TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

$1^{\underline{o}}$ Semestre 2021/2022

Curso: LEEC

Ficha de Problemas nº 3

Equações de ordem n - caso homogéneo

Equações Vectoriais de 1ª Ordem - Caso homogéneo

1 Exercícios Resolvidoas

1. Determine a solução geral das seguintes equações:

$$(\mathbf{a})\ y'' + 9y' + 20y = 0 \qquad (\mathbf{b})\ y'' + \pi^2 y = 0 \qquad (\mathbf{c})\ y'' + 2y' + y = 0$$

Resolução

(a) Usando a notação $y' = Dy$) (e como tal $y'' = D^2y$) obtem-se

$$y'' + 9y' + 20y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 + 9D + 20)y = 0$$

Tem-se então que os zeros do polinómio característico associado são

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 9\lambda + 20 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -4 \ \vee \ \lambda = -5$$

Assim a equação é equivalente a

$$(D+4)(D+5)y = 0 \quad \Leftarrow \quad (D+4)y = 0 \ \text{ ou } \ (D+5)y = 0$$

Considere-se então a tabela

Polinómio	Raíz	multiplicidade	Base
D+4	-4	1	e^{-4x}
D+5	-5	1	e^{-5x}

Tem-se então que uma base do espaço de soluções da equação $(D^2+9)(D+20)y = 0$ é, por exemplo $\mathcal{B} = \{e^{-4x},\ e^{-5x}\}\}$ e assim a sua solução geral é

$$y(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-5x} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(b) Usando a notação $y' = Dy$) obtem-se

$$y'' + \pi^2 y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 + \pi^2)y = 0$$

Tem-se então que a raíz do polinómio característico associado é

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \pi^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm \mathrm{i}\pi$$

Considere-se então a tabela

Polinómio	Raíz	multiplicidade	Base Complexa	Base Real
$D^2 + \pi^2$	$\pm\pi\mathrm{i}$	2 raízes de mult. 1	$e^{\pi \mathrm{i} x}$, $e^{-\mathrm{i}\pi x}$	$\cos(\pi x)$, $\operatorname{sen}(\pi x)$

Tem-se então que uma base do espaço de soluções (reais) da equação $(D^2 + \pi^2)y = 0$ é, por exemplo $\mathcal{B} = \{\cos(\pi x),\ \operatorname{sen}(\pi x)\}$ e assim a sua solução geral é

$$y(x) = c_1 \cos(\pi x) + c_2 \operatorname{sen}(\pi x) \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(c) Usando a notação $y' = Dy$) obtem-se

$$y'' + 2y' + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 + 2D + 1)y = 0$$

Tem-se então que o polinómio característico associado é $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ com raíz -1. Considere-se então a tabela

Polinómio	Raíz	multiplicidade	Base
$D^2 + 2D + 1$	-1	2	e^{-x}, xe^{-x}

Tem-se então que uma base do espaço de soluções da equação $(D^2 + 2D + 1)y = 0$ é, por exemplo $\mathcal{B} = \{e^{-x},\ xe^{-x}\}$ e assim a sua solução geral é

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2. Seja $k \in \mathbb{R}$ uma constante. Determine a solução da seguinte equação diferencial em função de k:

$$y'' - ky = 0$$

Resolução

(a) Usando a notação $y' = Dy$ obtem-se

$$y'' - ky = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 - k)y = 0$$

Tem-se então que o polinómio característico associado é $P(\lambda) = \lambda^2 - k = 0$. Para determinar as raízes do polinómio característico e as correspondentes soluções da eqiação diferencial, há que consiferar 3 casos;

- $k = 0$
  Neste caso o polinómio característico tem apenas uma raíz, 0, e assim

Polinómio	Raíz	multiplicidade	Base
D^2	0	2	e^{0x}, xe^x

  pelo que uma base do espaço de soluções da equação $D^2y = 0$ é, por exemplo $\mathcal{B} = \{1, \ x\}$ e assim a sua solução geral é

$$y(x) = c_1 + c_2x \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- $k > 0$
  Neste caso o polinómio característico tem duas raízes reais distintas $\pm\sqrt{k}$ e assim

Polinómio	Raíz	multiplicidade	Base
$D - \sqrt{k}$	$\sqrt{k}$	1	$e^{\sqrt{k}x}$
$D + \sqrt{k}$	$-\sqrt{k}$	1	$e^{-\sqrt{k}x}$

  pelo que uma base do espaço de soluções da equação $(D^2 - k)y = 0$ é, por exemplo $\mathcal{B} = \{e^{\sqrt{k}x}, \ e^{-\sqrt{k}x}\}\}$ e assim a sua solução geral é

$$y(x) = c_1e^{\sqrt{k}x} + c_2e^{-\sqrt{k}x} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- $k < 0$
  Neste caso o polinómio característico tem duas raízes complexas conjugadas $\pm\mathrm{i}\sqrt{-k}$ (duas raízes complexas conjugadas com multiuplicidade 1 cada uma). Assim uma base complexa é

$$\mathcal{B}_c = \{e^{\sqrt{-k}\mathrm{i}x}, \ e^{-\sqrt{-k}\mathrm{i}x}\}$$

  e uma base real será

$$\mathcal{B} = \{\cos(\sqrt{-\|\S}), \ \mathrm{sen}(\sqrt{-\|\S})\}$$

  Tem-se então que a solução geral é

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{-k}x) + c_2 \,\mathrm{sen}(\sqrt{-k}x) \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

3. Resolva os seguintes PVI's

$$(\mathbf{a}) \begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 2 \end{cases} \qquad (\mathbf{b}) \begin{cases} y'' + 4y' + 3y = 0 \\ y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 2 \end{cases}$$

$$(\mathbf{c}) \begin{cases} y'' + 6y' + 9y = 0 \\ y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Resolução

(a) Vamos, em primeiro lugar calcular a solução geral da equação. Usando a notação $y' = Dy$ obtem-se

$$y'' + 2y' + 5y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 + 2D + 5)y = 0$$

O polinómio característico associado é $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$ com raízes $-1 \pm 2\mathrm{i}$. Assim uma base complexa é

$$\mathcal{B}_c = \{e^{(-1+2\imath)x},\ e^{(-1-2\mathrm{i})x}\}$$

e a respectiva base real é

$$\mathcal{B} = \{e^{-x}\cos(2x),\ e^{-x}\operatorname{sen}(2x)\}$$

A sua solução geral é

$$y(x) = c_1e^{-x}\cos(2x) + c_2e^{-x}\operatorname{sen}(2x) \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Temos agora que determinar c_1 e c_2 de modo a que $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$. Sendo $y(x)$ dado pela expressão anterior tem-se que

$$y'(x) = -c_1e^{-x}\cos(2x) - 2c_1e^{-x}\operatorname{sen}(2x) - c_2e^{-x}\operatorname{sen}(2x) + 2c_2e^{-x}\cos(2x)$$

Então

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ -c_1 + 2c_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Final,emte, a solução do (PVI) é

$$y(x) = e^{-x}\cos(2x) - \frac{1}{2}e^{-x}\operatorname{sen}(2x)$$

(b) Vamos, em primeiro lugar calcular a solução geral da equação. Usando a notação $y' = Dy$ obtem-se

$$y'' + 4y' + 3y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 + 4D + 3)y = 0$$

O polinómio característico associado é $P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 3$ com raízes -1 e -3. Como tal

Polinómio	Raíz	multiplicidade	Base
$D + 1$	-1	1	e^{-x}
$D + 3$	-3	1	e^{-3x}

Tem-se então que uma base do espaço de soluções da equação $(D^2+4D+3)y=0$ é, por exemplo $\mathcal{B}=\{e^{-x},\ e^{-3x}\}\}$ e assim a sua solução geral é

$$y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{-3x} \quad , \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

Temos agora que determinar c_1 e c_2 de modo a que $y(0)=0$ e $y'(0)=2$. Sendo $y(x)$ dado pela expressão anterior tem-se que

$$y'(x)=-c_1e^{-x}-3c_1e^{-3x}$$

Então

$$\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1+c_2=0 \\ -c_1-3c_2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=1 \\ c_2=1 \end{cases}$$

Final,emte, a solução do (PVI) é

$$y(x)=e^{-x}-e^{-3x}$$

(c) Vamos, em primeiro lugar calcular a solução geral da equação. Usando a notação $y'=Dy$ obtem-se

$$y''+6y'+9y=0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2+6D+9)y=0$$

Tem-se então que o polinómio característico associado é $P(\lambda)=\lambda^2+6\lambda+9=(\lambda+3)^2$. Assim

Polinómio	Raíz	multiplicidade	Base
D^2+6D+9	-3	2	$e^{-3x},\ xe^{-3x}$

Tem-se então que uma base do espaço de soluções (reais) da equação $(D^2+6D+9)y=0$ é, por exemplo $\mathcal{B}=\{e^{-3x},\ xe^{-3x}\}$ e assim a sua solução geral é

$$y(x)=c_1e^{-3x}+c_2xe^{-3x} \quad , \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

Temos agora que determinar c_1 e c_2 de modo a que $y(0)=1$ e $y'(0)=0$. Sendo $y(x)$ dado pela expressão anterior tem-se que

$$y'(x)=-3c_1e^{-3x}+c_2e^{-3x}-3c_2xe^{-3x}$$

Então

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=1 \\ -3c_1+c_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=1 \\ c_2=3 \end{cases}$$

Final,emte, a solução do (PVI) é

$$y(x)=e^{-3x}+3xe^{-3x}$$

4. Determine a solução geral das equações diferenciais seguintes.

$(\mathbf{a})\ y''' + y'' - 2y' = 0 \qquad (\mathbf{b})\ y^{(4)} + y''' - 3y'' - 5y' - 2y = 0$

$(\mathbf{c})\ y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

Resolução

(a) Usando a notação $y' = Dy$ obtém-se

$$y''' + y'' - 2y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^3 + D^2 - 2D)y = 0$$

O polinómio característico associado é

$$P(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda^2 + \lambda - 2) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 2)$$

Assim

$$(D^3 + D^2 - 2D)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D(D-1)(D+2)y = 0$$

Considerando a tabela

Polinómio	Raíz	multiplicidade	Base
D	0	1	e^{0x}
$D-1$	1	1	e^{x}
$D+2$	-2	1	e^{-2x},

Tem-se então que uma base do espaço de soluções da equação $(D^3 + D^2 - 2D)y = 0$ é, por exemplo $\mathcal{B} = \{1,\ e^x,\ e^{-2x}\}$ e assim a sua solução geral é

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x + c_2 3e^{-2x} \quad , \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

(b) Usando a notação $y' = Dy$ obtém-se

$$y^{(4)} + y''' - 3y'' - 5y' - 2y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^4 + D^3 - 3D^2 - 5D - 2)y = 0$$

Tem-se então que o polinómio característico associado é

$$P(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 - 3\lambda^2 - 5\lambda - 2$$

É fácil de "adivinhar" duas raízes de $P(\lambda)$ - verifica-se que $P(1) = P(2) = 0$, pelo que (usando a regra de Rufini)

$$P(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = (\lambda + 1)^3(\lambda - 2)$$

Assim

$$(D^4 + D^3 - 3D^2 - 5D - 2)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D+1)^3(D22)y = 0$$

Considerando a tabela

Polinómio	Raíz	multiplicidade	Base
$D+1$	-1	3	e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x}
$D-2$	2	1	e^{2x},

Tem-se então que uma base do espaço de soluções da equação $(D^3 + D^2 - 2D)y = 0$ é, por exemplo $\mathcal{B} = \{e^{-x},\ xe^{-x},\ x^2e^{-x},\ e^{2x}\}$ e assim a sua solução geral é

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{-x} + c_4e^{2x} \quad , \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

(b) Usando a notação $y' = Dy$ obtem-se

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^4 + 2D^2 + 1)y = 0$$

O polinómio característico associado é

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = (\lambda + \mathrm{i})^2(\lambda - \mathrm{i})^2$$

ou seja, $P(\lambda)$ admite as raízes complexas comjugadas $\pm\mathrm{i}$ com multiplicidade 2 cada. Assim

$$(D^4 + 2D^2 + 1)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 + 1)^2y = 0$$

Uma base complexa é

$$\mathcal{B}_c = \{e^{\mathrm{i}x},\ xe^{\mathrm{i}x},\ e^{-\mathrm{i}x},\ xe^{-\mathrm{i}x}\}$$

e a correspondente base real

$$\mathcal{B} = \{\cos x,\ \operatorname{sen} x,\ x\cos x,\ x\operatorname{sen} x\}$$

e a solução geral é

$$y(x) = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x + c_3x\cos x + c_4x\operatorname{sen} x \quad , \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

5. Rsolva os seguintes (PVI)'s.

   (a)
$$\begin{cases} y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0 & \\ y(0) = 1 & y'(0) = 1 \\ y''(0) = -1 & y'''(0) = 1 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} y''' - 5y'' - 22y' + 56y = 0 \\ y(0) = 1 \qquad\qquad\qquad\qquad y'(0) = -1 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

Resolução

(a) Vamos, em primeiro lugar calcular a solução geral da equação. Usando a notação $y' = Dy$ obtém-se

$$y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^4 - 4D^3 + 6D^2 - 4D + 1)y = 0$$

O polinómio característico associado é $P(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1$. É fácil de verificar que 1 é raíz do polinómio $P(\lambda)$ e (usando a regra de Rufini)

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1) = (\lambda - 1)^4$$

Asssim

$$(D^4 - 4D^3 + 6D^2 - 4D+)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D - 1)^4 y = 0$$

e uma base do espaço de soluções da equação $(D-1)^4 y = 0$ é, por exemplo $\mathcal{B} = \{e^x,\ xe^x,\ x^2e^x,\ x^3e^x\}$ e a sua solução geral é

$$y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + c_4x^3e^x \quad , \quad c_1, c_2, c3, c_4 \in \mathbb{R}$$

Temos agora que determinar c_1,c_2, c_3 e c_4 de modo a que $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$ e $y'''(0) = 3$. Sendo $y(x)$ dado pela expressão anterior tem-se que

$$\begin{cases} y'(x) = e^x \left(c_1 + c_2 + (c_2 + 2c_3)x + (c_3 + 3c_4)x^2 + c_4x^3\right) \\ y''(x) = e^x \left(c_1 + 2c_2 + 2c_3 + (c_2 + 4c_3 + 6c_4)x + (c_3 + 6c_4)x^2 + c_4x^3\right) \\ y'''(x) = e^x \left(c_1 + 3c_2 + 6c_3 + 6c_4 + (c_2 + 6c_3 + 18c_4)x + (c_3 + 10c_4)x^2 + c_4x^3\right) \end{cases}$$

pelo que

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = -1 \\ y'''(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 + 2c_2 + 2c_3 = -1 \\ c_1 + 3c_2 + 6c_3 + 6c_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = -1 \\ c_4 = 1 \end{cases}$$

Finalemte, a solução do (PVI) é

$$y(x) = e^x(1 - x^2 + x^3)$$

(b) Vamos, em primeiro lugar calcular a solução geral da equação. Usando a notação $y' = Dy$ obtem-se

$$y''' - 5y'' - 2y' + 56y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^3 - 5D^2 - 2D + 56)y = 0$$

Tem-se então que o polinómio característico associado é $P(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 - 2\lambda + 56$. É fácil de verificar que $P(2) = 0$, como tal (usando a regra de Rufini)

$$P(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 3\lambda - 28) = (\lambda - 2)(\lambda - 7)(\lambda - 4)$$

Asssim

$$(D^{-}5D^2 - 2D + 56)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D-1)(D-7)(D-4)y = 0$$

e pdemos copnsiderar a tabela

Polinómio	Raíz	multiplicidade	Base
$D-2$	1	2	e^{2x}
$D-7$	7	1	e^{7x}
$D-4$	3	1	e^{4x},

e uma base do espaço de soluções da equação $(D-1)(D-7)(D-4)y = 0$ é, por exemplo $\mathcal{B} = \{e^{2x},\ e^{7x},\ e^{4x}\}$ e a solução geral é

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{7x} + c_3 e^{4x} \quad , \quad c_1, c_2, c3 \in \mathbb{R}$$

Temos agora que determinar c_1,c_2 e c_3 de modo a que $y(0) = 1$ e $y'(0) = -2$ e $y''(0) = -4$. Sendo $y(x)$ dado pela expressão anterior tem-se que

$$y'(x) = 2c_1 e^{2x} + 7c_2 e^{7x} + 4c_3 e^{4x} \quad , \quad y''(x) = 4c_1 e^{2x} + 49c_2 e^{7x} + 16c_3 e^{4x}$$

pelo que

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ 2c_1 + 7c_2 + 4c_3 = -1 \\ 4c_1 + 49c_2 + 16c_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = -4 \end{cases}$$

Finalemte, a solução do (PVI) é

$$y(x) = y(x) = 4e^{2x} + e^{7x} - 4e^{4x}$$

6. Encontre as equações diferenciais lineares homogéneas de menor ordem possível tal que as seguintes fuunções sejam suas soluções.
   (a) $e^{\sqrt{3x}}$ e $xe^{\sqrt{3x}}$
   (b) $e^x \cos(2x)$ e xe^{-x}

(c) x^2

Resolução

(a) As funções dadas formam uma base de um espaço de dimensão 2 (visto serem 2 funções linearmente independentes), e como consequência a equação diferencial de menor ordem que as admite como soluções é de ordem 2. Podemos então considerar a tabela

Base	Raíz	multiplicidade	Polinómio
$e^{\sqrt{3}x}$	$\sqrt{3}$	1	$D-\sqrt{3}$
$e^{-\sqrt{3}x}$	$-\sqrt{3}$	1	$D+\sqrt{3}$

Ou seja $e^{\sqrt{3}x}$ é uma solução de $(D-\sqrt{3})y=0$ e $e^{-\sqrt{3}x}$ é uma solução de $(D+\sqrt{3})y=0$. Então ambas as funções são soluções da equação $(D-\sqrt{3})(D+\sqrt{3})y=0$, isto é da equação $(D^2-3)y=0$. A equação pedida é

$$y''-3y=0$$

(b) Começamos por notar que se $e^x\cos(2x)$ é solução da equação tamém $e^x\operatorname{sen}(2x)$ é, assim como se xe^{-x} é solução da equação tamém e^{-x}. Tem-se então que $e^x\cos(2x)$, $e^x\operatorname{sen}(2x)$, xe^{-x} e e^{-x} formam uma base do espaço de soluções da equação pedida, que será uma equação de ordem 4. Podemos então considerar a tabela

Base Real	Base Complexa	Raíz	multiplicidade
e^{-x}, xe^{-x}	(NA)	-1	2
$e^x\operatorname{sen}(2x)$, $e^x\cos(2x)$	$e^{(1+2\mathrm{i})x}$, $e^{(1-2\mathrm{i})x}$	$1\pm 2\mathrm{i}$	2 raízes de mult. 1

Assim, o polinó,io diferencial correspondente às funções $e^x\operatorname{sen}(2x)$ e $e^x\cos(2x)$ é

$$(D-(1+2\mathrm{i}))(D-(1-2\mathrm{i}))$$

e o correspondente às funções e^{-x} e xe^{-x} é

$$(D+1)^2$$

Finalmente a equaçqo pedida é

$$(D+1)^2(D-(1+\mathrm{i}))(D-(1-\mathrm{i}))y=0 \quad\Leftrightarrow\quad (D+1)^2(D^2-2D+5)y=0$$

(c) Começamos por notar que se x^2 é solução as funções 1 e x tambem o são, pelo que procuramos uma equação de ordem 3. Podemos considerar a tabela

Base	Raíz	multiplicidade	Polinómio
$1,\ x,\ x^2$	6 0	3	D^3

pelo que a equaçqo pedida é

$$y''' = 0$$

7. As funções $\operatorname{sen}(ax)$ e $\cos(ax)$ são soluções da equação diferencial $y'' + Ay' + By = 0$ sendo A e B constantes reais. Determine os valores de A e B.

Resolução

Se $\operatorname{sen}(ax)$ é solução da equação tem de a verificar. Asssim

$$\Big(\operatorname{sen}(ax)\Big)'' + A\Big(\operatorname{sen}(ax)\Big)' + B\Big(\operatorname{sen}(ax)\Big) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-a^2 + B)\operatorname{sen}(ax) + aA\cos(ax) = 0$$

Analogamente $\cos(ax)$ tem de verificar a equação,

$$\Big(\cos(ax)\Big)'' + A\Big(\cos(ax)\Big)' + B\Big(\cos(ax)\Big) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-a^2 + B)\cos(ax) - aA\operatorname{sen}(ax) = 0$$

Dado que as funções seno e coseno não são identicamente nulas, as duas igualdades verificam-se para todo $x \in \mathbb{R}$ se e só se

$$-a^2 + B = 0 \qquad \text{e} \qquad A = 0$$

Tem-se então que as funções $\cos(ax)$ e $\operatorname{sen}(ax)$ são soluções da equação

$$y'' + a^2 y = 0$$

8. Resolva o sistema de equações diferenciais lineares vectoruaus de primeira ordem:

$$(\mathbf{a})\ \mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{X} \qquad (\mathbf{b})\ Y' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{c})\ \mathbf{X}' = \begin{bmatrix} -\pi & 1 & 0 \\ 0 & -\pi & 1 \\ 0 & 0 & -\pi \end{bmatrix} \mathbf{X}$$

Resolução

(a) Fazenso $\mathbf{X} = (x, y, z)$ e escrevendo na forma de sistema

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = -y \\ z' = 3z \end{cases}$$

observa-se que as três equações são independentes (denomina-se um sistem *desacoplado*) e como tal podem ser resolvidas directamente. Assim

$$x' = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = ae^{2t}$$

e

$$y' = -y \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = be^{-t}$$

e

$$z' = 2z \quad \Leftrightarrow \quad z(t) = ce^{3t}$$

A solução geral da equação é

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae^{2t} \\ be^{-t} \\ ce^{3t} \end{bmatrix}$$

com a, b e c constantes reais.

Observação: Sendo D uma matriz $n \times n$ diagonal

$$D = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix}$$

a solução do sistema em $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{X}' = D\mathbf{X}$ é da forma

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{m_1 t} \\ c_2 e^{m_2 t} \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n e^{m_n t} \end{bmatrix}$$

(b) Fazenso $\mathbf{X} = (x, y, z)$ e escrevendo na forma de sistema

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3x + 4y \\ z' = 4x + 4y + 4z \end{cases}$$

observa-se que a primeira equação depenede apenas da função x e pode ser resolvida de imediato. Assim

$$x' = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = ae^{2t}$$

Substituindo na segunda equação obtem-se

$$y' = 3ae^{2t} + 4y \quad \Leftrightarrow \quad y' - 4y = 3ae^{2t}$$

Trata-se de uma equação linear de primeira ordem não homogénea que depende só da função y. A equação admite o factor integrante $\mu(t) = e^{-4t}$, pelo que

$$\begin{aligned} y' - 4y = 3ae^{2t} \quad &\Leftrightarrow \quad e^{-4t}y' - 4e^{-4t}y = 3ae^{-2t} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(e^{-4t}y\right)' = 3ae^{-2t} \\ &\Leftrightarrow \quad e^{-4t}y = -\frac{3a}{2}e^{-2t} + b \\ &\Leftrightarrow \quad y(t) = -\frac{3a}{2}e^{2t} + be^{-4t} \end{aligned}$$

Tendo agora as funções $x(t)$ e $y(t)$ podemos substituir na terceira equação e obter uma equação linear de primeira ordem não homogénea que depende só da função z:

$$z' = 4ae^{2t} + 4\Big(-\frac{3a}{2}e^{2t} + be^{-4t}\Big) + 4z \quad \Leftrightarrow \quad z' - 4z = -2ae^{2t} + be^{-4t}$$

A equação admite o factor integrante $\mu(t) = e^{-4t}$, pelo que

$$\begin{aligned} z' - 4z = -2ae^{2t} + be^{-4t} \quad &\Leftrightarrow \quad e^{-4t}z' - 4e^{-4t}z = -2ae^{-2t} + b \\ &\Leftrightarrow \quad \left(e^{-4t}z\right)' = -2ae^{-2t} + b \\ &\Leftrightarrow \quad e^{-4t}z = -ae^{-2t} + bt + c \\ &\Leftrightarrow \quad z(t) = -ae^{2t} + bte^{-4t} + ce^{-4t} \end{aligned}$$

A solução geral da equação é

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae^{2t} \\ -\frac{3a}{2}e^{2t} + be^{-4t} \\ -ae^{2t} + bte^{-4t} + ce^{-4t} \end{bmatrix}$$

com a, b e c constantes reais.

Observação: Sendo T uma matriz $n \times n$ triangular superior (ou inferior) a solução do sistema $\mathbf{X}' = T\mathbf{X}$ pode ser encontrada desta maneira.

(c) Fazenso $\mathbf{X} = (x, y, z)$ e escrevendo na forma de sistema

$$\begin{cases} x' = -\pi x + y \\ y' = -\pi y + z \\ z' = -\pi z \end{cases}$$

observa-se que a terceira equação depenede apenas da função z e pode ser resolvida de imediato. Assim

$$z' = -\pi z \quad \Leftrightarrow \quad z(t) = ce^{-\pi t}$$

Substituindo na segunda equação obtem-se

$$y' = -\pi y + ce^{-\pi t} \quad \Leftrightarrow \quad y' + \pi y = ce^{-\pi t}$$

Trata-se de uma equação linear de primeira ordem não homogénea que depende só da função y. A equação admite o factor integrante $\mu(t) = e^{\pi t}$, pelo que

$$\begin{aligned} y' + \pi y = ce^{-\pi t} &\Leftrightarrow e^{\pi t}y' + \pi e^{\pi t}y = c \\ &\Leftrightarrow \left(e^{\pi t}y\right)' = c \\ &\Leftrightarrow e^{\pi t}y = ct + b \\ &\Leftrightarrow y(t) = (ct + b)e^{-\pi t} \end{aligned}$$

Tendo agora a função $y(t)$ podemos substituir na primeira equação e obter uma equação linear de primeira ordem não homogénea que depende só da função x:

$$x' = -\pi x + (ct + b)e^{-\pi t} \quad \Leftrightarrow \quad x + \pi x = (ct + b)e^{-\pi t}$$

A equação admite o factor integrante $\mu(t) = e^{\pi t}$, pelo que

$$\begin{aligned} x' = -\pi x + (ct + b)e^{-\pi t} &\Leftrightarrow e^{\pi t}x' + e^{\pi t}x = ct + b \\ &\Leftrightarrow \left(e^{\pi t}x\right)' = ctb \\ &\Leftrightarrow e^{\pi t}x = \frac{c}{2}t^2 + bt + a \\ &\Leftrightarrow x(t) = (\frac{c}{2}t^2 + bt)e^{-\pi t} \end{aligned}$$

A solução geral da equação é

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = e^{-\pi t} \begin{bmatrix} \frac{c}{2}t^2 + bt + a \\ cy + b \\ c \end{bmatrix}$$

com a, b e c constantes reais.

Observação: Uma matriz tendo a forms da deste exemplo

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ & & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

isto é, uma matriz $n \times n$ em que todos os elementos da diagonal principal são $\lambda \in \mathbb{R}$ e a diagonal acima da proncipal é formada po r 1's, denomina-se um *bloco de Jordan*. Resolvendo de forma análoga ao que fuzemos no exemplo, a solução do sistema em $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{X}' = J\mathbf{X}$ é da forma

$$\mathbf{X}(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} c_1 + c_2 t + c_3 \frac{t^2}{2} + \cdots c_n \frac{t^{n-1}}{n-1} \\ c_2 + c_3 t + \cdots c_n \frac{t^{n-2}}{n-2} \\ . \\ c_n t + c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}$$

9. Encontre a solução geral dos sistemas

$$(\mathbf{a}) \begin{cases} x' = -7x + 5y \\ y' = -10x + 8y \end{cases} \qquad (\mathbf{b}) \begin{cases} x' = x - y \\ y' = -x + 2y - z \\ z' = -y + z \end{cases}$$

Resolução

(a) Pelo método de substitução, resolvendo, por exemplo, a promeira equação em ordem a y obtem-se

$$y = \frac{x' + 7x}{5} \tag{1}$$

Substituindo na segunda equação, obtemos a equação de segunda ordem em x

$$\begin{aligned} \left(\frac{x' + 7x}{5}\right)' = -10x + 8\left(\frac{x' + 7x}{5}\right)' \quad &\Leftrightarrow \quad x'' - x' - 6x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (D^2 - D - 6)x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (D - 3)(D + 2)x = 0 \end{aligned}$$

e assim a solução geral da equação é

$$x(t) = ae^{3t} + be^{-2t}$$

Substituindo em (1) pbtemos

$$y(t) = \frac{1}{5}\left(ae^{3t} + be^{-2t}\right)' + 7\frac{1}{5}\left(ae^{3t} + be^{-2t}\right) = 2ae^{3t} + be^{-2t}$$

A solução do sistema é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae^{3t} + be^{-2t} \\ 2ae^{3t} + be^{-2t} \end{bmatrix}$$

com a e b constantes reais.

(b) Pelo método de substitução, resolvendo, por exemplo, a promeira equação em ordem a y obtem-se

$$y = x - x' \tag{2}$$

Substituindo nas outras duas equações obtemos o sistema em x e z

$$\begin{cases} (x-x')' = -x + 2(x-x') - z \\ z' = -(x-x') + z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x'' - 3x' + x = z \\ z' = -x + x' + z \end{cases}$$

Tem-se então que

$$z = -x'' - 3x' + x \tag{3}$$

e substituindo na última equação obtemos a equação de terceira ordem em x

$$\begin{aligned} (-x'' - 3x' + x)'' = -x + x' - (-x'' - 3x' + x) \quad &\Leftrightarrow \quad x''' - 4x'' + 3x' = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (D^3 - 4D^2 + 3D)x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad D(D-3)(D-1)x = 0 \end{aligned}$$

e a solução geral da equação é

$$x(t) = a + be^{3t} + ce^t$$

Substituindo em (2) e em (3) obtemos

$$y = a + be^{3t} + ce^t - (a + be^{3t} + ce^t)' = a - 2be3t$$

e

$$z = -(a + be^{3t} + ce^t)'' - 3(a + be^{3t} + ce^t)' + (a + be^{3t} + ce^t) = a - 11be^{3t} - 3ce^t$$

A solução do sistema é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + be^{3t} + ce^t \\ a - 2be3t \\ a - 11be^{3t} - 3ce^t \end{bmatrix}$$

com a, b e c constantes reais.

10. Resolva os seguintes (PVI)'s em $\mathbb{R}^2$

(a)

$$\begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = 3x - y \end{cases} \quad , \quad (x(0), y(0)) = (7, 0)$$

(b)

$$\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x + 7y \end{cases} \quad , \quad (x(0), y(0)) = (9, 3)$$

Resolução:

(a) Começamos por calcular a solução geral do sistem. Resolvendo a primeira equação em ordem a y obtem-se

$$y = \frac{x' - 4x}{2} \tag{4}$$

Substituindo na segunda equação, obtemos a equação de segunda ordem em x

$$\begin{aligned} \left(\frac{x' - 4x}{2}\right)' = 3x - \left(\frac{x' - 4x}{2}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad x'' - 3x' - 10x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (D^2 - 3D - 10)x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (D-5)(D+2)x = 0 \end{aligned}$$

e assim a solução geral da equação é

$$x(t) = ae^{5t} + be^{-2t}$$

Substituindo em (4) pbtemos

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(ae^{5t} + be^{-2t}\right)' - 2\left(ae^{5t} + be^{-2t}\right) = \frac{a}{2}e^{5t} - 3be^{-2t}$$

A solução do sistema é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae^{5t} + be^{-2t} \\ \frac{a}{2}e^{5t} - 3be^{-2t} \end{bmatrix}$$

com a e b constantes reais. Temos agora que determinar as constantes a e b de modo a que $(x(0), y(0)) = (5, 0)$. Então

$$\begin{cases} x(0) = 7 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + b = 7 \\ \frac{a}{2} - 3b = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 6 \\ b = 1 \end{cases}$$

e assim a solução do (PVI) é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6e^{5t} + e^{-2t} \\ 3e^{5t} - 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

(b) Começamos por calcular a solução geral do sistem. Resolvendo a segunda equação em ordem a x obtem-se

$$x = \frac{y' - 7y}{2} \tag{5}$$

Substituindo na primeira equação, obtemos a equação de segunda ordem em y

$$\begin{aligned} \left(\frac{y' - 7y}{2}\right)' = \left(\frac{y' - 7y}{2}\right) - -3y \quad &\Leftrightarrow \quad y'' - 8y' + 16y = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (D-4)^2 y = 0 \end{aligned}$$

e a solução geral desta equação é

$$y(t) = (a + bt)e^{4t}$$

Substituindo em (5) obtemos

$$x(t) = \Big((a+bt)e^{4t}\Big)' - 7\Big((a+bt)e^{4t}\Big) = \Big(-3a + b(t-3)\Big)e^{4t}$$

A solução do sistema é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{4t} \begin{bmatrix} -3a + b(t-3) \\ a + bt \end{bmatrix}$$

com a e b constantes reais. Temos agora que determinar as constantes a e b de modo a que $(x(0), y(0)) = (9, 3)$. Então

$$\begin{cases} x(0) = 9 \\ y(0) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a - 3b = 9 \\ a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -6 \end{cases}$$

e assim a solução do (PVI) é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{4t} \begin{bmatrix} -9 - 6(t-3) \\ 3 - 6t \end{bmatrix}$$

11. Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolução:

Visto $\mathbf{A}$ ser uma matriz triangular, os seus valores próprios são os elementos da sua diagonal principal, ou seja

$$\det(\mathbf{A} - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 1$$

É fácil de mostrar que se λ é valor próprio de A associado ao vector próprio $\mathbf{v}$, a função $e^{\lambda t}\mathbf{v}$ é solução de $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$. No caso em que a matriz A admite n vectores próprios linearmente independentes (caso em que a matriz A se diz diagonalizável), as funções $e^{\lambda_i t}\mathbf{v_i}$ formam uma base do espaço de soluções da equação vectorial. Esta situação ocorre de certeza qualdo uma matriz $n \times n$ tem n valores próprios distintos, como é o caso deste exemplo. Desta forma iremos determinar a solução geral usando este método.

Para calcular o vector próprio associado ao valor próprio $\lambda = 2$, há que determinar $\mathbf{v} = (a, b, c) \in$

$\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tal que

$$(\mathbf{A} - 2I)\mathbf{v} = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\Leftrightarrow\; b = c = 0$$

Tem-se então que

$$\mathbf{v} = (a,b,c) = (a,0,0) = a(1,0,0)$$

donde podemos escolher

$$\mathbf{v_1} = (1,0,0)$$

Para calcular o vector próprio associado ao valor próprio $\lambda = 0$, há que determinar $\mathbf{v} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tal que

$$(\mathbf{A} - 0I)\mathbf{v} = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\Leftrightarrow\; a = b \;\text{ e }\; c = 0$$

Tem-se então que

$$\mathbf{v} = (a,b,c) = (a,a,0) = a(1,1,0)$$

donde podemos escolher

$$\mathbf{v_2} = (1,1,0)$$

Para calcular o vector próprio associado ao valor próprio $\lambda = 1$, há que determinar $\mathbf{v} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tal que

$$(\mathbf{A} - I)\mathbf{v} = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\Leftrightarrow\; b = c \;\text{ e }\; a = 0$$

Tem-se então que

$$\mathbf{v} = (a,b,c) = (0,b,b) = b(0,1,1)$$

donde podemos escolher

$$\mathbf{v_3} = (0,1,1)$$

Assim, as funções

$$e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;,\; e^{0t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \;,\; e^{t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

são soluções linearmente independentes da equação vectorial. Como tal, a sua solução geral é

$$\mathbf{X(t)} = \mathbf{c_1 e^{2t}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{c_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{c_3 e^{t}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 \\ c_2 + c_3 e^{t} \\ c_3 e^{t} \end{bmatrix}$$

Para calcular as constantes, atendemos a que $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, pelo que

$$\begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ c_2 + c_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e a splução do PVI é dada por

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

12. Determine a solução geral do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x' = 14x - 10y + 1 \\ y' = 10x - 2y + 2 \end{cases}$$

Sugestão: Determine primeiro uma solução particular constante.

Resolução:

Escrevendo o sistema na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 14 & -10 \\ 10 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{AX} + \mathbf{C}(t) \tag{6}$$

Dado que a equação é linear, uma sua solução será da forma

$$\mathbf{X} = \mathbf{X_h} + \mathbf{X_p}$$

em que $\mathbf{X_h}$ é a solução geral do problema homogéneo associado $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, e $\mathbf{X_p}$ é uma solução particular da equação $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{C}$. Seguindo a sugestão, vamos procurar uma solução particular constante, ou seja, vamos procurar $\mathbf{X_p} = (c_1, c_2)$ que verifique a equação (6), isto é

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 14 & -10 \\ 10 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 14c_1 - 10c_2 + 1 = 0 \\ 10c_1 - 2c_2 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (c_1, c_2) = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$$

pelo que $\mathbf{X_p} = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$. De seguida calcularemos $\mathbf{X_h}$, que como já sabemos envolve o cálculo da matriz $e^{t\mathbf{A}}$. Os valores próprios de $\mathbf{A}$ são as soluções da equação

$$\det[\mathbf{A} - \lambda I] = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda^2 - 12\lambda + 72 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 6 \pm 6i$$

Embora a matriz seja diagonalizel (pois admite 2 valores próprios distintos) vamos resolver o sistema homogéneo associado.

$$\begin{cases} x' = 14x - 10y \\ y' = 10x - 2y \end{cases}$$

Resolvendo, por exemplo, a segunda equação em ordem a x

$$x = \frac{y + 2y}{10} \tag{7}$$

Substituindo na primeira equação obtém-se

$$y'' - 12y' - 72y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(D^2 - 12D - 72\right) y = 0$$

O polinómio caractreístico associado tem raízes $6 \pm 6\mathrm{i}$ (calculadas acima) e como tal

$$y(t) = e^{6t} \left(a\cos(6t) + b\,\mathrm{sen}(6t)\right)$$

Substituindo em (7)

$$x(t) = \frac{e^{6t}}{5}\Big((4a + 3b)\cos(6t) + (4b - 3a)\,\mathrm{sen}(6t)\Big)$$

e

$$\mathbf{X_h} = \frac{\mathbf{e^{6t}}}{\mathbf{5}} \begin{bmatrix} (4a + 3b)\cos(6t) + (4b - 3a)\,\mathrm{sen}(6t) \\ 5a\cos(6t) + 5b\,\mathrm{sen}(6t) \end{bmatrix}$$

e finalmente

$$\mathbf{X(t)} = \mathbf{X_h} + \mathbf{X_p} = \frac{\mathbf{e^{6t}}}{\mathbf{5}} \begin{bmatrix} (4a + 3b)\cos(6t) + (4b - 3a)\,\mathrm{sen}(6t) - \frac{1}{4} \\ 5a\cos(6t) + 5b\,\mathrm{sen}(6t) - \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

para a, $b \in \mathbb{R}$.

2 Exercícios Propostos

1. Determine a solução geral de cada uma das equações:

(a) $y^{(3)} - 2y^{(2)} = 0$ (b) $y'' - 6y' + 8y = 0$ (c) $y'' + 8y' + 41y = 0$

(d) $(D + 2)^2(D^2 - 2D + 5)^3(D - 1)y = 0$ (e) $y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$

(f) $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y^{(3)} - y'' = 0$ (g) $4y'' - 20y' + 25y = 0$

2. Resolva os problemas de valor inicial:

(a) $y''' - y'' + y' - y = 0$ verificando $y(0) = y'(0) = -y''(0) = 1$

(b) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$ verificando $y(0) = y'(0) = 1$ e $y''(0) = 4$

(c) $y''' - 7y' + 6y = 0$ verificando $y(0) = 1$ e $y'(0) = y''(0) = 0$

(d) $y^{(3)} + 4y'' - 5y' = 0$ verificando $y(0) = 4$, $y'(0) = -7$ e $y''(0) = 23$

(e) $y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = 0$ verificando $y(0) = 7$, $y(0)' = -7$, $y''(0) = 11$

(f) $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$ verificando $y^{(n-1)}(0) = y^{(n-2)}(0) = \cdots = y'(0) = y(0) = 0$ para quaisquer $a_i \in \mathbb{R}$.

3. Seja m um número real estritamente positivo. Obtenha a solução do (PVI)

$$y''' - 3my'' + 3m^2y' - m^3y = 0 \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0 \ , \ y''(0) = 1$$

4. Considere a equação diferencial

$$y''' + a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0$$

onde a_0, a_1 e a_2 são constantes reais. Sabe-se que duas soluções linearmente independentes desta equação são dadas por $y_1(x) = xe^{-x}$ e $y_2(x) = e^{2x}$.

(a) Encontre uma terceira solução linearmente independente.

(b) Determine a_0, a_1 e a_2 com as propriedades acima descritas.

5. Seja $f_b(t)$ a solução da equação

$$y'' + 2by' + y = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 1.$$

(a) Obtenha f_b para cada $b \in \mathbb{R}$.

(b) Encontre todos os valores de b tais que $\lim_{t \to \infty} f_b(t) = 0$

(b) Encontre todos os valores de b para os quais existe $t^* > 0$ com $f_b(t^*) = 0$.

6. Considere a equação

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + 2y'' + 2y' + y = 0 \tag{8}$$

(a) Mostre que $y(t) = te^{-t}$ é uma solução particular de (8).

(b) Determine a solução geral de (8).

(c) Determine para que condições iniciais em $t = 0$ é que os problemas de valor inicial correspondentes têm soluções limitadas em $] - \infty, 0]$.

(d) Determine para que condições iniciais em $t = 0$ é que os problemas de valor inicial correspondentes têm soluções convergentes quando $t \to \infty$.

7. Obtenha as equações lineares homogénas de coeficientes constantes, de menor ordem possível, cujo coeficiente da derivada de maior ordem é igual a 1 e que têm as funções abaixo como solução:

(a) e^x, e^{-x}, e^{2x}, e^{-2x}.

(b) $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$

(c) 1, x, e^x;

8. Escreva um problema de valor inicial correspondente a uma equação diferencial linear homogénea de terceira ordem cuja solução é

$$y(t) = e^t - 2e^{-2t} + 5te^{-2t}$$

9. Determine a solução geral dos sistemas:

(a) $\begin{cases} x' = -4x - 3y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = x - y \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = -2x + y + 2z \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -x - y \\ z' = -x - z \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x' = -z \\ y' = y - 4z \\ z' = -4z \end{cases}$

10. Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$, $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$, onde:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(e) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(f) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

11. Determine a solução geral do sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 1 \\ \dot{y} = x + y - 2 \end{cases}$$

Sugestão: determine uma solução particular constante.

3 Soluções

1. (a) $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{2t}$ com $c_1,\ c_2,\ c_3 \in \mathbb{R}$ (b) $y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{2x}$
(c) $y(x) = e^{-4x}(c_1 \cos(5x) + c_2 \operatorname{sen}(5x))$
(d) $y(t) = (A + Bt)e^{-2t} + (C + Dt + Et^2)e^t \cos 2t + +(F + Gt + Ht^2)e^t \operatorname{sen} 2t + Ie^t$ com $A, B, C, D, E, F, G, H, I \in \mathbb{R}$

(e) $y(t) = c_1 \cos t + c_2 t \cos t + c_3 \operatorname{sen} t + c_4 t \operatorname{sen} t$ com $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$
(f) $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 t e^t + c_5 t^2 e^t$ (g) $y(t) = (c + c_2 t)e^{5t/2}$ com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

2. (a) $y(t) = \cos t + \operatorname{sen} t$ (b) $y(t) = 4e^t - 3e^{2t} + 3te^{2t}$ (c) $y(t) = \frac{1}{10}\Big(15e^t - 6e^{2t} + e^{-3t}\Big)$
(d) $y(t) = 5 - 2e^t + e^{-5t}$ (e) $y(t) = 7e^{-t} + 2t^2 e^{-t}$ (f) $y(t) = 0$

3. $y(x) = \frac{1}{2} t^2 e^{mx}$

4. (b) $a_0 = 0$, $a_1 = -3$ e $a_2 = -2$

5. (a)

$$f_b(t) = \begin{cases} te^{-bt} & \text{se} \quad b = \pm 1 \\ \frac{1}{\omega} e^{-bt} \operatorname{sh}(\omega t) & \text{se} \quad |b| > 1 \\ \frac{1}{\omega} e^{-bt} \operatorname{sen}(\omega t) & \text{se} \quad |b| < 1 \end{cases}$$

em que $\omega = \sqrt{|b^2 - 1|}$
(b) $b > 0$ (c) $|b| < 1$

6. (c) $y(0) = \alpha$, $y'(0) = \beta$, $y''(0) = -\alpha$ e $y'''(0) = -\beta$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.
(d) $y(0) = \alpha$, $y'(0) = \beta$, $y''(0) = -2\beta$ e $y'''(0) = 3\beta + 2\alpha$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

7. (a) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$ (b) $y^{(4)} - y = 0$ (c) $y''' - y'' = 0$

8. $y^{(3)} + 3y'' - 4y = 0$ com $y(0) = -1$, $y'(0) = 10$ e $y''(0) = -27$

9. **Nota:** as soluções são apresentadas a menos de uma transformação linear da base do espaço de soluções. Para obter uma dessas bases pode-se utilizar vários métodos, produzindo outras tantas respostas equivalentes.

(a) $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & -3e^{-3t} \\ -2e^{2t} & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 2 & 1+2t \\ 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} & e^{2t} \\ e^t & -e^{-t} & 2e^{2t} \\ e^t & e^{-t} & 4e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t - \cos t \\ \cos t \\ \cos t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -\cos t - \operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{-4t} \begin{bmatrix} -1/4 \\ 4/5 \\ 1 \end{bmatrix}$

10. **(a)** $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\mathbf{X}(t) = e^{5t}\begin{bmatrix} -3t+4 \\ 3t-3 \end{bmatrix}$ **(c)**$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \frac{e^{2t}-3}{2} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} e^{5(t-1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ **(e)** $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ **(f)** $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t}(t+1) \\ e^{-t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{t}\begin{bmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$, onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$