

# 《大学物理（下）》复习笔记

由HDU-STEAsyan2018整理于2020年1月3日

由HDU-STEAYY、HDU-STEAParticle\_G校对

## 考试相关说明

### 考试范围

题型:单项选择题(9题,共27分),填空题(7题,共21分)和计算题(8题,52分)。

### 考试内容

#### 1. 振动(12 分)

选择题(1个,共3分)、填空题(1个,共3分)、计算题(1个,共6分)

#### 2. 机械波(15分)

选择题(2个,共6分)、填空题(1个,共3分)、计算题(1个,6分)

#### 3. 光的干涉(20 分)

选择题(1个,共3分)、填空题(1个,共3分)、计算题(2个,8+6分)

#### 4. 光的衍射(11分)

选择题(1个,共3分)、填空题(0个,共0分)、计算题(1个,8分)

#### 5. 光的偏振(9分)

选择题(1个,共3分)填空题(2个,共6分)、计算题(0个,0分)

#### 6. 狭义相对论(11分)

选择题(1个,共3分)、填空题(1个,共3分)、计算题(1个,5分)

#### 7. 量子物理(22 分)

选择题(2个,共6分)、填空题(1个,共3分)、计算题(2个,5+8分)

各章节的考试内容分布比较均匀。第四章**4.5**节不考,重点是**4.2**、**4.3**和**4.4**节,相对性原理、狭义相对论运动学和狭义相对论动力学。第十四章**14.4**节,双折射现象不考,这一章重点是马吕斯定律和布儒斯特定律。第十八章**18.5**节不考,量子物理重点内容是德布罗意物质波、波函数和氢原子光谱、光电效应、四个量子数。

习题集上的相似题型30%左右,期末考试陌生题相对多一点,需要学生掌握各章知识点,灵活运用。

## 振动

### 简谐振动

首先,我们给出简谐振动的数学表达式

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

其中 $x$ 为位移,随时间变化

有振幅 $A$ ，频率 $\omega$ ，初相位 $\varphi$

对于任意简谐振动，我们可以得出其运动微分方程的通式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

该通式与简谐振动——对应

由 $a = \frac{d^2 x}{dt^2}$ 可知 $a = -\omega^2 x$

即简谐振动物体加速度的大小总是与位移大小呈现正比，而方向相反

对于振动的表示进行求导，可以分别获得速度及加速度的表示

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) = -v_{max} \sin(\omega t + \varphi)$$
$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = -a_{max} \cos(\omega t + \varphi)$$

有 $v_{max} = \omega A$ ,  $a_{max} = \omega^2 A$ 分别取作速度和加速度的最大值

### 重要参数

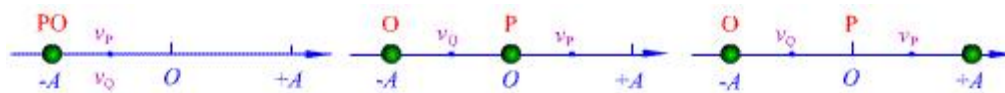
- 振幅 $A$ 表示物体相对平衡位置的最大偏移
- 周期 $T$ 和角频率 $\omega$ 表示往复的节律，有 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ,  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$
- 对于弹簧振子， $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- 相位决定当前物体运动状态，由 $\omega t + \varphi$ 表示
- 初相 $\varphi$ ，即 $t$ 为0时的相位，振动起始时的相位
- 相位差 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ ，表示两个振动起始时相位的差距，但 $\Delta\varphi$ 大于0时有 $\varphi_2$ 超前 $\varphi_1$

通过带入参数求解振幅和初相

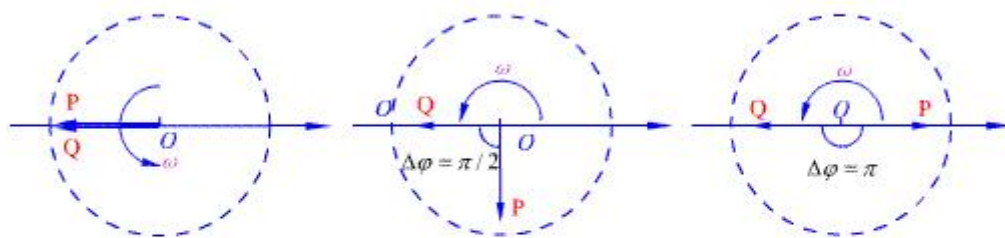
### 旋转矢量法表示简谐运动

旋转矢量法是一种描述简谐振动较为直观的几何方法。从坐标原点 $O$ (平衡位置)画一矢量，使它的模等于谐振动的振幅 $A$ ，并令 $t = 0$ 时 $A$ 与 $x$ 轴的夹角等于谐振动的初相位 $\varphi_0$ ，然后使 $A$ 以等于角频率 $\omega$ 的角速度在平面上绕 $O$ 点作逆时针转动，这样作出的矢量称为旋转矢量。显然，旋转矢量任一时刻在 $x$ 轴上的投影 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ 就描述了一个简谐振动。

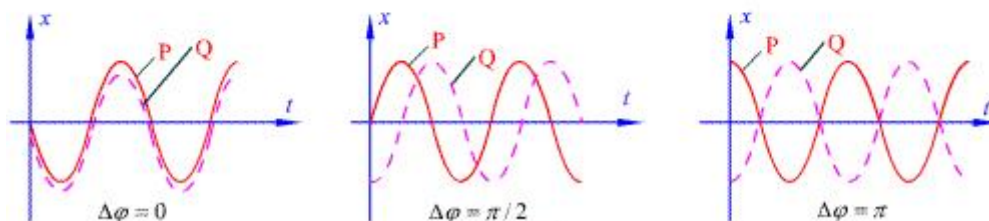
当旋转矢量绕坐标原点旋转一周，表明简谐振动完成了一个周期的运动。任意时刻旋转矢量与 $x$ 轴正向的夹角就是该时刻的相位。



(a)两个谐振子的振动情况



(b)两个谐振子的振动的旋转矢量图



(c) x-t 曲线

## 简谐振动的能量

对简谐运动系统，我们可以求得：

$$\text{机械能 } E = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\text{动能 } E_k = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$\text{势能 } E_p = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

简谐振动系统只存在内力做工，故固有能量守恒，其中动能和弹性势能互相转化，存在周期内平均动势能

$$\overline{E_p} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2}kx^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{4}kA^2$$

类似可以积出平均动能同平均势能相等，有  $\overline{E_k} = \frac{1}{4}kA^2$

## 简谐振动的合成

### 同频同向

实际问题中，有很多运动其实均可表示作简谐振动的合成，现在有两个简谐振动

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10})$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20})$$

则其合振动可以表示为

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 \\ &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10}) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20}) \\ &= (A_1 \cos \varphi_{10} + A_2 \cos \varphi_{20}) \cos \omega t - (A_1 \sin \varphi_{10} + A_2 \sin \varphi_{20}) \sin \omega t \\ &= A \cos \varphi_0 \cos \omega t - A \sin \varphi_0 \sin \omega t \\ &= A \cos(\omega t + \varphi_0) \end{aligned}$$

有

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{10} - \varphi_{20})}$$

$$\tan \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_{10} + A_2 \sin \varphi_{20}}{A_1 \cos \varphi_{10} + A_2 \cos \varphi_{20}}$$

易得当相位相同 $\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$ 时存在最大振幅 $A_1 + A_2$ ,

相位相反 $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi$ 时存在最小振幅 $|A_1 - A_2|$

### 不同频/拍 (不考吧)

为了方便讨论, 暂设两待合成振动振幅相等

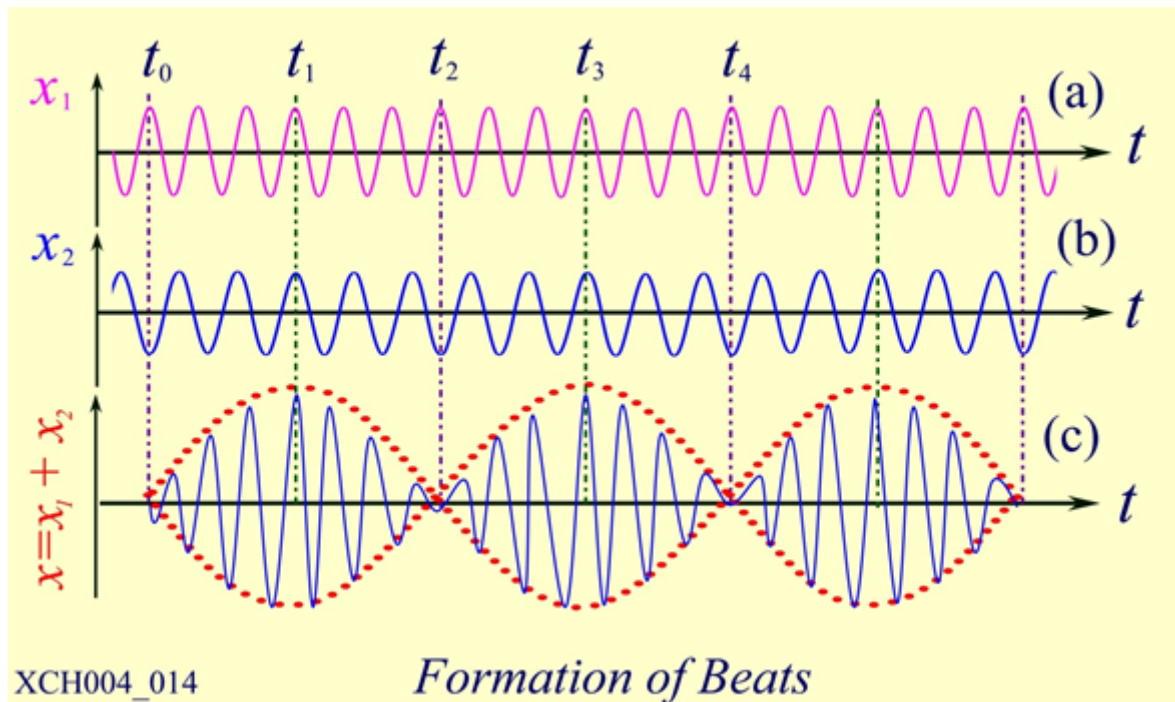
$$x_1 = A \cos(\omega_1 t + \varphi_{10})$$

$$x_2 = A \cos(\omega_2 t + \varphi_{20})$$

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 \\ &= A \cos(\omega_1 t + \varphi_{10}) + A \cos(\omega_2 t + \varphi_{20}) \\ &= 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_{10} - \varphi_{20}}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_{10} + \varphi_{20}}{2}\right) \end{aligned}$$

以这样的形式进行振动的波形被称为拍的合成

其中较低的频率被称作拍的频率



### 同频垂直

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10})$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20})$$

这展现出了oxy坐标系上的图形, 轨迹方程为消去时间后的:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} + \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10}) = \sin^2(\varphi_{20} - \varphi_{10})$$

这就是李撒如图形的形成原理

## 机械波

机械波实质上是振动相位在空间上的传播，由一个质点影响相邻的质点进行，其产生需要空间某处进行简谐振动的波源及弹性连续的介质

波动的传输特性可以通过波面和波线进行描述，其中波面由振动中同相点构成，表示波的传播范围，波线与波面垂直，表示波的传播方向

波动可以分为行波和驻波，表示两种不同的能量传播特性：

- 行波的相位和能量向波线方向传递
- 驻波的相位和能量保持在波动范围内

波动可以分为横波和纵波，表示振动方向和传播方向的不同关系：

- 横波振动方向与传播方向垂直，由切向力依次作用产生（电磁波）
- 纵波振动方向与传播方向一致，由纵向力依次作用产生（声波）

波的传播速度与介质相关

其中大物一门课内主要讨论的是**平面简谐波**

### 重要参数

- 波动频率  
波源振动的频率 $\omega$
- 波长  
一个周期内波行进的路程 $\lambda$ ，即一个完整波的长度
- 波速  
振动状态/相位的传播速度 $u$ ，取决于介质的弹性模量和密度  
有 $u_{\text{横}} = \sqrt{\frac{\cdot}{\rho}}$ ，其中 $\cdot$ 为常量， $\rho$ 为介质密度

对于以上三个定义，其间存在联系 $u = \frac{\lambda}{T}$

### 波函数

对于波源即坐标轴原点O，我们定义其波动方程为

$$y_o = A \cos(\omega t + \varphi)$$

我们要求解沿x轴正向传递的波函数，可在坐标轴上任取距离原点距离x的一点p，易得P的起振时间落后于O点 $x/u$ ，相应的有相位落后 $\omega t$ 即 $\omega x/u$ 。即O点相位传递到P点所需的时间为 $\Delta t = x/u$ ，t时刻P点相位与 $t - x/u$ 时刻O点的相位相同。因此，我们定义

$$\begin{aligned} y(x, t) &= A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right] \\ &= A \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right] \\ &= A \cos\left[2\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right] \\ &= A \cos(\omega t - kx + \varphi) \end{aligned}$$

为沿x轴正向传播的平面简谐波的波函数，亦称波动方程

最后一式中 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ，表示 $2\pi$ 长度内包含完整波的个数，亦等于 $\omega/u$ ， $kx$ 为x到原点的相位差

更一般的，我们将波函数表示为

$$y(x, t) = A \cos\left[\omega\left(t \mp \frac{x - x_o}{u}\right) + \varphi\right]$$

其中 $x \sim 0$ 表示波源的位置，负正号分别表示着正向和负向传播

对于波动，还有通用的微分方程，即特征表示式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

可以用特征式判断物理量在空间中是否以波的形式传播（电磁波动方程）

## 波的能量

波的能量为各质点动能和介质弹性形变产生的势能之和，随着波的传播，能量一同传递

我们观察一个波的传递，当位移处于最大时，同时具有最小的动能和周边介质的弹性势能，因此，波的能量并非同振动一般在两种能量之间互相转化，且对于单位空间守恒。

取介质中一质元 $\Delta m = \rho \Delta V$ ，其中 $\rho$ 为密度， $V$ 为质元体积，有质元动能势能：

$$\begin{aligned}\Delta E_k &= \Delta E_P = \frac{1}{2} \rho \Delta V \omega^2 A^2 \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \\ \Delta E &= \Delta E_k + \Delta E_P = \rho \Delta V \omega^2 A^2 \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]\end{aligned}$$

（假设波沿 $x$ 轴正向传播，证明略）如此，继续依靠微分定义波的能量密度/平均能量密度：

$$\begin{aligned}w &= \frac{dE}{dV} = \rho \omega^2 A^2 \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \\ \bar{w} &= \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2\end{aligned}$$

## 波的强度

首先，我们定义平均能流 $\bar{P}$ 为单位时间内通过介质某一面积的平均能量

我们取一个介质中以 $S$ 为底面，波速 $u$ 为高的柱体，有平均能量

把垂直传播方向单位面积内的平均能流称作能流密度，记作 $I$ ，有：

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \bar{w} u S \\ I &= \bar{w} u = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 u\end{aligned}$$

有平面波通过每一波面的平均能流相等，球面波则有 $I_1 S_1 = I_2 S_2$ ，有振幅和传播距离呈反比，即球面波有波动方程：

$$y = \frac{A}{r} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{u} \right) + \varphi \right]$$

## 波的吸收

波在传播的过程中，总是有介质吸收波的能量

$$I = I_0 e^{-2\alpha x}$$

其中 $\alpha$ 为吸收常数，该公式由 $-dA = \alpha A dx$ 积分求得，表示单位厚度介质吸收

## 声波

声波的平均能流密度被定义作声强，用分贝（dB）表示声强级 $I_L = 10 \lg \frac{I}{I_0}$

## 多普勒效应

$$\nu_R = \frac{u \pm v_R}{u \mp v_S} \nu_S$$

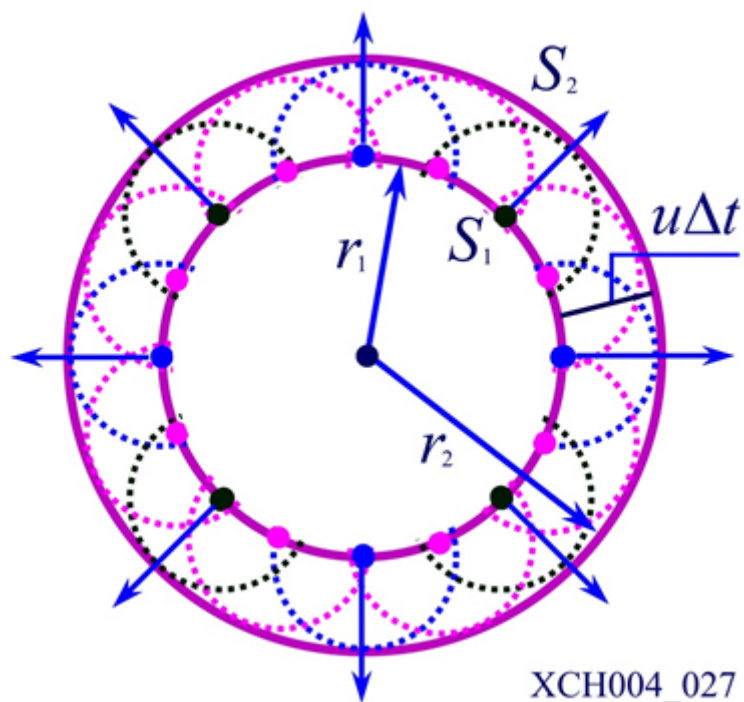
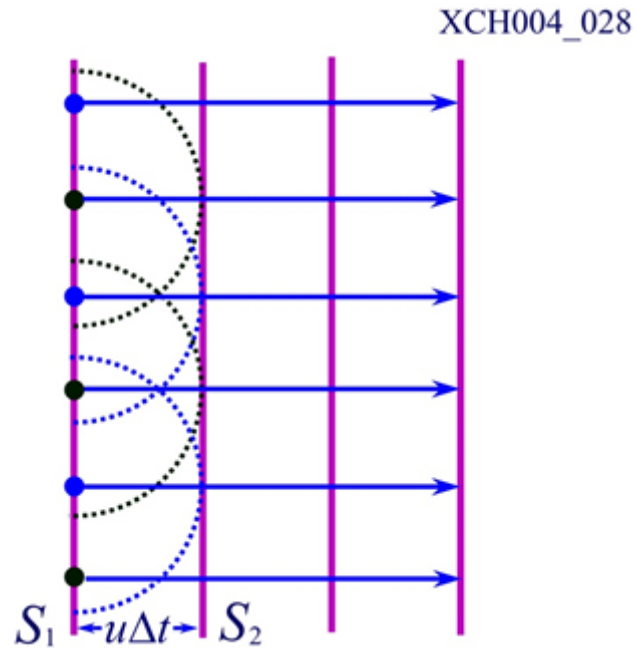
其中s代表波源，r代表观察者

多普勒原理也可用于解释光波（红移）

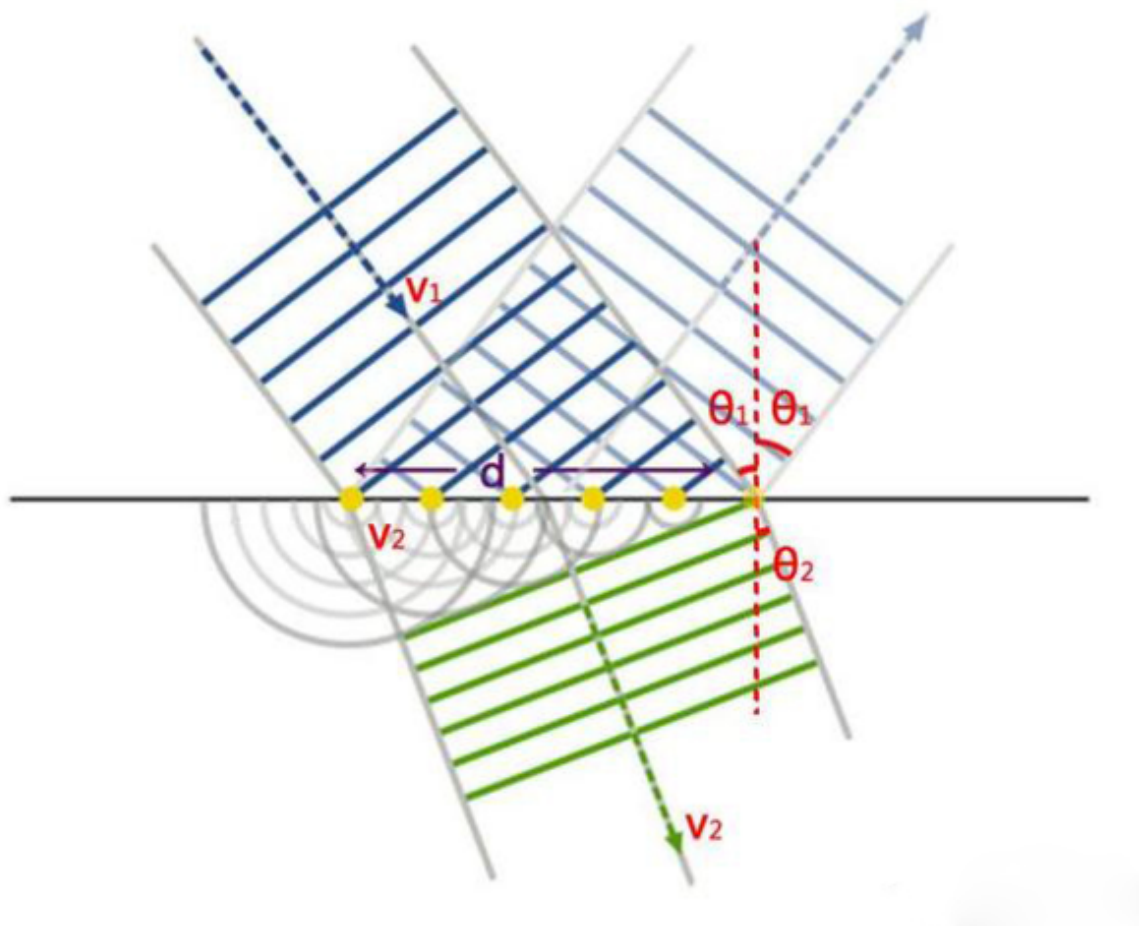
## 波的特性（衍射/干涉）

### 惠更斯原理

将任意波面上的点视作子波源，全子波的包络面表示下一时刻波面



可以通过惠更斯原理解释光的反射/折射/衍射



## 波的衍射

略

## 波的干涉

由振动方向相同，频率相同，相位差恒定的两列波叠加产生的现象

表现为部分振动加强，部分振动减弱

我们设由 $S_1$ 和 $S_2$ 两波源分别激发相干波，并在p点相遇，设波源振动方程为

$$y_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

设P点到 $S_1$ 、 $S_2$ 距离分别为 $r_1$ 、 $r_2$ ，则有P点振动情况

$$y_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda})$$

$$y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda})$$

合成后有

$$y = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda})}$$

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin(\varphi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda}) + A_2 \sin(\varphi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda})}{A_1 \cos(\varphi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda}) + A_2 \cos(\varphi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda})}$$



当相位差满足

$$\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm 2K\pi$$

时，有相应位置振动加强，即干涉相长，当满足

$$\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm(2K + 1)\pi$$

时，有振动减弱，即干涉相消

## 驻波

有振动方向相同、频率相同、相位差恒定、振幅相同传播方向相反的两列波叠加形成驻波

设正负波列方程

$$\begin{aligned}y_1 &= A \cos(2\pi\nu t + \varphi_1 - \frac{2\pi x}{\lambda}) \\y_2 &= A \cos(2\pi\nu t + \varphi_2 + \frac{2\pi x}{\lambda})\end{aligned}$$

求得驻波函数

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}) \cos(2\pi\nu t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2})$$

其中前一分量表示驻波在某点的极大振幅，后者表示周期变化规律

对于驻波，有波节和波腹的位置

$$\begin{aligned}x &= \pm(2k + 1)\frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{4\pi}(\varphi_2 - \varphi_1) \\x &= \pm 2k\frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{4\pi}(\varphi_2 - \varphi_1)\end{aligned}$$

相邻波节之间相位相同，波节两侧相位相反

有驻波能流密度为0

## 半波损失

有介质密度 $\rho$ ，波速 $u$ ，定义 $\rho u$ 较大的介质为波密介质，较小为波疏介质

从波疏介质中传递到波密介质界面发生反射时，有半波损失，即相位相反

# 光学

---

## 光的干涉

光的干涉是波的干涉在波动为可视电磁波时的特殊表现，改变了光强在空间的分布

## 相干光

即符合相干条件，频率相同、振动方向平行、相位差恒定的光波

## 分波阵面法

在光波的同一波面上取子波源以满足相干条件，杨氏双缝干涉、洛埃德镜解决方案

## 分振幅法

通过反射和折射生成初相差为0的两列光波，等倾干涉、等厚干涉、迈克尔逊方案

## 光程

对于在P点引起振动的两束相干光，有相位差

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + \frac{2\pi r_2}{\lambda_2} - \frac{2\pi r_1}{\lambda_1}$$

我们考虑的通常只有 $\varphi_1 = \varphi_2$ 的情况

由光在不同介质中的波长公式 $\lambda_1 = u_1 T = \frac{c}{n_1} T = \frac{\lambda}{n_1}$ ，前式可以转化为

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{n_2 r_2}{\lambda} - \frac{n_1 r_1}{\lambda}\right)$$

由此引入光程的定义 $\Delta = nr$ 即光在介质中传播的距离换算到真空中的形式

$$n = \frac{c}{u}, r = ut, \Delta = ct$$

顺便引入光程差的概念 $\delta = n_2 r_2 - n_1 r_1$ ，因此有相位差和光程差的关系：

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta$$

对于光在介质 $n$ 中传播距离 $r$ ，有

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{r}{\lambda'} = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda}$$

其中 $\lambda'$ 为光在介质中的波长

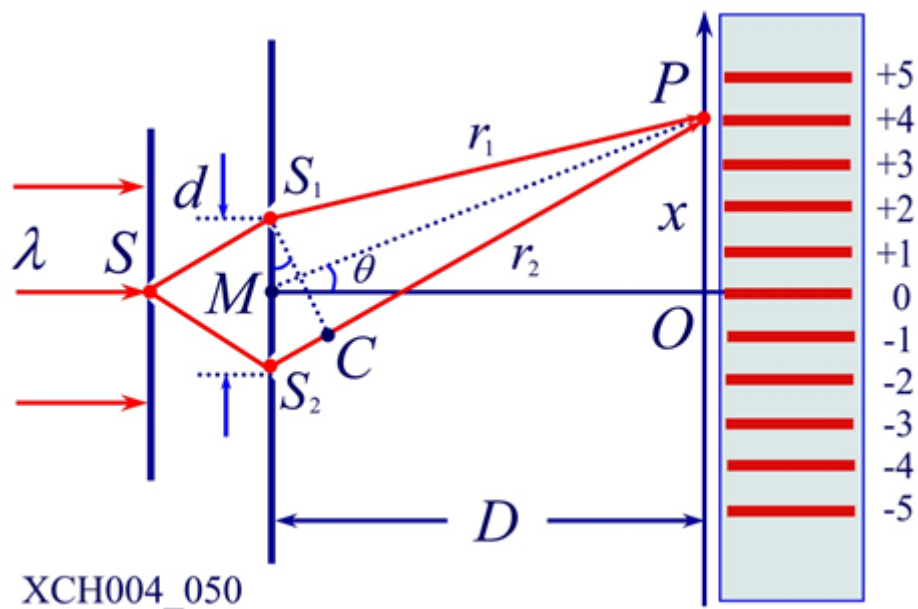
通过前面的干涉加强公式，我们可以得出：

- $\delta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$ 时，有干涉相消
- $\delta = \pm k\lambda$ 时，有干涉相长

## 等光程性

透镜的特性，发自物点S的光束/平行光束经过透镜后汇聚在焦平面上的S'点，有到达S'点时光程相同。  
即透镜可以在不增加光程的情况下改变光传播的方向

## 杨氏双缝干涉



双缝干涉的原理时分波阵面法获取相干光，有两束点光源在 $S_1 S_2$ ，有光线传播到P点光程差为 $S_2 C = \delta = r_2 - r_1$ ，要求 $x \ll D$ ，因此有 $\theta \approx \angle S_2 S_1 C$ ，有：

$$x = D \tan \theta$$

$$\delta = S_2 C = d \sin \theta$$

当 $\theta$ 足够小时，有 $\tan \theta \approx \sin \theta$ ，则有：

$$\frac{\delta}{d} \approx \frac{x}{D}$$

$$\delta \approx x \frac{d}{D}$$

$$x \approx \delta \frac{D}{d}$$

根据干涉相消相长条件，有条纹中心位置方程：

- 明条纹中心：

$$x = \pm k \lambda \frac{D}{d}$$

- 暗条纹中心：

$$x = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \frac{D}{d}$$

- 条纹间距（同色）：

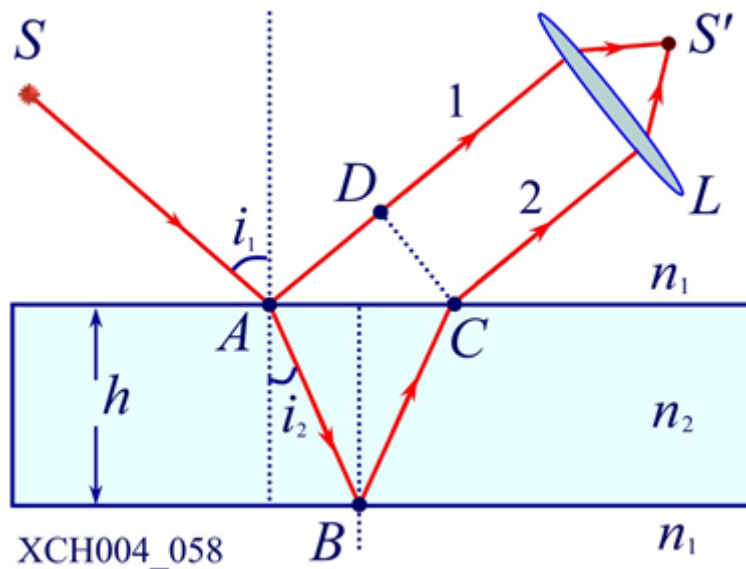
$$\Delta x = \frac{D}{d} \lambda$$

易得：

波长越长，条纹间距越大

狭缝的上下移动，会引起干涉条纹的反向运动

## 薄膜干涉



薄膜干涉是分振幅法干涉，主要表现为反射光与折射后的反射光的干涉，以图为例，

$$\delta = 2n_2 \frac{h}{\cos i_2} - 2n_1 h \tan i_2 \sin i_1 + \frac{\lambda}{2} = 2n_2 h \cos i_2 + \frac{\lambda}{2}$$

其中考虑到若三层介质n为三明治结构，则需要考虑半波损失，至于折射率递增或递减，则无需考虑半波损失，完整考虑薄膜干涉的明暗条件，有：

$$\delta = 2h\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i_1} + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda & (k = 1, 2, \dots) \quad \text{干涉相长} \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2} & (k = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{干涉相消} \end{cases}$$

当 $n_1$ 和 $n_2$ 确定时，有光程差由介质膜厚度 $h$ 和入射倾角决定

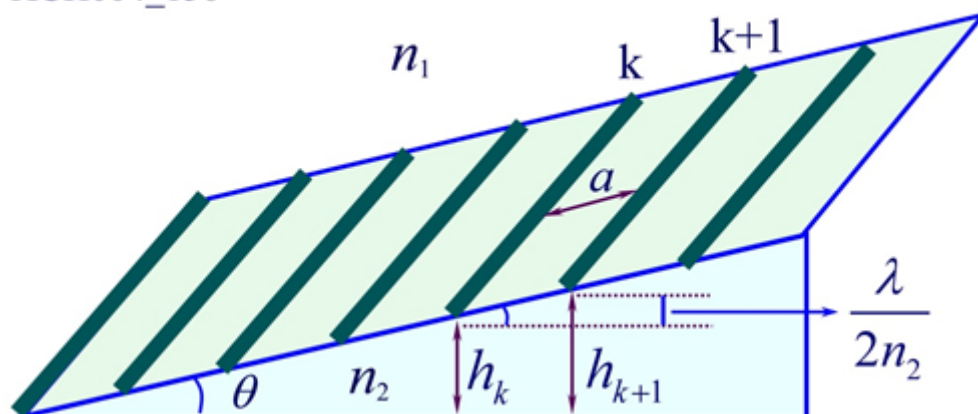
以此为标准将薄膜干涉分为等倾干涉和等厚干涉两种进行分析

## 等厚干涉

入射角 $i$ 均与不变，光程差取决于介质膜厚度 $h$ 的干涉

### 劈尖干涉

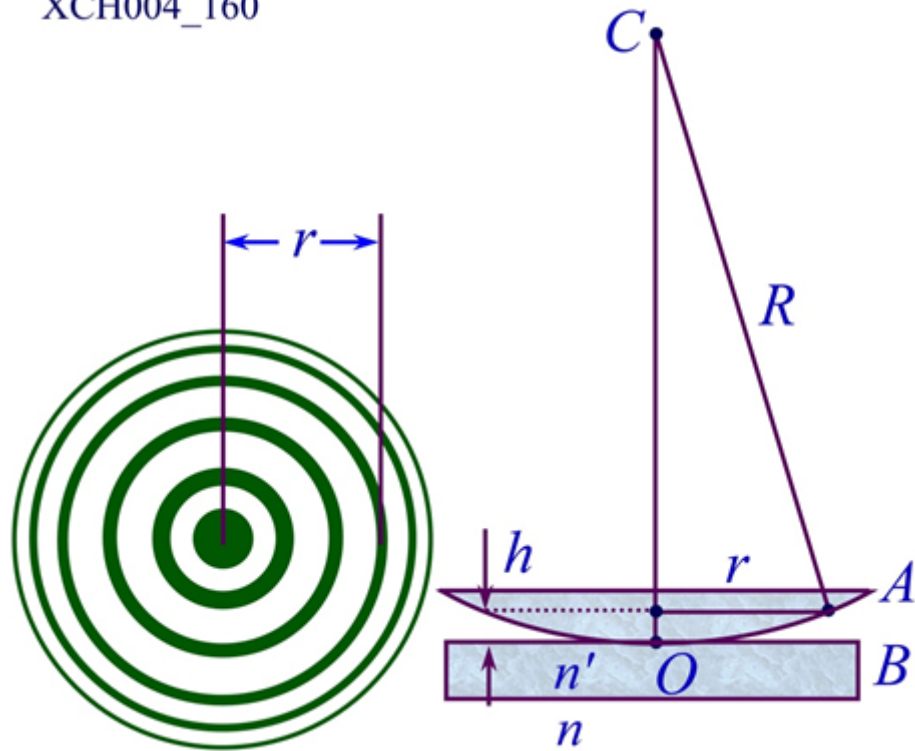
XCH004\_156



$$\delta = 2n_2 h + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda & (k = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{明纹中心} \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2} & (k = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{暗纹中心} \end{cases}$$

有相邻明暗条纹之间的厚度距离为 $\frac{\lambda}{2n_2}$ ，间距为 $\frac{\lambda}{2n_2 \sin \theta}$

### 牛顿环



通过几何关系，可得  $h \approx \frac{r^2}{2R}$

$$\delta = 2nh + \frac{\lambda}{2} = n \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda & (k = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{明纹中心} \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2} & (k = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{暗纹中心} \end{cases}$$

因此有明环暗环半径：

$$r = \sqrt{(2k-1) \frac{R\lambda}{2n}}$$

$$r = \sqrt{kR \frac{\lambda}{n}}$$

牛顿环的中心为暗环，因为下表面除接触点外均存在半波损失

有条纹间距  $a = \frac{\lambda}{2n \sin \theta}$ ，有靠近中心的条纹稀疏的趋势

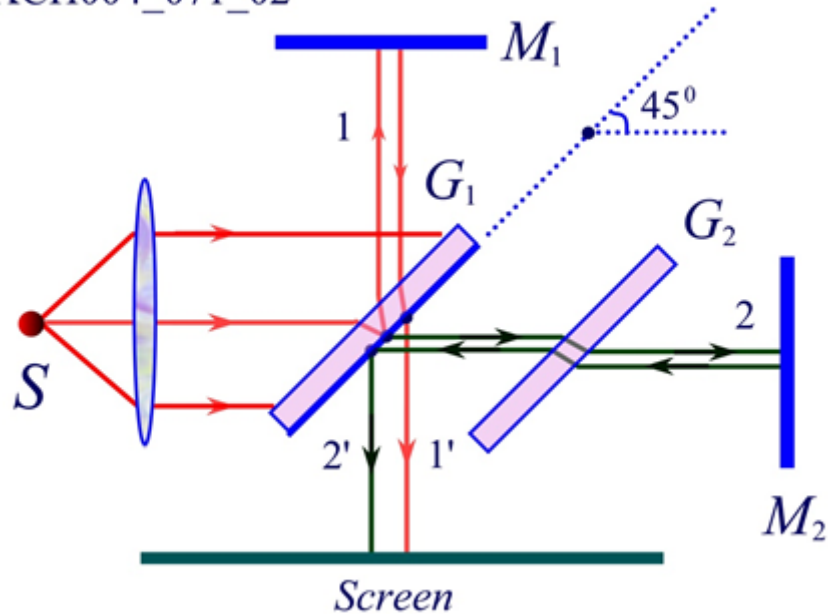
## 等倾干涉

介质膜厚度  $h$  均匀不变，光程差取决于入射角  $i$  的干涉

## 增透膜

通过在镜头上镀膜使得反射光干涉相消，增加入射光强度

## 迈克尔逊干涉



中央干涉条纹的光程差：

$$\delta = 2h = k\lambda$$

当 $h$ 增大时，有高级条纹从中央视场中“冒出”从而有条纹密度增大，当 $h=0$ 时，有全视场仅有一个亮纹，有

$$\Delta h = N \frac{\lambda}{2}$$

中心条纹数目的变化多少反映了光程差的变化大小有

$$\Delta \delta = \Delta k \lambda$$

## 光的衍射

光的衍射表示光在通过障碍物时，偏离原来的传播方向，光强在空间中重新分布的规则，形成了明暗相间的衍射条纹。衍射条纹仅在狭缝极小的时候会表现。

### 惠更斯-菲涅尔原理

这是菲涅尔原理的拓展，解释了屏幕上出现的明暗条纹，提出了“次波相干叠加”的概念，该原理定性表示为：从同一波面上各点发出的次波是相干波，经过传播，在空间某点相遇时产生相干叠加

给出惠更斯-菲涅尔原理的数学表达式：

$$dE = C \frac{A(Q)K(\theta)}{r} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right) ds$$

$$E = \int_S C \frac{A(Q)K(\theta)}{r} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right) ds$$

表示整个波面 $S$ 在 $P$ 点处的振动由积分表示， $ds$ 为面元

### 衍射类型

#### 菲涅尔衍射

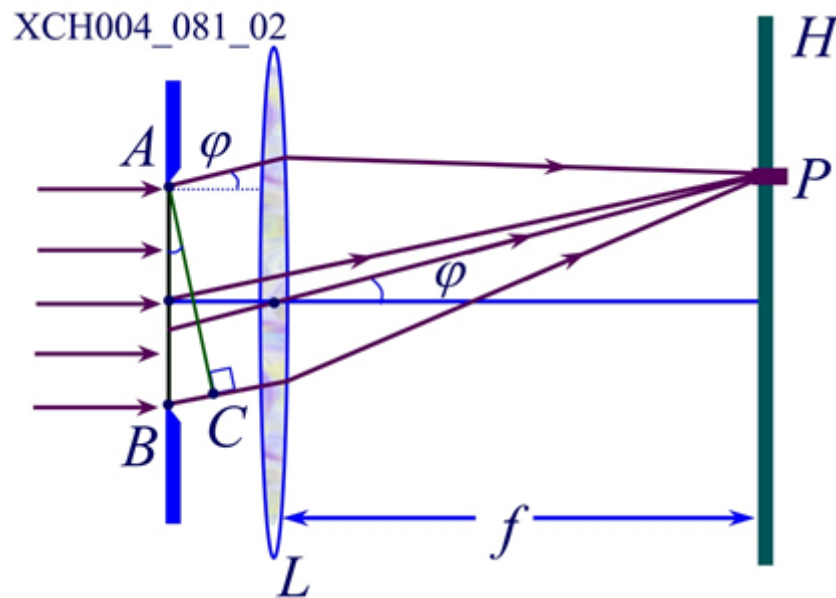
光源与光屏距离障碍物有限的衍射

#### 夫琅禾费衍射

理论上光源与光屏距障碍物距离无限

## 单缝衍射

通过菲涅尔半波带法对单缝衍射进行分析



设衍射角一定， $AB$ 点发出的子波到达 $P$ 点的光程差有 $\delta = BC = a \sin \varphi$

我们将单缝上的波面切分成多条宽度为 $\Delta a$ 的波带，其中要求相邻带上对应点到达 $P$ 点的光程差为 $\frac{\lambda}{2}$ ，如此，有相邻半波带中，光程差为 $\frac{\lambda}{2}$ 的点光源依次在 $P$ 处相位抵消

首先，我们知道 $AB$ 两点到 $P$ 点的光程差为 $a \sin \varphi$ ，因此有半波带的数目为 $N = \frac{a \sin \varphi}{\lambda/2}$ ，因此，如果有半波带数目为偶数，给出 $P$ 点光强最小，相位相消，反之存在最大光强

给出条纹条件：

$$\delta = BC = a \sin \varphi = \begin{cases} \pm k\lambda & \text{暗纹中心} \\ \pm (2k+1)\frac{\lambda}{2} & \text{明纹中心} \end{cases}$$

另外，因为有条纹间距 $\Delta x = f \frac{\lambda}{a}$ ，其中中央亮条纹的宽度超级加倍

推出：

$$\begin{aligned} x &= f \tan \varphi \\ \sin \varphi &= \frac{\delta}{a} \end{aligned}$$

当 $\varphi$ 很小时，有

$$\begin{aligned} \sin \varphi &\approx \tan \varphi \approx \varphi \\ x &\approx \frac{f}{a} \cdot k\lambda \end{aligned}$$

单缝的上下移动不影响衍射条纹的分布

## 光学仪器的分辨本领

### 爱里斑

平行光经过圆孔后汇聚于屏幕上形成的衍射，其中心明斑占总光强的84%，外圈为同心环

有爱里斑半角跨度 $\theta_0 \approx \sin \theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ ，其中 $D$ 为衍射圆孔直径（靠背吧）

## 瑞利判据

圆孔夫琅禾费衍射能用来分析光学仪器的分辨本领，为了不混淆视界中的两个光源，我们需要确定光学仪器成像中爱里斑不发生重叠，从而规定了一个最小分辨角，称作瑞利判据。

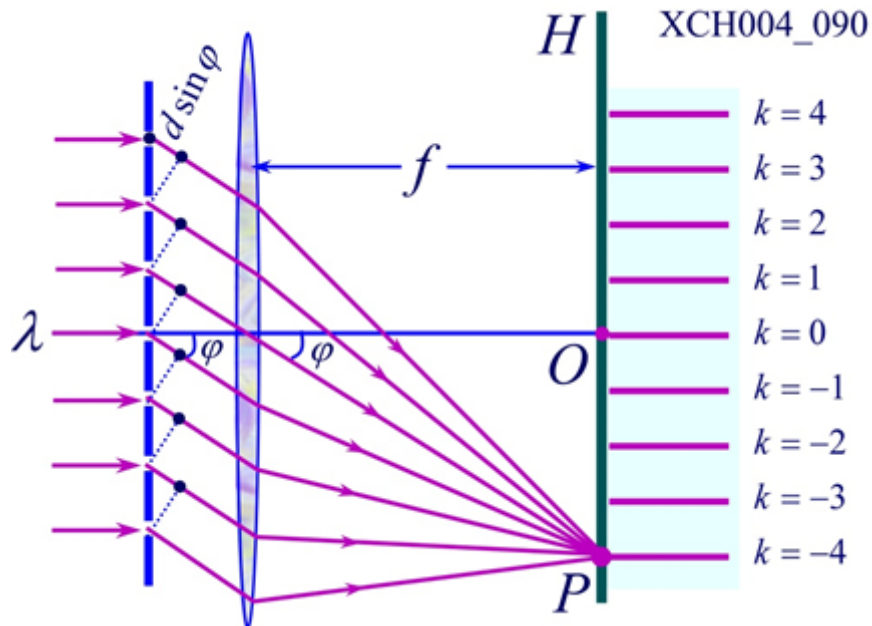
有光学系统的最小分辨角为  $\delta\theta = \theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$

我们把光学仪器的分辨本领  $R$  定义为最小分辨角的倒数，有  $R = \frac{D}{1.22\lambda}$

因此有光学仪器口径越大，对应分辨本领越强

以及通常的，对于离仪器距离  $S$ ，相距  $d$  的物体，设  $\delta\theta = \frac{d}{S}$ ，即默认  $d \ll S$ （做题

## 衍射光栅



有光栅常数定义为  $d=a+b$ , 其中  $a$  为光栅透光部分， $b$  为光栅非透光部分， $d$  为光栅的单个周期

光栅方程：

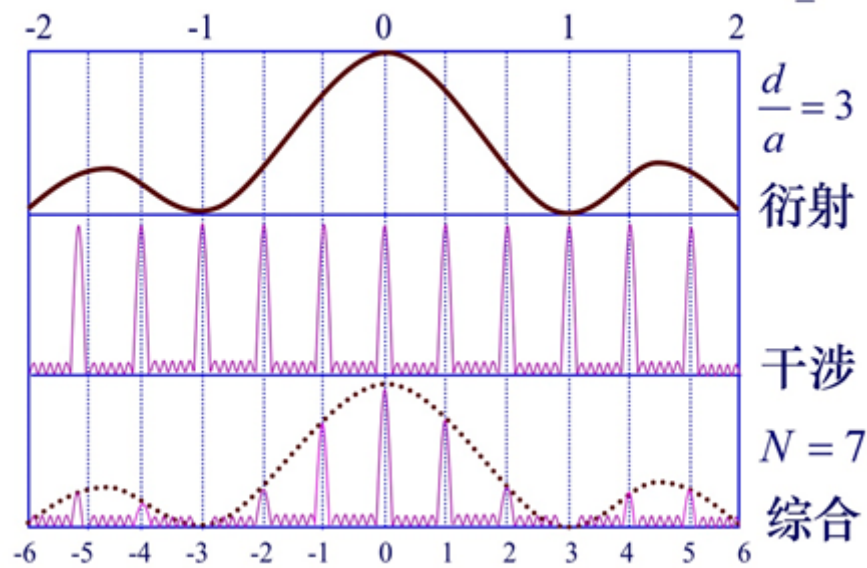
$$d \sin \varphi = (a + b) \sin \varphi = \pm k\lambda$$

有  $\varphi$  方向上相邻狭缝到达  $P$  点的光程差为  $d \sin \varphi$ ，当  $d \sin \varphi = k\lambda$  时，有全部条纹干涉相长，此时出现亮极，其它位置均为暗

## 缺级

在考虑光栅衍射时，还要引入单缝衍射对光强分布的影响，前面已知的，单缝的移动对光强分布并无影响，因此衍射光栅还可以视为  $N$  个单缝衍射的叠加，因此由衍射方程，可以获得缺级判定的表达式





$$a \sin \varphi = k' \lambda$$

因此，有 $k = \frac{a+b}{a} k' = \frac{d}{a} k'$ 时，光栅存在缺级

暗纹条件

$$d \sin \varphi = (k + \frac{n}{N}) \lambda$$

当n处于1到N-1的范围内时，存在干涉相消发生，出现完全的暗条纹，另有N-2个难以观察的次级明条纹

斜入射光栅方程

$$d(\sin \varphi - \sin i) = k \lambda$$

其中有衍射角 $\varphi$ 取值范围为  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

## 光的偏振

偏振光强公式

$$I = I_0 \cos^2 \alpha$$

## 相对论

### 狭义相对论

经典时空观

经典时空观是经典力学中的默认规则，由三个经典概念组成

力学相对性原理

在相对做匀速直线运动的所有惯性系中，物体运动的力学规律完全相同

伽利略坐标变换

设两个惯性参考系S(oxyz)，S'(o'x'y'z')，对在x轴方向的平行相互运动有

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t \\ \vec{v}' = \vec{v} - \vec{u} \\ \vec{a}' = \vec{a} \end{cases}$$

## 绝对时空观

经典力学的时空观描述为绝对空间和绝对时间就其本质而言与外物无关，均匀流动

1. 空间任意两点距离与两事件发生的时间间隔，在不同惯性系中保持不变
2. 时间和空间是分离的，时间和空间是均匀的

## 相对论时空观

但是经典的时空观在光的发现和以太的引入中被发现了更多的问题，经由前人的积累，由彭加勒提出了相对的时空观，后由爱因斯坦建立了完整的狭义相对论体系

## 狭义相对论基本原理（基本假设）

### 相对性原理

描述物理学定律的所有惯性参考系都是等价的

### 光速不变原理

所有惯性参考系中，真空中的光速为恒量，与光源和观察者的运动状态无关，物体运动速度不可超越光速

有光在真空中传播的速度为

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.998$$

## 洛伦兹变换式

$$\begin{array}{ll} \text{正变换:} & \begin{cases} x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} \\ v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2} \\ v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2} \end{cases} & \text{逆变换:} & \begin{cases} x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + ux'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ v_x = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2} \\ v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + uv'_x/c^2} \\ v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + uv'_x/c^2} \end{cases} \\ \text{正变换:} & \begin{cases} \vec{r}' = \frac{\vec{r} - \vec{u}t}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ t' = \frac{t' - \vec{u} \cdot \vec{x}'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ \vec{v}' = \frac{\vec{v} - \vec{u}}{1 - \vec{u} \cdot \vec{v}/c^2} \end{cases} & \text{逆变换:} & \begin{cases} \vec{r} = \frac{\vec{r}' + \vec{u}t'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ t = \frac{t' + \vec{u} \cdot \vec{x}'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ \vec{v} = \frac{\vec{v}' + \vec{u}}{1 + \vec{u} \cdot \vec{v}'/c^2} \end{cases} \end{array}$$

## 狭义相对论运动学

## 同时性的相对性

1. 两事件在惯性系S中观察同时不同地，在惯性系S'中观察就不同时
2. 两事件在惯性系S中观察不同时不同地，在惯性系S'中观察可能同时
3. 两事件在惯性系S中观察同时同地，在惯性系S'中观察一定同时
4. 因果性不变

## 钟慢效应

在相对静止的参考系S中，同地不同时的两个事件的时间间隔称为本真时间 $\tau_0$ ，它是最短的，在其他所有惯性参考系中测得相同事件的时间间隔为

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

## 尺缩效应

在运动方向上有物体长度缩短

$$L = L_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

## 相对论质量

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

## 相对论动量

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right)$$

相对论体系中，力同时和物体的速度和质量关联

## 相对论能量

$$dE_k = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$\text{有 } \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}, d\vec{l} = \vec{v} dt, m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$dE_k = m\vec{v} \cdot d\vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} dm = mvdv + v^2 dm = c^2 dm$$

$$\text{有 } E_k = mc^2 - m_0 c^2$$

其中前项为物体总能量，后项为物体静能量，给出爱因斯坦质能关系

$$E = mc^2$$

同时有质量变化引起能量改变 $\Delta E = \Delta mc^2$

## 相对论动能关系

由质速关系 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$ 得

$$m^2 c^4 = m^2 v^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

代入有相对论动量和相对论能量的关系

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^2$$

## 光子动能性质

$$p_{\varphi}=\frac{E}{c}, m_{\varphi}=\frac{E}{c^2}$$

# 量子力学

## 早期量子论

### 黑体辐射

#### 斯特藩-玻尔兹曼定律

通过研究黑体单色辐射出度  $M_{\nu}$  研究热辐射，有实验观察黑体辐射的全部出射度于绝对温度  $T$  的四次方呈正比

$$M=\int_0^{\infty} M_{\nu} d\nu=\sigma T^4$$
$$\sigma=5.67051\times 10^{-8}W/(m^2\cdot K^4)$$

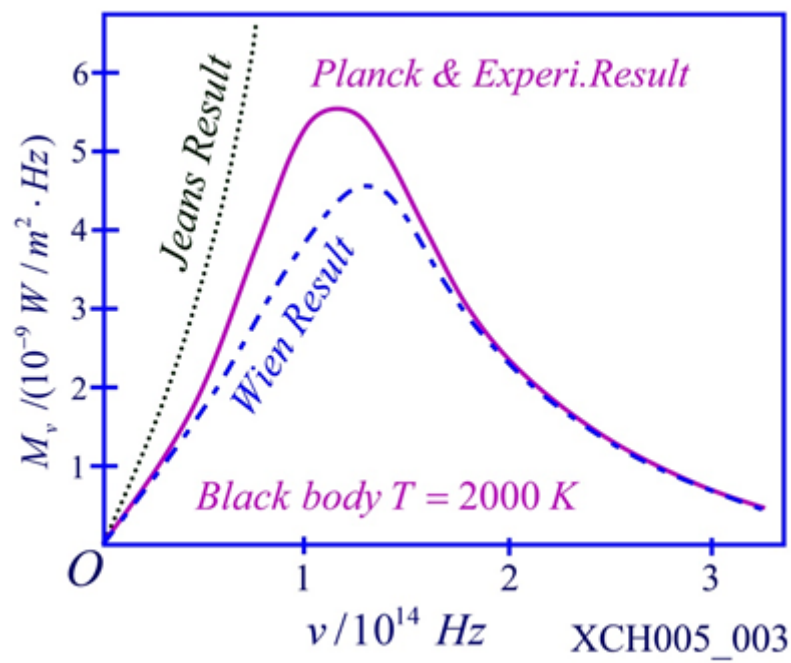
称作斯特藩-玻尔兹曼定理/常数，

#### 维恩位移定律

当绝对温度增高时，最大的单色幅出度向短波方向移动，（低温红巨星）

$$T\lambda_m=b$$
$$b=2.897\times 10^{-3}m\cdot K$$

#### 黑体辐射经典理论



考虑物体的热辐射，物质的谐振子体系向空间发送电磁波，构成连续热辐射能谱

#### 维恩公式

从热力学和麦克斯韦分布律推导

$$M_{\nu}(T)=\alpha \nu^3 e^{-\frac{\beta \nu}{T}}$$

在长波范围内与实验结果不符

## 瑞利金斯公式

从黑体辐射经典模型推导

$$M_{\nu}(T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT$$

短波范围与实验不符，紫外灾难

## 普朗克量子假设

普朗克量子假设是维恩公式和瑞利金斯公式的数学组合

$$M_{\nu}(T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$$
$$h = 6.6260755 \times 10^{-34} J \cdot s$$

其中 $h$ 被称为普朗克常数

但要有普朗克公式成立，要求能量均分定理在黑体辐射情况下不成立，振子的能量只能取到固定的状态，而非连续变化，其中最小的变化单位被称为能量子

$$\epsilon_0 = h\nu$$

有在 $h\nu : kT$ 具有远大远小关系时，普朗克公式与经典公式近似

## 光电效应

两电极受到紫外光照射时产生的放电效应

### 饱和电流

当光强一定时，两级电压增加到一定程度有电流饱和，即溢出光电子均被电势差运输

### 截止电压

截止电压为施加反向使光电流为0的电压，截止电压无关光强与光照时间，仅有光电子最大初动能，即与光的频率有关

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = eU_c$$

### 截止频率（红限）

实验表明截止电压和光的频率呈线性关系，有截止电压和光照射频率的关系

$$U_c = K(\nu - \nu_0)$$

其中 $\nu_0$ 的取值仅同照射金属有关，称为阈频率或红限频率，K为比例系数

有红限波长 $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$

同时，有更新的最大初动能表示式

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = eK(\nu - \nu_0)$$

有 $\nu < \nu_0$ 时，绝对截止，无光电子发射

## 爱因斯坦光子理论

有光子能量 $E = h\nu$ ，电子吸收光子的能量获得逸出功和初动能，给出光电方程

$$h\nu = A + \frac{1}{2}mv_m^2$$

其中A为金属逸出功，为固有属性

$$U_c = \frac{h}{e}(\nu - \frac{A}{h})$$

有  $K = \frac{h}{e}$ ,  $A = h\nu_0$

### 光的波粒二象性

光在传播过程中表现出波动性，在与物质的作用中表现出了粒子性，呈现了一种波粒二象性，根据爱因斯坦狭义相对论，可以将光的波动性和粒子性联合讨论

有光子能量  $E = h\nu$ ，相对论质能关  $E = m_\varphi c^2$ ，可以得出光子的质量、动量

$$m_\varphi = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{c\lambda}$$

$$p = m_\varphi c = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

有质量和动量为粒子的特征量，波长和频率为波动的特征量

又根据  $m_\varphi = \frac{m_{\varphi 0}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ ，必有光子静止质量为0

### 康普顿效应

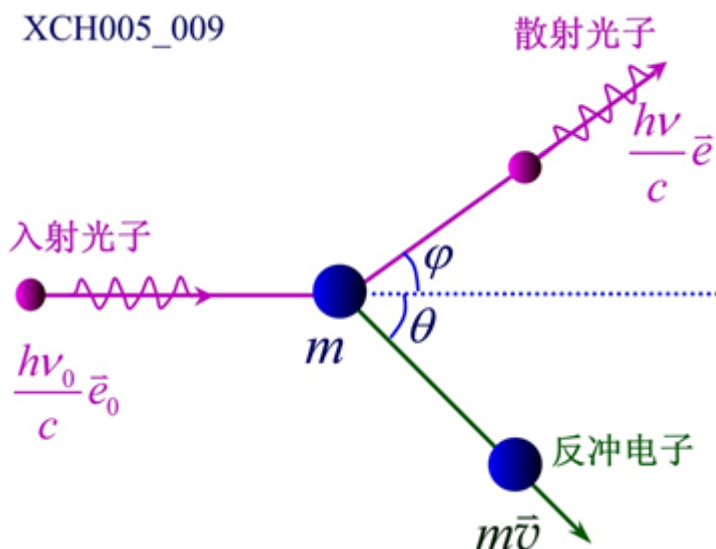
描述X射线在物质散射时发现的随散射角改变的波长较长的成分。

1. 对于同一种散射物质，康普顿散射波长位移  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$  随散射角  $\varphi$  的不同而异，散射角增大， $\Delta\lambda$  增加。相同散射角下波长位移与散射物无关
2. 对于同一种散射物质，散射角增大，原波长谱线强度减小，新波长谱线强度增大
3. 有散射原子越大，原波长谱线的强度越大，新波长谱线的强度越小

### 光子理论的解释

假定散射时发生的仅有光子与自由电子的弹性碰撞

有光子与电子互相作用



作用前：  
光子

$$\begin{cases} E_{\varphi 0} = h\nu_0 \\ \vec{p}_{\varphi 0} = \frac{h\nu_0}{c} \vec{e}_0 \end{cases}$$

电子

$$\begin{cases} E_{e0} = m_0 c^2 \\ \vec{p}_{e0} = 0 \end{cases}$$

作用后:

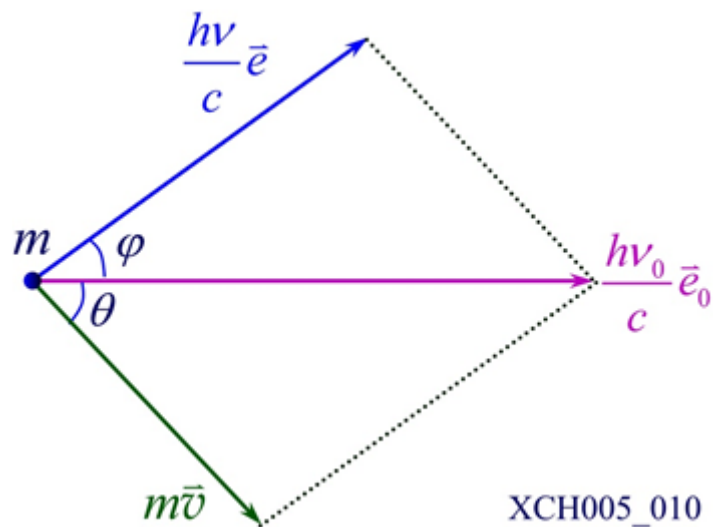
光子

$$\begin{cases} E_{\varphi} = h\nu \\ \vec{p}_{\varphi} = \frac{h\nu}{c} \vec{e} \end{cases}$$

电子

$$\begin{cases} E_{e0} = mc^2 \\ \vec{p}_{e0} = m\vec{v} \end{cases}$$

构建守恒关系



$$\begin{cases} h\nu_0 + m_0 c^2 = h\nu + mc^2 \\ \frac{h\nu_0}{c} \vec{e}_0 = \frac{h\nu}{c} \vec{e} + m\vec{v} \end{cases} \begin{cases} \frac{h\nu_0}{c} = \frac{h\nu}{c} \cos \varphi + mv \cos \theta \\ \frac{h\nu}{c} \sin \varphi = mv \sin \theta \end{cases}$$

$$m^2 c^4 = m^2 v^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

带入化简推导，有得到康普顿散射公式

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{2h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

有称 $\varphi = 90^\circ$ 时康普顿波长 $\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = 2.43 \times 10^{-3} \text{nm}$

## 氢原子理论

### 玻尔三假设

#### 1. 定态假设

原子系统只能处于一系列不连续的能量状态

#### 2. 跃迁假设

当原子在能级间跃迁时，发射频率为 $\nu$ 的光子

$$\nu_{nk} = \frac{E_n - E_k}{h}$$

### 3. 量子化条件

电子运动角动量取分立值

$$L = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

其中取 $\hbar = 1.0545887 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ 为约化普朗克常数

### 氢原子轨道能量计算

因为牛顿方程有 $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m \frac{v^2}{r}$ ，根据量子化条件，可以获得量子化轨道半径

$$r_n = n^2 \left( \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} \right)$$

有电子在轨道上的能量为势能加动能

$$E_n = \frac{1}{2} m v_n^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{1}{n^2} \left( \frac{m e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \right) = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV}$$

因此，对氢原子的波数 $\tilde{\nu}_{nk} = \frac{1}{\lambda}$ ，有

$$\tilde{\nu}_{nk} = \frac{\nu_{nk}}{c} = \frac{E_n - E_k}{hc} = \frac{m e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

即对于里德伯公式有

$$R_H = \frac{m e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} = 1.097\,373\,156\,8527(73) \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

## 量子力学基础

### 德布罗意物质波

#### 物质波假设

如果所有微观粒子均具有波粒二象性，那么粒子的波动性质和其固有的质量、速率、能量、动量将具有联系

$$\begin{cases} E = mc^2 = h\nu \\ p = mv = \frac{h}{\lambda} \end{cases}$$

其中波长 $\lambda$ 作为波的本征性质被定义为物质的德布罗意波长，有

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{m_0 v} \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

定义物质波两种速度

#### 相速度

$$u = \lambda\nu = \frac{h}{p}\nu = \frac{h\nu}{mv} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v} > c$$



## 群速度

$$v = \frac{h}{m\lambda} < c$$

实物粒子的运动及能量传递都是以群速度进行的。

## 海森堡测不准

海森堡确立的量子力学上的不确定关系

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi}$$

另外的，其它物理量之间也存在不确定关系，如

$$\Delta \varphi \cdot \Delta L \geq \frac{\hbar}{2}$$
$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

即所有乘积量纲为Js的量之间均存在不确定关系

## 波函数—薛定谔方程

### 波函数

波恩给出了德布罗意物质波的现实意义，即概率波，描述了粒子在空间各点出现的概率。为了衡量粒子在空间中出现的不确定性，引入波函数来对粒子行为进行描述

有时间与空间的波函数

$$\Psi = \Psi(x, y, z, t)$$

伯恩假定粒子的概率密度为：

$$\rho = |\Psi|^2 = \Psi \Psi^*$$

其中 $\Psi \Psi^*$ 为波函数的共轭，表示t时刻在空间内某点附近单位体积发现粒子的概率，有：

$$\iiint \rho dV = \iiint |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV = 1$$

### 薛定谔方程

定态薛定谔方程考虑非相对论条件下的微观粒子运动状态

考虑粒子在势场 $V(\vec{r}, t)$ 中运动，粒子总能量为

$$E = E_k + V = \frac{p^2}{2m} + V$$

通过构建动量算符 $-i\hbar \nabla$  ( $\nabla = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$ )和能量算符 $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ 来表示粒子的能量与动量，将波函数代入，有

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi$$

用哈密顿算符 $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V$ 表示，有薛定谔方程的标准形式

$$\hat{H}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

定态薛定谔方程

现考虑非相对论情况下一维稳定势场内的情况，以推导定态薛定谔方程

$$E = \frac{p^2}{2m} + U(x)$$

考虑物质波的相传播速度

$$u = \frac{E}{p} = \frac{E}{\sqrt{2m(E-U)}}$$

假定波函数与时间的联系由一个振动因子 $e^{-i2\pi\nu t}$ 构建，将波函数表示为

$$\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

将波函数代入波动特征方程，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} \\ e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} &= \left(-\frac{i}{\hbar}E\right)^2 \frac{\psi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}}{\left(\frac{E}{\sqrt{2m(E-U)}}\right)^2}\end{aligned}$$

如此消去了两侧的振动因子，消除了薛定谔方程与时间的关联性，得薛定谔方程

$$\begin{aligned}-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U\psi &= E\psi \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - U]\psi &= 0\end{aligned}$$

有定态条件下粒子的概率密度为与时间无关的

$$\rho = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 = |\psi(\vec{r})|^2$$

## 一维无限深势阱

一维无限深势阱描述的是粒子运动的限制，即粒子仅沿x轴在势阱范围内作一维运动，有势阱函数

$$\begin{cases} U(x) = 0 & 0 < x < a \\ U(x) = \infty & else \end{cases}$$

有一位运动粒子的定态薛定谔方程

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - U]\psi(x) = 0$$

有 $U(x)=\infty$ 使粒子不可能出现在势阱外，而在势阱内有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi(x) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + k^2\psi(x) &= 0\end{aligned}$$

取 $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ ，易知线性方程有通解 $\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx$ ，通过 $\psi(0) = \psi(a) = 0$ ，有

$$\begin{aligned}\psi(x) &= A \sin kx \\ k &= \frac{n\pi}{a} \\ E_n &= \frac{n^2 \hbar^2}{8ma^2} \\ \psi_n(x) &= A_n \sin \frac{n\pi}{a} x \\ \int |\psi(x)|^2 dx &= 1 \longrightarrow A_n = \sqrt{\frac{2}{a}}\end{aligned}$$

可得在一维无限深势阱中，有粒子波函数

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x & 0 < x < a \\ 0 & else \end{cases}$$

有概率密度分布函数

$$\rho = |\psi(x)|^2 = \begin{cases} \frac{2}{a} \sin^2 \frac{n\pi}{a} x & 0 < x < a \\ 0 & else \end{cases}$$

拥有性质：

1. 粒子的能量是量子化的，能级为

$$E_n = n^2 \frac{\hbar^2}{8ma^2}$$

2. 有粒子基态能量为

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{8ma^2}$$

被称作粒子零点能，有零点能不为0

3. 有粒子出现在各处的概率不同，仅在  $n \rightarrow \infty$  时，有各处概率一致
4. 势阱中粒子的量子化动量为

$$p_n = \pm \sqrt{2mE_n} = \frac{nh}{2a}$$

5. 粒子的德布罗意波长为

$$\lambda_n = \frac{h}{p_n} = \frac{2a}{n}$$

波长满足

$$a = n \frac{\lambda_n}{2}$$

## 自旋理论与量子数

### 氢原子定态解

考虑电子在氢原子势场中的运动，求解电子的波函数

有氢原子势能场  $U(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$ ，得电子定态薛定谔方程

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \right) \psi = 0$$

将薛定谔方程从直角坐标系转化到球坐标系，将波函数表示为 $\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ ，有求解方程组

$$\begin{cases} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m_l \Phi = 0 \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[ \lambda - \frac{m_l^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0 \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[ \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \right) - \frac{\lambda}{r^2} \right] R = 0 \end{cases}$$

得到氢原子量子化特征（我看了一个晚上我真的看不懂真的，反正看不懂还是先把结论记了吧别挣扎了工科院校是没资格学物理的）

1. 电子的能量是量子化的，能级为

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} = -\frac{13.6}{n^2} \text{eV}$$

有主量子数 $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ ，决定了电子的能量

2. 轨道角动量是量子化的，有

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$$

轨道量子数 $l = 1, 2, \dots, n-1$ ，决定电子的轨道角动量大小

3. 轨道角动量在任选的Z轴方向的投影值也是量子化的，有空间量子化

$$L_z = m_l \hbar$$

轨道磁量子数 $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ ，决定电子角动量在Z轴方向的投影值

4. 外磁场中电子的自旋角动量是量子化的

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar$$

$$S_z = m_s \hbar$$

有自旋量子数 $s=1/2$ ，自旋磁量子数 $m_s = \pm s = \pm 1/2$

电子自旋角动量 $S = \sqrt{\frac{3}{4}}\hbar$ 在Z轴方向上的投影有且仅有两个： $S_z = \pm \frac{1}{2}\hbar$

有描述电子状态的波函数

\$\$

$\psi_{n,l,m_l,m_s}(r,\theta,\varphi)$

\$\$

$$\psi_{n,l,m_l,m_s}(r,\theta,\varphi)$$

$$\psi_{n,l,m_l,m_s}(r,\theta,\varphi)$$