Matematika Keuangan

Models of Securities Prices in Financial Markets

"Model Harga Sekuritas pada Pasar Keuangan"

- **Oleh Kelompok 3**

Muftihatur Rahmah (1111140030)

Anggi Ananda Putri (1211140003)

Rabiatul Adawiyah (1411140007)

Indah Permatasari (1411140008)

JURUSAN MATEMATIKA

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahim
Assalamu alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Segala puji syukur ke hadirat Allah swt. Karena atas rahmat-Nya sehingga penulis dapat menyusun dan menyelesaikan makalah (*summary*) tentang *Models of Securities Prices in Financial Markets* atau yang berarti Model Harga Sekuritas pada Pasar Keuangan, sebagai tugas dari mata kuliah Matematika Keuangan. Semoga makalah ini dapat bermanfaat karena sangat penting sebagai alat bantu pembelajaran sebagai mahasiswa(i) di Universitas Negeri Makassar, khususnya Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan IPA.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa dalam penyelesaian makalah ini masih terdapat banyak kekurangan dan masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, setiap kritik dan saran yang sifatnya membangun akan penulis terima guna menyempurnakan dan meningkatkan wawasan bagi penulis.

Dalam menyelesaikan makalah ini penulis banyak mendapat bantuan dari berbagai pihak, termasuk bantuan melalui media internet dan pada kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih.

Billahi fii sabilil haq,fastabiqul khairat.
Assalamu alaikum warahmatullahi wabarakatuh.

Makassar, 7 Oktober 2015

Penulis

BAB I
PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG

Pemahaman investasi secara mendalam bagi banyak pihak menjadi dirasa penting dewasa ini. Setiap mereka yang bekerja atau memiliki sejumlah finansial menginginkan memiliki pengetahuan tinggi dalam menempatkan kepemilikan dana tersebut pada tempat-tempat yang memiliki nilai *profitable*. *Profitable* artinya memiliki prospek masa depan yang cerah dan menguntungkan. Termasuk menempatkan investasi di posisi *financial invesment.* Keputusan *financial investment* artinya menempatkan sejumlah uang dengan membeli surat-surat berharga (*commercial paper*), dan pasar modal adalah tempat yang paling *representative* untuk memperoleh surat berharga tersebut. Bentuk surat berharga ada berbagai macam jenis namun yang paling familiar di mata publik adalah saham dan obligasi (*stock and bond*)

Mari mengambil suatu permasalahan untuk memahami konsep pemahaman investasi dengan lebih sederhana. Ketika anda bermain undian (*lottery*), dengan sedikit usaha dan keahlian dalam peluang (*probability*) dasar, anda dapat memperhitungkan kesempatan anda untuk memenangkan hadiah utama (*the jackpot*) jika anda mempertaruhkan $10.00. Bahkan jika anda bermain setiap bulan, dan jumlah hadiah utama juga berganti setiap bulan, anda tetap dapat menghitung kesempatan anda untuk memenangkan paling sedikit $10,000.00 selama kurun waktu satu tahun, tidak bisakah anda? Dan jika nomor tiket undian yang anda beli berubah dari bulan ke bulan, anda tetap dapat melakukan itu, jika anda mengatur diri anda untuk itu. Tapi bagaimana jika nomor undian tersebut tidak selalu punya kesempatan yang sama untuk terambil/terpilih, dan buruknya, anda tidak menceritakan kesempatan seperti apa ini, dapatkah anda tetap melakukannya? Anda mungkin akan mengatakan "untuk mengekspresikan kekesalan pada lotre ini" dan mengambil kembali uang anda pada permainan *blackjack* di suatu mesin kasino Las Vegas. Atau, anda akan membuat beberapa asumsi tentang peluang dari nomor-nomor undian tersebut dan menggunakan hal ini untuk perhitungan anda. Dengan begitu maka anda telah membuat suatu model matematika dari permainan undian. Inilah apa yang peneliti lakukan dengan harga dari sekuritas.

Pada hakikatnya semua dasar dalam model matematika telah digunakan, para peneliti dihadapkan dalam suatu penjualan antara betapa realistis suatu model seharusnya dan untuk memudahkan penghitungan dan menemukan solusi dari model tersebut. Model yang lebih kompleks dapat lebih realistis, tapi juga lebih sulit untuk digunakan. Dalam ilmu ekonomi dan peneliti keuangan kadang-kadang menggunakan model yang dengan lucunya terkesan sederhana. Intinya adalah, mereka lebih dulu memahami kebiasaan kualitatif dari objek yang akan dimodelkan (harga, investor, perusahaan, dan sebagainya) kemudian menemukan kesimpulan kuantitatif yang dapat dipercaya (misalkan beberapa banyak investor yang harus berinvestasi pada saham). Sekali pemahaman awal dan interpretasi diperoleh, seseorang dapat mencoba untuk membuat model yang lebih realistis dan melihat apakah kesimpulan dasar dari model sederhana tersebut berubah banyak atau tetap sama.

Pada makalah ini penulis akan membahas mengenai model sekuritas dalam pasar finansial. Pertama penulis akan memulai membahas dengan mempertimbangkan model periode tunggal sederhana, kemudian berlanjut dengan yang lebih kompleks, yaitu model multiperiode, dan diakhiri dengan model waktu kontinu. Dalam semua pemodelan tersebut, harga dimodelkan sebagai acak, dengan menggunakan proses stokastik yang nilainya berubah sesuai dengan kondisi waktu tertentu. Pada bagian waktu kontinu akan diperkenalkan proses gerak Brownian yang sangat penting penggunannya. Disini dibahas model stokastik untuk suku bunga dan perbedaan antara tingkat riil dan nominal. Kemudian penulis akan memperkenalkan dua konsep terkait yang berperan penting dalam konsep pasar finansial yaitu arbitrasi dan pasar lengkap.

BAB II
PEMBAHASAN

A. MODEL PERIODE TUNGGAL

Semua teori dari pasar finansial didasarkan pada model dari dasar sekuritas. Yang paling sederhana, yang mengasumsikan bahwa hanya ada dua waktu yaitu awal dan akhir. Oleh karena itu harga sekuritas hanya berubah satu kali. Tepatnya, sekuritas, disimbolkan dengan S, dimulai dengan nilai $S(0)$ diwaktu awal, $t=0$, pada periode tertentu, dan diakhiri dengan nilai $S(1)$ pada akhir periode, $T=1$. Model seperi ini disebut model periode tunggal (*single-period model*). Jika sekuritas penuh resiko (misalnya, jika nilai saham pada waktu yang akan datang tidak diketahui), kemudian $S(1)$ dimodelkan sebagai variabel acak, yang nilainya akan dinyatakan pada waktu 1. Model periode tunggal juga dapat digunakan sebagai langkah awal dalam membangun model multiperiode; dan ini mungkin dapat sangat memadai dalam situasi dimana seorang inverstor yang pemberani (sebut saja Fulan) akan menahan investasi untuk sementara dan merencanakan untuk menjadi “pasif” dalam masa itu.

1. Dinamika Aset

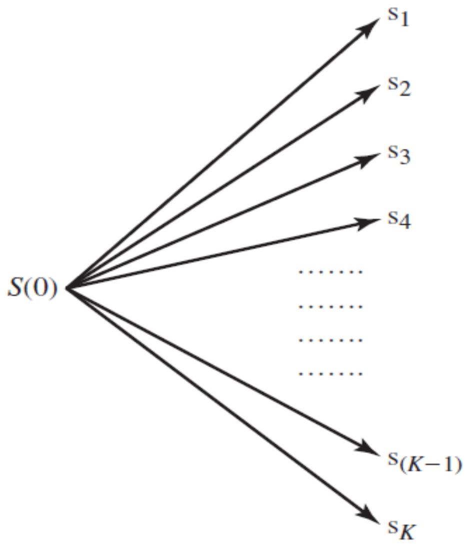
Bergantung pada tujuan dari model periode tunggal, variabel acak $S(1)$ bisa dimodelkan dengan mengambil dua kemungkinan nilai, tiga, empat, dan seterusnya, termasuk nilai yang tidak terbatas. Faktanya, $S(1)$ bisa dimodelkan sebagai variabel acak diskrit ataupun kontinu. Suatu nilai bilangan terbatas biasanya cukup jika model yang digunakan sebagai langkah dalam membuat model multiperiode. Untuk lebih jelasnya, mari membandingkan model periode tunggal pasar terbatas (*single-period finite-market model*):

Asumsikan bahwa $S(1)$ adalah variabel acak dan dapat diambil K nilai yang mungkin, $s_1,\dots,s_{K,}$ dengan peluang $p_i=P[S(1)=s_i]$ lihat gambar 1. Secara formal, mepertimbangkan suatu contoh ruang $\Omega=\{\omega_1,\dots,\omega_K\}$ dari semua kemungkinan keadaan pada waktu 1, masing-masing memiliki peluang positif. Jika saham ω_1 terpilih, maka $S(1)=s_i$.

Seringkali dianggap bahwa ada aset bebas resiko (*risk-free asset*) B pada pasar, obligasi atau rekening bank (*bank account*), sehingga:

$$B(0) = 1$$

dan sehingga $B(1)$ menjadi sangat positif untuk setiap keadaan. Secara khas, bisa juga diasumsikan $B(1) \geq B(0)$.



Gambar 1
Model periode tunggal : Ada K nilai yang mungkin untuk harga saham pada waktu 1.

Ketentuan $B(0) = 1$ seharusnya diinterpretasikan sebagai *"satu bagian" dari rekening bank, atau satu obligasi, adalah bernilai satu dollar pada waktu nol.* Sehingga, $B(1)$ adalah nilai pada waktu 1 dari satu dollar yang diinvestasikan pada bank di waktu 0. Jika r disimbolkan sebagai suku bunga (*interest rate*) bank dalam satu periode ini, dapat ditulis

$$B(0) + rB(0) = B(1) \tag{1}$$

atau, ekuivalaen dengan $r = B(1) - 1$

2. Portofolio Dan Proses Kekayaan

Anggap sekarang suatu model pasar dimana ada sejumlah N sekuritas atau saham penuh resiko, $S_1, \ldots, S_N$ dan rekening bank atau obligasi B. Fulan sang investor mengambil posisi pada pasar aset. Akan disimbolkan $X(t)$ sebagai nilai dari posisi ini dengan waktu t , yang disebut proses kekayaan (*wealth process*) Fulan. Diasumsikan bahwa Fulan mulai dengan sejumlah kekayaan awal (*initial wealth*) pada waktu 0,

$$X(0) = x$$

dan menggunakan jumlah ini untuk investasi pada sekuritas yang tersedia. Sejak model periode tunggal ini, Taf telah berdagang satu kali, tepat pada waktu nol. Banyaknya sekuritas i yang dipegang oleh Fulan antara waktu 0 dan waktu 1 disimbolkan $\delta_i, i=1,\ldots,N$. Jumlah kekayaan yang diinvestasikan melalui rekening bank pada waktu nol dapat dituliskan dengan δ_0 . Diasumsikan bahwa tidak ada biaya transaksi ketika pemindahan dana antar sekuritas. Kemudian kekayaan Fulan pada akhir periode dapat dituliskan

$$X(1)=\delta_0 B(1)+\delta_1 S_1(1)+\ldots+\delta_N S_N(1)$$

Ini adalah kekayaan yang merupakan jumlah kekayaan dari investasi yang dipegang oleh Fulan dalam berbagai aset. Vektor posisinya adalah

$$\bar{\delta}=\delta_0,\ldots,\delta_N$$

disebut strategi portofolio (*portfolio strategy*), strategi perdagangan (*trading strategy*), atau portofolio sederhana (*simply portfolio*). Portofolio Fulan seharusnya memenuhi beberapa bentuk dari batas anggaran. Bentuk batasan anggaran ini disebut *self-financing condition* (kondisi pembiayaan diri):

$$X(0)=\delta_0 B(0)+\delta_1 S_1(0)+\ldots+\delta_N S_N(0) \quad (2)$$

Dengan kata lain Fulan tidak bisa menggunakan dana lain dibandingkan kekayaan awal pada posisi keuangan di pasar, dan Fulan tidak diizinkan membelanjakan uangnya di luar pasar. Kondisi ini menyiratkan bahwa kekayaan yang diinvestasikan di bank ($\delta_0 ¿$ secara otomatis ditentukan jika diketahui seberapa besar yang harus diinvestasikan dalam aset penuh resiko. Penjualan yang rendah pada rekening bank ekuivalaen dengan meminjam dari bank. Untung/rugi (*Profit and Loss*: P&L) pada strategi portofolio δ dirumuskan

$$G=X(1)-X(0)$$

dan akan disebut proses keuntungan (*gain process*). Jika dirumuskan

$$\Delta S_1=S_i(1)-S_i(0)$$

keuntungan pembagian dari sekuritas S_i , hal ini sesuai definisi dan persamaan (1) bahwa

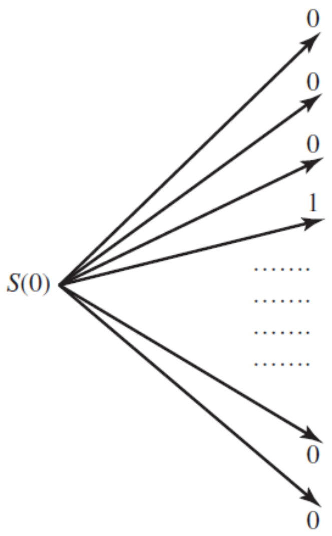
$$G=\delta_0 r+\delta_1 S_1+\ldots+\delta_N S_N$$

Berikut adalah hubungan antara proses keuntungan dan kekayaan :

$$X(1)=X(0)+G$$

3. Sekuritas Arrow-Debreu

Ahli ekonomi terkenal Kenneth Arrow dan Gerard Debreu mengembangkan beberapa kerangka dasar dari banyak gagasan ekonomi. Dibandingkan dengan model dasar yang dideskripsikan pada bagian dinamika aset dimana ada K yang mungkin, atau dihasilkan pada $t=1$. Sekuritas S bisa dideskripsikan sebagai vektor dimensi K sehingga $(S_1,\ldots,S_k)$ tentang hasil saham tesebut. Dimana semua komponen dari vektor tidak negatif. Dalam hal ini, menganggap sekuritas beresiko merupakan satu unit mata uang yang diberikan pada bagian tersebut dan nol untuk setiap bagian yang lain. Sekuritas inilah yang disebut sekuritas Arraw-Debreu (*Arraw-Debreu securities*); lihat gambar (2). Ada K yang berbeda pada sekuritas Arraw-Debreu. Gambar (2) memperlihatkan potongan harga obligasi yang pembayaran bunganya ditentukan oleh selisih antara pembayaran satu unit pada waktu $t=1$ dan harga pada $t=0$. Sekuritas Arraw Debreu adalah sekuritas sederhana yang bisa digunakan untuk menjelaskan beberapa sekuritas pada model periode tunggal.



Gambar 2
Sekuritas Arraw Debreu membayar satu pada bagian 4 dan membayar nol pada bagian yang lain.

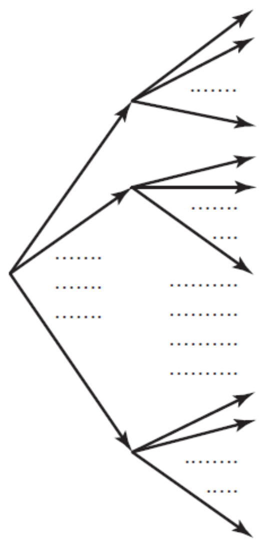
B. MODEL MULTIPERIODE

Model multiperiode (*multiperiod model*) merupakan pengembangan langsung dari model periode tunggal. Kita membagi periode waktu dengan sederhana dan membandingkannya kedalam interval waktu yang lebih sempit, yang diperagakan dengan periode tunggal. Lihat gambar 3.

1. Spesifikasi Model Umum (General Model Specifications)

Kita tetap menyimbolkan waktu awal dengan $t=0$, kemudian kita menggunakan $t=T$ sebagai notasi periode akhir. Lebih tepatnya waktu berjalan mulai dari nilai $0,1,\ldots,T$, dan proses harga sekuritas S_i digambarkan sebagai urutan dari variabel acak $S_i(0),\ldots,S_i(T)$. Dengan cara yang sama, strategi portofolio $\vec{\delta}$ akan berubah secara acak seiring dengan waktu. Kita menotasikan nilai portofolio selama interval ¿ dengan $\vec{\delta}(t)$. Dengan kata lain nilai portofolio $\delta_i(t)$ yang dipilih pada waktu $t-1$, berdasarkan kesepakatan. Dengan itu kita mengasumsikan bahwa perdagangan pada selang waktu $t-1$ ke t berlangsung pada awal periode, yaitu pada waktu $t-1$, dan selanjutnya nilai protofolio $\vec{\delta}(t)$ untuk periode ¿ hanya dapat bergantung pada informasi yang diketahui oleh waktu $t-1$. Kita dapat mengatakan bahwa $\vec{\delta}(t)$ adalah proses prediksi (*predictable*) dan previsibel (*previsible*). Jika harga $S_i(t-1)$ diketahui, Fulan memilih portofolio $\vec{\delta}(t)$ yang akan menentukan kekayaan pada waktu t , setelah harga $S_i(t)$ diketahui.

Sebagian besar dari terminologi dan notasi dari periode tunggal itu sama:



Gambar 3
Model dua periode dengan banyaknya bagian tebatas.

Tingkat bunga (*interest rate*) pada periode $t-1$ sampai t :

$$r(t)=\frac{B(t)-B(t-1)}{B(t-1)}$$

Proses kekayaan (*wealth process*):

$$X(t)=\delta_0(t)B(t)+\delta_1(t)S_1(t)+\ldots+\delta_N(t)S_N(t) \quad , \quad t=1,\ldots,T$$

Kondisi keuangan pribadi (*Self-financing condition*):

$$X(t)=\delta_0(t+1)B(t)+\delta_1(t+1)S_1(t)+\ldots+\delta_N(t+1)S_N(t) \quad , \quad t=0,\ldots,T-1 \tag{3}$$

Sama dengan persamaan sebelumnya untuk $X(t)$, maksud kondisi ini adalah kekayaan sebelum transaksi sama dengan kekayaan setelah transaksi. Dengan kata lain tidak ada dana yang ditambahkan ataupun ditarik dari proses kekayaan.

Proses keuntungan (*Gains process*): kita tetap menotasikan jumlah keuntungan dan kerugian pada waktu t dengan $G(t)$ yakni:

$$G=\sum_{s=1}^{t}\delta_0(s)\Delta B(S)+\sum_{s=1}^{t}\delta_1(s)\Delta S_1(s)+\ldots+\sum_{s=1}^{t}\delta_N(s)\Delta S_N(s)$$

dimana $t=1,\ldots,T$ (4)

dimana $\Delta Yt=Y(t)-Y(t-1)$ untuk memperlihatkan proses dari Y. (Sigma pada persamaan diatas akan berubah menjadi integral pada model waktu kontinu.) Kita tetap menggunakan :

$$X(t)=X(0)+G(t) \tag{5}$$

dan

$$\acute{X}(t)=\delta_0(t)+\sum_{i=l}^{N}\delta_i(t)\acute{S}_i(t)=X(0)+G(t) \tag{6}$$

Disini, dengan model periode tunggal :

$$\acute{G}(t)=\sum_{s=1}^{t}\delta_1(s)\Delta\acute{S}_1(s)+\ldots+\sum_{s=1}^{t}\delta_N(s)\Delta\acute{S}_N(s)$$

dimana

$$\Delta\acute{S}_i(t)=\acute{S}_i(t)-\acute{S}_i(t-1)$$

Disini akan diperlihatkan bukti dari persamaan (5) pada kasus yang melibatkan $S, B,$ dan dua periode $t=2$.

$$G(2)=\delta_0(1)[B(1)-B(0)]+\delta_0(2)[B(2)-B(1)]+\delta_1(1)[S(1)-S(0)]+\delta_1(2)[S(2)-S(2)]$$

Dengan menggunakan persamaan kondisi keuangan pribadi *(self-financing condition)*

$$\delta_0(1)B(1)+\delta_1(1)S(1)=\delta_0(2)B(1)+\delta_1(2)S(1)$$

terlihat bahwa : $G(2)=\delta_0(2)B(2)+\delta_1(2)S(2)-[\delta_0(1)B(0)+\delta_1(1)S(0)]$

Berdasarkan definisi dari $X(2)$ dan *self-financing condition* diperoleh

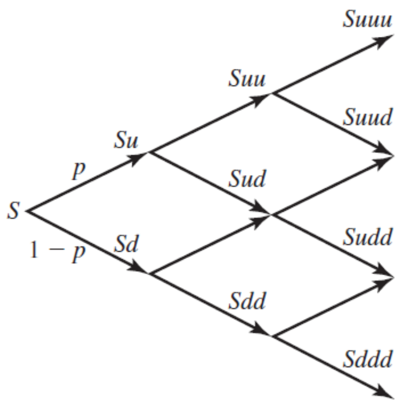
$$\delta_0(1)B(0)+\delta_1(1)S(0)=\delta_0(0)B(0)+\delta_1(0)S(0)$$

akhirnya, diperoleh

$$G(2)=X(2)-X(0)$$

2. Model Binomial Cox-Ross-Rubinstein (Cox-Ross-Rubinstein Binomial Model)

Kita akan memodelkan pasar hanya dengan menggunakan satu aset resiko S , saham (*stock*), dan rekening bank (*bank account*) dengan suku bunga $r>0$ untuk setiap periode. Sangat sederhana tetapi tetap menggunakan model multiperiode stokastik



Gambar 4
Pohon binomial dengan tiga periode waktu.

yaitu sebuah model sekuritas yang penuh dengan resiko S dapat melompati dua kemungkinan nilai pada masing-masing titik setiap waktu. Untuk membuatnya sederhana bandingkan nilai $u>1+r$ dan $d>1+r$ (u untuk naik (*up*) dan d untuk turun (*down*)) dan diasumsikan bahwa peluang bergerak naik dan turun disamakan dengan

$$p := P[S(t+1)=uS(t)] \quad , \qquad\qquad q := 1-p=P[S(t+1)=dS(t)] \quad ,$$

dengan kata lain pada setiap titik waktu, harga saham dapat meningkat oleh faktor u dan turun oleh faktor d . Kita selalu mengasumsikan bahwa perubahan harga pada waktu yang berbeda terjadi secara independen. Model tersebut disebut model binomial (*binomial model*) atau model CRR (Coss-Ross-Rubinstein). Meskipun sederhana, model ini sangat berguna sebagai pendekatan yang baik untuk realitas.

Model ini akan menghasilkan pohon binomial (*binomial tree*) seperti pada gambar 4. Dapat dikatakan bahwa pohon ini merupakan penggabungan kembali (*recombining*) karena pada faktanya pergerakan naik dan turun menghasilkan nilai yang sama sebagai saham yang mengalami pergerakan naik-turun. Sifat ini merupakan nilai numerik yang sangat baik, karena dapat mengurangi jumlah kemungkinan harga untuk harga saham.

C. MODEL WAKTU KONTINU

Finansial waktu kontinu (*Continuous-time finance*) berurusan dengan model matematika pasar finasial dimana agen dapat melakukan transaksi secara terus menerus, lebih baik dibandingkan dengan periode waktu diskrit saja. Dengan demikian harga pasar sekuritas harus dapat dimodelkan dengan waktu kontinu. Mengapa perdagangan diskrit dapat berjalan secara terus menerus? Alasan utamanya adalah karena kemudahan dan keeleganan matematika. Yang jadi masalah pada model waktu multiperiode diskrit adalah mereka akan cepat menjadi sulit untuk perhitungan dan notasi cenderung menjadi rumit. Selain itu, model waktu kontinu memberikan kesempatan kepada dinamika model harga kompleks untuk menggunakan sebagian kecil model parameter yang memiliki penafsiran intuitif yang bagus, sehingga setiap batas dari model waktu multiperiode diskrit dimana panjang setiap periode waktu $\Delta t=t_{k+1}-t_k$ mendekati nol.

Model waktu kontinu lebih mengedepankan konsep-konsep matematika daripada model waktu diskrit. Sebagai balsannya mereka akan memberikan solusi yang tegas pada penetapan harga standar dan masalah investasi, yang menggunakan kalkulus diferensial.

1. Fakta Sederhana Model Merton-Black-Scholes

Pada model Merton-Black-Scholes ada asset bebas beresiko B yang disebut obligasi atau rekening bank memenuhi :

$$B(t)=e^{rt} \tag{7}$$

dengan $r>0$ sebagai konstanta, selanjutnya digabung dengan kurs bunga (*interest rest*). Ada juga sekuritas berisiko (*risky security*) yang disebut dengan saham (*stock*). Harga saham S memenuhi

$$S(t)=S(0)-\exp\left\{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma\sqrt{t}\,z(t)\right\} \tag{8}$$

Dimana μ dan $\sigma>0$ sebagai konstanta, dan $z(t)$ adalah standar normal variabel acak, jika konstanta σ sangat dekat dengan nol maka harga saham kurs bunga μ . Distribusi $S(t)$ disebut distribusi lognormal (*lognormal distribution*) karena logaritma dari $S(t)$ adalah distribusi normal.

Parameter konstan μ mewakili pengembalian kurs saham, karena ini dapat diperlihatkan dari kekayaan ditribusi normal yaitu :

$$E[S(t)]=S(0)e^{\mu t}$$

Oleh karena itu, kami mengharapkan harga saham akan terus meningkat secara eksponen pada kurs konstan μ . Ditulis secara berbeda, kita dapat melihat bahwa μ sama dengan logaritma pengembalian relatif yang diharapkan per unit waktu:

$$\mu=\frac{1}{t}\log E\left[\frac{S(t)}{S(0)}\right]$$

Persamaan ini bisa digunakan untuk menaksir μ berdasarkan data riwayat saham. Bagaimanapun, hal ini menunjukkan prosedur ini sngat sulit untuk dipraktekkan.

Konstanta σ membahayakan saham, itulah kenapa ia disebut volatilitas (*volatility*) saham, kuadrat dari volatilitas σ^2 sama dengan variansi logaritma pengembalian perunit waktu:

$$\sigma^2=\frac{var[\log\{S(t)\}-\{S(0)\}]}{t}$$

(9)

Persamaan ini bisa digunakan sebagai dasar penaksiran σ^2 dari riwayat data.

2. Proses Gerak Brownian

Dasar dari model waktu kontinu dikemudikan oleh proses acak yang disebut gerak Brownian (*Brownian motion*) atau proses Wiener (*Wiener process*), yang nilai waktunya didefinisikan sebagai $W(t)$. Terlebih dahulu diperkenalkan melalui langkah heuristik, sebagai limit dari model waktu diskrit :

$$W(t_k+1)=W(t_k)+¿ \; \overset{t}{z(¿¿k)}\sqrt{\Delta t} \quad , \quad W(0)=0 \tag{10}$$

Dimana $\overset{t}{\underset{¿}{z(¿¿k)}}$ adalah standar normal variabel acak, independen satu sama lain. Hal ini sesuai dengan distribusi variabel acak $W(t_k+1)-W(t_k)$ dengan rata-rata nol dan variansi Δt . Lebih umumnya untuk $k<1$

$$W(t_k+1)-W(t_k)=\sum_{i=k}^{l=1} z(t_i)\sqrt{\Delta t}$$

Ini sesuai dengan ditribusi normal $W(t_1)-W(t_k)$ dengan rata-rata 0 dan variansi t_1-t_k proses W disebut proses *random walk* (bergerak acak). Pada limit Δt mendekati nol.

Definisi 1 (Gerak Brownian)

a. $W(t)-W(s)$ adalah distribusi normal dengan rata-rata nol dan variansi $t-s$, untuk $s>t$

b. Proses W memiliki kenaikan independent, untuk satuan waktu $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ dan

variabel acak $\begin{array}{c} t \\ t \\ t \\ t \\ t \\ t \\ (¿¿n-1) \\ (¿¿n)-W¿ \\ (¿¿2),\ldots,W¿ \\ (¿¿3)-W¿ \\ (¿¿1),W¿ \\ (¿¿2)-W¿ \\ W¿ \end{array}$ yang juga independent

c. $W(0)=0$

d. $\{w(t); t \geq 0\}$ merupakan fungsi kontinu pada t

Kondisi a menunjukkan bahwa rata-rata ukur (nilai harapan) $[W(t+\Delta t)-W(t)]^2$ menunjukkan reaksi seperti Δt , untuk $\Delta t > 0$

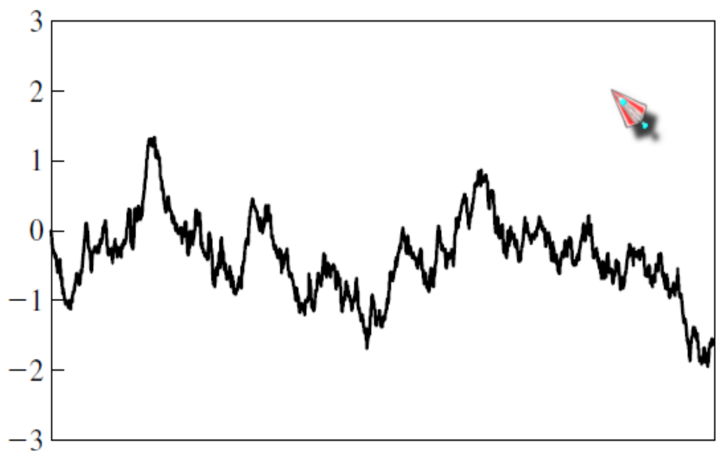
Jika kita berpikir W sebagai proses harga, kondisi b menunjukkan bahwa adanya perubahan harga besok yang independen dengan perubahan harga hari ini.

Kondisi c hanya suatu konvensi, konvensi yang tetap menunjukkan proses rata-rata yang sama dengan nol.

Pada kondisi d menunjukkan bahwa gerak Brownian tidak akan mengalami penurunan. Secara intuitif, untuk setiap titik waktu selama interval waktu berikutnya, gerak Brownian bisa bergerak kemana saja pada saat mengalami kenaikan dari distribusi normal. Perilaku ini dapat ditunjukkan dengan:

$$E\left[\left(\frac{W(s)-W(t)}{t-s}\right)^2\right]=\frac{1}{t-s}$$

dimana s cenderung mendekati t . Simulasi proses gerak Brownian ditunjukkan pada gambar 5.



Gambar 5
Alur gerak brownian.

Ini memperlihatkan bahwa gerak Brownian adalah proses Markov—distribusi dari nilai masa depan, kondisi pada masa yang lalu dan nilai sekarang, dan hanya bergantung pada nilai yang sekarang dan tidak pada masa lalu. Selain itu, pengkondisian informasi sekarang (yang setara dengan pengkondisian pada masa lalu dan masa sekarang), dengan menggunakan harapan bersyarat dan fakta bahwa $W(t)-W(s)$ adalah $W(s)$ yang independen. Kita menemukan

$$W(s)$$
$$¿$$
$$-¿$$
$$w(t)-W(s)¿$$
$$E[W(t)|W(s)]=E¿$$

$$w(t)-W(s)+W(s)$$
$$¿E¿$$

$$¿W(s)$$

Oleh karena itu, nilai harapan dari hasil masa depan gerak Brownian, bergantung pada informasi masa lalu dan masa sekarang. Hal tersebutlah yang disebut proses martingal yang dirumuskan dengan :

$$W(t)|W(s)=W(s)$$
$$E¿$$

Definisi yang lebih tepat mengenai proses martingal pada waktu kontinu memerlukan pengertian aljabar σ dengan ekspektasi bersyarat yang berhubungan dengan aljabar σ . Secara intuitif, aljabar σ $F(t)$ mewakili informasi tersedia hingga waktu t.

D. PEMODELAN SUKU BUNGA (*Modeling Interest Rate*)

Madura (2000) menjelaskan bahwa perubahan tingkat suku bunga akan berdampak pada perubahan jumlah investasi di suatu negara, baik yang berasal dari investor domestik maupun dari investor asing, khususnya pada jenis investasi portofolio yang umumnya berjangka pendek (termasuk dalam investasi di pasar modal).

Perubahan tingkat suku bunga ini akan berpengaruh pada perubahan jumlah permintaan dan penawaran di pasar uang domestik. Apabila dalam suatu negara terjadi peningkatan aliran modal masuk *(capital inflows)* di luar negeri, hal ini menyebabkan terjadinya perubahan nilai tukar mata uang negara tersebut terhadap mata uang asing di pasar valuta asing. Adapun pengertian suku bunga *(interest rate)* menurut Samuelson dan Nordaus (1992) adalah sebagai berikut : *Interest* adalah pembayaran yang dilakukan atas penggunaan sejumlah uang. *Interest rate* adalah jumlah interest yang dibayarkan per unit waktu atau orang harus membayar untuk kesempatan meminjam uang.

Penelitian oleh Lee (1992), menemukan bahwa perubahan tingkat suku bunga (*interest rate*) mempunyai pengaruh yang signifikan terhadap indeks harga saham. Sementara Tandelilin (1997), yang ingin membuktikan apakah variabel tingkat inflasi, tingkat suku bunga dan perubahan GDP mempengaruhi risiko sistematis, menemukan bahwa tingkat suku bunga secara parsial terbukti berpengaruh signifikan terhadap risiko sistematis. Penelitian oleh Ang & Bekaert (2001) juga menemukan pengaruh yang signifikan antara tingkat suku bunga jangka pendek dengan *return* saham.

E. SUKU BUNGA NOMINAL DAN SUKU BUNGA RIIL

1. Suku Bunga Nominal

Suku bunga nominal adalah suku bunga yang biasa kita lihat bank atau media cetak. Misalnya perusahaan meminjam uang dari bank sebesar $100.000 selama setahun pada suku bunga nominal 10%, maka pada akhir tahun perusahaan harus mengembalikan pinjaman tersebut sebesar $110.000 (yaitu $100.000 x 10%).

Suku bunga nominal cenderung naik seiring dengan angka inflasi. Jika, misalnya, bank memberlakukan suku bunga 10% pada ekspektasi inflasi selama satu tahun ke depan adalah

0%, maka bank mungkin akan memberlakukan suku bunga 13% jika ekspektasi inflasinya adalah 3%.

2. Suku Bunga Riil

Suku Bunga Riil adalah suku bunga setelah dikurangi dengan inflasi, (atau suku bunga riil = suku bunga nominal – ekspektasi inflasi). Misalnya pada contoh diatas inflasi yang diantisipasi adalah sebesar 3% dan suku bunga nominal naik menjadi 13%, maka suku bunga riil sebenarnya tidak berubah (yaitu 13% – 3%).

Suku bunga riil sangat penting dipertimbangkan. Bagi orang yang menabung uang di bank, misalnya, dengan tingkat suku bunga 5% dan inflasi tahun tersebut ternyata sebesar 4%, maka suku bunga riil yang ia peroleh hanyalah sebesar 1%. Hal ini dikarenakan inflasi yang terjadi selama ia menabung uang telah mengurangi nilai keuntungan (bunga) yang diperoleh. Sementara bagi orang yang meminjam uang dari bank, jika suku bunga pinjaman sebesar 12% dan tingkat inflasi sebesar 5%, maka suku bunga riil yang harus dibayar hanyalah 8%. Ini dikarenakan harga barang dan jasa (termasuk pendapatan si peminjam) rata-rata naik sebesar 5%, sehingga biaya atas pinjaman (cost of capital) hanya tinggal 8%.

F. ARBITRASI DAN PASAR KELENGKAPAN (*Arbitagre and Market Completeness*)

Teori ini bergantung pada dua pengertian yang paling mendasar yang akan kita jelaskan pada bagian ini yaitu arbitrasi dan pasar kelengkapan atau ketiadaan arbitrasi. Selain itu, terdapat sifat-sifat lain yang dibutuhkan dari pemodelan pasar finansial untuk teori tradisional pilihan penetapan harga pada pekerjaan yaitu ada atau tidanya transaksi biaya, tidak ada pembatasan atau hukuman pada pinjaman atau penjualan singkat, dan tidak ada keterbatasan dari jenis lain pada pilihan portofolio. Pasar yang memuaskan kebutuhan tersebut disebut pasar yang sempurna.

1. Gagasan Arbitrasi

Kami mengatakan bahwa ada peluang arbitrasi ketika seseorang memiliki probabilitas positif untuk mencapai keuntungan positif tanpa resiko kerugian. Contoh yang jelas nmengenai kesempatan arbitrasi adalah situasi yang sangat memungkinkan untuk membeli dan menjual item secara bersamaan dengan harga yang berbeda. Contoh dari pasar di mana peluang arbitrasi mungkin timbul adalah pasar valuta asing.

Contoh. Anggaplah ahli devisa kita Fulan akan mengamati dua kutipan dari dua pedagang yang berbeda untuk yen/U.S dollar dengan nilai tukar 115 yen/dolar dan 115.5 yen/dolar, masing-masing: dia harus secara bersamaan membeli yen di Bursa 115.5 dan menjualnya pada nilai tukar 115. Dia membayar 1 dollar/115.5 yen dan mendapatkan kembali 1/115. Jika ia dapat membeli dan menjual sejumlah besar untuk dua pedagang pada harga ini, ia dapat membuat banyak uang.

Secara matematis, kita mengatakan bahwa ada arbitrasi pada pasar jika ada strategi perdagangan δ seperti:

$$X \text{¿} P \text{¿} \quad X^{\delta}(0)=0 \, X^{\delta}(T)\geq 0 \text{¿} \quad , \quad T>0 \tag{11}$$

dimana $X^{\delta}(t)$ adalah kekayaan pada waktu t sesuai dengan strategi portofolio δ dan menotasikan probabilitas dengan P.

Peluang arbitrasi tidak bisa berlaku di (dalam) pasar uang untuk periode waktu yang lama, model standard berasumsi bahwa tidak ada peluang arbitrasi Sesungguhnya, kebanyakan dari literatur finansial berdasar pada ketidakadaan arbitrasi untuk harga sekuritas dan batas posisi keuangan. Di (dalam) bagian berikut kita akan mendiskusikan dengan singkat arbitrasi dalam berbagai model keuangan.

Kita akan tetap menganggap bahwa arbitrasi pada contoh yen adalah model independen. Tidak ada hubungan distribusi probilitas pada nilai tukar jika perdagangan tidak dapat ditampilkan secara instan pada harga yang diberikan.

2. Arbitrasi Dalam Pemodelan Waktu Diskrit

Pertama kita akan membandingkan model periode tunggal, kita menotasikan pembayaran sekuritas i dengan S_i^k jika pengeluaran kita pada waktu 1, $k=1,\ldots,K$. Kesempatan arbitrasi akan ada jika ada portofolio $\bar{\delta}$ seperi berikut :

$$\delta_0 B(0)+\delta_1 S_1(0)+\ldots+\delta_N S_N(0)=0$$

dan

$$\delta_0 B(1)+\delta_1 S_1^k(1)+\ldots+\delta_N S_1^k(1)\geq 0 \; k=1,\ldots,K$$

dengan paling tidak ada satu k maka

$$\delta_0 B(1)+\delta_1 S_1^k(1)+\ldots+\delta_N S_1^k(1)>0$$

Kita selalu mengilustrasikan persamaan arbitrasi dalam pemodelan waktu tunggal.

3. Arbitrasi Dalam Pemodelann Waktu Kontinu

Dalam pemodelan waktu kontinu gagasan mengenai arbitrasi akan jauh lebih baik dibandingkan dengan pemodelan waktu diskrit. Sebab pedagangan kontinu mengizinkan beberapa strategi pemasaran yang aneh yang mungkin menghasilkan arbitrasi pada kondisi pasar normal. Strategi sperti itu mungkin juga tidak mungkin diimplementasikan pada prakteknya dan pada prinsipnya akan dikelurkan dari pertimbangan.

Kita akan mengunakan kondisi (11) untuk menggolongkan arbitrasi kedalam modelwaktu kontinu. Disini kita akan memperlihatkan contoh ketika arbitrasi dapat dimunculkan dalam pemodelan waktu kontinu. Membandingkan pemodelan Merton-Black–Schole dengan dua saham yang mempunyai volatilti yang sama σ dan bergerak dengan gerak brownian yang sama W. Akan ada kesempatan arbitrasi jika

$$\mu_1 \neq \mu_2$$

Sebagai contoh, dengan menganggap $\mu_1 > \mu_2$ kita dapat menjual short $S_1(0)/S_2(0)$ bagian saham 2 dan membeli satu bagian saham 1. Harga awal strategi ini adalah nol. Kita membuat keuntungan positif pada waktu T sama dengan

$$S_1(T)-\frac{S_1(0)}{S_2(0)}S_2(T)=S_1(0)e^{\sigma W(T)-\frac{T\sigma^2}{2}}e^{\mu_1 T}-e^{\mu_2 T}$$

Secara umum, membandingkan ekonomi yan dideskripsikan oleh proses independen gerak Brownian d dan N sekuritas beresiko S_i . Mari kita menganggap C sebagai notasi dari kombinasi linear dari sekuritas tersebut.

$C(t)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i S_i(t)$, untuk sebarang konstan λ_i . Dianggap C memenuhi dinamika

$$dC(t)=\mu_i C(t)dt+\sum_{j=1}^{d}\sigma_j(t)C(t)dW_J d(t)$$

Dengan μ_1 dan σ_j mrupakan proses acak yang mungkin. Juga mengasumsikan bahwa ada sekuritas S dengan dinamika harga yang memiliki struktur volatiliti yang sama dan mengikuti proses gerak Brownian yang sama :

$$dS(t)=\mu_2(t)S(t)dt+\sum_{j=1}^{d}\sigma_j(t)S(t)dW_j(t) \tag{12}$$

Jika ada interval waktu dimana $\mu_1(t)<\mu_2(t)$, kita bisa membangun strategi arbitrasi sebelumnya denga posisi yang dekat atau jauh di C dan S. kita juga dapat melakukannya jika kita berada pada interval dimana $\mu_1(t)<\mu_2(t)$.

4. Perkiraan Pasar Sempurna

Alasan mengapa sifat pasar sempurna penting, sebab pada pasar sempurna setiap kontrak finasial memiliki harga promosi yang unik. Ini merupakan pengertian yang rumit yang memungkinkan para pelaksana pasar untuk menetapkan harga semua jenis kontrak yang rumit dengan cara yang konsisten Yaitu mempertimbangkan sekuritas relatif satu sama lain.

Sekarang dengan membandingkan beberapa pemodelan yang telah kita perkenalkan sebelumya baik itu waktu diskrit maupun kontinu dan asumsi bahwa pemodelan tersebut adalah arbitrasi bebas. Untuk menggambarkan pasar sempurna kita memperkenalakn istilah *contingent claim*. *Contingent claim* dalah kontrak finansial dengan pembayaran acak yang dapat menjadi positif ataupun negatif. Istilah kontingen berasal dari fakta bahwa pembayaran adalah acak, karenanya kontingen pada pengeluaran acak telah terjadi yaitu keadaan alami yang terjadi pada saat pembayaran. Semua sekuritas yang telah kita gambarkan adalah *contingent claims*.

BAB III
PENUTUP

A. KESIMPULAN

Setelah memperkenalkan berbagai model dasar untuk harga aset: periode-tunggal, multiperiode, dan model waktu-kontinu. Model harga tersebut berlaku secara acak, proses stokastik dimana nilainya bervariasi dengan waktu. Khususnya, satu aset dengan bebas beresiko; bahwa, ini berkembang dengan lengkap menjelaskan melalui suku bunga selama periode investasi. Aset ini, yang kita kenal dengan rekening bank, digunakan untuk mereduksi harga untuk aset dari setiap sekuritas. Ini juga mudah digunakan untuk mengurangi proses kekayaan dari suatu investor dengan aset bebas beresiko.

B. SARAN

Diharapkan melalui penulisan makalah ini, pembaca khususnya mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Makassar dapat menyajikan materi tentang *Securities Prices* dalam Matematika Keuangan dengan lebih lengkap dan jelas. Dan dibutuhkan keberanian untuk mencoba meneliti tentang berbagai permasalahan yang berkaitan dengan Matematika Keuangan dan Pasar Modal sebagai tugas akhir (skripsi).

DAFTAR PUSTAKA

Cvitanić, Jakša, dkk. 2004. *Introduction to the Economics and Matematics of Financial Market*. Cambridge: The MIT Press

Fahmi, Irham. 2013. *Pengantar Pasar Modal.*Bandung: ALFABETA.