Certamen 2 Cálculo Integral
21 de Junio de 2016
Profesores Patricio Cumsille - Luis Pajkuric

P1 (Teorema Fundamental del Cálculo y Sumas de Riemann).

1. **[0,75 puntos].** Sea $f(x) = \displaystyle\int_1^x x\ln(tx)dt$, definida para cada $x > 0$.

   Demuestre que $f'(x) = (4x-1)\ln(x)$ para todo $x > 0$.

   Indicación: Puede serle útil hacer el cambio de variables $u = tx$.

2. **[0,75 puntos].** Exprese el siguiente límite como una integral definida y calcúlelo.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+(i/n)^2} \, .$$

P2 (Aplicaciones de la Integral).

1. **[1 punto].** La región encerrada por las curvas $y = \dfrac{x^2}{4}$ e $y = 2x^3$ se hace girar alrededor del eje OX. Determine el volumen del sólido de revolución generado.

2. **[1 punto].** Calcule la longitud del arco de la curva $y = \ln(\sec x)$ entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{4}$.

3. **[1 punto].** Halle el área encerrada por las gráficas de $y = x^3 + x^2 - 3x$ e $y = -x$.

   Indicación: Vea la Figura 1 a continuación.

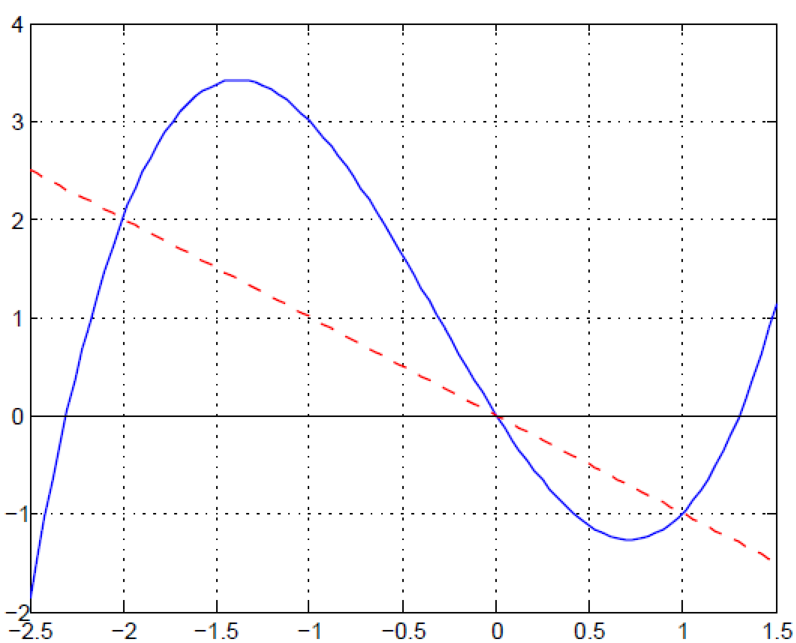

Figura 1: Gráfico para ítem 3

Formulario P2:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx, \quad V = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right) dx, \quad L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx\ .$$

P3 (Integrales impropias).

1. **[0,5 puntos].** Por medio del criterio de comparación, determine la convergencia de la siguiente integral impropia de primera especie.

$$\int_0^\infty e^{-x} \ln(x) dx\ .$$

   Indicación: Puede serle útil utilizar que $\ln(x) < x$ para todo $x > 0$.

2. **[1 punto].** Por medio del criterio del cociente, determine la convergencia de la siguiente integral impropia de segunda especie.

$$\int_0^{1^-} \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(2+x)}}\ .$$

   Indicación: Puede serle útil recordar que la integral impropia $\displaystyle\int_a^{b^-} \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx$ es convergente para cada $\alpha < 1$.