

Simplificação de Expressões Booleanas Através dos Diagramas de Veitch-Karnaugh

O que tem que ser feito?

O dono de uma banda de música deseja controlar a iluminação do palco. A iluminação é composta por três cores:

→ ***amarela***



→ ***azul***



→ ***vermelha***



O que tem que ser feito?

A banda é composta por três integrantes.



Cada um toca um instrumento.

Jonas → Bateria Alberto → Baixo Luiz → Teclado



O que tem que ser feito?

O dono da banda **Sr. Francisco**, deseja que cada cor de luz seja **acesa ou apagada** conforme a **combinação dos instrumentos** em funcionamento em determinado momento.

Portanto Sr. Francisco precisa nos informar qual a combinação dos instrumentos que determinarão que cada cor de lampada seja acesa ou apagada.

Precisamos da regra clara para cada uma das cores de lâmpada a ser controlada.

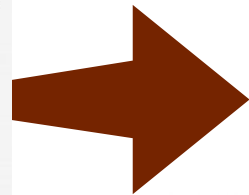


Controlar lampadas do palco - coloridas

A



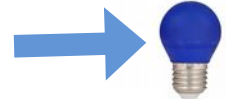
B



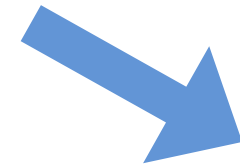
Input →



→ Output



C



Controlar lampada amarela

| Caso | A | B | C | S1 |
|------|---|---|---|----|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 0 |

A



B



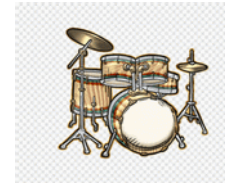
C



Controlar lampada amarela-expressão

| Caso | A | B | C | S1 |
|------|---|---|---|----|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 0 |

A



B



C



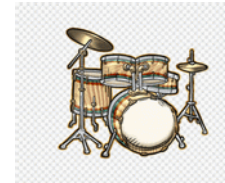
EXPRESSÃO BOOLEANA RESULTANTE

$$S1 = (\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) + (\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C) + (\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}) + (\bar{A} \cdot B \cdot C) + (A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) + (A \cdot \bar{B} \cdot C) + (A \cdot B \cdot \bar{C}) + (A \cdot B \cdot C)$$

Controlar lampada amarela-bits ligados

| Caso | A | B | C | S1 |
|------|---|---|---|----|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 0 |

A



B



C



EXPRESSÃO BOOLEANA RESULTANTE

$$S1 = (|A.|B.|C) + (|A.|B.C) + (|A.B.|C) + (|A.B.C) +$$

$$(A.|B.|C) + (A.|B.C) + (A.B.|C) + (A.B.C)$$

Mapas para Simplificações

2 Variáveis

| A | B | S | |
|---|---|---|---------|
| 0 | 0 | X | Linha 0 |
| 0 | 1 | X | Linha 1 |
| 1 | 0 | X | Linha 2 |
| 1 | 1 | X | Linha 3 |

| B \ A | 0 | 1 |
|-------|---|---|
| | | |
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 2 | 3 |

4 Variáveis

| A | B | C | D | S | |
|---|---|---|---|---|----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | X | Linha 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | X | Linha 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | X | Linha 2 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | X | Linha 3 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | X | Linha 4 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | X | Linha 5 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | X | Linha 6 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | X | Linha 7 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | X | Linha 8 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | X | Linha 9 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | X | Linha 10 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | X | Linha 11 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | X | Linha 12 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | X | Linha 13 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | X | Linha 14 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | X | Linha 15 |

| CD \ AB | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------|----|----|----|----|
| | | | | |
| 00 | 0 | 1 | 3 | 2 |
| 01 | 4 | 5 | 7 | 6 |
| 11 | 12 | 13 | 15 | 14 |
| 10 | 8 | 9 | 11 | 10 |

3 Variáveis

| A | B | C | S | |
|---|---|---|---|---------|
| 0 | 0 | 0 | X | Linha 0 |
| 0 | 0 | 1 | X | Linha 1 |
| 0 | 1 | 0 | X | Linha 2 |
| 0 | 1 | 1 | X | Linha 3 |
| 1 | 0 | 0 | X | Linha 4 |
| 1 | 0 | 1 | X | Linha 5 |
| 1 | 1 | 0 | X | Linha 6 |
| 1 | 1 | 1 | X | Linha 7 |

| C \ AB | 00 | 01 | 11 | 10 |
|--------|----|----|----|----|
| | | | | |
| 0 | 0 | 2 | 6 | 4 |
| 1 | 1 | 3 | 7 | 5 |

Agrupamentos Horizontal ou Vertical

Quadras

4 bits ligados e agrupados

Transpondo a tabela para o diagrama, temos:

| | \bar{B} | B | |
|-----------|-------------|-------------|-------------|
| \bar{A} | Caso 0 1 | Caso 1 0 | Caso 3 1 |
| A | Caso 4 1 | Caso 5 0 | Caso 6 1 |
| | \bar{C} | C | \bar{C} |

Figura 3.21

Para efetuarmos a simplificação, seguimos o mesmo processo visto anteriormente, somente que, para 3 variáveis, os agrupamentos possíveis são os seguintes:

a) Oitava:

Agrupamento máximo, onde todas as localidades valem 1. A figura 3.22 apresenta esta situação:

| | \bar{B} | B | |
|-----------|-----------|---|-----------|
| \bar{A} | 1 | 1 | 1 |
| A | 1 | 1 | 1 |
| | \bar{C} | C | \bar{C} |

← Oitava : $S=1$

Figura 3.22

b) Quadras:

Quadras são agrupamentos de 4 regiões, onde S é igual a 1, adjacentes ou em sequência. Vamos agora formar algumas quadras possíveis num diagrama de 3 variáveis, a título de exemplo:

| | \bar{B} | B | |
|-----------|-----------|---|-----------|
| \bar{A} | 1 | 1 | 0 |
| A | 0 | 0 | 0 |
| | \bar{C} | C | \bar{C} |

(a)

| | \bar{B} | B | |
|-----------|-----------|---|-----------|
| \bar{A} | 1 | 1 | 0 |
| A | 1 | 1 | 0 |
| | \bar{C} | C | \bar{C} |

(b)

| | \bar{B} | B | |
|-----------|-----------|---|-----------|
| \bar{A} | 1 | 0 | 1 |
| A | 1 | 0 | 1 |
| | \bar{C} | C | \bar{C} |

(c)

Figura 3.23 - (a) Quadra \bar{A} .

(b) Quadra \bar{B} .

(c) Quadra \bar{C} .

Agrupamentos Horizontal ou Vertical

Pares e isolados

2 bits ligados e agrupados

c) Pares:

A figura 3.24 apresenta, como exemplo, 2 pares entre os 12 possíveis em um diagrama de 3 variáveis:

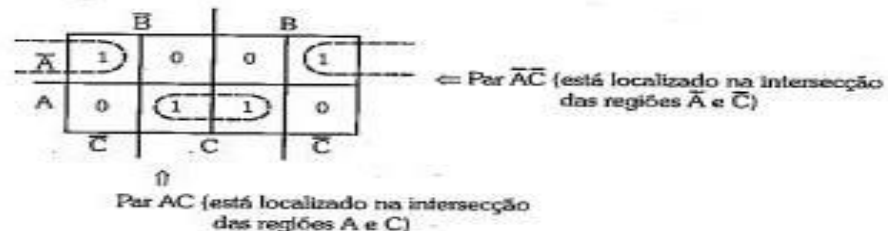


Figura 3.24

d) Termos isolados:

Vejamos na figura 3.25, alguns exemplos de termos isolados, que, como já dissemos, são os casos de entrada sem simplificação.

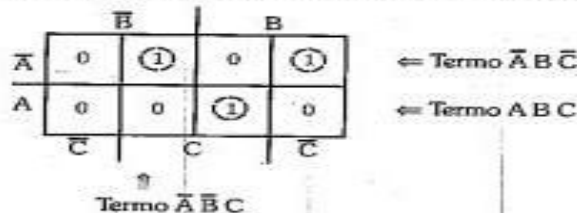


Figura 3.25

Para o exemplo, agrupamos primeiramente uma quadra e, logo após, um par, conforme mostra a figura 3.26.

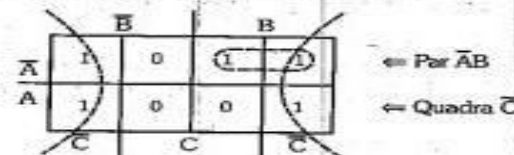


Figura 3.26

Notamos que esse par não depende de C , pois está localizado tanto em C como em \bar{C} , resultando sua expressão independente de C , ou seja, o termo $\bar{A}B$.

Distribuição no mapa

28-5

| | | | |
|-----------|-----------|-----|-----------|
| | \bar{B} | B | |
| \bar{A} | 0 | 1 | 3 |
| A | 4 | 5 | 7 |
| | \bar{C} | C | \bar{C} |

| | | | |
|-----------|-----------|-----|-----------|
| | \bar{B} | B | |
| \bar{A} | 0 | 1 | 3 |
| A | 4 | 5 | 7 |
| | \bar{C} | C | \bar{C} |

| | | | |
|-----------|-----------|-----|-----------|
| | \bar{B} | B | |
| \bar{A} | 0 | 1 | 3 |
| A | 4 | 5 | 7 |
| | \bar{C} | C | \bar{C} |

Agrupamentos Possíveis

- Com 4 variáveis

| C | AB | |
|----|----|---|
| | 0 | 1 |
| 00 | 0 | 1 |
| 01 | 0 | 1 |
| 11 | 0 | 1 |
| 10 | 0 | 1 |

(a) $X = C$

| CD | AB | | | |
|----|----|----|----|----|
| | 00 | 01 | 11 | 10 |
| 00 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 01 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

(b) $X = AB$

| CD | AB | | | |
|----|----|----|----|----|
| | 00 | 01 | 11 | 10 |
| 00 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 01 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 11 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

(c) $X = BD$

| CD | AB | | | |
|----|----|----|----|----|
| | 00 | 01 | 11 | 10 |
| 00 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 01 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 10 | 1 | 0 | 0 | 1 |

(d) $X = A\bar{D}$

| CD | AB | | | |
|----|----|----|----|----|
| | 00 | 01 | 11 | 10 |
| 00 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 01 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 1 | 0 | 0 | 1 |

(e) $X = \bar{B}D$

Simplificações - Regiões

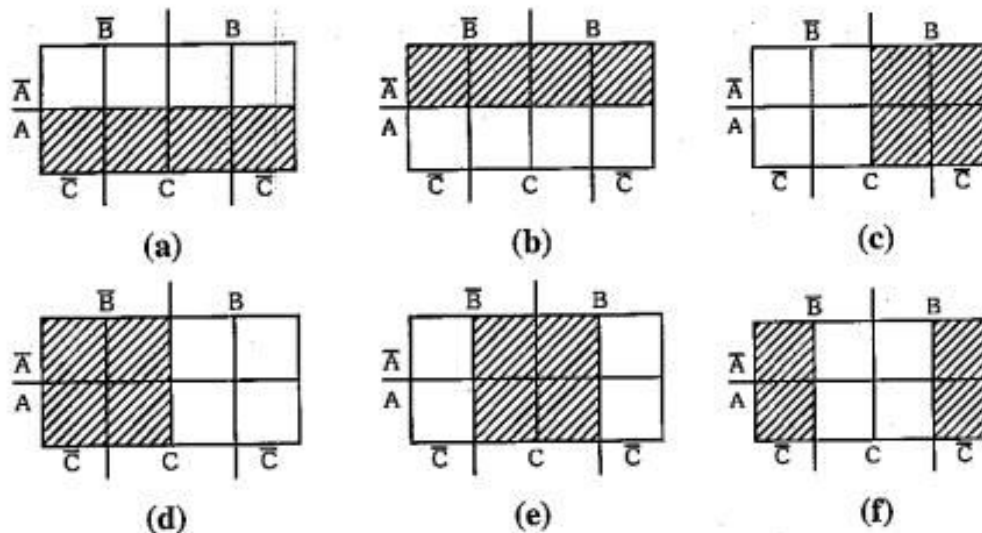


Figura 3.18 - Regiões do mapa de Veitch-Karnaugh:

- (a) Região na qual $A = 1$.
- (b) Região na qual $\bar{A} = 1$ ($A = 0$).
- (c) Região na qual $B = 1$.
- (d) Região na qual $\bar{B} = 1$ ($B = 0$).
- (e) Região na qual $C = 1$.
- (f) Região na qual $\bar{C} = 1$ ($C = 0$).

| | | | | |
|----------------|----------------|-----|----------------|----|
| | \overline{B} | | B | |
| \overline{A} | S0 | S1 | S3 | S2 |
| A | S4 | S5 | S7 | S6 |
| | \overline{C} | C | \overline{C} | |

Simplificações - Casos

| Caso | A | B | C |
|------|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 |
| 7 | 1 | 1 | 1 |

Tabela 3.7

| | | | |
|----------------|---|--|-------------------------------------|
| | \overline{B} | B | |
| \overline{A} | Caso 0 0 0 0 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ | Caso 1 0 0 1 $\overline{A}\overline{B}C$ | Caso 3 0 1 1 $\overline{A}BC$ |
| A | Caso 4 1 0 0 $A\overline{B}\overline{C}$ | Caso 5 1 0 1 $A\overline{B}C$ | Caso 7 1 1 1 ABC |
| | \overline{C} | C | \overline{C} |

Figura 3.19

Tarefa para fixação de conteúdo

| Caso | A | B | C |  |  |  |
|------|---|---|---|---|---|--|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |