



INSTITUTO
SUPERIOR
TÉCNICO

AED - Algoritmos e Estruturas de Dados 2009/2010 - 2º Semestre

2º Exame, 8 Julho 2010, 13:00h

Duração: 3 horas

Prova escrita, individual e sem consulta

NOME: _____ NÚMERO: _____

PARTE I - Questões de Escolha Múltipla

Preencha as respostas na tabela (usando apenas letras maiúsculas). Se nenhuma opção servir, escreva **NENHUMA**. Se pretender alterar a sua resposta, risque e escreva ao lado a sua nova opção. Todas as questões de escolha múltipla valem **0.5 valores**. As questões de escolha múltipla não respondidas são cotadas com 0 valores, mas por cada resposta errada são descontados 0.5/4 valores.

Questão	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Resposta							✓	✓	✓

1. Suponha um conjunto de N números inteiros (N muito grande), organizados numa **tabela** sobre a qual é implementado o seguinte algoritmo: dado um número k , esse número é pesquisado na tabela; o algoritmo retorna TRUE ou FALSE respectivamente, consoante encontrou ou não o número k na tabela. Em média, **quantas comparações** são efectuadas durante a execução da função, admitindo que ela é o mais eficiente possível?

- A. $\mathcal{O}(k)$ se a pesquisa se iniciar pelo último índice da tabela
- B. $\mathcal{O}(\log N)$ se a tabela estiver ordenada
- C. $\mathcal{O}(\log N)$ se não houver números repetidos na tabela
- D. $\mathcal{O}(N)$ em qualquer caso, quer a tabela esteja ordenada ou não

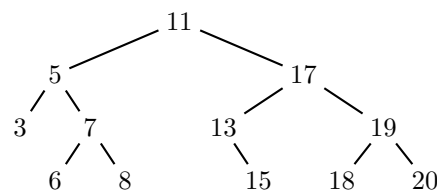
2. Considere a seguinte tabela (1ª linha) sobre a qual são listados alguns passos executados por um algoritmo de ordenação (restantes linhas). Qual é o algoritmo usado?

71	12	63	5	92	80	45	0	28	99	36	58
0	71	12	63	5	92	80	45	28	36	99	58
0	5	71	12	63	28	92	80	45	36	58	99
0	5	12	71	28	63	36	92	80	45	58	99
0	5	12	28	71	36	63	45	92	80	58	99
0	5	12	28	36	71	45	63	58	92	80	99
0	5	12	28	36	45	71	58	63	80	92	99

- A. Inserção
- B. *Bubble*
- C. *Shellsort* ($h=5, 3, 1$)
- D. *Quicksort*

3. Considere a árvore binária indicada na figura à sua direita.

Considere que a mesma é varrida mediante uma dada estratégia e que em cada nó se imprime o número armazenado no nó. Suponha que é utilizado um varrimento **Pré-fixado**. Indique que sequência é apresentada na saída?



- A. 11 – 5 – 17 – 3 – 7 – 13 – 19 – 6 – 8 – 15 – 18 – 20
- B. 3 – 5 – 6 – 7 – 8 – 11 – 13 – 15 – 17 – 18 – 19 – 20
- C. 3 – 6 – 8 – 7 – 5 – 15 – 13 – 18 – 20 – 19 – 17 – 11
- D. 11 – 5 – 3 – 7 – 6 – 8 – 17 – 13 – 15 – 19 – 18 – 20

4. Considere a árvore do problema anterior. Uma análise simples mostra que é uma árvore ordenada e equilibrada AVL. A ordenação é tal que para qualquer nó, ele tem um valor superior a todos os seus descendentes à esquerda e inferior a todos os seus descendentes à direita.

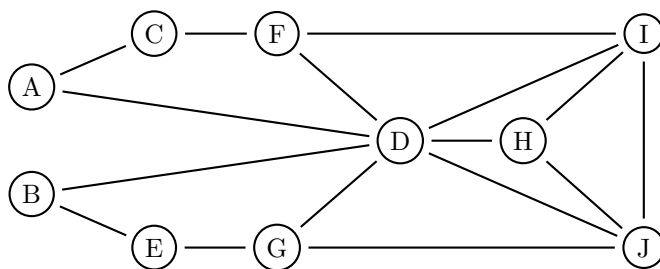
Admita que por ordem se introduzem na árvore os números 12 e 9, que a introdução satisfaz a regra de ordenação e que após a introdução de cada número a árvore é reequilibrada. Diga quais os nós, de acordo com a definição de equilíbrio AVL, que ficam momentaneamente desequilibrados após a introdução de cada um dos números indicados (antes da árvore ser reequilibrada).

A. 5, 7	B. 7, 13	C. 5	D. 7
---------	----------	------	------

5. Suponha que os seguintes números são introduzidas numa tabela de dispersão ("hash table"): **4723, 8342, 3731, 31, 1302, 7332, 1323, 4723, 2812, 3123, 302**. Assuma que a função de dispersão (para indexação na tabela) é a seguinte: $f(x) = x \bmod 100$ (ou seja, o resto da divisão por 100). Assuma que números repetidos não são armazenados, quando tal é verificado, e que colisões são resolvidas por lista, com inserção no **início**. Após a inserção dos números a tabela é percorrida do índice 0 ao índice 99 e para cada índice a lista correspondente é percorrida, sendo impressos todos os valores nela constantes. Qual das seguintes sequências é apresentada na saída?

A.	302, 1302, 2812, 3123, 1323, 4723, 31, 3731, 7332, 8342
B.	1302, 302, 2812, 4723, 1323, 3123, 3731, 31, 7332, 8342
C.	302, 1302, 2812, 3123, 4723, 1323, 4723, 31, 3731, 7332, 8342
D.	1302, 302, 2812, 4723, 1323, 4723, 3123, 3731, 31, 7332, 8342

6. Considere o grafo G indicado em baixo à esquerda e assumo que o mesmo não é direccionado mas é ponderado, como se indica do lado direito do grafo. Relativamente à SPT deste grafo que tem como fonte o nó **B**, indique qual das afirmações é **verdadeira**.



$D \leftrightarrow F$, $D \leftrightarrow H$	1
$A \leftrightarrow C$, $H \leftrightarrow I$	2
$F \leftrightarrow I$	3
$E \leftrightarrow G$, $D \leftrightarrow I$, $G \leftrightarrow J$	4
$B \leftrightarrow D$	5
$A \leftrightarrow D$, $I \leftrightarrow J$	6
$B \leftrightarrow E$, $D \leftrightarrow J$	7
$D \leftrightarrow G$, $H \leftrightarrow J$	8
$C \leftrightarrow F$	9

A.	O nó I é o 7º nó a entrar na SPT
B.	A distância de B a G pelo caminho mais curto é de 11.
C.	A distância de B a J pelo caminho mais curto é de 13.
D.	A aresta H↔J pertence à SPT

PARTE II - Questões de Desenvolvimento

Responda às questões de desenvolvimento em folhas de exame devidamente identificadas com nome e número.

[4.0]

7. As árvores binárias são estruturas de dados com múltiplas aplicações em computação cuja construção e manipulação aprendeu em AED.

Numa fase de grande descontentamento na sua empresa, muitos colegas seus queixam-se da excessiva distância a que estão da estrutura de topo de decisão e outros queixam-se de um esforço muito desigual de gestão dos seus subordinados (por uns terem demasiadas pessoas suas subordinadas e outros muito poucas).

Determinado a confirmar a relevância das queixas constrói uma árvore com a hierarquia de responsabilidades da empresa e descobre que essa árvore é binária. Uma vez construída a árvore é necessário calcular a que nível da hierarquia se encontra cada pessoa e quantas pessoas lhe estão subordinadas em termos de responsabilidade. Só assim poderá determinar se as queixas têm razão de ser.

```
typedef struct BTree {  
    int level;  
    int numsub;  
    Person node;  
    BTree *left;  
    BTree *right;  
} BTree;
```

[2.5]

- a) Para obter esses dados escreva uma função que dada a raiz de uma árvore binária determina para cada nó o nível em que o nó se encontra (a raiz está ao nível 0 e todos os “filhos” de um nó no nível d estão no nível $d+1$). Dado os seus excelentes conhecimentos, adquiridos em AED, a mesma função calcula igualmente o número de subordinados de cada pessoa, ou seja o número de nós na sub-árvore de que cada nó é raiz.

Assuma que os nós da árvore são do tipo `BTree` definido acima em que o campo `Person` contém os dados de cada pessoa (irrelevantes para a sua função), no campo `numsub` deve guardar o número de nós abaixo do nó em questão (filhos, netos, bisnetos, etc) e no campo `level` o nível do nó (assuma que estes campos estão inicialmente a zero em todos os nós). A sua função retorna um número inteiro que pode usar da forma que for mais conveniente. Assuma a seguinte assinatura para a função:

```
int traverse_tree(BTree *node, int lev)
```

Para facilitar a compreensão do seu código e garantir que pequenos erros não limitam a avaliação do mesmo, descreva cuidadosamente o algoritmo que o código implementa.

Sugestão: Calcule em cada nó, recursivamente, o número de sucessores de cada nó e retorne esse valor. No percurso descendente na árvore determine e guarde o nível de cada nó e no percurso ascendente retorne então o número de sucessores (adicionando o próprio nó). Lembre-se que há sucessores na sub-árvore esquerda e também na sub-árvore direita.

[0.5]

- b) Indique, justificando, no pior caso, qual a complexidade da função que escreveu, em função do número de nós da árvore N , ou de outro parâmetro que ache relevante.

[1.0]

- c) Suponha que no final deste exercício verifica, com alguma surpresa, que de facto a sua árvore tem folhas a profundidades muito variadas e que o número de nós debaixo de cada nó (debaixo da sua sub-árvore) é igualmente muito diferente.

Determinado a eliminar estes problemas você projecta uma nova hierarquia para a empresa usando ainda uma árvore binária, mas em que os empregados estão dispostos na árvore usando a antiguidade como critério: os empregados mais antigos mais perto da raiz e os empregados mais recentes perto das folhas. Na sua nova hierarquia os empregados estão o mais perto da raiz possível garantindo-se que para cada empregado todos os seus subordinados (todos os nós na sub-árvore de que ele é raiz) são mais recentes do que ele. A árvore resultante é ainda o mais compacta possível (com a menor altura possível) para garantir que nenhum empregado

esteja muito longe do topo da hierarquia.

Ao terminar de construir a nova árvore você percebe-se que há uma forma muito compacta de a representar e armazenar. Por exemplo, não precisa em cada nó dos ponteiros para os filhos esquerdo e direito pois sabe sempre onde eles estão e que dessa forma todas as operações de acesso (encontrar qualquer elemento) e alteração são igualmente muito eficientes. Explique, justificando, que estrutura de dados seria essa?

Nesse tipo de estrutura qual é o nível máximo a que um dado nó pode estar se a árvore tiver um total de N nós.

Nota: Não se pretende que escreva **nenhum** código!

Mude de folha para responder à pergunta 8
Identifique a nova folha com número e nome

[2.0]

8. Apresentando todos os cálculos, resolva a recorrência seguinte e determine a ordem da respectiva solução utilizando a notação assintótica estudada ($C_N \in \mathcal{O}(?)$):

$$C_N = 3C_{N/3} + 1$$

Nota: a sua resposta deve corresponder ao menor dos majorantes.

Mude de folha para responder à pergunta 9
Identifique a nova folha com número e nome

[3.0]

9. Considere de novo o grafo do Problema 6.

[2.0]

- a) Determine a árvore de suporte mínima do grafo (MST) através do algoritmo de Prim. Inicie o algoritmo no nó **B**. Apresente os seus cálculos de forma clara, detalhada e completa para cada iteração do algoritmo. Identifique em cada passo do algoritmo o estado da franja de procura e os respectivos pesos, assim como por que ordem entra cada vértice na árvore. Deverá ainda indicar qual o valor final do vector st (que codifica a MST) bem como o custo total da MST.

[0.5]

- b) No Problema 6 calculou a árvore de caminhos mais curtos (SPT) do mesmo grafo tendo como fonte o nó **B**. Justifique que essa árvore é também uma árvore de suporte. Será que a SPT é também sempre uma MST? Justifique.

[0.5]

- c) Diga se a MST que calculou lhe permite ou não dizer qual o caminho mais curto entre **B** e **J**. Porquê?