座位号：

杭州电子科技大学学生考试卷（ A ）卷

考试课程	离散数学 2		考试日期	2019 年　月　日	成　绩	
课程号	A0507042	教师号		任课教师姓名	陈勤、袁友伟、周丽、吴向阳、陈溪源	
考生姓名		学号（8 位）		年级	专业	

请将答案填写在答卷纸上。

一　判断题（每小题 2 分，共 10 分）

1. **整数集合与自然数集合等势，有理数集合与整数集合也等势，因此有理数集合与自然数集合等势。**

√

两个考察点，其一，整数集合、自然数集合、有理数集合都是不可数可列集合，它们等势；
其二等势满足等价关系的性质，具备传递性。

2. **阶数大于 1 的群没有零元，也不存在等幂元。**

✕

阶数大于 1 的群没有零元，单位元是等幂元。

3. **偶数阶群必含有 2 次元。**

√

拉格朗日定理的推论，之前发的 b 站视频有详细论证。
https://www.bilibili.com/video/BV1of4y1r7Kh/

4. **P 阶图 G 中，若存在通过顶点 v 的闭通道，则一定存在通过 v 的长度小于或等于 p 的回路。**

√

教材 140 页定理 5.3

5. **图 G 不能同时具备欧拉开迹和欧拉闭迹，同理，图 G 也不能同时具备哈密尔顿开路和哈密尔顿回路。**

✕

图 G 不能同时具备欧拉开迹和欧拉闭迹，但图 G 也能同时具备哈密尔顿开路和哈密尔顿回路。

二　选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1. **下列关于函数的说法错误的是（ C ）。**

A $f: N \to N, f(x) = 2x + 1$ **是单射**
B $f: R \to R^+, f(x) = 2^x$ **是双射**
C $f: Z \to N, f(x) = x^2$ **是满射**
D $f: N \to N \times N, f(x) = <x + 1, x>$ **是单射**

C 选项不是满射，满射指的是 y 取遍值域，这里 x 的平方取不到所有的自然数。

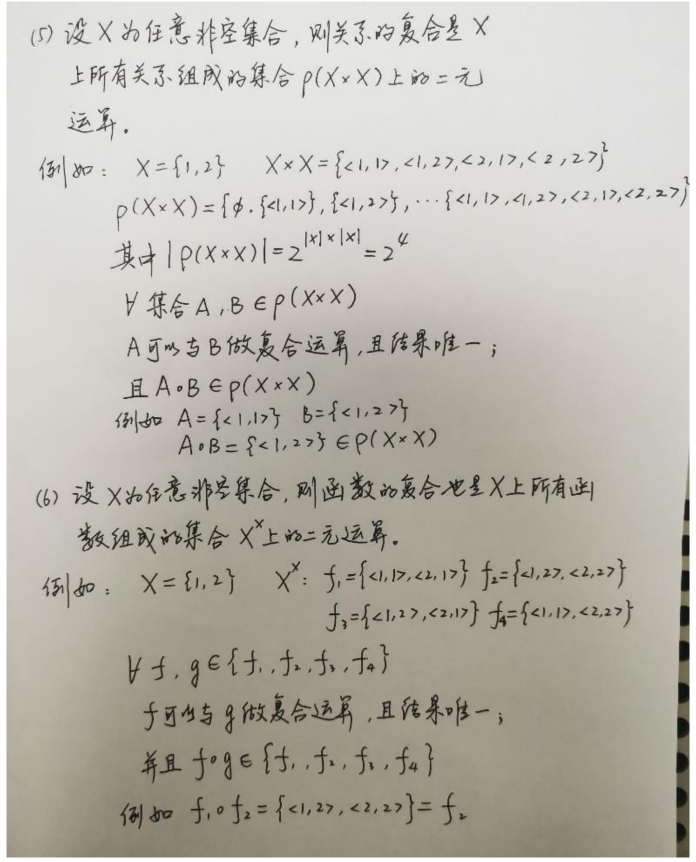
2. **设函数** $f: X \to Y, g: Y \to Z$**，则（ B ）**

A 若 $f^\circ g$ **满射，则是 f 满射。**
B 若 f 和 g 满射，则 $f^\circ g$ **是满射。**
C 若 f 单射，则 $f^\circ g$ **是单射。**
D 若 $f^\circ g$ **单射，则 g 是单射。**

B 是正确的，其他不正确，见教材 89 页，定理 3.15 和例 3.31

3. **下列关于复合运算的说法正确的是（ D ）**

A 它是 $\rho(X \times X)$ **上的二元运算，单位元是恒等关系，零元是空关系，每个元素都有逆元。**
B 它是 X^X **上的二元运算，单位元是恒等函数，零元不存在，每个元素都有逆元。**
C 它是 $\rho(X \times X)$ **上的二元运算，满足消去律。**
D 它是 X^X **上的二元运算，不满足消去律。**



(5) 设 X 为任意非空集合，则关系的复合是 X 上所有关系组成的集合 $\rho(X \times X)$ 上的二元运算。

例如： $X = \{1,2\}$　$X \times X = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>\}$

$\rho(X \times X) = \{\phi, \{<1,1>\}, \{<1,2>\}, \cdots \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>\}\}$

其中 $|\rho(X \times X)| = 2^{|X| \times |X|} = 2^4$

$\forall$ 集合 $A, B \in \rho(X \times X)$

A 可以与 B 做复合运算，且结果唯一；

且 $A \circ B \in \rho(X \times X)$

例如 $A = \{<1,1>\}$　$B = \{<1,2>\}$

$A \circ B = \{<1,2>\} \in \rho(X \times X)$

(6) 设 X 为任意非空集合，则函数的复合也是 X 上所有函数组成的集合 X^X 上的二元运算。

例如： $X = \{1,2\}$　X^X: $f_1 = \{<1,1>, <2,1>\}$ $f_2 = \{<1,2>, <2,2>\}$
$f_3 = \{<1,2>, <2,1>\}$ $f_4 = \{<1,1>, <2,2>\}$

$\forall f, g \in \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$

f 可以与 g 做复合运算，且结果唯一；

并且 $f \circ g \in \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$

例如 $f_1 \circ f_2 = \{<1,2>, <2,2>\} = f_2$

结合我上面做的解释，易知：
复合运算是 ρ(X×X) 上的二元运算，单位元是恒等关系，零元是空关系，每个关系都有逆关系，但是逆关系跟逆元是两个概念，不是每个元素都有逆元，且容易验证不满足消去律。
复合运算是 X^X 上的二元运算，单位元是恒等函数 f(x)=x，零元不存在，双射函数有逆元，但非双射函数没有逆元，容易验证不满足消去律。
因此，只有选项 D 是正确的。

4. **下列不属于群的是（ C ）。**
A $<Z_5^*,\times_5>$　　B $<Q^*,\times>$
C $<Z_8^*,+_8>$　　D $<\widehat{M}_n(R),\times>$

c 选项是去掉零的集合，而 2+6 除以 8 余数就为 0，不在集合内 不满足封闭性

5. **下列哪一个不属于群$<G,+_6>$，G={0, 1, 2, 3, 4, 5}的子群（ C ）。**
A {0, 2, 4}　　B {0, 1, 2, 3, 4, 5}
C {0, 1, 3}　　D {0, 3}

c 选项，1+1=2，2 就不在其中，不满足封闭性

6. **群$<G,*>$，$G=\{e,a,a^2\dots a^{13}\}$的生成元有（ B ）个。**
A 5　　B 6
C 7　　D 8

B 选项，n=14，与 14 互质的整数有 1,3,5,7,9,11,13，共有 6 个生成元。

7. **图 G 有 12 条边，5 度顶点 1 个，4 度顶点 2 个，其余顶点的度数均不超过 3，请问下列哪一组不是图 G 可能的度序列？（ D ）**
A {5, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1}　　B {5, 4, 4, 3, 3, 3, 2}
C {5, 4, 4, 3, 2, 2, 2, 2}　　D {5, 4, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 1}

G 有 12 条边，则总共的度数为 24。
D 选项不满足握手定理，度数之和为奇数。

8. **关于 p 阶连通图 G 的说法错误的是？（ B ）**
A 仅含一个连通分图。
B 对于 G 中任意两点 u，v，$d(u)+d(v)\geq p-1$
C $\lambda(G)\leq\delta(G)$
D 若(u, v)是桥，且$d(u)=2$，则 u 一定为割点。

B 选项，这是连通性的充分性条件，不是必要条件。

9. **图 G 的度序列为{3, 3, 2, 2, 1, 1}，则图 G 最可能是（ A ）**
A 二重图　　**B 哈密尔顿图**
C 欧拉图　　**D 树**

该图有 6 个顶点，所有顶点度数之和为 12，即有 6 条边。
有两个 1 度点，因此不存在哈密尔顿回路，不是哈密尔顿图。
有 4 个奇点，因此不是欧拉图。
6 个顶点，6 条边不是树。
因此，选 A。

10. **下列哪一组度序列最有可能被简单图化？（ A ）**
A {5, 4, 3, 3, 2, 1}　　B {5, 3, 3, 2, 1}
C {4, 4, 4, 3, 3, 3}　　D {4, 4, 4, 2, 2}

B 选项，最大点度数为 5，没有小于等 4，因此不能被简单图化。
C 选项，3 个奇点，不满足握手定理。
D 选项，总共 5 个顶点，有 3 个 4 度点，若是简单图，则这 3 个点都与其余 4 个点右边相连，因此，除了 3 个 4 度点，剩余 2 个点都是 3 度点，与度序列不符。
选 A

三 综合题（共 70 分）

1. **（10 分，每题 2 分）群$<G,*>$，$G=\{e,a,a^2\dots a^{17}\}$，|a|=18，求**
(1) $|a^{12}|$ 和 $|a^{-2}|$
(2) 由 a^3 生成的子群 G_1
(3) 求[G:G_1]
(4) 求 G_1 中的所有生成元
(5) 求满足 $a^x=a^{-10}$ 的整数 x，x 的区间为[0, 12]

评分标准：10 分，每题 2 分。
(2)出错 1 处扣 1 分。

解：
(1) $|a^{12}|=3$　　$|a^{-2}|=9$
(2) 由 a^3 生成的子群 $G_1=\{e, a^3, a^6, a^9, a^{12}, a^{15}\}$
(3) [G:G_1] = 3
(4) G_1 中的所有生成元：a^3，a^{15}
(5) 满足 $a^x=a^{-10}$ 的整数 x，x 的区间为[0, 12]　　x = 8

座位号：

2. （12 分，每题 3 分）$<G,\times_7>$，G={1,2,3,4,5,6}

（1） 给出$<G,\times_7>$ 的运算表

（2） 验证$<G,\times_7>$构成群

（3） 给出每个元的次数

（4） $<G,\times_7>$是否为循环群，若是则求出所有生成元

评分标准：12 分，每题 3 分，

(1)出错 1 处扣 1 分

(2)非空、二元运算、结合律 1 分，单位元 1 分，逆元 1 分

(3)出错 1 处扣 1 分，可不写单位元的次数

(4)是循环群 1 分，两生成元各 1 分。

解：

（1） $<G,\times_7>$ 的运算表

$<G,\times_7>$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

（2） $<G,\times_7>$构成群

G 是非空集合，$<G,\times_7>$在 G 满足二元运算，$<G,\times_7>$满足结合律

单位元是 1，每个元素均有逆元，3 与 5 互为逆元，2 与 4 互为逆元，6 的逆元是自身

（3） 每个元的次数

|1|=1　　|2|=|4|=3　　|3|=|5|=6　　|6|=2

（4） $<G,\times_7>$是循环群，生成元为 3 和 5

3. （9 分，每题 3 分）$<G,+_{12}>$，G={0,1,2,⋯,11}，H 是由元素 3 生成的子群

（1） 求 H

（2） 求 H 中每个元素的次数

（3） 求 H 在 G 中的所有右陪集

评分标准：9 分，每题 3 分，

(1)出错 1 处扣 1 分

(2)出错 1 处扣 1 分，可不写单位元的次数

(3)每个 1 分

解：

（1） H={0,3,6,9}

（2） |0|=1　|3|= 4　|6|= 2　|9|= 4

（3） 求 H 在 G 中的所有右陪集

{0,3,6,9}　{1,4,7,10}　{2,5,8,11}

4. （9 分）群$<G,*>$，H，K 是其子群。定义 G 上的关系 R：

$\mathbf{R}=\{<a,b>|\forall a,b\in G,\exists h\in H,k\in K,b=h*a*k\}$

证明 R 是 G 上的等价关系。

评分标准：9 分，自反，对称，传递各 3 分

证明：

自反：$\forall a\in G$，e 是 G 的单位元，因 H，K 是 G 的子群，有$e\in H,e\in K$

令 h=k=e，则 a = e*a*e = h*a*k，有<a,a>∈ R

即 R 是自反的。

对称：$\forall a,b\in G$，若<a,b>∈ R，则有$h\in H,k\in K$，使得 b= h*a*k

因 H，K 是 G 的子群，有$h^{-1}\in H,k^{-1}\in K$

有 $a=h^{-1}*b*k^{-1}$，即<b,a>∈ R

即 R 是对称的。

传递：$\forall a,b,c\in G$，若<a,b>,<b,c>∈ R，则有$h,g\in H,k,l\in K$，

使得 b= h*a*k，c= g*b*l

有 c= g*b*l= g*h*a*k*l= (g*h)*a*(k*l)

又因 H，K 是 G 的子群，有$g*h\in H,k*l\in K$

所以<a,c>∈ R

即 R 是传递的。

因此，为等价关系。

5. （14 分，1,3 每题 4 分，2 题 6 分）(p,q)图如图 G 所示，求

（1） 求 G 的关联矩阵

（2） 求 G 的邻接矩阵 A，以及 A 的 2 次幂和 3 次幂矩阵。

（3） 求顶点 V_1 到 V_2 长度小于或等于 3 的通路的条数。

评分标准：14 分，1,3 每题 4 分，2 题 6 分

(1)出错 1 处扣 1 分

(2)每个矩阵 2 分，出错 1 处扣 1 分

座位号：

解：

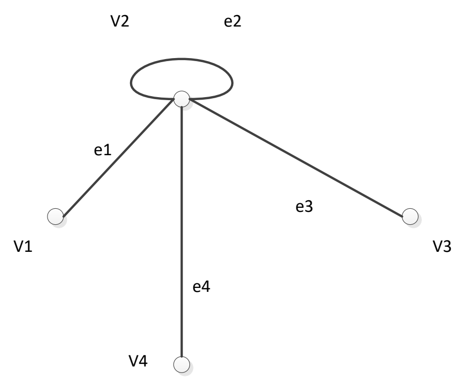
（1）关联矩阵

$$M=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

（2）邻接矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\quad A^2=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&4&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\quad A^3=\begin{pmatrix}1&4&1&1\\4&7&4&4\\1&4&1&1\\1&4&1&1\end{pmatrix}$$

（3）$a_{12} + a^2_{12} + a^3_{12} = 6$



6. （6 分）**连通图 G 含有 k 个奇点，证明在图 G 中至少要添加 k/2 条边才能使该图成为欧拉图。**

评分标准，以下每点各 2 分。

证明：

（1）由握手定理可知，图中的奇点为偶数个，即 k 为偶数。

（2）欧拉图中不存在奇点。

（3）因此，要将 k 个奇点变为偶点，每两个奇点间添加一条边，使之成为偶点。
至少需要在 k 个奇点间添加 k/2 条边。

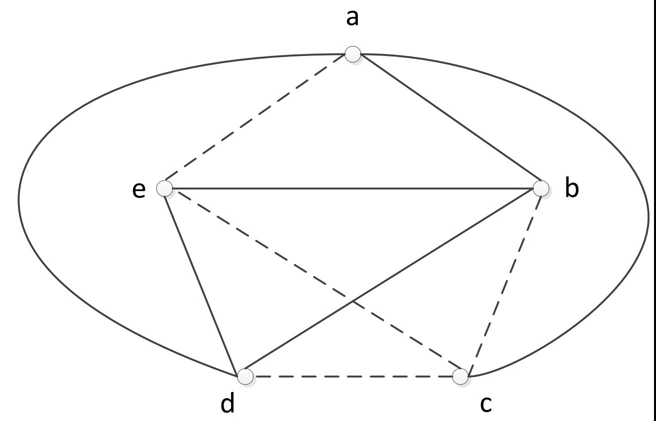
7. **（10 分，1,2,3 每题 2 分，4 题 4 分）如图 G 所示**

(1) 求 λ(G) 以及 κ(G)

(2) G 是否为欧拉图，请说明原因。

(3) G 是否为哈密尔顿图，如果是，请指出从 a 开始的哈密尔顿回路，不是请说明理由。

(4) G 中的生成树如图中虚线所示，求枝 ae 的基本割集以及弦 de 的基本回路。



评分标准，10 分，1,2,3 每题 2 分，
4 题 4 分，基本割集 2 分，基本回路 2 分，错 1 处扣 1 分。

解：

(1) λ(G) =4 κ(G) = 4

(2) 是欧拉图，无奇点

(3) 是哈密尔顿图，哈密尔顿回路为 a-b-c-d-e-a

(4) ae 确定的基本割集为{(a,e),(a,d),(a,b),(a,c)}
de 确定的基本回路为：d-e-c-d