Pauta Certamen 4 Cálculo Integral

5 de julio de 2017

Profesores Patricio Cumsille - Juan Espinoza

P1. Determine si las series siguientes convergen. Diga si ellas convergen absolutamente o condicionalmente, o divergen.

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+2}} \; .$$

Indicación: Utilice el criterio de comparación.

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)!} \; .$$

P2. *a*) Calcule el valor de la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n-3)} \; .$$

b) Utilizando el criterio de la integral, estudie la convergencia de
$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{e^x} dx.$$

P3. Dada la serie de potencias
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n} \; .$$

a) Hallar su radio e intervalo de convergencia. Analice los extremos del intervalo.

b) Calcule la serie de $f'(x)$ y verificar que corresponde a una serie geométrica.

c) Usando el ítem anterior, calcule $f(x)$ integrando $f'(x)$. Hallar la constante de integración usando un valor adecuado de $f(x)$.

d) Usando la serie de $f(x)$, calcule el valor de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n4^n}$.

Solución Certamen 4

P1. *a*) En este caso es conveniente seguir la indicación, ya que al aplicar por ejemplo el criterio del cuociente o de la raíz $n-$ésima, no es posible concluir. Para ello, escribimos el término general de la serie de la forma siguiente:

$$a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+2}} = \frac{(n+1)^n}{n^n \cdot n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n^2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n^2} < e \cdot \frac{1}{n^2},$$

para todo $n \geq 1$. Esto ya que la sucesión $(1+1/n)^n$ es estrictamente creciente y su límite e es por lo tanto una cota superior. Así, como

$$0 < a_n < e \cdot \frac{1}{n^2} \qquad \forall n \geq 1,$$

entonces, por el criterio de comparación, la serie de término general a_n es convergente, pues la serie de $1/n^2$ lo es. La convergencia es absoluta por ser una serie de términos positivos.

Nota: Observemos que estamos comparando el término general de la serie con $1/n^2$. En ese sentido, otra forma de obtener el mismo resultado es utilizando el criterio de comparación en el límite, es decir, calculando el límite del término general de la serie partido por $1/n^2$.

b) Analicemos la convergencia absoluta. Aplicando el criterio del cuociente (al módulo del término general), tenemos que

$$\frac{3^{n+1}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{3^n} = \frac{3}{(2n+3)(2n+2)} \to 0, \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Luego, la serie converge absolutamente.

P2. *a*) Separando la fracción en fracciones parciales

$$\frac{A}{4n+1} + \frac{B}{4n-3} = \frac{1}{(4n+1)(4n-3)} \ ,$$

obtenemos que $A = -1/4$ y $B = 1/4$. Luego, la serie original se descompone como

$$\frac{1}{4}\sum_{n\geq 1}(a_n - a_{n+1}), \quad \text{con } a_n = \frac{1}{4n-3} \ .$$

Así, por propiedad telescópica obtenemos que:

$$\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N}(a_n - a_{n+1}) = \frac{1}{4}(a_1 - a_{N+1}) \ .$$

Luego, como el valor de la serie está dado por el límite de las sumas parciales, obtenemos que:

$$\frac{1}{4}\sum_{n\geq 1}(a_n - a_{n+1}) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{4}(a_1 - a_{N+1}) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4N+1}\right) = \frac{1}{4} \ .$$

b) Claramente la función es positiva y decreciente en en intervalo dado. Luego, podemos aplicar el criterio de la integral. Según este criterio la integral impropia dada converge sí y sólo si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln(1+n)}{e^n}$$

converge. Aplicando el criterio del cuociente se tiene que:

$$\frac{\ln(n+2)}{e^{n+1}}\cdot\frac{e^n}{\ln(n+1)} = \frac{1}{e}\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)} \to \frac{1}{e}, \quad \text{cuando } n\to\infty.$$

Luego, como el límite del cuociente es menor que 1, concluímos que la serie converge. Por lo tanto, la integral impropia también converge.

Nota: En el desarrollo anterior hemos utilizado que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)} = 1.$$

Esto se prueba calculando el límite $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+2)}{\ln(x+1)}$ utilizando la regla de L'Hôpital. Con esto se prueba que $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+2)}{\ln(x+1)} = 1$. En particular, escogiendo la sucesión $x_n = n$ la cual tiende al infinito, se concluye el resultado.

P3. *a*) Aplicando el criterio del cuociente al módulo del término general de la serie de potencias, obtenemos que:

$$\frac{|3x|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{|3x|^n} = \frac{|3x|}{1+1/n} \to |3x|, \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Luego, el radio de convergencia es $R = 1/3$. Analicemos ahora los extremos del intervalo $x = \pm 1/3$. En $x = 1/3$ la serie produce la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ que es divergente. En cambio, en $x = -1/3$, la serie obtenida es $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ la cual es convergente por el criterio de Leibnitz (visto en clases). Luego, el intervalo de convergencia es $[-1/3, 1/3[$.

b) Calculando la derivada de $f(x)$ obtenemos que

$$f'(x) = 3\sum_{n\geq 1} \frac{n(3x)^{n-1}}{n} = 3\sum_{n\geq 1} (3x)^{n-1} = 3\sum_{n\geq 0} (3x)^n.$$

Esta última es una serie geométrica con razón $r = 3x$. Luego,

$$f'(x) = \frac{3}{1-3x} \quad \forall x, \text{ tal que } |x| < 1/3.$$

c) Integrando tenemos

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{3}{1-3x}dx = -\ln(1-3x) + C.$$

Evaluando en $x = 0$ llegamos a:

$$0 = f(0) = -\ln 1 + C \Longrightarrow C = 0.$$

Luego,

$$f(x) = -\ln(1-3x) \quad \forall x, \text{ tal que } |x| < 1/3.$$

Nota: La serie dada en el enunciado corresponde a la serie de Taylor de la función $f(x) = -\ln(1-3x)$ en torno a $x_0 = 0$.

d) Evaluando $f(x)$ en $x = -1/4$ (que pertenece al intervalo $(-1/3, 1/3)$) obtenemos que:

$$f(-1/4) = -\ln(1+3/4) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-3)^n}{n4^n}.$$

Luego,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-3)^n}{n4^n} = -\ln(7/4).$$