

<u>Turunan fungsi konstan</u>

Jika $y = f(x) = k$ dengan k konstanta, maka $f'(x) = 0$ atau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(k) = 0 .$$

b.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2 h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^2$$

Teorema 2

Bila diketahui suatu fungsi $f(x) = x$ maka turunan pertama fungsinya

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) = 1 \text{ atau } f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - (x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 1$$

$$= 1$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa:

<u>Turunan fungsi identitas</u>

Jika $y = f(x) = x$, maka $f'(x) = 1$ atau $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) = 1$.

Contoh :

Jika fungsi $f(x) = 5x$, tentukan turunan $f'(x)$!

$f'(x) = \frac{d}{dx}(5x) = 5$

c. Teorema 3

Misalnya, fungsi $f(x) = x^3$ maka turunan pertamanya adalah:

=

=

=

=

=

=

=

$$= 3x^2$$

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{c.f(x+h) - c.f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} c\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$$

$$= c.f'(x)$$

Dari contoh di atas, dapat disimpulkan bahwa:

> <u>Turunan fungsi pangkat</u>
>
> Jika $y = f(x) = x^n$ dengan n bilangan rasional, maka $f'(x) = nx^{n-1}$
>
> atau $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$.

Untuk lebih jelasnya, simaklah contoh berikut ini:

Contoh

Diketahui $f(x) = x^2$. Tentukan turunan pertama dari fungsi tersebut!

Jawab:

$$f'(x) = n.\, x^{n-1}$$
$$= 2x^{2-1}$$
$$= 2x$$

d. Teorema 4

Apabila diketahui fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ dimana $g(x) = c\, f(x)$ dengan c suatu konstanta, maka turunan fungsinya adalah:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Dapat disimpulkan bahwa:

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[u(x+h) + v(x+h)] - [u(x) + v(x)]}{h}$$

> <u>Turunan hasil kali konstanta dengan fungsi</u>
>
> Jika f suatu fungsi dengan c suatu konstanta dan g fungsi yang didefinisikan oleh $g(x) = c.\,f(x)$ dan $f'(x)$ ada, maka
>
> $g'(x) = c.\,f'(x)$ atau $\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c.\,f(x)) = c.\,f'(x)$

Contoh:

Bila $f(x) = x^3$ maka tentukan turunan pertama dari fungsi $g(x) = -7\,f(x)$ dengan $c = -7$!

Jawab:

Dengan menggunakan teorema 3 diperoleh:

$f'(x) = 3.\,x^3 = 3x^2$

Dengan menggunakan teorema 4 diperoleh:

maka $g'(x) = c\,.\,f'(x)$

$= -7.\,(3x^2)$

$= -21x^2$

e. Teorema 5

Apabila diketahui u dan v adalah fungsi–fungsi dari $f(x) = u(x) + v(x)$, maka turunan fungsi $f(x)$ adalah:

$\lim$ ♣ $u(x$ $+\,v($ $x\,+$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

$$= u'(x) + v'(x)$$

Dari uraian di atas, dapat disimpulkan bahwa:

<u>Turunan penjumlahan fungsi</u>

Jika u dan v adalah fungsi–fungsi dari x yang dapat diturunkan dengan $y = f(x) = u(x) + v(x)$, maka $f'(x) = u'(x) + v'(x)$ atau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(u + v) = u' + v'$$

Contoh:

Bila diketahui fungsi $y = 5x^2 - 7x$, maka tentukanlah fungsi y'!

Jawab:

Dimisalkan $u(x) = 5x^2$ $\quad u'(x) = 5 \cdot 2x' = 10x$

$v(x) = -7$ $\quad v'(x) = -7$

Jadi, $y' = u'(x) + v'(x)$

$= 10x - 7$

f. Teorema 6

Perhatikan contoh berikut ini.

Contoh:

Jika diketahui sebuah fungsi $y = 7x^3 - 2x^2$, tentukan turunan fungsinya!

Jawab:

Dimisalkan $u(x) = 7x^3$ $\quad u'(x) = 7 \cdot 3x^2 = 21x^2$

$$v(x) = 2x^2 \qquad v'(x) = 2 \cdot 2x^1 = 4x$$

Jadi, $y' = (21x^2) - (4x)$

$= 21x^2 - 4x$.

Dari contoh di atas dapat disimpulkan bahwa:

<u>Turunan pengurangan fungsi</u>

Jika u dan v adalah fungsi–fungsi dari x yang dapat diturunkan dan $y = f(x) = u(x) - v(x)$ maka $f'(x) = u'(x) - v'(x)$ atau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(u - v) = u' - v'$$

g. Teorema 7

Jika diketahui fungsi $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, maka turunan fungsinya dapat diperoleh sebagai berikut:

$$f\chi(x) = \lim_{ho0} \frac{f(x \_ h) \_ f(x)}{h}$$

$$= \lim_{ho0} \frac{u(x \_ h)\, v(x \_ h) \_ u(x)\, v(x)}{h}$$

Untuk mempermudah perhitungan, kita tambahkan bentuk $-u(x + h) \cdot v(x) + u(x + h) \cdot v(x)$ pada pembilang g. Hal ini tidak mengubah nilai karena bentuk tersebut bernilai nol.

$$f\chi(x) = \lim_{ho0} \frac{u(x \_ h)\, v(x \_ h) \_ u(x \_ h)\, v(x) \_ u(x \_ h)\, v(x) \_ u(x)\, v(x)}{h}$$

$$= \lim_{ho0} u(x \_ h) > v(x \_ h) \_ v(x) \cong \_ v(x) > u(x \_ h) \_ u(x) \cong h$$

2.1.4 Aturan Rantai

Teorema–teorema turunan suatu fungsi yang telah Anda pelajari pada subbab sebelumnya belum cukup untuk mencari turunan dari fungsi majemuk. Seperti apakah fungsi majemuk itu? Bagaimanakah cara untuk menyelesaikan turunan pertama dari fungsi majemuk? Simaklah contoh berikut ini.

Contoh

Bila diketahui suatu fungsi $f\,(x) = (3x + 5)^{10}$, tentukan turunan pertama dari fungsi tersebut!

Penyelesaian:

Apabila Anda mennggunakan teorema 3 (turunan fungsi pangkat) untuk mencari turunan fungsi ini, Anda harus menjabarkan fungsinya terlebih dahulu. Dengan cara tersebut tentunya akan memerlukan yang lama dan lebih rumit. Untuk menyelesaikannya, buatlah permisalan seperti berikut.

Contoh:

$$y = f\,(x) = (3x + 5)^{10}$$

dimisalkan $u = 3x + 5$

$$\frac{du}{dx} = u' = 3$$

Dengan permisahan di atas, dapat ditulis sebagai berikut.

$y = (3x + 5)^{10}$

$y = u^{10}$ atau $f\,(u) = u^{10}$

turunan fungsinya adalah:

$$\frac{dy}{dx} = y' = 10\,u^{10}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y' = 10.\,u^{9}.\,u'$$

$$= 10\,(3x + 5)^{9}.\,(3)$$

$= 30\ (3x + 5)^9$

Dari uraian contoh di atas, dapat disimpulkan bahwa:

> Jika $y = f(u) = u^n$ dengan $u = g(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$
>
> atau $y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

Untuk memahami penggunaan persamaan di atas, pelajarilah contoh berikut ini

Contoh :

Tentukan turunan fungsi $y = (x^3 - 3x + 11x)^9$!

Jawab:

Fungsi $y = (x^3 - 3x + 11x)^9$

Dimisalkan $u = x^3 - 3x^2 + 11x$

$$\frac{du}{dx} = u' = 3x^2 - 6x + 11$$

$$y = u^9$$

$$\frac{du\text{¿}}{dy\text{¿}} = 9u^{9-1} = 9u^8$$

Sehingga $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$$y' = 9u^8 \cdot u'$$

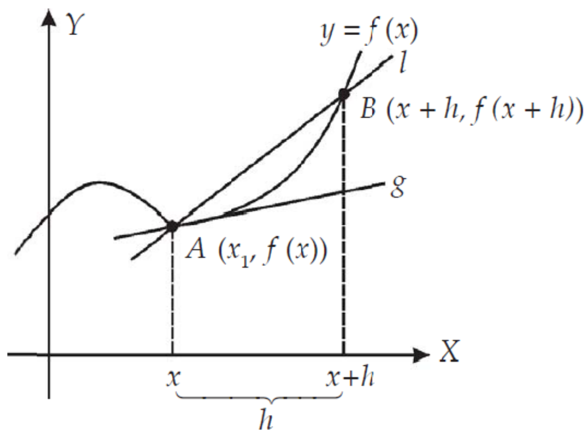
$$= 9\ (x^3 - 3x^2 + 11x)^8 \cdot (3x^2 - 6x + 11)$$

2.2 Karakteristik Grafik Fungsi

Setelah Anda mempelajari teorema–teorema dan aturan rantai untuk mencari turunan suatu fungsi, sekarang Anda akan mempelajari penerapannya. Turunan dapat digunakan antara lain untuk menentukan persamaan garis singgung, menentukan sifat fungsi, mencari nilai maksimum dan minimum, perhitungan pada masalah fisika, ekonomi, dan sebagainya.

2.2.1 Persamaan Garis Singgung

Pada subbab sebelumnya, kita telah mempelajari cara menentukan gradien garis singgung di suatu titik pada kurva dengan menggunakan limit fungsi. Cobalah kita ingat kembali. Lalu, bagaimanakah cara menentukan gradien garis singgung kurva dengan menggunakan turunan? Untuk mengetahuinya, perhatikan gambar berikut ini



Garis l memotong kurva $y = f(x)$ di titik $A(x, f(x))$ dan $B\ (x + h, f\ (x + h))$.

Jika titik B bergerak mendekati A sepanjang kurva, maka nilai h akan mendekati nol dan garis l akan menjadi garis g, yaitu garis singgung kurva di titik A. Gradien garis l adalah $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ dan gradien garis g adalah $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Dari subbab sebelumnya, telah diketahui bahwa $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

merupakan turunan dari fungsi f, yaitu $f'(x)$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa:

Gradien garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik $(x, f(x))$ adalah

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Selanjutnya, untuk mencari persamaan garis singgung perlu kita ingat kembali persamaan garis melalui satu titik (x_1, y_1) dengan gradien m, yaitu dinyatakan sebagai y –

$y_1 = m\ (x - x_1)$. Secara analog diperoleh:

Persamaan garis singgung kurva $y = f\ (x)$ di titik $(a, f\ (a))$ adalah atau $y - f\ (a) = f'\ (a)$ atau $y = y\ (a) + f'\ (a)\ (x - a)$.

Untuk lebih mengetahui penggunaan persamaan di atas, perhatikan contoh berikut ini:

Contoh:

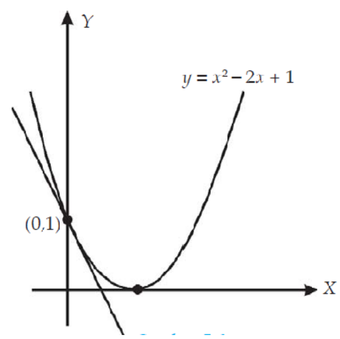
Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^2 - 2x + 1$ dititik (0,1)!

Jawab:

Gradien garis singgung adalah

$$m = y' = \frac{d}{dx}\ (x^2 - 2x + 1) = 2x - 2$$

Jika $a = 0$, maka $m = 2 \cdot 0 - 2 = -2$.



Persamaan garis singgung melalui (0,1) pada kurva adalah:

$y - f\ (a) = m\ (x - a)$

$y - 1 = -2\ (x - 0)$

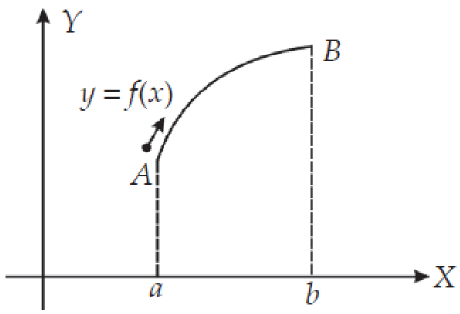
$y - 1 = -2x$

$2x + y - 1 = 0$

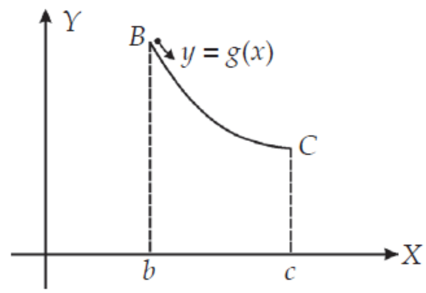
2.2.2 Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Agar kita memahami fungsi naik dan fungsi turun, simaklah contoh berikut ini. Bentuk jalan setapak yang dapat dilintasi pendaki gunung untuk mencapai puncak diwakili oleh kurva fungsi $y = f(x)$, sedangkan perjalanan pulangnya diwakili oleh kurva fungsi $y = g(x)$.

a.



b.



Dari grafik di atas, fungsi bergerak naik dari lokasi *A* ke *B*, kemudian bergerak turun dari *B* ke *C*. Dalam bahasa matematika, fungsi *f*(*x*) disebut fungsi naik dalam daerah interval *a* *x* *b*. Fungsi dikatakan naik apabila makin bertambah (ke kanan), maka nilai *f*(*x*) semakin bertambah. Sedangkan fungsi *g*(*x*) disebut fungsi turun dalam daerah interval *b* *x* *c*. Fungsi dikatakan turun apabila nilai *x* makin bertambah (ke kanan), maka nilai *g*(*x*) semakin berkurang. Untuk lebih jelasnya, simaklah contoh berikut.

Contoh

Tentukan batas–batas interval agar fungsi *f* (*x*) = *x*2 – 4*x* + 3 naik atau turun!

Jawab:

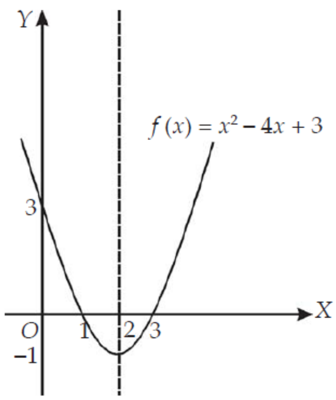
f(*x*) = *x*2 – 4*x* + 3 *f*(*x*) = *ax* + *bx* + *c*

Karena koefisien *x2* adalah positif, persamaan tersebut adalah persamaan parabola terbuka ke atas. Sumbu simetri parabola adalah:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2.1} = \frac{4}{2} = 2$$

Untuk *x* = 2, *f* (2) = 22 – 4.2 + 3 = –1

Grafik fungsinya adalah: Untuk membuat grafik tentukan terlebih dahulu titik–titiknya:



x	0	1	2	3
y	3	0	−1	0

Dari sketsa grafik dapat Anda lihat bahwa $f(x)$ naik pada $x > 2$ dan $f(x)$ turun pada $x < 2$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa $f(x) = x2 - 4x + 3$ naik pada $x > 2$ dan turun pada $x < 2$. Berdasarkan contoh di atas, fungsi naik dan fungsi turun dapat didefinisikan sebagai:

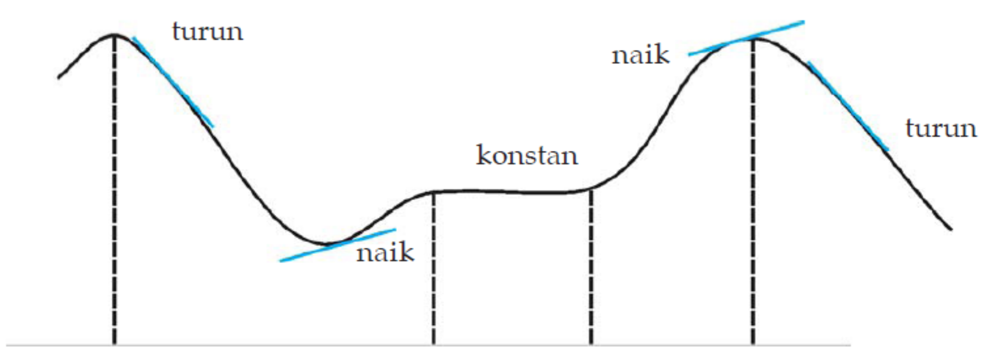
<u>Fungsi naik</u>

Suatu fungsi $f(x)$ dikatakan naik pada suatu interval jika untuk setiap nilai x^1 dan x^2 pada interval itu, yaitu $x^1 < x^2$ maka $f(x^1) < f(x^2)$.

<u>Fungsi turun</u>

Suatu fungsi $f(x)$ dikatakan turun pada suatu interval jika untuk setiap nilai x^1 dan x^2 pada interval itu, yaitu $x^1 < x^2$ maka $f(x^1) > f(x^2)$.

Selanjutnya, hubungan antara turunan fungsi dengan fungsi naik atau fungsi turun dapat digambarkan sebagai berikut.



Perhatikan gambar. Pada fungsi naik, gradien garis singgungnya positif, sedangkan pada fungsi turun gradien garis singgungnya negatif. Telah diketahui bahwa gradien garis singgung kurva $y = f(x)$ di (x, y) adalah turunan dari $y = f(x)$ di (x, y), maka dapat disimpulkan bahwa:

- Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap x dalam (x_1, y_1), maka $f(x)$ adalah fungsi naik pada (x_1, y_1).
- Jika $f'(x) < 0$ untuk setiap x dalam (x_1, y_1), maka $f(x)$ adalah fungsi turun pada (x_1, y_1).
- Jika $f'(x) = 0$ untuk setiap x dalam (x_1, y_1), maka $f(x)$ adalah fungsi konstan pada (x_1, y_1).

Untuk lebih memahami fungsi naik dan fungsi turun, pelajarilah contoh berikut ini.

Tentukan interval agar fungsi $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ naik atau turun! Jawab:

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2$$

$$f'(x) = -2.3x^{3-1} + 3.\ 2x^{2-1}$$

=

$$= -6x^2 + 6x$$

$$= x(-6x + 6)$$

Untuk menentukan interval $f(x)$ naik atau turun, ditentukan terlebih dahulu pembuat nol $f'(x)$ dan periksa nilai $f'(x)$ di sekitar titik pembuat nol.

$$f'(x) = 0$$

$$x(-6x + 6) = 0$$

$$x = 0 \text{ atau } -6x + 6 = 0$$

$$6x = 6$$

$$x = 1$$

Sehingga diperoleh $f'(x)$ berikut.

< 0 > 0 < 0

0 1

Untuk $x = -1$ $\longrightarrow$ $f'(-1) = -6(-1)^2 + 6(-1)$

$= -6 - 6$

$= -12$ (< 0)

Untuk $x = \frac{1}{2} \longrightarrow$ $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -6\left(\frac{1}{2}\right) + 6\left(\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{-6}{4} + 3$

$= \frac{6}{4}$ (< 0)

Untuk $x = 2$ $\longrightarrow$ $f'(2) = -6(2)^2 + 6(2)$

$= -24 + 12$

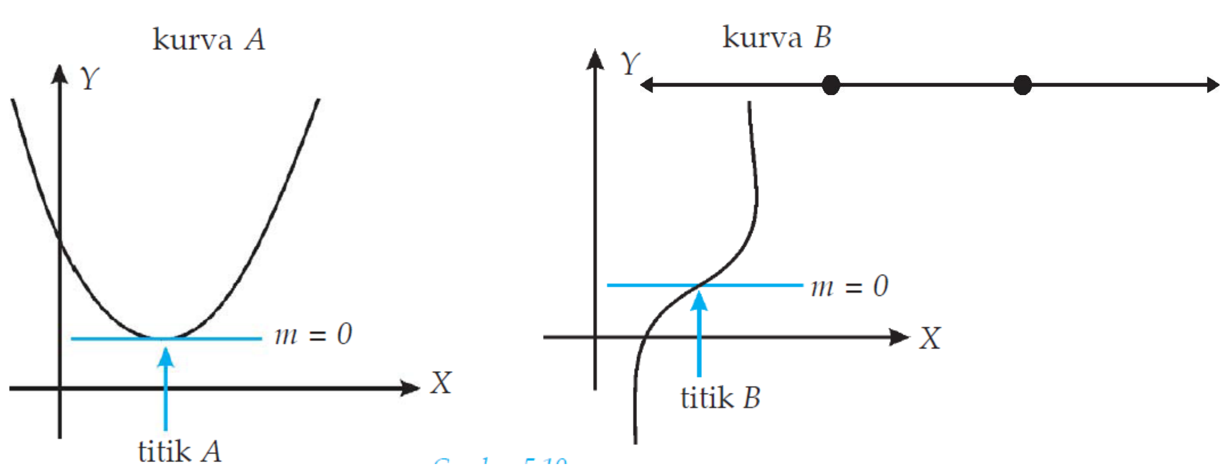
$= -12$ (< 0)

Jadi, $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ naik pada $0 < x < 1$ dan turun pada $x < 0$ dan $x > 1$.

2.2.3 Titik stasioner

a. Pengertian titik stasioner

Sebelumnya, telah dipelajari hubungan antara turunan fungsi dengan fungsi naik atau fungsi turun. Lalu bagaimanakah hubungan turunan fungsi dengan fungsi konstan? Untuk mengetahuinya, kita cermati dulu gradien garis singgung (m) pada gambar berikut ini.



Pada kurva A, fungsi berhenti turun dan mulai naik setelah titik A. Sedangkan pada kurva B, fungsi berhenti naik untuk sementara dan mulai naik lagi setelah titik B. Titik A dan titik B disebut titik stasioner. Apakah titik stasioner itu?

> Titik stasioner adalah titik tempat fungsi berhenti naik atau turun untuk sementara, yaitu mempunyai gradien sama dengan nol

Dari gambar di atas, terlihat jelas bahwa garis singgung yang melalui titik stasioner selalu sejajar sumbu x dengan gradien garis singgung di titik tersebut sama dengan nol. Karena gradien $m = 0$, sedangkan $m = f'(x) = y'$ maka dapat dikatakan bahwa:

> Syarat stasioner adalah $f'(x) = 0$ atau $\frac{dy}{dx} = 0$

Penyelesaian persamaan $f'(x) = 0$ atau $\frac{dy}{dx}$ memberikan nilai x tempat titik stasioner terjadi. Fungsi $f(x)$ memiliki titik stasioner ketika $f'(x) = 0$, atau fungsi y memiliki titik stasioner ketika $y' = \frac{dy}{dx} = 0$

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut.

Contoh:

1. Tentukan titik stasioner dari kurva $y = x^2 - 3x + 5$!

Jawab:

$f'(x) = 2x - 3$

Syarat stasioner: $f'(x) = 0$

$2x - 3 = 0$

$2x = 3$

$x = \frac{3}{2}$

Jadi, titik stasionernya adalah $\frac{3}{2}$

2. Tentukan koordinat titik stasioner dari kurva $y = x3 - 6x2 + 9x + 2$!

Jawab:

$y = x3 - 6x2 + 9x + 2$

$y' = 3x2 - 12x + 9$

Syarat stasioner $y' = 0$

Sehingga $3x2 - 12x + 9 = 0$

$(3x - 3)(x - 3) = 0$

$3x - 3 = 0$ atau $x - 3 = 0$

$3x = 3$ $\quad x = 3$

$x = 1$

untuk $x = 1$ o $y = 13 - 6.\ 12 + 9.\ 1 + 2 = 6$

untuk $x = 3$ o $y = 33 - 6.\ 32 + 9.\ 3 + 2 = 2$

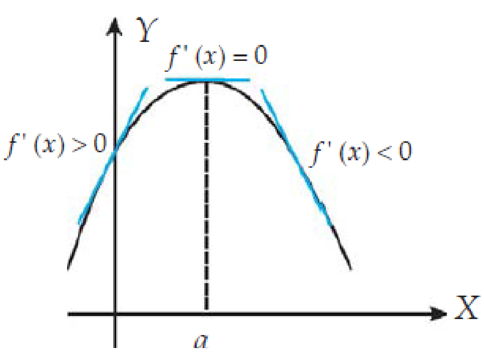
Jadi, koordinat titik stasionernya (1,6) dan (3,2).

b. Jenis stasioner

Misalkan, $f'(x) = 0$ untuk suatu konstanta a, maka titik stasioner terjadi ketika $x = a$ dan $y = f(a)$, sehingga koordinat titik stasionernya $(a, f(a))$.

Berikut ini terdapat empat jenis titik stasioner, yaitu:

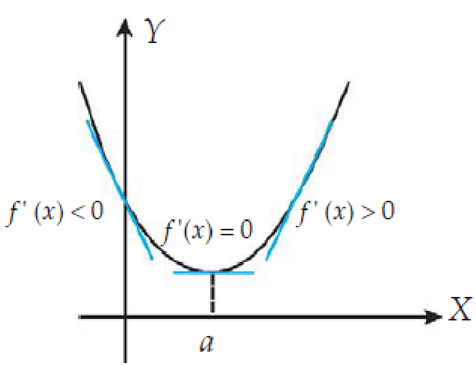
1) Titik balik maksimum pada titik $x = a$



Jika $x < a$, maka $f'(x) > 0$

Jika $x > a$, maka $f'(x) < 0$

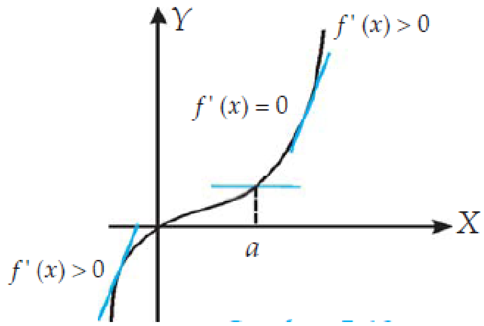
2.



Jika $x < a$, maka $f'(x) < 0$

Jika $x > a$, maka $f'(x) > 0$

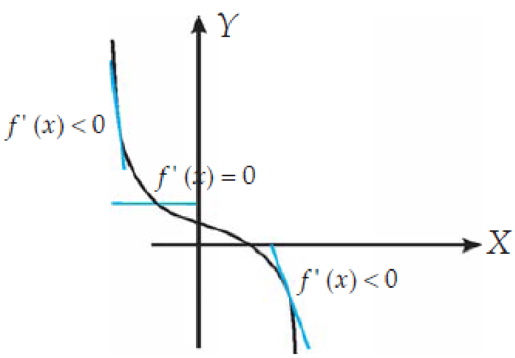
3. Titik belok stasioner positif pada titik $x = a$



Jika $x < a$, maka $f'(x) > 0$

Jika $x > a$, maka $f'(x) > 0$

4. Titik belok stasioner negatif pada titik $x = a$



Jika $x < a$, maka $f'(x) < 0$

Jika $x > a$, maka $f'(x) < 0$

2.2.4. Sketsa Grafik dengan Turunan Pertama

Setelah memahami titik stasioner dan jenis stasioner suatu fungsi, selanjutnya fungsi tersebut dapat disajikan dalam sketsa grafik fungsi. Cara membuat sketsa grafik dengan menggunakan turunan pertama fungsi $f(x)$ dinamakan uji turunan pertama. Seperti apakah bentuk dari sketsa grafik suatu fungsi?

Untuk mengetahuinya, perhatikan contoh berikut ini!

Contoh:

Bentuk sketsa grafik fungsi $y = x^2 - 2x^2 + x$

Jawab:

Untuk membuat sketsa grafik fungsi, maka diperlukan informasi beberapa titik sebagai berikut.

a. Titik potong dengan sumbu x Syarat $y = 0$

$$
\begin{aligned}
x^3 - 2x^2 + x &= 0 \\
x(x^2 - 2x + 1) &= 0 \\
x = 0 \quad \text{atau} \quad x^2 - 2x + 1 &= 0 \\
(x - 1)(x - 1) &= 0 \\
x - 1 = 0 \quad \text{atau} \quad x - 1 &= 0 \\
x = 1 \qquad\qquad x &= 1
\end{aligned}
$$

Jadi, koordinat titik potong dengan sumbu x adalah (0,0) dan (1,0).

b. Titik potong dengan sumbu y Syarat $x = 0$

$$y = 0^3 - 2.\ 0^2 + 0 = 0$$

Jadi, titik potong dengan sumbu y adalah (0, 0).