Guía Nº1 Cálculo II: Sucesiones
Profesor Patricio Cumsille
Semana 2

1. Pruebe que si $s_n \geq 0$ y $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ entonces $s \geq 0$. Deduzca que si $u_n \geq v_n$ para n grande y si $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ y $\lim_{n\to\infty} v_n = v$, entonces $u \geq v$.

2. *a*) Muestre que $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ (s finito) si y sólo si $\lim_{n\to\infty} |s_n - s| = 0$.

   b) Suponga que $|s_n - s| \leq t_n$ para n grande y que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$. Muestre que $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

3. Encuentre $\lim_{n\to\infty} s_n$. Justifique sus respuestas usando la definición de convergencia.

   a) $s_n = 2 + \frac{1}{n+1}$

   b) $s_n = \frac{a+n}{b+n}$

   c) $s_n = \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{4}$

   d) $s_n = \frac{n}{2n+\sqrt{n+1}}$

   e) $s_n = \frac{n^2+2n+2}{n^2+n}$

   f) $s_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$

   g) $s_n = \sqrt{n^2+n} - n$

4. Use el criterio de convergencia de sucesiones monótonas para mostrar que s_n converge.

   a) $s_n = \frac{a+n}{b+n}$

   b) $s_n = \frac{n!}{n^n}$

   c) $s_n = \frac{r^n}{1+r^n} \quad (r > 0)$

   d) $s_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$

5. Suponga que s_0 y a son números reales positivos. Sea $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por la recurrencia:

$$s_{n+1} = \frac{1}{2}\left(s_n + \frac{a}{s_n}\right), \quad n \geq 0.$$

   a) Muestre que $s_{n+1} \geq \sqrt{a}$ para todo $n \geq 0$.

   b) Muestre que $s_{n+1} \leq s_n$ para todo $n \geq 1$.

   c) Concluya que $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ existe y encuentre s.

6. *a*) Determine si la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por la recurrencia:

$$a_0 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2a_n}, \quad n \geq 0,$$

posee límite. Si posee, calcúlelo.

b) Repita el ejercicio anterior para la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por la recurrencia:

$$u_2 = 1, \qquad u_{n+1} = \sqrt{\frac{4+u_n^2}{2}}, \quad n \geq 2.$$

7. Para $0 \leq a \leq b$ sea $x_1 = a$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ e $y_1 = b$, $y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$. Demostrar que ambas sucesiones poseen límite, que $\lim x_n = \lim y_n$ y que si llamamos l a este último límite, se cumple que $\sqrt{ab} \leq l \leq \frac{a+b}{2}$.

8. Sea $u_1 = a$ y $u_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2+u_n^2}{a+1}}$ con $0 < a < b$. Muestre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, que es convergente y calcule su límite.

9. Sea $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión nula. Pruebe que la sucesión $\left(\frac{h_n}{1-h_n}\right)$ es también una sucesión nula.

10. Sea $u_n = \frac{1}{2}(1+(-1)^n)$. Calcular $\lim \frac{u_1+\ldots+u_n}{n}$.

11. Sea $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $h_n > 0$ y $\left(\frac{1}{nh_n}\right) \to 0$. Pruebe que $\lim \frac{1}{(1+h_n)^n} = 0$.

12. Sea $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $v_n \in (0,1)$ y $\left(\frac{1}{nv_n}\right) \to 0$. Pruebe que $\lim(1-v_n)^n = 0$.

13. Estudie la convergencia de la sucesión $(nq^n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $|q| < 1$.

    Indicación: se sugiere aplicar la desigualdad de Bernoulli (II) con un h apropiado.

14. Dado $k \in \mathbb{N}$, estudie la convergencia de la sucesión $(n^k q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $|q| < 1$.

    Indicación: reducir al caso del ítem anterior.

15. Dado $k \in \mathbb{N}$, estudie la convergencia de la sucesión $(n^k q_n^n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $q_n \to q$ con $|q| < 1$.

    Indicación: usar el ítem anterior.