座位号：

杭州电子科技大学学生考试卷（A）卷

考试课程	**离散数学 2**		**考试日期**	**2020 年 1 月　日**		**成 绩**	
课程号	**A0507042**	**教师号**		**任课教师姓名**		陈勤，袁友伟，周丽，吴向阳	
考生姓名		**学号（8 位）**		**年级**		**专业**	

一、判断题 (每题 2 分，共 10 分)

1. 二元关系 $\{<x,y>|x,y\in N, x\equiv y \bmod 3\}$ 不是 $N\to N$ 函数。　　（　　）
2. 群中肯定没有零元。　　（　　）
3. 群中次数为 1 的元素只有一个。　　（　　）
4. p 阶图中最多有 $p-1$ 个割点。　　（　　）
5. 有割点的连通图不可能是哈密尔顿图。　　（　　）

二、选择题 (每题 2 分，共 20 分)

6. 下列函数是双射的为（　　　）

A. $f:Z\to$ 偶数集，$f(x)=2x$；　　B. $f:N\to N\times N$，$f(x)=<x,x+1>$；

C. $f:R\to Z$，$f(x)=[x]$（取整数）；　　D. $f:Z\to N$，$f(x)=|x|$

7. 集合 $A=\{1,2,3\}$，它的幂集在对称差运算 $\oplus$ 下构成群 $<\rho(A),\oplus>$，则群方程 $\{1,2\}\oplus x=\{1,3\}$ 的解为（　　）

A. $\{2,3\}$；　　B. $\{1,2,3\}$；　　C. $\{1,3\}$；　　D. ϕ

8. 一组学生进行扳手腕比臂力，设 G 表示这组学生组成的集合，定义 G 上的运算 $*$ 为：$\forall a,b\in G$，$a*b=$（a,b 间扳手腕的胜者）。则 $<G,*>$ 是（　　）

A. 半群　　B. 幺半群　　C. 群　　D. 以上都不是

9. 设 i 是虚数，$*$ 是复数的乘法运算，则 $G=<\{1,-1,i,-i\},*>$ 是群，下列为 G 的子群的是（）

A. $<\{1\},*>$　　B. $<\{-1\},*>$　　C. $<\{i\},*>$　　D. $<\{-i\},*>$

10. 在有理数集 Q 上定义的二元运算 $*$：$\forall x,y\in Q$，$x*y=x+y-xy$，则 Q 中（　　）。

A．所有元素都有逆元；　　B. 有零元存在；

C. $\forall x\in Q, x\neq 1$ 时有逆元 $x^{-1}=\frac{1}{x}$；　　D. 所有元素都无逆元。

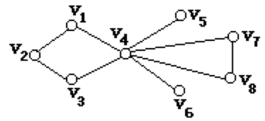
11. 循环群 $<a^0,a^1,\cdots a^8>$ 的生成元数目有（　　）个。

A. 1　　B. 4　　C. 6　　D. 8

12. 一棵树有 7 个 1 度节点，3 个 3 度结点，其余都是 4 度结点，则该树有（　　）个 4 度结点。

A．1；　　B．2；　　C．3；　　D．4 。

13. 给定无向图 $G=<V,E>$，如下图所示，下面哪个边集不是边割集（　　）。



A. $\{<v_1,v_4>,<v_3,v_4>\}$；

B. $\{<v_1,v_4>,<v_4,v_7>\}$；

C. $\{<v_4,v_7>,<v_4,v_8>\}$；

D. $\{<v_1,v_2>,<v_2,v_3>\}$。

14. 一个边割集与任一生成树之间（　　）。

A、没有公共边；　　B. 偶数条公共边；　　C. 有一条公共边；　　D. 至少有一条公共边。

15. 下列无向图一定是树的是（　）

A. 连通图；　　B. 无回路但添加一条边则有回路的图；

C. 每对顶点之间都有通路的图；　　D. 有 n 个顶点，$n-1$ 条边的图

三、　计算与证明题 (共 70 分)

16.（10 分）$<Z_6,+_6>$是一个群，这里 $+_6$ 是模 6 加法，Z_6={0，1，2，3，4，5}，试求出$<Z_6,+_6>$的所有非平凡子群及这些子群的所有左陪集。

17.（12 分）设有代数系统 $<G,*>$，*是下表定义的运算。

$*$	a	b	c	d
a	c	a	d	b
b	a	b	c	d
c	d	c	b	a
d	b	d	a	c

（1）请说明 $<G,*>$ 是群，并给出理由。（4 分）

（2）求出各元素的次数。（4 分）

（3）$<G,*>$ 是否为循环群？给出理由。如是循环群，则给出所有生成元。（4 分）

18.（9 分）设 $<G,*>$ 是半群，e_l 是左单位元且 $\forall x\in G$，$\exists\hat{x}\in G$，使得 $\hat{x}*x=e_l$，证明：

（1）（3 分）$\forall a,b,c\in A$，若 $a*b=a*c$ 则 $b=c$

（2）（6 分）$<G,*>$ 是群（可利用（1）的结论）。

座位号：

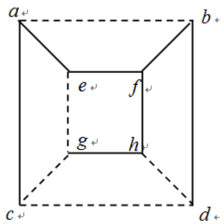
19. （10 分）设有 A,B,C,D,E,F,G 七个人，

（1）假设每两个人之间都会说某一种语言，而每一种语言恰好有两个人会说，请问他们总共会说几种语言？请给出理由。（5 分）

（2）假如他们会讲的语言如下：A：英，B：汉、英，C：英、西班牙、俄，D：日、汉，E：德、西班牙，F：法、日、俄，G：法、德，能否将这七个人的座位安排在圆桌旁，使得每个人均能与他旁边的人交谈？请说明理由。（5 分）

20.（7 分）证明：若 n 个节点的连通图中恰有 $n-1$ 条边，则图中至少有一个结点度数为 1。

21.（12 分）如图所示一简单图 G（边包含实线边和虚线边）

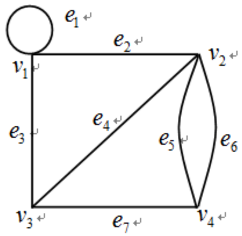


(1) 求此图的点连通度 $\kappa(G)$ 和边连通度 $\lambda(G)$（4 分）。

(2) 请问此图至少要增加多少条边才能成为欧拉图，并说明理由。（4 分）。

(3) 此图的生成树如图中实线部分所示，求枝 ef 的基本割集和弦 cg 的基本回路（4 分）。

22.（10 分）设有如下图 $G=(V,E)$，$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，$E=\{e_1,\ldots e_7\}$



（1）求 G 的邻接矩阵和关联矩阵（以下标顺序排列）；（4 分）

（2）求 G 中 v_1 到 v_3 长度为 3 的通路有多少条；（4 分）

（3）求 G 中经过 v_2 的长度小于等于 3 回路有多少条。（2 分）

座位号：

杭州电子科技大学学生答题卷（A）卷

考试课程	**离散数学 2**		**考试日期**	**2020 年 1 月　日**		**成　绩**	
课程号	**A0507042**	**教师号**		**任课教师姓名**		陈勤，袁友伟，周丽，吴向阳	
考生姓名		**学号（8 位）**		**年级**		**专业**	

一、判断题 (每格 2 分，共 10 分)

1	√	2	×	3	√	4	×	5	√

二、选择题 (每格 2 分，共 20 分)

6	A	7	A	8	B	9	A	10	B
11	C	12	A	13	B	14	D	15	B

三、计算与证明题 (共 70 分)

16（10 分）解：非平凡子群有：$H_1=\{0,3\}$ 和 $H_1=\{0,2,4\}$（每个 2 分，共 4 分）

H_1 的左陪集有三个，分别为 $0H_1=\{0,3\}$，$1H_1=\{1,4\}$，$2H_1=\{2,5\}$。（共 3 分，错一个扣 1 分）

H_2 的左陪集有两个，分别为 $0H_2=\{0,2,4\}$，$1H_2=\{1,3,5\}$。（共 3 分，错一个扣 1 分，错 2 个得 0 分

17（12 分）

（1）i) 从运算表可看出 G 中任意两个元素都可以进行*运算，并且运算结果满足封闭性；

ii) 由表中的运算结果可验证*运算满足结合律。

iii) $\because \forall x\in G$，$x*b=b*x=x$，所以 b 是 $<G,*>$ 中的单位元。

iv) 由运算表可看出 $a^{-1}=d$，$b^{-1}=b$，$c^{-1}=c$，$d^{-1}=a$，因而任意元素都有逆元。

综合以上四条知 $<G,*>$ 是群。(每条 1 分，共 4 分)

（2）$|a|=4$，$|b|=1$，$|c|=2$，$|d|=4$　（每个 1 分，共 4 分）

（3）是循环群（1 分），

因为 a 和 d 的次数是 4，等于群元素的个数，因而 $G=<a>$ 和 $G=<d>$。（1 分）。

生成元有 a 和 d。（每个 1 分，共 2 分）

18（9 分）

（1）$\forall a,b,c\in G$，如果 $a*b=a*c$，根据已知条件知 $\exists\hat{a}\in G$, 使得 $\hat{a}*a=e_l$

$\therefore \hat{a}*(a*b)=\hat{a}*(a*c)$，即 $(\hat{a}*a)*b=(\hat{a}*a)*c$，得 $e_l*b=e_l*c$

$\therefore b=c$

（3 分）

（2）i) $\forall x\in G$，由已知条件知 $\exists\hat{x}\in G$, 使得 $\hat{x}*x=e_l$。

$\therefore \hat{x}*(x*e_l)=(\hat{x}*x)*e_l=e_l*e_l=e_l=\hat{x}*x$

再由（1）的结论知 $x*e_l=x$，所以 e_l 也是右单位元，所以 e_l 就是单位元 e。（3 分）

ii) $\forall x\in G$，由已知条件知 $\hat{x}$ 是 x 的左逆元，

又 $\hat{x}*(x*\hat{x})=(\hat{x}*x)*\hat{x}=e*\hat{x}=\hat{x}=\hat{x}*e$，再由（1）结论知 $x*\hat{x}=e$

$\therefore \hat{x}$ 也是 x 的右逆元，

$\therefore \hat{x}$ 是 x 的逆元。（3 分）

综合 i)ii)知 $<G,*>$ 是群。

19（10 分）

（1）将 A,B,C,D,E,F,G 七个人表示为图中的 7 个顶点，由于每一种语言恰好有两个人会说，因此每种语言可表示为连接这两个人的边（2 分）。

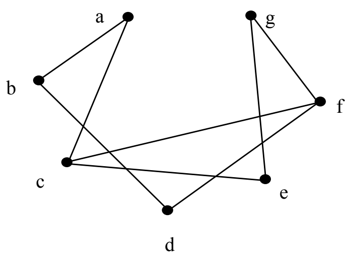
因为任意两人间都会说某种语言，所以在图中任意两个节点间都有边相连，因此此图为完全图。（2 分）

完全图中边的数量就是语言的数量，因此他们共会说 $7\times 6\div 2=21$ 种语言。（1 分）

（2）将 A,B,C,D,E,F,G 七个人表示为图中的 7 个顶点，若两人都会讲同一种语言，则其间连一条边。得到的图如下图所示。（1 分）

此图为哈密尔顿图（1 分），因为存在哈密尔顿回路 ABDFGECA（1 分）。

因此只要按照此哈密尔顿回路的顺序将它们安排在圆桌就坐，则每个人与左右两边的人在图中都有边相连，即他们都有共同语言可以交谈。（1 分）



20（7 分）

证明：用反证法证明。

设 $G=<V,E>$ 中 $|V|=n,\quad |E|=n-1$。

由握手定理知：$\sum_{v\in V} d(v)=2|E|=2n-2$。（2 分）

如果假设图中至多一个节点度数为 1，则 G 中其余 $n-1$ 个节点的度数都大于等于 2，因此节点度数之和 $\sum_{v\in V} d(v)\ge 1+2(n-1)=2n-1>2n-2$，与握手定理矛盾，因此假设不成立，因而至少有两个节点度数为 1.（5 分）

21（12 分）

（1）$\kappa(G)$=3，　$\lambda(G)$=3.（每个 2 分，共 4 分）

（2）需至少增加 4 条边。（2 分）

因为此图有 8 个奇点，因此如果要让此图成为欧拉图，则需将每个奇点变为偶点。因此至少需要在 8 个奇点间两两配对加一条边，因此需要 4 条边。（2 分）

（3）枝 ef 所在的基本割集为 $\{ef,ab,eg,cg,cd\}$。（2 分）

弦 cg 所在的基本回路是 $cghfeac$。（2 分）

22 （10 分）

（1）邻接矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&0&1&2\\1&1&0&1\\0&2&1&0\end{bmatrix}$（2 分）　关联矩阵：$\begin{bmatrix}2&1&1&0&0&0&0\\0&1&0&1&1&1&0\\0&0&1&1&0&0&1\\0&0&0&0&1&1&1\end{bmatrix}$（2 分）

（2）$A^2=\begin{bmatrix}3&2&2&3\\2&6&3&1\\2&3&3&2\\3&1&2&5\end{bmatrix}$（1 分）　$A^3=\begin{bmatrix}7&11&8&6\\11&7&9&15\\8&9&7&9\\6&15&9&4\end{bmatrix}$（1 分）

因此 v_1 到 v_3 长度为 3 的通路有 8 条。（2 分）

（3）经过 v_2 的长度小于等于 3 回路有 $6+7=13$ 条。（2 分）