

En los problemas 1 y 2, establezca la proposición recíproca inversa y la contrapositiva de cada una de las proposiciones dadas.

1. “Si $2 + 2 = 4$, entonces no soy el rey de Inglaterra.”
2. “Si tengo tiempo y no estoy cansado, iré a la tienda.”

En los problemas 3 y 4, considere que la proposición “estudiaré matemática” se representa por la letra p , la proposición “iré al cine” por la letra q y la proposición “estoy de buen humor” por la letra r , y escriba en lenguaje simbólico los enunciados siguientes:

3. “Si no estoy de buen humor, entonces iré al cine.”
4. “No iré al cine y estudiaré matemática.”

En los problemas 5 al 8, clasifique las proposiciones siguientes como contingencias, contradicciones o tautologías.

5. $p \wedge p$
6. $q \vee (q \wedge p)$
7. $(p \wedge q) \vee r \rightarrow q$
8. $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \vee \neg q)$

En los problemas 9 y 10, determine en cada caso si el par de proposiciones son lógicamente equivalentes.

9. $p \vee (q \wedge r)$, $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
10. $p \vee (p \wedge q)$, p

En los problemas 11 y 12, suponga que el universo de discurso está formado por todos los números enteros; diga cuál es el valor de verdad de cada una de las proposiciones dadas, escriba su negación en cada caso, así como su valor de verdad.

11. $\forall x, x$ dividido por 2 es un entero.
12. $\exists x, \exists y, xy = 1$

En los problemas 13 y 14, construya la tabla de verdad para cada una de las proposiciones dadas.

13. $[(p \vee r) \wedge (q \vee r)] \wedge (\neg p \vee \neg r)$
14. $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \rightarrow r]$

En los problemas 15 y 16, diga si los pares de proposiciones dadas están formados por proposiciones lógicamente equivalentes.

15. $(p \vee r) \wedge (q \rightarrow r)$, $(p \rightarrow q) \rightarrow r$
16. $\neg q$, $(p \vee q) \rightarrow p$

En los problemas 17 y 18, diga si el argumento dado en cada caso es válido o es una falacia.

17. Si llegué en auto al trabajo, entonces llegué cansado a él. Llegué cansado al trabajo. Por tanto, manejé camino al trabajo.

18. Si trabajo duro y tengo talento, entonces seré un músico. Si soy músico, entonces seré feliz. Por tanto, si no seré feliz, entonces no trabajé duro o no tuve talento.

En los problemas 19 a 21, considere la proposición $\forall x, \forall y, x < y \rightarrow \exists z, x < z < y$

19. Escriba su negación.
20. Determine su valor de verdad cuando el universo del discurso está formado por los números reales o los racionales.
21. Determine su valor de verdad cuando el universo del discurso está formado por los números enteros positivos o los números enteros.
22. Describa los métodos que ha usado para hacer demostraciones y dé algunos ejemplos.

En los problemas 23 y 24, construya la tabla de verdad de cada una de las proposiciones dadas.

23. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)]$
24. $[(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)] \rightarrow (q \wedge p)$

En los problemas 25 y 26, discuta (analice y opine) cada uno de los argumentos dados.

25. Si obtengo el puesto y trabajo duro, entonces me ascenderán. Si me ascienden seré feliz. No seré feliz. Por tanto, no obtendré el puesto o no trabajaré duro.
26. Un lógico dice a su hijo: “Si no terminas la cena, te irás directo a dormir y no verás televisión”. Terminó la cena y fue enviado directamente a la cama.

En los problemas 27 y 28, demuestre los teoremas dados por el método que considere apropiado.

27. Si $p \rightarrow (q \vee r)$, $q \rightarrow s$ y $r \rightarrow t$, entonces $p \rightarrow (s \vee t)$
28. Si $p \rightarrow (q \wedge r)$, $(q \vee s) \rightarrow t$ y $p \vee s$, entonces t .

En los problemas 29 a 31, escriba el significado de los enunciados dados si se considera un universo de discurso A_1 que consta de los miembros de un club y un universo A_2 de líneas aéreas. Sea $P(x, y)$ el predicado “ x ha sido pasajero de y ”; escriba el significado de cada uno de los enunciados siguientes.

29. $\forall x, \forall y, P(x, y) \leftrightarrow \forall y, \forall x P(x, y)$
30. $\exists x, \exists y, P(x, y) \leftrightarrow \exists y, \exists x, P(x, y)$
31. $\exists x, \forall y, P(x, y) \rightarrow \forall y, \exists x, P(x, y)$

En los problemas 32 y 33, pruebe los enunciados dados por el modo de demostración que considere apropiado en cada caso.

32. “Si x es un número primo, entonces $x + 7$ es un número compuesto”.
33. “Para todo número irracional t , $t - 8$ es irracional.”

En los problemas 34 a 36, complete.

34. Si $A \subset B$, entonces

$$A \cup B = \quad A \cap B = \quad A - B =$$

35. Si A y B son disjuntos, entonces

$$A - B = \quad A \cap B = \quad B - A =$$

36. Si $A = \emptyset$, entonces

$$A \cup B = \quad A \cap B = \quad A \Delta B =$$

En los problemas 37 a 40, determine la cardinalidad de cada uno de los conjuntos dados.

37. $A = \{x \mid x = 5n + 2, n \in \mathbb{N}\}$

38. $B = \{x + 3 \mid 2 < x < 12, x \in \mathbb{N}\}$

39. $C = \{2n - 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$

40. $D = \{x - 1 \mid 6 < x < 10, x \in \mathbb{N}\}$

En los problemas 41 a 46, dé el valor de verdad de las proposiciones dadas.

41. $3 \in \{3\}$

42. $5 = \{5\}$

43. $\{6\} \subset \{\{6\}\}$

44. $\{2, 3\} = \{3, 2\}$

45. $\emptyset \in \{2\}$

46. $\{2\} \subseteq \{2\}$

En los problemas 47 a 52, considere $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y efectúe las operaciones de conjuntos indicadas.

47. $(A' - B) \cap C$

48. $(B \Delta C)' \cup B$

49. $(B' \cup A') \Delta C$

50. $(C' \cap A) \cup B$

51. $\wp(A) \cap \wp(C)$

52. $(A \cup B) \cap C'$

En los problemas 53 y 54 demuestre que:

53. $A \Delta A = \emptyset, \forall A$

54. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C), \forall A, B, C$

En los problemas 55 a 58, considere $U = \{0, 1, 2, 3\}$, $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{0, 1\}$, $A_3 = \{0, 3\}$, $A_4 = \{1, 2, 3\}$, $A_5 = \{0, 2, 3\}$ y determine lo que se indica.

55. $\bigcup_{i=1}^3 A_i \Delta \bigcap_{i=1}^4 A_i$

56. $\bigcap_{i=1}^5 A_i' \cup \left(\bigcup_{i=1}^2 A_i \right)$

57. $\wp\left(\bigcup_{i=1}^4 A_i\right) - \wp\left(\bigcap_{i=1}^3 A_i'\right)$

58. $\bigcap_{i=1}^4 (A_i - A_{i+1})$

En los problemas 59 a 62, trace una representación en diagrama de Venn del resultado de las operaciones en cada caso.

59. $(A \cup B) - (A \cap B)$

60. $A - (B - C)$

61. $A' \cup (B' - C)'$

62. $(A' \cup B') \cap (C \cap B)$

En los problemas 63 a 66, considere conjuntos A, B, C de un cierto conjunto universal U y diga cuáles de las afirmaciones dadas son verdaderas y cuáles son falsas. En caso de que una afirmación sea falsa, dé un ejemplo en el cual la afirmación no se cumpla.

63. $(A \cup B) \subset A \cap B$ implica que $A = B$

64. $(A \cup \emptyset) \cup B = B \quad \forall A, B$

65. $A \cap (\emptyset \cup B) = A$ siempre que $A \subset B$

66. $A \cup B = A' \cup B' \quad \forall A, B$

67. Un pueblo pequeño posee 300 automóviles para el transporte público de sus habitantes. Se sabe que 110 de estos autos tienen más de 20 años de edad, que 120 son de la Nissan y que 50 son de la Nissan con más de 20 años de edad. Determine el número de carros que:

- No son de la Nissan.
- No son de la Nissan y tienen más de 20 años.
- Son de la Nissan con 20 o menos años.
- No son de la Nissan y tienen 20 o menos años.
- Tienen 20 o menos años.

68. En un grupo de 150 personas, 45 nadan, 40 montan bicicleta y 50 corren. Se sabe que 20 personas nadan y montan bicicleta, que 32 corren pero no montan bicicleta y 10 personas realizan las tres actividades.

- ¿Cuántas personas montan bicicleta pero no nadan ni corren?
- Si 21 personas corren y nadan, ¿cuántas no realizan ninguna de las tres actividades?

69. Al interrogar a una delegación deportiva formada por 250 atletas sobre su afición respecto al teatro, la danza o la poesía, se encontró que 125 prefieren el teatro, 180 prefieren la danza, 65 la poesía, 100 teatro y danza, 25 teatro y poesía, 40 danza y poesía y 20 tenían las tres preferencias. Determine cuántos de estos 250 atletas tienen:

- Al menos una de estas tres preferencias.
- Ninguna de estas tres preferencias.
- Sólo una de estas tres preferencias.
- Cuando mucho una de estas tres preferencias.
- Exactamente dos de estas preferencias.

70. Una agencia de automóviles vendió durante un año 180 unidades con las características siguientes:

- 57 tenían transmisión mecánica.
- 77 tenían aire acondicionado.
- 45 tenían transmisión mecánica y aire acondicionado.
- 10 tenían transmisión mecánica, pero no tenían aire acondicionado ni equipo de música.

- 28 tenían transmisión mecánica y aire acondicionado, pero no tenían equipo de música.
- 90 no tenían ninguna de las tres características mencionadas.
- 19 tenían aire acondicionado y equipo de música.

¿Cuántas de estas unidades tenían equipo de música?