Guía Semana 15

Ejercicios

1. Para cada una de las siguientes series se pide encontrar el radio y el intervalo de convergencia.

(a) $\sum \frac{x^{2k+1}}{k!}$

(b) $\sum \frac{x^k}{\sqrt{k^2+3}}$.

(c) $\sum \frac{x^k\sqrt{k}}{3^k}$.

(d) $\sum x^k \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$.

(e) $\sum \frac{x^k}{k^\alpha}$.

(f) $\sum (-1)^k x^{2k+1}$.

(g) $\sum \frac{x^k}{2k+1}$.

(h) $\sum x^k \frac{(1+\mathrm{sen}(k))}{k}$.

(i) $\sum x^k \frac{(k+2)(k+1)}{2}$.

(j) $\sum \left(\frac{a^k}{k}+\frac{b^k}{k^2}\right) x^k$ con $a > b > 0$.

2. (a) Determine la función e intervalo de convergencia asociada a la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$.

(b) Pruebe que $\arctan(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$ en $(-1,1)$.

(c) Deduzca una serie para calcular π.

3. Demostrar que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{1-x\,\mathrm{sen}^2(t)}dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2k+1}$, con $|x| < 1$.

Indicación: Recuerde que $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$, si $|x| < 1$.

Problemas

P1. (a) Para la serie de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a^k}{k} + \frac{b^k}{k^2}\right)(x-1)^k \quad 0 < b < a,$$

encuentre: Radio de convergencia e intervalo de convergencia. Estudie además la convergencia en los extremos derecho e izquierdo del intervalo.

(b) Demuestre que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+a^2t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a^{2n}}{2n+1}.$$

Indicación: Recuerde que $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$.

(c) Concluya que: $\displaystyle\frac{\arctan(a)}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a^{2n}}{2n+1}$.

P2. (a) Determine el intervalo de convergencia para la serie de potencias $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$.

No olvide analizar los extremos del intervalo.

(b) Encuentre los valores de $x \in$ para los cuales la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(\frac{x}{1-x})^k$ converge.

(c) Sea $f\colon C \subseteq \quad \to \quad$ la función definida por $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(\frac{x}{1-x})^k$.

(c1) Demuestre que $f'(x) = \frac{1}{(1-x)(1-2x)}$.

(c2) Integrando, encuentre una expresión explícita para $f(x)$.

P3. (a) Analizar la convergencia de las series $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{(-1)^k}{k\ln(k)}$ y $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k\ln(k)}$.

(b) Calcular el radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{x^k}{k\ln(k)}$.

(c) **(c1)** Calcular el radio de convergencia R de la serie $f(x) = \displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k(k+1)}$.

(c2) Demostrar que para todo $x \in (-R, R)$ se tiene que $(xf(x))'' = \frac{1}{1-x}$.

(c3) Demostrar que para todo $x \in (-R, R) \setminus \{0\}$ se tiene $f(x) = \dfrac{1 + (1-x)(\ln(1-x) - 1)}{x}$.

P4. (a) Determine la función e intervalo de convergencia asociada a la serie $\sum\limits_{0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$.

(b) Pruebe que $\arctan(x) = \sum\limits_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ en $(-1, 1)$.

(c) Deduzca una serie para calcular π.

P5. Encuentre el desarrollo en serie potencias de las siguientes funciones y determine radio e intervalo de convergencia.

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$.

(b) $f(x) = \frac{x}{(1-x)(1+2x)}$.