Guía Semana 14

Ejercicios

1. Calcule el valor de las siguientes series.

(a) $\sum \frac{4}{(4k-3)(4k+1)}$.

(b) $\sum \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$.

(c) $\sum \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}\sqrt{k}}$.

2. Demostrar que las siguientes series divergen.

(a) $\sum k^2$.

(b) $\sum k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

(c) $\sum k \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$.

(d) Para $a \in$, $\sum \left(1+\frac{a}{k}\right)^k$.

3. Aplicar el álgebra de series para estudiar la convergencia de las siguientes series.

(a) $\sum \left(\frac{5}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right)$.

(b) $\sum \left(\frac{1}{2^k}+\frac{(-1)^k}{5^k}\right)$.

4. Estudiar la convergencia de las siguientes series.

(a) $\sum \frac{2^k+\cos(4^k)}{3^k}$.

(b) $\sum \frac{1}{e^k+\tan\left(\frac{1}{k}\right)}$.

(c) $\sum \frac{k+1}{k^2+1}$.

(d) $\sum \frac{k+\ln(k)}{k^3}$.

5. Sea (a_n) una sucesión de términos positivos y tales que $\sum a_k$ converge. Demostrar que la serie $\sum a_k^2$ converge.

6. Estudiar la convergencia de las series

(a) $\sum \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k^2}\right)$.

(b) $\sum \ln\left(\frac{k^2+1}{k^2}\right)$.

(c) $\sum \frac{1}{\sqrt{k}(1+\sqrt{k})}$.

(d) $\sum \operatorname{tg}\left(\frac{1}{k^2}\right)$.

(e) $\sum \frac{1}{k(k)^{\frac{1}{k}}}$.

(f) $\sum \left(\sqrt{k^2+k}-k\right)$.

7. Sea $\sum a_k$ una serie convergente con $a_k \geq 0$ y $a_k \neq 1$. Demostrar que las series $\sum \frac{a_k}{1+a_k}$ y $\sum \frac{a_k}{1-a_k}$ son convergentes.

8. Estudiar la convergencia de las series

(a) $\sum \frac{1}{e^{\sqrt{k^2+k}}}$.

(b) $\sum q^k k^\alpha$ para $\alpha > 0$ y $q \in (0,1)$.

(c) $\sum \frac{a^k}{k^k}$.

9. Probar que las siguientes series son absolutamente convergentes.

(a) $\sum \frac{\cos(k^k)}{k^2}$. **(b)** $\sum (-1)^k \frac{1}{k^\alpha}$ con α **(c)** $\sum (-1)^k \frac{(k!)^2}{(2k)!}$.
1.

10. Determinar para que valores de a la serie $\sum a^k k^a$es absolutamente convergente. las series $\sum \frac{a_k}{1+a_k^2}$ y $\sum \frac{\sqrt{|a_k|}}{k}$ son absolutamente convergentes

11. Estudiar la convergencia de las siguientes series.

(a) $\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$.

(b) $\sum (-1)^k \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$.

Problemas

P1. (a) Analice la convergencia de la siguiente serie; en caso de ser convergente, calcule su valor $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.
Indicación: Utilice la identidad $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}$.

(b) Use el Criterio de la Integral para analizar la convergencia de la integral $\int_1^\infty \frac{e^y}{y^y}$.

(c) Analice la convergencia absoluta y condicional de la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{k(k+1)}$.

P2. (a) (a1) Demuestre que para todo número real p, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{pn}}{n!}$ converge
.

(a2) Estudie la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{10}{n}\right)^{n^2}}{n!}$.

(b) Considere la función

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x), \quad x \geq 0.$$

(b1) Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ de término $a_n = (-1)^n f(n)$ converge.

(b2) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} x\, f(x)$ y utilice este resultado para demostrar que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ definida en **(b2)** no converge absolutamente.

P3. Estudie la convergencia de las siguientes series:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(k-1)!}}{\prod_{j=1}^{k}(1+\alpha\sqrt{j})}$ para $\alpha > 1$.

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$ (Ind: demuestre que $\arctan x \leq x \quad \forall x \geq 0$)