PENENTUAN HARGA OPSI UNTUK MODEL *BLACK - SCHOLES* MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA *CRANK-NICOLSON*

Rully Charitas Indra Prahmana dan Drs. Sumardi, M. Si

Abstrak

Opsi merupakan suatu kontrak antara penjual opsi dengan pembeli opsi, dimana penjual opsi menjamin adanya hak (bukan suatu kewajiban) dari pembeli opsi untuk membeli atau menjual saham tertentu pada waktu dan harga yang telah ditentukan. *Paper* ini membahas tentang penentuan harga opsi untuk model *Black-Scholes* yang berupa persamaan diferensial parsial. Model *Black-Scholes* tipe Eropa dapat diselesaikan secara eksak, dengan mentransformasikan modelnya ke dalam bentuk persamaan panas. Kemudian, untuk mencari solusi numeriknya, digunakan metode beda hingga *Crank-Nicolson*.

Kata kunci: Opsi, Model *Black-Scholes*, Metode *Crank-Nicolson*.

Pendahuluan

Opsi adalah suatu kontrak atau perjanjian antara dua pihak, dimana pihak pertama adalah sebagai *pembeli* yang memiliki *hak* bukan *kewajiban* untuk membeli atau menjual dari pihak kedua yaitu *penjual* terhadap suatu aset tertentu pada harga dan waktu yang telah ditetapkan.

Berdasarkan periode waktu penggunaannya, opsi dikelompokkan menjadi dua, yaitu opsi tipe Amerika dan opsi tipe Eropa. Opsi tipe Amerika adalah opsi yang bisa dipergunakan sebelum waktu *expiration date* atau pada waktu *expiration date*. Sedangkan, opsi tipe Eropa adalah opsi yang bisa dipergunakan hanya pada waktu *expiration date*. Dalam *paper* ini, pembahasan akan difokuskan dalam model *Black-Scholes* dengan menggunakan asumsi opsi tipe Eropa, kemudian menyelesaikan persamaan differensialnya menggunakan metode beda hingga *Crank-Nicolson*.

Model *Black-Scholes* merupakan sebuah model yang berguna dalam menentukan harga opsi. Model *Black-Scholes* sangat berguna bagi investor, untuk menilai apakah harga opsi yang terjadi di pasar sudah merupakan harga yang dianggap *fair* bagi opsi tersebut. *Fair* disini berarti nilai opsi yang diperdagangkan (baik opsi jual maupun opsi beli) akan memiliki nilai, sebesar harga saham pada saat jatuh tempo. Jadi, terjadi peningkatan nilai selama masa opsi berlaku sampai jatuh tempo, sebesar selisih nilai saham sekarang dengan saat jatuh tempo. Sehingga, kedua belah pihak (baik penjual opsi maupun pembeli opsi) tidak ada yang dirugikan (berdasarkan model *Black-Scholes*). Ini merupakan *problem*, yang diangkat dalam penulisan *paper* ini.

Seandainya harga opsi tidak sama dengan harga yang dihasilkan dari model *Black-Scholes*, maka hal itu akan menciptakan peluang bagi investor untuk mendapatkan keuntungan.

Model Harga Saham

Menurut hipotesis efisiensi pasar bahwa harga saham merupakan gerak random. Hipotesis efisiensi pasar ini dipengaruhi oleh dua faktor yaitu keadaan saham pada waktu lalu yang berpengaruh pada harga saham saat ini dan respon saham terhadap informasi baru tentang saham. Berdasarkan kedua asumsi ini maka dapat dikatakan bahwa perubahan harga saham mengikuti proses Markov. Jadi, model saham menyatakan bahwa prediksi harga saham yang akan datang tidak dipengaruhi oleh harga satu minggu, satu bulan atau harga saham satu tahun yang lalu.

Model umum *return* dari asset dinyatakan dengan $\frac{dS}{S}$ yang dibagi kedalam dua bagian. Bagian pertama adalah bagian deterministik yang dilambangkan dengan μdt. μ merupakan ukuran dari rata-rata pertumbuhan harga saham atau dikenal sebagai *drift*. μ diasumsikan sebagai rate obligasi bebas resiko dan merupakan fungsi dari *S* dan *t* dan bagian kedua merupakan model perubahan harga saham secara random yang disebabkan oleh faktor eksternal. Faktor eksternal dilambangkan dengan σdB. Dalam rumus ini, σ didefenisikan sebagai volatilitas dari saham yang digunakan untuk mengukur standar deviasi dari *return* dan dapat dinyatakan sebagai fungsi dari *S* dan *t*. *B* dalam *dB* menotasikan gerak Brownian. μ dan σ dapat diestimasi menggunakan harga saham pada hari sebelumnya. Sehingga, diperoleh persamaan diferensial stokastik:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dB, \tag{1}$$

dengan: μ = nilai ekspektasi *rate of return* saham

σ = volatilitas saham yang merupakan standar deviasi dari *return*

B = gerak Brownian atau proses Wiener

Model *Black-Scholes*

Model *Black-Scholes* merupakan model yang digunakan untuk menentukan harga opsi yang telah banyak diterima oleh masyarakat keuangan. Model ini dikembangkan oleh Fischer Black dan Myron Scholes. Model ini penggunaannya terbatas karena hanya dapat digunakan pada penentuan harga opsi tipe Eropa (*European option*) yang dijalankan pada waktu *expiration date* saja, sedangkan model ini tidak berlaku untuk opsi tipe Amerika (*American option*), karena *American option* dapat dijalankan setiap saat sampai waktu *expiration date*. Selain itu, model ini hanya dapat diterapkan pada saham yang tidak memberikan dividen sepanjang jangka waktu opsi. Hal tersebut merupakan kekurangan dari model *Black-Scholes*, yang dapat diabaikan apabila opsinya merupakan *call option* dan tidak membayar dividen.

Model Black-Scholes menggunakan beberapa asumsi, yaitu opsi yang digunakan adalah opsi tipe Eropa (European option), variansi harga saham bersifat konstan selama usia opsi dan diketahui secara pasti, proses acak dalam memperoleh harga saham, suku bunga bebas risiko, saham yang digunakan tidak memberikan dividen, dan tidak terdapat pajak dan biaya transaksi.

Derivatif Model *Black-Scholes*

Diketahui rumus *Itô* untuk $dx = a(x,t)dt + c(x,t)dB$ adalah:

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial x}a + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}c^2\right)dt + \frac{\partial F}{\partial x}cdB.$$

$V(S,t)$ merupakan opsi pada saham *S* dan pada waktu *t*. Jika diketahui perubahan saham $dS = \mu S\ dt + \sigma S\ dB$, maka rumus *Itô* di atas menjadi:

$$dV(S,t) = \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dB + \left(\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt. \tag{2}$$

Nilai portofolio π yang terdiri dari opsi *V* dengan perubahan saham pada jangka pendek, yaitu:

$$\pi = V - \frac{\partial V}{\partial S}S. \tag{3}$$

Perubahan nilai portofolio $d\pi$ pada interval waktu singkat dt diberikan dengan:

$$d\pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \,. \tag{4}$$

Portofolio merupakan gabungan dari aset-aset. Portofolio ini dikatakan tidak berisiko karena tidak ada gerak random Brownian. Gerak Brownian menyebabkan terjadinya perubahan harga. Portofolio ini dikatakan konstan sehingga portofolio ini mempunyai pendapatan yang sama dengan saham jangka pendek lainnya yang bebas risiko. Jika pendapatan yang diperoleh lebih tinggi dari portofolio ini, maka *arbitrageur* dapat memperoleh keuntungan dengan cara memilih saham bebas risiko dan menggunakan keuntungan dari saham bebas risiko ini untuk membeli portofolio. Tetapi jika pendapatan yang diperoleh lebih kecil maka *arbitrageur* dapat memperoleh keuntungan bebas risiko dengan cara memilih portofolio dan menggunakan keuntungan ini untuk membeli saham bebas risiko. Portofolio bebas risiko dapat dinyatakan dengan $d\pi = r\pi\, dt$, dimana *r* adalah suku bunga bebas risiko.

Dengan mensubstitusi $d\pi$ dan π dari persamaan (3) dan (4) didapat:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \,. \tag{5}$$

Persamaan (5) diatas merupakan persamaan diferensial *Black-Scholes* yang digunakan untuk menentukan harga opsi.

Metode Beda Hingga *Crank-Nicolson* Untuk Model *Black-Scholes*

Diketahui bahwa persamaan diferensial parsial *Black-Scholes*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \,, \tag{6}$$

persamaan di atas dibawa ke variabel τ dengan $\tau = T - t$, diperoleh:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rS\frac{\partial V}{\partial S} + rV = 0 \,. \tag{7}$$

Pembahasan akan difokuskan pada opsi tipe Eropa. Nilai *European call option* dinotasikan dengan $C(S,t)$. Saat *expiration date t* = *T*, yaitu:

$$C(S,T) = \max(S(T) - E, 0) \,, \tag{8}$$

dengan syarat batas:

$$C(0,t) = 0 \text{ , untuk semua } 0 \le t \le T \,,$$

$$C(S,t) \approx S \text{ , untuk } S \to \infty \,. \tag{9}$$

Saat $t = T$, diperoleh $\tau = 0$, sehingga nilai *European call option* (8), menjadi:

$$C(S,0) = \max(S(0) - E, 0) \,. \tag{10}$$

Sedangkan, Nilai *European put option* dinotasikan dengan $P(S,t)$. Saat *expiration date t* = *T*:

$$P(S,T) = \max(E - S(T), 0) \,, \tag{11}$$

dengan syarat batas:

$$P(0,t) = Ee^{-r(T-t)} \text{ , untuk semua } 0 \le t \le T \text{ ,}$$

$$P(S,t) \approx 0 \text{ , untuk } S \to \infty . \tag{12}$$

Saat $t = T$, diperoleh $\tau = 0$, sehingga nilai *European put option* (11) menjadi:

$$P(S,0) = \max(E - S(0),0) . \tag{13}$$

Karena syarat batas untuk *European call* dan *put option* mempunyai domain $S \in [0,\infty]$ maka sulit untuk diselesaikan sehingga range ini harus diwakili oleh himpunan titik berhingga, sehingga domainnya menjadi $S \in [0,L]$ dimana L mempunyai nilai yang sangat besar.

Syarat batas *call option* (9) menjadi:

$$C(0,\tau) = 0 \text{ dan } C(L,\tau) = L . \tag{14}$$

Syarat batas *put option* (12) menjadi:

$$P(0,\tau) = Ee^{-r\tau} \text{ dan } P(L,\tau) = 0 . \tag{15}$$

Akan digunakan *grid* $\{jh, ik\}_{j=0,i=0}^{N_x,N_t}$, untuk menyelesaikan masalah diatas.

Diketahui, $\mathbf{V}^i = \begin{bmatrix} V_1^i \\ V_2^i \\ \vdots \\ \vdots \\ V_{N_x-1}^i \end{bmatrix} \in \Re^{N_x-1}$, menotasikan solusi numerik saat level waktu *i*. Untuk nilai $\mathbf{V}^0$, diperoleh dari syarat awal (8) atau (11) dan nilai V_0^i dan $V_{N_x}^i$, untuk semua $1 \le i \le N_t$ diperoleh dari syarat batas (14) atau (15).

Metode *Crank-Nicolson* untuk persamaan diferensial parsial (7) yaitu dengan menggunakan operator beda pusat penuh untuk $\partial V / \partial S$, beda pusat tengah untuk $\partial V / \partial \tau$ dan beda pusat order dua untuk $\partial^2 V / \partial S^2$.

Dengan mensubstitusi:

$S = jh$, $V = \frac{1}{2}\left(V_j^i + V_j^{i+1}\right)$, $\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{k}\left(V_j^{i+1} - V_j^i\right)$, $\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{1}{4h}\left(V_{j+1}^i - V_{j-1}^i + V_{j+1}^{i+1} - V_{j-1}^{i+1}\right)$, dan

$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = h^{-2}\delta_s^{\,2} = \frac{1}{2h^2}\left(V_{j+1}^i - 2V_j^i + V_{j-1}^i + V_{j+1}^{i+1} - 2V_j^{i+1} + V_{j-1}^{i+1}\right).$

pada persamaan (7) diperoleh:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rS\frac{\partial V}{\partial S} + rV = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{k}\left(V_j^{i+1}-V_j^i\right)-\frac{1}{2}\sigma^2(jh)^2\frac{1}{2h^2}\left(V_{j+1}^i-2V_j^i+V_{j-1}^i+V_{j+1}^{i+1}-2V_j^{i+1}+V_{j-1}^{i+1}\right)$$
$$-rjh\frac{1}{4h}\left(V_{j+1}^i-V_{j-1}^i+V_{j+1}^{i+1}-V_{j-1}^{i+1}\right)+r\frac{1}{2}\left(V_j^i+V_j^{i+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{k}\left(V_j^{i+1}-V_j^i\right)-\frac{1}{4}\sigma^2 j^2\left(V_{j+1}^i-2V_j^i+V_{j-1}^i+V_{j+1}^{i+1}-2V_j^{i+1}+V_{j-1}^{i+1}\right).$$
$$-\frac{1}{4}rj\left(V_{j+1}^i-V_{j-1}^i+V_{j+1}^{i+1}-V_{j-1}^{i+1}\right)+\frac{1}{2}r\left(V_j^i+V_j^{i+1}\right)=0$$

Persamaan di atas dikalikan dengan k, kemudian untuk semua V_j^i, dipindahkan ke ruas kanan, sehingga didapat:

$$(1+\frac{rk}{2})\,V_j^{i+1}-\frac{1}{4}k\sigma^2 j^2\left(V_{j+1}^{i+1}-2V_j^{i+1}+V_{j-1}^{i+1}\right)-\frac{1}{4}krj\left(V_{j+1}^{i+1}-V_{j-1}^{i+1}\right)$$
$$=(1-\frac{rk}{2})V_j^i+\frac{1}{4}k\sigma^2 j^2\left(V_{j+1}^i-2V_j^i+V_{j-1}^i\right)+\frac{1}{4}krj\left(V_{j+1}^i-V_{j-1}^i\right) \qquad (16)$$

Dibawa ke dalam bentuk matriks didapat:

$$\mathbf{C}\mathbf{V}^{i+1}=N\mathbf{V}^i+\mathbf{r}^i,$$

dimana:

$$C=\frac{1}{2}\left(I+B\right),$$

$$N=\frac{1}{2}\left(I+F\right),$$

$$\mathbf{r}^i=\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{2}k(\sigma^2-r)V_0^i\\0\\0\\\vdots\\\vdots\\\frac{1}{2}k(N_x-1)\left(\sigma^2(N_x-1)+r\right)V_{N_x}^i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}k(\sigma^2-r)V_0^{i+1}\\0\\0\\\vdots\\\vdots\\\frac{1}{2}k(N_x-1)\left(\sigma^2(N_x-1)+r\right)V_{N_x}^{i+1}\end{bmatrix}\right\},$$

$$F=(1-rk)I+\frac{1}{2}k\sigma^2 D_2T_2+\frac{1}{2}krD_1T_1,$$

$$B=(1+rk)I-\frac{1}{2}k\sigma^2 D_2T_2-\frac{1}{2}krD_1T_1,$$

$$D_1=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&\cdots&0\\0&2&0&\cdots&\cdots&0\\0&0&3&\cdots&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&\cdots&N_x-1\end{bmatrix},\ D_2=\begin{bmatrix}1^2&0&0&\cdots&\cdots&0\\0&2^2&0&\cdots&\cdots&0\\0&0&3^2&\cdots&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&\cdots&(N_x-1)^2\end{bmatrix}$$

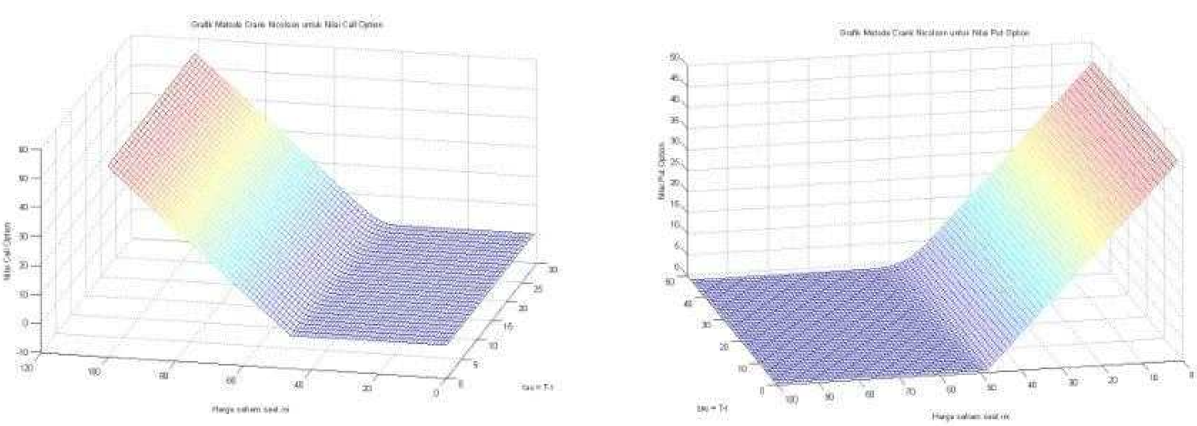
dan

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Simulasi

Sebagai ilustrasi, untuk menentukan nilai *call option* dari model *Black Scholes* diatas, maka akan diberikan contoh sebagai berikut:

Misal harga saham perusahaan A saat ini \$50 per lembar. Sementara itu, *call option* akan jatuh tempo 146 hari, kemudian di jual dengan *strike price* \$ 47. Diketahui bahwa tingkat suku bunga bebas resiko 15% per tahun dan standar deviasi tingkat keuntungan saham tersebut sebesar 24%. Dengan data tersebut, maka harga *call option* dapat dihitung, menggunakan MATLAB, dan hasilnya sebagai berikut:



Gambar 1. Grafik hasil simulasi Call Option (gambar kiri) dan Put Option (gambar kanan), dari data diatas.

Jadi, nilai Call dan Put Option, untuk soal diatas adalah:

C = 6.5838 dan P = 0.8468 (perhitungan secara numerik menggunakan metode beda hingga Crank-Nicolson). Sedangkan, untuk eksaknya, yaitu C = 6.5896 dan P = 0.85251.

Kesimpulan

Model *Black-Scholes* merupakan model untuk menentukan harga opsi yang telah banyak diterima oleh masyarakat keuangan. Model ini dikembangkan oleh Fisher Black dan Myron Scholes pada awal 1970an. Model ini memiliki bentuk berupa persamaan differensial. Sehingga, kita dapat menentukan nilai *call option* dan *put option* nya secara numerikn, dengan menggunakan metode beda hingga *Crank-Nicolson*.

Metode *Crank-Nicolson* merupakan salah satu dari beberapa metode beda hingga, yang memiliki kestabilan tanpa syarat dan nilai *error* nya paling kecil dibandingkan metode-metode lainnya.

Referensi

Higham, Desmond J., 2004. *An Introduction to Financial Option Valuation*. United Kingdom: Cambridge University Press.