

文章编号:0253-2778(2016)11-0892-06

# 自适应网格揉皱薄片的撕裂模拟

蒋琦琦, 周世哲, 施利强

(中国科学技术大学数学科学学院, 安徽合肥 230026)

**摘要:** 模拟常见的纸张撕裂现象是薄片形变模拟算法中的一种重要应用。这里提出了一种基于薄片揉皱模型的撕裂模拟算法。该算法使用揉皱张量场模型作为撕裂形变模拟的输入数据来引导裂缝的生长, 在每一步迭代中准确地更新一个反映薄片内各点处的张量场并执行动态的重网格化, 制作出了真实的纸张裂缝与三维褶皱效果。该算法能在数秒内得到最终模拟结果, 实验证明该算法可以逼真地生成揉皱纸张受到外力作用下的撕裂效果图。

**关键词:** 纸张撕裂模拟; 纸片褶皱; 动态自适应重网格化

**中图分类号:** TP391. 41      **文献标识码:** A      doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2016.11.003

**2010 Mathematics Subject Classification:** 65D05

**引用格式:** 蒋琦琦, 周世哲, 施利强. 自适应网格揉皱薄片的撕裂模拟[J]. 中国科学技术大学学报, 2016, 46(11):892-897.

JIANG Qiqi, ZHOU Shizhe, SHI Liqiang. Adaptive tearing of crumpled thin sheets[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2016, 46(11):892-897.

## Adaptive tearing of crumpled thin sheets

JIANG Qiqi, ZHOU Shizhe, SHI Liqiang

(School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

**Abstract:** Tearing paper is commonly seen in our daily life. Simulating this effect is an important application of thin sheet deformation. Existing approaches only research the cracking effect on normal flat paper. Our work aims at physically simulating tearing papers that have been crumpled by external forces. To achieve this effect, the crumpling tensor field was used as a guidance to grow the cracking paths using external force in an iterative manner. In each step, a physical measurement field defined over the planar domain of paper was updated. A triangular mesh representing the paper was dynamically restructured. Experiments show that the proposed approach generates realistic paper tearing effect with randomly shaped cracking path and physically-plausible cracking details.

**Key words:** paper-tearing simulation; paper crumpling; dynamically adaptive remesh

## 0 引言

在计算机图形学领域内的物理真实感模拟研究

中, 对于薄片的破坏性形变算法的研究已经有了一些工作。对诸如纸张、铝箔等薄片物体在外力作用下发生不可恢复的弯折或者直接破碎等形变现象已有

收稿日期: 2015-01-20; 修回日期: 2015-05-10

基金项目: 国家自然科学基金(61303147), 中国科学技术大学青年创新基金资助。

作者简介: 蒋琦琦, 男, 1991 年生, 硕士。研究方向: 计算机图形学。E-mail: jiangqq@mail.ustc.edu.cn

通讯作者: 周世哲, 博士/副教授。E-mail: szhou@ustc.edu.cn

方法能做较为逼真的模拟。这一类基于易损薄片的形变算法与基于弹性能量的薄膜形变算法<sup>[1-2]</sup>具有本质的不同：后者强调形变量的整体协调分布并在此过程中保持原模型的细节，输入模型仅发生整体形状的改变且表示所用的网格的结构不变；而前者计算的是不可逆的破坏性改变，导致直接改变网格拓扑结构，并且从简单的基础形状上诞生出新的物理可信的裂纹、残片等细节。

我们观察到日常生活中撕纸时纸张会发生一种常见现象：“折痕引导裂缝”。这是指当纸张受到外力揉捏、折叠等作用后往往会留下不可逆的折痕。即使纸张被展开并摊平试图恢复原状，但之前的折痕依然存在。随后纸张在两个反方向外力同时作用下会出现裂缝。这种裂缝的起始位置一般是在两个受力点中部的一个随机区域内，然后会沿着折痕发展，并最终得到一个逼近于原来折痕形状的裂缝。传统方法没有考虑折痕的这种影响，已知的关于薄片不可逆形变的方法仅研究对平整的纸张在外力撕扯下的效果<sup>[3]</sup>。

对纸张的揉皱与撕裂过程都可以很好地用三角网格的薄片模型(thin sheet model)来模拟。由于纸张“薄”的特点，我们抛弃传统的四面体网格建模，直接使用三角网格曲面模型，节省了很大的计算量。在揉皱和撕裂过程中，我们都使用了自适应的三角网格重划分来进行数值模拟与几何建模。在揉皱的过程中，我们在三角网格内部记录薄片破损程度以及其破损方向场等数据，这些数据将被用于随后的薄片撕裂的模拟中。为了绕开揉皱薄片的展开摊平这一较难模拟的逆过程，我们这里放弃了揉皱过程中的三维几何数据，直接将薄片破损数据嵌入平整的三角网格中来引导撕裂的动态过程。

对揉皱的网格进行撕裂模拟有一些挑战。揉皱过程中得到的自适应网格需要保持其在揉皱部分的紧密。揉皱的过程中，对破损程度以及塑形张量迅速变化的部分我们使用紧密的网格划分。这样做的原因是如果这部分的被粗化，会极大地降低模拟精度。我们采用了在揉皱过程中使用的尺寸场作为输入，将其作为最终的尺寸场的一部分，让细密的部分避免被粗化以保证模拟精度。在计算平整纸片的撕裂的迭代运算时，采用裂缝传播的方法<sup>[3]</sup>，确保裂缝在主体方向上沿着折痕或者褶皱的方向传播。采用揉皱过程得到破损量等数据对分裂张量模型进行改进，影响裂缝的传播方向从而得到逼真的揉皱纸片的撕裂动态过程。

对弹性薄片的物理真实模拟一直是图形学中一个重要的部分<sup>[4-5]</sup>。对带有一定厚度的塑性材料常使用四面体网格建模，模拟算法的目标一般是保持其体积不变<sup>[6]</sup>。但是四面体网格不适合在厚度几乎可以忽略的薄片模型上使用：Wickle 等<sup>[7]</sup>提出了一种塑性嵌入来避免塑性在网格中的扩散。Narain 等<sup>[8]</sup>将塑性嵌入的方法引入到了布料模拟中。

自适应的网格重划分近来在各类物理真实感的模拟算法中被使用，比如文献[9-10]利用四面体网的自适应重划分表示流体模拟的计算域，文献[8-9]为了执行薄片模拟而做三角网格的重划分。对于较坚硬的材料，网格重划分时会由于点位置的扰动引入一些异常的张力，Narain 等<sup>[8]</sup>提出了一个重新整理的方法来解决该问题。

图形学中最早的撕裂模拟研究可以追溯到 Terzopoulos 的研究<sup>[13]</sup>，这种方法使用了简单的张力限制，超过某个临界值的地方将被撕裂。在近些年图形学的研究中，使用到了分离张量<sup>[14]</sup>，分离张量提供了每个点上的最大张力的标准。由于分离张量与三角网格中面的大小以及其邻接的面有关，所以只能在相对均匀的网格上使用。Gingold<sup>[15]</sup>提出了一种薄片上统一的拉伸和折弯张量模型，但是这种静态的网格重划分方法和简单的撕裂判断条件会带来一些不真实的撕裂图案。文献[3]中使用了自适应的动态网格重划分以及一种新的基于分离张量的撕裂模型得到了很好的平整的薄片的撕裂模拟。本文在薄片褶皱模型的基础上进行褶皱薄片的撕裂模拟，以得到接近物理真实细节丰富的薄片撕裂效果。

## 1 算法概述

我们的模型使用了 Narain 等<sup>[8]</sup>的结果作为输入，文献[8]的模型接受一个平整的薄片作为输入，然后输出一个揉皱的模型。我们通过一个改进的撕裂算法来对这个揉皱的薄片来进行撕裂模拟。

文献[8]的模型中，薄片有 3 个不同嵌入，分别是二维平面上的材料嵌入，1 个塑性嵌入，还有 1 个模拟中的存在弹性形变的嵌入。采用材料嵌入作为我们算法的输入。这个嵌入本身并没有保存揉皱后的薄片的形变，我们保存每个点上的破坏程度以及塑性张量，通过这些量来对纸片撕裂过程的方向做引导，以达到揉皱纸片撕裂模拟的目的。

### 1.1 模拟过程

撕裂模拟的过程和文献[3]的模拟过程类似，每

个顶点对应着一个没有形变的空间中的坐标  $u$  以及模拟空间中的世界坐标  $x$ ,速度  $v$ ,塑性张量  $\mathbf{S}_p, \mathbf{S}_e$  分别代表拉伸塑性和折弯塑性.

在每一步中,我们首先更新每个顶点的位置,这个时候会处理碰撞的问题,之后会重新计算每个塑性张量. 使用这些计算好的数据来更新撕裂过程,在材料不能承受的地方生成新的裂缝. 之后为了保证模拟的精度,对裂缝附近做一个网格精细化,然后再对整个网格做网格重划分,然后继续下一步的模拟.

## 1.2 弹性模型

我们使用的弹性模型和文献[8]的模型类似. 形变梯度  $\mathbf{F}=\nabla_u \mathbf{x}$  是一个 3 阶矩阵,描述拉伸的 Green 张量由

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (1)$$

给出,由材料嵌入可算出张力:

$$\sigma = k_s(1-v)\mathbf{G} + v\mathbf{tr}(\mathbf{G})\mathbf{I} \quad (2)$$

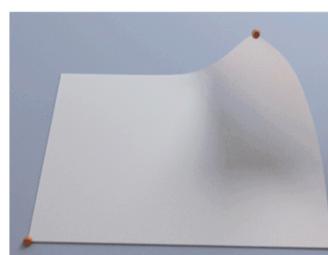
式中,  $k_s=Y/(1-v^2)$  是拉伸刚性. 这些量都是在网格的每个面上计算的. 离散的弯曲应变<sup>[12]</sup>可以通过每个面和它邻接的面的夹角算出,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 (\theta_i - \theta_i^R) l_i \mathbf{t}_i \mathbf{t}_i^T \quad (3)$$

式中,  $A$  代表这个三角形的面积,  $l_i$  是边的长度,  $\mathbf{t}_i$  是每个边的垂线方向的单位向量,  $\theta_i$  是二面角,  $\theta_i^R$  是放松状态下的二面角.

薄片的弹性势能就可以用下式给出:

$$E = \sum_i^{\text{faces}} \frac{A_i}{2} \mathbf{G}_i : \boldsymbol{\sigma}_i + \sum_i^{\text{edges}} k_b \frac{l_i^2}{8A_i} (\theta_i - \theta_i^R)^2 \quad (4)$$



平整薄片作为揉皱过程的输入在揉皱过程中得到薄片的形变以及破损量,作为撕裂模型的输入产生揉皱后的撕裂效果.

式中,拉伸刚性  $k_b=\alpha k_s h^2/12$ ,参量  $\alpha$  使得材料可以有各向异性的刚性. 网格顶点的运动可以通过对势能方程求导得出网格顶点的运动方程.

## 2 揉皱撕裂模型

我们将揉皱的薄片的撕裂看作是平整薄片撕裂的一种扩展. 在平整薄片的撕裂中<sup>[6]</sup>,使用了一种在动态网格重划分的网格上的一种裂缝传播的算法,我们将基于这个算法给出一个揉皱薄片的裂缝传播算法.

对于揉皱薄片的撕裂模拟有两个主要过程,第一部分揉皱过程将一个平整薄片作为输入,使用文献[8]提出的算法对平整薄片进行揉皱操作,同时记录下薄片在揉皱过程中产生的破损信息作为撕裂过程的输入.

在撕裂过程中,算法接受揉皱模型产生的揉皱薄片以及揉皱过程中产生的有形变的薄片以及破损信息作为输入,模拟揉皱薄片在有折痕产生的情况下产生的撕裂效果.

### 2.1 揉皱模型

采用文献[8]提出的弹性塑性揉皱模型作为我们的揉皱撕裂模型的起点. 每个面上的折弯应变  $\mathbf{S}$  由塑性折弯应变  $\mathbf{S}_p$  和弹性折弯应变  $\mathbf{S}_e$  两部分组成,其中,  $\mathbf{S}_e = \mathbf{S} - \mathbf{S}_p$ , 当在  $\mathbf{S}_e$  弗罗贝尼乌斯范数(Frobenius norm)下超过材料的屈服曲率  $\kappa$ ,就采用下式更新塑性应变:

$$\mathbf{S}_p \leftarrow \mathbf{S}_p + \frac{\mathbf{S}_e}{\|\mathbf{S}_e\|} (\|\mathbf{S}_e\| - \kappa) \quad (5)$$

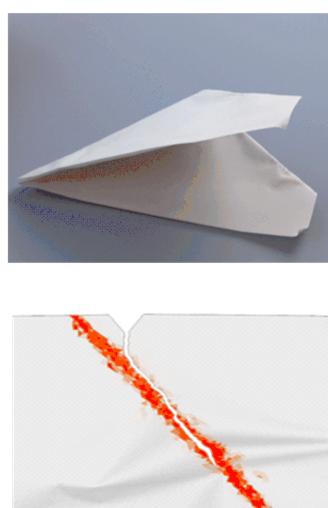


图 1 撕裂模拟流程

Fig. 1 Process of tearing of crumpled sheets

同时用一个标量  $d$  来描述材料被弯折时候的破損程度,当弯折发生的时候,更新过程如下:

$$d \leftarrow d + \frac{1}{k} (\|S_e\| - \kappa) \quad (6)$$

我们将塑性应变  $S_p$  和破損  $d$  保存在文件中,将在下节中详述其在撕裂中的作用.

## 2.2 撕裂模型

构建一个撕裂模型的第一步是找到材料会在何处破裂. 材料破裂的原因是在某处集中了很大的拉力, 所以我们需要在每个模拟的时间点来重新计算网格中每个顶点受到的拉力, 如果这个拉力超过了一个临界, 我们就在这个地方做一个撕裂操作.

直接地从一个网格顶点撕裂到另外一个网格顶点会带来一些不真实的问题, O'Brien 等<sup>[14]</sup>提出了分离张量的方法来解决这个问题, 这种分离张量是在每个面上计算的, 且与所在的面的大小有关, 所以在相对均匀的网格上可以使用, 但是在非均匀的网格上会出现一些问题. 针对这个问题文献[3]提出了一种在顶点上计算的分离张量, 这个方法的好处在于由于是在每个顶点计算的, 所以和网格上的面的尺寸无关.

我们在每个顶点处计算分离强度. 在一个顶点处找到可以最大地减小拉伸力的方向, 由此给定一个撕裂的方向, 可以在顶点处计算其圆形边界上的路径积分

$$q_1 = \int_{\partial\Omega_1} (\mathbf{I} + d \cdot \mathbf{M}) \sigma^+ \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (7)$$

式中,  $d$  是从揉皱模型中得到的每个面的破損程度,  $\mathbf{M}$  是折痕倾向矩阵, 定义为  $\mathbf{M} = D \cdot D'$ ,  $\sigma^+$  是将式(2)中的  $\sigma$  的特征值中的负值取 0 得到, 用以避免因为压缩形变而带来的撕裂现象.

相较于文献[3]中的撕裂模型, 这里的撕裂模型中引入了折痕倾向修正  $(\mathbf{I} + d \cdot \mathbf{M})$  来表示折痕对撕裂模型的影响. 从公式可以看出, 破損量为 0 时, 折痕对撕裂的影响为单位矩阵, 也就是对撕裂没有影响, 而折痕对撕裂影响的方向为沿着折痕的方向, 倾向强度正比于材料的破損.

从揉皱的网格中, 我们得到了揉皱后的塑性张量  $S_p$ , 这其实是一个二阶矩阵, 揉皱的方向  $D$  是  $S_p$  的最大的特征值对应的特征方向,  $\hat{\mathbf{n}}$  是指向外侧的单位向量. 因为我们使用的是三角网格上的有限元方法, 上面的式子可以离散化为

$$q_1 = (\mathbf{I} + d_0 \cdot \mathbf{M}_0)(\sigma_0^+(t_0 - s) +$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} (\mathbf{I} + d_i \cdot \mathbf{M}_i)\sigma_i^+(t_{i+1} - t_i) + \\ (\mathbf{I} + d_N \cdot \mathbf{M}_N)\sigma_N^+(-s - t_N)) \quad (8)$$

式中,  $t_i$  是每个边的垂直方向上的单位向量,  $s$  是分割平面的法向量,  $q_2$  的计算和  $q_1$  相似, 沿着另外一侧的弧做积分.

我们定义单个顶点上的分离强度为  $s = \min(q_1 \cdot \hat{\mathbf{q}}, -q_2 \cdot \hat{\mathbf{q}})$ , 其中  $\hat{\mathbf{q}} = \text{Normalize}(q_2 - q_1)$ . 如果这个分离强度  $s$  大于材料的强度  $\tau$ , 那么材料就会在这个顶点处发生撕裂, 顶点的邻接面将会沿着分割平面分开.

分离强度的计算需要解决一个优化问题来求得分离平面的位置, 但是这个优化问题没有合适的解析方法可以解决, 这里, 我们使用了一种简单的采样的方法来找到一个近似的分离强度, 在每个需要分割的区块, 等分角度取  $N$  个不同的方向, 对每个方向上的分割平面求分离强度, 得到取得最小分离强度的分割平面.

## 3 网格重划分

在揉皱薄片撕裂的模拟中, 自适应的网格重划分是保证速度和精度的重要一步. 我们需要在破損的地方增加网格的精度, 保证裂缝传播的时候有足够的细密的网格, 在受力较轻的地方适当地降低网格的密度, 以提高模拟的速度.

在文献[3]的模型中, 使用到了所谓的尺寸张量场来决定网格在不同位置不同的密度. 对于尺寸张量  $\mathbf{M}$ , 我们要求其邻接的边的长度满足  $e^T \mathbf{M} e \leq 1$ . 但这一模型并没有考虑到揉皱纸片在揉皱区域的精度, 我们对这个模型做适当的调整来解决这个问题.

首先, 为了保证网格在撕裂区域的密度, 我们引入了一个撕裂尺寸  $\mathbf{M}_{\text{frac}} = \left(\frac{2\lambda}{\tau x_{\min}}\right)^2 I$ . 其中  $\lambda$  是  $\sigma^+$  的最大的特征值,  $x_{\min}$  是用户指定的网格重划分的最小的边的长度. 其次, 因为我们的网格在初始化的时候就有揉皱的部分, 所以我们将文献[8]的模型中的对应网格的尺寸场储存下来, 作为网格重划分的初始尺寸场  $\mathbf{M}_{\text{init}}$ , 以保证网格在揉皱的部分有很好的精度. 其他的诸如与曲率相关的尺寸场与文献[3]模型中的一致, 采用相同的方法来组合这些向量场以得到最终的尺寸向量场  $\mathbf{M}$ .

重划分的算子包括切割边, 删除顶点以及翻转. 我们使用了简单的采样方法来更新重新划分的网格

上的数据,包括破损程度以及尺寸张量场.

## 4 测试结果

实现分为两部分,一部分是将揉皱的算法中的相应的信息提取并保存,这一部分的算法的实现基于 ArcSim0.2.1,也就是实现文献[8]的代码. 数据被保存成了一个文本文件. 第二部分的算法的实现基于 ArcSim0.3.0,扩展了文件的读写同时修改了撕裂模型.

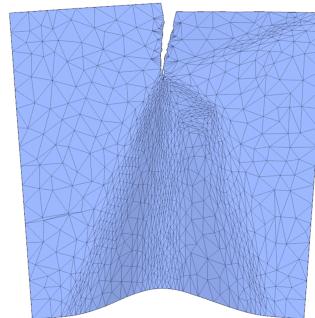
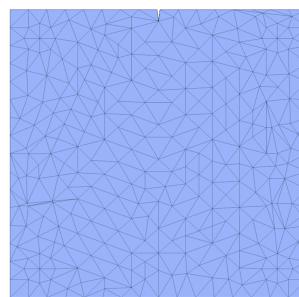
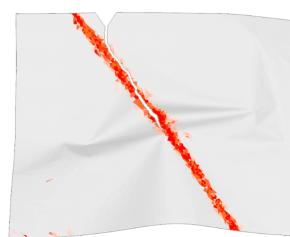
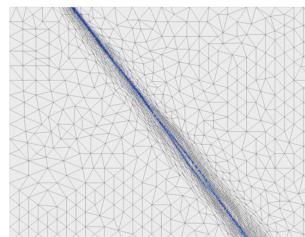
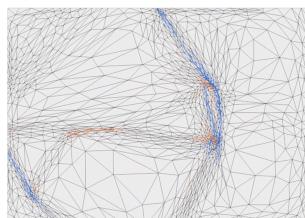


图 2 平整薄片的撕裂结果

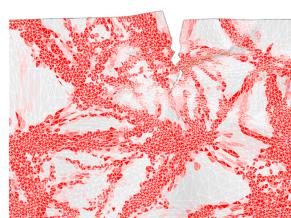
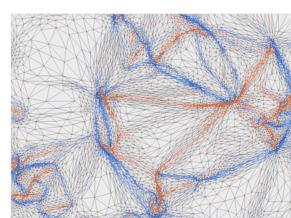
Fig. 2 Tearing of flat sheets



(a) 被折叠的纸片的撕裂, 撕裂很好地沿着折痕行进



(b) 有轻微褶皱的纸片的撕裂, 裂缝在通过折痕的时候只是受到了轻微的扰动, 裂隙并没有完全沿着褶皱行进



(c) 被严重揉皱的纸片的撕裂, 撕裂中出现不规则的锯齿, 和平整纸片撕裂的折痕有很大不同。

图片中深色的部分是揉皱的部分

图 3 各种不同的揉皱纸片的撕裂模拟

Fig. 3 Tearing of different crumpled sheets

平整薄片的撕裂结果如图 2 所示,我们可以看到,在文献[3]的正常纸片的撕裂效果模型中,纸片的裂痕传播比较自然,撕裂自由地向下传播而没有很强的倾向性.

我们测试了纸张被不同程度揉皱之后的撕裂效果.现实中,当我们希望纸片沿着一个平整的线条撕裂,通常会先将纸片折叠,然后再进行撕裂.对比图 2 中平整纸片的撕裂,如图 3(a),可以看到,对于被折叠的纸片,当裂隙传播到折痕处,即开始沿着折痕

处行进,这和现实中的情形非常接近.而对于揉皱纸片,如图 3(b),(c),我们发现,纸片被揉皱后,揉皱会对折痕的传播产生影响,而纸片被揉皱的情况越严重,折痕就越是不规则,符合现实中纸片撕裂的情形.如表 1 所示,算法可以在面数较少的情况下接近达到接近实时的模拟速度.

表 1 各个场景的撕裂性能

Tab. 1 Performance measurements

场景	面的数量/个	物理/s	几何/s	总计/s
1	0.5k	1.29	1.76	3.05
2	3k	4.29	12.72	17.01
3	3k	4.01	12.78	16.79
4	14k	32.79	113.91	146.70

【注】计时使用的是 25 帧花费的时间,物理过程包括物理更新和碰撞检测,几何过程包括网格重划分以及撕裂. 模拟使用的是台 CPU 频率为 2.6 GHz 的 i7-2630QM 笔记本电脑.

## 5 结论

我们的算法通过对纸张类材质的破碎动态的稳定计算,能有效地模拟揉皱纸片的撕裂效果. 揉皱撕裂过程模拟的是现实世界中的纸张在揉皱之后的撕裂,对一些弹性特征和纸张差距较大的材料效果不好. 比起平整纸片的撕裂可以带来更多的细节上的变化,可以带来更加逼真的撕裂效果. 在网格的面数量很大(超过 10 k)时,算法尚且无法达到实时处理的要求,一个可能的改进方向是使用多线程或 GPU 流计算的方式来快速更新尺寸场和确定裂缝传播的具体位置,从而达到真正的实时撕裂效果. 此外,我们放弃了对薄片揉皱之后的几何信息的处理,如果在皱纹附近引入揉皱时残留下的局部曲率等几何信息,可能得到更加真实的破碎动态.

### 参考文献(References)

- [1] YUMER M E, KARA L B. Co-constrained handles for deformation in shape collections [J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2014, 33(6): 187.
- [2] BOTSCHE M, SORKINE O. On linear variational surface deformation methods[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2008, 14(1): 213-230.
- [3] PFAFF T, NARAIN R, DE JOYA J M, et al. Adaptive tearing and cracking of thin sheets[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2014, 33(4): 110.
- [4] GRINSPUN E, HIRANI A N, DESBRUN M, et al.

Discrete shells [C]// Proceedings of the 2003 ACM SIGGRAPH/ Eurographics symposium on Computer animation. Switzerland: Eurographics Association, 2003: 62-67.

- [5] 孔川, 罗大庸. 利用弹簧质点模型和隐式方法的布料模拟研究[J]. 计算机工程与应用, 2011, 47(9): 225-227.
- KONG Chuan, LUO Dayong. Research of cloth simulation using mass-spring and implicit method[J]. Computer Engineering and Applications, 2011, 47(9): 225-227.
- [6] BARGTEIL A W, WOJTAN C, HODGINS J K, et al. A finite element method for animating large viscoplastic flow[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2007, 26(3): 16.
- [7] WICKE M, RITCHIE D, KLINGNER B M, et al. Dynamic local remeshing for elastoplastic simulation [J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2010, 29(4): 49.
- [8] NARAIN R, PFAFF T, O'BRIEN J F. Folding and crumpling adaptive sheets[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2013, 32(4): 51.
- [9] ANDO R, THÜREY N, WOJTAN C. Highly adaptive liquid simulations on tetrahedral meshes [J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2013, 32(4): 103.
- [10] CLAUSEN P, WICKE M, SHEWCHUK J R, et al. Simulating liquids and solid-liquid interactions with lagrangian meshes[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2013, 32(2): 17.
- [11] NARAIN R, SAMII A, O'BRIEN J F. Adaptive anisotropic remeshing for cloth simulation[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2012, 31(6): 152.
- [12] BUSARYEV O, DEY T K, WANG H. Adaptive fracture simulation of multi-layered thin plates [J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2013, 32(4): 52.
- [13] TERZOPOULOS D, FLEISCHER K. Modeling inelastic deformation: viscoelasticity, plasticity, fracture [C]// ACM Siggraph Computer Graphics. ACM, 1988, 22(4): 269-278.
- [14] O'BRIEN J F, HODGINS J K. Graphical modeling and animation of brittle fracture[C]// Proceedings of the 26th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. New York: ACM Press/ Addison-Wesley Publishing Co, 1999: 137-146.
- [15] GINGOLD Y, SECORD A, HAN J Y, et al. A discrete model for inelastic deformation of thin shells [C]// ACM SIGGRAPH/ Eurographics Symposium on Computer Animation. Grenoble, France: Eurographics Association, 2004.