UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA CHIL

Docentes Marco Inostroza
Jorge Torres
Gijsbertus Van Der Veer

Cálculo Diferencial
Pauta Certamen 1 Módulo 1

1. **(30 puntos)** Inecuaciones: Resuelva las siguientes inecuaciones:

   a) $\dfrac{40}{x^2+x-12} \leq -4$
   Solución:

$$
\begin{aligned}
\frac{40}{x^2+x-12} &\leq -4 \quad \Big/ +4\\
\frac{40}{(x+4)(x-3)}+4 &\leq 0\\
\frac{40+4(x^2+x-12)}{(x+4)(x-3)} &\leq 0\\
\frac{40+4x^2+4x-48}{(x+4)(x-3)} &\leq 0\\
\frac{4x^2+4x-8}{(x+4)(x-3)} &\leq 0\\
\frac{4(x^2+x-2)}{(x+4)(x-3)} &\leq 0 \quad \Big/ \cdot\frac{1}{4}\\
\frac{(x+2)(x-1)}{(x+4)(x-3)} &\leq 0
\end{aligned}
$$

	$]-\infty,-4[$	$]-4,-2[$	$]-2,1[$	$]1,3[$	$]3,+\infty$
$(x+4)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x+2)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x-3)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+2)(x-1)}{(x+4)(x-3)}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

   Luego la solución es $S =]-4,2[\cup [1,3[$

   b) $\Big|1-|x-2|+|x|\Big| - \sqrt{x-2} > 2$
   Solución:

Notemos que $\sqrt{x-2} \in \mathbb{R}, \forall x \in [2,+\infty[$, luego nuestro intervalo solución debe ser subconjunto de $[2,+\infty[$

$$\begin{aligned}
&(x-2 \geq 0 \ \ \forall x \in [2,+\infty[) \wedge (x > 0 \ \ \forall x \in [2,+\infty[) \\
|1-(x-2)+x| - \sqrt{x-2} &> 2 \\
|1-x+2+x| - \sqrt{x-2} &> 2 \\
|3| - \sqrt{x-2} &> 2 \\
3 - \sqrt{x-2} &> 2 \quad \Big/ -3 \\
-\sqrt{x-2} &> 2-3 \quad \Big/ \cdot (-1) \\
\sqrt{x-2} &< 1 \quad \Big/ ()^2 \\
|x-2| &< 1 \\
-1 < x-2 &< 1 \quad \Big/ +2 \\
1 < x &< 3 \\
x \in]1,3[&
\end{aligned}$$

pero con $x \in [2,+\infty[$ obtenemos que $S = [2,3[$

2. **(40 puntos)** Rectas: Sean $L_1 : \frac{-1}{17}x + \frac{11}{17}y - 2 = 0$, $L_2 : 2x - 3y + 11 = 0$, y $L_3 : -\frac{1}{7}x - \frac{8}{7}y + 6 = 0$, tres rectas que definen un triángulo ABC. Determinar:

   a) Área del triángulo.
   Solución:

$$\begin{aligned} L_1 &: \frac{-1}{17}x + \frac{11}{17}y - 2 = 0 \Leftrightarrow -x + 11y - 34 = 0 \\ L_2 &: 2x - 3y + 11 = 0 \\ L_3 &: -\frac{1}{7}x - \frac{8}{7}y + 6 = 0 \Leftrightarrow -x - 8y + 42 = 0 \end{aligned}$$

   i. Vértice $A = L_1 \cap L_2$

$$\begin{aligned} -x + 11y &= 34 \\ 2x - 3y &= -11 \\ &\Leftrightarrow \\ -2x + 22y &= 68 \\ 2x - 3y &= -11 \\ &\Rightarrow \\ 19y &= 57 \\ \Leftrightarrow y &= 3 \\ \Rightarrow -x + 11 \cdot 3 &= 34 \\ \Leftrightarrow x = -1 & \\ \therefore A(-1, 3) & \end{aligned}$$

   ii. Vértice $B = L_1 \cap L_3$

$$\begin{aligned} -x + 11y &= 34 \\ -x - 8y &= -42 \\ &\Leftrightarrow \\ -x + 11y &= 34 \\ x + 8y &= 42 \\ &\Rightarrow \\ 19y &= 76 \\ &\Leftrightarrow \\ y &= 4 \\ &\Rightarrow \\ x + 8 \cdot 4 &= 42 \\ \Leftrightarrow x &= 10 \\ \therefore B(10, 4) & \end{aligned}$$

iii. Vértice $C = L_2 \cap L_3$

$$\begin{array}{rcl}
2x - 3y &=& -11 \\
-x - 8y &=& -42 \\
\Leftrightarrow && \\
2x - 3y &=& -11 \\
-2x - 16y &=& -84 \\
\Rightarrow && \\
-19y &=& -95 \\
\Leftrightarrow y &=& 5 \\
\Rightarrow -x - 8 \cdot 5 &=& -42 \\
\Leftrightarrow 2x &=& 4 \\
\Leftrightarrow x &=& 2 \\
\therefore C(2,5) &&
\end{array}$$

Consideremos $\overline{AB}$ como base del triángulo:

$$|\overline{AB}| = d_{AB} = \sqrt{(-1-10)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{11^2 + 1} = \sqrt{122}$$

Podemos calcular la altura como la distancia del vértice C a la recta L_1.

$$d_{CL_1} = \frac{|2 - 11 \cdot 5 + 34|}{\sqrt{122}} = \frac{|-19|}{\sqrt{122}} = \frac{19}{\sqrt{122}}$$

Luego el área del triángulo es : $A_\triangle = \dfrac{1}{2}\sqrt{122}\dfrac{19}{\sqrt{122}} = \dfrac{19}{2}$

b) Ecuación de la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo.
Solución:
Como los vértices del triángulo están en la circunferencia, tenemos:

$$\begin{array}{rcll}
A : (-1-h)^2 + (3-k)^2 &=& r^2 & (1) \\
B : (10-h)^2 + (4-k)^2 &=& r^2 & (2) \\
C : (2-h)^2 + (5-k)^2 &=& r^2 & (3)
\end{array}$$

Como el radio es único, podemos construir un sistema de ecuaciones con:

$$
\begin{aligned}
(1) &= (2) \Rightarrow \\
(-1-h)^2 + (3-k)^2 &= (10-h)^2 + (4-k)^2 \\
1 + 2h + h^2 + 9 - 6k + k^2 &= 100 - 20h + h^2 + 16 - 8k + k^2 \quad \Big/ - h^2 - k^2 \\
10 + 2h - 6k &= 116 - 20h - 8k \quad \Big/ + 20h + 8k - 10 \\
22h + 2k &= 106 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{2} \\
11h + k &= 53 \\
(1) &= (3) \Rightarrow \\
(-1-h)^2 + (3-k)^2 &= (2-h)^2 + (5-k)^2 \\
1 + 2h + h^2 + 9 - 6k + k^2 &= 4 - 4h + h^2 + 25 - 10k + k^2 \quad \Big/ - h^2 - k^2 \\
10 + 2h - 6k &= 29 - 4h - 10k \quad \Big/ + 4h + 10k - 10 \\
6h + 4k = 19 &
\end{aligned}
$$

luego tenemos el siguiente sistema de ecuaciones para h y k:

$$
\begin{aligned}
11h + k &= 53 \\
6h + 4k &= 19 \\
&\Leftrightarrow \\
-44h - 4k &= -212 \\
6h + 4k &= 19 \\
&\Rightarrow \\
-38h &= -193 \\
\Leftrightarrow h &= \frac{193}{38} \\
\Rightarrow k &= 53 - 11 \cdot \frac{193}{38} \\
\Leftrightarrow k &= \frac{2014 - 2123}{38} = -\frac{109}{38}
\end{aligned}
$$

Ahora basta reemplazar los valores de h y k en (1), (2) o (3), para calcular el valor de r:

$$
\begin{aligned}
(1) \Rightarrow \left(-1 - \frac{193}{38}\right)^2 + \left(3 + \frac{109}{38}\right)^2 &= r^2 \\
\left(\frac{1}{38}\right)^2 \left((-38 - 193)^2 + (114 + 109)^2\right) &= r^2 \\
103090 \left(\frac{1}{38}\right)^2 &= r^2
\end{aligned}
$$

Con lo que la ecuación de la circunferencia circunscrita del triángulo está dada por la ecuación:

$$\left(x-\frac{193}{38}\right)^2+\left(y+\frac{109}{38}\right)^2=103090\left(\frac{1}{38}\right)^2$$

3. **(20 puntos)** Cónicas: Determine la cónica correspondiente y sus elementos, bosqueje el gráfico:

   a) $16x^2+25y^2-64x+150y=111$
   Solución:

$$\begin{aligned}
16x^2-64x+25y^2+150y &= 111 \\
16(x^2-4x+4-4)+25(y^2+6y+9-9) &= 111 \\
16(x^2-4x+4)-64+25(y^2+6y+9)-225 &= 111 \quad \Big/ +289 \\
16(x^2-4x+4)+25(y^2+6y+9) &= 400 \quad \Big/ \cdot\frac{1}{400} \\
\frac{(x-2)^2}{5^2}+\frac{(y+3)^2}{4^2} &= 1
\end{aligned}$$

   Luego, la cónica es una elipse horizontal, con:
   $c=\sqrt{25-16}=3$
   excentricidad: $e=\dfrac{3}{5}$
   Centro: C = (2,-3)
   Focos: F_1(1,-3) F_2(3,-3)
   Vértices: V_1(-3,-3) V_2(7,-3)
   Longitud Eje Mayor—=10
   Longitud Eje Menor=8

   b) $9y^2-108y-64x^2+640x=1420$
   Solución:

$$\begin{aligned}
9(y^2-12y)-64(x^2-10x) &= 1420 \\
9(y^2-12y+36-36)-64(x^2-10x+25-25) &= 1420 \\
9(y-6)^2-324-64(x-5)^2+1600 &= 1420 \\
9(y-6)^2-64(x-5)^2+1276 &= 1420 \quad \Big/ -1276 \\
9(y-6)^2-64(x-5)^2 &= 144 \quad \Big/ \cdot\frac{1}{144} \\
\frac{(y-6)^2}{4^2}-\frac{4(x-5)^2}{9} &= 1 \\
\frac{(y-6)^2}{4^2}-\frac{(x-5)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} &= 1
\end{aligned}$$

   Luego, la cónica es una hipérbola vertical, con:
   $c=\sqrt{16+\dfrac{9}{4}}=\dfrac{\sqrt{73}}{2}$

excentricidad: $e = \dfrac{\sqrt{73}}{8}$
Centro: C = (5,6)
Focos: $F_1(5, 6 - \dfrac{\sqrt{73}}{2})$ $F_2(5, 6 + \dfrac{\sqrt{73}}{2})$
Vértices: V_1(5,2) V_2(5,10)
Asíntotas: $y = 6 \pm \dfrac{8}{3}(x-5)$

4. **(10 puntos)** Determine la ecuación de la parábola y sus elementos, si $p < 0$ y los extremos del lado recto son $A(-1, 2)$ y $B(3, 2)$

Solución: Notemos que podemos deducir, por las coordenadas de A y B que la parábola es vertical y como $p < 0$, ésta se abre hacia abajo.
Recordemos que el Foco de la parábola es el punto medio del lado recto, por lo tanto:

$$PM_{AB} = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (1, 2) : \text{foco}$$

También podemos notar que la longitud del lado recto es $|4p|$:

$$\begin{aligned} d_{AB} = 4p &= -\sqrt{(-1+3)^2 + (2-2)^2} \\ 4p &= -2 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{4} \\ p &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Como $F(h + p, k)$, tenemos:

$$k = 2$$
$$h + \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$
$$h = \frac{3}{2}$$

Luego, el vértice está en $\left(\dfrac{3}{2}, 2\right)$
La directriz $D : y = k - p$ queda:

$$D : y = \frac{3}{2}$$

El eje de simetría es $x = \dfrac{3}{2}$
La ecuación de la parábola es:

$$-2(y-2) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$