Departamento de Ciencias Básicas.
Cálculo Diferencial.
Profesores: Marco Inostroza - Jorge Torres - Berry van der Veer

GUÍA LÍMITES.

Ejercicios:

1. Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+5}{x-3} =$

   b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1} =$

   c) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x-b}-a-b}{x^2-a^2} =$

   d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} =$

   e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2-1} =$

   f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ax+b}{\sqrt{cx^2+d}} =$

   g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{xe^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-1} =$

   h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

2. Estudiar si existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, para $f(x) = \begin{cases} \frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1} & \text{, si } x > 1 \\ \frac{2x^2-3}{x^2+3} & \text{, si } x < 1 \end{cases}$.

3. Calcular las asíntotas oblicuas de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \dfrac{x^2+a}{x}$

   b) $f(x) = \sqrt{x^2-a^2}$

   c) $f(x) = (1-e^{-x})(mx+n)$

4. Estudie la existencia de asíntotas verticales en las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

   b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

   c) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

   d) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

   e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$

   f) $f(x) = \dfrac{1}{|x|-1}$

5. Usando la caracterización $(\epsilon - \delta)$ del límite,

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |x-c| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$$

   demuestre que:

   a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{5}{x-2} = 5$

   b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \dfrac{1}{4}$

   c) $\lim\limits_{x \to 8} \sqrt{x+1} = 3$

   d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+4}} = \dfrac{1}{2}$

   e) $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$

   f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{1+\sin^2(x)} = 0$

6. Estudiar las asíntotas y límites importantes para las siguientes funciones:

   a) $f(x) = e^{-1} + xe^{\frac{1}{x}}$.

   b) $f(x) = \dfrac{x^3}{(1+x)^2}$.

   c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^4+1}{x^2-1}}$

7. Calcule los siguientes límites:

   a) $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{x^2+1}{x-3} =$

   b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)+e^x-\sqrt{x}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+\cos(x)}}} =$

   c) $\displaystyle \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}(1-x) =$

   d) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}} =$

   e) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \sin\left(\sqrt{1+\frac{1}{|x|}}\right)-\sin\left(\sqrt{\frac{1}{|x|}}\right) =$

   f) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} =$

   g) $\displaystyle \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) =$

   h) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(x^2-1\right)}{\ln(-x)} =$

   i) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} =$

   j) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} =$

   k) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} =$

   l) $\displaystyle \lim_{x\to \pi} \frac{\sin(x)}{x-\pi} =$

   m) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} =$

   n) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} =$

   ñ) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x} =$

   o) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{\tan(x^2)} =$

8. Calcule los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} =$

   b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{x} =$

   c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x^2} =$

   d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} =$

   e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x^2)}{x^2 - 1} =$

   f) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\ln(x+1)\right) - \ln(x) =$

   g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\ln(1+x)} =$

   h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln\left(\sin(x) + \cos(x)\right)}{x} =$

   i) $\lim\limits_{x \to 0} x^{\frac{1}{1-x}} =$

   j) $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} =$

   k) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{e^{\sin(x)} - 1}{x - \pi} =$

   l) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \tan(x) =$

9. Determine el valor de c, si se sabe que: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x = 4$

10. Estudie la existencia de $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} \frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1} & \text{, si } x > 1 \\ \frac{2x^2-3}{x^2+3} & \text{, si } x < 1 \end{cases}$.

11. Calcule las asíntotas de todo tipo para las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

   b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

   c) $f(x) = \left(1 - e^{-x}\right)(2x+5)$

   d) $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Problemas:

P1. Demuestre que las rectas $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ son las asíntotas de las hipérbolas $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1$

P2. Calcule los siguientes límites, si es que existen:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\Big(\log_{1+x}(2) + \log_{(1+x)^2}(\pi)\Big) =$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln\big(\cos(\sqrt{x})\big)}{x} =$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 3^x}{\ln(1+x)} =$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)} - e^x}{x} =$

P3. Calcule todas las asíntotas de la siguiente función y determine si $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ existe.

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x) & \text{, si } x \leq 0 \\ \frac{\sin(x)}{x(x-1)} & \text{, si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{, si } x = 1 \\ \frac{2+x+x^2}{1-x^2}e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{, si } 1 < x \end{cases}$$