Guía Semana 9

Ejercicios

1. **(a)** Probar que el área de una elipse de semi ejes a y b es πab.

(b) Calcular el área de un sector circular de radio R y ángulo interno α.
Respuesta: $A = \frac{R^2\alpha}{2}$.

(c) Concluir que para una circunferencia, $A = \pi R^2$.

2. Calcular el volumen de un toro de revolución, es decir el sólido obtenido por la rotación del círculo de radio r centrado en $(R, 0)$ (donde $R > r$) en torno al eje OY.

3. Hallar el área de la región encerrada entre las parábolas $y = \frac{x^2}{3}$ e $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$.

4. Determine el área del manto del sólido engendrado al rotar, en torno al eje OY, el trozo de la curva $y = \frac{x^2}{2}$, comprendido entre 0 y 1.

5. Hallar el volumen del cuerpo formado por la rotación en torno de la recta $y = -1$, de la región acotada por $y = 4 - x^2$ e $y = 3$.

Problemas

P1. Considere la curva cuyos puntos (x, y) satisfacen $(1 + x^2)y^2 = x^2(1 - x^2)$.

(a) Calcule el área de la región encerrada por esta curva.

(b) Calcule el volumen de revolución generado por la rotación de esta curva en torno al eje OX.

P2. Sea $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$. Si

$$R = \left\{(x, y) \in \;\, ^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq f(x)\right\}.$$

(a) Encuentre el área de la región R.

(b) Encuentre el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar la región R en torno al eje OX.

P3. Dada la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1,$$

encuentre el área del manto generado al rotar esta elipse en torno al eje OX entre $x = -1$ y $x = 1$.

P4. Sean $f, g \colon [-1, 1] \to$ las funciones dadas por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ y $g(x) = \sqrt{3} - \sqrt{1 - x^2}$.

(a) Calcular el área encerrada entre ambas curvas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

(b) Determinar el volumen del sólido generado por la rotación de la región encerrada por el eje OX y la curva $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, en torno a OX.

P5. **(a)** La parábola $f(x) = -6x^2 + 5x + 1$ corta el eje Y en $P_0(0, 1)$. Considere sobre la parábola el punto $P(a, f(a))$, $a \geq 0$. Demuestre que el área comprendida entre la parábola y el segmento P_0P es igual a $A = a^3$.

(b) Dadas las curvas $y = mx$ y $y = x^2$, considere la región limitada por ambas curvas y encuentre el valor de $m > 0$, para que los volúmenes de los sólidos obtenidos al rotar la región definida en torno al eje OX y al eje OY, sean iguales.