Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Introducción al Cálculo 08-1

Guía de Problemas

La presente guía le permitirá tener una idea bastante precisa del tipo de problemas que debe ser capaz de resolver en una evaluación y el tiempo promedio que debería demorar en resolverlos. En total debería poder resolverla en 3 horas. Le recomendamos que trabaje en ella una hora antes de la clase de trabajo dirigido, que resuelva sus dudas en la clase de trabajo dirigido y que luego dedique una hora a escribir con detalles las soluciones.

P1. (10 min.) Probar que $\inf\{\frac{1}{2n+1} : \ n \in \mathbb{N}\} = 0$.

P2. (30 min.) Sea f una función creciente cuyo dominio es el intervalo $[0, 1]$. Demuestre que el conjunto $f([0, 1])$ es acotado superiormente. Calcule el supremo del conjunto $f([0, 1])$ y determine si posee máximo.

P3. (30 min.) Dados a y b reales, demuestre que si para cualquier $\epsilon > 0$ se cumple que $a \leq b + \epsilon$ entonces $a \leq b$. Para argumentar, estudie el conjunto $\{\epsilon > 0 : \epsilon \geq a - b\}$.

P4. (30 min.) Sean S y T subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que para todo $x \in S$ y para todo $y \in T$ $x \leq y$. Probar que S tiene supremo, que T tiene ínfimo y que $\sup(S) \leq \inf(T)$.

P5. (30 min.) Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$, los cuales verifican las siguientes propiedades:

(a) $A \cup B = \mathbb{R}$.

(b) Todo elemento de A es menor que todo elemento de B

Demuestre que existe un real α que es simultáneamente cota superior de A y cota inferior de B. Pruebe, además, que dicho número real α es único.

P6. (30 min.) Sean A, B y C subconjuntos de $\mathbb{R}$ no vacíos y acotados. Pruebe que si para todo $x \in A$ y todo $y \in B$ existe $z \in C$ tal que $x + y \leq z$ entonces $\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(C)$.

P7. (30 min.) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente y tal que su complemento es acotado inferiormente. Muestre que $\inf(A^c) = \sup(A)$ si y sólo si $A = (-\infty, a]$ o $A = (-\infty, a)$ con $a \in \mathbb{R}$.