UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CHILLÁN

Docentes Jorge Torres
Gijsbertus Van Der Veer

Calculo 1
Limites de Funciones

1. Demostrar usando definición ϵ, δ los siguientes limites:

   a) $\lim_{x\to 3} 2x - 5 = 1$

   b) $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$

2. Determinar el valor de los siguientes límites:

   a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ *b)* $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *c)* $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3-5}{6n^3+3}$

   d) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{5^{n+2}}$ *e)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ *f)* $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{2n}$

   g) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1}$ *h)* $\lim_{n\to\infty} \left(n + \frac{1}{2n}\right)$ *i)* $\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+3}}{7^{n+4}}$

   j) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}$ *k)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5n}$ *l)* $\lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{1-\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

3. Calcular los siguientes limites.

   a) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}}{2x-1}$ *b)* $\lim_{x\to -5} \frac{x^2+4x-5}{x+5}$ *c)* $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$

   d) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$ *e)* $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{3}}{(2x^2+1)^2-9}$ *f)* $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4x+1}-1}{\sqrt[3]{4x+1}-1}$

4. Encontrar el error en el siguiente argumento:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left[x\left(\frac{1}{x^2+x}\right)\right] &= \left[\lim_{x\to 0} x\right]\left[\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+x}\right] \\
&= 0\cdot\left[\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+x}\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

5. Encontrar $\lim_{x\to 0}\left[x\left(\frac{1}{x^2+x}\right)\right]$

6. Analizar la existencia de los siguientes limites, justificando sus afirmaciones.

   a) $\lim\limits_{x\to 3^-} \left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{6}{x^2-9} \right)$ *b)* $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(3-x)(x-2)}{|3-x|}$

7. Dadas $f(x) = \begin{cases} x^2-2 & \text{si} \quad x<1 \\ x+1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} x+5 & \text{si} \quad x<1 \\ -3 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

   a) Demostrar que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ no existen.

   b) Definir la función $f(x)\cdot g(x)$.

   c) Demostrar que $\lim\limits_{x\to 1} [f(x)\cdot g(x)]$ existe.

8. Analizar la continuidad de las siguientes funciones en el punto a indicado. En caso que no lo sea, re definir la función de modo que ella sea continua en a.

   a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+5x+6}{x+2} & \text{si} \quad x \neq -2 \\ -5 & \text{si} \quad x=-2 \end{cases}$; $a=-2$.

   b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-\sqrt[3]{3}}{x^3-3} & \text{si} \quad x \neq \sqrt[3]{3} \\ -5 & \text{si} \quad x \neq \sqrt[3]{3} \end{cases}$; $a=\sqrt[3]{3}$..

9. Determinar los valores de a y b tales que la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ ax^2+bx+1 & \text{si} \quad 2 \le x \le 5 \\ b & \text{si} \quad 5 < x \le 6 \end{cases}$$

   sea continua.

10. Analizar la continuidad de la función $f:[0,6]\to\mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-6x}{x-3} & \text{si} \quad 1 \le x < 3 \\ 4x-6 & \text{si} \quad 3 \le x \le 5 \\ x^2-5 & \text{si} \quad 5 < x \le 6 \end{cases}$$

11. Analizar la existencia de los siguientes límites, justificando sus afirmaciones:

   a) $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{1}{x\sqrt{x-5}}$ *b)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x(4x^2-x+5)}{12x^3+3x^2+31}$ *c)* $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

   d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^5-x^3}{-x^2+4x+1}$

12. Hallar el limite para los valores de $n=2,3,4,...$ para

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{-6x^3-3x^2-24}{3x^n+x-11}$$