Certamen 3 Cálculo Integral
Profesores Patricio Cumsille - Luis Pajkuric
12 de Julio de 2016

P1 (Sucesiones generales) [1,6 puntos].

Calcule los siguientes límites:

1. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{-8n\sqrt{n}+2\sqrt{n}}{4n^3+n^2-2}$

2. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n-2}{4n-3}\right)^{4n+3}$.

   Indicación: Puede serle útil usar que $\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$.

P2 (Sucesiones monótonas) [2 puntos].

Sea (u_n) la sucesión definida por la recurrencia:

$$u_2 = 1, \qquad u_{n+1} = \sqrt{\frac{4+u_n^2}{2}}, \quad n \geq 2$$

1. Pruebe que (u_n) es creciente y acotada superiormente.

   Indicación: Usando inducción, pruebe que $u_n < 2$ para todo $n \geq 2$.

2. Concluya que (u_n) es convergente y calcule su límite.

P2 (Series) [2,4 puntos].

1. Usando el criterio de comparación en el límite, estudie la convergencia de la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)$$

2. Usando el criterio de la raíz, estudie la convergencia de la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

3. Usando el criterio del cociente, estudie la convergencia de la serie.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$$

4. Usando el criterio de la integral, estudie la convergencia de la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+3}$$

Solución P1.

1. Dividiendo por n^3 tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-8n\sqrt{n}+2\sqrt{n}}{4n^3+n^2-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\dfrac{8}{n^{3/2}}+\dfrac{2}{n^{5/2}}}{4+\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^3}} = \frac{0}{4} = 0$$

2. Escribiendo el límite en la forma:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n-2}{4n-3}\right)^{4n+3} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{4n-3}\right)^{4n-3+6}$$

tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n-2}{4n-3}\right)^{4n+3} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{4n-3}\right)^{4n-3} \lim_{n\to\infty} \cdot \left(1+\frac{1}{4n-3}\right)^{6} = e\cdot 1 = e,$$

ya que $\lim\limits_{m\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m = e.$

Solución P2.

1. Primero evaluemos los dos primeros términos de (u_n):

$$u_2 = 1, \quad u_3 = \sqrt{\frac{4+u_2^2}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} > 1 = u_2$$

Así $u_3 > u_2$. De manera general, probemos que $u_{n+1} > u_n$. Reemplazando la fórmula de u_{n+1} tenemos que:

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{4+u_n^2}{2}} > u_n \iff \frac{4+u_n^2}{2} > u_n^2 \iff 4+u_n^2 > 2u_n^2 \iff 4 > u_n^2 \iff 2 > u_n \tag{1}$$

En la primera equivalencia anterior elevamos al cuadrado, mientras que en la última usamos que $u_n > 0$ para todo n, lo cual es evidente a partir de la fórmula que define a la sucesión. Entonces, probar que (u_n) es creciente es equivalente a probar que $u_n < 2$ para todo n.

Siguiendo la indicación, probaremos ésto por inducción. Para $n = 2$, como $u_2 = 1 < 2$, se satisface la propiedad. Supongamos que $u_n < 2$ y probemos que $u_{n+1} < 2$. Usando la fórmula de u_{n+1} tenemos que:

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{4+u_n^2}{2}} < 2 \iff \frac{4+u_n^2}{2} < 4 \iff 4+u_n^2 < 8 \iff u_n^2 < 4 \iff u_n < 2$$

Pero la última desigualdad es exactamente la hipótesis de inducción, la cual como es cierta, entonces se tiene que $u_{n+1} < 2$. Esto prueba que (u_n) es una sucesión acotada superiormente. Por otro lado, por (1) esto prueba también que la sucesión (u_n) es creciente.

2. Usando el criterio de sucesiones monótonas, concluimos que (u_n) es convergente. Sea $u = \lim_{n\to\infty} u_n$. Tomando límite en la fórmula de u_{n+1} tenemos que:
$$u = \sqrt{\frac{4+u^2}{2}} \Rightarrow u^2 = \frac{4+u^2}{2} \Rightarrow 2u^2 = 4+u^2 \Rightarrow u^2 = 4 \Rightarrow u = 2$$
La raíz negativa $u = -2$ se descarta ya que al ser (u_n) una sucesión de números reales positivos, entonces su límite tiene que ser ≥ 0.

Solución P3.

1. Comparamos la serie con la serie armónica $\sum_{n=1} \frac{1}{n}$. Calculamos entonces:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cos\frac{1}{n}} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$
Lo anterior es cierto por el hecho conocido de que
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1$$
Como $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 > 0$ y la serie armónica es divergente, concluimos que la serie dada es también divergente.

2. Calculamos el límite:
$$\lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{2n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}$$
Como este límite es menor que 1, concluimos que la serie es convergente.

3. Calculamos el límite:
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{3^n}{3^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{3}\right| = \infty$$
Luego la serie diverge.

4. Sea $f(x) = \frac{x}{x^2+3}$. Es claro que $f(x) \geq 0$ para $x \in [1,\infty)$, que $f(x)$ es continua. Veamos que es decreciente:
$$f'(x) = \frac{x^2+3-2x^2}{(x^2+3)^2} = \frac{3-x^2}{(x^2+3)^2}$$
Así $f'(x) < 0$ si $3-x^2 < 0$, es decir, si $\sqrt{3} < x$. Luego $f(x)$ es decreciente en el intervalo $(\sqrt{3},\infty)$ (que abarca casi todo el intervalo $[1,\infty)$). Calculemos la integral de $f(x)$:
$$\int_1^\infty \frac{x}{x^2+3}dx = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\ln(x^2+3)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\ln(b^2+3) - \frac{1}{2}\ln(4) = \infty.$$
Luego la serie es divergente.