Solución Test 1 Cálculo Integral
Profesor Patricio Cumsille
6 de Abril de 2016

P1. Aplicando el cambio de variables $t = \tan(\frac{x}{2})$ calcule $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x}dx$.

P2. Aplicar un cambio de variables para calcular la primitiva $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a^2}dx$.

P3. Considere las primitivas $I_n = \displaystyle\int x^n \sin(x)dx$ y $J_n = \displaystyle\int x^n \cos(x)dx$.

1. Determine una fórmula que relacione I_n con J_n y J_n con I_n.

2. Usando lo anterior, establezca una fórmula de recurrencia para I_n y J_n.

Solución P1.

Recordemos que si hacemos el cambio de variables $t = \tan(\frac{x}{2})$, entonces:

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{y} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Reemplazando lo anterior en la integral del enunciado obtenemos:

$$\int \frac{1}{1+\sin x}dx = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2}{(t+1)^2}dt = -\frac{2}{t+1} + C = -\frac{2}{\tan(\frac{x}{2})+1} + C.$$

Nota: Observemos que la integral $\displaystyle\int \frac{2}{(t+1)^2}dt$ es inmediata, por lo cual podemos directamente colocar el resultado de ésta. En efecto, haciendo el cambio de variables $u = t+1$ obtenemos:

$$\int \frac{2}{(t+1)^2}dt = \int \frac{2}{u^2}du = 2\int u^{-2}du = 2\frac{u^{-2+1}}{-2+1} + C = -2u^{-1} + C = -\frac{2}{u} + C = -\frac{2}{t+1} + C.$$

Solución P2.

Haciendo el cambio de variables trigonométrico $x = a\tan(\theta)$ tenemos que;

$$dx = a\sec^2(\theta) \quad \text{y} \quad \sqrt{x^2+a^2} = a\sec(\theta).$$

Nota: La segunda igualdad de arriba es válida suponiendo que tanto a como $\tan(\theta)$ son no negativos. Si a o $\tan(\theta)$ fueran negativos, el cálculo se realiza de forma similar, teniendo en cuenta que $\sqrt{a^2} = |a| = -a$ para $a < 0$ (lo mismo sería válido para $\sqrt{\sec^2(\theta)}$).

Luego, la integral del enunciado se transforma como sigue:

$$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \int a^2\sec^3(\theta)d\theta = a^2 I, \quad \text{con} \quad I = \int \sec^3(\theta)d\theta. \tag{1}$$

Calculemos la integral I lo cual fue realizado en clases:

$$I = \int \sec(\theta)\sec^2(\theta)d\theta = \int \sec(\theta)(1+\tan^2(\theta))d\theta = \int \sec(\theta)d\theta + \int \sec(\theta)\tan^2(\theta)d\theta. \tag{2}$$

Calculemos separadamente las integrales de arriba. La primera es directa:

$$\int \sec(\theta)d\theta = \int \frac{\sec(\theta)\cdot(\sec(\theta)+\tan(\theta))}{\sec(\theta)+\tan(\theta)}d\theta = \ln|\sec(\theta)+\tan(\theta)|. \tag{3}$$

Nota: Observemos que omitimos intencionalmente la constante en la igualdad anterior, ya que ésta será colocada en el cálculo final de I.

La segunda se calcula integrando por partes, teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} u = \tan(\theta), &\qquad du = \sec^2(\theta)d\theta, \\ dv = \sec(\theta)\tan(\theta)d\theta, &\qquad v = \sec(\theta). \end{aligned}$$

Así,

$$\int \sec(\theta)\tan^2(\theta)d\theta = \int udv = uv - \int vdu = \tan(\theta)\sec(\theta) - \underbrace{\int \sec^3(\theta)d\theta}_{I}. \tag{4}$$

Reemplazando las igualdades (3) y (4) en (2) obtenemos que:

$$I = \ln|\sec(\theta) + \tan(\theta)| + \tan(\theta)\sec(\theta) - I.$$

De lo anterior despejamos I obteniendo:

$$I = \frac{1}{2}\left(\ln|\sec(\theta) + \tan(\theta)| + \tan(\theta)\sec(\theta)\right) + C.$$

Finalmente, reemplazando el valor de I en la integral original (ecuación (1)), y teniendo en cuenta que $\tan(\theta) = \frac{x}{a}$ y $\sec(\theta) = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}$ obtenemos:

$$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{a^2}{2}\left(\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + \frac{x}{a^2}\sqrt{x^2+a^2}\right) + C.$$

Solución P3.

1. Poniendo

$$\begin{aligned} u = x^n, &\qquad du = nx^{n-1}dx, \\ dv = \sin(x)dx, &\qquad v = -\cos(x), \end{aligned}$$

e integrando por partes I_n obtenemos:

$$I_n = \int x^n \sin(x)dx = -x^n\cos(x) + n\underbrace{\int x^{n-1}\cos(x)dx}_{J_{n-1}}.$$

O sea,

$$I_n = -x^n\cos(x) + nJ_{n-1} \quad \text{para todo } n \geq 1. \tag{5}$$

Similarmente, poniendo

$$\begin{aligned} u = x^n, &\qquad du = nx^{n-1}dx, \\ dv = \cos(x)dx, &\qquad v = \sin(x), \end{aligned}$$

e integrando por partes J_n obtenemos:

$$J_n = \int x^n \cos(x)dx = x^n \sin(x) - n \underbrace{\int x^{n-1} \sin(x)dx}_{I_{n-1}}.$$

O sea,

$$J_n = x^n \sin(x) - nI_{n-1} \quad \text{para todo } n \geq 1. \tag{6}$$

2. Combinando las ecuaciones (5) y (6) obtenemos las fórmulas de recurrencia pedidas:

$$\begin{aligned} I_n &= -x^n \cos(x) + n(x^{n-1} \sin(x) - (n-1)I_{n-2}) \\ &= x^{n-1}(n \sin(x) - x \cos(x)) - n(n-1)I_{n-2}, \\ J_n &= x^n \sin(x) - n(-x^{n-1} \cos(x) + (n-1)J_{n-2}) \\ &= x^{n-1}(x \sin(x) + n \cos(x)) - n(n-1)J_{n-2}. \end{aligned}$$

O sea, las fórmulas de recurrencia son:

$$\begin{aligned} I_n &= x^{n-1}(n \sin(x) - x \cos(x)) - n(n-1)I_{n-2}, \\ J_n &= x^{n-1}(x \sin(x) + n \cos(x)) - n(n-1)J_{n-2}, \end{aligned}$$

para todo $n \geq 2$.

Nota: Observemos que, como la fórmula parte desde $n = 2$, entonces los valores de I_0, I_1, J_0 y J_1 hay que calcularlos a mano, lo cual se hace de manera directa.