Guía
Semana 13

Ejercicios

1. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^2+x^4}$. **(e)** $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-x}$. **(i)** $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x}{\operatorname{sen}(x)}$.

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x-1)^2}$. **(f)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}$. **(j)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}$.

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^5}{x^{12}+1}$. **(g)** $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\csc(x)$. **(k)** $\displaystyle\int_0^\infty x^x$.

(d) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\ln(1+e^x)$. **(h)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x^{\frac{3}{2}}}$. **(l)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x\ln^p(x)}$.

2. Calcular, si existe, el área comprendida entre la curva $y=\frac{1}{a^2+x^2}$ y el eje OX.

3. Determinar para cuales valores de $n\in$ la integral $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^3(1-x)}}$ es convergente y establezca una forma recursiva para la sucesión $\{I_n\}_{n\in}$.

4. Mostrar que la integral $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\operatorname{sen}(x))$ verifica la relación: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos(x))=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x))$. Deducir el valor de I.

Problemas

P1. **(a)** Pruebe que las integrales $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^2}$, $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ divergen.

(b) Pruebe que $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{1}{x(\ln x)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$ converge y encuentre su valor.

(c) Encuentre los valores de $\alpha>0$ para lo cuales $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha(1-x)}}\,dx$ converge.

Indicación: El comportamiento de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$ y $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}$ se considera conocido.

P2. Sea $f:\ \to$ definida por $f(x)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{senh}(x)}\right)$para $x\neq 0$ y $f(0)=k$.

(a) Encuentre el valor de k de modo que f sea continua en todo .

(b) Estudie la convergencia de las integrales $\int\limits_0^1 f$, $\int\limits_1^\infty f$, $\int\limits_0^\infty f$ y $\int\limits_{-\infty}^\infty f$.

P3. Dada la función $f(x)=e^{\frac{1}{x}}(1-\frac{1}{x})$. Se pide :

(a) Estudiarla completamente indicando dominio,ceros, límites importantes, asíntotas, continuidad, crecimiento, concavidades, gráfico y recorrido.

(b) Determinar si el área de las siguientes regiones es o no finita. En caso afirmativo dar su valor.

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(x,y)/x < 0 \ \ f(x) \leq y \leq 1\} \\ R_2 &= \{(x,y)/0 < x \leq 1 \ \ f(x) \leq y \leq 1\} \\ R_3 &= \{(x,y)/x \geq 1 \ \ f(x) \leq y \leq 1\} \end{aligned}$$

Indicación: Ni $e^{\frac{1}{x}}$ ni $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ tienen primitivas explícitamente calculables, sin embargo, f sí la tiene.

P4. **(a)** Aplicando la definición de integral impropia calcule:

$$\int\limits_{-\infty}^{\ln(2)} \frac{1}{e^x + 4e^{-x}}$$

(b) Analice la convergencia de la integral:

$$\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)}$$

(c) Analice la convergencia de las áreas de las superficies engendradas al rotar la función
$|\ln(x)|: \,]0,1] \rightarrow$ en torno al eje OX y en torno al eje OY.