UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

MATERIAL DE APOYO PARA EL MODULO 2 DE ALGEBRA Y TRIGONOMETRÍA PARA LA CARRERA DE INGENIERÍA EJECUCIÓN Y CIVIL INFORMÁTICA

Marcelo Huenchucona Cifuentes
Carlos Picarte Figueroa

Concepción, Abril 19 del 2013.

Índice general

Capítulo 1

Inducción Matemática

Anecdota

Es muy conocida la anécdota según la cual a *Carl Frederich Gauss* (1777-1855), cuando contaba con diez años de edad, le propusieron en la escuela primaria de su aldea natal que sumara los 100 primeros números naturales. Ante el asombro del profesor, apenas éste había acabado de dictar el problema, Gauss dio la solución: 5050.
Lo que este insigne matemático observó fue que la suma $1+100$ era igual a $2+99$, igual a $3+98,\cdots$ etc. es decir, sólo tuvo que darse cuenta de que contaba con 50 parejas de números, cada una de las cuales sumaba 101. Así, se limitó a multiplicar: $50\cdot 101 = 5050$.
Se puede demostrar que

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

1.1. Números Naturales

Definición 1.1.

Designaremos por $\mathbb{N}$, al conjunto de los números naturales, e.d.

$$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,\cdots\}$$

Observación 1.1.

1. 1 es el primer elemento de este conjunto, y precede a todos los otros, e. d.

$$1 < n, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \neq 1$$

2. No existe un natural "p" tal que

$$n < p < n + 1$$

(conjunto discreto)

3. Si $m, n \in \mathbb{N}$ y $m < n$, entonces existe $b \in \mathbb{N}$ tal que

$$n = m + b$$

Definición 1.2.

1. Un número natural p se dice **par**, si se puede expresar como:

$$p = 2 \cdot n, \quad \text{donde } n \in \mathbb{N}$$

2. Un número p se dice **impar**, si se puede expresar como:

$$p = 2 \cdot n - 1, \quad \text{donde } n \in \mathbb{N}$$

3. Un número natural p se dice **primo**, si sus únicos divisores son1 y p.

4. Dos enteros p y q se dicen **primos entre si**, sólo si poseen a el 1 como divisor común.

1.2. Inducción

Definición 1.3.

Diremos que un subconjunto S de $\mathbb{R}$ es un **Conjunto Inductivo**, si S verifica lo siguiente:

1. $1 \in S$

2. si $a \in S \quad \Rightarrow \quad (a + 1) \in S$

Observación 1.2.

Observemos que $\mathbb{N} = \{x/x \in \mathbb{R} \;\wedge\; x = 1$ o $x =$ suma reiterada de unos $\}$.
Luego $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo.
En efecto:

1. $1 \in \mathbb{N}$

2. Si $a \in \mathbb{N} \Rightarrow$ $a = 1$ o $a =$ suma reiterada de unos.
$\Rightarrow$ $a + 1 = 1 + 1$ o $a + 1 =$ suma reiterada de unos
$\Rightarrow$ $a + 1 =$ suma reiterada de unos
$\Rightarrow$ $(a + 1) \in \mathbb{N}$, por definición de $\mathbb{N}$.

   Así $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo

Observación 1.3 (Importante)**.**

$\mathbb{N}$ es el menor conjunto inductivo que admite $\mathbb{R}$

1.2.1. Principio de Inducción Matemática

Teorema 1.1.

Si $S \subseteq \mathbb{N}$ y verifica:

1. $1 \in S$

2. $n \in S \;\Rightarrow\; (n + 1) \in S$

   Entonces $S = \mathbb{N}$

Demostración: Debemos probar $S = \mathbb{N}$, es decir, $S \subseteq \mathbb{N} \;\wedge\; \mathbb{N} \subseteq S$

(1): Por hipótesis $S \subseteq \mathbb{N}$

(2): Por hipótesis, se cumple (i) y (ii), luego S es un conjunto inductivo. Así $\mathbb{N} \subseteq S$ (pues $\mathbb{N}$ es el menor conjunto inductivo de $\mathbb{R}$)

De (1) y (2) $\mathbb{N} = S$.

Observación 1.4.

Si se desea probar la validez de cierta propiedad P para todos los naturales, entonces basta probar que S es un conjunto inductivo, cuando S se define como:

$$S = \{n/n \in \mathbb{N} \ \wedge \ P(n)\} \qquad \text{o}$$

$$S = \{n/n \in \mathbb{N} \ \wedge \ n \ \text{tiene la propiedad } P\}$$

Observación 1.5.

En efecto, queremos probar que P se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$, e. d., $S = \mathbb{N}$, pero para probar esto, basta probar las condiciones:

1. $1 \in S$
2. $n \in S \ \Rightarrow \ (n+1) \in S$

1.2.2. Inducción Matemática

Método de demostración por inducción.

Sea $P(n)$ una proposición asociada a todo número natural "n".
Se puede concluir que $P(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$ si es posible probar que:

(i) $P(1)$ es cierto.

(ii) Supuesto $P(k)$ verdadero, siendo $k \in \mathbb{N}$ fijo, pero arbitrario, que $P(k+1)$ es verdadero.

Ejemplo 1.1.

Demuestre por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene:
$1+2+3+4+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Solución: Sea $P(n) : 1+2+3+4+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ y
Sea $S = \{n/n \in \mathbb{N} \wedge P(n)\}$, es decir,

$$S = \{n/n \in \mathbb{N} \wedge 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}\}$$

Dem: (a) Por definición $S \subseteq \mathbb{N}$

(b): $\mathbb{N} \subseteq S$, en efecto:

(i) $1 \in S$ pues $1 = 1$

(ii) Hipótesis Ind.:

$$P(k): 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \textbf{(HI)}$$

Tesis Inducción:

$$P(k+1): 1+2+3+\cdots+n+(n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \qquad \textbf{(TI)}$$

Queremos probar: $H \Rightarrow T$, es decir:

Supongamos $P(k)$, y

Probemos $P(k+1)$

$$\begin{aligned} P(k+1): \quad 1+2+3+\cdots+k+(k+1) &\overset{\text{H.I.}}{=} \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\ &= \frac{k(k+1)+2k+2}{2} \\ &= \frac{k^2+k+2k+2}{2} \\ &= \frac{k^2+3k+2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

Luego $P(k+1): 1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

De (i) y (ii) S es inductivo, e. d. $\mathbb{N} \subseteq S$, y

Por (a) y (b) $S = \mathbb{N}$

Así $P(n)$ se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$

Ejemplo 1.2.

Probar usando inducción matemática que: $3^{2n} - 1$ es divisible por 8.

Solución: Sea $P(n): 3^{2n} - 1$ divisible por 8, es decir,
$P(n): 3^{2n} - 1 = p \cdot 8$, para algún $p \in \mathbb{N}$, y
Sea $S = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\}$

Dem: (a): Por definición $S \subseteq \mathbb{N}$.

(b): $\mathbb{N} \subseteq S$, en efecto:

(i) $1 \in S$, pues $3^{2\cdot 1} - 1 = 9 - 1 = 8$ es divisible por 8.

(ii) $P(k) : 3^{2k} - 1 = p \cdot 8$ para algún $p \in \mathbb{N}$ (es divisible por 8) **(H.I.)**

$P(k+1) : 3^{2(k+1)} - 1 = q \cdot 8$ para algún $q \in \mathbb{N}$ (es divisible por 8) **(T.I.)**

Supongamos $P(k)$ verdadero y probemos que $P(k+1)$ es verdad. En efecto:

$$\begin{aligned}
3^{2(k+1)} - 1 &= 3^{2k+2} - 1 \\
&= 3^{2k} \cdot 3^2 - 1 \\
&= 3^{2k} \cdot 9 - 9 + 9 - 1 \\
&= 9(3^{2k} - 1) + 9 - 1 \\
&\overset{\text{H.I.}}{=} 9 \cdot (8 \cdot p) + 8 \quad \text{para algún } p \in \mathbb{N} \\
&= 8 \cdot (9p + 1) \\
&= 8 \cdot q \quad \text{para } q = (9p+1) \in \mathbb{N} \\
& \text{e.d. es divisible por 8}
\end{aligned}$$

Luego de (i) y (ii) S es inductivo, es decir $\mathbb{N} \subseteq S$

Así, de (a) y (b) $S = \mathbb{N}$,

Esto es: $P(n)$ vale $\forall n \in \mathbb{N}$

Capítulo 2

Progresiones

Paradoja de la dicotomía

Un móvil no puede recorrer una distancia finita, pues para ello primero deberá alcanzar antes la mitad de esa distancia. Pero luego, debe alcanzar la mitad de esa mitad que le falta, luego debe alcanzar la mitad de lo que aún le falta, y así sucesivamente. Como no se pueden recorrer infinitas magnitudes, el movimiento es imposible. Este planteamiento se puede escribir como:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\right)+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\cdots$$

que corresponde a la suma infinita de una *Progresión Geométrica* de razón $\frac{1}{2}$.

2.1. Introducción

Las progresiones resultan ser el ejemplo más sencillo del concepto de sucesión y su estudio y tratamiento tiene orígenes muy antiguos. Una de las principales aplicaciones se dá en la aritmética comercial.

Tan antiguo es su concepto, que existen registro de un conocido problema: "*calcular en cuánto tiempo se doblaría una cantidad de dinero a un determinado interés compuesto*", propuesto por los babilonios (2000 - 600 A.C.), lo cual hace pensar que conocían de alguna manera la fórmula del interés compuesto y, por tanto, las **progresiones geométricas**.

Para introducir el concepto, primero detengámonos un poco en las sucesiones.

2.2. Sucesiones

Definición 2.1.

Se entenderá por *sucesión* una colección de elementos (números) dispuestos uno a continuación de otro.

Ejemplo 2.1.

a) $5, \sqrt{2}, \pi, 3, 100, 1/5 \ldots$

b) $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

c) $1, 3, 9, 27, 81, \ldots$

Observación 2.1.

1. En el primero no es posible instuir o descubrir qué número seguirá a 5, no se ve una regla que asocie antecesor-sucesor.
2. En el segundo caso, claramente la secuencia de números que se dá es la de los números impares, esto es, cada número es obtenido del anterior sumándole 2.
3. En el tercero, la ley de construcción de cada número a pesar de no ser difícil de descubrir, ya no es tan obvia. La regla es cada número es obtenido del anterior multiplicado por tres, así, el sexto número será 243.

Observación 2.2.

Cuando nos refiramos a una sucesión cualquiera, la forma más usual para describirla es a_1, a_2, a_3, a_4, ... , a_{n-2} , a_{n-1} , a_n, ... donde los *subíndices* determinan el lugar que cada término ocupa dentro de la sucesión, y los puntos suspensivos evitan la necesidad de escribir todos los números.
Es frecuente encontrar en los textos o escritos, una notación resumida para las sucesiones, simbolizada por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, o simplemente (a_n).

2.2.1. Término general de una sucesión

Definición 2.2.

El término general de una sucesión es la **fórmula** o **ley** que permite conocer el valor de un determinado término, si se conoce previamente el lugar que ocupa en la misma. Por lo general, al término genérico o general de una sucesión se le denota por a_n y se refiere a el como el *término n-ésimo*.

Ejemplo 2.2.

Dada la sucesión $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$, su término general será $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

Ejemplo 2.3.

Dada la sucesión $\frac{1}{3}; \frac{4}{5}, \frac{9}{7}, \ldots$, encuentre el septimo término

Solución: Notemos que el término general esta dado por $b_n = \frac{n^2}{2n+1}, n \in \mathbb{N}$. Luego el septimo término será $b_7 = \frac{7^2}{2 \cdot 7 + 1} = \frac{49}{15}$

Ejemplo 2.4.

Escribir los cuatro primeros términos de la sucesión $c_n = 3 \cdot (2n - 1), n \in \mathbb{N}$

Solución: $3, 9, 15, 21, ...$

Observación 2.3.

Como habrás notado, el obtener o encontrar la forma del término general de una sucesión a veces puede ser muy difícil. En nuestro estudio; nos preocuparemos de dos clases de sucesión cuyos términos generales están bién definidos, estas son las **progresiones aritméticas y las geométricas**.

2.3. Progresiones Aritméticas

Definición 2.3.

Una Progresión Aritmética **(P.A.)** es una sucesión en la que cada término se obtiene sumando al anterior un número fijo llamado *diferencia*, que se acostumbra a denotar con la letra d.
Así, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una **progresión aritmética**, se verifica que:

$$a_n = a_{n-1} + d \tag{2.1}$$

Ejemplo 2.5.

Diga si la siguiente sucesión es o no una progresión aritmética, y si lo es, describa su término inicial y diferencia.

$$-5, -2, 1, 4, 7, 10, \cdots$$

Solución: Notemos que si una sucesión es una P.A., entonces se ha de comprobar que la diferencia entre dos términos consecutivos es constante e igual a la diferencia d. Esto es, (de 2.1):

$$a_n - a_{n-1} = d, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, sólo basta verificar si las diferencias son constantes o no.

$$-2-(-5) = 3; \quad 1-(-2) = 3; \quad 4-1 = 3; \quad 7-4 = 3; \quad 10-7 = 3$$

Es una progresión aritmética de diferencia $d = 3$ y primer término -5.

2.3.1. Término General de una Progresión Aritmética

Definición 2.4.

La fórmula del término general de una progresión aritmética (a_n) está dada por la ecuación 2.1, sin embargo, esta requiere conocer el término anterior para escribir el siguiente. Por otra parte, si re-escribimos esta fórmula, se encuentra sin más que:

$$\begin{array}{rcl}
a_2 & = & a_1 + d \\
a_3 & = & a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d \\
a_4 & = & a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d \\
a_5 & = & a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d \\
\vdots & = & \vdots \\
a_n & = & a_{n-1} + d = (a_1 + (n-2)d) + d = a_1 + (n-1)d
\end{array}$$

Así, una nueva manera de escribir el término general de una P.A. es:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \tag{2.2}$$

2.3.2. Propiedades

Resumen 1.

1. Si la diferencia de una progresión aritmética es positiva, la progresión es creciente; es decir, cada término es mayor que el anterior.
2. Si la diferencia de una progresión aritmética es cero, la progresión es constante, es decir, tiene todos sus términos iguales.
3. Si la diferencia de una progresión aritmética es negativa, la progresión es decreciente, es decir, cada término es menor que el anterior.

Ejemplo 2.6.

Encuentre el término general de la progresión aritmética:

$$1, \quad \frac{3}{2}, \quad 2, \quad \frac{5}{2}, \quad 3, \cdots$$

Solución:

$$\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}, \quad 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}, \quad 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

Se trata de una progresión aritmética de diferencia $d = \dfrac{1}{2}$ y primer término $a_1 = 1$. El término general es, por tanto:

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Ejercicio : Calcular a qué altura sobre el suelo se encuentra una persona que vive en un 6^{to} piso, sabiendo que los pisos del edificio tienen una altura de 4 m y que entre cada dos pisos consecutivos hay un desnivel de $2,8$ m.

2.3.3. Suma de términos consecutivos de una Progresión Aritmética

Definición 2.5.

Denotaremmos por S_n a la suma de los n primeros términnos $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
Se tiene entonces:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Invirtiendo el orden,

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1$$

y sumando,

$$\begin{array}{ccccccccccc} S_n & = & a_1 & + & a_2 & + & \cdots & + & a_{n-1} & + & a_n \\ S_n & = & a_n & + & a_{n-1} & + & \cdots & + & a_2 & + & a_1 \\ 2Sn & = & (a_1 + a_n) & + & (a_2 + a_{n-1}) & + & \cdots & + & (a_{n-1} + a_2) & + & (a_n + a_1) \end{array}$$

Ahora bien, por la propiedad de los términos equidistantes (**Tarea**) se sabe que:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots = a_n + a_1$$

Por tanto, $2 \cdot S_n = n(a_1 + a_n)$, y despejando:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \tag{2.3}$$

Esta fórmula; no sólo sirve para sumar los primeros términos de una progresión aritmética, sino para sumar cualesquiera n términos consecutivos.

Ejemplo 2.7.

Sumar, por ejemplo, $a_5 + a_6 + \cdots + a_{83}$.

Solución: Notemos que hay $83 - 4 = 79$ términos (comienza en el quinto término). La suma es:

$$S = \frac{a_5 + a_{83}}{2} \cdot 79$$

2.4. Progresiones Geométricas

Definición 2.6.

Una Progresión Geométrica **(P.G.)** es una sucesión en la que cada elemento se obtiene multiplicando el anterior por un número fijo llamado *razón*, que se acostumbra a denotar con la letra r.
Así, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una **progresión geométrica**, se verifica que:

$$a_n = a_{n-1} \cdot r \tag{2.4}$$

Ejemplo 2.8.

Diga si la siguiente sucesión es o no una progresión geométrica, y si lo es, describa su término inicial y razón.

$$5, 15, 45, 135, 405, \cdots$$

Solución: Notemos que si una sucesión es una P.G., entonces se ha de comprobar que el cuociente entre dos términos consecutivos es constante e igual a la razón r. Esto es (de 2.4):

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = r, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

En efecto:

$$\frac{15}{5} = 3; \quad \frac{45}{15} = 3; \quad \frac{135}{45} = 3; \quad \frac{405}{135} = 3$$

la razón es constante e igual a 3, por tanto, es una P.G. con primer término igual a 5 y razón igual a 3.

2.4.1. Término General de una Progresión Geométrica.

Al igual que en una P.A., la expresión del término general de una **progresión geométrica** (a_n) requiere conocer la razón y el término anterior, sin embargo, un desarrollo análogo al caso anterior no da:

$$\begin{array}{rcl} a_2 & = & a_1 \cdot r \\ a_3 & = & a_2 \cdot r = (a_1 \cdot r) \cdot r = a_1 \cdot r^2 \\ a_4 & = & a_3 \cdot r = (a_1 \cdot r^2) \cdot r = a_1 \cdot r^3 \\ a_5 & = & a_4 \cdot r = (a_1 \cdot r^3) \cdot r = a_1 \cdot r^4 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_n & = & a_{n-1} \cdot r = (a_1 \cdot r^{n-2}) \cdot r = a_1 \cdot r^{n-1} \end{array}$$

Con lo que obtenemos la forma:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \tag{2.5}$$

Observación 2.4.

1. Si la razón de una progresión geométrica es mayor que uno, la progresión es creciente, es decir, cada término es mayor que el anterior.
2. Si la razón de una progresión geométrica está comprendida entre cero y uno, la progresión es decreciente, es decir, cada término es menor que el anterior.
3. Si la razón de una progresión geométrica es igual a uno, la progresión es constante, es decir, tiene todos los términos iguales.
4. Si la razón de una progresión geométrica es menor que cero, la progresión es alterna, es decir, sus términos son alternativamente positivos y negativos.

Ejemplo 2.9.

¿Cuál es el término general de la progresión -1, 2, -4, 8, -16, ...?

Solución: Dado que $-2 = \frac{2}{-1} = \frac{-4}{2} = \frac{8}{-4} = \cdots$

Es una progresión geométrica en la que el primer término a1 vale -1, y la razón es -2, por tanto, su término general es:

$$a_n = -1 \cdot (-2)^{n-1}$$

Observación 2.5.

Este tipo de P.G. recibe el nombre de *progresión geométrica alternada*, debido a su cambio de signo en los términos.

2.4.2. Producto de términos consecutivos de una Progresión Geométrica

Continuando con la notoria analogía existente entre las P.A. y las P.G., se puede encontrar la fórmula del producto de términos de una progresión geométrica.

Definición 2.7.

Se denotará por P_n al producto $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$.

Se tiene entonces:

$$Pn = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Invirtiendo el orden

$$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdots a_3 \cdot a_2 \cdot a_1$$

y multiplicando estas expresiones

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)(a_2 \cdot a_{n-1}) \cdots (a_{n-1} \cdot a_2)(a_n \cdot a_1)$$

Ahora usando la propiedad de los términos equidistantes (**Tarea**) tenemos:

$$a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = \cdots = a_n \cdot a_1$$

por lo que tenemos:

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$$

de donde:

$$P_n = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} \tag{2.6}$$

Observación 2.6.

Para resolver el signo que le corresponda, debemos estudiarlo en forma particular cada caso.

2.4.3. Suma de términos consecutivos de una Progresión Geométrica

Definición 2.8.

Denotaremos por S_n a la suma de n términos consecutivos de una P.G., esto es:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Ahora, multipliquenos esta igualdad por la razón (r).

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n / \cdot r \\ S_n \cdot r & = & (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n) \cdot r \\ S_n \cdot r & = & a_1 \cdot r + a_2 \cdot r + \cdots + a_{n-1} \cdot r + a_n \cdot r \\ S_n \cdot r & = & a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} \qquad (*) \end{array}$$

$(*)$: recuerde que al multiplicar un término por la razón se obtiene el término siguiente (2.4), de donde podemos concluir que, restando:

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ r \cdot S_n & = & a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_n \cdot r \\ (1-r)S_n & = & a_1 - a_n \cdot r = a_1 - (a_1 \cdot r^{n-1}) \cdot r = a_1 - a_1 \cdot r^n = a_1(1-r^n) \end{array}$$

y despejando S_n tenemos:

$$S_n = a_1 \frac{(1-r^n)}{1-r} \tag{2.7}$$

Ejemplo 2.10.

Calcular la suma de siete términos da la progresión geométrica $\dfrac{2}{3}; -1, \dfrac{3}{2}, \cdots$

Solución: La razón es igual a $r = -\frac{3}{2}$. Aplicando la fórmula (2.7), tendremos:

$$\begin{aligned}
S_7 &= \frac{2}{3}\frac{\left[1-\left(-\frac{3}{2}\right)^7\right]}{1+\frac{3}{2}} \\
&= \frac{3}{2}\frac{\left[1+\frac{2187}{128}\right]}{\frac{5}{2}} \\
&= \frac{2}{3}\times\frac{2315}{128}\times\frac{2}{5} \\
&= \frac{463}{96}
\end{aligned}$$

2.4.4. Suma de Infinitos Términos de una Progresión Aritmética ($|r| < 1$)

Ejemplo 2.11.

Calcular la suma de todos los términos de la progresión: $0,3; 0,15; 0,075; \cdots$

Para resolver este problema, vamos a detenerlos un poco a analizar el comportamiento de las progresiones como la que nos plantean.

Definición 2.9.

Una progresión geométrica es decreciente si cada término es menor que el anterior.

Esto ocurre cuando la razón es un número pequeño, más precisamente, cuando $|r| < 1$ (cuando r es un número entre -1 y 1).

La relevancia de esto, es que cuando un número es menor que uno, sus potencias producen un número más pequeño aún ($(0,5)^2 = 0,25; \quad (0,25)^2 = 0,0625; \quad \cdots$). Así, cuando r es un número comprendido entre cero y uno y n el número de términos de la progresión muy grande (infinito), la potencia r^n es una cantidad tan pequeña (en matemáticas se dice "*tiende a cero*"), que se puede despreciar.

$$S_n = a_1\frac{(1-r^n)}{(1-r)} \overset{(n \text{ grande})}{\approx} a_1\frac{1-0}{1-r} = a_1\frac{1}{1-r} \tag{2.8}$$

Con esto, la respuesta a nuestra pregunta es:

$$\begin{aligned}
r &= \frac{0,15}{0,3} = 0,5 \\
S &= 0,3\frac{1}{1-0,5} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6
\end{aligned}$$

Observación 2.7 (Suma infinita de una P.G.).

Sea $\{a_n\}$ una progresión geométrica de razón r, $0 < r < 1$. Entonces la suma infinita (todos sus términos), está dada por:

$$S = a_1 \frac{1}{1 - r}$$

Capítulo 3

Trigonometría

Como midió el radio de la Tierra Eratóstenes

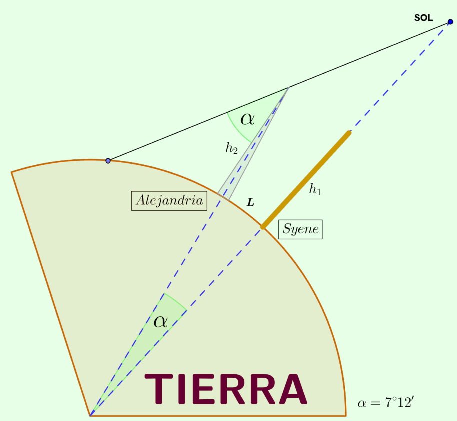


Figura 3.1: Radio Medio de la Tierra

Eratóstenes, nacido en Cirene en el año 284 antes de Jesucristo, fue el primer científico de la historia de la Humanidad en medir con bastante precisión en una época en la que muy poca gente pensaba que el mundo *no era plano como una mesa*, la circunferencia de nuestro planeta.
Pues, pensó, sencillamente, que dos estacas clavadas verticalmente en el suelo, a una distancia de varios kilómetros, sobre un mismo *meridiano*, darían sombras distintas a una misma hora en virtud de la curvatura de la superficie del planeta.
Eratóstenes, que estaba en Alejandría, recordó que en un cierto día del año, en el solsticio de verano, los rayos solares caían verticalmente en la ciudad de Siena, situada en el mismo meridiano que Alejandría, pues recordaba que el sol se reflejaba en lo más profundo de los pozos, a la hora del mediodía. Entonces, pensó que si media ese día en la ciudad de Alejandría, a la misma hora, el ángulo, α, que los rayos solares formaban con la vertical, midiendo la sombra que sobre la línea meridiana formaba la estaca, conocería el ángulo del arco de meridiano entre Alejandría y Siena (α).
Conocido el ángulo α, y la longitud L del arco de meridiano entre ambos puntos de colocación de las estacas, será posible, mediante una sencilla regla de tres, encontrar la longitud total, x, de la circunferencia del planeta:

$$\left.\begin{array}{ccc} \alpha^\circ & \longrightarrow & L \\ 360^\circ & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{360 \times L}{\alpha}$$

y, de aquí, el radio medio de la Tierra: $\boxed{R = \dfrac{360 \times L}{2\pi \times \alpha}}$

3.1. Introducción

La palabra trigonometría proviene del griega **tri**=tres, **gonon**=ángulo y **metria**=medida. Es la parte de las Matemática que nos ayuda a resolver problemas relacionando y haciendo cálculos con las medidas de los lados y los ángulos de un triángulo.

En esta unidad estudiaremos dos sistemas de medición de ángulos para luego ver las propiedades principales de las funciones trigonométricas: seno, coseno y tangente, observando su relación en los distintos cuadrantes. Finalmente, las funciones trigonométricas inversas nos permiten obtener el valor de un ángulo conociendo su ubicación y el valor de la función.

Todos éstos recursos nos ayudarán a resolver problemas como el siguiente:

¿ Cómo medir el ancho de un rio sin cruzarlo?

Supongamos que se tienen aparatos para medir distancias y para medir ángulos pero no se puede cruzar el rio. Además la orilla es escarpada y sólo es posible moverse perpendicularmente al río, donde hay un camino. ¿Cómo medir el ancho del río?.

Este y otros problemas similares han podido ser resueltos desde la antiguedad utilizando las relaciones trigonométricas entre los ángulos y los lados de los triángulos.

Definición 3.1 (Angulo).

Diremos que un ángulo está en **Posición Normal** si su vértice coincide con el origen de un sistema coordenado rectangular y uno de sus lados, que llamaremos **Lado Inicial**, coincide con el semieje positivo de las x. El cuadrante al cual pertenece el ángulo es el cuadrante en el que está el otro lado, que llamaremos **Lado Terminal**.

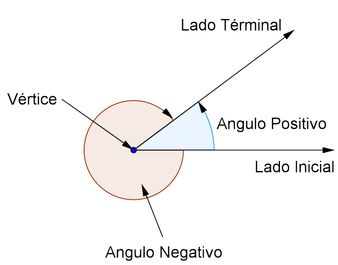


Figura 3.2: Angulo positivo y negativo

Cada ángulo está asociado con un número real, llamada **Medida** del ángulo, que representa cuanto debe rotar el lado inicial para llegar a coincidir con el con el lado terminal. Si la rotación se efectúa en sentido antihorario, se tiene un ángulo de medida positiva y en caso contrario se tiene un ángulo de medida negativa.

Definición 3.2.

La magnitud de un ángulo en revoluciones está dada por la relación:

$$\angle \text{ en } rev = \frac{s}{2\pi r}$$

donde r = radio y s = longitud de arco.

3.2. Medidas Angulares

Existen infinitos sistemas para medir ángulos, entre los más usados son: El sistema Centesimal (o llamado también sistema Frances); el sistema Sexagesimal (o también llamado sistema Inglés) y el sistema Radial (o llamado también sistema Circular).

Sin olvidar que el Sistema Internacional (S. I.) los ángulos se miden en radianes (rad.); estos dos últimos sistemas son los más usados y por ello damos a continuación sus definiciones.

3.2.1. Sistema Sexagesimal

Definición 3.3.

Consiste en dividir una circunferencia en 360 partes iguales, donde cada una de ellas recibe el nombre de grado, es decir,

unidad	:	grado
1 revolución	:	$360°$
1 grado	:	$60'$(min)
1 minuto	:	$60''$(seg)

Observación 3.1.

La magnitud de un ángulo en grados está dada por la relación.

$$\angle \text{ grado } = (\text{número de revoluciones})(360°)$$

Ejemplo 3.1.

1. Un ángulo recto mide $90°$
2. Un ángulo llano mide $180°$

Ejemplo 3.2.

Exprese en grados, minutos y segundos el ángulo que mide $30,28°$

Solución: En principio separamos la parte entera y la parte decimal de $30,28°$:

$$30,28° = 30° + 0,28°$$

Ahora, usando proporcionalidad directa calculamos cuantos minutos son 0,28°

$$\left.\begin{array}{ccc} 1° & \to & 60' \\ 0,28° & \to & \end{array}\right\} \Rightarrow 0,28° = 60' \cdot 0,28 = 16,80'$$

Separando luego la parte entera y la parte decimal de los minutos

$$16,80' = 16' + 0,80'$$

Con la regla de tres simple calculamos cuántos segundos son $0,80'$

$$\left.\begin{array}{ccc} 1' & \to & 60'' \\ 0,80' & \to & \end{array}\right\} \Rightarrow 0,80' = 60'' \cdot 0,80 = 48''$$

Así obtenemos:

$$30,28° = 30°16'48''$$

Observación 3.2.

Investiga como se logra esta conversión en tu calculadora.

3.2.2. Sistema Radial

Definición 3.4.

Un Radian es la medida de un ángulo del centro de una circunferencia que subtiende un arco de longitud igual al radio de la circunferencia.

NOTACIÓN : 1 radián=1

Observación 3.3.

1. Un ángulo de una revolución es igual a un ángulo cuya medida es 2π radianes.
2. En una circunferencia de radio r la medida θ, en radianes, de un ángulo central que subtiende un arco de longitud s está dada por:

$$\theta = \frac{s}{r} \Leftrightarrow s = r\theta$$

3. Los dos sistemas de medidas están relacionados por la siguiente ecuación:

$$\frac{\alpha^\circ}{180^\circ} = \frac{\theta[rad]}{\pi} \tag{3.1}$$

Ejemplo 3.3.

¿Cuántos grados equivale un radian?

Solución:

$$\begin{aligned} \alpha^\circ &= \frac{180^\circ \times 1 \text{ rad}}{\pi \text{ rad}} \\ &= 57,296^\circ \\ &= 57^\circ 17' 47'' \end{aligned}$$

Ejemplo 3.4.

¿A cuántos radianes equivale un ángulo de 45°?

Solución:

$$\begin{aligned} \alpha \text{ rad} &= \frac{\pi \times 45^\circ}{180^\circ} \\ &= \frac{\pi}{4} \text{ rad} \end{aligned}$$

Observación 3.4.

Se puede probar fácilmente las siguiente relaciones:

360°	=	2π
180°	=	π
90°	=	$\frac{\pi}{2}$

60°	=	$\frac{\pi}{3}$
45°	=	$\frac{\pi}{4}$
30°	=	$\frac{\pi}{6}$

3.3. Funciones circulares

Consideremos una circunferencia unitaria, es decir, $x^2 + y^2 = 1$. A cada valor de θ le corresponde un punto terminal, denotado por $P(\theta)$ cuya distancia al punto $(1,0)$ medido sobre la circunferencia es $|\theta|$ unidades.

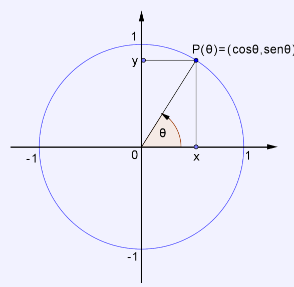
$$P : \theta \to P(\theta)$$

$Dom(P) = \mathbb{R}, Rec(P) = \{(x,y)/x^2 + y^2 = 1\}$

3.3.1. Funciones Sen y Cos

Definición 3.5.

Se definen las funciones
$\cos : \theta \to x, \quad x$ abcisa de $P(\theta)$
$\operatorname{sen} : \theta \to y, \quad y$ ordenada de $P(\theta)$



Esto es:

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= x \\ \operatorname{sen}(\theta) &= y \end{aligned} \tag{3.2}$$

El dominio de cada función es $\mathbb{R}$ y el recorrido de cada una de ellas es $[-1,1]$.

Resumen 2.

Como la magnitud de la circunferencia unitaria, medida en radianes es 2π tenemos la siguiente tabla de valores:

θ	$P(\theta)$	$\cos(\theta)$	$\operatorname{sen}(\theta)$
0	$(1,0)$	1	0
$\frac{\pi}{2}$	$(0,1)$	0	1
π	$(-1,0)$	-1	0
$\frac{3}{2}\pi$	$(0,-1)$	0	-1
2π	$(1,0)$	1	0

Definición 3.6.

Si el punto $P(\theta) = (x, y)$, entonces se define la función.

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0 \tag{3.3}$$

llamada función **tangente**.
El dominio de esta función es $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + n\pi : n \in \mathbb{N}\}$, además de la definición de las funciones seno y coseno, se tiene que:

$$\tan(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}$$

Resumen 3.

Considerando los signos de las coordenadas de un punto en cada cuadrante, obtenemos la siguiente tabla resumen sobre las funciones definidas anteriormente.

Cuadrante en que vive $P(\theta)$	$x = \cos(\theta)$	$y = \operatorname{sen}(\theta)$	$\frac{y}{x} = \tan(\theta)$
I	$+$	$+$	$+$
II	$-$	$+$	$-$
III	$-$	$-$	$+$
IV	$+$	$-$	$-$

Observación 3.5.

Identidad trigonométrica fundamental.
Notemos que como $P(\theta) = (x, y)$ vive en la circunferencia unitaria, se tiene que:

$$x^2 + y^2 = 1$$

donde usando (3.2) obtenemos:

$$\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta) = 1, \qquad \forall\ \theta \in \mathbb{R} \tag{3.4}$$

Como la longitud de la circunferencia unitaria es 2π, si θ se aumenta o disminuye en un múltiplo de 2π las coordenadas de los puntos $P(\theta)$ y $P(\theta + 2k\pi)$ coinciden, para cada $k \in \mathbb{Z}$ y para cada $\theta \in \mathbb{R}$, luego se tiene:

Teorema 3.1.

$\forall\, \theta \in \mathbb{R}$ y $\forall\, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\theta + 2k\pi) &= \operatorname{sen}(\theta) && (3.5)\\ \cos(\theta + 2k\pi) &= \cos(\theta) && (3.6) \end{aligned}$$

esto es, las funciones sen y cos son funciones periódicas de periodo 2π.

Observación 3.6.

A diferencia de las funciones seno y coseno, la función tangente tiene periodo π, esto es:

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} = \frac{-y}{-x}$$

y el punto $(-x, -y)$ es $P(\theta + \pi)$,

luego tenemos:

Teorema 3.2.

$\forall\, \theta \in \mathbb{R}$ y $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.

$$\tan(\theta + k\pi) = \tan(\theta) \tag{3.7}$$

esto es, la función tangente es periódica de periodo π.

Definición 3.7.

Se definen tres funciones trigonométricas adicionales, que son:

$$\begin{aligned} \operatorname{cosec}(\theta) &= \frac{1}{y} \quad , y \neq 0 \\ \sec(\theta) &= \frac{1}{x} \quad , x \neq 0 \\ \cot(\theta) &= \frac{x}{y} \quad , y \neq 0 \end{aligned}$$

luego usando (3.2) y (3.3), tenemos:

Observación 3.7.

$$\operatorname{cosec}(\theta) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} \tag{3.8}$$

$$\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)} \tag{3.9}$$

$$\cot(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)} \tag{3.10}$$

3.3.2. Gráficas de las Funciones Trigonométricas

A continuación se presentan las gráficas en el plano de las funciones $\sin, \cos$ y $\tan$:

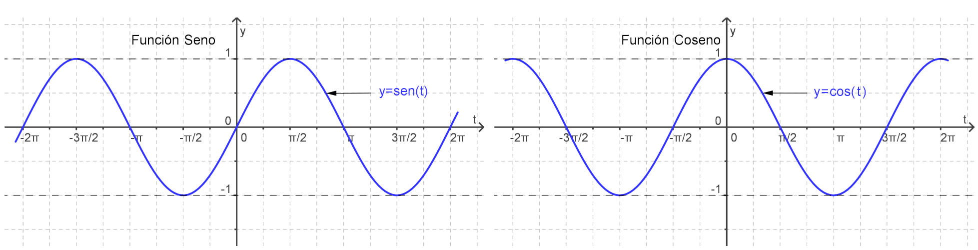


Figura 3.3: Función Seno y Coseno respectivamente

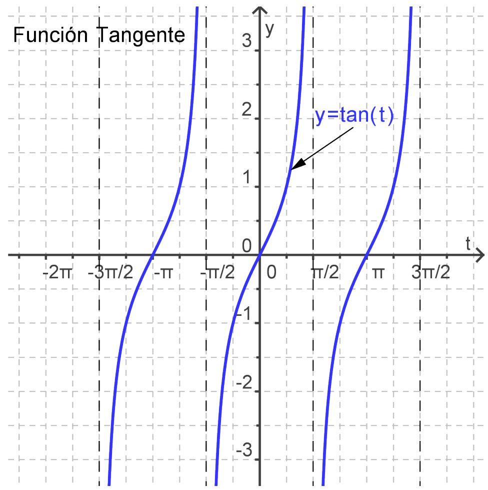


Figura 3.4: Función Tangente

3.4. Algunas Identidades Trigonometricas Fundamentales

Anteriormente vimos que:

$$\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \qquad , \forall \theta \in \mathbb{R} \tag{3.11}$$

dividiendo ambos miembros de (3.11) por $\cos^2(\theta)$ se tiene:

$$\frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} + 1 = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$$

es decir,

$$\tan^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta)$$

Por otra parte, si dividimos ambos miembros de (3.11) por $\operatorname{sen}^2(\theta)$ se tiene:

$$1 + \frac{\cos^2(\theta)}{\operatorname{sen}^2(\theta)} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\theta)}$$

es decir,

$$1 + \cot^2(\theta) = \operatorname{cosec}^2(\theta)$$

Resumen 4.

$$\tan^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta) \tag{3.12}$$

$$1 + \cot^2(\theta) = \operatorname{cosec}^2(\theta) \tag{3.13}$$

Ejemplo 3.5.

Encuentre los valores de las otras funciones circulares si:
$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{5}{13}$ y θ está en el primer cuadrante.

Solución: Notemos que:

$$\begin{aligned}
\cos^2\theta &= 1 - \operatorname{sen}^2\theta \qquad /\sqrt{} \\
|\cos\theta| &= \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} \\
&= \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}
\end{aligned}$$

y como θ está en el I cuadrante, $\cos\theta > 0$, luego

$$\cos\theta = \frac{12}{13}$$

De esto, se tiene:

$$\begin{aligned}
\tan\theta &= \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12} \\
\sec\theta &= \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{12}{13}} = \frac{13}{12} \\
\operatorname{cosec}\theta &= \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\frac{5}{13}} = \frac{13}{5} \\
\cot\theta &= \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.6.

$\tan\theta = \frac{1}{2}$ y $\operatorname{sen}\theta > 0$.

Solución: Notemos que

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

así

$$\sec^2\theta = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

luego $|\sec\theta| = \frac{\sqrt{5}}{2}$, pero si $\operatorname{sen}\theta > 0$ y $\tan\theta > 0$, entonces $\theta \in I$ y $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} > 0$. Luego

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{5} \quad \text{y} \quad \cot\theta = 2$$

3.5. Interpretación geométrica de las funciones circulares

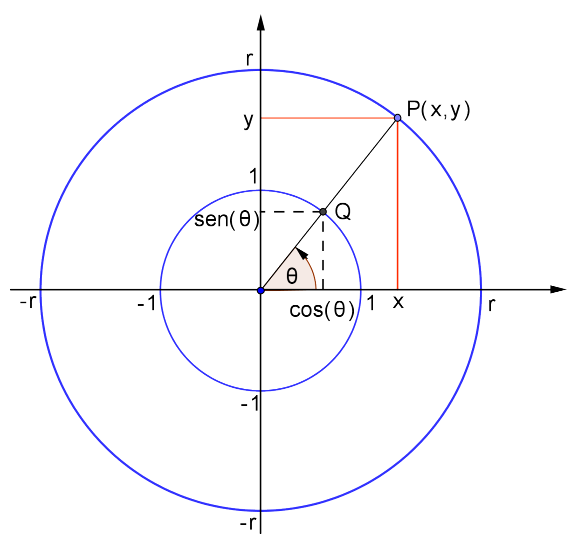


Figura 3.5: Coordenadas y funciones trigonométricas

A continuación veamos una interpretación geométrica de las funciones circulares y su utilización.
Sea θ un ángulo y P un punto sobre la circunferencia $x^2+y^2=r^2$, luego la distancia del punto P al origen es r.
Ahora bién, si Q es el punto de intersección de la circunferencia unitaria y el segmento $\overline{OP}$ y se trazan las perpendiculares al eje X, entonces se tienen dos triángulos rectangulares semejantes así, tenemos que:

. $$\frac{x}{\cos\theta} = \frac{r}{1} \quad \text{y} \quad \frac{y}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{r}{1}$$

luego

. $$x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta$$

Así tenemos el siguiente teorema:

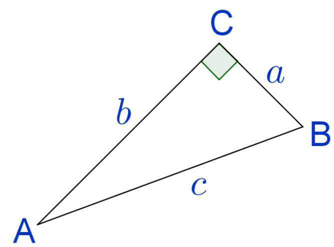
Teorema 3.3.

Si $P(x,y)$ es un punto tal que $d(P,O)=r$, entonces las coordenadas de P en términos de r y θ están dados por

$$x = r\cos\theta \qquad \text{e} \qquad y = r\operatorname{sen}\theta \tag{3.14}$$

3.6. Razones Trigonométricas

Dado un triángulo de vértices A, B y C rectángulo en C, de lados correspondientes a, b y c como muestra la figura



Si le ubicamos en un sistema cartesiano en forma adecuada, es decir, con su vértica B en el origen y el lado a sobre el lado positivo del eje de las abscisa y usando el teorema de la sección anterior (ecuaciones - 3.14), podemos obtener:

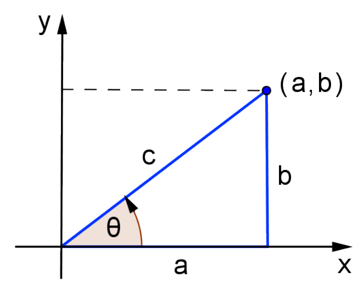


Figura 3.6: Relación Catetos e Hipotenusa

$$a = c\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{a}{c}$$
$$b = c\,\mathrm{sen}\,\theta \Rightarrow \mathrm{sen}\,\theta = \frac{b}{c}$$
$$\tan\theta = \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} \Rightarrow \tan\theta = \frac{b}{c}$$

de esto, finalmente se tienen las siguietes relaciones:

Resumen 5.

$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \tag{3.15}$$
$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \tag{3.16}$$
$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \tag{3.17}$$

Observación 3.8.

Notemos que por semejanza de triángulos, el valor de las razones trigonométricas sólo depende del ángulo θ y de ser un triángulo rectangulo.

Ejemplo 3.7.

Un poste de telégrafo tiene una altura de $18,6[m]$, y esta sujeto al suelo desde su parte más alta mediante un cable. Determine la longitud del cable, si este forma un ángulo de $30°$ con el suelo.¿A qué distancia está la base del cable de la base del poste?

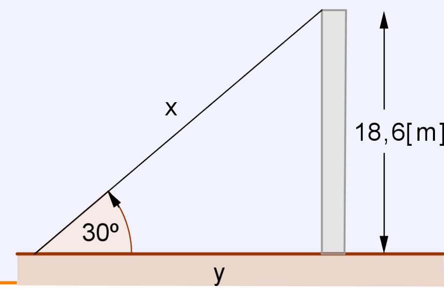


Figura 3.7: Poste de Telegrafo

Solución: Haciendo una interpretación gráfica, tenemos:

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{18,6}{x} \Rightarrow x = \frac{18,6}{\operatorname{sen} 30°} = 37,2[m]$$

y

$$\tan 30° = \frac{18,6}{y} \Rightarrow y = \frac{18,6}{\tan 30°} = 32,216[m]$$

Observación 3.9.

Haciendo uso de las razones trigonométricas y propiedades de triángulos conocidos, podemos obtener el valor exacto de las funiones trigonométricas para alguno ángulos de uso frecuente tales como: $30°, 45°$ y $60°$.

Consideremos un triángulo equilátero de lado 1 unidad, como muestra la figura.
De aquí podemos obtener el valor 30°:

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

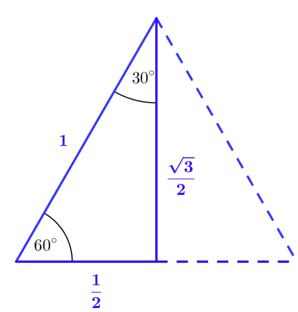


Figura 3.8: Triángulo para 30° y 60°

De igual forma, se tiene para $60°$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen} 60° &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\cos 60° &= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2} \\
\tan 60° &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}
$$

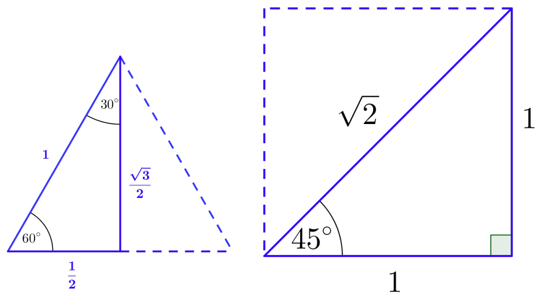


Figura 3.9: triángulos que contienen $30°, 45°$ y $60°$

3.6.1. Algunas Propiedades Importantes

Consideremos los puntos $P_1 = P_1(x, y)$ y al punto $P_2 = P_2(x, -y)$, luego:

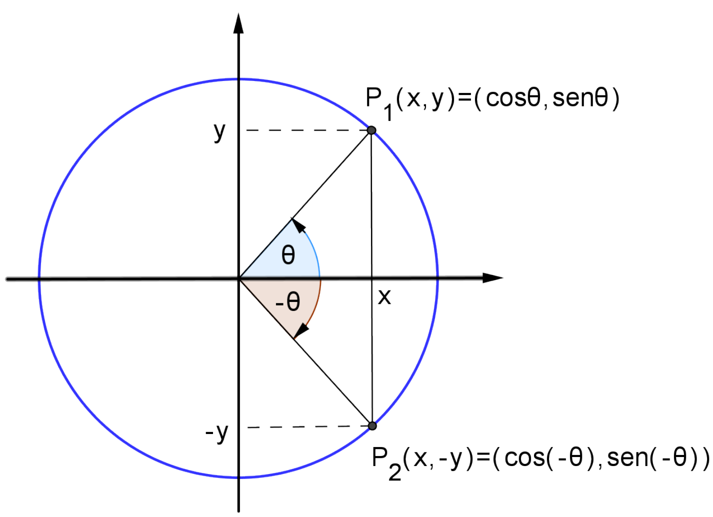


Figura 3.10: Funciones Pares e Impares

del punto P_1 tenemos que

$$x = \cos\theta \qquad \text{e} \qquad y = \operatorname{sen}\theta$$

y del punto P_2

$$x = \cos(-\theta) \qquad \text{e} \qquad -y = \operatorname{sen}(-\theta)$$

por lo tanto

Resumen 6.

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta) \qquad , \forall\theta \in \mathbb{R} \tag{3.18}$$

Esto es, **coseno es una función par**. Además

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta) \qquad , \forall\theta \in \mathbb{R} \tag{3.19}$$

esto es, **seno es una función impar**. Por otra parte

$$\tan(-\theta) = \frac{\operatorname{sen}(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = -\tan(\theta) \qquad , \forall\theta \in \mathbb{R} \tag{3.20}$$

esto es **tangente es una función impar**.

3.7. Identidades Trigonométricas

3.7.1. Suma y Diferencia de Angulos

Teorema 3.4.

Para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) \tag{3.21}$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) \tag{3.22}$$

Usando (3.21) y (3.22) tenemos:

Teorema 3.5.

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)} \tag{3.23}$$

De lo anterior

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\beta+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\beta=\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\beta-\cos\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\beta=\cos\beta$$

es decir

Teorema 3.6.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \operatorname{sen}\beta \tag{3.24}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \cos\beta \tag{3.25}$$

Ejemplo 3.8.

Si $\operatorname{sen}\alpha=\frac{4}{5}$ y $\operatorname{sen}\beta=\frac{12}{13}$, $0\leq\alpha,\beta\leq\frac{\pi}{2}$. Calcule:
$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$

Solución:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha\\
&= \operatorname{sen}\alpha\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\beta}+\operatorname{sen}\beta\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}\\
&= \frac{4}{5}\sqrt{1-\frac{144}{169}}+\frac{12}{13}\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{56}{65}
\end{aligned}$$

3.7.2. Identidades Trigonométricas para Ángulos Dobles y Medios

De las formulas anteriores (3.21), (3.22) y (3.23), para la suma de ángulos podemos observar que si $\alpha=\beta$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\cos(2\alpha) &= \cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha\\
&= \cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1
\end{aligned}$$

de forma similar se puede calcular $\operatorname{sen}2\alpha$ y $\tan 2\alpha$, obteniendose:

Teorema 3.7.

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \tag{3.26}$$
$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \tag{3.27}$$
$$\cos(2\alpha) = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha \tag{3.28}$$
$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \tag{3.29}$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \tag{3.30}$$

y para los ángulos medios tenemos que si $\alpha = \frac{\theta}{2}$, en las ecuaciones (3.27), (3.29) y (3.30) resulta:

Teorema 3.8.

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \tag{3.31}$$
$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \tag{3.32}$$
$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} \tag{3.33}$$

3.7.3. Reducción al Primer Cuadrante

Frecuentemente se requiere expresar una función trigonométrica de un ángulo mayor que $\frac{\pi}{2}$ en términos de alguna función de un ángulo del primer cuadrante.

Si θ representa un ángulo positivo entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, podemos expresar cualquier ángulo positivo menor que 2π como $\theta, \pi-\theta, \pi+\theta$ y $2\pi-\theta$, luego tenemos que:

$\operatorname{sen}(\pi-\theta) = \operatorname{sen}\pi\cos\theta - \cos\pi\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta$

$\cos(\pi-\theta) = \cos\pi\cos\theta + \operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}\theta = -\cos\theta$

$\tan(\pi-\theta) = \dfrac{\tan\pi - \tan\theta}{1+\tan\pi\tan\theta} = -\tan\theta$

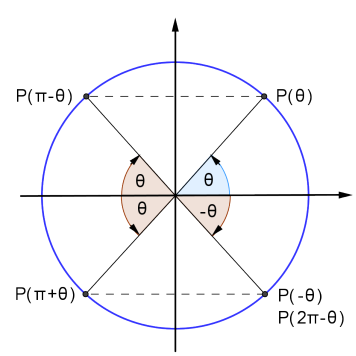


Figura 3.11: Reducción al Primer Cuadrante

por tanto

Teorema 3.9.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\pi-\theta) &= \operatorname{sen}\theta\\ \cos(\pi-\theta) &= -\cos\theta\\ \tan(\pi-\theta) &= -\tan\theta\end{aligned} \tag{3.34}$$

análogamente

Teorema 3.10.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\pi+\theta) &= -\operatorname{sen}\theta\\ \cos(\pi+\theta) &= -\cos\theta\\ \tan(\pi+\theta) &= \tan\theta\end{aligned} \tag{3.35}$$

y

Teorema 3.11.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2\pi-\theta) &= -\operatorname{sen}\theta\\ \cos(2\pi-\theta) &= \cos\theta\\ \tan(2\pi-\theta) &= -\tan\theta\end{aligned} \tag{3.36}$$

Ejemplo 3.9.

Exprese en términos de un ángulo del primer cuadrante.

a)	$\operatorname{sen}(155°)$	d)	$\operatorname{sen}(750°)$
b)	$\tan(155°)$	e)	$\tan(1400°)$
c)	$\cos(230°)$	f)	$\operatorname{sen}(-150°)$

Solución:

a) $\operatorname{sen}(155°) = \operatorname{sen}(180° - 25°) = \operatorname{sen}(25°)$

b) $\tan(155°) = \tan(180° - 25°) = -\tan(25°)$

c) $\cos(230°) = \cos(180° + 50°) = -\cos(50°)$

3.8. Funciones Trigonométricas Inversas

Supongamos ahora, que queremos resolver el siguiente problema.

Ejemplo 3.10.

Suponga que se desea construir una rampa que debe alcanzar una pared de 3 metros de alto, si se cuenta con material suficiente para construir 12 metros de largo, y el reglamento exige que la elevación no puede superar los 15°.
¿Será suficiente el matrial con se cuenta para construir una rampa que cumpla con las exigencias?

Solución:

Para responder esta pregunta, lo que debemos averiguar es cuanto mide el ángulo de elevación con que quedará la rampa, al constuirla. Para ello dibujemos la idea y calculemos.

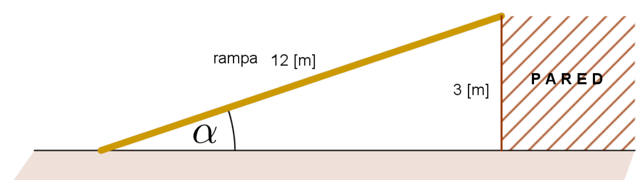


Figura 3.12: Idea Gráfica del Problema

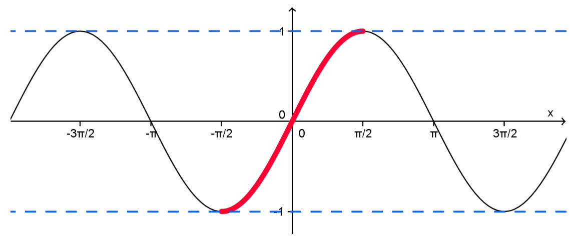
De aquí, tenemos que $\operatorname{sen}(\alpha) = \dfrac{3}{12}$

como queremos saber cuánto mide el ángulo, necesitamos despejar α, y para ello debemos aplicar la función inversa del seno.

Observación 3.10.

Dado que las funciones trigonométricas son periódicas (3.5,3.6 y 3.7), claramente estas no son inyectivas por lo que se necesita hacer una adecuada restricción de ellas en sus dominios.

A continuación se presenta una idea gráfica de las funciones y sus respectivas restricciones, de modo se sean inyectivas. Si además respetamos sus recorridos, las hacemos biyectivas, lo que nos permitira definir sus inversas.



3.8.1. Inversa de la función seno

Definición 3.8 (Función Inversa de sen(α))**.**

Se define

$$\begin{array}{rccc} \text{Sen}: & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \to & [-1,1] \\ & \alpha & \to & y = \text{sen}(\alpha) \end{array}$$

y su función inversa correspondiente:

$$\begin{array}{rccc} \text{arc sen}: & [-1,1] & \to & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ & y & \to & \alpha = \text{arc sen}(y) \end{array}$$

donde se cumple que:

$$y = \text{sen}(\alpha) \Longleftrightarrow \text{arc sen}(y) = \alpha$$

Observación 3.11.

Recordemos que arc sen(x) denota la función inversa de sen(α), por lo que se tiene que:

$$\text{arc sen}(x) = \text{sen}^{-1}(x)$$

Recordando que esta es la notación usada en las calculadoras.

Observación 3.12.

Es importante entender que

$$(\text{sen}\, x)^{-1} = \frac{1}{\text{sen}\, x} \neq \text{sen}^{-1} x.$$

Ejemplo 3.11.

Encuentre el valor de $\operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Solución: Si $y = \operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, entonces $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$ y $\operatorname{sen} y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} > 0$. De donde se deduce que $y = \dfrac{\pi}{3}$

Ejemplo 3.12.

Encuentre el valor de $\tan(\operatorname{arc\,sen}(0{,}75))$, sin uso de calculadora.

Solución:

Debemos encontrar el valor de la tangente, por lo que $\operatorname{arc\,sen}(0{,}75)$ representa un ángulo medido en radianes. Digamos $\alpha = \operatorname{arc\,sen}(0{,}75)$, luego:

$\alpha = \operatorname{arc\,sen}(0{,}75) \Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha) = \dfrac{3}{4}$

de donde, usando el triángulo rectángulo que contiene al ángulo α de la figura, se tiene,

$\cos(\alpha) = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$, de donde obtenemos que:

$\tan(\operatorname{arc\,sen}(0{,}75)) = \tan(\alpha) = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \dfrac{3/4}{\sqrt{7}/4}$

Así, $\tan(\operatorname{arc\,sen}(0{,}75) = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$

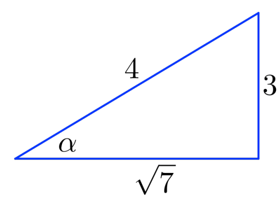
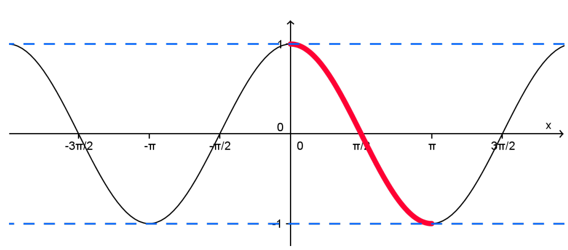


Figura 3.13: Triángulo Rectángulo con ángulo α

3.8.2. Inversa de la función coseno



Definición 3.9 (Función Inversa de $\cos(\alpha)$)**.**

Se define

$$\begin{array}{rccl} \text{Cos}: & [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ & \alpha & \to & y = \cos(\alpha) \end{array}$$

y su función inversa correspondiente:

$$\begin{array}{rccl} \arccos: & [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ & y & \to & \alpha = \arccos(y) \end{array}$$

donde se cumple que:

$$y = \cos(\alpha) \Longleftrightarrow \arccos(y) = \alpha$$

Observación 3.13.

De igual forma que antes, se tiene que:

$$\arccos(x) = \cos^{-1}(x)$$

Ejemplo 3.13.

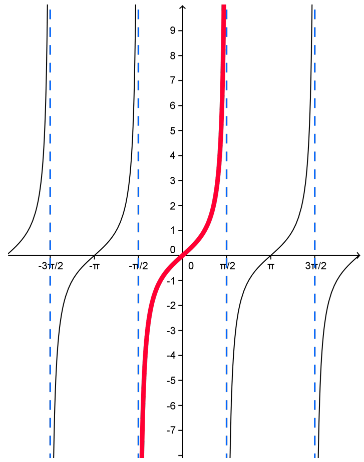
Escriba $\operatorname{sen}(\cos^{-1} x)$ como una expresión algebraica de x.

Solución: Considerando $\alpha = \cos^{-1} x$, tenemos que $\cos(\alpha) = x$, por lo que,

$\operatorname{sen}(\alpha) = \pm\sqrt{1-\cos(\alpha)} = \pm\sqrt{1-x^2}$.

Así, $\operatorname{sen}(\alpha) = \sqrt{1-x^2}$.

Elegimos la raíz positiva, ya que $\cos^{-1} x = \alpha \in [0,\pi]$, y en I y II cuadrante el seno es positivo.



3.8.3. Inversa de la función tangente

Definición 3.10 (Función Inversa de $\tan(\alpha)$)**.**

Se define

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Tan}: &]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ & \alpha & \to & y=\tan(\alpha) \end{array}$$

y su función inversa correspondiente:

$$\begin{array}{rccc} \arctan: & \mathbb{R} & \to &]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ & y & \to & \alpha=\arctan(y) \end{array}$$

donde se cumple que:

$$y=\tan(\alpha) \Longleftrightarrow \arctan(y)=\alpha$$

Observación 3.14.

Para la función tangente, también se tiene que:

$$\arctan(x)=\tan^{-1}(x)$$

Ejemplo 3.14.

Sin utilizar calculadora, evalúe la siguiente expresión:
$\tan^{-1}\left(\tan\dfrac{3\pi}{4}\right)$

Solución: No podemos utilizar las propiedades de la función inversa en forma directa, pues $\frac{3\pi}{4}$ no pertenece al intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Por lo tanto evaluamos $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-1$ y entonces obtenemos $\tan^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{4}$, Así,

$$\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{4}$$

Ejemplo 3.15.

Sin utilizar calculadora, evalúe la siguiente expresión:
$\tan\left(\arctan 2+\operatorname{arc\,sen}\frac{4}{5}\right)$

Solución:

Si consideramos $\tan\left(\underbrace{\arctan 2}_{\alpha}+\underbrace{\operatorname{arc\,sen}\frac{4}{5}}_{\beta}\right)$, donde

$\alpha=\arctan 2\Rightarrow\tan\alpha=2\in I$
$\beta=\operatorname{arc\,sen}\frac{4}{5}\Rightarrow\operatorname{sen}\beta=\frac{4}{5}\in I$
y como $\tan\beta=\frac{4}{3}$

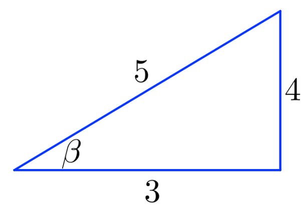


Figura 3.14: Triángulo Rectángulo con ángulo β

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{2+\frac{4}{3}}{1-2\cdot\frac{4}{3}}=-\frac{10}{5}=-2$$

Ejemplo 3.16.

Hallar el valor de la siguiente expresión:

$$\operatorname{sen}(2\tan^{-1}(x))$$

Solución:

Considerando $\operatorname{sen}\left(\underbrace{2\tan^{-1}(x)}_{\alpha}\right)$, donde

$\alpha=\tan^{-1}(x)\Rightarrow\tan(\alpha)=x=\frac{x}{1}$
de donde $\operatorname{sen}(\alpha)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; $\cos(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
y usando la fórmula de los ángulos dobles, tenemos:
$\operatorname{sen}(2\alpha)=2\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\alpha)=2\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{2x}{1+x^2}$

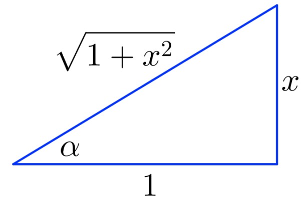
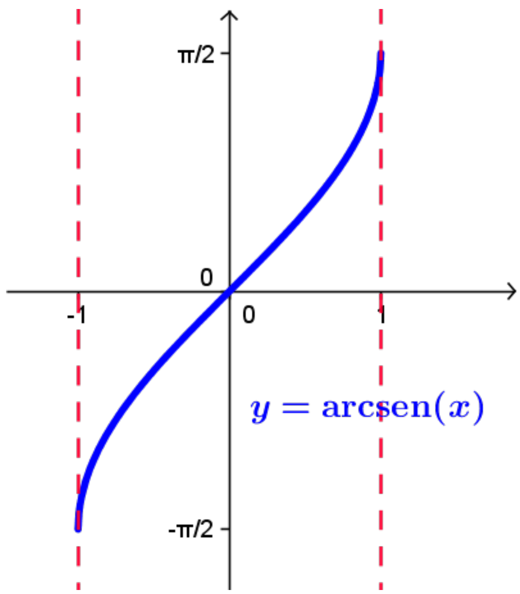


Figura 3.15: Triángulo Rectángulo con ángulo α

3.8.4. Gráfica de las Funciones trigonométricas Inversas

A continuación se presentan las gráficas en el plano de las funciones $\operatorname{arc\,sen}, \operatorname{arc\,cos}$ y $\arctan$:



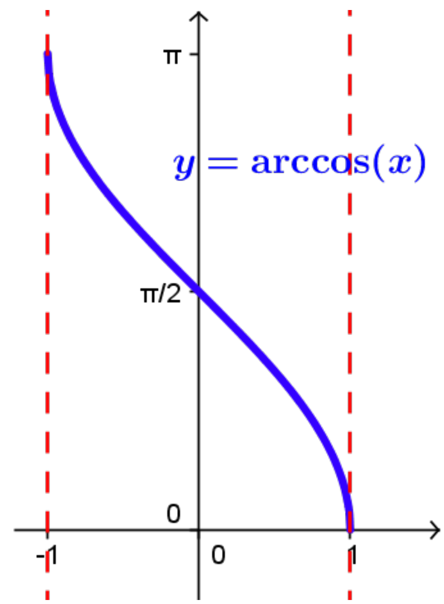


Figura 3.16: Función Arcoseno y Arcocoseno respectivamente

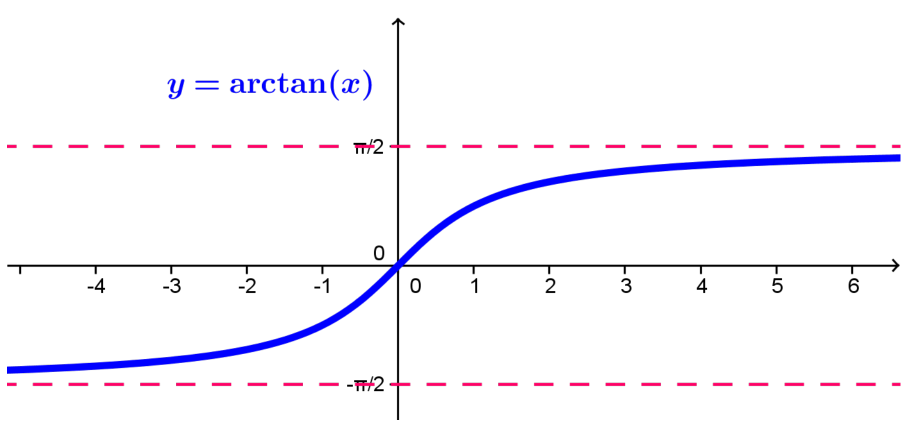
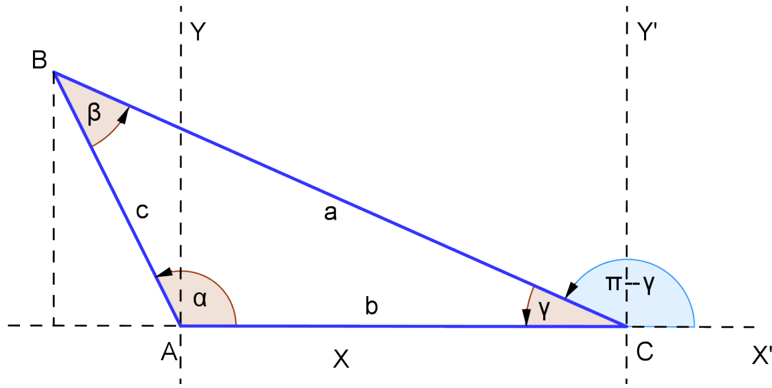


Figura 3.17: Función Arcotangente

3.9. Teorema del Seno y del Coseno

3.9.1. Teorema del Seno



– Consideremos un sistema de coordenadas XY en que el punto A coincide con el origen, luego el punto B tiene coordenadas $B = B(c \cdot \cos\alpha, c \cdot \operatorname{sen}\alpha)$.

– Consideremos el nuevo sistema de coordenadas $X'Y'$ (trasladado al punto C), sus ecuaciones de traslación son:

$$x' = x - b \qquad \text{e} \qquad y' = y$$

luego, el punto B tiene coordenadas $B(a \cdot \cos(\pi - \gamma), a \cdot \operatorname{sen}(\pi - \gamma))$.

Como en ambos sistemas la ordenada de B son iguales, se tiene que:

$$\begin{aligned} c \cdot \operatorname{sen}\alpha &= a \cdot \operatorname{sen}(\pi - \gamma) \\ c \cdot \operatorname{sen}\alpha &= a \cdot \operatorname{sen}(\gamma) \\ \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} &= \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} \end{aligned}$$

En forma análoga, escogiendo un sistema de coordenadas adecuado, se puede probar que:

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}$$

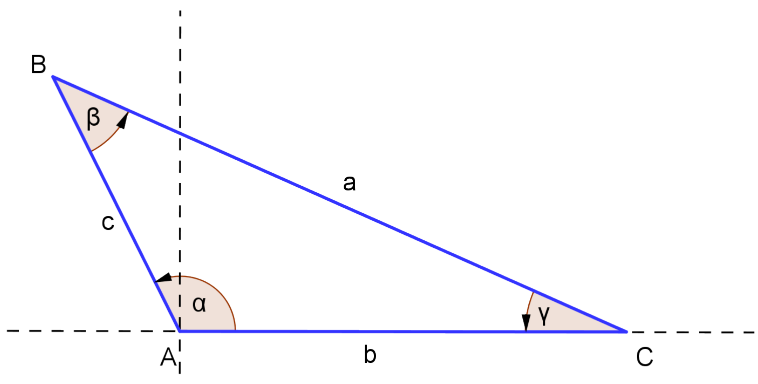
con lo que obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.12.

En todo triángulo de ángulos interiores α, β y γ, de lados opuestos a, b y c respectivamente se verifica que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \tag{3.37}$$

3.9.2. Teorema del Coseno



– Consideremos el triángulo en un sistema de coordenadas donde el vértice A coincide con el origen.

Luego las coordenadas del punto B y C son $B(c\cdot\cos\alpha, c\cdot\operatorname{sen}\alpha)$ y $C(b,0)$ respectivamente. Luego

$$\begin{aligned}
a &= d(B,C)\\
&= \sqrt{(c\cdot\cos\alpha - b)^2 + (c\cdot\operatorname{sen}\alpha - 0)^2}\\
&= \sqrt{c^2\cdot\cos^2\alpha - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha + b^2 + c^2\cdot\operatorname{sen}^2\alpha}\\
&= \sqrt{c^2(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) + b^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha}\\
&= \sqrt{c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha}
\end{aligned}$$

finalmente elevando al cuadrado, se tiene que:

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha$$

con lo que obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.13.

En todo triángulo de ángulos interiores α, β y γ, de lados opuestos a, b y c respectivamente se verifica que:

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha \tag{3.38}$$

Observación 3.15.

Notemos que el teorema del coseno es una generalización del **Teo. de Pitágoras**, pues si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, entonces el triángulo es rectángulo en A y se tiene:

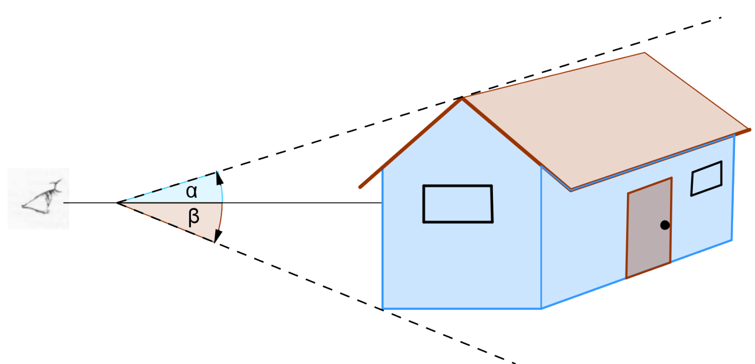
$$a^2 = b^2 + c^2$$

3.9.3. Convención en la lectura de los Ángulos

Convendremos en las siguientes definiciones:

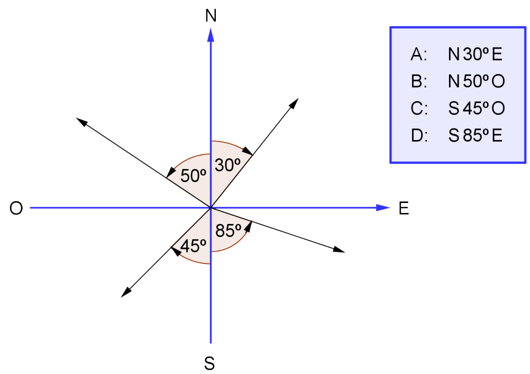
Definición 3.11.

Angulo de elevación (depresión) de un objeto ubicado sobre la horizontal (bajo la horizontal) es el ángulo formado por la horizontal y la línea de la vista dirigida hacia el objeto. En la figura α **es el ángulo de elevación** y β **el de depresión**.



Definición 3.12.

La ubicación de un punto A respecto a otro denotado por P esta dada por:



3.10. Funciones Senosoidales

Muchos objetos físicos vibran u oscilan de manera regular, moviendose repetidamente hacia atrás y hacia adelante, en un determinado intervalo de tiempo. Algunos ejemplos son los péndulos del reloj, las ondas del sonido, las cuerdas de una guitarra al ser punteadas, el corazón humano, las olas y la corriente alterna. Como todos los sonidos y, en particular, los tonos musicales son producidos por vibraciones, cualquier movimiento oscilatorio se llama **movimiento armónico**. El movimiento oscilatorio descrito por cualquiera de las funciones:

$$f(t) = a\,\text{sen}(bt + c) \text{ y } g(t) = a\cos(bt + c) \tag{3.39}$$

donde a, b, c son números reales, se llama **movimiento armónico simple**. Estas ecuaciones (3.39) son tambien lamadas funciones senosoidales. En esta sección estudiaremos las propiedades y gráficas de estas funciones. Empecemos considerando

$$y = a\,\text{sen}(t) \text{ y } g(t) = a\cos(t)$$

los cuales son casos especiales de (3.39) con $b = 1$ y $c = 0$. Por ejemplo, como se ve en la figura, obtenemos la gráfica de $y = 2\,\text{sen}(t)$ duplicando cada coordenada y en la gráfica de $y = \text{sen}(t)$. Nótese que los valores máximo y mínimo de $y = 2\,\text{sen}(t)$ ocurren para los mismos valores t como los valores mínimos y máximos de $y = \text{sen}(t)$,respectivamente. Sin embargo como vemos en la figura, esta situación se invierte para $y = -2\,\text{sen}(t)$; es decir, se da un valor mínimo cuando $y = -2\,\text{sen}(t)$ tiene un valor máximo y viceversa. También obserbamos que la gráfica de $y = -2\,\text{sen}(t)$ es la reflexión en el eje horizontal de la gráfica de $y = 2\,\text{sen}(t)$. En general, la gráfica de $y = a\,\mathrm{sen}(t)$ puede obtenerse multiplicando las coordenadas de y de la gráfica de $y = \mathrm{sen}(t)$ por el número a. Un procedimiento similar es válido para $y = a\cos(t)$.

(a) (b)

Figura 3.18:

Del análisis anterior se deduce que la distancia máxima desde cada punto de la gráfica de $y = a\,\mathrm{sen}(t)$ o $y = a\cos(t)$ al eje t es $|a|$. El número $|a|$ se llama **amplitud** de las funciones $f(t) = a\,\mathrm{sen}(t)$ y $g(t) = a\cos(t)$ o de sus gráficas.

Ejemplo 3.17.

Grafíque $y = 2\cos(t)$ y $y = \frac{1}{2}\cos(t)$ en los mismos ejes. Determine los valores mínimos y máximos para $0 \le t < 2\pi$.

Sol Las funciones dadas tienen una amplitud de 2 y $frac12$, respectivamente. Limitndo nuestra atención al intervalo $0 \le< 2\pi$, sabemos que el coseno alcanza su máximo en $t = 0$ y su mínimo en $t = \pi$. De esta manera:

$$y = 2\cos(0) = 2 \text{ y } y = 2\cos(\pi) = -2$$

son los valores máximos y mínimos de $y = 2\cos(t)$. Para $y = \frac{1}{2}\cos(t)$, encontramos que los valores máximos y mínimos son

$$y = \frac{1}{2}\cos(0) = 2 \text{ y } y = \frac{1}{2}\cos(\pi) = -2$$

Las gráficas se indican en los mismos ejes en la figura

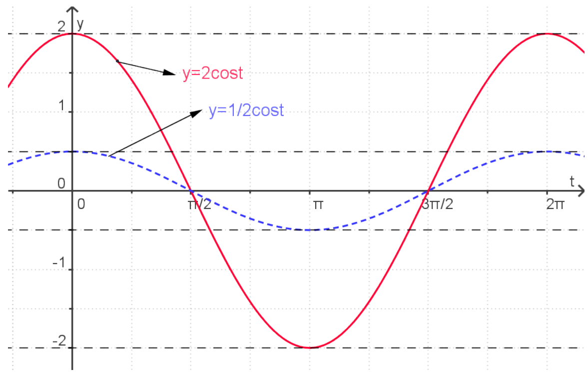


Figura 3.19:

Ahora consideraremos la gráfica de $y = \operatorname{sen}(bt)$. La gráfica tendrá una amplitud de 1 ya que $a = 1$. Recordemos que $y = \operatorname{sen}(t)$ tiene como periodo 2π. Así, comenzando en $t = 0$, $y = \operatorname{sen}(bt)$ repetirá sus valores comenzando en $bt = 2\pi$, o $t = \frac{2\pi}{b}$. Se deduce que $y = \operatorname{sen}(bt)$ tiene un **periodo**de $\frac{2\pi}{b}$; lo que significa que la gráfica se repitirá cada $\frac{2\pi}{b}$ unidades. Por esta razón decimos que la gráfica de $y = \operatorname{sen}(bt)$ en un intervalo de longitud $\frac{2\pi}{b}$ es un **ciclo** de la curva del seno. Por ejemplo, el periodo de $y = \operatorname{sen}(2t$ es $\frac{2\pi}{2} = \pi$ y, por tanto, se completa un ciclo de la gráfica en el intervalo $0 \leq t < \pi$. Obtenemos la gráfica de $y = \operatorname{sen}(2t)$ en el intervalo (en color) utilizando los datos de la tabla de la figura. La extensión de esta gráfica (en negro) se obtiene por periodicidad. Para comparar se muestra también la gráfica de $y = \operatorname{sen}(t)$.

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2t$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen$(2t$	0	1	0	-1	0

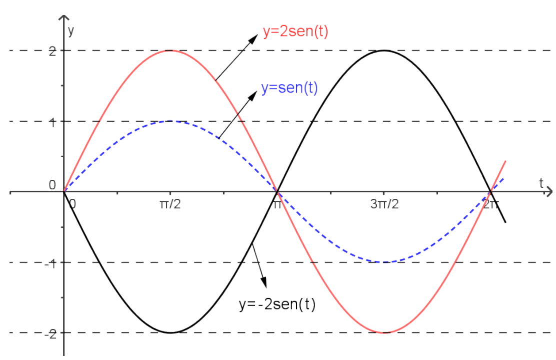


Figura 3.20:

Observación 3.16.

Los mismos argumentos son válidos para la función coseno, es decir, para $b > 0$, la función $g(t) = \cos(bt)$ tiene periodo $\frac{2\pi}{b}$ DEBO CAMBIAR FIGURA

3.11. Ecuaciones Trigonométricas

Definición 3.13 (Ecuaciones Trigonométricas)**.**

Una ecuación, donde intervienen funciones trigonométricas, como por ejemplo:

$$\operatorname{sen}(x) = 1$$

$$4\operatorname{sen}^2 x - 8\operatorname{sen} x + 3 = 0,$$

se llaman **ecuaciones trigonométricas**.

Observación 3.17.

Como las funciones trigonométricas, son periódicas y por tanto sus soluciones se pueden presentar en uno o en dos cuadrantes y además se "$r$epiten en todas las vueltas", normalmente este tipo de ecuaciones suelen ser condicionadas sus soluciones a un cierto intervalo o rango.

Observación 3.18.

Para resolver este tipo de ecuaciones haremos transformaciones necesarias para trabajar con una sola función trigonométrica, y para ello utilizaremos las identidades trigonométricas fundamentales.

Ejemplo 3.18.

Resolver la ecuación $\operatorname{sen}(x) = 1$.

Solución: Como $\operatorname{sen}(x) = 1 \Rightarrow x = \operatorname{arc\,sen}(1) \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$ y la función seno es periódica, de periodo 2π, se tiene que:

para $x = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} + 2\pi, \dfrac{\pi}{2} + 4\pi, \dfrac{\pi}{2} - 2\pi$, etc se cumple la ecuación,

por lo que la solución de esta ecuación es:

$$x = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo 3.19.

Resolver la ecuación trigonométrica:

$$2\tan x - 3\cot x - 1 = 0$$

Solución:

$$\begin{aligned} 2\tan x - 3\cot x - 1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2\tan x - \frac{3}{\tan x} - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \quad 2\tan^2 x - 3 - \tan x = 0 \\ &\Rightarrow \quad 2\tan^2 x - \tan x - 3 = 0 \end{aligned}$$

haciendo $u = \tan x$, tenemos la ecuación auxiliar:
$2u^2 - u - 3 = 0$, que se resuelve como sigue:

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} u_1 = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2} \\ u_2 = \frac{1-5}{4} = -1 \end{cases}$$

de donde, tenemos que:

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{3}{2} \Rightarrow x = \arctan(3/2) = 56,3° \quad (\text{ primer cuadrante}) \\ \tan x &= -1 \Rightarrow x = \arctan(-1) \Rightarrow x = 135° \quad (\text{ segundo cuadrante}) \end{aligned}$$

y como la función tangente es periódica de periodo π (180°), se tiene que las soluciones de esta ecuación son:

$$x = \begin{cases} 56,3° + k(180°) & , \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ 135° + k(180°) & , \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ejemplo 3.20 (Un problema con restricción)**.**

Resuelva la ecuación, para $x \in [0, 2\pi]$:

$$\cos^2 x - 3\,\mathrm{sen}^2 x = 0$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\cos^2 x - 3\operatorname{sen}^2 x = 0 &\Rightarrow (1-\operatorname{sen}^2 x) - 3\operatorname{sen}^2 x = 0\\
&\Rightarrow 1 - 4\operatorname{sen}^2 x = 0\\
&\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{4}\\
&\Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

de donde tenemos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &= \frac{1}{2} \Rightarrow x = \operatorname{arc\,sen}(1/2) \Rightarrow x = \begin{cases} 30^\circ + k(360^\circ) & ,\ \text{con } k \in \mathbb{Z} \\ 150^\circ + k(360^\circ) & ,\ \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}\\
\operatorname{sen} x &= -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \operatorname{arc\,sen}(-1/2) \Rightarrow x = \begin{cases} 210^\circ + k(360^\circ) & ,\ \text{con } k \in \mathbb{Z} \\ 330^\circ + k(360^\circ) & ,\ \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}
\end{aligned}$$

y como la solución es aceptada en el intervalo $[0, 2\pi]$, tenemos finalmente que las soluciones son:

$$x \in \{30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ\}$$

Capítulo 4

Números Complejos

Raíces Negativas o Complejas

El problema de los números irracionales no se resolvió por completo hasta el Siglo XVII, cuando Fermat, matemático francés que puede ser considerado el padre de la moderna teoría de números, demostró que expresiones como raíz cuadrada de 3 no eran números racionales.
Sólo quedaba por resolver el problema de las raíces negativas; y esto ocurrió en 1777, cuando Euler dio a la raíz cuadrada de -1 el nombre de i (imaginario). En 1799, Gauss acabó de resolver el problema al demostrar que las soluciones de cualquier ecuación algebraica, fuera cual fuese su grado, pertenecía a un conjunto de números que él llamó complejos, a los que consideró compuestos de un número "ordinario" (hoy lo llamamos número real), más un múltiplo de la raíz cuadrada de -1, llamado unidad imaginaria.
Los números complejos fueron ampliamente utilizados en el siglo XVIII. Leibniz y Johan Bernoulli (Suiza, 1667-1748) usaron números imaginarios en la resolución de integrales.
Este tipo de razonamientos generaron la polémica sobre la existencia del logaritmo de números negativos y complejos.
Un acalorado debate tuvieron Bernoulli y Leibniz donde este último postuló que $\ln i = 0$. Su Argumento fue algo como esto, dado que:

$$2\ln(-1) = \ln(-1)^2 = \ln 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(-1) = 0$$

entonces,

$$2\ln i = \ln i^2 = \ln(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln i = 0$$

Bernoulli proponía por contra, $\ln i = \dfrac{i\pi}{2}$.
La controversia fue resuelta por Leonhard Euler (Suiza 1707-1783) con su identidad

$$e^{\pi i} = -1.$$

Definición 4.1.

Consideremos sobre $\mathbb{R}^2$ las operaciones de Adición y Multiplicación como sigue:

- **Suma:** $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$
- **Produc.:** $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$

Definición 4.2.

Denotaremos por $\mathbb{C}$ al conjunto $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ y se llama *El sistema de los Números Complejos.*

Propoción 4.1.

$\mathbb{C}$ es un cuerpo, es decir la suma y multiplicación definidas anteriormente satisfacen:

S1: $+$ es asociativa.

S2: $+$ es conmutativa.

S3: Existe neutro para la suma: $(0,0)$.

S4: Existe inverso aditivo: $\forall(a,b)$, existe $(-a,-b)$.

M1: $\cdot$ es asociativa.

M2: $\cdot$ es conmutativa.

M3: Existe neutro multiplicativo: $(1,0)$.

M4: Todo número complejo distinto de $(0,0)$ es invertible con respecto a la multiplicación: $\forall(a,b)\neq(0,0)$ existe existe$\left(\dfrac{a}{a^2+b^2},\dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

D: La multiplicación es distributiva con respecto a la adición: Si $z_1=(a,b), z_2=(c,d), z_3=(e,f)$ entonces, $z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$.

Observación 4.1.

Sea $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ entonces

a: Se llama parte real de z, y denotamos $a = Re(z)$

b: Se llama parte imaginaria de z, y denotamos $b = Im(z)$

Observación 4.2.

Dado un complejo $z = (a, b)$, se tiene que:

$b = 0$ entonces z se dice *complejo o real*.

$a = 0$ entonces z se dice *imaginario puro*.

$(0, 1)$ Corresponde a la unidad Imaginaria y se denota por i, esto es, $(0, 1) = i$.

Observación 4.3.

Notemos que:

- $i^2 = -1$
- $i^3 = -i$
- $i^4 = 1$

4.1. Notación Binomial de un Complejo

Todo número complejo (a, b) puede escribirse de la siguiente manera:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1)$$

como $(a, 0) = a, \quad (b, 0) = b$ y $(0, 1) = i$, resulta su *Forma Binomial*

$$(a, b) = a + bi$$

Observación 4.4.

Dados los complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$ en su forma binomial.

- $z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- $z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- $\dfrac{z}{w} = \dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}$

4.2. Conjugado de un Complejo

Definición 4.3.

Se llama conjugado de un número complejo $z = a + bi$ al número complejo denotado por:

$$\bar{z} = a - bi$$

Propiedades 1.

Dados los complejos $z, w \in \mathbb{C}$:

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $z \bar{\pm} w = \bar{z} \pm \bar{w}$
- $barz \cdot w = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- $z + \bar{z} = 2Re(z), \qquad z - \bar{z} = 2Im(z)$
- $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- $\bar{z} = -z \Leftrightarrow z \in \mathbb{C}$

4.3. Módulo de un Complejo

Definición 4.4.

Se llama Módulo del número complejo $z = a + bi$, al número real mayor o igual a cero definido por:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observación 4.5.

Notar que:

- $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
- $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

Propiedades 2.

Dados los complejos $z, w \in \mathbb{C}$, se tiene:

- $|z| \geq 0; \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}, w \neq 0$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$
- $||z| - |w|| \leq |z - w|$

4.4. Forma Polar de un Número Complejo

Sea $z = a + bi = (a, b)$ un complejo. Su representacion en el plano Complejo, donde el punto $P(a, b)$ se llama AFIJO del complejo, queda como:

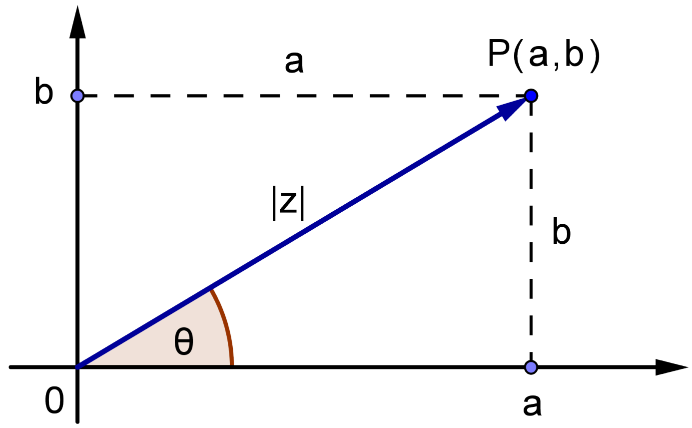


Figura 4.1: Forma Polar de un Complejo

Definición 4.5.

Se llama argumento del número complejo z al ángulo formado por el semi eje positivo del eje x y la semi recta $\vec{OP}$ medido en sentido positivo (anti horario).

$$arg(z) = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{R}$$

Definición 4.6.

Se llama valor principal (θ) del argumento al comprendido entre 0 y 2π; $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Observación 4.6.

Las coordenadas cartesianas y polares de un punto P están ligadas por las expresiones:

1. $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$
2. $\tan(\theta) = \dfrac{a}{b}$
3. $a = r\cos(\theta), b = \sin(\theta)$

Luego z se puede escribir:

$$z = a + bi = r \cdot cos(\theta) + ir \cdot sin(\theta)$$

Observación 4.7.

Una notación cómoda y usual es:

$$z = r \cdot cis(\theta)$$

Observación 4.8.

Notar que en esta expresión puede figurar cualquier valor del argumento de z y que $r = |z|$, luego:
La Forma polar o Trigonométrica del Complejo z es:

$$z = |z|cis(\theta + 2k\pi) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Observación 4.9.

El argumento del número complejo cero no está definido.

Ejemplo 4.1.

Representar en forma polar los complejos $z_1 = 1 - i, z_2 = -2$.

Sol

1. $|z_1| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \tan(\theta) = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$.

   $z_1 = 2cis(\pi)$

2. $|z_2| = 2, \tan(\theta) = \frac{0}{-2} = 0 \Rightarrow \theta = \pi$.

   $z_2 = 2cis(\pi)$.

Ejemplo 4.2.

Recíprocamente, escribir en forma binomial el complejo
$z = 4cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Sol $z = 4cis(\frac{2\pi}{3}) = 4(cos(\frac{2\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{2\pi}{3})) = 4(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) = (-2 + i \cdot 2\sqrt{3})$

4.4.1. Producto y Cociente de Números Complejos en Forma Polar.

Teorema 4.1.

Sean $z = |z|cis(\theta), w = |w|cis(\alpha)$ dos complejos no nulos:

- $z \cdot w = |z| \cdot |w|cis(\theta + \alpha)$
- $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}cis(\theta - \alpha)$

Ejemplo 4.3.

Dados los complejos $z_1 = 2cis(\frac{2\pi}{3}$ y $z_2 = 5cis(\frac{7\pi}{6})$, calcular $z_1 \cdot z_2$ y $\frac{z_1}{z_2}$.

Sol

1. $z_1 \cdot z_2 = (2 \cdot 5)cis(\frac{2\pi}{3} + \frac{7\pi}{6}) = 10cis(\frac{11\pi}{6}) = 10(\sqrt{3} * i \cdot \frac{1}{2}) = 10\sqrt{3} - 5i$
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{10}cis(\frac{2\pi}{3} - \frac{7\pi}{6}) = \frac{1}{5}cis(-\frac{3\pi}{6}) = \frac{1}{5}(0 - i) = -\frac{i}{5}$

Observación 4.10.

bf Notemos que si $z = |z|cis(\theta)$ es no nulo, su inverso es:

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|}cis(-\theta)$$

4.5. Potencias y Raíces de un Complejo

4.5.1. Potencias de Exponente Entero de un Complejo

Para $n \in \mathbb{N}$, definimos por inducción

Teorema 4.2 (Teorema de Moivre)**.**

Sea $z = |z|cis(\theta) \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$z^n = |z|^n cis(n\theta)$$

Ejemplo 4.4.

Dado $z = (-1, -i)$, Calcular z^{20}.

Sol Se tiene que:

$$\begin{aligned} |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}; \quad \tan(\theta) = \tfrac{-1}{-1} = 1 \quad &\Rightarrow \quad \theta = \arctan(1) = \tfrac{5\pi}{4} \\ &\Rightarrow \quad \arg(z) = \tfrac{5\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z = |z|cis(\theta) = \sqrt{2}cis\left(\tfrac{5\pi}{4}\right) \Rightarrow z^{20} &= |z|^{20}cis(20\theta) = 2^{10}cis(25\pi) \\ &= 2^{10}cis(\pi) = -2^{10} \end{aligned}$$

4.5.2. Raíces de un Complejo

El teorema de Moivre se puede extender para la raiz n-ésima.

Teorema 4.3.

Sea $z = |z|cis(\theta) \in \mathbb{C}$ entonces:

$$\sqrt[n]{z} = |z|^{1/n}cis\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = \overline{0, n-1}$$

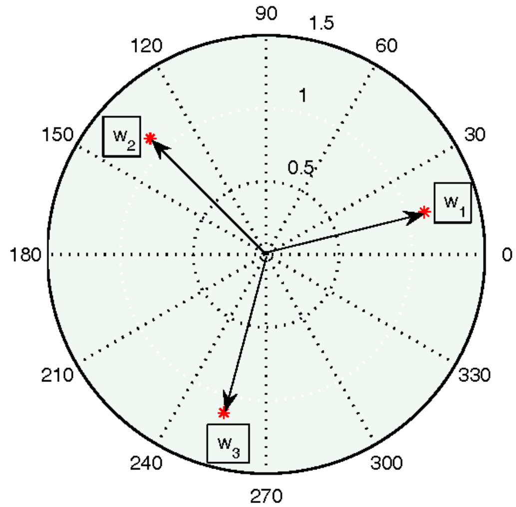
Ejemplo 4.5.

Dado $z = 1 + i$, Hallar $w \in \mathbb{C}$, tal que $w^3 = z$.

Sol Se tiene que: $w^3 = z \Rightarrow w = z^{1/3}$. Luego:

$$z = |z|cis(\theta) \Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \arg(z) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$w = |z|^{1/3}cis\left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{3}\right), k = \overline{0, 2}$$



De donde se tiene:

$w_1 = \sqrt[6]{2}cis\left(\frac{\pi}{12}\right)$
$w_2 = \sqrt[6]{2}cis\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right)$
$w_3 = \sqrt[6]{2}cis\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right)$

Capítulo 5

Polinomios

Un enfoque distinto

Una gran fuente de aprendizaje para las personas que trabajamos en Recursos Humanos son generalmente las entrevistas de selección. Fruto de una entrevista con un excelente candidato para una posición de Gerente de Trade Marketing conocí un enfoque de la motivación laboral que podríamos llamar la teoría del polinomio. El candidato me explicó cuales eran los motivos para cambiar de su empresa actual a la nuestra. Su motivación para trabajar estaba compuesta por distintos factores , los cuales a su vez tenían distinto peso (importancia) relativo, y la suma de estos factores generaban su motivación para trabajar. *Como un polinomio* me dijo el candidato.

Es importante comprender cosas motivan a las personas, y además en que grado los factores afectan esa motivación de acuerdo a la situación particular de un individuo. También es primordial entender que las personas no se motivan por un solo factor. Estudios arroja factore como los siguientes elementos:

- El dinero(**D**)
- El poder que les da la posición(**PP**)
- Su jefe(**J**)
- El horario (**H**)
- Lugar que trabajan(**LT**)
- El ambiente de trabajo(**AT**)
- Sus pares(**SP**)
- Etc.

Una manera sencilla de exponer estos factores es a través de un polinomio en el cual ubicamos los elementos que motivan a una persona con la incidencia de cada factor de acuerdo a la persona que analizamos.

MOTIVACIÓN DE JUAN = (0.50 x **J**) + (0.20 x **D**) + (0.15 x **AT**) + (0.10 x **H**) + (0.05 x **PP**).

En el caso de Juan su mayor motivación para trabajar proviene de su Jefe, luego del sueldo y luego los otros factores.

La teoría del polinomio nos da una visión de cómo interactúan y cambian los distintos factores de motivación de acuerdo a la persona que analizamos y del momento en que la analizamos.

5.1. Expresiones Algebraicas

Definición 5.1.

Llamamos *variable* a una letra o símbolo que representa cualquier elemento de un conjunto determinado. Llamamos *constante* a un elemento fijo del conjunto considerado. Si tal conjunto es el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, las variables y constantes representan números reales.

Observación 5.1.

Usualmente representamos las variables por las últimas letras del alfabeto, x, y, z, w. En algunos casos representamos las constantes por las primeras letras del alfabeto, a, b, c, d, es decir, los símbolos a, b, c, d representan elementos fijos pero arbitrarios del conjunto considerado.

Ejemplo 5.1.

1. En la expresión $\quad 2x^2 + 4x - 7$

   la letra x es una variable y los números $2, 4$ y 7 son constantes.

2. En la expresión $\quad ax + b$

   x es una variable, a y b son constantes.

Definición 5.2 (expresione algebraica)**.**

Llamamos *expresione algebraica* a las constantes, las variables o las combinaciones de constantes y variables; mediante las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, elevación a potencias y extracción de raíces.

Ejemplo 5.2.

Las siguientes son algunas expresiones algebraicas:

$$5, \quad x^3, \quad 3ay^2, \quad (6xy - 2y)5x^2, \quad -3x^2y + 7x + 2y - 8,$$

$$\frac{2x+3}{x^2-5x-6}, \quad (2z^{-5} - 3z^{-1})^{\frac{3}{5}}, \quad \frac{\sqrt{x+2y}}{x - \sqrt[3]{3x}}$$

Definición 5.3 (Término Algebraico)**.**

Un término algebraico es el producto de una o más variables y una constante literal o numérica

Ejemplo 5.3.

$3x2y \quad ; \quad 45 \quad ; \quad m$

Observación 5.2.

En todo término algebraico podemos distinguir: **Signo**, **coeficiente numérico** y **factor literal**.

$$-23x^2y$$

$$\boxed{\text{-}}\boxed{23}\boxed{x^2y}$$

$$\swarrow \qquad \downarrow \qquad \searrow$$

signo | coeficiente numérico | factor literal

Observación 5.3.

En una expresión algebraica, cada una de las partes separadas por medio de una suma o de una resta se llama un *término*.

Ejemplo 5.4.

En la expresión

$$5x^2y - \frac{2x+1}{3y-5} + \sqrt{xy-6} + 7$$

los términos son $5x^2y \quad , \quad \dfrac{2x+1}{3y-5} \quad , \quad \sqrt{xy-6} \quad$ y $\quad 7$.

Observación 5.4.

Notemos que expresiones tales como $\dfrac{2x+1}{3y-5}$ (cuocientes) y $\sqrt{xy-6}$ (funciones con su argumento), se consideran como un solo término.

Definición 5.4.

Si una expresión algebraica consiste de:

1. un solo término, la llamamos un *monomio*,
2. si consiste de dos términos la llamamos un *binomio*,
3. si consiste de tres términos la llamamos un *trinomio*, y así sucesivamente.

Definición 5.5 (Términos Semejantes)**.**

Se denominan *términos semejantes* de una expresión algebraica todos aquellos términos que tienen igual factor literal.

Ejemplo 5.5.

Sumar cuando corresponda las siguientes expresiones algebraicas:

$$3x^2y - xy^2 - 5xy + 6x^2 \qquad ; \qquad xy - 3xy^2 - 3x^2y \qquad ; \qquad 2xy^2 + xy - x^2$$

Solución: : Identificando los términos semejantes de cada expresion algebraica, se tiene:

$$\begin{aligned} (3x^2y - 3x^2y) + (-xy^2 - 3xy^2 + 2xy^2) &+ (-5xy + xy + xy) + (6x^2 - x^2) \\ &= (0x^2y) + (-2xy^2) + (-3xy) + (5x^2) \\ &= 5x^2 - 2xy^2 - 3xy \end{aligned}$$

Vamos ahora a enfocar nuestra atención sobre algunas de las operaciones que se utilizan en las expresiones algebraicas.

5.1.1. Evaluación y Factorización

Observación 5.5 (Evaluación de expresiones Algebraicas)**.**

En una expresión algebraica, asumimos que las *Variables* representan números reales y que la expresión representa en sí un número real. Esto último puede imponer condiciones sobre los valores que pueden tomar las variables (dominio de evaluación).

Ejemplo 5.6.

Dada la expresión: $4x^6 - 3x^3 + 6x^2 - 3$
Evaluar para $x = -1$

Solución: $4x^6 - 3x^3 + 6x^2 - 3\Big|_{x=-1} = 4(-1)^6 - 3(-1)^3 + 6(-1)^2 - 3 = 4 + 3 + 6 - 3 = 10$

Observación 5.6.

Notemos que la expresión algebraica anterior, se puede evaluar *en todo* $\mathbb{R}$, esto es,

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 5.7.

dada la expresión: $3y^5 + 2y^3 + \frac{9}{y}$
Evaluar para $y = 1$

Solución: $3y^5 + 2y^3 + \dfrac{9}{y}\Big|_{y=1} = 3(1)^5 + 2(1)^3 + \dfrac{9}{1} = 3 + 2 + 9 = 14$

Observación 5.7.

Notemos que en este caso la expresión puede ser evaluada para todo valor de y distinto de cero, esto es,

$$\forall y \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Los problemas que se plantean acerca de las expresiones algebraicas se refieren a llegar rápidamente al resultado de operarlas, particularmente de multiplicarlas y de escribirlas mediante una expresión equivalente como producto de otras (factorización) para así facilitar su evaluación, simplificación, etc.

Para ello, conviene tener en cuenta estas identidades o los llamados *Productos notables*:

Resumen 7.

1. $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)(x+y) = (x+y)^2$
2. $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)(x-y) = (x-y)^2$
3. $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$
4. $x^2 - (a+b)x + ab = (x-a)(x-b)$
5. $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$
6. $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

   $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1})$ si n es impar

   $x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} - y^{n-1})$ si n es par

5.2. Polinomios

Estudiaremos más detalladamente las expresiones algebraicas llamadas polinomios.

Definición 5.6 (Polinomios)**.**

Un polinomio en x con coeficientes reales es una expresión algebraica de la forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, \cdots, a_n$ son números reales y n es un número entero no negativo

NOTACIÓN : $P_n(x)$

Definición 5.7.

El grado de un polinomio es el mayor exponente n de x tal que $a_n \neq 0$ y a_n es su coeficiente principal.

Ejemplo 5.8.

Los polinomios siguientes:

- $3 + 12x^3 + \frac{25}{4}x^7 - 36x^9$. Su grado es 9 y su coeficiente principal es -36.
- $-\frac{1}{5} + \frac{\sqrt{3}}{2}x + x^2$. Su grado es 2 y su coeficiente principal es 1.
- $-1 + 1,5x^2 + 0,75x^7 - 1,25x^7$. Su grado es 7 y su coeficiente principal es $-1,25$.
- $\pi - 4 + \sqrt{2}x$. Su grado es 1 y su coeficiente principal es $\sqrt{2}$.

Observación 5.8.

Si no se hace necesario explicitarlo, el polinomio puede representarse en la forma $p(x)$.

Definición 5.8.

El conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales y en la variable x, es denotado por $\mathbb{R}[x]$.

Observación 5.9.

1. Todas las expresiones de la forma $b + ax$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, son polinomios de grado 1.
2. Todas las constantes distintas de cero son los polinomios de grado 0.
3. El 0 es también un polinomio constante, pero no se le atribuye grado.

Observación 5.10.

No son polinomios los siguientes:

1. $3 + 4x^2 + 6x^{-3}$ pues el exponente de x en el tercer sumando es un entero negativo.

2. $4 + 2\sqrt{x} + x + 3x^3$ pues el exponente de x en el segundo sumando es positivo pero fraccionario.

3. $\dfrac{7x + 12x^5 - 6x^{10}}{6 + 12x^3}$ no es un polinomio, es un cociente de polinomios llamado *fracción racional*.

Definición 5.9 (Igualdad de Polinomios)**.**

Dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, son iguales si tienen el mismo grado y para cada potencia de x el coeficiente en un polinomio es igual al coeficiente en el otro. Esto es:
Si $p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$ y $q(x) = b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}+b_nx^n$, entonces

$$p(x) = q(x) \Leftrightarrow \{a_0 = b_0; a_1 = b_1; a_2 = b_2; \cdots; a_n = b_n\}$$

Ejemplo 5.9.

1. Los polinomios $p(x) = -1 + 3x^2 - 4x^5 + 9x^7$ y $q(x) = -1 + 3x^2 - 4x^6 + 9x^7$ no son iguales a pesar de tener los mismos coeficientes, pues el coeficiente -4 en $p(x)$ corresponde a la potencia de x^5 y en $q(x)$ corresponde a la potencia de x^6.

2. Los polinomios $p(x) = 4x + 6x^2 + 12x^3$ y $q(x) = 4x + 12x^3 + 6x^2$ son iguales,sólo que no están ordenados.

3. Los polinomios $p(x) = -1 - 3x + 2x^3 - x^5$ y $q(x) = 1 - 3x + 2x^3 - x^5$ no pueden ser iguales porque los términos independientes son distintos: en el primero es -1 y en el segundo es 1.

5.2.1. Suma y Resta de Polinomios

El procedimiento para sumar y restar polinomios esta basado directamente en las propiedades asociativas y conmutativas de la adición y multiplicación de *términos semejantes*, y en la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición. Básicamente lo que se hace es agrupar y reducir los términos semejantes.

Ejemplo 5.10.

Efectuar la siguiente suma:

$$(4x^3 - 2x^2 + 2x + 7) + (6x - 5 + 3x^2 + x^3)$$

Solución: : Primero utilizamos las propiedades conmutativa y asociativa para agrupar los términos semejantes, obteniendo

$$(4x^3 + x^3) + (-2x^2 + 3x^2) + (2x + 6x) + (7 - 5)$$

luego, aplicamos reducción de los términos semejantes, obteniendo como resultado final

$$5x^3 + x^2 + 8x + 2$$

Observación 5.11.

Si tenemos en cuenta la definición de resta, el problema de restar dos polinomios se transforma en el problema de sumar dos polinomios, donde al sustraendo se hacemos cambio de signo en sus términos.

Ejemplo 5.11.

Efectuemos la siguiente resta de polinomios

$$(5x^2 + 3x - 3) - (2x^2 - 4x + 1)$$

Solución: La resta anterior se convierte en la suma

$$(5x^2 + 3x - 3) + (-2x^2 + 4x - 1)$$

que es igual a

$$3x^2 + 7x - 4$$

5.2.2. Multiplicación de Polinomios

La multiplicación de polinomios esta basada en la aplicación repetida de la propiedad distributiva, asociativa y conmutativa.

Ejemplo 5.12.

Multiplique los sigyientes polinomios:

$$(2x^3 - x^2 + x - 1) \cdot (x^2 + 2x - 3)$$

Solución: :

$$\begin{aligned}
(2x^3 - x^2 - 1) \cdot (x^2 + 2x - 3) &= (2x^3)(x^2) + (2x^3)(2x) - (2x^3)(3) - (x^2)(x^2) - (x^2)(2x) \\
&\quad +(x^2)(3) - (1)(x^2) - (1)(2x) + (1)(3) \\
&= 2x^5 + 4x^4 - 6x^3 - x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x^2 - 2x + 3 \\
&= 2x^5 + 3x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 2x + 3
\end{aligned}$$

Observación 5.12.

Otra manera de efectuar la multiplicación de dos polinomios es logrando inmediatamente el orden de factores comunes, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.13.

Efectuemos el siguiente producto de polinomios

$$(2x^3 - 3x^2 + x - 7)(x^4 - 6x^2 + 1)$$

Solución: Tenemos

$$\begin{array}{cccccccc}
2x^3 & -3x^2 & +x & -7 & & & & \\
x^4 & -6x^2 & +1 & & & & & \\
\hline
2x^7 & -3x^6 & +x^5 & -7x^4 & & & & \\
 & & -12x^5 & +18x^4 & -6x^3 & +42x^2 & & \\
 & & & & +2x^3 & -3x^2 & +x & -7 \\
\hline
2x^7 & -3x^6 & -11x^5 & +11x^4 & -4x^3 & +39x^2 & +x & -7
\end{array}$$

Propiedades 1.

Sean $P_n(x), P_m(x), P_r(x)$ polinomios en la variable x, de grados n, m y r respectivamente. Entonces podemos sumar, restar, multiplicar polinomios, y además:

1. $P_n(x) + P_m(x) = P_m(x) + P_n(x)$
2. $[P_n(x) + P_m(x)] + P_r(x) = P_m(x) + [P_n(x) + P_r(x)]$
3. $P_n(x) \cdot P_m(x) = P_m(x) \cdot P_n(x)$
4. $[P_n(x) \cdot P_m(x)] \cdot P_r(x) = P_m(x) \cdot [P_n(x) \cdot P_r(x)]$
5. $P_n(x) \cdot [P_m(x) + P_r(x)] = P_n(x) \cdot P_m(x) + P_n(x) \cdot P_r(x)$

5.2.3. División de Polinomios

En cuanto a la división tenemos el *Principio de la División Euclidiana* de acuerdo con el cuál, dados dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ con $q(x) \neq 0$, al dividir $p(x)$ por $q(x)$ se obtienen dos polinomios: un **cociente** $c(x)$ y un **residuo** $r(x)$ tales que

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x) \tag{5.1}$$

Observación 5.13.

Los polinomios $c(x)$ y $r(x)$ son únicos, donde $r(x)$ puede ser nulo dependiente del grado de $q(x)$. Estos polinomios se obtienen mediante el proceso llamado *división larga*.

Ejemplo 5.14.

Consideremos por ejemplo, $p(x) = 4 + 3x - 2x^2 + 3x^3 + 6x^4$ y $q(x) = 1 + x + 4x^2$ y calculemos $\dfrac{p(x)}{q(x)}$

Solución:

$$\begin{array}{rrrrrl}
6x^4 & +3x^3 & -2x^2 & +3x & +4 & = \left(4x^2+x+1\right)\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{8}x-\frac{31}{32}\right)+\frac{115}{32}x+\frac{159}{32} \\
-6x^4 & -\frac{3}{2}x^3 & -\frac{3}{2}x^2 & & & \\
\hline
 & \frac{3}{2}x^3 & -\frac{7}{2}x^2 & +3x & & \\
 & -\frac{3}{2}x^3 & -\frac{3}{8}x^2 & -\frac{3}{8}x & & \\
\hline
 & & -\frac{31}{8}x^2 & +\frac{21}{8}x & +4 & \\
 & & \frac{31}{8}x^2 & +\frac{31}{32}x & +\frac{31}{32} & \\
\hline
 & & & \frac{115}{32}x & +\frac{159}{32} &
\end{array}$$

de donde el cociente es:

$$c(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{31}{32}$$

y el residuo es:

$$r(x) = \frac{115}{32}x + \frac{159}{32}$$

Observación 5.14.

Notemos que el escribir en forma ordenada (decreciente) los polinomios, facilita sus cálculos intermedios.

Ejemplo 5.15.

Veamos otro caso: Calcular $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, cuando $p(x) = x^2 + x + 1$ y $q(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$

Solución: Notemos que como el grado de $p(x)$ es menor al grado de $q(x)$, $p(x)$ no es divisible por $q(x)$, es decir, en esta división el cociente es el polinomio 0 y el residuo es el polinomio $p(x)$. Así, se obtiene que

$$x^2 + x + 1 = 0 \cdot (2x^3 - x^2 + x - 1) + x^2 + x + 1$$

Observación 5.15.

Este último ejemplo, nos dice que si grado de $p(x)$ es menor al grado de $q(x)$ la expresión dada por (5.1) queda escrita como:

$$p(x) = 0 \cdot q(x) + p(x)$$

Ejemplo 5.16.

Calcular $(5x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x + 2) : (x - 2)$

Solución:

$$
\begin{array}{rrrrrl}
5x^4 & +3x^3 & -x^2 & +3x & +2 & = (x-2)\left(5x^3+13x^2+25x+53\right)+108 \\
-5x^4 & +10x^3 & & & & \\
\hline
 & 13x^3 & -x^2 & & & \\
 & -13x^3 & +26x^2 & & & \\
\hline
 & & 25x^2 & +3x & & \\
 & & -25x^2 & +50x & & \\
\hline
 & & & 53x & +2 & \\
 & & & -53x & +106 & \\
\hline
 & & & & 108 &
\end{array}
$$

Así, el cociente es

$$c(x) = 5x^3 + 13x^2 + 25x + 53$$

y el residuo es

$$r(x) = 108$$

Observación 5.16 (Algoritmo de división).

También en este caso podemos hacer un análisis más general.
Al dividir un polinomio $p(x)$ de grado n por uno de grado 1 de la forma $x - d$, se obtiene un cociente cuyo grado es $n - 1$ y un residuo que es 0 o un polinomio de grado 0, es decir, una constante. Esto es:
Si

$$
\begin{aligned}
p(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \\
q(x) &= (x - d)
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
c(x) &= b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_0 \qquad \text{y} \\
r(x) &= k
\end{aligned}
$$

Es decir, $p(x)$ se puede escribir como:

$$p(x) = (x - d) \cdot c(x) + k$$

De donde haciendo los calculos obtenemos las siguientes igualdades:

$$
\begin{aligned}
a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 &= (x - d)(b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0) + k \\
&= b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - db_{n-1})x^{n-1} \\
&\quad + (b_{n-3} - db_{n-2})x^{n-2} + \cdots \\
&\quad + (b_0 - db_1)x + (k - db_0)
\end{aligned}
$$

que por igualdad de polinomios, se concluye que:

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1} \\ a_{n-1} &= b_{n-2} - d \cdot b_{n-1} \\ a_{n-2} &= b_{n-3} - d \cdot b_{n-2} \\ a_1 &= b_0 - d \cdot b_1 \\ a_0 &= k - d \cdot b_0 \end{aligned}$$

y como nos interesa encontrar el cociente $c(x)$:

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n + d \cdot 0 \\ b_{n-2} &= a_{n-1} + d \cdot b_{n-1} \\ b_{n-3} &= a_{n-2} + d \cdot b_{n-2} \\ &\vdots \\ b_0 &= a_1 + d \cdot b_1 \\ k &= a_0 + d \cdot b_0 \end{aligned}$$

Así, tomando una fila formada por todos los coeficientes de $p(x)$ en orden a_n ; a_{n-1} ; … ; a_0 y en una segunda fila los sumando 0 ; $d \cdot b_{n-1}$; ⋯; $d \cdot b_0$ y por última fila la suma, se obtienen en orden los coeficientes del cociente y el residuo.

Definición 5.10.

El algoritmo que sinplifica la división de un polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ por un polinomio $q(x) = (x - d)$, es conocido por *Algoritmo de División Sintética*, y tiene la siguiente forma:

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \text{d} & 0 & d \cdot b_{n-1} & d \cdot b_{n-2} & \cdots & d \cdot b_1 & d \cdot b_0 \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & k \end{array}$$

Ejemplo 5.17.

Dividir el polinomio $x^3 - 7x + 6$ por $x - 1$, usando la división sintética.

Solución: Siguiendo el algoritmo paso a paso, tendríamos:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & & & & \\ \hline & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & & 1 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & & 1 & & \\ \hline & 1 & 1 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & & 1 & 1 & \\ \hline & 1 & 1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & & 1 & 1 & \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Donde el cociente es $c(x) = x^2 + x - 6$
y el resto es $r(x) = 0$

Ejemplo 5.18.

Otener el cociente de dividir $7x^5 + 4x^3 + 3x^2 - x - 6$ por $x + 1$

Solución: Teniendo en cuenta que $x + 1 = x - (-1)$ procedemos así:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 7 & 0 & 4 & 3 & -1 & -6 \\ -1 & & -7 & 7 & -11 & 8 & -7 \\ \hline & 7 & -7 & 11 & -8 & 7 & -13 \end{array}$$

El cociente es entonces $c(x) = 7x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 8x + 7$
y el residuo es $r(x) = -13$.

Observación 5.17.

Dado que $p(x)$ se puede escribir como:

$$p(x) = (x - d) \cdot c(x) + k$$

Entonces, al evaluar $p(x)$ en d (es decir, al reemplazar x por d en el polinomio), obtenemos:

$$p(d) = (d - d) \cdot c(d) + k = 0 + k = k$$

Así hemos mostrado el siguiente teorema.

Teorema 5.1 (Teorema de Residuo)**.**

El *Residuo* o *Resto* de dividir un polinomio $p(x)$ por el polinomio $x - d$ es $p(d)$.

Ejemplo 5.19.

Al evaluar el polinomio

$$p(x) = 2 + 3x - x^2 + 3x^3 + 5x^4 \quad \text{en} \quad x = 2$$

obtenemos

$$p(2) = 2 + 3 \cdot (2) - (2)^2 + 3 \cdot (2)^3 + 5 \cdot (2)^4 = 108$$

y este valor, corresponde al residuo de dividir $p(x)$ por $x - 2$, ya que al hacer la división sintética se obtiene:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 5 & 3 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & & 10 & 26 & 50 & 106 \\ \hline & 5 & 13 & 25 & 53 & 108 \end{array}$$

Ejemplo 5.20.

Calcule el valor de $P(-1)$, cuando $p(x) = -6 - x + 3x^2 + 4x^3 + 7x^5$

Solución: Usando el teorema del resto, podemos encontrar el valor de $p(-1)$, haciendo la división de $p(x)$ por el factor $(x + 1)$. Esto es:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 7 & 0 & 4 & 3 & -1 & -6 \\ -1 & & -7 & 7 & -11 & 8 & -7 \\ \hline & 7 & -7 & 11 & -8 & 7 & -13 \end{array}$$

con lo que obtenemos que $p(-1) = -13$

Observación 5.18.

Ahora bién si consideramos el caso particular en que el residuo de dividir $p(x)$ por $(x-d)$ es cero, es decir, $p(d) = 0$ se tiene que:

$$p(x) = (x-d)\cdot c(x) + 0$$

con lo que tenemos, el siguiente teorema.

Teorema 5.2 (Teorema del Factor)**.**

El polinomio $x-d$ es factor del polinomio $p(x)$ si y solo si $p(d) = 0$.

5.2.4. Raíces o Ceros de Polinomios

Definición 5.11 (Ecuaciones Algebraicas)**.**

LLamaremos ecuación algebraica de grado n a la ecuación que tiene la forma:

$$P_n(x) = 0$$

donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n.

Definición 5.12.

Una *Raíz* o *Cero* de un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ es un número z real o complejo que verifica $p(z) = 0$.

Observación 5.19.

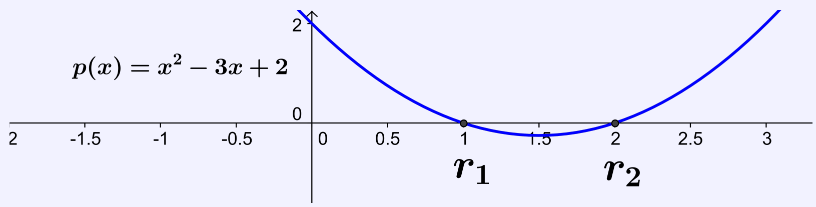
Una raíz o cero de un polinomio es un número z, que resulta ser una solución de la ecuación $p(x) = 0$, y su interpretación geométrica corresponde al punto donde la gráfica de $p(x)$ *corta al eje* x.

Ejemplo 5.21.

El número $x = 2$ es raíz del polinomio $p(x) = x^2 - 3x + 2$, pues,

$$p(2) = (2)^2 - 3(2) + 2 = 0$$

Visión Gráfica de las Raíces



Teorema 5.3 (Teorema Fundamental del Algebra)**.**

Cada polinomio $P_n(x)$ de grado $n \geq 1$, con coeficientes reales o complejos tiene al menos un cero o raíz real o complejo.

Teorema 5.4 (Teorema de los n Ceros)**.**

Todo polinomio $P_n(x)$ de grado $n \geq 1$ con coeficientes reales o complejos se puede expresar como el producto de n factores lineales. Por lo tanto, tiene exactamente n ceros, no necesariamente distintos.

Ejemplo 5.22.

1. El ponimio $p(x) = x^2 + 4x + 4 = (x - 2)^2 = (x - 2)(x - 2)$, es decir tiene dos ceros iguales a 2.
2. El polinomio $q(x) = x^2 - 5x + 5 = (x - 4)(x - 1)$, en este caso, $q(x)$ tiene dos ceros distintos.

Observación 5.20.

Si $p(x)$ se representa como el producto de factores lineales y $(x - r)$ ocurre m veces, entonces r se denomina *un cero de multiplicidad m*.

Ejemplo 5.23.

En el ejemplo anterior, $p(x)$ tiene una raíz $r = 2$ de multiplicidad dos,
El polinomio $q(x)$ tiene dos raices $r_1 = 4$ y $r_2 = 1$ cada uno de multiplicidad uno.
El polinomio $t(x) = 4(x-5)^2(x+1)$ tiene como raíces a $r_1 = 5$ de multiplicidad dos y $r_2 = -1$ de multiplicidad uno.

Observación 5.21.

El teorema fundamental del álgebra afirma que toda ecuación polinomial, con coeficientes reales o complejos, tiene solución.

Observación 5.22.

Otra forma en la que podemos interpretar el Teorema fundamental del Álgebra es como sigue, ya que se puede factorizar un polinomio dadas las raíces y hay n raíces para todo polinomio de este grado, entonces:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_n \cdot (x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$$

donde $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son las raíces de $p(x)$.

Propocición 5.1 (Regla de los Signos de Descartes)**.**

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ un polinomio con coeficientes reales tal que $p(0) \neq 0$. Entonces:

1. El número de raíces reales positivas de $p(x)$ es igual al número de cambios en el signo (término a térnimo) de $p(x)$ o es disminuido en una cantidad entera par.

2. El número de raíces reales negativas de $p(x)$ es igual al numero de cambios de signo (término a térnimo) de $p(-x)$ o es disminuido en una cantidad entera par.

Observación 5.23.

Importante notar que solo estamos hablando de raíces reales y que debemos ordenar los términos del polinomio de mayor a menor grado.

Ejemplo 5.24.

Determinar el numero posible de raíces reales para el siguiente polinomio:

$$p(x) = 3x^6 + 4x^5 + 3x^3 - x - 3$$

Solución: El ejemplo ya ofrece el polinomio ordenado según el grado de cada término, por lo cual no se requiere ordenarlo.

$$3x^6 \quad +4x^5 \quad +3x^3 \quad \curvearrowright \quad -x \quad -3$$

En el polinomio hay un solo cambio. Por lo tanto el número de raíces positivas solo puede ser una.

Ahora probaremos la cantidad de cambios de signo de $p(-x)$:

$$3x^6 \quad \curvearrowright \quad -4x^5 \quad -3x^3 \quad \curvearrowright \quad +x \quad -3$$

En este caso $p(-x)$ presenta dos cambios de signo, por lo tanto el número de raíces negativas es dos o cero.

Ejemplo 5.25.

Aplique la regla de signos de descartes para determinar la posible cantidad de raíces reales para:

$$p(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 6$$

Solución: Para $p(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 6$

No hay variaciones de signo (todos los términos son positivos) por lo cual hay cero raíces positivas.

Para $p(-x) = -x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 6$

Hay 5 variaciones de signo. Puede haber $5, 3$ o 1 raíz real negativa.

Teorema 5.5 (Teorema de los Ceros Complejos)**.**

Los ceros complejos de polinomios *con coeficientes reales*, si existen, se presentan en pares conjugados.

Observación 5.24 (Sobre raíces conjugadas)**.**

Elñ teorema anterior dice: "Sea $p(x)$ un polinomio *con coeficientes reales*, si el número $a + bi$ es una raíz del polinomio, también debe serlo su conjugado $a - bi$."

Ejemplo 5.26.

Hallar los ceros de $p(x) = x^2 - 6x + 10$

Solución: Para encontrar los ceros de este polinomio, usaremos la formula que resuelve una ecuación de segundo grado, así.

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(1)(-10)}}{2(1)} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = 3 \pm 2i$$

Luego, se tiene $r_1 = 3 + 2i$, $r_2 = 3 - 2i$.

Observación 5.25 (Ceros de un polinomio de grado impar)**.**

Del teorema anterior podemos concluir que, un polinomio de grado *impar*, con *coeficientes reales* siempre tiene al menos un cero real.

Ejemplo 5.27.

Encuentre las raíces del polinomio $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

Solución: Como $p(x)$ tiene coeficientes reales y no presenta cambios de signo, no posee raices positivas.

Por otro lado $p(-x)$ presenta tres cambios de signo, por lo tanto tiene tres o una raíz negativa.

Si dividimos el polinomio por el factor $(x + 1)$, tenemos

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & & -1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Resulta que $p(x) = (x^2 + 1)(x + 1) = (x + i)(x - i)(x + 1)$

5.2.5. Acotación de Raíces Reales

Definición 5.13 (Cotas de las raices reales)**.**

Una cota se refiere a los limites entre los cuales se encuentran las raíces del polinomio.
Se dice que a es una cota inferior y b una superior de las raíces de un polinomio (o los ceros de un polinomio) si para cada raíz r se satisface la siguiente condicion: $a \leq r \leq b$.

Teorema 5.6 (Método de Laguerre-Thibault)**.**

Sea un polinomio $p(x)$ con raices reales:

1. Si $p(x)$ se divide entre $(x-b)$ siendo que $b>0$; y el renglón que contiene tanto el *cociente* y el *residuo* son **positivos o cero**, entonces b es cota **superior** para las raíces de $p(x)$.

2. Si $p(x)$ se divide entre $(x-a)$; siendo que $a<0$; y el renglón que contiene al *cociente* y al *residuo* alternan su signo (positivo a negativo y viceversa, donde el cero puede ser considerado positivo o negativo según convenga), entonces a es una cota **inferior** para los ceros reales de $p(x)$.

Ejemplo 5.28.

Demostrar que el polinomio $s(x)=x^4-3x^2+2x-5$ tiene sus raices reales entre -3 y 2.

Solución: Dividiendo entre $(x-2)$:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -3 & 2 & -5 \\ 2 & & 2 & 4 & 2 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}$$

Notemos que al dividir el polinomio por $2>0$, todos los coeficientes del cociente y el residuo son positivos, por lo tanto 2 es una cota superior.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -3 & 2 & -5 \\ -3 & & -3 & 9 & -18 & 48 \\ \hline & 1 & -3 & 6 & -16 & 43 \end{array}$$

Por otro lado, al dividir el polinomio por $-3 < 0$, los signos de los coeficientes del cociente y el residuo se alternan, -3 es una cota inferior.

Teorema 5.7.

Sea $p(x)$ polinomio con coeficientes reales y de grado $n \geq 1$, y sean a, b números reales tal que $p(a) < 0 < p(b)$ (o $p(a) > 0 > p(b)$), es decir se produce un cambio de signo. Entonces $p(x)$ tiene *al menos* una raíz real en el intervalo $]a, b[$.

Ejemplo 5.29.

Mustre que el polinomio $p(x) = 3x^5 + 8x^4 + x^3 - 14x^2 - 14x - 4$ tiene una raíz racional en el intervo [0,2]

Solución: En efecto, al dividir el polinomio por $(x-2)$, se tiene que

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 3 & 8 & 1 & -14 & -14 & -4 \\
2 & & 6 & 28 & 58 & 88 & 148 \\
\hline
 & 3 & 14 & 29 & 44 & 74 & 144
\end{array}
$$

el resto es 144, es decir $p(2) = 144 > 0$, y claramente (por simple inspección) $p(0) = -4 < 0$. Luego presenta un cambio de signo en el intervalo $[0, 2]$, lo que indica que tiene por lo menos una raíz en el intervalo

Notemos que $x = 1$ es una raíz.

Teorema 5.8 (Cota de Cauchy)**.**

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ con coeficientes es $\mathbb{C}$, con $n \geq 1$, $a_n \neq 0$. Sea el número

$$M = 1 + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right| + \cdots + \left|\frac{a_0}{a_n}\right|. \tag{5.2}$$

Entonces toda raíz $r \in \mathbb{C}$ de $p(x)$ verifica que $|r| < M$.

Ejemplo 5.30.

Encuentre una cota para las raíces del polinomio $p(x) = 3x^5 + 8x^4 + x^3 - 14x^2 - 14x - 4$

Solución: Dado $p(x) = 3x^5 + 8x^4 + x^3 - 14x^2 - 14x - 4$, se tiene que

$$M = 1 + \left|\frac{8}{3}\right| + \left|\frac{1}{3}\right| + \left|\frac{-14}{3}\right| + \left|\frac{14}{3}\right| + \left|\frac{-4}{3}\right| = 14,\bar{3}$$

Observación 5.26.

Una mejora en esta cota es la de Mc Laurin, que se presenta a continuación.

Teorema 5.9 (Cota general (Mc Laurin))**.**

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$
Sea $A = \text{máx}\{|a_{n-1}|, \ldots, |a_1|, |a_0|\}$,y sea $r \in \mathbb{R}$ con $p(r) = 0$, entonces

$$|r| < 1 + \frac{A}{|a_n|} \tag{5.3}$$

Ejemplo 5.31.

Encontrar una cota para las raíces del polinomio anterior.

Solución: Dado $p(x) = 3x^5 + 8x^4 + x^3 - 14x^2 - 14x - 4$, se tiene que

$$A = \text{máx}\{|8|, |1|, |-14|, |-14|, |4|\} = 14$$

Luego: $\quad |r| < 1 + \dfrac{14}{3} = 5,\bar{6}$

Teorema 5.10 (Método-1 del mayor módulos de los coeficientes negativos)**.**

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, polinomio con coeficientes a_i reales, siendo $a_n > 0$.
Supongamos ahora que $a_k, k = n-1, \ldots, 0$, es el primer coeficiente negativo; si no hubiese tales coeficientes, el polinomio no podría tener raíces positivas.
Sea , finalmente, $B = \text{máx}\{|a_i|, : a_i < 0\}$. Entonces el número

$$M = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_n}} \tag{5.4}$$

es una cota superior para las raices positivas de $p(x)$.

Ejemplo 5.32.

Encontrar una cota para las raíces del polinomio anterior.

Solución: Dado $p(x) = 3x^5 + 8x^4 + x^3 - 14x^2 - 14x - 4$, se tiene que:
$a_n = 3 > 0$
$a_k = -14 \Rightarrow k = 2$
$B = \text{máx}\,\{|-14|, |-14|, |4|\} = 14$
Luego $M = 1 + \sqrt[2]{\frac{14}{3}} \approx 3,16$

Teorema 5.11 (Método-2 del mayor módulos de los coeficientes negativos)**.**

Sea G el mayor de los módulos de los coeficientes negativos de:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

con $a_n > 0$. Si a_k es el primer coeficiente negativo del polinomio, $(k = n-1, \ldots, 2, 1, 0)$, entonces:

$$L = 1 + \sqrt[n-k]{\frac{G}{a_n}} \tag{5.5}$$

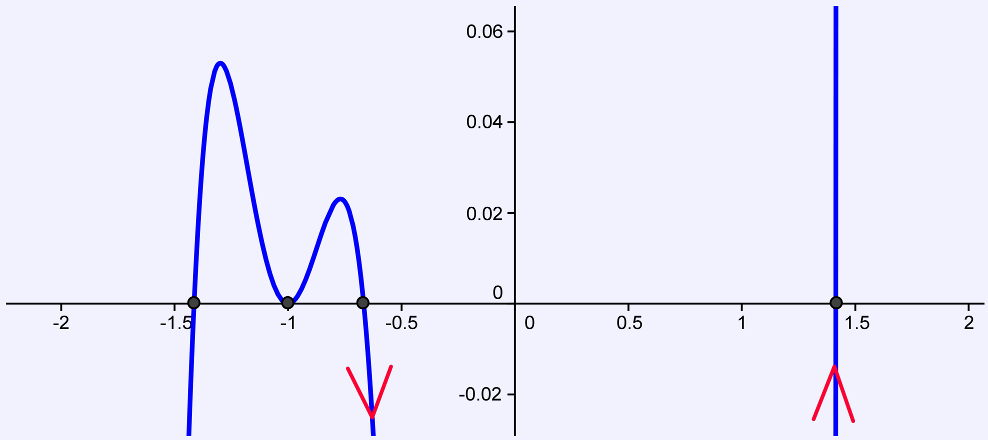
es una cota de las raíces positivas de $p(x)$.

Ejemplo 5.33.

Encontrar una cota para las raíces del polinomio anterior.

Solución: Dado $p(x) = 3x^5 + 8x^4 + x^3 - 14x^2 - 14x - 4$, se tiene que:
$a_n = 3 > 0$
$a_k = -14 \Rightarrow k = 2$
$G = \text{máx}\,\{|-14|, |-14|, |4|\} = 14$
Luego $L = 1 + \sqrt[3]{\frac{14}{3}} \approx 2,67$

Visión Gráfica de las Raíces



Observación 5.27.

En forma similar, se puede determinar una cota inferior para las raíces negativas de $p(x)$. En este caso a_k es el primer coeficiente negativo de $p(-x)$ y $B = \text{máx}\{|a_i| : a_i < 0\}$

Ejemplo 5.34.

Determine las cotas superiores e inferiores del polinomio $p(x) = 2x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 3x + 2$.

Solución: Dado $p(x) = 2x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 3x + 2$
Una cota superior es:
$a_n = 2 > 0$
$a_k = -3 \Rightarrow k = 3$
$B = \text{máx}\{|-3|, |-4|\} = 4$
Luego, $M = 1 + \sqrt[3]{\dfrac{4}{2}} \approx 2,26$ es una cota superior.
Una cota inferior para las raíces negativas es:
Como $p(-x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2$
$a_n = 2 > 0$
$a_k = -4 \Rightarrow k = 2$
$B = \text{máx}\{|-4|, |-3|\} = 4$
Luego, $M = 1 + \sqrt[2]{\dfrac{4}{2}} \approx 2,41$, entonces una cota inferior es $-2,41$

Observación 5.28.

Notemos que los dos últimos criterios applican una raíz de orden complementario a n al mismo término, es decir, uno aplica una raíz de orden k y la otra de orden $n-k$.
Esto nos dice que siempres debemos complementar esto criterior, usando el utilice la raíz de mayor orden, pues esto garantiza el menor número de cota.

5.2.6. Localización de los Ceros Racionales

Teorema 5.12.

Sea el polinomio de coeficientes enteros

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

entonces los posibles ceros racionales de $p(x)$ tienen la forma $\frac{b}{c}$, donde b es un divisor de a_0 y c es un divisor de a_n

Ejemplo 5.35.

Listar los posibles ceros racionales del polinomio $p(x) = 2x^4 - 3x^3 + x - 9$.

Solución:

1. Valores posibles para b (divisores de $a_0 = 9$)$= 1\,;\,3\,;\,9$
2. Valores posibles para c (divisores de $a_n = 2$)$= 1\,;\,2$

Luego las posibles raíces racionales para $p(x)$ son de la forma: $\pm\frac{1}{1}; \pm\frac{3}{1}, \pm\frac{9}{1}; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{3}{2}; \pm\frac{9}{2}$
Esto es, si $p(x)$ tiene raíces racionales, estas deben ser una de las siguientes
$\left\{\pm\frac{1}{2}\,;\,\pm 1\,;\,\pm\frac{3}{2}\,;\,\pm 3\,;\,\pm\frac{9}{2}\,;\,\pm 9\right\}$

Ejemplo 5.36.

Listar los posibles ceros racionales del polinomio $p(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$.

Solución:

1. Valores posibles para b (divisores de $a_0 = 4$)= $1\,;\,2\,;\,4$

2. Valores posibles para c (divisores de $a_n = 2$)= $1\,;\,2$

Luego las posibles raíces racionales para $p(x)$ son de la forma:
$\pm\frac{1}{1};\pm\frac{2}{1},\pm\frac{4}{1};\pm\frac{1}{2};\pm\frac{2}{2};\pm\frac{4}{2}$
Así, las posibles raíces racionales de $p(x)$ son: $\pm1;\pm\frac{1}{2};\pm2;\pm4$

5.2.7. Procedimiento para encontrar las raíces de un polinomio

Algunas recomendaciones

Una buena forma, que facilita el encontrar los ceros o raíces de un polinomio es:

1. Determinar los posibles ceros racionales del polinomio.
2. Usar la regla de Descartes para determinar el número posible de ceros reales positivos y negativos que pueda tener.
3. Determinar una cota superior de las raíces positivas y una inferior para las negativas.
4. Usar división sintética para probar cuales de las postulantes a raíces lo son realmente.
5. Cada vez que se encuentre una raíz, escribir su factorización y reducir el grado.
6. No olvidar que las raíces pueden tener multiplicidad mayor a uno.
7. No olvidar que las raíces complejas van de a pares en polinomios con coeficiente reales.

Ejemplo 5.37.

Determinar todos los ceros del polinomio $p(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$.

Solución:

1. Los posibles ceros racionales son:

   Divisores de $a_0 : 1\,;\,2\,;\,4$

   Divisores de $a_n : 1\,;\,2$

   Posibles raíces racionales: $\pm\frac{1}{2}\,;\,\pm1\,;\,\pm2\,;\,\pm4$

2. Posibles ceros positivos y negativos:

   Signo $p(x): + - - + \Rightarrow 2$ variaciones $\Rightarrow 2$ o 0 raíces positivas.

   Signo $p(-x): - - + + + \Rightarrow 1$ variación $\Rightarrow 1$ raíz negativa.

3. Cota superior de las raíces positivas:

   a_k = primer coeficiente negativo $= a_2 = -1 \Rightarrow k = 2$

   $B = \text{máx}\{1, 8\} = 8$

   $M = 1 + \sqrt[2]{\dfrac{8}{2}} = 1 + 2 = 3$

   Luego una cota superior es 3

4. Cota inferior de las raíces negativas:

   $p(-x) = -2x^3 - x^2 + 8x + 4$

   $a_n = -2 < 0 \Rightarrow$ No aplicable el método, por que utilizamos el criterio de Mc Laurin.

   $A = \text{máx}\{2, 1, 8, 4\} = 8$

   $M = 1 + \dfrac{8}{2} = 5$

   Luego una cota inferior es -5

5. La nueva lista de posibles raíces racionales es: $\pm\frac{1}{2}$; ±1 ; ±2 ; -4

   Usando división sintética probamos cuáles de ellas lo son.

   Para $x = 1$
   $$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -1 & -8 & 4 \\ 1 & & 2 & 1 & -7 \\ \hline & 2 & 1 & -7 & -3 \end{array}$$

   como el resto es distinto de cero, $x = 1$ no es raíz de $p(x)$.

   Para $x = -1$
   $$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -1 & -8 & 4 \\ -1 & & -2 & 3 & 5 \\ \hline & 2 & -3 & -5 & 9 \end{array}$$

   como el resto es distinto de cero, $x = -1$ no es raíz de $p(x)$.

   Para $x = 2$
   $$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -1 & -8 & 4 \\ 2 & & 4 & 6 & -4 \\ \hline & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array}$$

   como el resto es cero, $x = 2$ es raíz de $p(x)$ y se puede escribir como:

   $p(x) = (x - 2)(2x^2 + 3x - 2)$ y como este último factor es cuadrático, lo resolvemos usando la fórmula de segundo grado, esto es

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{-8}{4} = -2 \\ x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Así, $p(x) = 2(x-2)(x+2)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$ y sus raíces son $\left\{2\,;\,-2\,;\,\dfrac{1}{2}\right\}$

Ejemplo 5.38.

Determinar todos los ceros del polinomio $p(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$.

Solución:

1. Los posibles ceros racionales son:

   Divisores de $a_0 : 1\,;\,2\,;\,3\,;\,6$

   Divisores de $a_n : 1$

   Posibles raíces racionales: $\pm 1\,;\,\pm 2\,;\,\pm 3\,;\,\pm 6$

2. Posibles ceros positivos y negativos:

   Signo $p(x) : + - + - + \Rightarrow 4$ variaciones $\Rightarrow 4$ o 2 o 0 raíces positivas.

   Signo $p(-x) : + + + + + \Rightarrow 0$ variación $\Rightarrow 0$ raíz negativa.

3. Cota superior de las raíces positivas:

   $a_n = 1 > 0$

   $a_k = a_3 = -7 \Rightarrow k = 3$

   $B = \text{máx}\{7, 17\} = 17$

   $M = 1 + \sqrt[3]{\dfrac{17}{1}} = 1 + 2,571 \approx 3,571$

   Luego una cota superior es $3,571$

4. Cota inferior de las raíces negativas:

   $p(-x) = x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$

   No hay coeficientes negativos

   Luego una cota inferior es 0 (concuerda con el estudio de signos de Descartes).

5. La nueva lista de posibles raíces racionales es:

   $$1\,;\,2\,;\,3$$

   Usando división sintética probamos cuáles de ellas lo son.

Para $x = 1$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -7 & 17 & -17 & 6 \\ 1 & & 1 & -6 & 11 & -6 \\ \hline & 1 & -6 & 11 & -6 & 0 \end{array}$$

como el resto es cero, $x = 1$ es raíz de $p(x)$.

y se puede escribir como $p(x) = (x-1)(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$.

volvamos a probar $x = 1$ (puede que sea de multiplicidad 2).

Para $x = 1$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

y se puede escribir como $p(x) = (x-1)^2(x^2 - 5x + 6)$.

donde la ecuación de segundo grado se puede factorizar facilmente, quedando.

$p(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)$

y sus raíces son $\{1; 2; 3\}$ con 1 de multiplicidad 2.

5.3. Fracciones Parciales

Una clase importante de funciones en el estudio de cálculo diferencial (límites, etc.) y cálculo integral (métodos de integración), son las funciones racionales que se pueden representar en la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

5.3.1. Escritura simple de una expresión racional

Si el grado del polinomio en el denominador es menor que el grado del numerador, entonces, al hacer la división,se obtiene que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \tag{5.6}$$

donde $W(x)$ es cierto polinomio y $R(x)$, un polinomio cuyo grado es menor que el de $Q(x)$.

Ejemplo 5.39.

1. $\dfrac{x^2-1}{x+1} = 1 + \dfrac{x-1}{x+1}$
2. $\dfrac{x^3-2x}{x^2+1} = x - \dfrac{3x}{x^2+1}$

En el álgebra superior se demuestra que cada polinomio $Q(x)$ puede representarse en la forma del producto

$$Q(x) = A(x-\alpha)(x-\beta)\cdots(x-\gamma),$$

donde A es el coeficiente del polinomio $Q(x)$ de grado mayor, $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ son las ríces de la ecuación $Q(x) = 0$. Los factores $(x-\alpha)(x-\beta)\cdots(x-\gamma)$ se llaman *factores elementales*. Si entre ellos hay tales que coincidan, obtenemos la representación

$$Q(x) = A(x-\alpha)^r(x-\beta)^s\cdots(x-\gamma)^t, \tag{5.7}$$

donde $r, s, \ldots, t$ son números enteros que se denominan *multiplicidades correspondientes* a las raíces $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$, con la particularidad de que $r + s + \cdots + t = n$; aquí n representa el grado del polinomio $Q(x)$.

Ejemplo 5.40.

Por ejemplo, el polinomio $Q(x) = -2(x-1)^2(x+3)^4(x-5)$ tiene las siguientes raíces;

$$\alpha = 1 \quad ; \quad \beta = -3 \quad ; \quad \beta = 5$$

en este caso con raíz α de multiplicidad 2, β multiplicidad 4 y γ de multiplicidad 1 (o raíz simple)

Observación 5.29.

En la representación de $Q(x)$ (5.7) pueden haber también raices complejas. Como se vio el el estudio de raices de polinomios en la sección anterios, todo polinomio de coeficientes reales que tiene una raíz compleja α de la forma $a+ib$ también tiene una raíz compleja conjugada de la forma $a-ib$. Luego, si en la representación (5.7) forma parte el factor $(x-\alpha)^r$, ella contiene también el factor $(x-\overline{\alpha})^r$, si α es raíz compleja.

Multiplicando estos dos factores, obtenemos

$$\begin{aligned}
(x-\alpha)^r(x-\overline{\alpha})^r) &= [(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})]^r \\
&= [(x-(a+ib))(x-(a-ib))]^r \\
&= \left[(x^2-2ax+a^2+b^2)\right]^r \\
&= (x^2+2px+q)^r, \qquad \text{donde } 2p=2a \ \text{ y } \ q=a^2+b^2
\end{aligned}$$

De esta manera, considerando raíces reales y complejas, se puede escribir en términos de polinomios ireducibles en $\mathbb{R}$ como:

$$Q(x) = A(x-\alpha)^r(x-\beta)^s\cdots(x^2-2px+q)^t(x^2+2ux+v)^\eta+\cdots \tag{5.8}$$

5.3.2. Descomposición en Fracciones Parciales

En el álgebra superior se demuestra el siguiente teorema:

Teorema 5.13.

Si una función racional $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ en la relación (5.6) tiene en el numerador un grado del polinomio menor que el grado del polinimio en el denominador, y el polinomio $Q(x)$ está representado en la forma (5.8), esta función puede ser representada únicamente en la forma

$$\begin{aligned}
\frac{R(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{(x-\alpha)}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\cdots+\frac{A_3}{(x-\alpha)^r}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+2px+q)}+ \\
&\quad +\frac{M_2x+N_2}{(x^2+2px+q)^2}+\cdots+\frac{M_tx+N_t}{(x^2+2px+q)^t}+\cdots
\end{aligned} \tag{5.9}$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_r, \ldots, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, M_t, N_t, \ldots$ son ciertos números.

Observación 5.30.

El desarrollo de (5.9) se llama *desarrollo de una función racional en fracciones elementales o parciales.*

Para determinar los números $A_1, A_2, \ldots, A_r, \ldots, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, M_t, N_t, \ldots$, multiplicadmos (5.9) por $Q(x)$. Puesto que la igualdad entre el polinomio $R(x)$ y el que se obtendrá en el segundo miembro es válida para todos los valores de x, los coeficientes de los grados iguales de x son iguales entre sí. De este modo obtenemos varias ecuaciones de primer grado de las cuales determinaremos los números $A_1, A_2, \ldots, A_r, \ldots, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, M_t, N_t, \ldots$. El método expuesto se llama *método de coeficientes indeterminados*.

Ejemplo 5.41.

Desarrolar la función racional $\dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}$ en fracciones parciales.

Sol Puesto que $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$, segun formula (5.9) tenemos

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por x^2-5x+6, resulta

$$\begin{array}{rcl} 2x-1 & = & A(x-2)+B(x-3), \quad \text{o bien} \\ 2x-1 & = & (a+B)x-2A-3B \end{array}$$

Igualando los coeficientes de los grados iguales de x, obtenemos las ecuaciones de primer grado:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} A & + & B & = & 2 \\ 2A & + & 3B & = & 1 \end{array}\right|$$

de donde, $A=5, B=-3$, así

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{5}{x-3}-\frac{3}{x-2}.$$