Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Introducción al Cálculo 08-1

## Guía de Ejercicios

**1.** Demuestre que $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

**2.** Demuestre que $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.

**3.** Para cada uno de los siguientes conjuntos determine su acotamiento, la existencia de ínfimos y supremos y la existencia de mínimos y máximos.

- **(a)** $\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq a\}$.
- **(b)** $\{x \in \mathbb{R} : |x^2 + 3x| < 4\}$.
- **(c)** $\{x \in \mathbb{R} : x + \frac{1}{x} < 2\}$.
- **(d)** $\{x \in \mathbb{R} : [x] < 2\}$, donde $[x]$ es la parte entera de $x$.
- **(e)** $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 7\}$.
- **(f)** $\{x \in \mathbb{Z} : 2^x > 2\}$.
- **(g)** $A = \mathbb{Q} \cap [-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
- **(h)** $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq x + 1\}$.
- **(i)** $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$.
- **(j)** $\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$.
- **(k)** $\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}, x \in [1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]\}$.
- **(l)** $\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}, x \cdot n > 1\}$.

**4.** Demuestre que $[0, 1)$ no tiene máximo.

**5.** Sea $A$ subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Sea $a$ una cota superior de $A$ y $c \geq 0$. Pruebe que $ca$ es una cota superior del conjunto $\{cx : x \in A\}$ (que se denota $cA$). Calcule $\sup(cA)$ en términos de $\sup(A)$ y de $c$.

**6.** Sean $A$ y $B$ subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}_+$. Sea $a$ una cota inferior de $A$ y $b$ una cota inferior de $B$. Demuestre que $a + b$ es una cota inferior del conjunto $\{x+y : x \in A, y \in B\}$, denotado por $A+B$. Calcule $\inf(A+B)$ en términos de $\inf(A)$ y de $\inf(B)$.

**7.** Sean $A$ y $B$ subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$. Demuestre que si $a$ es una cota superior del conjunto $A$ y $b$ es una cota superior del conjunto $B$ entonces $\max\{a, b\}$ es una cota superior de $A \bigcup B$ y $\min\{a, b\}$ es una cota superior de $A \bigcap B$. Calcule $\sup(A \bigcup B)$ y $\sup(A \cap B)$, en términos de $\sup(A)$ y $\sup(B)$.

**8.** Demuestre que $\sqrt{5}$ es irracional.