

Certamen 1 Cálculo Integral

12 de abril de 2017

Profesores Patricio Cumsille - Juan Espinoza

P1. [1 punto].

- a) Demuestre que $[0, 1)$ no tiene máximo.
b) Demuestre usando la definición de convergencia de sucesiones que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2.$$

P2. [1,5 puntos]. Calcule, si es que existen, los siguientes límites:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n + 1}{n^2 + n}$; (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n^4 + 6n + 7} - n^2 \right)$; (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

P3. [1,5 puntos]. Determine si las siguientes sucesiones son: (i) monótonas, (ii) acotadas, (iii) convergentes.

(a) $\frac{1 + (-1)^n}{n}$; (b) $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

P4. [2 puntos]. Una sucesión que surge en ecología como un modelo para el crecimiento de una población está dado por la **sucesión logística**

$$p_{n+1} = kp_n(1 - p_n)$$

donde p_n es el tamaño de la población de la n -ésima generación de una especie, suponiendo que no está en interacción con el medioambiente. Los valores de (p_n) corresponden a la proporción del tamaño máximo de la población, de modo que $0 \leq p_n \leq 1$.

El objetivo de este problema consiste en analizar el comportamiento de esta especie modelada por esta sucesión. Suponga que $k \in (1, 2)$. Se pide:

- a) **[0,75 puntos]**. Demuestre que si la proporción de la población inicial está entre 0 y $1 - 1/k$ entonces la proporción de la n -ésima generación también estará entre dichos valores. O sea, pruebe que si $p_0 \in (0, 1 - 1/k)$, entonces para todo $n \geq 1$ se cumple que $p_n \in (0, 1 - 1/k)$.

Indicación: Notando que $0 < 1 - 1/k < 1/2$ para $k \in (1, 2)$, grafique la función $f(x) = kx(1 - x)$ para $x \in [0, 1]$ y pruebe que para todo $x \in (0, 1 - 1/k)$, se verifica que $f(x) \in (0, 1 - 1/k)$.

- b) **[0,5 puntos]**. Demuestre que la sucesión (p_n) es creciente.
c) **[0,75 puntos]**. Concluya que la sucesión (p_n) es convergente y calcule el valor del límite de (p_n) . Interprete sus resultados en términos de lo que ocurre con la especie.