Pauta Certamen 2 Cálculo Integral

3 de mayo de 2017

Profesores Patricio Cumsille - Juan Espinoza

Distribución de puntaje: Todas las preguntas tienen igual puntaje: 1,5 puntos cada una (más 1 punto base).

P1. *a*) Mediante el método de fracciones parciales calcule:

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx.$$

b) Mediante una sustitución trigonométrica calcule:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

P2. Calcule la integral indefinida siguiente:

$$\int \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right) dx\ .$$

Indicación: Haga la sustitución $u = \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right)$.

P3. Usando la estrategia más apropiada calcule las integrales indefinidas siguientes:

a) $\displaystyle\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx.$

Indicación: Aplique fracciones parciales.

b) $\displaystyle\int \frac{1}{2\sin x + \sin(2x)} dx.$

P4. *a*) Utilizando integración por partes, demuestre la fórmula de recurrencia siguiente:

$$\int \sec^n(x) dx = \frac{\tan(x)\sec^{n-2}(x)}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}(x) dx.$$

b) Use la fórmula del ítem anterior para calcular $\displaystyle\int \sec^3(x) dx.$

Solución Certamen 2

P1. *a*) Como $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$, entonces:

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4} \ . \tag{1}$$

La igualdad anterior será cierta sí y solamente si

$$A(x^2 + 4) + x(Bx + C) = 2x^2 - x + 4.$$

Igualando término a término obtenemos que:

$$\begin{aligned} A + B &= 2 && (2) \\ C &= -1 && (3) \\ 4A &= 4 && (4) \end{aligned}$$

De la ecuación (3) obtenemos directamente el valor de C: $\boxed{C = -1}$. De la ecuación (4) sale que $\boxed{A = 1}$. Finalmente, reemplazando A en la ecuación (2) tenemos que $\boxed{B = 1}$.

Integrando ambos lados de la igualdad (1) y separando en 3 integrales, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx &= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{x}{x^2 + 4} dx - \int \frac{1}{x^2 + 4} dx \\ &= \ln|x| + \frac{1}{2} \ln\left(x^2 + 4\right) - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

b) Haciendo la sustitución trigonométrica $x = \sin\theta$, y notando que $\sqrt{1 - x^2} = \cos\theta$ y que $dx = \cos\theta d\theta$, obtenemos que:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \int \frac{\sin^2\theta \ \cos\theta d\theta}{\cos\theta} = \int \sin^2\theta d\theta.$$

Utilizando la identidad

$$\cos(2\theta) = \underbrace{\cos^2\theta}_{1 - \sin^2\theta} - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta,$$

tenemos que

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2\theta)\right].$$

Luego,

$$\int \sin^2\theta d\theta = \int \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2\theta)\right] = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin(2\theta) + C.$$

Volviendo a la variable original, y usando la identidad $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta = 2x\sqrt{1-x^2}$, obtenemos que:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \sin^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\left(\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}\right) + C.$$

P2. Haciendo el cambio de variables indicado tenemos:

$$u = \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right) \iff \sin u = \sqrt{\frac{x}{1+x}}.$$

Despejando x de la última igualdad anterior, obtenemos que:

$$\sin^2 u = \frac{x}{1+x} \iff \sin^2 u = x\left(1-\sin^2 u\right) = x\cos^2 u \iff x = \tan^2 u.$$

Luego,

$$dx = 2\tan u \sec^2 u du.$$

Reemplazando u y dx en la integral que deseamos calcular obtenemos que:

$$\int \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right) dx = \int 2u\tan u\sec^2 u du. \tag{5}$$

Para calcular esta última integral realizamos la sustitución $z = \tan u$. Así, $dz = \sec^2 u du$ y por lo tanto:

$$\int 2u\tan u\sec^2 u du = \int 2z\arctan z dz. \tag{6}$$

Poniendo $dv = 2zdz$, con $v = z^2$, y $u = \arctan z$, con $du = \frac{dz}{1+z^2}$, e integrando por partes esta última integral, obtenemos que:

$$\int 2z\arctan z dz = z^2\arctan z - \int \frac{z^2 dz}{1+z^2}. \tag{7}$$

Para calcular la última integral del lado derecho de la igualdad, notemos que:

$$\frac{z^2}{1+z^2} = 1 - \frac{1}{1+z^2}.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{z^2 dz}{1+z^2} = z - \arctan z + C.$$

Reemplazando esta igualdad en (7), y a su vez (7) en (6), y ésta en (5), y devolviendo los cambios de variables, llegamos finalmente a:

$$\begin{aligned}\int \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right) dx &= z^2\arctan z - z + \arctan z + C \\ &= u\tan^2 u - \tan u + u + C \\ &= x\arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right) - \sqrt{x} + \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right) + C.\end{aligned}$$

P3. *a*) **Primera Forma:** Siguiendo la indicación, tenemos que:

$$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}\,. \tag{8}$$

Sumando las fracciones parciales e igualando coeficiente a coeficiente, tenemos que:

$$A(x+1) + B = x \iff \boxed{A = 1} \quad \text{y} \quad A + B = 0.$$

Luego, $\boxed{B = -1}$. Por lo tanto, reemplazando A y B en (8), a su vez utilizando (8) en la integral original, y separando en 2 integrales obtenemos que:

$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = \int \frac{e^x}{x+1}dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2}dx = I_1 - I_2, \tag{9}$$

donde $I_n = \displaystyle\int \frac{e^x}{(x+1)^n}dx$. Ahora bien, poniendo $u = \frac{1}{x+1}$, con $du = -\frac{dx}{(x+1)^2}$, y $dv = e^x dx$, con $v = e^x$, e integrando por partes I_1, llegamos a:

$$I_1 = \int \frac{e^x}{x+1}dx = \frac{e^x}{x+1} - \int e^x \cdot -\frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{e^x}{x+1} + I_2.$$

En consecuencia, tenemos que:

$$I_1 - I_2 = \frac{e^x}{x+1} + C.$$

Reemplazando esta igualdad en (9), llegamos finalmente al resultado:

$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = I_1 - I_2 = \frac{e^x}{x+1} + C.$$

Segunda Forma: Poniendo $u = xe^x$, con $du = (e^x + xe^x)dx = e^x(x+1)dx$, y $dv = \frac{dx}{(x+1)^2}$, con $v = -\frac{1}{x+1}$, e integrando por partes, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx &= xe^x\frac{-1}{x+1} - \int -\frac{1}{x+1}e^x(x+1)dx \\
&= -\frac{xe^x}{x+1} + \int e^x dx \\
&= -\frac{xe^x}{x+1} + e^x + C = \frac{e^x}{x+1} + C.
\end{aligned}$$

b) Utilizando la identidad $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ tenemos que:

$$\int \frac{1}{2\sin x + \sin(2x)}dx = \int \frac{dx}{2\sin x\,(1 + \cos x)}. \tag{10}$$

Primera forma: Haciendo el cambio de variables $u = \cos x$, tenemos que $du = -\sin x dx$. Así, multiplicando y dividiendo por $-\sin x$ la igualdad anterior, y notando que $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - u^2$, obtenemos que:

$$\int \frac{dx}{2\sin x\,(1+\cos x)} = \int \frac{du}{-2\sin^2 x(1+u)} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{(1-u^2)(1+u)} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{(1-u)(1+u)^2}. \tag{11}$$

Utilizando fracciones parciales para la última integral, obtenemos que:

$$\frac{1}{(1-u)(1+u)^2} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} + \frac{C}{(1+u)^2}\ . \tag{12}$$

Sumando las fracciones parciales e igualando coeficiente a coeficiente, tenemos que:

$$A(1+u)^2 + B(1-u^2) + C(1-u) = 1,$$

de donde sale que

$$\begin{aligned} A - B &= 0 && (13)\\ 2A - C &= 0 && (14)\\ A + B + C &= 1 && (15) \end{aligned}$$

Despejando B y C de las ecuaciones (13) y (14), respectivamente, obtenemos que $B = A$ y $C = 2A$. Reemplazando esto último en la ecuación (15), obtenemos:

$$4A = 1 \iff \boxed{A = \frac{1}{4}}$$

Por último, reemplazando A en $B = A$ y $C = 2A$ llegamos a:

$$\boxed{B = \frac{1}{4}} \quad \text{y} \quad \boxed{C = \frac{1}{2}}$$

Finalmente, reemplazando A, B y C en (12), a su vez (12) en (11), y devolviendo el cambio de variables, sale que:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2\sin x\,(1+\cos x)} &= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\int \frac{du}{1-u} + \frac{1}{4}\int \frac{du}{1+u} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{(1+u)^2}\right] \\ &= -\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}\ln|1-u| + \frac{1}{4}\ln|1+u| - \frac{1}{2}\frac{1}{1+u}\right] + C \\ &= -\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}\ln|1-\cos x| + \frac{1}{4}\ln|1+\cos x| - \frac{1}{2(1+\cos x)}\right] + C \\ &= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| - \frac{1}{1+\cos x}\right] + C. \end{aligned}$$

Segunda forma: Haciendo directamente el cambio de variables usual $t = \tan(x/2)$, y recordando que

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

tenemos que, reemplazando en la integral (10):

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{2\sin x(1+\cos x)} &= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1+t^2}{t}dt\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\ln|t| + \frac{t^2}{2}\right) + C \\
&= \frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{\sin x}{\cos x + 1}\right| + \frac{\sin^2 x}{2(\cos x+1)^2}\right) + C.
\end{aligned}$$

La última igualdad anterior se obtiene de la fórmula:

$$\tan(x/2) = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} \cdot \frac{\cos(x/2)}{\cos(x/2)} \underbrace{=}_{\cos^2(\alpha)=\frac{1}{2}(\cos(2\alpha)+1)} \frac{\frac{1}{2}\sin x}{\frac{1}{2}(\cos x + 1)} = \frac{\sin x}{\cos x + 1}.$$

Observación: Notar que a partir de los resultados, se tiene que las funciones

$$-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| - \frac{1}{1+\cos x}\right] \quad \text{y} \quad \frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{\sin x}{\cos x+1}\right| + \frac{\sin^2 x}{2(\cos x+1)^2}\right)$$

tienen que diferir a lo más de una constante aditiva.

P4. *a*) Denotemos $I_n = \displaystyle\int \sec^n x dx$. Se tiene que

$$\sec^n x = \sec^{n-2} x \sec^2 x = \sec^{n-2} x \left(\tan x\right)'.$$

Hagamos

$$\begin{aligned} u &= \sec^{n-2} x, \quad \text{con} \quad du = (n-2)\sec^{n-3} x \sec x \tan x dx = (n-2)\sec^{n-2} x \tan x dx, \\ dv &= \sec^2 x dx, \quad \text{con} \quad v = \tan x. \end{aligned}$$

Integrando por partes I_n, llegamos a:

$$\int \sec^n x dx = \tan x \sec^{n-2} x - (n-2) \int \underbrace{\tan^2 x}_{\sec^2 x - 1} \sec^{n-2} x dx.$$

Por lo tanto,

$$\underbrace{\int \sec^n x dx}_{I_n} = \tan x \sec^{n-2} x - (n-2) \underbrace{\int \sec^n x dx}_{I_n} + (n-2) \underbrace{\int \sec^{n-2} x dx}_{I_{n-2}}.$$

Despejando I_n de la igualdad anterior, obtenemos que:

$$I_n + (n-2) I_n = \tan x \sec^{n-2} x + (n-2) I_{n-2}.$$

De lo anterior, finalmente sale que:

$$I_n = \frac{\tan x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2},$$

es decir, reemplazando I_n e I_{n-2}:

$$\int \sec^n x dx = \frac{\tan x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx.$$

b) Utilizando la fórmula anterior para $n = 3$ obtenemos que:

$$\begin{aligned} I_3 = \int \sec^3 x dx &= \frac{\tan x \sec x}{2} + \frac{1}{2} \underbrace{\int \sec x dx}_{I_1} \\ &= \frac{1}{2} \left(\tan x \sec x + \ln|\sec x + \tan x|\right) + C. \end{aligned}$$