nales es un *cuerpo ordenado.* Los números reales que no pertenecen a **Q** se llaman *irracionales.*

I 3.7 Interpretación geométrica de los números reales como puntos de una recta

Sin duda que el lector debe estar familiarizado con la representación de los números reales por medio de los puntos de una recta. Se elige un punto para representar el 0 y otro a la derecha del 0 para representar el 1, como se indica en la figura I.7. Esta elección determina la escala. Si se adopta un conjunto de axiomas apropiados para la Geometría euclídea, cada número real corresponde a uno y sólo un punto de la recta y, recíprocamente, cada punto de la recta a un número real y sólo uno. Por esta razón la recta se denomina frecuentemente *recta real* o *eje real,* y es costumbre utilizar las palabras *número real* y *punto* como sinónimos. Por eso se dice muchas veces el *punto* x en vez del punto correspondiente al número real x.

La relación de orden entre los números reales tiene una interpretación geométrica simple. Si $x < y$, el punto x está a la izquierda del punto y, como se ve en la figura I.7. Los números positivos están a la derecha del 0 y los negativos a la izquierda del 0. Si $a < b$, un punto x satisface las desigualdades $a < x < b$, si y sólo si x está entre a y b.

Esta posibilidad de representar geométricamente los números reales es un auxiliar poderoso, pues permite descubrir y comprender mejor ciertas propiedades de los números reales. Aunque el lector debe observar que todas las propiedades de los números reales que se han dado como teoremas deben deducirse de los axiomas sin ninguna referencia geométrica, esto no prejuzga que no deba hacerse uso de la Geometría en el estudio de las propiedades de los números reales. Por el contrario, la Geometría sugiere a menudo el método de demostración para un teorema particular, y algunas veces un argumento geométrico es más sugestivo que la demostración puramente *analítica* (dependiente exclusivamente de los axiomas del número real). En este libro, se utiliza con frecuencia la intuición geomé-

FIGURA I.7 *Números reales representados geométricamente en una línea*

trica para aclarar determinadas cuestiones o para inducir a discusiones de otras. No obstante, las demostraciones de todos los teoremas importantes se presentan en forma analítica.

I 3.8 Cota superior de un conjunto. elemento máximo, extremo superior

Los nueve axiomas expuestos hasta ahora contienen todas las propiedades de los números reales estudiados ordinariamente en Álgebra elemental. Hay otro axioma de importancia fundamental en el Cálculo que de ordinario no se estudia en los cursos de Álgebra elemental. Este axioma (u otro equivalente) es necesario para establecer la existencia del número irracional.

En Álgebra elemental se presentan números irracionales cuando se trata de resolver ciertas ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo, se desea tener un número real x tal que $x^2 = 2$. A partir de los nueve axiomas anteriores no se puede probar que exista un x en el sistema de los números reales que verifique tal ecuación, ya que estos nueve axiomas son satisfechos también por los números racionales y no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea 2. (En el Ejercicio 11 de la Sección I 3.12 se esboza una demostración de esta afirmación.) El axioma 10 permite introducir números irracionales en el sistema de los números reales. Se verá también que atribuye al conjunto de los números reales una propiedad de continuidad que es especialmente importante en el estudio del Cálculo.

Antes de exponer el axioma 10, conviene introducir alguna terminología y notación especiales. Sea S un conjunto no vacío de números reales y supongamos que existe un número B tal que

$$x \leq B$$

para todo x de S. Entonces se dice que S está *acotado superiormente* por B. El número B se denomina una *cota superior* para S. Decimos *una* cota superior debido a que todo número mayor que B también es una cota superior. Si una cota superior B pertenece también a S, entonces B se llama el *elemento máximo* de S. A lo sumo puede existir un B que sea elemento máximo. Si existe, se escribe

$$B = \max S .$$

Así que, $B = \max S$ si $B \in S$ y $x \leq B$ para todo x de S. Un conjunto sin cota superior se dice que es *no acotado superiormente.*

Los ejemplos que siguen ilustran el significado de estas denominaciones.

EJEMPLO 1. Sea S el conjunto de todos los números reales positivos. Es un conjunto no acotado superiormente. No tiene cotas superiores ni elemento máximo.

EJEMPLO 2. Sea S el conjunto de todos los números reales x tales que $0 \leq x \leq 1$. Este conjunto está acotado superiormente por el 1. Su elemento máximo es el 1.

EJEMPLO 3. Sea T el conjunto de todos los números reales x tales que $0 \leq x < 1$. Es parecido al conjunto del ejemplo 2 salvo que el punto 1 no está incluido. Este conjunto está acotado superiormente por el 1 pero no tiene elemento máximo.

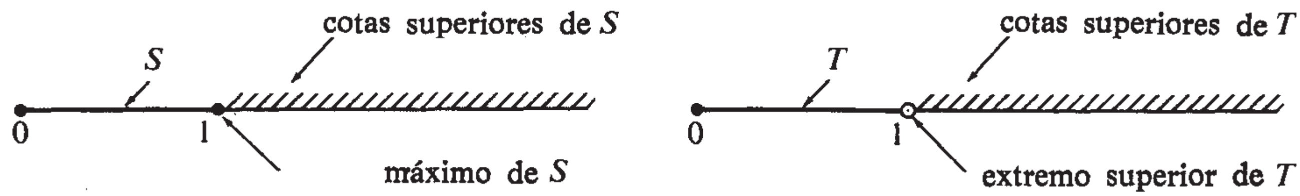
Algunos conjuntos, parecidos al del ejemplo 3, están acotados superiormente pero no tienen máximo. Para ellos existe un concepto que sustituye al del máximo. Este se llama *extremo superior* del conjunto y se define como sigue:

DEFINICIÓN DE EXTREMO SUPERIOR. *Un número B se denomina extremo superior de un conjunto no vacío S si B tiene las dos propiedades siguientes*:

a) *B es una cota superior de S.*

b) *Ningún número menor que B es cota superior para S.*

Si S tiene máximo, éste es también extremo superior de S. Pero si S no posee máximo, puede tener extremo superior. En el ejemplo 3 precedente, el número 1 es extremo superior para T si bien T no tiene máximo. (Ver figura I.8.)



a) S tiene máximo: $\max S = 1$

b) T no tiene máximo, pero sí extremo superior: $\sup T = 1$

FIGURA I.8 *Cotas superiores, máximo y extremo superior.*

TEOREMA I.26. *Dos números distintos no pueden ser extremos superiores para el mismo conjunto.*

Demostración. Sean B y C dos extremos superiores para un conjunto S. La propiedad b) implica que $C \geq B$ puesto que B es extremo superior; análogamente, $B \geq C$ ya que C es extremo superior. Luego, tenemos $B = C$.

Este teorema nos expresa que si existe extremo superior para un conjunto S, hay *solamente* uno y puede decirse *el* extremo superior.

Con frecuencia se emplea el término *supremo* de un conjunto en vez de extremo superior utilizando la abreviatura *sup,* escribiendo entonces:

$$B = \sup S\,.$$

I 3.9 Axioma del extremo superior (axioma de completitud)

Podemos ahora establecer el axioma del extremo superior para el sistema de números reales.

AXIOMA 10. *Todo conjunto no vacío S de números reales acotado superiormente posee extremo superior; esto es, existe un número real B tal que $B = \sup S$.*

Insistamos una vez más en que el extremo superior de S no pertenece necesariamente a S. En realidad $\sup S$ pertenece a S si y sólo si S posee máximo, en cuyo caso $\max S = \sup S$.

Las definiciones de *cota inferior, acotado inferiormente, mínimo,* se formulan en forma parecida. El lector debería hacerlo como ejercicio. Si S tiene mínimo, se expresa poniendo $\min S$.

Un número L se llama *extremo inferior* (o *ínfimo*) de S si a) L es una cota inferior para S, y b) ningún número mayor que L es cota inferior para S. El extremo inferior de S, cuando existe, es único y se designa por $\inf S$. Si S posee mínimo, entonces $\min S = \inf S$.

Con el axioma 10, se puede demostrar el siguiente

TEOREMA I.27. *Todo conjunto no vacío S acotado inferiormente posee extremo inferior; esto es, existe un número real L tal que $L = \inf S$.*

Demostración. Sea $-S$ el conjunto de los números opuestos de los de S. Entonces $-S$ es no vacío y acotado superiormente. El axioma 10 nos dice que existe un número B que es extremo superior de $-S$. Es fácil ver que $-B = \inf S$.

Consideremos una vez más los ejemplos de la Sección anterior. En el ejemplo 1, el conjunto de todos los números reales positivos, tiene el 0 como extremo inferior. Ese conjunto no tiene mínimo. En los ejemplos 2 y 3, el 0 es el mínimo.

En todos esos ejemplos resulta fácil decidir si el conjunto S es o no acotado superior o inferiormente, y también es fácil determinar los números $\sup S$ e $\inf S$. El ejemplo siguiente muestra que averiguar la existencia de las cotas superior o inferior puede resultar difícil.

EJEMPLO 4. Sea S el conjunto de todos los números de la forma $(1 + 1/n)^n$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$. Si, por ejemplo, hacemos $n = 1, 2$, y 3, encontramos que los números 2, $\frac{9}{4}$, y $\frac{64}{27}$ pertenecen a S. Todo número del conjunto es mayor que 1, con lo que el conjunto está acotado inferiormente y por tanto tiene un extremo inferior. Con un pequeño esfuerzo podemos probar que 2 es el menor elemento de S de modo que $\inf S = \min S = 2$. También el conjunto S está acotado superiormente, aunque no es tan fácil demostrarlo. (¡Inténtese!) Una vez sabido que S está acotado superiormente, el axioma 10 nos asegura la existencia del extremo superior de S. En este caso no resulta fácil determinar el valor del extremo superior de S a partir de la definición de este conjunto. En un próximo capítulo veremos que el $\sup S$ es un número irracional aproximadamente igual a 2,718. Es un número importante en Cálculo llamado número de Euler o número e.

I 3.10 La propiedad arquimediana del sistema de los números reales

Esta Sección contiene algunas propiedades importantes del sistema de los números reales que son consecuencia del axioma del extremo superior.

TEOREMA I.28. *El conjunto* **P** *de los enteros positivos* 1, 2, 3, ... *no está acotado superiormente.*

Demostración. Supóngase **P** acotado superiormente. Demostraremos que esto nos conduce a una contradicción. Puesto que **P** no es vacío, el axioma 10 nos dice que **P** tiene extremo superior, sea éste b. El número $b - 1$, siendo menor que b, no puede ser cota superior de **P**. Luego, existe un mínimo entero positivo n tal que $n > b - 1$. Para este n tenemos $n + 1 > b$. Puesto que $n + 1$ pertenece a **P**, esto contradice el que b sea una cota superior para **P**.

Como corolarios del teorema I.28, se obtienen inmediatamente las consecuencias siguientes:

TEOREMA I.29. *Para cada real x existe un entero positivo n tal que $n > x$.*

Demostración. Si no fuera así, x sería una cota superior de **P**, en contradicción con el teorema I.28.

TEOREMA I.30. *Si $x > 0$ e y es un número real arbitrario, existe un entero positivo n tal que $nx > y$.*

Demostración. Aplicar el teorema I.29 cambiando x por y/x.

La propiedad descrita en el teorema I.30, se denomina frecuentemente *propiedad arquimediana* del sistema de los números reales. Geométricamente significa que cada segmento, tan largo como se quiera, puede ser recubierto por un número finito de segmentos de longitud positiva dada, tan pequeña como se quiera. En otras palabras, una regla corta puede medir distancias tan largas como se quiera colocándola consecutivamente. Arquímedes, considerando ésta como una propiedad fundamental de la línea recta, la consideró como uno de los axiomas de la Geometría. En los siglos XIX y XX se han construido geometrías no arquimedianas en las que se prescinde de este axioma.

A partir de la propiedad arquimediana, podemos demostrar el teorema siguiente que nos será útil en Cálculo integral.

TEOREMA I.31. *Si tres números reales a, x, e y satisfacen las desigualdades*

$$a \leq x \leq a + \frac{y}{n} \tag{I.14}$$

para todo entero $n \geq 1$, entonces $x = a$.

Demostración. Si $x > a$, el teorema I.30 nos dice que existe un entero positivo n que satisface $n(x - a) > y$, en contradicción con (I.14). Luego no puede ser $x > a$, con lo que deberá ser $x = a$.

I 3.11 Propiedades fundamentales del extremo superior

En esta Sección se consideran tres propiedades fundamentales de los extremos superior e inferior que se utilizarán en lo sucesivo. La primera de ellas establece que todo conjunto de números con extremo superior contiene números tan próximos como se quiera a dicho extremo; del mismo modo, un conjunto con extremo inferior contiene números tan próximos a él como se quiera.

TEOREMA I.32. *Sea h un número positivo dado y S un conjunto de números reales.*

a) *Si S tiene extremo superior, para un cierto x de S se tiene*

$$x > \sup S - h .$$

b) *Si S tiene extremo inferior, para un cierto x de S se tiene*

$$x < \inf S + h .$$

Demostración de a). Si es $x \leq \sup S - h$ para todo x de S, entonces $\sup S - h$ sería una cota superior de S menor que su extremo superior. Por consiguiente debe ser $x > \sup S - h$ por lo menos para un x de S. Esto demuestra a). La demostración de b) es parecida.

TEOREMA I.33. PROPIEDAD ADITIVA. *Dados dos subconjuntos no vacíos A y B de* **R**, *sea C el conjunto*

$$C = \{a + b \mid a \in A, b \in B\} .$$

a) *Si A y B poseen extremo superior, entonces C tiene extremo superior, y*

$$\sup C = \sup A + \sup B .$$

b) *Si A y B tienen extremo inferior, entonces C tiene extremo inferior, e*

$$\inf C = \inf A + \inf B .$$

Demostración. Supongamos que A y B tengan extremo superior. Si $c \in C$, entonces $c = a + b$, donde $a \in A$ y $b \in B$. Por consiguiente $c \leq \sup A + \sup B$;

de modo que $\sup A + \sup B$ es una cota superior de C. Esto demuestra que C tiene extremo superior y que

$$\sup C \leq \sup A + \sup B .$$

Sea ahora n un entero positivo cualquiera. Según el teorema I.32 (con $h = 1/n$) existen un a en A y un b en B tales que

$$a > \sup A - \frac{1}{n}, \qquad b > \sup B - \frac{1}{n}.$$

Sumando estas desigualdades, se obtiene

$$a + b > \sup A + \sup B - \frac{2}{n}, \quad \text{o} \quad \sup A + \sup B < a + b + \frac{2}{n} \leq \sup C + \frac{2}{n},$$

puesto que $a + b \leq \sup C$. Por consiguiente hemos demostrado que

$$\sup C \leq \sup A + \sup B < \sup C + \frac{2}{n}$$

para todo entero $n \geq 1$. En virtud del teorema I.31, debe ser $\sup C = \sup A + \sup B$. Esto demuestra a), y la demostración de b) es parecida.

TEOREMA I.34. *Dados dos subconjuntos no vacíos S y T de $\mathbf{R}$ tales que*

$$s \leq t$$

para todo s de S y todo t de T. Entonces S tiene extremo superior, y T extremo inferior, y se verifica

$$\sup S \leq \inf T .$$

Demostración. Cada t de T es cota superior para S. Por consiguiente S tiene extremo superior que satisface la desigualdad $\sup S \leq t$ para todo t de T. Luego $\sup S$ es una cota inferior para T, con lo cual T tiene extremo inferior que no puede ser menor que $\sup S$. Dicho de otro modo, se tiene $\sup S \leq \inf T$, como se afirmó.

*I 3.12 Ejercicios

1. Si x e y son números reales cualesquiera, $x < y$, demostrar que existe por lo menos un número real z tal que $x < z < y$.

2. Si x es un número real arbitrario, probar que existen enteros m y n tales que $m < x < n$.
3. Si $x > 0$, demostrar que existe un entero positivo n tal que $1/n < x$.
4. Si x es un número real arbitrario, demostrar que existe un entero n único que verifica las desigualdades $n \leq x < n + 1$. Este n se denomina la *parte entera* de x y se designa por $[x]$. Por ejemplo, $[5] = 5, [\frac{5}{2}] = 2, \quad [-\frac{8}{3}] = -3$.
5. Si x es un número real arbitrario, probar que existe un entero único n que satisface la desigualdad $n \leq x < n + 1$.
6. Si x e y son números reales arbitrarios, $x < y$, probar que existe por lo menos un número racional r tal que $x < r < y$ y deducir de ello que existen infinitos. Esta propiedad se expresa diciendo que el conjunto de los números racionales es *denso* en el sistema de los números reales.
7. Si x es racional, $x \neq 0$, e y es irracional, demostrar que $x + y$, $x - y$, xy, x/y, y/x son todos irracionales.
8. ¿La suma o el producto de dos números irracionales es siempre irracional?
9. Si x e y son números reales cualesquiera, $x < y$, demostrar que existe por lo menos un número irracional z tal que $x < z < y$ y deducir que existen infinitos.
10. Un entero n se llama *par* si $n = 2m$ para un cierto entero m, e *impar* si $n + 1$ es par. Demostrar las afirmaciones siguientes:
   a) Un entero no puede ser a la vez par e impar.
   b) Todo entero es par o es impar.
   c) La suma o el producto de dos enteros pares es par. ¿Qué se puede decir acerca de la suma o del producto de dos enteros impares?
   d) Si n^2 es par, también lo es n. Si $a^2 = 2b^2$, siendo a y b enteros, entonces a y b son ambos pares.
   e) Todo número racional puede expresarse en la forma a/b, donde a y b son enteros, uno de los cuales por lo menos es impar.
11. Demostrar que no existe número racional cuyo cuadrado sea 2.

   [*Indicación.* Utilizar el razonamiento de reducción al absurdo. Supóngase $(a/b)^2 = 2$, siendo a y b enteros, uno de ellos por lo menos impar. Utilizar partes del Ejercicio 10.]

12. La propiedad arquimediana del sistema de números reales se dedujo como consecuencia del axioma del extremo superior. Demostrar que el conjunto de los números racionales satisface la propiedad arquimediana pero no la del extremo superior. Esto demuestra que la propiedad arquimediana no implica el axioma del extremo superior.

*I 3.13 Existencia de raíces cuadradas de los números reales no negativos

Se ha visto anteriormente que la ecuación $x^2 = 2$ no tiene solución entre los números racionales. Con auxilio del axioma 10 se puede demostrar que la ecuación $x^2 = a$ tiene solución entre los números *reales* si $a \geq 0$. Tal x se denomina *raíz cuadrada de a.*

En primer lugar, sin tener en cuenta el axioma 10, se pueden hacer las siguientes consideraciones. Los números negativos no pueden tener raíces cuadradas, pues si $x^2 = a$, al ser a un cuadrado ha de ser no negativo (en virtud del teorema I.20). Además, si $a = 0$, $x = 0$ es la única raíz cuadrada (por el teorema I.11). `upóngase, pues, $a > 0$. Si $x^2 = a$ entonces $x \neq 0$ y $(-x)^2 = a$, por tanto, x y su opuesto son ambos raíces cuadradas. Pero *a lo sumo* tiene *dos*, porque si $x^2 = a$ e $y^2 = a$, entonces $x^2 = y^2$ y $(x + y)(x - y) = 0$, y en virtud del teorema I.11, o $x = y$ o $x = -y$. Por tanto, si a tiene raíces cuadradas, tiene *exactamente dos.*

La existencia de una raíz cuadrada por lo menos se deducirá posteriormente de un teorema importante de Cálculo, conocido por el teorema del valor intermedio para las funciones continuas, pero es instructivo ver como la existencia de la raíz cuadrada se puede probar directamente a partir del axioma 10.

TEOREMA I.35. *Cada número real no negativo a tiene una raíz cuadrada no negativa única.*

Nota: Si $a \geq 0$, su raíz cuadrada no negativa se indicará por $a^{1/2}$ o por $\sqrt{a}$. Si $a > 0$, la raíz cuadrada negativa es $-a^{1/2}$ o $-\sqrt{a}$.

Demostración. Si $a = 0$, entonces 0 es la única raíz cuadrada. Supóngase pues que $a > 0$. Sea S el conjunto de todos los números reales positivos x tales que $x^2 \leq a$. Puesto que $(1 + a)^2 > a$, el número $(1 + a)$ es una cota superior de S. Pero, S es no vacío, pues $a/(1 + a)$ pertenece a S; en efecto $a^2 \leq a(1 + a)^2$ y por tanto $a^2/(1 + a)^2 \leq a$. En virtud del axioma 10, S tiene un extremo superior que se designa por b. Nótese que $b \geq a/(1 + a)$ y por tanto $b > 0$. Existen sólo tres posibilidades: $b^2 > a$, $b^2 < a$, $b^2 = a$.

Supóngase $b^2 > a$ y sea $c = b - (b^2 - a)/(2b) = \frac{1}{2}(b + a/b)$. Entonces $0 < c < b$ y $c^2 = b^2 - (b^2 - a) + (b^2 - a)^2/(4b^2) = a + (b^2 - a)^2/(4b^2) > a$. Por tanto, $c^2 > x^2$ para cada x en S, es decir, $c > x$ para cada x en S; luego c es una cota superior de S, y puesto que $c < b$ se tiene una contradicción con el hecho de ser b el *extremo superior* de S. Por tanto, la desigualdad $b^2 > a$ es imposible.

Supóngase $b^2 < a$. Puesto que $b > 0$ se puede elegir un número positivo c tal que $c < b$ y tal que $c < (a - b^2)/(3b)$. Se tiene entonces:

$$(b + c)^2 = b^2 + c(2b + c) < b^2 + 3bc < b^2 + (a - b^2) = a\,.$$

Es decir, $b + c$ pertenece a S. Como $b + c > b$, esta desigualdad está en contradicción con que b sea una cota superior de S. Por tanto, la desigualdad $b^2 < a$ es imposible y sólo queda como posible $b^2 = a$.

*I 3.14 Raíces de orden superior. Potencias racionales

El axioma del extremo superior se puede utilizar también para probar la existencia de raíces de orden superior. Por ejemplo, si n es un entero positivo