Guía Semana 10

Ejercicios

1. Gráficar el cardioide de ecuación $r = 1 + 2\operatorname{sen}\phi$.

2. **(a)** Calcule la longitud total de la curva $y = \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}}) - \frac{1}{2}(x^{\frac{1}{2}})$ entre $x = 1$ y $x = 4$.

(b) Determine el volumen de un cono de revolución de altura a cuya base es de radio b.

3. **(a)** Calcule la longitud de la curva $\rho = a(1 - \operatorname{sen}(\theta))$.

(b) Calcule el área de la región comprendida entre la curva dada en la parte anterior y $\rho = a$.

4. Calcular el largo de la curva $c(t) = \begin{cases} e^{-bt} & 0 \leq t \leq 1 \\ e^{a(t-1)-b} & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$.

5. Dada la curva $(\frac{x}{a})^{\frac{2}{3}} + (\frac{y}{b})^{\frac{2}{3}} = 1$, calcular su longitud de arco en el primer cuadrante.

6. Determinar el centro de masa de la región encerrada entre las curvas $x^2+y^2 = a^2$ y $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$. Suponga densidad constante.

Problemas

P1. Sea $f : [0, \infty[\to$ tal que $f(0) = 0$ y la longitud de la curva $y = f(x)$ entre 0 y x es igual a $x^2 + 2x - f(x)$.

(a) Determinar f.

(b) Calcular el área bajo la curva $y = f(x)$ y su longitud entre $x = 0$ y $x = 1$.

P2. Considere la espiral de ecuación paramétrica $x(t) = e^{2t}\cos(t)$, $y(t) = e^{2t}\operatorname{sen}(t)$.

(a) Encuentre el largo L, de la curva obtenida al variar el parámetro t, desde 0 hasta 2π.

(b) Encuentre t_0 tal que, la longitud de la curva obtenida al variar el parámetro t, desde 0 a t_0 sea igual a la mitad del largo L, obtenido en la parte anterior.

P3. Considere la curva C definida por $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$. Demuestre que la longitud de arco de la curva C en el primer cuadrante esta dada por:

$$S = a^{1/3}\int_0^a \frac{dx}{x^{1/3}}.$$

P4. Probar que el largo de la elipse de ecuación $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ es igual al largo de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$, entre 0 y 2π.