# Guía Semana 8

## Ejercicios

**1.** Sea $f\colon \quad \to \quad$ tal que $f$ es periódica de periodo $p$. Pruebe que $\int\limits_a^{a+p} f(x) = \int\limits_0^p f(x)$ para todo $a \in \quad$.

**2.** Hacer una aseveración general relativa a $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx$ para $f$ una función impar y otra para $f$ función par.

**3.** Demuestre que si $f$ es una función continua en $[a, b]$ y $\int\limits_a^b f(x) = 0$, entonces existe un $c$ en $[a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

**4.** Hallar $\int\limits_a^b \left( \int\limits_a^b f(x)g(y)dy \right) dx$ en términos de $\int\limits_a^b f$ y $\int\limits_a^b g$.

**5.** Hallar $F'(x)$ si $F(x) = \int\limits_0^x xf(t)dt$.

**6.** Demostrar que si $f$ es continua entonces $\int\limits_0^x f(u)(x-u)du = \int\limits_0^x \left( \int\limits_0^u f(t)dt \right) du$.

**7.** Suponga que $f$ es integrable en $[a, b]$. Demostrar que existe un número $x$ en $[a, b]$ tal que $\int\limits_a^x f = \int\limits_x^b f$. Demostrar, con un ejemplo, que no siempre es posible elegir $x$ que esté en $(a, b)$.

**8.** Calcule las derivadas de las siguientes funciones.

$$f(x) = \int\limits_1^{x^2} \operatorname{sen}(t^4)dt \qquad f(x) = \int\limits_{\sqrt{x}}^{x^2} \frac{t^2}{1+t^6}dt \qquad f(x) = \int\limits_{x^3}^{\cos(x)} (x-t)\operatorname{sen}(t^2)dt$$

**9.** Sea $f$ una función tal que $f(x) = \int\limits_0^x (x-t)^2 f(t)dt$. Muestre que $f''(x) = 2f(x)$.

## Problemas

**P1.** Sea $f : [0, \infty[ \to [0, \infty[$ una función biyectiva y derivable en $]0, \infty[$. Muestre que $g(x) = \int\limits_0^x f(t)dt + \int\limits_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt$, satisface que $g'(x) = f(x) + f'(x)x$. Concluya que $g(x) = xf(x)$.

**P2.** Considere la función $g(x)$ definida por $g(x) = \int\limits_0^x \frac{\arctan(t)}{t}$, donde $\frac{\arctan(t)}{t}$ se define en cero por continuidad.

**(a)** Demuestre que: $\int\limits_0^1 g(x)dx = g(1) - \int\limits_0^1 \arctan(t)dt$

**(b)** Utilizando lo anterior, muestre que : $\int\limits_0^1 g(x)dx = g(1) - \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$.

**P3.** Sea $g : \quad \to \quad$ una función biyectiva, diferenciable y tal que $g(0) = 0$. Sea $f : \quad \to ]-1, 1[$ una función diferenciable. Suponga que $f$ y $g$ satisfacen:

$$g(x) = \int\limits_0^{g(x)} f^2(g^{-1}(x))dx + f(x).$$

**(a)** Pruebe que $f(x) = \tanh(g(x))$.

**(b)** Calcule la integral $\int\limits_0^{x^3} (\tanh(t))^2 dt$.

*Indicación:* Observe que $f(g^{-1}(x)) = \tanh(x)$.

**P4.** Sea $f(x) := \displaystyle\int_1^x x \ln(tx)\, dt$, definida en $]0, +\infty[$.

**(a)** Encuentre $\displaystyle\int \ln(t)$ y calcule $f(2)$.

**(b)** Demuestre que $f'(x) = (4x - 1)\ln(x) \quad \forall x \in ]0, +\infty[$.

**P5.** Asumiendo que la función $g(t) = \operatorname{arc\,sen}(\arctan(t))$ es continua en $[0, \tan(1)]$, encuentre la derivada de la función $f(x) = \int\limits_0^{\tan(x)} \operatorname{arcsen}(\arctan(t))dt$ para $x \in [0, 1]$.

**P6.** Sea $f : [a, b] \to \quad$ acotada e integrable, verificando que $f((a+b)-x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

**(a)** Probar que $\int\limits_a^b xf(x) = \frac{a+b}{2} \int\limits_a^b f(x)$

**(b)** Sea ahora $g : [-1, 1] \to \quad$ continua. Pruebe que $\int\limits_0^{\pi} xg(\operatorname{sen}(x)) = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^{\pi} g(\operatorname{sen}(x))$.

**(c)** Deduzca que $\int\limits_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{1+\cos^2(x)} = \frac{\pi}{2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}$ y calcule el valor de la integral.