Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Introducción al Cálculo 08-1

## Guía de Ejercicios

**1.** Considere la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ cuyo límite es $l = 0$. Para cada $\epsilon \in \{1, \frac{1}{100}\}$ encuentre algún $n_0 \in \mathbb{N}$ que para todo $n \geq n_0$ satisfaga $|a_n - l| \leq \epsilon$. Repita el ejercicio para $a_n = \frac{2}{n^2} - 1$ y $l = -1$.

**2.** Use la definición de convergencia de una sucesión para demostrar las siguientes igualdades.

*a*) $\lim \frac{2n-5}{2n-7} = 1$.

*b*) $\lim \frac{2n^2+1}{3n^2+6n+2} = \frac{2}{3}$.

*c*) $\lim cos(n!\pi x) = 1$, para $x \in \mathbb{Q}$.

*d*) $\lim n(|x + \frac{1}{n}| - |x|) = -1$, para $x < 0$.

*e*) $\lim \left[\frac{a}{n}\right] \frac{n}{b} = 0$.

*f*) $\lim \sqrt{\frac{1}{n}} = 0$.

**3.** Calcule los siguientes límites.

*a*) $\lim \frac{2n+4}{3n+1}$.

*b*) $\lim \frac{4n^4+2}{5n^5-6n+1}$.

*c*) $\lim \frac{n-n^3+3}{n^3+n-7}$.

*d*) $\lim \frac{n\sqrt{n}-n+3}{n^2+n-7}$ (puede usar 2(f)).

*e*) $\lim \frac{(-1)^n}{n}$.

*f*) $\lim \max\{\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^{n+1}}{n}\}$.

*g*) $\lim \frac{n(-1)^n}{1-(n+3)^4}$.

*h*) $\lim \frac{n-sen(n)}{n^2-16}$.

**4.** Demuestre que si $\lim a_n = l$ entonces $\lim a_{n+1} = l$, $\lim a_{n+2} = l$, $\lim a_{n-1} = l$, $\lim a_{2n} = l$ y $\lim a_{2n+1} = l$.

**5.** Demuestre que si $\sqrt{a_n}$ es una sucesión con $\lim a_n = l$ entonces $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{l}$. Se sugiere que separe su análisis en los casos $l = 0$ y $l > 0$. En el primero caso demuestre la propiedad usando la definición de convergencia.

Ingeniería Matemática
Universidad de Chile

En el segundo caso, escriba $\sqrt{a_n} - \sqrt{l}$ como el producto $\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{l}}(a_n - l)$, demuestre que el primer término es una sucesión acotada y note que el segundo es una sucesión nula. Termine el análisis de este caso usando el álgebra de límites. >Por qué era necesario separar los casos $l = 0$ y $l > 0$?.

**6.** Calcular los siguientes límites.

*a*) $\lim(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}})$.

*b*) $\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n+3}$.

**7.** Sea $(u_n)$ una sucesión que verifica $(\exists n_0)(\forall \epsilon > 0)\ n > n_0 \Rightarrow |u_n - u| < \epsilon$. Probar que el número de términos distintos de la sucesión es finito.