Pauta Certamen 3 Cálculo Integral

7 de junio de 2017

Profesores Patricio Cumsille - Juan Espinoza

P1. (Teorema Fundamental del Cálculo).

a) Encuentre una función f y un número real $a > 0$ tales que

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2} dt = 2\sqrt{x}, \quad \forall x > 0.$$

b) Sea g una función dos veces derivable en $\mathbb{R}$. Se define la función f mediante las fórmula

$$f(x) = \int_0^x g(x-t) \sin t dt.$$

Demostrar que se verifica la relación $f''(x) + f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Indicación: Hacer el cambio de variables $u = x - t$.

P2. (Sumas de Riemann).

a) Identifique la sumatoria

$$S_n = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{(3n+2i)^p}{n^{p+1}}, \qquad p \in \mathbb{N},$$

como una suma de Riemann, determinando la función y la partición involucradas. Calcule $\lim_{n\to\infty} S_n$.

b) Usando la definición de integral como límite de una suma de Riemann, calcule la integral

$$\int_0^1 (6x+3)dx.$$

Indicación: Puede serle útil recordar la fórmula $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

P3. (Aplicaciones de la Integral). Un *toro de revolución* se genera al rotar el círculo de ecuación $(x-R)^2 + y^2 = r^2$ en torno al eje y, donde $R > r$.

a) Plantee una integral para hallar el volumen del toro.

b) Calcule el volumen del toro.

Indicación: Puede serle útil recordar la fórmula $V = 2\pi \displaystyle\int_a^b x\,|f(x) - g(x)|\,dx$.

Solución Certamen 3

P1. (Teorema Fundamental del Cálculo).

a) Evaluando la igualdad del enunciado en $x = a > 0$ y utilizando que $\displaystyle\int_a^a g(t)dt = 0$ para cualquier función g integrable, obtenemos que

$$2\sqrt{a} = 6 \Longrightarrow a = 9.$$

Además, derivando con respecto a x la igualdad del enunciado y utilizando que $G'(x) = g(x)$ si $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)dt$ (válido para cualquier función g continua, según el TFC) obtenemos que

$$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Longrightarrow f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}} = x^{2-\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}.$$

b) Haciendo el cambio de variables $u = x - t$ (t es la variable de integración y x es un parámetro para la integral del enunciado), tenemos que $t = x - u$, $u = x$ para $t = 0$, $u = 0$ para $t = x$ y $du = -dt$. Luego

$$\begin{aligned} f(x) = \int_0^x g(x-t)\sin t dt &= -\int_x^0 g(u)\sin(x-u)du \\ &= \int_0^x g(u)\left[\sin x\cos u - \cos x\sin u\right]du \\ &= \int_0^x g(u)\sin x\cos u du - \int_0^x g(u)\cos x\sin u du \\ &= \sin x\int_0^x g(u)\cos u du - \cos x\int_0^x g(u)\sin u du. \end{aligned}$$

Derivando $f(x)$ con respecto a x obtenemos que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x\int_0^x g(u)\cos u du + \sin x g(x)\cos x \\ &\quad -\left(-\sin x\int_0^x g(u)\sin u du + \cos x g(x)\sin x\right) \\ &= \cos x\left[\int_0^x g(u)\cos u du + g(x)\sin x - g(x)\sin x\right] + \sin x\int_0^x g(u)\sin u du \\ &= \cos x\int_0^x g(u)\cos u du + \sin x\int_0^x g(u)\sin u du. \end{aligned}$$

Volviendo a derivar con respecto a x obtenemos que:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\sin x \int_0^x g(u)\cos u du + \cos^2 x g(x) + \cos x \int_0^x g(u)\sin u du + \sin^2 x g(x) \\ &= g(x) - \sin x \int_0^x g(u)\cos u du + \cos x \int_0^x g(u)\sin u du \\ &= g(x) + \int_0^x g(u)\left[\cos x \sin u - \sin x \cos u\right] du \\ &= g(x) - \int_0^x g(u)\sin(x-u) du = g(x) - f(x). \end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que $f''(x) = g(x) - f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ que es la igualdad que se deseaba probar.

P2. (Sumas de Riemann).

a) Primero reescribimos la sumatoria S_n como sigue:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3n+2i}{n}\right)^p \\ &= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(3 + i\frac{2}{n}\right)^p \\ &= h\sum_{i=1}^{n}(3+ih)^p = \sum_{i=1}^{n} h\,(2+x_i)^p \ , \end{aligned}$$

donde $h = \frac{2}{n}$, $x_i = 1+ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Luego, S_n corresponde a la suma de Riemann superior asociada a la función $f(x) = (2+x)^p$ y a la partición equiespaciada $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[1, 3]$. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_1^3 (2+x)^p dx = \left.\frac{(2+x)^{p+1}}{p+1}\right|_1^3 = \frac{1}{p+1}\left(5^{p+1} - 3^{p+1}\right).$$

b) Escogiendo la partición equiespaciada del intervalo $[0, 1]$ definida por $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ donde $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$, con $h = \frac{1}{n}$, y como $f(x) = 6x + 3$ es continua, obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} hf(x_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} h \sum_{i=1}^{n} (6x_i + 3) \\
&= \lim_{n\to\infty} h \left[\sum_{i=1}^{n} 6ih + \sum_{i=1}^{n} 3 \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} h \left[6h \sum_{i=1}^{n} i + 3n \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{6}{n} \frac{n(n+1)}{2} + 3n \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[3 + \frac{3}{n} + 3 \right] = 6.
\end{aligned}
$$

P3. (Aplicaciones de la integral).

a) Despejando y en función de x sale que:

$$y = \pm\sqrt{r^2 - (x-R)^2}\,,$$

definida para $x \in [R-r, R+r]$ pues es la curva es un círculo centrado en $(R, 0)$ y de radio r, con $R > r$. Así, como $R - r > 0$ se puede aplicar la fórmula siguiente:

$$V = 2\pi \int_{R-r}^{R+r} x \left[\sqrt{r^2 - (x-R)^2} - \left(-\sqrt{r^2 - (x-R)^2} \right) \right] dx.$$

b) Aplicando el cambio de variables $x = R + r\sin\theta$ tenemos que

$$dx = r\cos\theta d\theta,\ \sqrt{r^2 - (x-R)^2} = r\cos\theta,\ \theta = -\frac{\pi}{2} \text{ si } x = R - r \text{ y } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ si } x = R + r.$$

Con esto llegamos a:

$$
\begin{aligned}
V &= 4\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (R + r\sin\theta) r^2 \cos^2\theta d\theta \\
&= 4\pi \left[Rr^2 \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta}_{\text{par}} + r^3 \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos^2\theta d\theta}_{\text{impar}} \right] \\
&= 4\pi Rr^2 \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta \\
&= 8\pi Rr^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\theta)}{2} \right] d\theta \\
&= 4\pi Rr^2 \left[\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 4\pi Rr^2 \frac{\pi}{2} = 2\pi^2 Rr^2.
\end{aligned}
$$