Guía No.3 Cálculo II
Problemas resueltos de *series*
Profesores Patricio Cumsille - Álvaro Mella

P 1. Muestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+100}$ diverge.

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+100} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{100}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{100}{n^2}} \\
&= \frac{1}{1+0} \\
&= 1. \\
\therefore & \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+100} = 1 \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+100} \text{ diverge.}
\end{aligned}$$

$\square$

P 2. Probar que la siguiente serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$, converge si $r > 1$.

Solución: Como los términos de esta serie son positivos, la sucesión de sumas parciales es creciente. Luego, usando el criterio de las sucesiones monótonas, para probar que esta sucesión es convergente, basta verificar que es acotada superiormente. Para ello, tomaremos las sumas parciales de orden $m = 2^N - 1$. Para cada una de ellas se tiene que:

$$S_m = 1 + \left(\frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r}\right) + \left(\frac{1}{4^r} + \frac{1}{5^r} + \frac{1}{6^r} + \frac{1}{7^r}\right) + ... + \frac{1}{(2^N-1)^r}$$

Como

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}\right) &< \left(\frac{1}{2^r}+\frac{1}{2^r}\right)=\frac{2}{2^r}\\
\left(\frac{1}{4^r}+\frac{1}{5^r}+\frac{1}{6^r}+\frac{1}{7^r}\right) &< \left(\frac{1}{4^r}+\frac{1}{4^r}+\frac{1}{4^r}+\frac{1}{4^r}\right)=\frac{4}{4^r}\\
\left(\frac{1}{8^r}+\frac{1}{9^r}+\ldots+\frac{1}{15^r}\right) &< \left(\frac{1}{8^r}+\frac{1}{8^r}+\ldots+\frac{1}{8^r}\right)=\frac{8}{8^r}\\
&\vdots\\
\left(\frac{1}{2^{(N-1)r}}+\ldots+\frac{1}{(2^N-1)^r}\right) &< \left(\frac{1}{2^{(N-1)r}}+\ldots+\frac{1}{(2^{(N-1)^r}}\right)=\frac{2^{N-1}}{2^{(N-1)r}}=\left(\frac{2}{2^r}\right)^{N-1}
\end{aligned}$$

Tenemos que:

$$S_m < 1+\frac{2}{2^r}+\frac{4}{4^r}+...+\frac{2^{N-1}}{2^{(N-1)\cdot r}}=\sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{2}{2^r}\right)^i=\sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{1}{2^{r-1}}\right)^i$$

Como $r>1$, tenemos $\dfrac{1}{2^{r-1}}<1$, luego la serie geométrica $\displaystyle\sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{1}{2^{r-1}}\right)^i$ converge a un número c ($c=\frac{1}{1-\frac{1}{2^{r-1}}}$).

Así $S_m<c$, para todo $m=2^N-1$.

$\therefore$ La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r}$ es convergente cuando $r>1$. □

P 3. Analizar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\sin^3(n+1)}{2^n+n^2}$

Solución: Para la realización de éste ejercicio, usamos el anterior.

Sabemos que:

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r}$ converge si $r>1$.

Por criterio de comparación:

$$\begin{aligned}
-1 \leq \sin(n+1) \leq 1 && \ldots \text{ definición de seno}\\
(-1)^3 \leq \sin^3(n+1) \leq (1)^3 && \ldots \text{ elevando al cubo}\\
1 \leq 2+\sin^3(n+1) \leq 3 && \ldots \text{ sumandos dos}\\
0 \leq \frac{1}{2^n+n^2} \leq \underbrace{\frac{2+\sin^3(n+1)}{2^n+n^2}}_{x_n} \leq \frac{3}{2^n+n^2} \leq \frac{3}{n^2} && \ldots \text{ Por transitividad}\\
0 \leq x_n \leq \frac{3}{n^2} &&\\
0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2} = 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &&
\end{aligned}$$

Como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge por ser una p-serie convergente ($p=2$), entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin^3(n+1)}{2^n+n^2} \quad \text{converge}$$

□

P 4. Analizar si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$, diverge o converge.

Solución: Tomando

$$x'_n = \frac{1}{2^n} \quad \text{y} \quad x_n = \frac{1}{2^n-1}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x'_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n-1}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n-1}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n}{2^n}}{\frac{2^n}{2^n} - \frac{1}{2^n}}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2^\infty}}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Puesto que el límite existe y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es una serie geométrica. Por lo tanto la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ converge. □

P 5. Determinar si la serie es convergente o divergente, $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-n}$.

Solución: Sea$f(x) = x \cdot e^{-x}$, entonces:

$$f'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x}$$

$$f'(x) = e^{-x} \cdot (1 - x)$$

Como $f'(x) < 0$, si $x > 1$, se deduce que f es decreciente si $x \geq 1$. Además, f es continua y de valores positivos para todo $x \geq 1$. Por ende satisface las hipótesis del criterio de la integral.
Al aplicar la integración por partes se tiene:

$$\int x \cdot e^{-x} dx = -e^{-x} \cdot (x + 1) + c$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} x \cdot e^{-x} dx &= \lim_{b \to +\infty} \left[-e^{-x} \cdot (x + 1) \right]_1^b \\ &= \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{b+1}{e^b} + \frac{2}{e} \right] \end{aligned}$$

Como $\lim_{b \to +\infty} (b + 1) = +\infty$ y $\lim_{b \to +\infty} e^b = +\infty$, podemos aplicar la regla de Hôpital.

$$\begin{aligned} \lim_{b \to +\infty} \frac{b+1}{e^b} &= \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{e^b} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\int_1^{+\infty} x \cdot e^{-x} dx = \frac{2}{e}$$

De tal modo la serie es convergente. $\square$