Solución Certamen 1 Cálculo Integral
19 de Abril de 2016
Profesores Patricio Cumsille - Luis Pajkuric

P1.

1. Haciendo una substitución adecuada calcule la primitiva de $\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$.
2. Integrando por partes calcule la primitiva de $x\arctan(x)$.

P2. Usando la estrategia más apropiada calcule las integrales indefinidas siguientes:

1. $\displaystyle\int e^x\sqrt{1+e^x}$.
2. $\displaystyle\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta+\sin\theta}d\theta$.

P3. Se desea calcular la integral indefinida $I=\displaystyle\int\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}dx$, donde A, B, b y c son números reales dados tales que $b^2-4c<0$.

1. Complete el cuadrado en el denominador y utilice un cambio de variables apropiado para probar que I se transforma en una integral de la forma
$$\int\frac{Cu+D}{u^2+e^2}du,$$
donde los números reales C, D y e se expresan en términos de A, B, b y c. Determine C, D y e explícitamente.
2. Resuelva la integral de la parte anterior y obtenga el valor de I.
3. Aplique lo anterior para calcular la primitiva de $\dfrac{2x+1}{x^2+3x+4}$.

P4. Determinar una fórmula de recurrencia para la primitiva $I_{m,n}=\displaystyle\int x^m(\ln x)^n dx$. Use la fórmula para calcular $\displaystyle\int x^2\ln x dx$.

Solución P1.

1. Hay más de una forma para resolver esta integral. La más fácil es hacer el cambio de variables $u = \sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$ (otras formas serían poner $v = x^2+1$ ó $x = \tan(\theta)$). Un cálculo simple muestra que

$$x = (u^2-1)^{\frac{1}{2}}, \quad x^3 = (u^2-1)^{\frac{3}{2}}, \quad du = \frac{x}{u}dx \quad \text{y} \quad dx = \frac{u}{(u^2-1)^{\frac{1}{2}}}du.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{(u^2-1)^{\frac{3}{2}}}{u} \cdot \frac{u}{(u^2-1)^{\frac{1}{2}}}du = \int (u^2-1)du &= \frac{u^3}{3} - u + C \\ &= \frac{1}{3}u(u^2-3) + C. \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando $u = (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$ en la igualdad anterior obtenemos el resultado:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\left(x^2-2\right) + C.$$

Por razones de completitud, desarrollaremos el cálculo con los otros cambios de variables.

Segunda forma. Haciendo $v = x^2+1$, entonces

$$x = (v-1)^{\frac{1}{2}}, \quad x^3 = (v-1)^{\frac{3}{2}}, \quad dv = 2xdx = 2(v-1)^{\frac{1}{2}}dx, \quad \text{y} \quad dx = \frac{dv}{2(v-1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{(v-1)^{\frac{3}{2}}}{v^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{dv}{2(v-1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\int \frac{v-1}{v^{\frac{1}{2}}}dv &= \frac{1}{2}\int \left(v^{\frac{1}{2}} - v^{-\frac{1}{2}}\right)dv \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}v^{\frac{3}{2}} - 2v^{\frac{1}{2}}\right) + C \\ &= \frac{1}{3}v^{\frac{1}{2}}(v-3) + C. \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando $v = x^2+1$ en la igualdad anterior obtenemos el resultado:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(x^2-2) + C.$$

Tercera forma. Por último, hacemos la substitución trigonométrica $x = \tan\theta$, de donde sale que:

$$dx = \sec^2\theta d\theta, \quad \text{y} \quad \sqrt{x^2+1} = \sqrt{\tan^2\theta + 1} = \sec\theta.$$

Luego,

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{\tan^3\theta}{\sec\theta}\sec^2\theta d\theta = \int \tan^3\theta\sec\theta d\theta. \tag{1}$$

Haciendo el cambio de variables $t = \sec\theta$ tenemos que $dt = \sec\theta\tan\theta d\theta$, y teniendo en cuenta que $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\int \tan^3\theta\sec\theta d\theta = \int \tan^2\theta\cdot\tan\theta\sec\theta d\theta &= \int(\sec^2\theta - 1)\cdot\underbrace{\tan\theta\sec\theta d\theta}_{dt} \\
&= \int(t^2-1)dt \\
&= \frac{1}{3}t^3 - t + C = \frac{1}{3}t(t^2-3) + C.
\end{aligned}$$

Reemplazando $t = \sec\theta$ en la igualdad anterior obtenemos que:

$$\int \tan^3\theta\sec\theta d\theta = \frac{1}{3}\sec\theta(\sec^2\theta - 3) + C = \frac{1}{3}\sec\theta(\tan^2\theta - 2) + C.$$

Finalmente, reemplazando la ecuación anterior en (1), usando que $x = \tan\theta$ y que $\sec\theta = \sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$ obtenemos que:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(x^2-2) + C.$$

2. Para integrar por partes ponemos:

$$\begin{aligned}
dv &= xdx, \qquad v = \frac{x^2}{2}, \\
u &= \arctan(x), \qquad du = \frac{1}{1+x^2}\ .
\end{aligned}$$

Luego

$$\int x\arctan(x)dx = \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx. \tag{2}$$

Calculemos ahora la integral del lado derecho de la igualdad anterior. Para ello, como se trata de una función racional y el numerador y denominador tienen el mismo grado, primero dividimos x^2 por $1+x^2$. Es claro que al dividir x^2 por $1+x^2$ el cociente es 1 y el resto es -1. Luego:

$$\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2} \Longrightarrow \int \frac{x^2}{1+x^2}dx = x - \arctan(x) + C.$$

Reemplazando lo anterior en (2) obtenemos que:

$$\int x\arctan(x)dx = \frac{1}{2}\left[(x^2+1)\arctan(x) - x\right] + C.$$

Solución P2.

1. Aplicando el cambio de variables $u = \sqrt{1+e^x}$ tenemos que

$$e^x = u^2 - 1, \quad du = \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}dx = \frac{u^2-1}{2u}dx, \quad \text{y} \quad dx = \frac{2u}{u^2-1}du.$$

Luego,

$$\int e^x\sqrt{1+e^x}dx = \int (u^2-1)\cdot u \cdot \frac{2u}{u^2-1}du = \int 2u^2 du = \frac{2}{3}u^3 + C = \frac{2}{3}(1+e^x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

2. Como se trata de una función racional de senos y cosenos se podría aplicar la substitución $t = \tan(\frac{\theta}{2})$. Sin embargo, lo más fácil es hacer el cambio de variables $u = \sin\theta$. Luego, $du = \cos\theta d\theta$ y así

$$\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta + \sin\theta}d\theta = \int \frac{du}{u^2+u}. \tag{3}$$

Calculando la integral del lado derecho de la igualdad usando fracciones parciales tenemos que:

$$\int \frac{du}{u^2+u} = \int \left(\frac{A}{u} + \frac{B}{u+1}\right)du. \tag{4}$$

Un cálculo fácil da que $A = 1$ y $B = -1$. Así:

$$\int \frac{du}{u^2+u} = \int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{u+1} = \ln|u| - \ln|u+1| + C = \ln\left|\frac{u}{u+1}\right| + C.$$

Reemplazando lo anterior combinado con $u = \sin\theta$ en (3), obtenemos que:

$$\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta + \sin\theta}d\theta = \ln\left|\frac{\sin\theta}{\sin\theta + 1}\right| + C.$$

Segunda forma. Aplicando la substitución $t = \tan(\frac{\theta}{2})$, después de un tedioso cálculo, tenemos que:

$$\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta + \sin\theta}d\theta = \int \frac{1-t}{t(1+t)}dt. \tag{5}$$

De manera similar a lo realizado en (4), aplicamos fracciones parciales para calcular la integral anterior:

$$\int \frac{1-t}{t(1+t)}dt = \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}\right)dt.$$

Un cálculo simple da que $A = 1$ y $B = -2$. Luego,

$$\int \frac{1-t}{t(1+t)}dt = \int \frac{dt}{t} - 2\int \frac{dt}{t+1} = \ln|t| - 2\ln|t+1| + C = \ln\frac{|t|}{(t+1)^2} + C.$$

Reemplazando lo anterior combinado con $t = \tan(\frac{\theta}{2})$ en (5), llegamos a:

$$\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta + \sin\theta} d\theta = \ln \frac{|\tan(\frac{\theta}{2})|}{\left(\tan(\frac{\theta}{2}) + 1\right)^2} + C. \tag{6}$$

La respuesta anterior es válida. Sin embargo, para convencernos de que se llega a la misma respuesta que antes, aplicaremos la identidad trigonométrica

$$\sin\theta = \frac{2\tan(\frac{\theta}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\theta}{2})} = \frac{2\tan(\frac{\theta}{2})}{\sec^2(\frac{\theta}{2})}\ .$$

Para obtener $\sin\theta$ en el numerador de (6), multiplicamos y dividimos la fracción dentro del logaritmo natural por $\frac{2}{\sec^2(\frac{\theta}{2})}$. Así obtenemos que:

$$\ln \frac{|\tan(\frac{\theta}{2})|}{\left(\tan(\frac{\theta}{2}) + 1\right)^2} = \ln \frac{|\sin\theta|}{|2 + 2\sin\theta|} = \ln \frac{1}{2}\left|\frac{\sin\theta}{1 + \sin\theta}\right| = \ln\frac{1}{2} + \ln\left|\frac{\sin\theta}{1 + \sin\theta}\right|.$$

Reemplazando esto último en (6) obtenemos que:

$$\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta + \sin\theta} d\theta = \ln\left|\frac{\sin\theta}{1 + \sin\theta}\right| + \underbrace{\ln\frac{1}{2} + C}_{\text{constante}} = \ln\left|\frac{\sin\theta}{\sin\theta + 1}\right| + C.$$

Observación: La primitivas calculadas con ambos cambios de variables difieren en una constante, aunque a primera vista parecieran dar diferentes resultados. En efecto, si solamente nos quedamos con la respuesta (6) o si sólo reemplazamos

$$\ln \frac{|\tan(\frac{\theta}{2})|}{\left(\tan(\frac{\theta}{2}) + 1\right)^2} \quad \text{por} \quad \ln\frac{1}{2}\left|\frac{\sin\theta}{1 + \sin\theta}\right|\ ,$$

pareciera que los resultados fueran diferentes.

Solución P3.

1. Primero notemos que el denominador es irreducible, ya que el discriminante de x^2+bx+c es negativo por hipótesis del enunciado. Completando el cuadrado tenemos que:

$$x^2+bx+c = x^2+2x\frac{b}{2}+\frac{b^2}{4}+c-\frac{b^2}{4} = (x+\frac{b}{2})^2+c-\frac{b^2}{4}.$$

   Reemplazando en la integral del enunciado y haciendo el cambio de variables $u = x+\frac{b}{2}$ obtenemos que:

$$I = \int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}dx = \int \frac{A(u-\frac{b}{2})+B}{u^2+c-\frac{b^2}{4}}du = \int \frac{Au+B-\frac{Ab}{2}}{u^2+c-\frac{b^2}{4}}du.$$

   Es decir, I se transforma en

$$I = \int \frac{Cu+D}{u^2+e^2}du,$$

   donde

$$C = A, \quad D = B-\frac{Ab}{2} \quad \text{y} \quad e^2 = c-\frac{b^2}{4}.$$

   Notemos que e^2 es positivo ya que $e^2 = c-\frac{b^2}{4} = \frac{4c-b^2}{4} > 0$, ya que por hipótesis del enunciado $b^2-4c<0$.

2. Resolviendo la integral anterior obtenemos que:

$$I = \frac{C}{2}\int \frac{2u}{u^2+e^2}du + D\int \frac{1}{u^2+e^2}du = \frac{C}{2}\ln(u^2+e^2)+\frac{D}{e}\arctan(\frac{u}{e})+\underbrace{K}_{\text{constante}}.$$

   Finalmente, reemplazando $u = x+\frac{b}{2}$ obtenemos que:

$$I = \frac{C}{2}\ln\left[(x+\frac{b}{2})^2+e^2\right]+\frac{D}{e}\arctan\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{e}\right)+K = \frac{C}{2}\ln(x^2+bx+c)+\frac{D}{e}\arctan\left(\frac{x}{e}+\frac{b}{2e}\right)+K.$$

3. Aplicando lo anterior, tenemos que:

$$C = 2, \quad D = -2 \quad \text{y} \quad e^2 = \frac{7}{4}.$$

   Luego,

$$I = \int \frac{2x+1}{x^2+3x+4}dx = \ln(x^2+3x+4)-\frac{4}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{7}}+\frac{3}{\sqrt{7}}\right)+K.$$

Solución P4.

Poniendo

$$u = (\ln x)^n, \qquad du = n(\ln x)^{n-1}\frac{1}{x}dx,$$
$$dv = x^m dx, \qquad v = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

e integrando por partes obtenemos que:

$$I_{m,n} = \int x^m(\ln x)^n dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^n - \frac{n}{m+1}\underbrace{\int x^m(\ln x)^{n-1}dx}_{I_{m,n-1}} = \frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^n - \frac{n}{m+1}I_{m,n-1},$$

o sea

$$I_{m,n} = \frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^n - \frac{n}{m+1}I_{m,n-1},$$

para cada $m \geq 0$ y $n \geq 1$. Aplicando esta fórmula para calcular la integral del enunciado tenemos que:

$$\int x^2 \ln x dx = I_{2,1} = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}I_{2,0} = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C = \frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C.$$