Solución Certamen 2 Cálculo Integral
21 de Junio de 2016
Profesores Patricio Cumsille - Luis Pajkuric

P1 (Teorema Fundamental del Cálculo y Sumas de Riemann).

1. **[0,75 puntos].** Sea $f(x) = \int_1^x x\ln(tx)dt$, definida para cada $x > 0$.

   Demuestre que $f'(x) = (4x - 1)\ln(x)$ para todo $x > 0$.

   Indicación: Puede serle útil hacer el cambio de variables $u = tx$.

2. **[0,75 puntos].** Exprese el siguiente límite como una integral definida y calcúlelo.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+(i/n)^2} .$$

P2 (Aplicaciones de la Integral).

1. **[1 punto].** La región encerrada por las curvas $y = \frac{x^2}{4}$ e $y = 2x^3$ se hace girar alrededor del eje OX. Determine el volumen del sólido de revolución generado.

2. **[1 punto].** Calcule la longitud del arco de la curva $y = \ln(\sec x)$ entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{4}$.

3. **[1 punto].** Halle el área encerrada por las gráficas de $y = x^3 + x^2 - 3x$ e $y = -x$.

   Indicación: Vea la Figura 1 a continuación.

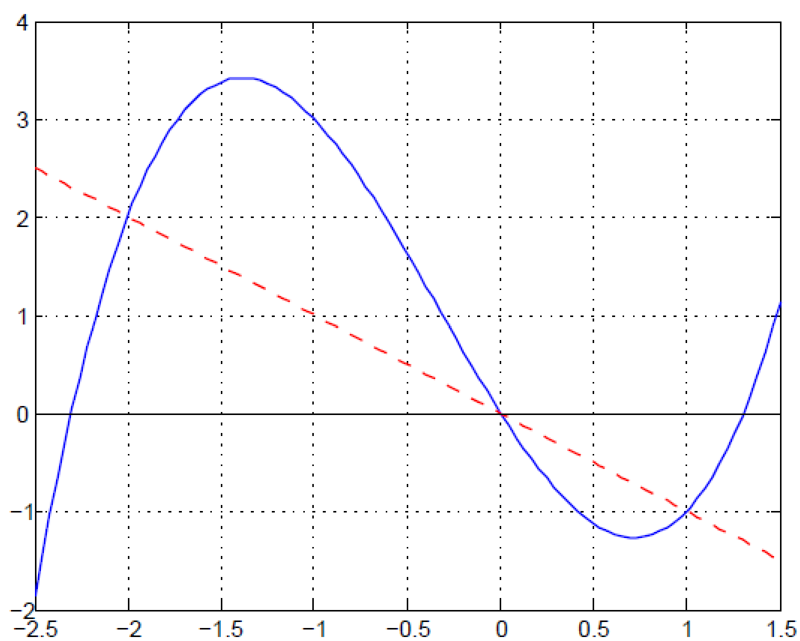

Figura 1: Gráfico para ítem 3

Formulario P2:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx, \quad V = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right) dx, \quad L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \ .$$

P3 (Integrales impropias).

1. **[0,5 puntos].** Por medio del criterio de comparación, determine la convergencia de la siguiente integral impropia de primera especie.

$$\int_0^\infty e^{-x} \ln(x) dx \ .$$

Indicación: Puede serle útil utilizar que $\ln(x) < x$ para todo $x > 0$.

2. **[1 punto].** Por medio del criterio del cociente, determine la convergencia de la siguiente integral impropia de segunda especie.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(2+x)}} \ .$$

Indicación: Puede serle útil recordar que la integral impropia $\displaystyle\int_a^{b^-} \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx$ es convergente para cada $\alpha < 1$.

Solución P1 (Teorema Fundamental del Cálculo y Sumas de Riemann).

1. **Primera forma.** La forma más simple de calcular $f'(x)$ es mediante el cambio de variables $u = xt$ (donde $x > 0$ es número real fijo y t varía entre 1 y x). En este caso, un cálculo sencillo muestra que $t = 1 \Longrightarrow u = x$, $t = x \Longrightarrow u = x^2$, y que $du = xdt$. Luego,
$$f(x) = \int_1^x x \ln(tx)dt = \int_x^{x^2} \ln(u)du \ .$$
Derivando lo anterior con respecto a x y aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) tenemos directamente el resultado:
$$f'(x) = \underbrace{\ln(x^2)}_{=2\ln(x)} \cdot 2x - \ln(x) \cdot 1 = 4x\ln(x) - \ln(x) = (4x - 1)\ln(x) \ .$$
Segunda forma. La forma más complicada sería no hacer el cambio de variables anterior. En este caso, aplicando la propiedad del logaritmo $\ln(tx) = \ln(t) + \ln(x)$ tenemos que:
$$f(x) = x \int_1^x (\ln t + \ln x)\, dt = x\left(\int_1^x \ln t dt + (x-1)\ln x\right) .$$
Ahora, derivando lo anterior con respecto a x y aplicando el TFC, tenemos que:
$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_1^x \ln t dt + (x-1)\ln x + x\left(\ln x + \ln x + \frac{x-1}{x}\right), \\ &= \int_1^x \ln t dt + (x-1)\ln x + 2x\ln x + x - 1 = \int_1^x \ln t dt + (3x-1)\ln x + x - 1 \quad (1) \end{aligned}$$
Por otro lado, aplicando integración por partes, haciendo
$$u = \ln t, \quad dv = dt, \quad du = \frac{dt}{t}, \quad v = t\,,$$
obtenemos que $\int \ln t dt = t\ln t - t + C$. Así, $\int_1^x \ln t dt = x\ln x - x - (1\cdot\ln 1 - 1) = x\ln x - x + 1$. Luego, reemplazando el resultado anterior en (1) llegamos a:
$$f'(x) = x\ln x - x + 1 + (3x-1)\ln x + x - 1 = (4x-1)\ln x \ .$$

2. Es claro que la sumatoria dentro del límite corresponde a una Suma de Riemann de la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ asociada a la partición $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$, del intervalo $[0,1]$ (ya que $x_0 = 0$ y $x_n = 1$). En efecto,
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}, \qquad f(x_i) = \frac{1}{1 + (i/n)^2}\,,$$
y así
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+(i/n)^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i = \int_0^1 f(x)dx = \arctan(x)|_0^1 = \frac{\pi}{4} \ .$$

Solución P2 (Aplicaciones de la Integral).

1. Primero intersectamos las curvas para determinar los límites de la región encerrada por las mismas:
$$\frac{x^2}{4} = 2x^3 \Longrightarrow x^2\left(2x - \frac{1}{4}\right) = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad \text{o} \quad x = \frac{1}{8}\,.$$
Luego, la región queda encerrada entre $x = 0$ y $x = 1/8$. Para dichos valores de x, claramente la curva $y = 2x^3$ queda por debajo de la curva $y = \frac{x^2}{4}$ (al elevar un número menor que 1 a una potencia más grande, el resultado es más pequeño). De hecho, analíticamente es fácil comprobar lo anterior:
$$2x^3 \leq \frac{x^2}{4} \iff \underbrace{x^2}_{\geq 0}\left(2x - \frac{1}{4}\right) \leq 0 \iff 2x - \frac{1}{4} \leq 0 \iff x \leq \frac{1}{8}\,.$$
Luego, la curva $y = 2x^3$ queda por debajo de la curva $y = x^2/4$ para $x \in [0, 1/8]$. Luego, aplicando la fórmula dada en el enunciado del certamen, el volumen pedido será:
$$\begin{aligned} V = \pi\int_0^{\frac{1}{8}}\left[\left(\frac{x^2}{4}\right)^2 - \left(2x^3\right)^2\right]dx = \pi\int_0^{\frac{1}{8}}\left(\frac{x^4}{16} - 4x^6\right)dx &= \pi\left(\frac{x^5}{80} - 4\cdot\frac{x^7}{7}\right)\Big|_0^{\frac{1}{8}} \\ &= \pi\left(\frac{1}{8^5\cdot 80} - 4\frac{1}{8^7\cdot 7}\right). \end{aligned}$$

2. Primero calculamos la derivada de la función $f(x) = \ln(\sec x)$:
$$f'(x) = \frac{1}{\sec x}\cdot\sec x\cdot\tan x = \tan x.$$
Luego, aplicando la fórmula dada en el enunciado del certamen tenemos:
$$\begin{aligned} L = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1 + \tan^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x dx &= \ln(\sec x + \tan x)\big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \ln(\sec(\pi/4) + \tan(\pi/4)) - \ln(\sec 0 + \tan 0) \\ &= \ln\left(\sqrt{2} + 1\right) - \ln(1) = \ln\left(\sqrt{2} + 1\right). \end{aligned}$$
Nota: Para evaluar la integral anterior se utilizó que:
$$\sec(\pi/4) = \frac{1}{\cos(\pi/4)} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad \tan(\pi/4) = 1.$$

3. A partir de la Figura 1 es claro que el área pedida es:
$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 3x + x)dx + \int_0^1\left[-x - (x^3 + x^2 - 3x)\right]dx \\ &= \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_{-2}^0 - \left(-x^2 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 \\ &= -\left(\frac{16}{4} - \frac{8}{3} - 4\right) - \left(-1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) \\ &= -\frac{48 - 32 - 48}{12} - \frac{-12 + 3 + 4}{12} = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{32 + 5}{12} = \frac{37}{12}\,. \end{aligned}$$

Solución P3 (Integrales impropias).

1. Utilizando la indicación tenemos que:

$$0 < e^{-x} \ln(x) < xe^{-x} \qquad \forall x > 1.$$

Notemos que la integral del enunciado está calculada sobre el intervalo $(0, \infty)$. Sin embargo, para probar su convergencia utilizando el criterio de comparación, basta comparar la función $e^{-x} \ln x$ con otra en un intervalo contenido en el original. En este caso la comparamos con la función xe^{-x} para $x \in (1, \infty)$.

Por otro lado, como la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty xe^{-x} dx$ converge, por el criterio de comparación sale que la integral impropia del enunciado también converge. Verifiquemos que efectivamente la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty xe^{-x} dx$ es convergente. Basta verificar que la integral $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x} dx$ es convergente, la cual es la conocida función Γ evaluada en 2:

$$\int_0^\infty xe^{-x} dx = \Gamma(2) = 1! = 1.$$

Nota: La penúltima igualdad anterior es conocida. En general, $\Gamma(n) = (n-1)!$ De hecho, la función Γ la podemos mirar como una generalización del factorial para un número real (o incluso para un número complejo).

Verifiquemos la igualdad anterior, para lo cual hay que calcular explícitamente la integral impropia. Para ello, primero calcularemos la la primitiva de xe^{-x} mediante integración por partes, poniendo $du = e^{-x}dx$ con $u = -e^{-x}$, y $v = x$ con $dv = dx$. Luego,

$$\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C = -(x+1)e^{-x} + C.$$

Así,

$$\int_0^\infty xe^{-x} dx = \lim_{b\to\infty} -(b+1)e^{-b} + 1 = 1.$$

El límite del lado derecho de la igualdad anterior es 0, ya que e^b tiende a infinito más rápido que $b+1$ y por lo tanto $\frac{b+1}{e^b} \to 0$ cuando $b \to \infty$.

Nota: Aplicando la Regla de L'Hôpital, el límite anterior se calcula fácilmente. En efecto,

$$\lim_{b\to\infty} -(b+1)e^{-b} = -\lim_{b\to\infty} \frac{b+1}{e^b} \underbrace{=}_{\text{Por L'Hôpital}} -\lim_{b\to\infty} \frac{1}{e^b} = 0.$$

2. Siguiendo la indicación calculemos el límite siguiente:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{(1-x)(2+x)}}}{\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{2+x}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

Como el valor del límite es mayor que 0 y finito, entonces la integral del enunciado tiene el mismo comportamiento de la integral

$$\int_0^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = \int_0^{1^-} \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}dx\,,$$

la cual es convergente, de acuerdo a la indicación. Luego, la integral impropia del enunciado converge.

Nota: Por razones de completitud de esta solución, verifiquemos que la integral impropia dada en la indicación es convergente. En efecto, separando los casos $\alpha = 1$ de $\alpha \neq 1$, tenemos que para $\alpha \neq 1$:

$$\int_a^{b^-} \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx = \lim_{t\to b^-} -\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_a^t = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\,,$$

para cada $\alpha < 1$. Luego, la integral impropia converge para dichos valores de α.

En el caso $\alpha = 1$, la integral impropia es claramente divergente, ya que:

$$\int_a^{b^-} \frac{1}{b-x}dx = \lim_{t\to b^-} -\ln(b-x)\bigg|_a^t = \infty,$$

ya que $\ln s \to -\infty$ cuando $s \to 0^+$.