Guía Semana 7

Ejercicios

1. Siguiendo el ejemplo de tutoría, se propone calcular las áreas encerradas bajo las funciones $f(x) = 1$, $f(x) = x$ y $f(x) = x^3$. Por cierto en los dos primeros casos los resultados son bien conocidos, no así en el tercero. Nótese que al resolver estos ejercicios se observa lo siguiente:

función	Area entre 0 y b	donde
$f(x) = x^0$	$b \cdot h$	$h = 1$
$f(x) = x^1$	$\frac{b \cdot h}{2}$	$h = b$
$f(x) = x^2$	$\frac{b \cdot h}{3}$	$h = b^2$
$f(x) = x^3$	$\frac{b \cdot h}{4}$	$h = b^3$

Formule una generalización a estos resultados a potencias superiores.

2. Calcular el área encerrada bajo la función $\text{sen}(x)$ entre 0 y $\pi/2$.

3. Calcule la integral $\int\limits_a^b (cx+d)$ usando una familia de particiones equiespaceadas.

4. Calcule la integral $\int\limits_a^b (e^x)$ usando una familia de particiones equiespaceadas.

Considere la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}, \quad x \in [a,b].$

(a) Calcule $s(f,P)$ y $S(f,P)$.

(b) Calcule $\inf\limits_{P \in \mathcal{P}_{a,b}} S(f,P)$.

5. Dados dos funciones f y g integrables en $[p,q]$ y $a, b \in [p,q]$, demostrar que:

1) $\displaystyle\int_a^b \alpha = \alpha(b-a), \quad \forall \alpha \in$

2) $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f, \quad \forall c \in [p,q]$

3) $\displaystyle\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f, \quad \forall \alpha \in$

4) $\displaystyle\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

5) $0 \leq f(x) \leq g(x), \ \forall x \in [p,q] \Rightarrow \left|\int_a^b f\right| \leq \left|\int_a^b g\right|$

6) $\left|\int_a^b f\right| \leq \left|\int_a^b |f|\right|$

6. Usando sumas de Riemann calcular los siguientes límites

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{k+n}$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+4k/n}}$.

(d) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \left(\frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^3} \right)$.

Problemas

P1. Considere la sucesión $a_n = \int\limits_0^n q^x dx$, con $0 < q < 1$.

(a) Explique por qué (a_n) está bien definida, es decir, por qué q^x es Riemann integrable en $[0, n]$, y muestre que es estrictamente creciente.

(b) Calcule las sumas de Riemann inferior y superior para q^x y la partición $P = \{0, 1, ..., n\}$.

(c) Utilice las sumas anteriores para obtener las siguientes cotas para (a_n).

$$\forall n \in \quad , \quad q\frac{1-q^n}{1-q} < \int\limits_0^n q^x dx < \frac{1}{1-q}.$$

(d) Concluya que (a_n) converge y que $a = \lim a_n$ satisface

$$\frac{q}{1-q} \leq a \leq \frac{1}{1-q}.$$

P2. Sea $f\colon [a,b] \to \quad$ una función integrable y acotada inferiormente por una constante $c > 0$. Para demostrar que $\frac{1}{f}$ es integrable, se pide lo siguiente:

(a) Si $S(\cdot,\cdot)$ y $s(\cdot,\cdot)$ denotan las sumas superiores e inferiores, pruebe que para toda partición P del intervalo $[a,b]$ se cumple

$$S(\frac{1}{f}, P) - s(\frac{1}{f}, P) \leq \frac{1}{c^2}\left\{S(f,P) - s(f,P)\right\}.$$

(b) Use el resultado anterior para demostrar que la función $\frac{1}{f}$ es integrable en $[a,b]$.

P3. Sea $f\colon [1,\infty[\to \quad$ una función no negativa y creciente

(a) Usando la partición $P = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ pruebe que

$$\sum_{1=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{i=2}^{n} f(i), \quad \forall n \geq 2.$$

(b) Considere $f(x) = \ln(x)$ y utilice la parte anterior para demostrar que

$$(n-1)! \leq n^n e^{-n+1} \leq n!, \quad \forall n \geq 1.$$

P4. Considere la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \text{ fracción irreducible} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$, $\quad x \in [0,1]$.

(a) Calcule $s(f,P)$ y $S(f,P)$.

(b) Calcule $\inf\limits_{P\in\mathcal{P}_{0,1}} S(f,P)$ y $\sup\limits_{P\in\mathcal{P}_{0,1}} s(f,P)$.

(c) Concluya que f es integrable y que $\int\limits_0^1 f = 0$.

P5. (a) Demuestre que:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{1/4}} + \frac{1}{e}\right) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{e^{(1/4)}}\right)$$

Indicación: Considere la partición $P = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

(b) Demuestre que $\int\limits_a^b \frac{1}{x} dx = \ln(b) - \ln(a)$, donde $0 < a < b$.

Indicación: Considere la partición $x_i = aq^i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.