Solución Test 2 Cálculo Integral
Profesor Patricio Cumsille
11 de Mayo de 2016

P1. Calcule la integral $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x^2}dx$ usando una suma de Riemann asociada a una partición arbitraria del intervalo $[a, b]$.

Indicación: Elija x_i^* como la media geométrica de x_{i-1} y x_i (es decir, $x_i^* = \sqrt{x_{i-1}x_i}$) y use la identidad

$$\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}.$$

Solución: Recordemos que para cualquier función f definida y continua sobre un intervalo $[a, b]$ se cumple que:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i,$$

para cualquier $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, donde $[x_{i-1}, x_i]$ corresponde al i-ésimo intervalo definido por la partición P, de norma $|P| = \max_{i=1,\dots,n} \Delta x_i$ con $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Tomando una partición P arbitraria del intervalo $[a, b]$, eligiendo $x_i^* = \sqrt{x_{i-1}x_i}$ y aplicando la identidad de la indicación de manera apropiada obtenemos que:

$$\int_a^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_{i-1}x_i}\Delta x_i = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i}.$$

La última igualdad se obtiene gracias a que:

$$\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i} = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1}x_i} = \frac{\Delta x_i}{x_{i-1}x_i}.$$

Luego, aplicando la propiedad telescópica llegamos a que:

$$\int_a^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i} = \lim_{|P|\to 0} \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

P2. Evalúe el límite reconociendo la suma como una suma de Riemann para una función definida en $[0, 1]$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right).$$

Solución: Es claro que la sumatoria corresponde a una suma de Riemann de la función $f(x) = \sqrt{x}$ asociada a la partición $x_i = \frac{i}{n}$ $(i = 0, \ldots, n)$ del intervalo $[0, 1]$, donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}$ corresponde al largo de los intervalos definidos por la misma (partición equiespaciada). Luego, el límite de la sumatoria corresponde a la integral de la función $\sqrt{x}$ entre 0 y 1:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right) = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

P3. Encuentre una función f y un número real $a > 0$ tales que

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}dt = 2\sqrt{x}, \qquad \forall x > 0.$$

Solución: Hay dos formas de resolver este ejercicio. Primero veamos la más simple.

Evaluando la igualdad del enunciado en $x = a$ obtenemos que:

$$6 = 2\sqrt{a} \Longrightarrow \sqrt{a} = 3 \Longrightarrow a = 9.$$

Además, derivando con respecto a x la igualdad del enunciado y aplicando el TFC obtenemos que:

$$\frac{f(x)}{x^2} = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \Longrightarrow f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}} = x^{2-\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}.$$

Otra forma: La forma más larga (aunque válida) consiste en primero derivar la igualdad del enunciado (aplicando el TFC) para obtener, igual que más arriba, la función $f(x)$, para luego reemplazarla en la igualdad del enunciado para determinar a:

$$6 + \int_a^x \underbrace{\frac{t^{\frac{3}{2}}}{t^2}}_{t^{-\frac{1}{2}}} dt = 2\sqrt{x} \Longrightarrow 6 + 2t^{\frac{1}{2}}|_a^x = 2\sqrt{x} \Longrightarrow 6 + 2(\sqrt{x} - \sqrt{a}) = 2\sqrt{x}.$$

De la igualdad anterior se obtiene que $6 - 2\sqrt{a} = 0$ y despejando a obtenemos su valor como antes.