Análisis Matemático II

para Pedagogía en Educación Matemática

Gijsbertus van der Veer

20 de octubre de 2015

Índice general

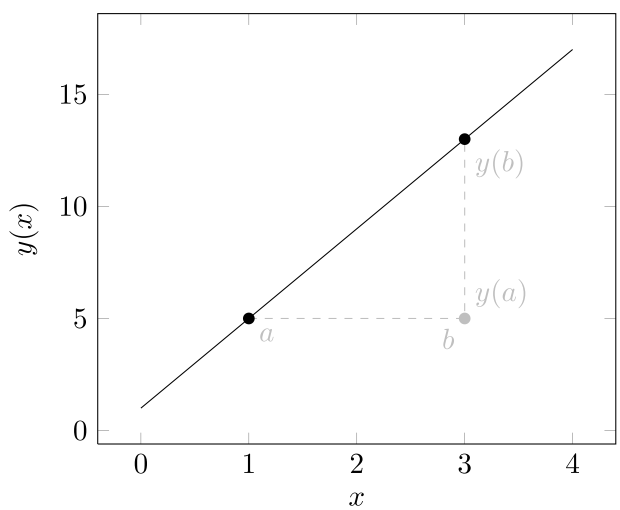
Capítulo 1

Fórmulas de Derivadas

En este capítulo veremos, cuál es el concepto derivadas, y, cómo se define.

Problema 1.1 *Sea y la posición vertical de un objeto que viene en función del tiempo, x. Se desea saber la velocidad del objeto en un momentos determinado, digamos en $x = a$, dado que la velocidad es constante.*

La velocidad en dicho punto es el cambio en posición, relativo al tiempo trascurrido. Sea la velocidad v. Aparte del momento $x = a$ consideramos un momento posterior $x = b$, luego: $b > a$.



Sean $y(a)$ y $y(b)$ las respectivas posiciones en los respectivos tiempos $x = a$ y $x = b$. La diferencia $y(b) - y(a)$ es proporcional a $b - a$:

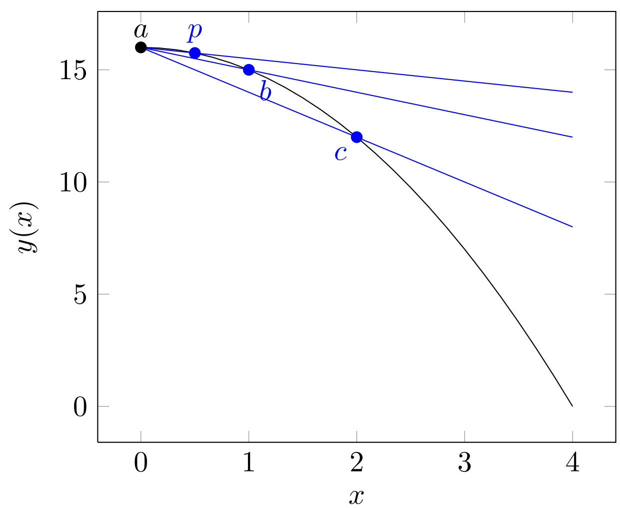
$$y(b) - y(a) = v(b - a). \tag{1.1}$$

Si dividimos por $b-a$, nos damos cuenta que la velocidad es igual a la pendiente de la recta, que pasa por los puntos $(a, y(a))$ y $(b, y(b))$:

$$v = \frac{y(b) - y(a)}{b - a}. \tag{1.2}$$

Para cualquier x la velocidad es constante. Sin embargo, este modelo no es realista.

Consideramos el origen en $y = 0$. Si dejamos caer una piedra de una altura, $y = h$, tendrá esta una velocidad igual a cero, luego decrece su velocidad progresivamente, siendo negativa, hasta caer al suelo. Consideramos la siguiente gráfica:



La altura inicial es igual a $y = 16$. La velocidad para $x = 0$ es cero. Ello implica que la recta tangente por $(0, 16)$ es horizontal. El objetivo es dibujar la recta tangente para $x = 0$. El primer axioma de Euclides dice que, dado dos puntos, se puede trazar, una, sólo una recta. Fijemos $a = 0$. Si tomamos $b = 1$ y trazamos una recta por $(a, y(a))$ y $(b, y(b))$, observamos que la pendiente de esta recta es distinta a 0 y negativa. Deberemos elegir otro punto, por ejemplo $x = c$, y trazar la recta por $x = a$ y $x = c$. Nos damos cuenta que la pendiente de esta recta es más negativa todavía. Si elegimos $x = p$, constatamos que la recta por $(a, y(a))$ y $(p, y(p))$ es más horizontal. Concluimos que, para tener una mejor aproximación deberemos aproximarnos al punto $x = a$. Una recta más horizontal todavía por el punto $(a, y(a))$ se obtiene, eligiendo $(q, y(q))$ con $a < q < p$. Moviendo q hacia a, llega a ser más horizontal la recta, que para el ojo, en algún momento dado, sólo pasará por el punto $(a, f(a))$. Esta es la recta tangente.

El último procedimiento se puede formalizar, usando el concepto 'límite'. La velocidad es:

$$v = \lim_{b \to a} \frac{y(b) - y(a)}{b - a}. \tag{1.3}$$

Sea:

$$\Delta x = b - a, \tag{1.4}$$

donde la letra griega, Delta, significa 'diferencia'. Sustituimos:

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(a + \Delta x) - y(a)}{\Delta x}. \tag{1.5}$$

Hallamos una fórmula para la velocidad para cualquier tiempo x, si reemplazamos a por x:

$$v(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}. \tag{1.6}$$

La expresión al lado derecho, nos devuelve siempre la pendiente de la recta tangente para x dado, y se llama función derivada, o bien, derivada. Normalmente no trabajamos con velocidad, como posición relativo al tiempo, sino con otros problemas. Por ello, conviene sistematizar el concepto matemáticamente. Para este efecto deberemos introducir una notación uniforme, definir de manera precisa los conceptos matemáticos, dar las propiedades de ellos, con los respectivos teoremas. Ello nos permitirá aplicar el mismo concepto en otras situaciones.

1.1. Definición de Derivadas

En la sección introductoria vimos, de donde surge el concepto de derivadas. Consideramos una función cualquiera. Una comilla puesta sobre la función indicará 'derivada':

Definición 1.1 *Sea $f(x)$ una función. La derivada de $f(x)$ se define por:*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{1.7}$$

Notación 1.1 *En lugar de la notación anterior, también es posible anotar:*

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{1.8}$$

o bien:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}. \tag{1.9}$$

Ejemplo 1.1 *La derivada de la función:*

$$f(x) = 3x + 2, \tag{1.10}$$

es:

$$\begin{gathered} f'(x) = \lim_{\Delta x \Rightarrow 0} \frac{[3(x + \Delta x) + 2] - [3x + 2]}{\Delta x} = \\ \lim_{\Delta x \Rightarrow 0} \frac{3x + 3\Delta x + 2 - 3x - 2]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \Rightarrow 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x} = 3, \end{gathered} \tag{1.11}$$

Usted habrá observado que la derivada no existe cuando no se defina el límite. Ello nos lleva a la definición de derivabilidad.

Definición 1.2 *Sea $f(x)$ una función derivable. Se dice que $f(x)$ es derivable en $x = a$, cuando existe $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$\lim_{\Delta x \uparrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \alpha. \tag{1.12}$$

La interpretación geométrica de la definición es que la curva de la función no es fluida, o bien, tiene una 'punta', en el lugar donde no es derivable. Cerramos esta sección con un ejemplo de la última situación expuesta.

Ejemplo 1.2 *Demostrar que la siguiente función no es derivable en $x = 0$:*

$$f(x) = |x|. \tag{1.13}$$

Solución:

Recordamos la definición del valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases} \tag{1.14}$$

Luego:

1. *Por un lado:*
$$\lim_{\Delta x \uparrow 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \uparrow 0} \frac{|\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \uparrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1. \tag{1.15}$$

2. *Por otro lado:*
$$\lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{|\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1. \tag{1.16}$$

3. *Vemos que los dos límites laterales son distintos. Por ello, la función no es derivable.*

Observación 1.1 *Al considerar la función $f(x) = |x|$ (véase la Figura 1.1), nos damos cuenta que esta tiene una punta en $x = 0$.*
Luego, la función no tiene una pendiente única en dicho punto y no es derivable.

Terminaremos esta sección con un teorema.

Teorema 1.1 *Sea $f(x)$ una función derivable en $x = a$. Entonces es continua.*
Demostración:

Debemos demostrar que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{1.17}$$

Aplicamos las propiedades algebráicas de límites:

$$\begin{gathered} \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] + \lim_{x \to a} f(a) = \\ \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a) + \lim_{x \to a} f(a) = \\ f'(a) \cdot \lim_{x \to a} (x - a) + \lim_{x \to a} f(a) = f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a), \end{gathered} \tag{1.18}$$

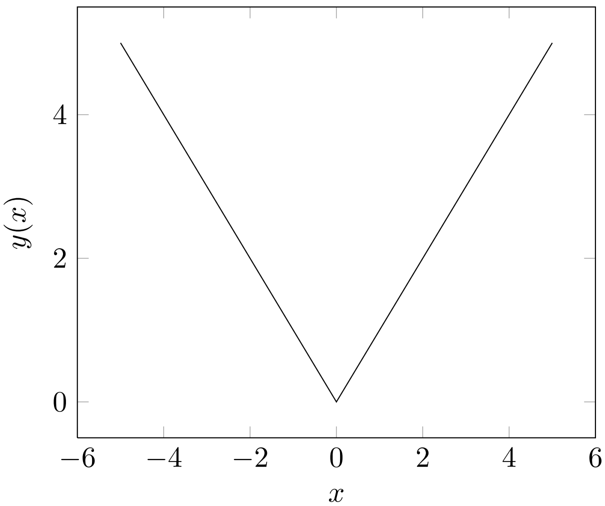


Figura 1.1: La función $f(x) = |x|$.

1.2. Linealidad de Derivadas y Derivadas de Polinomios

En la sección anterior definimos la derivada. Ahora nos corresponde ver las propiedades y fórmulas básicas.

Propiedad 1.1 (Suma y resta de derivadas) *Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones derivables. Luego:*

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x). \tag{1.19}$$

Demostración:

Aplicamos la definición de derivadas:

$$\begin{aligned}
[f(x) \pm g(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) \pm g(x+\Delta x)] - [f(x) \pm g(x)]}{\Delta x} = \\
\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) = \\
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) \pm g'(x).
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Propiedad 1.2 (Multiplicación por constante) *Sea $f(x)$ una función derivable. Sea $k \in \mathbb{R}$ una constante. Luego:*

$$[kf(x)]' = kf'(x). \tag{1.21}$$

Demostración:

$$[kf(x)]' = \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{[kf(x+\Delta x)] - [kf(x)]}{\Delta x} =$$

$$k \cdot \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = kf'(x). \tag{1.22}$$

Teorema 1.2 *Sea:*

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.23}$$

Luego:

$$f'(x) = nx^{n-1}. \tag{1.24}$$

Demostración:

Aplicamos el teorema de los binomios a $(x+\Delta x)^n$:

$$(x+\Delta x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\Delta x)^k \cdot x^{n-k}. \tag{1.25}$$

Aplicamos la definición de la derivada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \tag{1.26}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^n} + n \cdot \Delta x \cdot x^{n-1} + \ldots + n \cdot (\Delta x)^{n-1} \cdot x + (\Delta x)^n - \cancel{x^n}}{\Delta x} = \tag{1.27}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{n \cdot \cancel{\Delta x} \cdot x^{n-1} + \ldots + n \cdot (\Delta x)^{\cancelto{n-2}{n-1}} \cdot x + (\Delta x)^{\cancelto{n-1}{n}}}{\cancel{\Delta x}} = \tag{1.28}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} n \cdot x^{n-1} + \ldots + n \cdot (\Delta x)^{n-2} \cdot x + (\Delta x)^{n-1} = nx^{n-1}. \tag{1.29}$$

De su forma más general hallamos:

Corolario 1.1 *Sea:*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0. \tag{1.30}$$

Luego, la derivada es:

$$f(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_1. \tag{1.31}$$

Demostración:

Mediante el teorema 1.2 y las propiedades 1.1 y 1.2 se demuestra el corolario.

Cerramos la sección con un problema matemático, y punto de reflexión.

Problema 1.2 *Determinar la derivada de la función:*

$$f(x) = (x^2 + x + 1)^{23}. \tag{1.32}$$

Observamos que este problema se podrá resolver mediante la expansión del trinomio y luego aplicar la fórmula hallada en el corolario. Cabe señalar que esta vía de solución es larga y no nos provee de una ampliación conceptual. La regla de cadena nos brindará un cálculo más rápido y breve, la cual trataremos en la próxima sección.

1.3. La Regla de Cadena y Derivadas de Funciones Exponenciales

Primero repasamos dos conceptos referidos a funciones.

Definición 1.3 *La función de identidad es la función:*

$$i : x \to x, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.33}$$

Definición 1.4 *Sea $f(x)$ una función. Se dice que $f(x)$ es una función compuesta si:*

$$(\exists h(x) \neq i(x),\ \exists h(x))(f(x) = g(h(x)). \tag{1.34}$$

Teorema 1.3 (Regla de Cadena) *Sea $f(u(x))$ una función compuesta, con $f(u)$ y $u(x)$ funciones derivables. Luego:*

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \tag{1.35}$$

Demostración:

Denotamos:

$$u(x + \Delta x) = u + \Delta u, \quad u(x) = u, \tag{1.36}$$

Se halla:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(u(x+\Delta x)) - f(u(x))}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta u \to 0}} \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \tag{1.37}$$

En la sección anterior hallamos la derivada de un polinomio. En esta sección buscaremos la derivada de:

$$f(x) = e^x, \tag{1.38}$$

con e el número de Euler, definido por:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{1.39}$$

Antes de deducir una fórmula para la derivada de la función:

$$e^x, \tag{1.40}$$

necesitaremos introducir dos lemas.

Lema 1.1 *La expresión e^x puede escribirse como:*

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n. \tag{1.41}$$

Demostración:

Consideramos 3 casos por separado:

1. *Caso $x = 0$:*

   Por una parte:

   $$e^0 = \left[\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{0}{n}\right)\right]^0 = 1. \tag{1.42}$$

   Por otra parte:

   $$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{0}{n}\right)^n = \lim_{n \to \infty} 1^n = 1. \tag{1.43}$$

   Por ello:

   $$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad x = 0. \tag{1.44}$$

2. *Caso $x > 0$:*

   Se hace la sustitución:

$$\frac{1}{m} = \frac{x}{n} \Leftrightarrow n = mx. \tag{1.45}$$

   Además se aplica la propiedad de multiplicación de exponentes:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx} =$$
$$\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{x} = e^{x}. \tag{1.46}$$

3. *Caso $x < 0$:*

   Se hace la sustitución:

$$\frac{1}{m} = -\frac{\hat{x}}{n} \Leftrightarrow n = -mx. \tag{1.47}$$

   Además se aplica la propiedad de multiplicación de exponentes:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = \lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-mx} =$$
$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{m-1}{m}\right)^{-mx} = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{m}{m-1}\right)^{mx} =$$
$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{mx} =$$
$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{(m-1)x} =$$
$$\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{x}\right]\cdot\left[\lim_{p\to\infty}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p}\right]^{x} = 1\cdot e^{x} = e^{x}. \tag{1.48}$$

Con este resultado podremos demostrar el siguiente teorema que nos proveya la fórmula solicitada.

Teorema 1.4 *Sea:*

$$f(x) = e^{x}. \tag{1.49}$$

Luego:

$$f'(x) = e^{x}. \tag{1.50}$$

Demostración:

Aplicamos el lema 1.1 y los teoremas 1.2 y 1.3.

$$f' = \frac{d}{dx}\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right] =$$

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{n}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{1+\frac{x}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x. \tag{1.51}$$

Corolario 1.2 *La derivada de:*

$$f(x) = a^x, \quad a > 0, \tag{1.52}$$

es:

$$f'(x) = \ln(a)\cdot a^x, \quad a > 0, \tag{1.53}$$

Demostración:

Efectuamos cambio de base:

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x\ln a}. \tag{1.54}$$

Aplicamos el teorema anterior y la regla de cadena:

$$(a^x)' = \left(e^{x\ln a}\right)' = \ln(a)\cdot e^{x\ln a} = \ln(a)\cdot a^x. \tag{1.55}$$

Ahora que hemos determinado tanto la derivada de x^n y de e^x, determinaremos la derivada de las respectivas funciones inversas: $\sqrt[n]{x}$ y $\ln x$. Para ello necesitaremos utilizar la derivación implícita.

1.4. Derivación Implícita y Derivadas de Funciones Inversas

Definición 1.5 *Sea y una variable dependiente, e x una variable independiente tal que $y = y(x)$. Una ecuación de la forma:*

$$A(y) = B(x), \tag{1.56}$$

se llama implícita si $A(y) \neq y$.

Definición 1.6 *Se llama derivación implícita la derivación del lado izquierda $A(y) \neq y$. Si $A(y) = y$, es explícita la derivación.*

Teorema 1.5 *Consideramos la ecuación implícita:*

$$A(y) = B(x). \tag{1.57}$$

Al aplicar derivación implícita, obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}. \tag{1.58}$$

Demostración:

En ambos lados derivamos con respecto a x. Al lado izquierdo se aplica la regla de cadena, y hemos demostrado el teorema.

Corolario 1.3 *La derivada de:*

$$f(x) = \sqrt[n]{x}, \tag{1.59}$$

es:

$$f'(x) = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}, \tag{1.60}$$

Demostración:

Se tiene:

$$y = \sqrt[n]{x}. \tag{1.61}$$

Elevamos a n en ambos lados:

$$y^n = x. \tag{1.62}$$

Aplicamos derivación implícita:

$$y' \cdot \left(ny^{n-1}\right) = 1. \tag{1.63}$$

Eso es:

$$y' = \frac{1}{ny^{n-1}} \Rightarrow y' = \frac{y}{ny^n}. \tag{1.64}$$

Con (1.61) y (1.62), obtenemos:

$$y' = \frac{1}{ny^{n-1}} \Rightarrow y' = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}. \tag{1.65}$$

Corolario 1.4 *La derivada de:*

$$f(x) = \ln x, \tag{1.66}$$

es:

$$f'(x) = \frac{1}{x}. \tag{1.67}$$

Demostración:

Sea:

$$y = \ln x. \tag{1.68}$$

Hallamos:

$$e^y = x. \tag{1.69}$$

Aplicamos derivación implícita:

$$y' \cdot e^y = 1. \tag{1.70}$$

Ello da:

$$y' = \frac{1}{e^y}. \tag{1.71}$$

Sustituimos (1.69):

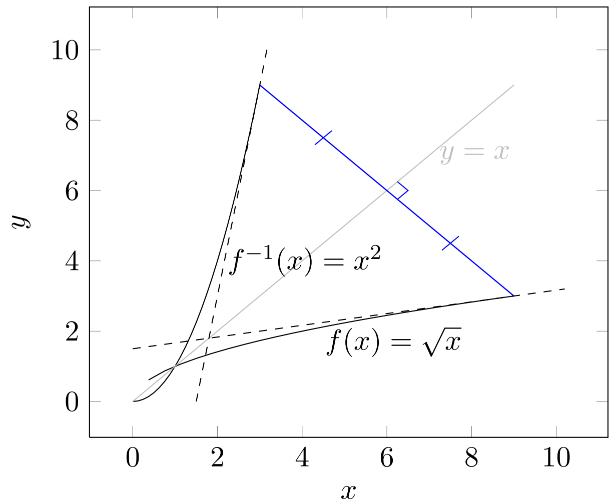
$$y' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}. \tag{1.72}$$

Finalmente, hay una fórmula general para determinar la derivada de una función inversa cualquiera. Observamos la siguiente situación, representada en la Figura 1.4.

Podemos ver que la pendiente de la recta tangente de la función f en $(9, 3)$, es precisamente el recíproco de la pendiente de la recta tangente función inversa, f^{-1} en $(3, 9)$. Efectivamente, si uno refleja una función $f(x)$ en la recta $y = x$, obtiene la función inversa, $f^{-1}(x)$. Más generalmente:

Teorema 1.6 *Sea $f(x)$ una función cuya inversa es $f^{-1}(x)$. Luego:*

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \tag{1.73}$$



Demostración:

Partamos por la definición de la función inversa:

$$f(f^{-1}(x)) = x. \tag{1.74}$$

Mediante derivación implícita hallamos:

$$\frac{df^{-1}}{dx} \cdot \frac{df}{df^{-1}} = 1. \tag{1.75}$$

Ello conduce a:

$$\frac{df^{-1}}{dx} = \frac{1}{\frac{df}{df^{-1}}}. \tag{1.76}$$

Por último, cambiamos de notación:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \tag{1.77}$$

Hemos visto hasta ahora la derivada de funciones exponenciales y de polinomios. Por otra parte también dedujimos la derivada de cada una de las respectivas funciones inversas: del logaritmo y de la raíz. Culminamos esta sección mediante una fórmula explícita que nos permita encontrar la derivada de una función inversa de una función ya conocida.

Consideramos ahora el siguiente problema:

Problema 1.3 *Determinar la derivada de:*

$$h(x) = xe^x. \tag{1.78}$$

Quizás esperemos para un producto una regla similar a la de la suma y resta, vale decir, para dos funciones $f(x)$ y $g(x)$:

$$(fg)' = f'g'. \tag{1.79}$$

Si tomamos $f(x) = x$ y $g(x) = e^x$, hallamos de cada una de las funciones la derivada señalada:

$$f'(x) = 1, \quad g'(x) = e^x. \tag{1.80}$$

y obtendríamos la siguiente derivada del producto:

$$(xe^x)' = 1 \cdot e^x = e^x. \tag{1.81}$$

Sin embargo, señalamos que ésta es la derivada de la función e^x, o bien, de la función $g(x)$. Si $x \neq 1$ es distinta la pendiente de la recta tangente por xe^x a la recta tangente por e^x. Por ello, podemos concluir que hemos hecho un error. En la próxima sección buscaremos una regla para determinar la derivada de un producto de funciones.

1.5. Regla del Producto

Como hemos visto en el problema anterior, la derivada de una multiplicación de funciones no es igual a las derivadas de cada función respectivamente multiplicadas. La derivada se calcula según el teorema con el cual damos inicio a la presente sección.

Teorema 1.7 (Regla del Producto) *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables. Luego, el producto también es derivable, y se tiene:*

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \tag{1.82}$$

Demostración:

Puesto que tanto $f(x)$ como $g(x)$ son derivables, hallamos:

$$\begin{aligned}
f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \\
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x) + f(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \\
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) + \\
f(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \\
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x} + \\
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(fg)(x+\Delta x) - (fg)(x)}{\Delta x} = (fg)'(x).
\end{aligned} \tag{1.83}$$

Observación 1.2 *También es posible demostrar la regla del producto mediante aplicación de logaritmo, las propiedades de logaritmo y luego derivación implícita:*

$$\ln(fg) = \ln f + \ln g. \tag{1.84}$$

Tomamos la derivada con respecto a x de ambos lados, utilizando la regla de cadena:

$$\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}. \tag{1.85}$$

Multiplicamos ambos lados por fg:

$$(fg)' = f'g + fg'. \tag{1.86}$$

Ejemplo 1.3 *Determine la derivada de:*

$$f(x) = xe^x. \tag{1.87}$$

Solución:

Sean:

$$g(x) = x, \quad h(x) = e^x. \tag{1.88}$$

Las respectivas derivadas son:

$$g'(x) = 1, \quad h(x) = e^x. \tag{1.89}$$

La regla del producto dice:

$$f' = (gh)' = g'h + gh'. \tag{1.90}$$

En este caso hallamos:

$$f' = 1 \cdot e^x + xe^x = (1 + x)e^x. \tag{1.91}$$

También podemos determinar la derivada de expresiones algebráicas, sin desfactorización:

Ejemplo 1.4 *Determinar la derivada de:*

$$f(x) = (x^2 + 4)^{11}(x - 3)^{37}. \tag{1.92}$$

Solución:

Sean:

$$g(x) = (x^2 + 4)^{11}, \quad h(x) = (x - 3)^{37}. \tag{1.93}$$

Para encontrar la derivada de la función $g(x)$ aplicamos una sustitución:

$$u(x) = x^2 + 4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x. \tag{1.94}$$

y:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2x \cdot 11 \cdot (x^2 + 4)^{10}. \tag{1.95}$$

Las derivadas respectivas son:

$$g'(x) = 22x(x^2 + 4)^{10}, \quad h(x) = 37(x - 3)^{36}. \tag{1.96}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} f'(x) = 22x(x^2+4)^{10} \cdot (x-3)^{37} + (x^2+4)^{11} \cdot 37(x-3)^{36} = \\ (x^2+4)^{10}(x-3)^{36}\left[22x(x-3) + 37(x^2+4)\right] = \\ (x^2+4)^{10}(x-3)^{36}(59x^2 - 66x + 148). \end{aligned} \tag{1.97}$$

La regla del producto también podremos ocupar para demostrar el siguiente corolario que se desprende de dos corolarios anteriores.

Corolario 1.5 *Si:*

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \neq 0- \tag{1.98}$$

Luego:

$$f'(x) = nx^{n-1}. \tag{1.99}$$

Demostración:

Se utiliza el resultado:

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}. \tag{1.100}$$

y la regla del producto para demostrar esta misma regla para $x \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$:

$$x^{-n} \cdot x^n = 1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.101}$$

Luego, por la regla del producto encontramos:

$$x^{-n} \cdot (x^n)' + (x^{-n})' \cdot x^n = 0. \tag{1.102}$$

o bien:

$$x^{-n} \cdot (nx^{n-1}) + (x^{-n})' \cdot x^n = 0. \tag{1.103}$$

De ahí:

$$\begin{aligned} nx^{-1} + (x^{-n})' \cdot x^n = 0 \Rightarrow nx^{-1-n} + (x^{-n})' = 0 \Rightarrow \\ (x^{-n})' = -nx^{-n-1}. \end{aligned} \tag{1.104}$$

Para $n = 0$ es evidente que:

$$(x^0)' = (1)' = 0. \tag{1.105}$$

Hemos demostrado:

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \neq 0 \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}. \tag{1.106}$$

Corolario 1.6 *Si:*

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{Q}, x > 0, \tag{1.107}$$

luego:

$$f'(x) = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Q}, x > 0, \tag{1.108}$$

Demostración:

Un número racional q se puede representar mediante una fracción impropia, o una fracción propia, como:

$$n = r + \frac{p}{q}, \quad r \in \mathbb{Z},\ p \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ q \in \mathbb{N}. \tag{1.109}$$

Obtenemos:

$$x^n = x^{r+\frac{p}{q}} = x^r \cdot x^{p/q} = x^r \cdot (\sqrt[q]{x})^p. \tag{1.110}$$

Sean:

$$g(x) = x^r, \quad h(x) = x^{p/q}. \tag{1.111}$$

Con el Corolario 1.3 calculamos la derivada de $\sqrt[q]{x}$:

$$(\sqrt[q]{x})' = \frac{\sqrt[q]{x}}{qx} = \frac{x^{1/q-1}}{q}. \tag{1.112}$$

Aplicamos la regla de cadena:

$$\begin{aligned} h'(x) = [(\sqrt[q]{x})^p]' = p\frac{x^{1/q-1}}{q} \cdot (x^{1/q})^{p-1} = \\ \frac{p}{q} \cdot x^{1/q-1} \cdot x^{\frac{p-1}{q}} = \frac{p}{q} \cdot x^{p/q-1}. \end{aligned} \tag{1.113}$$

y con el Corolario 1.5 la derivada de $g(x)$:

$$g'(x) = rx^{r-1}. \tag{1.114}$$

Aplicamos la regla del producto:

$$\begin{aligned} f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = rx^{r-1} \cdot x^{p/q} + x^r \cdot x^{p/q-1} = \\ rx^{r-1+p/q} + \frac{p}{q} \cdot x^{r+p/q-1} = \left(r + \frac{p}{q}\right) \cdot x^{r+p/q-1}. \end{aligned} \tag{1.115}$$

Sustituimos:

$$n = r + \frac{p}{q}, \tag{1.116}$$

y obtenemos:

$$f'(x) = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Q}. \tag{1.117}$$

Se observa que el número n puede ser negativa. Si además es entera, es función racional la función $f(x)$. La forma más general es:

$$f(x) = \frac{p_m x^n + p_{m-1}x^{m-1} + \ldots + p_1 x + p_0}{q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \ldots + q_1 x + p_0}, \quad m, n \in \mathbb{N}. \tag{1.118}$$

Si queremos tomar la derivada de esta función, deberemos determinar, efectivamente, la derivada de un cociente de dos funciones. Para dar término a esta sección intentaremos llegar a una fórmula más general. Consideramos la equivalencia:

$$\frac{f}{g} \cdot g = f. \tag{1.119}$$

Derivamos en ambos lados, aplicando a la izquierda la regla del producto:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' \cdot g + \frac{f}{g} \cdot g' = f'. \tag{1.120}$$

O, bien:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' \cdot g = f' - \frac{fg'}{g}. \tag{1.121}$$

Reordenamos el lado derecho:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' \cdot g = \frac{f'g - fg'}{g}. \tag{1.122}$$

Dividimos por la función g:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}. \tag{1.123}$$

Esta regla se llama la regla del cociente. En la siguiente sección resumimos el resultado en la forma de un teorema y daremos una demostración más formal.

1.6. Regla del Cociente

En esta sección trataremos la regla del cociente.

Teorema 1.8 (Regla del Cociente) *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables, luego:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}. \tag{1.124}$$

Demostración:

Posibilidad 1: aplicar la definición de la derivada:

$$
\begin{aligned}
&\frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \\
&\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x \cdot g(x)} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x \cdot g^2(x)} = \\
&\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x \cdot g(x)} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x \cdot g^2(x)} = \\
&\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot g(x)} - \cancel{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)}{\Delta x \cdot g(x)}} - \\
&\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot g^2(x)} + \cancel{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)}{\Delta x \cdot g(x)}} = \\
&\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot g(x)} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot g^2(x)} = \\
&\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)}{g(x+\Delta x)} \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot g(x)} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot g^2(x)} \right] = \\
&\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\cancel{g(x)}}{\Delta x \cdot \cancel{g(x)} \cdot g(x+\Delta x)} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)\cancel{g(x)}}{\Delta x \cdot g^{\cancel{2}}(x)} = \\
&\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)/g(x+\Delta x) - f(x))/g(x)}{\Delta x} = \left(\frac{f}{g}\right)'.
\end{aligned}
\tag{1.125}
$$

Posibilidad 2: aplicar derivación implícita:

Tomamos el logaritmo de $\frac{f}{g}$ *y aplicamos las propiedades correspondientes:*

$$\ln\left(\frac{f}{g}\right) = \ln f - \ln g. \tag{1.126}$$

Tomamos la derivada en ambos lados:

$$\ln\left(\frac{f}{g}\right)' = (\ln f)' - (\ln g)'. \tag{1.127}$$

Aplicamos la regla de cadena:

$$\frac{(f/g)'}{f/g} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}. \tag{1.128}$$

Reescribimos el lado derecho:

$$\frac{(f/g)'}{f/g} = \frac{f'g - fg'}{fg}. \tag{1.129}$$

Multiplicamos por f/g:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}. \tag{1.130}$$

Ejemplo 1.5 *Determinar la derivada de:*

$$f(x) = \frac{x^2+1}{3x-4}. \tag{1.131}$$

Solución:

Sean:

$$g(x) = x^2 + 1, \quad h(x) = 3x - 4. \tag{1.132}$$

Hallamos las siguientes derivadas respectivamente:

$$g'(x) = 2x, \quad h(x) = 3. \tag{1.133}$$

Aplicamos la regla del cociente:

$$f'(x) = \left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g'h - gh'}{g^2} =$$
$$\frac{2x(3x-4) - 3(x^2+1)}{(3x-4)^2} = \frac{3x^2 - 8x - 3}{(3x-4)^2}. \tag{1.134}$$

1.7. Construcción de Tabla de Derivadas

En esta sección contruiremos una tabla de derivadas, de todas las funciones que conocemos. Cabría pues, primero hacer un inventario de ellas, en un mapa de conceptos.

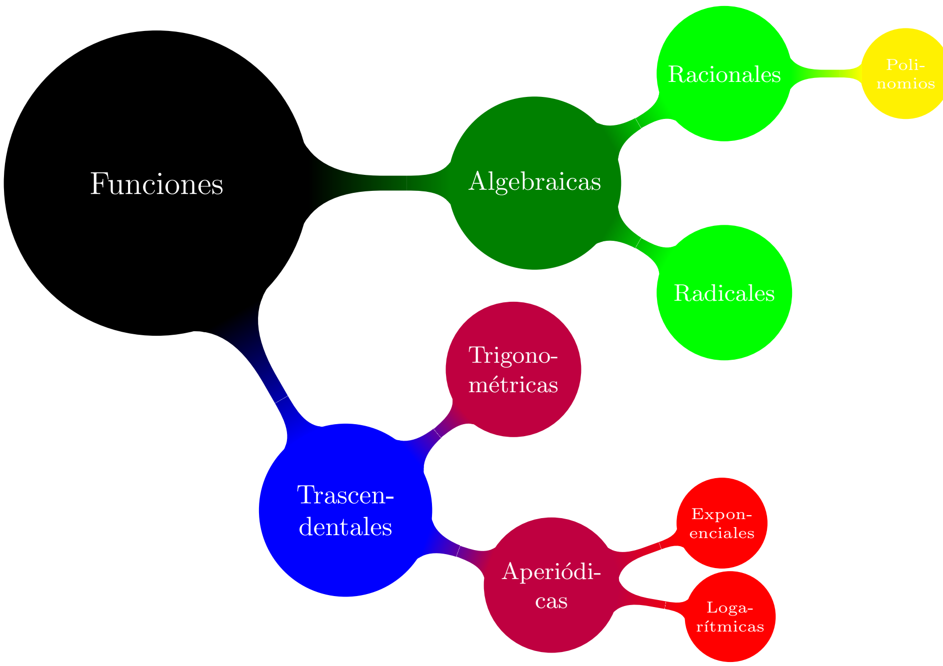


Figura 1.2: Mapa Conceptual de Funciones

Hemos tratado hasta ahora:

1. Las funciones algebráicas,
2. De las funciones tracendentales: las funciones aperiódicas.

1.7.1. Funciones Algebraicas

La regla establecido en el Corolario 1.6 se puede generalizar a potencias de una variable independiente con exponentes reales.

Teorema 1.9 *Sea:*

$$f(x) = x^r, \quad r \in \mathbb{R}. \tag{1.135}$$

Luego, la derivada es:

$$f(x) = rx^{r-1}. \tag{1.136}$$

Demostración:

Sea:

$$y = x^r. \tag{1.137}$$

Tómese el logaritmo de ambos lados:

$$\ln y = \ln(x^r), \tag{1.138}$$

y, aplíquense las propiedades de logaritmos:

$$\ln y = r \ln x, \tag{1.139}$$

Tómese la derivada de ambos lados:

$$\frac{y'}{y} = \frac{r}{x}, \tag{1.140}$$

Con $y = x^r$, se obtiene:

$$\frac{y'}{x^r} = \frac{r}{x}, \tag{1.141}$$

Multiplicamos ambos lados por x^r, y simplificamos:

$$y' = rx^{r-1}. \tag{1.142}$$

Este teorema se aplica en el caso de tener polinomios (con exponentes naturales) o funciones de radicales (con exponentes fraccionarios), o funciones racionales cuyo denominador es un monomio (base con exponente negativo y entero). Las otras funciones racionales se derivan mediante la regla del cociente, tratada en la sección anterior.

1.7.2. Funciones Exponenciales y Logarítmicas

Hemos encontrado dos tipos de funciones trascendentales aperiódicas:

1. Las funciones exponenciales,
2. Las funciones logarítmicas.

Vamos a resumir los resultados obtenidos en un teorema:

Teorema 1.10 *Las derivadas de:*

$$f(x) = e^x,\ g(x) = a^x, \quad a > 0, \tag{1.143}$$

donde e es el número de Euler, y a cualquier número real, son:

$$f'(x) = e^x, \quad g'(x) = \ln a \cdot a^x. \tag{1.144}$$

Por otra parte, de las respectivas inversas:

$$h(x) = \ln x, \quad k(x) = \log_a x, \tag{1.145}$$

hallamos las siguientes derivadas:

$$h'(x) = \frac{1}{x}, \quad k'(x) = \frac{1}{x \ln a}. \tag{1.146}$$

Demostración:

Mediante el Teorema 1.4 y Corolario 1.2 hallamos:

$$f'(x) = e^x, \quad g'(x) = \ln a \cdot a^x. \tag{1.147}$$

En el Corolario 1.4 se demostró que la derivada de $h(x)$ es:

$$h'(x) = \frac{1}{x}. \tag{1.148}$$

Mediante cambio de base, obtenemos:

$$k(x) = \frac{\ln x}{\ln a}. \tag{1.149}$$

Luego:

$$k'(x) = \frac{1}{x \ln a}. \tag{1.150}$$

1.7.3. Funciones Trigonométricas

Por último, analizaremos las funciones trascendentales periódicas: las funciones trigonométricas. Como es sabido, la función $\cos x$ y $\sin x$ cumplen con la fórmula de Euler:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \tag{1.151}$$

con i la unidad imaginaria, definida por:

$$i^2 = -1. \tag{1.152}$$

Puesto que la función $\sin x$ es impar y la función $\cos x$ par, obtenemos:

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x, \tag{1.153}$$

De tal modo deducimos:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \tag{1.154}$$

Teorema 1.11 *Sean:*

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x, \quad h(x) = \tan x, \tag{1.155}$$

Las derivadas respectivas son:

$$f'(x) = \cos x, \quad g'(x) = -\sin x, \quad h'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{1.156}$$

Demostración:

I *Utilizamos (1.154) para obtener:*

$$f(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \tag{1.157}$$

Derivamos, aplicando la regla de suma y resta de derivadas y la regla de cadena:

$$f'(x) = \frac{ie^{ix} + ie^{-ix}}{2i} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x. \tag{1.158}$$

II *Utilizamos (1.154) para obtener:*

$$g(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \tag{1.159}$$

Derivamos, aplicando la regla de suma y resta de derivadas y la regla de cadena:

$$g'(x) = \frac{ie^{ix} - ie^{-ix}}{2} = -\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -\sin x, \tag{1.160}$$

III *Recordamos:*

$$h(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}. \tag{1.161}$$

*Para determinar la derivada, utilizamos los resultados (**??**), (**??**) con la regla del cociente:*

$$h'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x \cdot \sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{1.162}$$

Definición 1.7 *Las funciones inversas de las funciones trigonométricas:*

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x, \quad h(x) = \tan x, \tag{1.163}$$

son:

$$f^{-1}(x) = \arcsin x, \quad g^{-1}(x) = \arc\cos x, \quad h^{-1}(x) = \arctan x. \tag{1.164}$$

Teorema 1.12 *Sean:*

$$f(x) = \arcsin x, \quad g(x) = \arc\cos x, \quad h(x) = \arctan x, \tag{1.165}$$

Las derivadas respectivas son:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad h'(x) = \frac{1}{x^2+1}. \tag{1.166}$$

Demostración:

I *Sea:*

$$y = \arcsin x. \tag{1.167}$$

Tomamos el sen de ambos lados:

$$\sin y = x. \tag{1.168}$$

Derivamos ambos lados:

$$y' \cos y = 1. \tag{1.169}$$

Ello da:

$$y' = \frac{1}{\cos y}. \tag{1.170}$$

Utilizamos:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}. \tag{1.171}$$

Sustituir (1.168) y (1.171) en (1.170) da:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{1.172}$$

II *Sea:*

$$y = \arccos x. \tag{1.173}$$

Tomamos cos *de ambos lados:*

$$\cos y = x. \tag{1.174}$$

Derivamos ambos lados:

$$-y' \sin y = 1. \tag{1.175}$$

Ello da:

$$y' = -\frac{1}{\sin y}. \tag{1.176}$$

Sustituir (1.174) y (1.171) en (1.181) da:

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{1.177}$$

III *Sea:*

$$y = \arctan x. \tag{1.178}$$

Tomamos tan *de ambos lados:*

$$\tan y = x. \tag{1.179}$$

Derivamos ambos lados:

$$\frac{y'}{\cos^2 y} = 1. \tag{1.180}$$

Ello da:

$$y' = \cos^2 y. \tag{1.181}$$

Aplicamos la identidad trigonométrica:

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \Rightarrow 1 + \tan^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}, \tag{1.182}$$

y obtenemos:

$$y' = \frac{1}{1+\tan^2 y}. \tag{1.183}$$

Por último, sutituimos (1.179):

$$y' = \frac{1}{x^2+1}. \tag{1.184}$$

A parte de las inversas de las funciones trigonométricas ya nombradas, existen también inversas multiplicativas de ellas:

Definición 1.8 *La cosecante* ($\csc x$)*, secante* ($\sec x$) *y cotangente* ($\cot x$) *son las inversas multiplicativas de* $\sin x$*,* $\cos x$*,* $\tan x$*:*

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}, \quad \cot x = \frac{1}{\tan x}. \tag{1.185}$$

Teorema 1.13 *Las derivadas de:*

$$f(x) = \sec x, \quad g(x) = \csc x, \quad h(x) = \cot x, \tag{1.186}$$

son respectivamente:

$$f'(x) = \tan x \cdot \sec x, \quad g'(x) = -\cot x \cdot \csc x, \quad h'(x) = -\csc^2 x. \tag{1.187}$$

Demostración:

I *Hallamos mediante la regla del producto, o regla de cadena la siguiente derivada para* $\sec x$*:*

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\cos x}\right] = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \tan x \cdot \sec x. \tag{1.188}$$

II *Hallamos mediante la regla del producto, o regla de cadena la siguiente derivada para* $\csc x$*:*

$$\begin{gathered} g'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sin x}\right] = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = \\ -\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} = -\cot x \cdot \csc x. \end{gathered} \tag{1.189}$$

III *Para encontrar la derivada de* $\cot x$*, aplicamos la regla del cociente:*

$$h'(x) = \frac{-\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x. \tag{1.190}$$

Teorema 1.14 *Las derivadas de:*

$$f(x) = \operatorname{arcsec} x, \quad g(x) = \operatorname{arccsc} x, \quad h(x) = \operatorname{arccot} x, \tag{1.191}$$

son respectivamente:

$$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad g'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad h'(x) = -\frac{1}{x^2+1}. \tag{1.192}$$

Demostración:

I *Aplicamos la secante en ambos lados:*

$$y = \operatorname{arcsec} x \Rightarrow \sec y = x. \tag{1.193}$$

Usando:

$$\sec y = \frac{1}{\cos y}, \tag{1.194}$$

derivamos implicitamente:

$$y' \cdot \frac{\sin y}{\cos^2 y} = 1. \tag{1.195}$$

y, reescribimos:

$$y' \cdot \frac{\sec^2 y}{\csc y} = 1. \tag{1.196}$$

Usamos:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sec^2 x} + \frac{1}{\csc^2 x} = 1. \tag{1.197}$$

Obtenemos:

$$y' \frac{\sec^2 y}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\sec^2 y}}}} = 1. \tag{1.198}$$

Sustituimos $x = \sec y$:

$$y' \frac{x^2}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}} = 1. \tag{1.199}$$

luego:

$$y' = \frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}. \tag{1.200}$$

Finalmente:

$$y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}. \tag{1.201}$$

II *Aplicamos la cosecante en ambos lados:*

$$y = \operatorname{arccsc} x \Rightarrow \csc y = x. \tag{1.202}$$

Usando:

$$\csc y = \frac{1}{\sin y}, \tag{1.203}$$

derivamos implicitamente:

$$-y' \cdot \frac{\cos y}{\sin^2 y} = 1. \tag{1.204}$$

y, reescribimos:

$$-y' \cdot \frac{\csc^2 y}{\sec y} = 1. \tag{1.205}$$

Usamos (1.197): Obtenemos:

$$-y' \frac{\csc^2 y}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\csc^2 y}}}} = 1. \tag{1.206}$$

Sustituimos $x = \csc y$*:*

$$-y' \frac{x^2}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}} = 1. \tag{1.207}$$

luego:

$$y' = -\frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}. \tag{1.208}$$

Finalmente:

$$y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}. \tag{1.209}$$

III *Aplicamos la cotangente en ambos lados:*

$$y = \operatorname{arccot} x \Rightarrow \cot y = x. \tag{1.210}$$

derivamos implicitamente:

$$-y' \csc^2 y = 1. \tag{1.211}$$

La expresión (1.197) conduce a:

$$1+\frac{\cos^2 y}{\sin^2 y}=\frac{1}{\sin^2 y}\Rightarrow 1+\cot^2 y=\csc^2 y. \tag{1.212}$$

Obtenemos:

$$-y'(1+\cot^2 y)=1. \tag{1.213}$$

Sustituimos $x=\cot y$:

$$-y'(x^2+1)=1. \tag{1.214}$$

Finalmente:

$$y'=-\frac{1}{x^2+1}. \tag{1.215}$$

1.7.4. Funciones Hiperbólicas

Definición 1.9 *Las funciones hiperbólicas son:*

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}, \tag{1.216}$$

con funciones inversas:

$$\operatorname{arcsenh} x,\quad \operatorname{arccosh} x,\quad \operatorname{arctanh} x. \tag{1.217}$$

Además, definimos:

$$\operatorname{sech} x=\frac{1}{\cosh x},\quad \operatorname{csch} x=\frac{1}{\sinh x},\quad \coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}, \tag{1.218}$$

con funciones inversas:

$$\operatorname{arcsech} x,\quad \operatorname{arccsch} x,\quad \operatorname{arccoth} x. \tag{1.219}$$

Lema 1.2 (Identidad Hiperbólica) *Se tiene la propiedad:*

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1. \tag{1.220}$$

Demostración:

Hallamos:

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2= \tag{1.221}$$

$$\left(\frac{1}{4}\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)-\frac{1}{2}\right)=1. \tag{1.222}$$

Observación 1.3 *Consideramos:*

$$x = \cosh u, \quad y = \sinh u, \tag{1.223}$$

Mediante el lema anterior, encontramos:

$$x^2 - y^2 = 1. \tag{1.224}$$

Esta ecuación es precisamente la ecuación implícita de una hipérbola. Para las funciones trigonométricas se conoce la identidad:

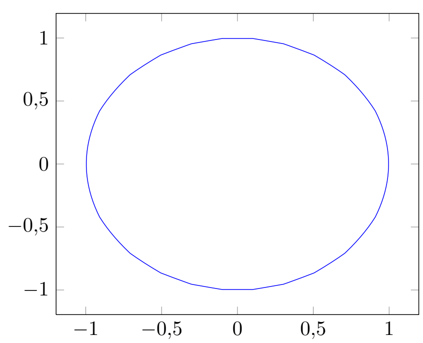
$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1. \tag{1.225}$$

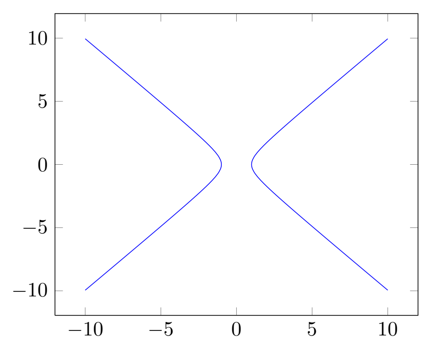
Con:

$$x = \cos u, \quad y = \sin u, \tag{1.226}$$

obtenemos la ecuación implícita del cuerpo cónico que se llama círculo unitario:

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{1.227}$$





Lema 1.3 *Podemos expresar una función exponencial con base e en términos de funciones hiperbólicas:*

$$e^x = \cosh x + \sinh x. \tag{1.228}$$

Demostración:

Hallamos:

$$\cosh x + \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x. \tag{1.229}$$

Lema 1.4 *Podemos expresar una función logarítmica con base e en una función hiperbólica inversa:*

$$\ln x = \operatorname{arctanh}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right). \tag{1.230}$$

Demostración:

Comenzamos con:

$$\tanh u = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}. \tag{1.231}$$

Sustituimos:

$$x = e^u \Rightarrow e^{-u} = \frac{1}{x}. \tag{1.232}$$

Obtenemos:

$$\tanh(\ln x) = \frac{x - x^{-1}}{x + x^{-1}}. \tag{1.233}$$

Tomamos arctanh *de ambos lados:*

$$\ln x = \operatorname{arctanh}\left(\frac{x - x^{-1}}{x + x^{-1}}\right). \tag{1.234}$$

Simplificamos:

$$\ln x = \operatorname{arctanh}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right). \tag{1.235}$$

Teorema 1.15 *Toda función exponencial puede expresarse en funciones hiperbólicas y toda función logarítmica se puede escribir en funciones hiperbólicas inversas.*

Demostración:

I *Mediante cambio de base tenemos:*

$$a^x = e^{\ln a \cdot x}. \tag{1.236}$$

Aplicamos el Lema 1.3:

$$a^x = \cosh(x \ln a) + \sinh(x \ln a). \tag{1.237}$$

II *Mediante cambio de base tenemos:*

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \tag{1.238}$$

Aplicamos el Lema 1.4:

$$\log_a x = \operatorname{arctanh}\left(\frac{\frac{x^2}{\ln^2 a} - 1}{\frac{x^2}{\ln^2 a} + 1}\right). \tag{1.239}$$

Eso es:

$$\log_a x = \operatorname{arctanh}\left(\frac{x^2 - \ln^2 a}{x^2 + \ln^2 a}\right). \tag{1.240}$$

Consecuencia 1.1 *Por el Teorema 1.15 y la Observación 1.3 se concluye que las funciones exponenciales y logarítmicas se pueden considerar como casos especiales de funciones hiperbólicas, superpuestas o compuestas. Por tanto, en el lugar de 'aperiódicas' podría decir el mapa de conceptos 'hiperbólicas'. Análogamente, se les llama 'funciones circulares' a las 'funciones trigonométricas'.*

Después de esta introducción, veremos las derivadas de todas las funciones hiperbólicas.

Teorema 1.16 *Sean:*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sinh x, \quad g(x) = \cosh x, \quad h(x) = \tanh x, \\ k(x) &= \operatorname{sech} x, \quad m(x) = \operatorname{csch} x, \quad n(x) = \coth x. \end{aligned} \tag{1.241}$$

Las respectivas derivadas son:

$$\begin{aligned} f'(x) = \cosh x, \quad g'(x) = \sinh x, \quad h'(x) &= \operatorname{sech}^2 x, \\ k'(x) = -\tanh x \cdot \operatorname{sech} x, \quad m'(x) &= -\coth x \cdot \operatorname{csch} x, \\ n'(x) &= -\operatorname{csch}^2 x. \end{aligned} \tag{1.242}$$

Demostración:

I *Es equivalente decir:*

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{1.243}$$

Utilizamos la regla de cadena para ver que la derivada de e^{-x} es $-e^{-x}$. También aplicamos la regla de multiplicación por constante:

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \tag{1.244}$$

Luego:

$$f'(x) = \sinh x. \tag{1.245}$$

II *Del mismo modo tenemos la implicación:*

$$g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow g'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{1.246}$$

Por tanto:

$$g'(x) = \cosh x. \tag{1.247}$$

III *Mediante la regla del cociente hallamos:*

$$h(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} \Rightarrow h'(x) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}. \tag{1.248}$$

Utilizamos el Lema 1.2 y obtenemos:

$$h'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x. \tag{1.249}$$

IV *Aplicamos la regla del cociente:*

$$k(x) = \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \Rightarrow k'(x) = -\frac{\sinh x}{\cosh^2 x}. \tag{1.250}$$

Reescribimos:

$$k'(x) = -\frac{\sinh x}{\cosh x} \cdot \frac{1}{\cosh x} = -\tanh x \cdot \operatorname{sech} x. \tag{1.251}$$

V *Aplicamos la regla del cociente:*

$$m(x) = \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} \Rightarrow m'(x) = -\frac{\cosh x}{\sinh^2 x}. \tag{1.252}$$

Reescribimos:

$$m'(x) = -\frac{\cosh x}{\sinh x} \cdot \frac{1}{\sinh x} = -\coth x \cdot \operatorname{csch} x. \tag{1.253}$$

VI *Mediante la regla del cociente hallamos:*

$$n(x) = \frac{\cosh x}{\sinh x} \Rightarrow n'(x) = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x}. \tag{1.254}$$

Utilizamos el Lema 1.2 y obtenemos:

$$n'(x) = -\frac{1}{\sinh^2 x} = -\operatorname{csch}^2 x. \tag{1.255}$$

Teorema 1.17 *Sean:*

$$\begin{aligned} &f(x) = \operatorname{arcsenh} x, \quad g(x) = \operatorname{arccosh} x, \quad h(x) = \operatorname{arctanh} x, \\ &k(x) = \operatorname{arcsech} x, \quad m(x) = \operatorname{arccsch} x, \quad n(x) = \operatorname{arccoth} x, \end{aligned} \tag{1.256}$$

Las derivadas respectivas son:

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad h'(x) = -\frac{1}{x^2-1}, \\ k'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}, \quad m'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}, \quad n'(x) = -\frac{1}{x^2-1}. \end{aligned} \tag{1.257}$$

Demostración:

I *Sea:*

$$y = \operatorname{arcsenh} x. \tag{1.258}$$

Tomamos el senh de ambos lados:

$$\sinh y = x. \tag{1.259}$$

Derivamos ambos lados:

$$y' \cosh y = 1. \tag{1.260}$$

Ello da:

$$y' = \frac{1}{\cosh y}. \tag{1.261}$$

Utilizamos:

$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 \Rightarrow \cosh y = \sqrt{\sinh^2 y + 1}. \tag{1.262}$$

Sustituir (1.259) y (1.262) en (1.273) da:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}. \tag{1.263}$$

II *Sea:*

$$y = \operatorname{arccosh} x. \tag{1.264}$$

Tomamos el cosh de ambos lados:

$$\cosh y = x. \tag{1.265}$$

Derivamos ambos lados:

$$y' \sinh y = 1. \tag{1.266}$$

Ello da:

$$y' = \frac{1}{\sinh y}. \tag{1.267}$$

Utilizamos:

$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 \Rightarrow \sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1}. \tag{1.268}$$

Sustituir (1.265) y (1.268) en (1.297) da:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}. \tag{1.269}$$

III *Sea:*

$$y = \operatorname{arctanh} x. \tag{1.270}$$

Tomamos tanh *de ambos lados:*

$$\tanh y = x. \tag{1.271}$$

Derivamos ambos lados:

$$\frac{y'}{\cosh^2 y} = 1. \tag{1.272}$$

Ello da:

$$y' = \cosh^2 y. \tag{1.273}$$

Aplicamos la identidad trigonométrica:

$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 \Rightarrow 1 - \tanh^2 y = \frac{1}{\cosh^2 y}, \tag{1.274}$$

y obtenemos:

$$y' = -\frac{1}{\tanh^2 y - 1}. \tag{1.275}$$

Por último, sustituimos (1.271):

$$y' = -\frac{1}{x^2 - 1}. \tag{1.276}$$

IV *Aplicamos la secante hiperbólica en ambos lados:*

$$y = \operatorname{arcsech} x \Rightarrow \operatorname{sech} y = x. \tag{1.277}$$

Usando:

$$\operatorname{sech} y = \frac{1}{\cosh y}, \tag{1.278}$$

derivamos implicitamente:

$$-y' \cdot \frac{\sinh y}{\cosh^2 y} = 1. \tag{1.279}$$

y, reescribimos:

$$-y' \cdot \frac{\operatorname{sech}^2 y}{\operatorname{csch} y} = 1. \tag{1.280}$$

Usamos:

$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{sech}^2 y} - \frac{1}{\operatorname{csch}^2 y} = 1. \tag{1.281}$$

Obtenemos:

$$-y' \frac{\operatorname{sech}^2 y}{\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\operatorname{sech}^2 y - 1}}}} = 1. \tag{1.282}$$

Sustituimos $x = \operatorname{sech} y$*:*

$$-y' \frac{x^2}{\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}}} = 1. \tag{1.283}$$

luego:

$$y' = -\frac{1}{x^2 \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}}. \tag{1.284}$$

Finalmente:

$$y' = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}. \tag{1.285}$$

V *Aplicamos la cosecante hiperbólica en ambos lados:*

$$y = \operatorname{arccsch} x \Rightarrow \operatorname{csch} y = x. \tag{1.286}$$

Usando:

$$\operatorname{csch} y = \frac{1}{\sinh y}, \tag{1.287}$$

derivamos implicitamente:

$$-y' \cdot \frac{\cosh y}{\sinh^2 y} = 1. \tag{1.288}$$

y, reescribimos:

$$-y' \cdot \frac{\operatorname{csch}^2 y}{\operatorname{sech} y} = 1. \tag{1.289}$$

Usamos (1.281) y obtenemos:

$$-y' \frac{\operatorname{csch}^2 y}{\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\operatorname{csch}^2 y+1}}}} = 1. \tag{1.290}$$

Sustituimos $x = \operatorname{csch} y$*:*

$$-y' \frac{x^2}{\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}} = 1. \tag{1.291}$$

luego:

$$y' = -\frac{1}{x^2\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}. \tag{1.292}$$

Finalmente:

$$y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}. \tag{1.293}$$

VI *Sea:*

$$y = \operatorname{arccoth} x. \tag{1.294}$$

Tomamos coth *de ambos lados:*

$$\coth y = x. \tag{1.295}$$

Derivamos ambos lados:

$$-\frac{y'}{\sinh^2 y} = 1. \tag{1.296}$$

Ello da:

$$y' = -\sinh^2 y. \tag{1.297}$$

Aplicamos la identidad hiperbólica:

$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 \Rightarrow \coth^2 y - 1 = \frac{1}{\sinh^2 y}, \tag{1.298}$$

y obtenemos:

$$y' = -\frac{1}{\coth^2 y - 1}. \tag{1.299}$$

Por último, sustituimos (1.295):

$$y' = -\frac{1}{x^2 - 1}. \tag{1.300}$$

1.7.5. Resumen

Hemos llegado a la siguiente tabla de derivadas:

Nr.	$f(x)$	$f'(x)$	*Descripción*
1.	$(c \cdot g)(x), \quad c \in \mathbb{R}$	$c \cdot g'(x)$	Multiplicación por Constante
2.	$(g \pm h)(x)$	$g'(x) \pm h'(x)$	Suma y Resta de Funciones
3.	$(g \cdot h)(x)$	$g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$	Regla del Producto
4.	$(g/h)(x)$	$\frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$	Regla del Cociente
5.	$g(u(x))$	$\frac{dg}{du} \cdot \frac{du}{dx}$	Regla de Cadena
6.	$f^{-1}(x)$	$\frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$	Funciones Inversa
a.	$c, \quad c \in \mathbb{R}$	0	Derivada de Constante
b.	x	1	Función de Identidad
c.	$x^r, \quad r \in \mathbb{R}$	rx^{r-1}	Potencias con Base Variable
d.	e^x	e^x	F. Exponencial con Base e
e.	$a^x, \quad a > 0$	$\ln a \cdot a^x$	F. Exponencial
f.	$\ln x$	x^{-1}	F. Logarítmica con Base e
g.	$\log_a x, \quad a > 0$	$x^{-1}/\ln a$	F. Logarítmica
h.	$\cos x$	$-\sin x$	F. Trigonométrica
i.	$\sin x$	$\cos x$	Idem
j.	$\tan x$	$\sec^2 x$	Idem
k.	$\sec x$	$\tan x \cdot \sec x$	Idem
l.	$\csc x$	$-\cot x \cdot \csc x$	Idem
m.	$\cot x$	$-\csc^2 x$	Idem
n.	$\arcsin x, -\operatorname{arc}\cos x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	F. Trigonométrica Inversa
ñ.	$\arctan x, -\operatorname{arccot} x$	$\frac{1}{x^2+1}$	Idem
o.	$\operatorname{arcsec} x, -\operatorname{arccsc} x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	Idem
p.	$\cosh x$	$\sinh x$	F. Hiperbólica
q.	$\sinh x$	$\cosh x$	Idem
r.	$\tanh x$	$\operatorname{sech}^2 x$	Idem
s.	$\operatorname{sech} x$	$-\tanh x \cdot \operatorname{sech} x$	Idem
t.	$\operatorname{csch} x$	$-\coth x \cdot \operatorname{csch} x$	Idem
u.	$\coth x$	$-\operatorname{csch}^2 x$	Idem
v.	$\operatorname{arcsenh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	F. Hiperbólica Inversa
w.	$\operatorname{arccosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	Idem
x.	$\operatorname{arctanh} x, \operatorname{arccoth} x$	$-\frac{1}{x^2-1}$	Idem
y.	$\operatorname{arcsech} x$	$-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$	Idem
z.	$\operatorname{arccsch} x$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$	Idem