TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III
1º Semestre 2021/2022
Curso: LEEC

Ficha de Problemas nº 1
Equações Diferenciais Lineares de 1ª ordem

1 Exercícios Resolvidos

1. Determine a ordem da EDO, verifique que a função apresentada é solução da equação diferencial, determine a solução particular para as condições iniciais e faça um esboço da solução

   (a) $y' = 1 + 4y^2$, $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}(2x + c)$, $y(0) = 0$

   (b) $y'' + \pi^2 y = 0$, $y(x) = a\cos(\pi x) + b\operatorname{sen}(\pi x)$, $y(0) = 1$, $y'(1/2) = 0$

(a) Trata-se de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem (não linear). Para verificar que a função dada é solução, vamos substituir e verificar que se obtém uma proposição verdadeira. Assim

$$\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}(2x+c)\right)' = 1 + 4\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}(2x+c)\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\cos^2(2x+c)} = 1 + \operatorname{tg}^2(2x+c)$$

Atendendo a que para todo $\theta \in \mathbb{R}$ se tem que $\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \operatorname{tg}^2\theta$ a afirmação é verdadeira para todo x e $c \in \mathbb{R}$ e assim $y(x)$ é solução da equação. Para calcular c de modo a que $y(0) = 0$, substituimos na solução x e y por 0, obtendo

$$0 = \frac{1}{2}\operatorname{tg} c \quad \Leftrightarrow \quad c = 0$$

pelo que a solução da equação que verifica a condição dada é $y(x) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}(2x)$.

(b) Trata-se de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem (linear) Para verificar que a função dada é solução, vamos substituir e verificar que se obtém uma proposição verdadeira. Assim

$$\big(a\cos(\pi x) + b\operatorname{sen}(\pi x)\big)'' + \pi^2\big(a\cos(\pi x) + b\operatorname{sen}(\pi x)\big) = 0$$

ou seja

$$-\pi^2 a\cos(\pi x) - \pi^2 b\operatorname{sen}(\pi x)) + \pi^2 a\cos(\pi x) + \pi^2 b\operatorname{sen}(\pi x) = 0$$

A afirmação é verdadeira para todo x, a e $b \in \mathbb{R}$ e assim $y(x)$ é solução da equação. Para calcular as constantes a e b de modo a que $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, substituimos na solução e na sua derivada x por 0, y por 1 e para $x = 0$ substituimos y' por 0, obtendo

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

pelo que a solução da equação que verifica as condições dadas é $y(x) = \cos(\pi x)$.

2. Determine as soluções das seguintes equações diferenciais:

   (a) $y' = -\operatorname{sen}(\pi x)$

   (b) $y' = xe^{x^2/2}$ com $y(1) = 2$.

   Resolução:

(a) Primitivando ambos os membros da equação

$$\int y'(x)dx = -\int \operatorname{sen}(\pi x)dx \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + c$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

(b) Primitivando ambos os membros da equação

$$\int y'(x)dx = \int xe^{x^2/2}dx \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = e^{x^2/2} + c, \quad \text{com } c \in \mathbb{R}.$$

Usando a condição inicial, $2 = y(1) = e^{1/2} + c$, pelo que $c = 2 - e^{1/2}$. A solução do problema de valor inicial é, pois:

$$y(x) = e^{x^2/2} - e^{1/2} + 2.$$

3. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias lineares

$$\text{a)} \quad \frac{dy}{dx} + y = 2 + 2x \qquad \text{b)} \quad \psi' = \psi - t$$

$$\text{c)} \quad x\frac{dy}{dx} + 2y = (x-2)e^x \qquad \text{d)} \quad (1+y^2)\frac{dx}{dy} = \operatorname{arctg} y - x$$

   Resolução:

(a) Trata-se de uma equação linear em y que admite um factor integrante, $\mu(x)$, dado pela equação

$$\mu' = \mu \quad \Leftrightarrow \quad \mu(x) = e^x$$

Multiplicando ambos os membros da equação por μ, obtemos

$$\begin{aligned} e^x \frac{dy}{dx} + e^x y = (2+2x)e^x \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\big(e^x y\big) = (2+2x)e^x \\ &\Leftrightarrow \quad e^x y = \int (2+2x)e^x \, dx + c \\ &\Leftrightarrow \quad e^x y = 2xe^x + c \\ &\Leftrightarrow \quad y(x) = 2x + ce^{-x} \end{aligned}$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

(b) A equação é equivalente a

$$\psi' - \psi = -t \tag{1}$$

Esta equação admite um factor integrante, $\mu(t)$ dado por

$$\mu' = -\mu \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mu'}{\mu} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \log \mu = -t \quad \Leftrightarrow \quad \mu = e^{-t}$$

Multiplicando ambos os membros da equação (1) por μ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{-t}\psi) = -te^{-t} \quad &\Leftrightarrow \quad e^{-t}\psi = -\int te^{-t} dt + c \quad \Leftrightarrow \quad \psi(t) = e^t \Big(te^{-t} + e^{-t} + c\Big) \\ &\Leftrightarrow \quad \psi(t) = t + 1 + ce^t \end{aligned}$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

(c) Para $x \neq 0$, a equação pode ser escrita na forma

$$y' + \frac{2}{x}\, y = \frac{(x-2)}{x}\, e^x \tag{2}$$

Trata-se de uma equação linear, e admite um factor integrante, $\mu(x)$ dado por

$$\mu' = \frac{2}{x}\, \mu \quad \Leftrightarrow \quad \mu = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \log x} == e^{\log x^2} = x^2$$

Multiplicando ambos os membros da equação (2) por μ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2 y) = (x^2 - 2x)e^x \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 y = \int (x^2 - 2x)e^x dx + c \\ &\Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{1}{x^2}\Big((x^2 - 4x + 4)e^x + c\Big) \\ &\Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{1}{x^2}\Big((x-2)^2 e^x + c\Big) \end{aligned}$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

(d) A equação é equivalente a

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{1+y^2}\,x = \frac{1}{1+y^2}\operatorname{arctg} y \tag{3}$$

Esta equação admite um factor integrante, $\mu(y)$ dado por

$$\mu' = \frac{1}{1+y^2}\mu \quad \Leftrightarrow \quad \log\mu = e^{\int \frac{1}{1+y^2}\,dy} = e^{\operatorname{arctg} y}$$

Multiplicando ambos os membros da equação (3) por μ obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}(e^{\operatorname{arctg} y}x) = \frac{1}{1+y^2}\operatorname{arctg} y\, e^{\operatorname{arctg} y} \quad &\Leftrightarrow \quad e^{\operatorname{arctg} y}x = \int \operatorname{arctg} y\, e^{\operatorname{arctg} y}\frac{1}{1+y^2}\,dy\\ &\Leftrightarrow \quad e^{\operatorname{arctg} y}x = \operatorname{arctg} y\, e^{\operatorname{arctg} y} - e^{\operatorname{arctg} y} + c\\ &\Leftrightarrow \quad x(y) = \operatorname{arctg} y - 1 + ce^{-\operatorname{arctg} y}\end{aligned}$$

em que $c \in \mathbb{R}$. Note que a primitiva foi calculado usando a substituição $u = \operatorname{arctg} y$, $\frac{du}{dy} = \frac{1}{1+y^2}$.

4. Determine as soluções dos seguintes problemas de valor inicial

a) $xy' = 2y + x^3e^x \quad , \quad y(1) = 0.$

b) $\dfrac{dv}{du} + \dfrac{2u}{1+u^2}v - \dfrac{1}{1+u^2} = 0,\ v(0) = 1.$

c) $xy' = y + x^2 \operatorname{sen} x,\ y(\pi) = 0$

Resolução:

(a) Para $x \neq 0$, a equação é equivalente a

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2e^x$$

Trata-se de uma equação linear em y que admite como factor integrante

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = \frac{1}{x^2}$$

Tem-se então que

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2}y' - \frac{1}{x}y = e^x \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{x^2}y\Big) = e^x \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{y}{x^2} = e^x + c \\ &\Leftrightarrow \quad y(x) = x^2(e^x + c)\end{aligned}$$

Dado que $y(1) = 0$, teremos

$$0 = e + c \quad \Leftrightarrow \quad c = -e$$

e a solução do PVI é

$$y(x) = x^2(e^x - e)$$

(b) A equação é equivalente a

$$\frac{dv}{du} + \frac{2u}{1+u^2}v = \frac{1}{1+u^2} \tag{4}$$

que é uma equação linear em v e admite um factor integrante, $\mu(u)$, dado pela equação

$$\mu' = \frac{2u}{1+u^2}\mu \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mu'}{\mu} = \frac{2u}{1+u^2} \quad \Leftrightarrow \quad \log\mu = \log(1+u^2) \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 1 + u^2$$

Multiplicando ambos os membros da equação (4) por μ obtemos

$$\begin{aligned}\big(1+u^2\big)\frac{dv}{du} + 2u\,v = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{d}{du}\Big(\big(1+u^2\big)v\Big) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \big(1+u^2\big)v = u + c \\ &\Leftrightarrow \quad v(u) = \frac{u+c}{1+u^2}\end{aligned}$$

Dado que

$$1 = v(0) = c,$$

a solução do PVI é

$$v(u) = \frac{u+1}{u^2+1}$$

(c) Para $x \neq 0$ a equação pode ser escrita na forma

$$y' - \frac{1}{x}y = x \operatorname{sen} x$$

que é uma equação linear em y e admite um factor integrante, $\mu(x)$, dado pela equação

$$\mu' = -\frac{1}{x}\mu \quad \Leftrightarrow \quad \mu(x) = \frac{1}{x}$$

Multiplicando ambos os membros da equação por μ obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \operatorname{sen} x \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x}y' + \left(\frac{1}{x}\right)' y = \operatorname{sen} x \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{x}\,y\right)' = \operatorname{sen} x \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{y}{x} = -\cos x + c \\
&\Leftrightarrow \quad y(x) = -x\cos x + cx
\end{aligned}$$

Dado que $y(\pi) = 0$ tem-se

$$0 = \pi + c\pi \quad \Leftrightarrow \quad c = -1,$$

pelo que a solução do PVI é

$$y(x) = -x\cos x - x$$

5. De acordo com a lei de arrefecimento de Newton, a taxa de arrefecimento de uma substância numa corrente de ar, é proporcional à diferença entre a temperatura da substância e a do ar. Assumindo que a temperatura do ar é 30^{o}C e que a substância arrefece de 100^{o}C para 70^{o}C em 15m, determine o tempo que a substância demora a atingir a temperatura de 40^o.

   Resolução:

Aplicando a lei do arrefecimento de Newton ao nosso caso:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 30),$$

onde t é medido em minutos, $k > 0$ é o módulo da constante de arrefecimento e $T(t)$ é a função que representa a temperatura da substância no instante t. Resulta pois que $T(t)$ é a solução do problema de valor inicial:

$$\frac{dT}{dt} + kT = 30k, \qquad T(0) = 100$$

Trata-se de uma equação linear não homogenea, que admite como factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int k\,dt} = e^{kt}$$

Multiplicando todos os termos da equação por $\mu(t)$

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{kt}T\Big) = 30ke^{kt} \Leftrightarrow e^{kt}T = 30e^{kt} + c \Leftrightarrow T(t) = 30 + ce^{-kt}, \qquad \text{com } c \in \mathbb{R}.$$

Como $T(0) = 100$, concluimos que

$$T(t) = 30 + 70e^{-kt}$$

Atendendo também a que $T(15) = 70$, resulta que

$$70 = 30 + 70e^{-15k} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-15k} = \frac{4}{7} \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{\log(7/4)}{15} = \frac{\log 7 - \log 4}{15} \approx 0,0373$$

Pretende-se determinar o instante em que a temperatura da substância é de 40^{o}C, isto é,

$$T(t) = 40 \quad \Leftrightarrow \quad 30 + 70e^{-kt} = 40 \quad \Leftrightarrow \quad -kt = \log 1/7 = -\log 7$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{\log 7}{k} \approx 52,2$$

Conclui-se que a temperatura da substância deverá atingir o valor de 40^{o}C ao fim de, aproximadamente, 52 minutos.

6. O corpo de uma vítima de assassinato foi descoberta. O perito da policia chegou à 1:00h da madrugada e, imediatamente, mediu a temperatura do cadáver, que era de 34,8 C. Uma hora mais tarde a temperatura era 34,1^{o}C. A temperatura do quarto onde se encontrava a vítima manteve-se constante a 20^{o}C. Estime a hora a que se deu o crime, admitindo que a temperatura normal de uma pessoa viva é de 36,5^{o}C.

Resolução:

Sendo $T(t)$ a temperatura do corpo no instante t, o modelo matemático para a lei de arrefecimento de Newton é:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

onde T_a é a temperatura ambiente e $-k < 0$ é a constante de proporcionalidade (do arrefecimento do corpo). Temos pois, como no problema anterior, que

$$T' + kT = 20k \quad \Leftrightarrow \quad \Big(e^{kt}T\Big)' = 20ke^{kt} \quad \Leftrightarrow \quad T(t) = 20 + ce^{-kt}$$

Tomendo $t_0 = 0$ o instante em que a primeira medição de temperatura foi feita, temos que
$$T(0) = 34.8 \quad \Leftrightarrow \quad c = 14.8$$
e assim
$$T(t) = 20 + 14.8\, e^{-kt}$$
Para determinar a taxa de arrefecimento, k, usamos a outra medição:
$$T(1) = 34.1 \quad \Leftrightarrow \quad 34.1 = 20 + 14.8\, e^{-kt} \quad \Leftrightarrow \quad k = -\log\frac{14.1}{14.8} \approx 0.0485$$
e então
$$T(t) = 20 + 14.8\, e^{-0{,}0485\, t}$$
Para saber quando o crime foi cometido, pretende-se saber a que horas a temperatura do corpo era de 36.5 C, queremos determinar t tal que
$$T(t) = 36.5 \quad \Leftrightarrow \quad 36.5 = 20 + 14.8\, e^{-0{,}0485\, t} \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{\log\frac{16.5}{14.8}}{0.0485} \approx -2.24$$
Conclui-se que o crime foi cometido por volta das 22h 45min.

7. No instante $t = 0$ a quantidade de um certo material radioativo armazenado é x_0. A equação para $x(t)$, a quantidade de material radioativo é $\frac{dx}{dt} = -ax$, onde $a > 0$ é uma constante.

   (a) Encontre a solução $x(t)$

   (b) Calcule a "meia-vida", ou seja o tempo necessário para que a concentração inicial x_0 se reduza a metade. Note que a "meia-vida" não depende da concentração inicial.

Resolução:

(a) Sendo a equação do decaimento radioactivo linear homogénea, tem-se que
$$\frac{dx}{dt} = -ax \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = ce^{-at}$$
e dado que $x(0) = x_0$, a solução do problema é $x(t) = x_0e^{-at}$.

(b) Pretende-se saber o instante T em que se obtém a meia vida, isto é, o instante em que a quantidade de substância radioactiva é metade da quantidade inicial. Ou seja
$$x(T) = \frac{x_0}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_0e^{-aT} = \frac{x_0}{2} \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{\log 2}{a}$$

8. Considere a equação diferencial

$$2x\frac{dy}{dx} + 2xy^5 - y = 0$$

(a) Determine a solução geral da equação efectuando a mudança de variável $v = y^{-4}$.

(b) Determine a solução que verifica $y(1) = 1$, indicando o seu intervalo máximo de existência.

Resolução:

(a) Seguindo a sugestão, fazemos $v(x) = \big[y(x)\big]^{-4}$ pelo que

$$\frac{dv}{dx} = -4y^{-5}\frac{dy}{dx}.$$

Multiplicando ambos os membros da equação diferencial por $-4y^{-5}$, obtém-se:

$$2x\underbrace{\left(-4y^{-5}\frac{dy}{dx}\right)}_{\frac{dv}{dx}} \;+\; 2x\left(-4\underbrace{y^{-5}y^5}_{1}\right) \;+\; 4\underbrace{y^{-5}y}_{v} \;=\; 0,$$

ou seja,

$$2x\frac{dv}{dx} \;-\; 8x \;+\; 4v \;=\; 0$$

Dividindo por $2x$ e rearranjando os termos, obtém-se a equação linear não homogénea:

$$\frac{dv}{dx} \;+\; \frac{2}{x}v \;=\; 4 \tag{5}$$

O seu factor integrante é dado por

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = x^2$$

Multiplicando todos os termos da equação (5) por $\mu(x)$

$$x^2\,\frac{dv}{dx} + 2x\,v = 4x^2 \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}\big(x^2v\big) = 4x^2 \;\Leftrightarrow\; x^2v = \frac{4x^3}{3} + c \;\Leftrightarrow\; v(x) = \frac{4x}{3} + \frac{c}{x^2}$$

Finalmente, desfazendo a mudança de variável,

$$y^{-4}(x) = \frac{4x}{3} + \frac{c}{x^2} \quad\Leftrightarrow\quad y(x) = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{\frac{4x}{3} + \frac{c}{x^2}}} = \pm\sqrt[4]{\frac{3x^2}{4x^3 + c}}$$

onde $c \in \mathbb{R}$.

(b) Dado que $y(1) = 1$, conclui-se que $y(x)$ é positivo e $c = -1$. Como tal a solução do PVI é dada por

$$y(x) = \sqrt[4]{\frac{3x^2}{4x^3 - 1}}.$$

O domínio de diferenciabilidade da função $y(x)$ é

$$D \;=\; \left\{x \in \mathbb{R} \;:\; 4x^3 - 1 \neq 0 \;\text{ e }\; \frac{3x^2}{4x^3-1} > 0\right\} \;=\; \left]\sqrt[3]{1/4}, +\infty\right[$$

o intervalo máximo de solução será o maior **intervalo** $I \subset D$, tal que $1 \in I$, ou seja:

$$I \;=\; \left]\sqrt[3]{1/4}, +\infty\right[$$

9. Encontre as soluções da equação $y' \operatorname{sen} t + y \cos t = 1$ no intervalo $]0, \pi[$. Mostre que só há uma solução tal que $\lim\limits_{t\to 0} y(t)$ é finito e indique um problema de valor inicial que tenha essa solução.

Resolução:

É de notar que $(\operatorname{sen} t)' = \cos t$ e, como tal, a equação pode ser escrita na forma

$$y' \operatorname{sen} t + y(\operatorname{sen} t)' = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \Big(y \operatorname{sen} t\Big)' = 1 \quad\Leftrightarrow\quad y \operatorname{sen} t = t + C \qquad \text{com } C \in \mathbb{R}.$$

Dado que para $t \in\,]0, \pi[$ a função $\operatorname{sen} t$ não se anula, resulta que a solução geral da equação (definida nesse intervalo) é dada por

$$y(t) = \frac{t + C}{\operatorname{sen} t},$$

com $C \in \mathbb{R}$. Como para $C \neq 0$

$$\lim_{t\to 0} y(x) \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{t}{\operatorname{sen} t} \;+\; C \lim_{t\to 0} \frac{1}{\operatorname{sen} t} \;=\; 1 + C \lim_{t\to 0} \frac{1}{\operatorname{sen} t} \;=\; 1 \pm \infty = \pm\infty$$

então o limite da solução quando $t \to 0$ só é finito quando $C = 0$; nesse caso,

$$y(t) = \frac{t}{\operatorname{sen} t} \qquad \text{e} \qquad \lim_{t\to 0} y(x) = 1.$$

A condição inicial a acrescentar a equação diferencial pode ser a seguinte:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\frac{\pi}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

10. Obtenha a solução $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da seguinte equação:

$$y(t) = 1 + \int_1^t sy(s)\,ds. \tag{6}$$

Resolução:

Derivando ambos os membros da equação integral (6) em ordem a t e aplicando o teorema fundamental do cálculo, obtém-se:

$$y'(t) = \Big(\int_1^t sf(s)\,ds\Big)' \quad \Leftrightarrow \quad y'(t) = ty(t)$$

Desta forma, $y(t)$ é solução da equação linear homogenea

$$y' = ty \qquad \Leftrightarrow \qquad y(t) \; = \; Ke^{\int t\,dt} \; = \; Ke^{\frac{t^2}{2}}$$

onde $K \in \mathbb{R}$. Atendendo a que, pela mesma equação (6), $y(1) = 1$ tem-se que $Ke^{1/2} = 1$, ou seja, $K = e^{-1/2}$. Assim, a solução da equação integral é

$$y(t) = e^{\frac{t^2-1}{2}}$$

e está definida para $t \in \mathbb{R}$.

2 Exercícios Propostos

1. Diga qual das seguintes equações é uma equação linear

$$(\mathbf{a})\; x - y' = xy \qquad (\mathbf{b})\; y' + xy = \sqrt{x}$$
$$(\mathbf{c})\; y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad (\mathbf{d})\; x \operatorname{sen} x = x^2 - y'$$

2. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias lineares

(a) $\frac{dy}{dt} = -ye^t$ **(b)** $y' = x^3 - 2xy$ **(c)** $t^2\frac{dy}{dt} + 3ty = \frac{\operatorname{sen} t}{t}, \;\; t < 0$

(d) $\frac{dy}{dx} + y = 2 + 2x$ **(e)** $xy' + y = 3x\cos(2x)$ **(f)** $t\frac{dy}{dt} + 2y = e^t, \;\; t > 0$

(g) $\frac{dy}{dx} - 3y = e^{3x}\operatorname{sen} x$ **(h)** $\frac{dy}{dx} - y \operatorname{tg} x = 1$ **(i)** $\frac{dy}{dt} = y\Big(\frac{1}{t} - \operatorname{tg} t\Big) + t\cos t$

3. Determine as soluções dos seguintes problemas de Cauchy:

(a) $(x^2+1)\dfrac{dy}{dx}+3x(y-1)=0,\ \ y(0)=1$ **(b)** $\dfrac{dy}{dt}+4t^3y=t^3,\ \ y(0)=1$

(c) $\dfrac{dy}{dt}+y=\operatorname{sen} t,\ \ y(\pi)=1$ **(d)** $\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{2}{t}y=\dfrac{\cos t}{t^2},\ \ y(\pi)=0,\ \ t>0$

(e) $\cos^2 x\,\dfrac{dy}{dx}+y-1=0,\ \ y(0)=5$ **(f)** $\dfrac{dy}{dt}=y\Big(\dfrac{1}{t}-\operatorname{tg} t\Big)+t\cos t,\ \ y(\pi)=0$

(g) $\begin{cases} x'+h(t)x-t=0 \\ x(-1)=2 \end{cases}$ tomando-se $h(t)=\begin{cases} 0 & \text{se } t<0 \\ t & \text{se } t\geq 0 \end{cases}$

4. Determine a intensidade da corrente, $I(t)$, como uma função de t (em segundos), sabendo que I verifica a equação diferencial

$$L\frac{dI}{dt}+RI=\operatorname{sen}(2t)$$

onde R e L são constantes não nulas.

5. Quando deixamos cair uma pedra, assumindo que a resistência do ar é desprezável, a aceleração do movimento, $\frac{d^2y}{dt^2}=y''$ é constante, igual a $-g$, sendo $g=9,8m/s^2$ a aceleração da gravidade na superfície terrestre. Escreva uma equação diferencial para y, onde y é a altura da pedra no instante t. Se a pedra estava na posição y_0 , com velocidade inicial v_0, no instante $t=0$, mostre que a solução da equação é $y=-gt^2/2+v_0t+y_0$. Quanto tempo demora uma queda de 100 metros de uma pedra largada com velocidade nula? E uma queda de 200 metros?

6. Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$x^2\cos y\frac{dy}{dx}=2x\operatorname{sen} y-1 \qquad y\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$$

Determine a solução geral, na forma implícita, da equação diferencial e resolva o problema. **Sugestão:** Efectue a mudança de variável $v=\operatorname{sen} y$.

7. Considere a equação diferencial

$$t^2\frac{dy}{dt}+2ty-y^3=0$$

(a) Determine a solução geral da equação efectuando a mudança de variável $v=y^{-2}$.

(b) Determine a solução que verifica $y(1)=1$, indicando o seu intervalo máximo de existência.

(c) No caso geral, considere a equação diferencial de Bernoulli

$$\frac{dx}{dt}=\alpha(t)x+\beta(t)x^n$$

onde α e β são funções definidads e contínuas em $I\subset\mathbb{R}$. Mostre que a mudança de variável $y(t)=(x(t))^{1-n}$ transforma a equação numa equação linear.

8. Resolva os seguintes problemas de valor inicial, envolvendo equações de Bernoulli:

(a) $y' + 3x^2y = x^2y^3, \;\; y(0) = 1$ (b) $y' + \dfrac{y}{x} = x\sqrt{y}, \;\; y(1) = 1$

(c) $y' = 5y - \dfrac{4x}{y}, \; y(0) = -\dfrac{1}{5}$ (d) $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{y^3}{x^2}, \;\; y(1) = -1$

9. Obtenha a solução da equação

$$y' = \frac{y}{t} - 2y^2$$

com condição inicial $y(t_1) = y_1 > 0$ para algum $t_1 > 0$. Mostre que $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

10. Considere a equação de Ricati escalar

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} - x - x^2 \tag{7}$$

(a) Mostre que a função $\varphi(t) = \frac{1}{t} + \psi(t)$ é solução da equação de Ricati sse ψ é solução de uma certa equação de Bernoulli.

(b) Determine a solução da equação (7).

11. (a) Mostre que a substituição $z = P$ transforma a equação logistica

$$P' = kP(1 - \frac{P}{M})$$

na equação linear

$$z' + kz = \frac{k}{M}$$

(b) Resolva a equação diferencial para obter uma expressão para $P(t)$,

3 Soluções de 1.2

1. (a), (b) e (d) sim; (c) não

2.

(**a**) $y(t) = ce^{-e^t}$	(**b**) $y(x) = ce^{-x^2} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$	(**c**) $y(t) = \frac{c-\cos t}{t^3}$
(**d**) $y(j) = 2x + ce^{-x}$	(**e**) $y(x) = \frac{c}{x} + \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}(2x) + \frac{3}{4x}\cos(2x)$	(**f**) $y(t) = \frac{e^t(t-1)+c}{t^2}$
(**g**) $y(j) = e^{3x}(-\cos x + c)$	(**h**) $y(t) = \frac{\mathrm{sen}\, x + c}{\cos x}$	(**i**) $y(t) = (t^2 + ct)\cos t$

com $c \in \mathbb{R}$, em todas as alíneas.

3. **(a)** $y(x) = 0$ **(b)** $y(t) = \frac{1}{4}(1 + 3e^{-t^4})$ **(c)** $y(t) = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{sen} t - \cos t + e^{\pi - t}\Big)$
(d) $y(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t^2}$ **(e)** $y(j) = 1 + 4e^{-\operatorname{tg} x}$ **(f)** $y(t) = (t^2 - \pi t)\cos t$
(g) $x(t) = \begin{cases} \frac{t^2+3}{2} & \text{se} \quad t \le 0 \\ 1 + \frac{e^{-t^2/2}}{2} & \text{se} \quad t > 0 \end{cases}$

4. $I(t) = \frac{1}{4L^2+R^2}\Big(R\operatorname{sen}(2t) - 2L\cos(2t)\Big) + Ce^{-\frac{R}{L}t}$

5. Aproximadamente 4.5s e 6.4s

6. A solução geral na forma implícita é $\operatorname{sen} y = cx^2 + \frac{1}{3x}$, onde $c \in \mathbb{R}$. A solução do P.V.I. é $y(j) = \left(\frac{1}{3x}\right)$, para $x \in]\frac{1}{3}, +\infty[$.

7. **(a)** $y(t) = \sqrt{\frac{5t}{2+5ct^5}}$ ou $y(t) = -\sqrt{\frac{5t}{2+5ct^5}}$ **(b)** $y(t) = \sqrt{\frac{5t}{2+3t^5}}$ e $I_{\text{Max}} = \Big]0, \infty\Big[$

8. **(a)** $y(j) = \sqrt{\frac{3}{1+2e^{2x^3}}}$ **(b)** $y(j) = \left(\frac{x^2}{5} + \frac{4}{5\sqrt{x}}\right)^2$ **(c)** $y(x) = -\frac{\sqrt{20x+2-e^{10x}}}{5}$ **(d)** $y(x) = -\left(\frac{3x^4}{5} + \frac{2}{5x}\right)^{-1/2}$

9. $y(t) = \dfrac{y_1 t}{y_1 t^2 + t_1 - y_1 t_1^2}$

10. **(a)** $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{t} - \varphi - \varphi^2$ é equivalente à equação $\frac{d\psi}{dt} - \Big(\frac{2}{t} + 1\Big)\psi = -\psi^2$
(b) $\varphi(t) = \frac{1}{t} + \psi(t) = \frac{1}{t} + \frac{e^{-t}}{t^2\Big(\int \frac{e^{-t}}{t^2}\, dt + C\Big)}$