3 PANGKAT, AKAR, DAN LOGARITMA

3.1. Pangkat

Pangkat dari sebuah bilangan adalah suatu indeks yang menunjukkan banyaknya perkalian bilangan yang sama secara beruntun. Notasi x^n berarti bahwa x harus dikalikan degan x itu sendiri sebanyak n kali. Notasi bilangan berpangkat sangat berguna untuk merumuskan penulisan bentuk perkalian sacara ringkas. Misalnya, 7 x 7 x 7 x 7 x 7, cukup situlis dengan 7^5.

3.1.1. Kaidah Pemangkatan Bilangan

Kaidah pemangkatan bilangan yang perlu diperhatikan adalah sebagai berikut:

1. $x^0 = 1$, untuk $x \neq 0$.

   Misalnya: $4^0 = 1$.
2. $x^1 = x$, untuk $x \neq 0$.

   Misalnya: $4^1 = 4$.
3. $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.

   Misalnya: $4^{-2} = \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{1}{16}$
4. $x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}$.

   Misalnya: $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8^1} = \sqrt[3]{8} = 2$
5. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^a = \dfrac{x^a}{y^a}$

   Misalnya: $\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{3^2}{5^2} = \dfrac{9}{25}$
6. $(x^a)^b = x^{ab}$.

Misalnya: $(3^2)^4 = 3^{2x4} = 3^8 = 6.561$.

7. $x^{a^b} = x^c$, dengan $c = a^b$.

   Misalnya: $3^{2^4} = 3^{16} = 43.046.721$.

3.1.2. Kaidah Perkalian Bilangan Berpangkat

Kaidah perkalian bilangan berpangkat adalah sebagai berikut:

1. $x^a \,.\, x^b = x^{a+b}$

   Misalnya: $3^2 \,.\, 3^4 = 3^{2+4} = 3^6 = 729$.
2. $x^a \,.\, y^a = (xy)^a$

   Misalnya: $3^2 \,.\, 5^2 = (3.5)^2 = 15^2 = 225$.

3.1.3. Kaidah Pembagian Bilangan Berpangkat

Kaidah pembagian bilangan berpangkat adalah sebagai berikut:

1. $x^a : x^b = x^{a-b}$

   Misalnya: $3^2 : 3^4 = 3^{2-4} = 3^{-2} = 1/9$.
2. $x^a : y^a = (x / y)^a$

   misalnya: $3^2 : 5^2 = (3/5)^2 = 9/25$.

3.2. Akar

Akar merupakan bentuk lain untuk menyatakan bilangan berpangkat. Akar dari sebuah bilangan adalah basis yang memenuhi bilangan tersebut berkenaan dengan pangkat akarnya. Berdasarkan konsep pemangkatan, diketahui bahwa jika bilangan-bilangan yang sama (misalnya x) dikalikan sejumlah tertentu sebanyak (katakanlah) a kali, maka dapat ditulis menjadi x^a , dalam hal ini x disebut basis sedangkan a disebut pangkat. Misalkan $x^a = m$ maka x dapat juga disebut sebagai akar pangkat a dari m, yang jika dituliskan dalam bentuk akar menjadi $x = \sqrt[a]{m}$. Jadi $\sqrt[a]{m} = x$ sebab $x^a = m$.

Misalnya: $\sqrt{9} = 3$ sebab $3^2 = 9$.

Secara umum, bilangan berpangkat dan bentuk akar dapat dilihat pada hubungan berikut:

$\sqrt[a]{m} = x$ sebab $x^a = m$.

3.2.1. Kaidah Pengakaran Bilangan

Ada beberapa kaidah dalam pengakaran suatu bilangan yaitu:

1. $\sqrt[b]{x} = x^{\frac{1}{b}}$

   Misalnya: $\sqrt[3]{64} = 64^{\frac{1}{3}} = 4$

2. $\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$

   Misalnya: $\sqrt[5]{3^2} = 3^{\frac{2}{5}} = 1,55$

3. $\sqrt[b]{xy} = \sqrt[b]{x}.\sqrt[b]{y}$

   Misalnya: $\sqrt[3]{8 \text{ x } 64} = \sqrt[3]{8}\,\sqrt[3]{64} = 2 \text{ x } 4 = 8$

4. $\sqrt[b]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[b]{x}}{\sqrt[b]{y}}$

   Misalnya: $\sqrt[3]{\frac{8}{64}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{2}{4} = 0,5$

3.2.2. Kaidah Penjumlahan dan Pengurangan Bilangan Bentuk Akar

Bilangan-bilangan dalam bentuk akar hanya dapat dijumlahkan atau dikurangkan apabila akar-akarnya sejenis. Perhatikan kaidah berikut:

$$m\sqrt[b]{x^a} \pm n\sqrt[b]{x^a} = (m \pm n)\sqrt[b]{x^a}\ .$$

Misalnya: $5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

3.2.3. Kaidah Perkalian dan Pembagian Bilangan Bentuk Akar

Kaidah perkalian dan pembagian bilangan bentuk akar adalah sebagai berikut:

1. $\sqrt[b]{x}\ .\ \sqrt[b]{y} = \sqrt[b]{xy}$

   (Kaidah ini identik dengan kaidah pengakaran bilangan point 3).

   Misalnya: $\sqrt[3]{8}\ .\ \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{8 \text{ x } 64} = \sqrt[3]{512} = 8$

2. $\sqrt[b]{\sqrt[c]{x^a}} = \sqrt[bc]{x^a}$

Misalnya: $\sqrt{\sqrt[3]{15625}} = \sqrt[2\times 3]{15625} = \sqrt[6]{15625} = 5$

3. $\dfrac{\sqrt[b]{x}}{\sqrt[b]{y}} = \sqrt[b]{\dfrac{x}{y}}$

(Kaidah ini identik dengan kaidah pengakaran bilangan point 4).

Misalnya: $\dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[3]{\dfrac{8}{64}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{2}$

3.3. Logaritma

Logaritma merupakan invers dari bilangan bentuk berpangkat atau eksponen, sehingga antara eksponen dan logaritma mempunyai hubungan seperti berikut:

$a^x = b$ jika dan hanya jika $x = {}^a\log b$, untuk $b > 0$, $a > 0$, dan $a \neq 1$

dengan a disebut bilangan pokok, b disebut numerus, x disebut hasil logaritma.

Bentuk $x = {}^a\log b$ dibaca " x adalah logaritma dari b dengan bilangan pokok a". Hubungan antara bentuk logaritma, bentuk pangkat, dan bentuk akar dapat dilihat pada bentuk berikut:

Bentuk Pangkat	Bentuk Akar	Bentuk Logaritma
$a^x = b$	$\sqrt[x]{b} = a$	${}^a\log b = x$

Perhatikan bahwa, suku-suku di ruas kanan menunjukkan bilangan yang dicari atau hendak dihitung pada masing-masing bentuk. Dari ketiga bentuk tersebut, maka bentuk logaritma ${}^5\log 625 = 4$ sebab $5^4 = 625$ atau $\sqrt[4]{625} = 5$.

3.3.1. Basis Logaritma

Basis atau bilangan pokok logaritma selalu bernilai positif dan tidak sama dengan 1. Logaritma dengan basis 10 cukup ditulis log b, bukan ${}^{10}\log b$. Sementara untuk logaritma dengan basis e dengan e = 2,718287 ≈ 2,72, maka ${}^e\log b$ = ln b. Bentuk logaritma dengan basis e biasa disebut dengan logaritma natural.

3.3.2. Kaidah-Kaidah Logaritma

Beberapa kaidah tentang bentuk logaritma adalah sebagai berikut:

1. $\log a \,.\, b = \log a + \log b$
2. $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log a - \log b$
3. ${}^{a}\log b \,.\, {}^{b}\log c = {}^{a}\log c$
4. $\log a^{n} = n \log a$
5. ${}^{a^n}\log b = {}^{a}\log b^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n}\,{}^{a}\log b$
6. ${}^{a}\log b = \dfrac{\log b}{\log a} = \dfrac{1}{{}^{b}\log a}$
7. ${}^{a}\log b = \dfrac{{}^{p}\log b}{{}^{p}\log a}$
8. ${}^{a}\log 1 = 0$ sebab $a^{0} = 1$
9. ${}^{a}\log a = 1$ sebab $a^{1} = a$

3.3.3. Persamaan Logaritma

Persamaan logaritma dalam x adalah persamaan yang mengandung fungsi x di bawah tanda logaritma atau fungsi x sebagai bilangan pokok suatu logaritma. Sifat-sifat yang berlaku pada persamaan logaritma adalah sebagai berikut:

1. Jika ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log p$, maka $f(x) = p$, untuk $f(x) > 0$.
2. Jika ${}^{a}\log f(x) = {}^{b}\log f(x)$, dengan $a \neq b$, maka $f(x) = 1$.

Contoh:

Jika ${}^{x}\log 3 = 0{,}4$, berapakah x?

Penyelesaian:

$${}^{x}\log 3 = 0{,}4 \Leftrightarrow {}^{x}\log 3 = \frac{2}{5}$$

Jika dikonversi ke bentuk berpangkat diperoleh

$$3 = x^{\frac{2}{5}} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3^{\frac{5}{2}} = 3^{2}\,.\,3^{\frac{1}{2}} = 9\sqrt{3}\,.$$

Jadi, nilai x yang dimaksud adalah $9\sqrt{3}$.

Soal-Soal Latihan.

1. Selesaikanlah bentuk berikut ke dalam bentuk yang paling sederhana.
   a. $4^5 \cdot 4^3 \cdot 4^{-6}$
   b. $5^3 \cdot 3^4 \cdot (-6)^4$
   c. $4^5 : 4^3 : 4^{-6}$
   d. $5^3 : 3^4 : (-6)^4$
2. Ubahlah bentuk berikut ke dalam bentuk akar
   a. $6^{2/3}$
   b. $(6^{2/3})^2$
   c. $3^{1/7} \cdot 3^{4/7} \cdot 3^{3/7}$
   d. $7^{2/5} + 9^{3/5}$
3. Sederhanakan kemudian selesaikanlah bentuk berikut:
   a. $10\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 7\sqrt{5}$
   b. $\left(\sqrt[3]{27}\right)\left(5\sqrt[3]{125}\right)$
   c. $\left(\sqrt[4]{\sqrt[0,5]{169}}\right)$
   d. $\left(5\sqrt{16}\right):\left(2\sqrt{4}\right)$
4. Ubahlah ke dalam bentuk logaritma:
   a. 5^4
   b. $\sqrt[3]{64}$
   c. $4^5 \cdot 4^3 \cdot 4^{-6}$
   d. $3^{\frac{9}{2}} : \sqrt{243}$
5. Apabila x dan y masing-masing adalah 100 dan 50, hitunglah:
   a. $\log xy$
   b. $\log (x / y)$
   c. $\log x^2y$
   d. $\log (x^2/y)$
6. tentukanlah x jika:
   a. $x^5 = 50.000$

b. $100^x = 50.000$

c. $3^{5x-1} = 27^{x+3}$

7. Tentukan nilai x yang memenuhi ${}^{(3x+2)}\log 27 = {}^{5}\log 3$.
8. Jika ${}^{9}\log 8 = 3m$, tentukanlah nilai ${}^{4}\log 3$.
9. Hitunglah ${}^{a}\log (1/b)\ {}^{b}\log (1/c^2)\ {}^{c}\log (1/a^3)$.
10. Hitunglah ${}^{5}\log\sqrt{27}\ {}^{9}\log 125 + {}^{16}\log 32$.