Semana 2

Ficha 2

a) PVI

$$\begin{cases} xy^2 + yx^2y' + x = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$y' = -\frac{1y}{x} - \frac{y^{-1}}{x}$ bernoulli

$yx^2y' = -x(y^2+1) \Leftrightarrow \frac{y}{y^2+1}y' = -\frac{1}{x}$ separável

alt Eq. exata

$\underbrace{(xy^2 + x)}_{M} + \underbrace{(yx^2)}_{N} y' = 0$

(M, N) campo vetorial
der. cruz. iguais

logo (M, N) = $\nabla \phi$
porque M, N são cont em D aberto
&
domínio D simp. conexo

$\frac{\partial M}{\partial y} \overset{?}{=} \frac{\partial N}{\partial x}$

$2xy = 2xy$ ✓

Cálculo de ϕ:

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = xy^2 + x$ $\qquad \frac{y^2}{2}2x + c'(x) = xy^2 + x \rightarrow c'(x) = x$

$c(x) = \frac{x^2}{2} + [c]$ ↳ ñ relevante

$\frac{\partial \phi}{\partial y} = yx^2 \rightarrow \phi = \frac{y^2}{2}x^2 + c(x)$

$\phi = \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^2}{2}$

Linhas de nível de ϕ:

$\phi(x,y) = \underbrace{c}_{cte}$ $\qquad \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c \Leftrightarrow y^2(x^2+1) = c \Leftrightarrow x^2(y^2+1) = 2c$

$y^2 + 1 = \frac{2c}{x^2} \Leftrightarrow y^2 = \frac{2c}{x^2} - 1$

PVI $x = 1$, $y = 1$: $1 = 2c - 1 \Leftrightarrow c = 1$

$y^2 = \frac{2}{x^2} - 1$

$\underset{>0}{y(1) = 1} \rightarrow y = \sqrt{2/x^2 - 1} \Rightarrow x = 1$ ✓, $x > 1$, $x < 1$ $\qquad x \in]0, \sqrt{2}[$

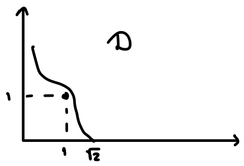
Observação

int máx?

$y = f(x, y)$

$y = \frac{y^2+1}{y} - \frac{1}{x} \in C^1$

se for verdade, existe 1 solução



eq. exata

$M + N \frac{dy}{dx} = 0$

M, N contínuas

$(M, N) = \nabla \phi$

sendo $y = y(x)$ uma função C^1 c/ $y(x_0) = y(0)$ temos:

$y(x)$ é sol do PVI $\Leftrightarrow$ gráfico de $y(x)$ está contido na mesma linha de nível de ϕ passa por (x_0, y_0)

$$x \to (x, y) \xrightarrow{\phi} z$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x}}_{M} + \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial y}}_{N}\frac{dz}{dx}$$

Se o gráfico de $y(x)$ é linha de nível: $\phi(x, \underbrace{y}_{y(x)}) = c$

$$z = e^{te}$$

$$\frac{dz}{dx} = 0$$

$$0 = M + N\frac{dz}{dx}$$

Se $y(x)$ é solução: $\underbrace{0}_{\frac{dz}{dx}} = M + N\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dz}{dx} = 0 \qquad z = e^{te}$

qualquer linha de nível é gráfico de algo esse algo é solução

8 b)

$$\begin{cases} \cos(y) + (y^2 - x\,\text{sen}\,y)\,y' = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

M, N contínuas, definidas em $D = \mathbb{R}^2$, D simp. conexo

M, N são $C^1(D)$

linear ? x

separável ? x

diferenciável ? x

exata ?

$$\frac{\partial M}{\partial y} \stackrel{?}{=} \frac{\partial N}{\partial x} \Leftrightarrow \text{sen}\,y = \text{sen}\,y \checkmark$$

Então: $(M, N) = \nabla \phi \qquad \phi = ?$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \cos y \qquad \phi = x\cos y + c(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = y^2 - x\,\text{sen}\,y \qquad -\cancel{x\,\text{sen}\,y} + c'(y) = y^2 - \cancel{x\,\text{sen}\,y} \qquad c'(y) = y^2$$

se depende c/ x não continua

$$\Rightarrow c(y) = y^3/3$$

$$F = y - c$$

linhas de nível: $\boxed{x\cos y + \frac{y^3}{3} = c}$

$y(0) = 1 \rightarrow 0\cos 1 + 1/3 = c \Leftrightarrow c = 1/3$

logo $\underbrace{x\cos y + \frac{y^3}{3} - \frac{1}{3}}_{F(x,y)} = 0$

$F(x, y) = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(0, 1) = 0$

$F(0, 1) = 0$

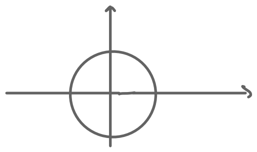
F é classe C^1

explicitar: $y = ?$ imp

A igualdade define implicitamente y como função de x (num intervalo aberto I tal que $0 \in I$)

NOTA: $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$y(1) = 0$



9 a)

$$\begin{cases} y - (x + 6y^2)\dfrac{dy}{dx} = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases} \qquad y' = \frac{y}{x + 6y^2}$$

linear x

bern x

separável x

exata

$\dfrac{\partial M}{\partial y} \overset{?}{=} \dfrac{\partial N}{\partial x} \iff 1 = -1$ ⓧ não é exata

simplificar para ficar separável

Fator integrante μ? $\mu(x,y) \to$ mult. tudo

$$M + N\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \mu M + \mu N \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} \overset{?}{=} \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(y\mu) \overset{?}{=} \frac{\partial}{\partial x}(-x\mu - 6y^2\mu) \iff \mu + y\frac{\partial \mu}{\partial y} = -\mu - x\frac{\partial \mu}{\partial x} - 6y^2\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

será que existe μ dependente só de x?

$(\mu = \mu(x))$ $\quad \dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0 \quad \dfrac{\partial M}{\partial N} = \mu'(x)$

se $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0$: $\quad \mu = -\mu - x\dfrac{\partial \mu}{\partial x} - 6y^2\dfrac{\partial \mu}{\partial x}$

$2\mu = (-x - 6y^2)\mu'$ ⓧ y ñ desaparece

existe μ dependente só de y:

$\mu = \mu(y)$ $\quad \dfrac{\partial \mu}{\partial x} = 0 \quad \mu + y\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = -\mu$ (“x” desaparece)

$2\mu = -y\mu'$ linear homogénea

$\mu' = -\dfrac{2}{y}\mu$

$\mu = e^{\int -2/y \, dy} = 1/y^2$

$\Rightarrow (\mu M, \mu N) = \nabla \Phi$

$\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = \dfrac{1}{y^2}(-x - 6y^2)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = \dfrac{1}{y} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2} - 6 \end{cases} \qquad \Phi = \frac{x}{y} + C(y) \qquad -\frac{x}{y^2} + C'(y) = -\frac{x}{y^2} - 6$$

$C(y) = -6y$

Solução: $x/y - 6y = C$

$y(1) = 1 \to 1 - 6 = C \iff C = -5$

logo $x/y - 6y = -5$

$N(1,1) = -7 \neq 0$ defini imp. y como função de x

Explicitar? $y = ?$

$x - 6y^2 = -5y$ form. resol. $y = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 + 24x}}{12}$

$x = 1 \rightarrow 1 = \dfrac{5+7}{12}$

$y = 1$

6)

$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2x^4 + t^4}{x^3 t} \\ x(1) = 1 \end{cases}$ $t > 0$ $x > 0$

linear ✗

separável ✗

bern ✓

edt $V = \dfrac{x}{t}$ | $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t^4}{t^4} \dfrac{\frac{2x^4}{t^4} + 1}{(x/t)^3} = \dfrac{2(x/t)^4 + 1}{(x/t)^3}$

Observação a função dada $\underbrace{\dfrac{2x^4 + t^4}{x^3 t}}_{f(x,t)}$ é 0-homogénea

$f(\alpha(x,t)) = f(x,t)$

Mud. Var. $V = \dfrac{x}{t}$ $V + tV' = \dfrac{2V^4 + 1}{V^3}$

$x = tV$ $tV' = \dfrac{2V^4 + 1}{V^3} - V$

$x' = V + tV'$

$\dfrac{V^4 + 1}{V^3}$ separável

$\dfrac{V^3}{V^4 + 1} V' = \dfrac{1}{t}$

$\dfrac{d}{dt} \dfrac{1}{4} \log(\alpha^4 + 1)$ $\dfrac{d}{dt} \dfrac{1}{4} \log(V^4 + 1) \Leftrightarrow \dfrac{d}{dt} \log(V^4 + 1) = \dfrac{4}{t}$

$\log(V^4 + 1) = \log t^4 + C$

$V^4 + 1 = Ct^4$

$t = 1$

$x = 1 \Rightarrow 1^4 + 1 = C1^4 \Leftrightarrow 2 = C$

$V = 1$

4 a)

$y' = (8x + 2y + 1)^2$

linear ×
sep ×
bern × ✓
exata ×
0-homog. ×

(sugestão) $u = 8x + 2y + 1$ $\frac{dy}{dx}$

$u' = 8 + 2y'$

$\frac{u' - 8}{2} = u^2$ separáveis

$u' = 8 + 2u^2$

$y' = x^2$

$\frac{1}{8 + 2u^2} u' = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4 + u^2} u' = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \frac{1}{1 + (\frac{u}{2})^2} u' = 2$

$\frac{1/2}{1 + (u/2)^2} u' = 4 \Rightarrow \frac{d}{du} \operatorname{arctg} \frac{u}{2} \Rightarrow \frac{d}{dx} \operatorname{arctg} \frac{u}{t}$

$\operatorname{arctg} \frac{u}{2} = 4x + c \Leftrightarrow \frac{u}{2} = \operatorname{tg}(4x + c) \Leftrightarrow$

$8x + 2y + 1 = 2\operatorname{tg}(4x + c) \Leftrightarrow 2y = 2\operatorname{tg}(4x + c) - 8x - 1$

$y = \operatorname{tg}(4x + c) - 4x - \frac{1}{2}$

10

$x^2y^3 + x(1 + y^2) \frac{dy}{dx} = 0$

exata ×
red. a exata
$\mu = \mu(x)$?
$\mu = \mu(y)$?

sug.

$(x, y) \longrightarrow \frac{1}{xy}$