Pauta Certamen 1 Cálculo Integral
12 de abril de 2017
Profesores Patricio Cumsille - Juan Espinoza

P1. [1 punto].

a) Demuestre que $[0,1)$ no tiene máximo.

b) Demuestre usando la definición de convergencia de sucesiones que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2.$$

P2. [1,5 puntos]. Calcule, si es que existen, los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+2n+1}{n^2+n}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^4+6n+7}-n^2\right)$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

P3. [1,5 puntos]. Determine si las siguientes sucesiones son: (i) monótonas, (ii) acotadas, (iii) convergentes.

(a) $\dfrac{1+(-1)^n}{n}$; (b) $\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

P4. [2 puntos]. Un modelo que surge en ecología para simular el crecimiento de una población está dado por la **sucesión logística**

$$p_{n+1} = kp_n(1-p_n)$$

donde p_n es el tamaño de la población de la $n-$ésima generación de una especie, suponiendo que no está en interacción con el medioambiente. Los valores de (p_n) corresponden a la proporción del tamaño máximo de la población, de modo que $0 \leq p_n \leq 1$.

El objetivo de este problema consiste en analizar el comportamiento de esta especie modelada por esta sucesión. Suponga que $k \in (1,2)$. Se pide:

a) **[0,75 puntos].** Demuestre que si la proporción de la población inicial está entre 0 y $1-1/k$ entonces la proporción de la $n-$ésima generación también estará entre dichos valores. O sea, pruebe que si $p_0 \in (0, 1-1/k)$, entonces para todo $n \geq 1$ se cumple que $p_n \in (0, 1-1/k)$.
Indicación: Notando que $0 < 1-1/k < 1/2$ para $k \in (1,2)$, grafique la función $f(x) = kx(1-x)$ para $x \in [0,1]$ y pruebe que para todo $x \in (0, 1-1/k)$, se verifica que $f(x) \in (0, 1-1/k)$.

b) **[0,5 puntos].** Demuestre que la sucesión (p_n) es creciente.

c) **[0,75 puntos].** Concluya que la sucesión (p_n) es convergente y calcule el valor del límite de (p_n). Interprete sus resultados en términos de lo que ocurre con la especie.

Solución Certamen 1

P1. *a*) Basta probar que $\sup[0,1) = 1$, ya que si el conjunto $[0,1)$ tuviera máximo éste debería ser igual a su supremo (y claramente $1 \notin [0,1)$). Probemos entonces que $\sup[0,1) = 1$. Para ello, debemos probar dos aspectos:

- Que 1 es cota superior del conjunto $[0,1)$, lo cual es evidente ya que $\forall x \in [0,1)$ se tiene que $x \leq 1$.
- Que 1 es la menor cota superior. Por contradicción, si el conjunto $[0,1)$ tuviera una cota superior $M < 1$, entonces si elegimos $0 < \delta < 1 - M$ (basta elegir $\delta = \frac{1-M}{2}$ por ejemplo) se tendrá que $M + \delta < 1$, es decir, $M + \delta \in [0,1)$ (como M es cota superior de $[0,1)$, entonces $M \geq 0$ y así $M + \delta \geq 0$). En conclusión, se debería tener que $M + \delta \leq M$ (pues M es cota superior de $[0,1)$ y $M + \delta \in [0,1)$). Claramente lo anterior es una contradicción. Luego, 1 es la menor cota superior.

En conclusión, 1 es el supremo del conjunto $[0,1)$.

b) Debemos probar que:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \text{ tal que } (\forall n \geq n_0) \left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| \leq \varepsilon. \tag{1}$$

Desarrollando la desigualdad tenemos que:

$$\left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| \leq \varepsilon \iff \left| \frac{2n+1-2n-2}{n+1} \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon.$$

Ahora bien, se sabe que la sucesión $(1/n)$ converge a 0, y por lo tanto $(1/(n+1))$ también converge a 0. Luego, para todo $\varepsilon > 0$ existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $\frac{1}{n+1} = \left| \frac{1}{n+1} - 0 \right| \leq \varepsilon$. Como esta última desigualdad es equivalente a la original, lo anterior prueba (1).

P2. *a*) Dividiendo por n^2 y utilizando el álgebra de sucesiones convergentes tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 2n + 1}{n^2 + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{3+0+0}{1+0} = 3.$$

b) Desracionalizando, dividiendo por n^2 y utilizando el álgebra de sucesiones convergentes tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^4+6n+7} - n^2\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^4+6n+7} - n^2\right) \cdot \frac{\left(\sqrt{n^4+6n+7} + n^2\right)}{\left(\sqrt{n^4+6n+7} + n^2\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} n\frac{n^4+6n+7-n^4}{\sqrt{n^4+6n+7}+n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} n\frac{6n+7}{\sqrt{n^4+6n+7}+n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{6+\frac{7}{n}}{\sqrt{1+\frac{6}{n^3}+\frac{7}{n^4}}+1} = \frac{6+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = 3.
\end{aligned}$$

c) Como la sucesión $(\sin n)$ es acotada y la sucesión $(1/\sqrt{n})$ converge a 0 (esto se vió en clases), entonces el producto entre ambas converge a 0. Luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} = 0.$$

P3. *a*) Los primeros términos de la sucesión son: 0, 1, 0, 1/2, 0, 1/3, ... Luego, claramente esta sucesión no es monótona. Además, es claramente acotada puesto que, dado que $1/n \leq 1$ y $1 + (-1)^n$ o bien es igual a 0 ó a 2, entonces:

$$\frac{1 + (-1)^n}{n} \leq 2 \quad \forall n \geq 1.$$

Incluso, siendo más finos, dado que

$$\frac{1 + (-1)^n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \text{ es impar,} \\ \dfrac{2}{n} & \text{si} \quad n \text{ es par,} \end{cases}$$

entonces la sucesión está acotada por 1, ya que cuando n es par, se tiene que $n = 2m$ para algún $m \in \mathbb{N}$, y así $2/n = 1/m \leq 1$ para todo $m \geq 1$.

Por último, la sucesión es convergente a 0, ya que $2/n$ tiende a 0 (puesto que los términos impares convergen a 0, y los pares también).

b) Los primeros términos de la sucesión (partiendo desde $n = 0$) son: 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, ... Luego, claramente esta sucesión no es monótona. Claramente es acotada, ya que $|\cos x| \leq 1$ para cualquier valor $x \in \mathbb{R}$. Por último, esta sucesión es divergente, ya que tiene un patrón periódico (se repiten sus valores) y por lo tanto nunca se estabiliza en torno a un único valor.

P4. *a*) Siguiendo la indicación, graficamos la función $f(x) = kx(1-x)$ para $x \in [0,1]$, notando que el punto $\bar{x} = 1 - 1/k$ queda situado entre 0 y 1/2 para $k \in (1,2)$ (ver Figura 1 al final).

Notando que $f(\bar{x}) = \bar{x}$, a partir de la Figura 1 se observa claramente que para todo $x \in (0,\bar{x})$, $f(x) \in (0,\bar{x})$. Por lo tanto, partiendo de un punto $p_0 \in (0,\bar{x})$, como $p_1 = f(p_0)$ se tendrá que $p_1 \in (0,\bar{x})$, y por el mismo argumento $p_2 = f(p_1) \in (0,\bar{x})$, y así sucesivamente se prueba que para todo $n \geq 1$, $p_n \in (0,\bar{x})$. Esto se podría también probar por inducción, pero basta con hacer este análisis gráfico.

b) (p_n) será creciente sí y solamente si $p_{n+1} > p_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Reemplazando la fórmula de recurrencia ($p_{n+1} = f(p_n)$) tenemos que:

$$p_{n+1} > p_n \iff kp_n(1-p_n) > p_n \iff (k-1)p_n - kp_n^2 > 0 \iff p_n\,(k-1-kp_n) > 0.$$

Esta última desigualdad será cierta si $k-1-kp_n > 0$, ya que p_n es siempre positiva (pues partiendo de $p_0 > 0$, de la fórmula $p_{n+1} = f(p_n)$ se obtienen valores de p_n siempre positivos; esto se observa de la Figura 1 donde se observa claramente que $f(x) > 0$ para todo $x \in (0,1)$). Luego, (p_n) será creciente si se cumple que $k-1-kp_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, (despejando p_n) $p_n < 1-1/k = \bar{x}$. O sea, (p_n) es creciente sí y solamente si (p_n) está acotada superiormente por $\bar{x}$, lo cual fue probado en la parte (a).

c) Como la sucesión (p_n) es creciente y acotada superiormente, entonces es convergente. Sea $p = \lim p_n$. Recordando que también $p = \lim p_{n+1}$ y tomando límite en la fórmula de recurrencia obtenemos que:

$$p = kp(1-p).$$

Despejando p, sale que p es solución de la ecuación:

$$kp^2 + (1-k)p = 0 \iff p\,[kp + (1-k)] = 0 \iff p = 0 \text{ ó } p = 1 - \frac{1}{k} = \bar{x}.$$

Claramente p no puede ser 0, ya que $p_n \geq p_0 > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (por ser (p_n) creciente). Por lo tanto, $p = \bar{x}$ y así la sucesión (p_n) converge a $\bar{x}$. Esto significa que, en un tiempo suficientemente grande, la población de la especie llega a un equilibrio (ya que la proporción p_n converge).

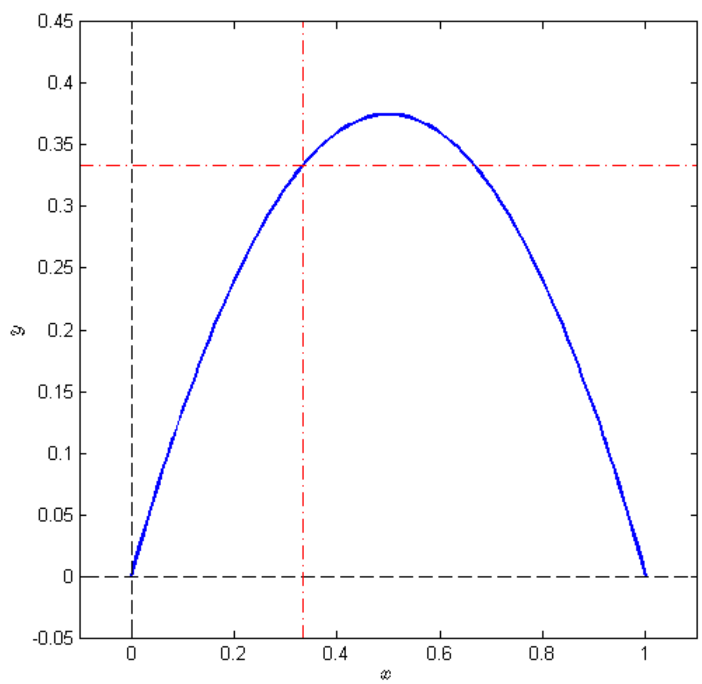

Figura 1: Gráfico de la función $f(x) = kx(1-x)$ para $k = 1{,}5$. El valor $\bar{x}$ y $f(\bar{x})$ están representados con la línea punteada roja.