TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2021/2022

Curso: LEEC

Ficha de Problemas nº 2

Equações Diferenciais Separáveis e Exactas

1 Exercícios Resolvidos

1. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias

(a) $y' = \frac{1-2x}{y}$ (b) $x^3 + (y+1)^2 \frac{dy}{dx} = 0$

(c) $xy + (1+x^2)y' = 0$ (d) $y' = 1 - x + y^2 - xy^2$

Resolução:

(a) Trata-se de uma equação separável equivalente à equação

$$yy' = 1 - 2x \quad \Leftrightarrow \quad \int y\, dy = \int (1-2x)\, dx + c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{2} = x - x^2 + c$$

Assim a solução geral da equação é dada por

$$y(x) = \sqrt{2(x - x^2 + c)} \quad \text{ou} \quad y(x) = -\sqrt{2(x - x^2 + c)}$$

com $c \in \mathbb{R}$

(b) Trata-se de uma equação separável equivalente à equação

$$(y+1)^2 \frac{dy}{dx} = -x^3 \quad \Leftrightarrow \quad \int (y+1)^2\, dy = -\int x^3\, dx + c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(y+1)^3}{3} = -\frac{x^4}{4} + c$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = \sqrt[3]{k - \frac{3x^4}{4}} - 1$$

com $k \in \mathbb{R}$.

(c) Para $y \neq 0$, a equação pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} = -\frac{x}{1+x^2} \quad &\Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{y}\,dy = -\int \frac{x}{1+x^2}\,dx + c \\ &\Leftrightarrow \quad \log|y| = -\frac{1}{2}\log(1+x^2) + c \\ &\Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{\pm e^c}{\sqrt{1+x^2}} \\ &\Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{k}{\sqrt{1+x^2}}\end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{R}$. Note-se que a função nula, $y(x) \equiv 0$ é também solução da equação diferencial.

(d) A equação pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned}y' = (1-x)(1+y^2) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{y'}{1+y^2} = 1-x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\Big(\int \frac{dy}{y^2+1}\Big) = 1-x \\ &\Leftrightarrow \quad \operatorname{arctg} y = x - \frac{x^2}{2} + c \quad \Leftrightarrow \quad y = \operatorname{tg}(x - \frac{x^2}{2} + c)\end{aligned}$$

2. Calcule a solução dos seguintes problemas de valor inicial.

$$(\mathbf{a})\ y' - 2xy = x \ , \ \ y(0) = 1 \qquad\qquad (\mathbf{b})\ \ \tfrac{du}{dt} = tu^3(1+t^2)^{-1/2}$$

Resolução:

(a) A equação é equivalente a

$$y' = 2xy + x \quad \Leftrightarrow \quad y' = x(1+2y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2y+1} = x$$

Trata-se de uma equação separável; integrando em ordem x

$$\int \frac{1}{1+2y}dy = \int x dx + c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\log|1+2y| = \frac{x^2}{2} + c \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 2y = ke^{x^2}$$

e a solução geral da equação é dada por

$$y(x) = \frac{ke^{x^2} - 1}{2}$$

Dado que $y(0) = 1$ conclui-se que $k = 3$ e a solução do (PVI) é

$$y(x) = \frac{3e^{x^2} - 1}{2}$$

(b) Trata-se de uma equação separável que pode ser escrita na forma

$$u^{-3}u' = t(1 + t^2)^{-1/2}$$

Integrando em ordem a t

$$\int u^{-3}du = \int t(1 + t^2)^{-1/2}dt + c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u^{-2}}{-2} = (1 + t^2)^{1/2} + c$$

pelo que a solução geral da equação é dada por

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{c - 2\sqrt{1 + t^2}}} \quad \text{ou} \quad u(t) = \frac{-1}{\sqrt{c - 2\sqrt{1 + t^2}}}$$

Dado que $u(0) = 1 > 0$ conclui-se que $c = 3$ e assim a solução do (PVI) é

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{1 + t^2}}}$$

3. Resolva o problema de valor inicial

$$\varphi(\theta)\varphi'(\theta) = \theta \qquad , \qquad \varphi(1) = \alpha$$

sendo α uma constante real. Determine para que valores de α é que a solução está definida em todo o $\mathbb{R}$.

Resolução:

Trata-se de uma equação separável, pelo que

$$\varphi\,\varphi' = \theta \Leftrightarrow \int \varphi\, d\varphi = \int \theta d\theta + c \Leftrightarrow \frac{\varphi^2}{2} = \frac{\theta^2}{2} + c \Leftrightarrow \varphi^2 = \theta^2 + c_1$$

Para determinar c_1, usamos o facto de $\varphi(1) = \alpha$, pelo que

$$c_1 = \alpha^2 - 1$$

e então, a solução do (PVI) é

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} \sqrt{\theta^2 + \alpha^2 - 1} & \text{se } \alpha \geq 0 \\ \\ -\sqrt{\theta^2 + \alpha^2 - 1} & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

Pretende-se agora determinar para que valores de α o intervalo máximo de existência de solução do PVI é $\mathbb{R}$. Note-se que, para tal, o domínio da função φ' terá que ser $\mathbb{R}$, pelo que

$$\theta^2 + \alpha^2 - 1 > 0 \qquad , \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

o que se verifica se $\alpha^2 - 1 > 0$, ou seja, se $|\alpha| > 1$.

4. Considere a equação diferencial separável

$$x' = x \operatorname{sen} t + x^2 \operatorname{sen} t$$

Determine a solução desta equação que satisfaz a condição inicial $x(\frac{\pi}{2}) = -2$, e determine o seu intervalo máximo de existência.

Resolução:

A equação pode ser escrita na forma

$$x' = (x + x^2) \operatorname{sen} t$$

Para $x \neq 0$ e $x \neq -1$ (podemos excluir estes dois casos visto que $x(t) \equiv 0$ e $x(t) \equiv -1$ são soluções constantes da equação que não verificam a condição inicial), tem-se

$$\frac{x'}{x + x^2} = \operatorname{sen} t \iff \int \left(\frac{1}{x^2 + x} \right) dx = \int \operatorname{sen} t \, dt + c$$

Fazendo a separação em fracções simples da função $\frac{1}{x^2+x}$, obtém-se

$$\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \int \operatorname{sen} t \, dt + c \iff \log \left| \frac{x}{x+1} \right| = -\cos t + c \iff \frac{x}{x+1} = k\, e^{-\cos t}$$

Visto $x(\frac{\pi}{2}) = -2$, temos que $k = 2$ e a solução do (PVI) é

$$x(t) = \frac{2\, e^{-\cos t}}{1 - 2\, e^{-\cos t}} = \frac{2}{e^{\cos t} - 2}$$

O domínio de diferenciabilidade da função $x(t)$ é

$$D = \{x \in \mathbb{R} \, : \, e^{\cos t} - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\pm \arccos(\log 2) + 2k\pi \, , \, k \in \mathbb{Z}\}$$

Teremos então que o intervalo máximo de existência de solução será o maior **intervalo** $I \subset D$, tal que $\pi/2 \in I$. Conclui-se

$$I \ = \ \left] \arccos(\log 2), -\arccos(\log 2) + 2\pi \right[$$

5. Considere a equação diferencial

$$\dot{y} = f(at + by + c)$$

em que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e a, b e c constantes reais com $b \neq 0$.

   a) Mostre que a substituição $v = at + by + c$, transforma a equação numa equação separável.
   b) Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\dot{y} = e^{2t+y-1} - 2 \quad , \quad y(0) = 1$$

   indicando o intervalo máximo de solução.

Resolução:

(a) Se $v = at + by + c$ e $b \neq 0$, então

$$y = \frac{v - at - c}{b}$$

pelo que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{b}\Big(\frac{dv}{dt} - a\Big)$$

Substituindo na equação

$$\frac{dv}{dt} - a = bf(v) \Leftrightarrow \frac{\dot{v}}{bf(v) + a} = 1$$

que é obviamente uma equação separável.

(b) Por (a), sendo $f(v) = e^v - 2$, com $v = 2t + y - 1$, obtém-se

$$\frac{\dot{v}}{e^v} = 1 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\Big(\int e^{-v} dv\Big) = 1 \Leftrightarrow -e^{-v} = t + k \Leftrightarrow v(t) = -\log(-t - k)$$

Desfazendo a mudança de variável

$$2t + y - 1 = -\log(-t - k) \Leftrightarrow y(t) = 1 - 2t - \log(-t - k)$$

Dado que $y(0) = 1$, obtem-se $k = -1$ e como tal a solução do PVI é

$$y(t) = 1 - 2t - \log(1 - t)$$

O domínio de diferenciabilidade da função $y(t)$ é

$$D = \{t \in \mathbb{R} \, : \, 1 - t > 0\} =]-\infty, 1[$$

o intervalo máximo de solução será o maior **intervalo** $I \subset D$, tal que $0 \in I$. Conclui-se que

$$I =]-\infty, 1[$$

6. Determine a solução da equação diferencial

$$\frac{d\,y}{d\,t} = \frac{t^2+3y^2}{2ty} \quad , \quad t>0$$

que verifica a condição inicial $y(1) = -1$ e indique o intervalo máximo de definição da solução.

Sugestão: Considere a mudança de varável $v = y/t$.

Resolução:

Fazendo $v = \dfrac{y}{t}$, ou seja $y = tv$, obtemos

$$\frac{d}{dt}(tv(t)) = \frac{t^2+3(tv)^2}{2t(tv)} \;\Leftrightarrow\; v + tv' = \frac{1+3v^2}{2v}$$

A equação é separável, e pode ser escrita na forma

$$\frac{2v}{1+v^2}v' = \frac{1}{t} \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dt}\Big(\int \frac{2v}{1+v^2}\,dv\Big) = \frac{1}{t} \;\Leftrightarrow\; \log(1+v^2) = \log t + c$$

pelo que

$$v^2(t) = kt - 1$$

Desfazendo a mudança de variável

$$y^2(t) = t^2(kt-1)$$

e dado que $y(1) = -1 < 0$, a solução do PVI é

$$y(t) = -\sqrt{t^2(2t-1)}$$

Para calcular o intervalo máximo de solução, note-se que, a equação diferencial faz sentido se $t \neq 0$ e $y(t) \neq 0$. Então, o intervalo máximo de solução, I, será o maior intervalo verificando

$t_0 = 1 \in I$

$0 \notin I$

$y(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Visto

$$y(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 0 \text{ ou } t = \frac{1}{2}$$

conclui-se que $I =]\frac{1}{2}, \infty[$.

7. Mostre que as seguintes equações são exacta e resolva-as:

(**a**) $(xe^y + y - x^2)\dfrac{dy}{dx} = 2xy - e^y - x$ (**b**) $y - x^3 + (y^3 + x)y' = 0$

(**c**) $2y^3 + 2 + 6xy^2\dfrac{dy}{dx} = 0$ (**d**) $\dfrac{y}{x} + 6x + (\log x - 2)\dfrac{dy}{dx} = 0$

Resolução:

(a) Note-se em primeiro lugar que a equação não é linear nem separável. Resta-nos investigar se será uma equação exacta (ou redutível a exacta). A equação pode ser escrita na forma

$$-2xy + e^y + x + (xe^y + y - x^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

Definindo

$$M(x,y) = -2xy + e^y + x \quad , \quad N(x,y) = xe^y + y - x^2$$

Dado que ambas as funções são de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, e

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -2x + e^y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

concluimos que se trata de uma equação exacta, pelo que existe $\Phi(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $\nabla\Phi = (M, N)$ e $\Phi(x,y) = C$ define implicitamente a solução da equação diferencial.

- **Cálculo de Φ**

  Atendendo a que $\nabla\Phi = (M, N)$ tem-se que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -2xy + e^y + x \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(x,y) = -x^2y + xe^y + \frac{x^2}{2} + c(y)$$

  Por outro lado

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = N \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(-x^2y + xe^y + \frac{x^2}{2} + c(y)\Big) = xe^y + y - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad c'(y) = y$$

  tem-se assim que $c(y) = \frac{y^2}{2} + c$ e

$$\Phi(x,y) = -x^2y + xe^y + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

- **Cálculo da solução geral da equação**

  Para M, N e Φ definidas acima

$$\begin{aligned} M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}y' = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \Phi(x,y) = c_2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2y + xe^y + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = k \end{aligned}$$

Ou seja as curvas de nível da função $\Phi(x,y)$ definem implicitamente a solução geral da equação diferencial.

(b) Note-se em primeiro lugar que a equação não é linear nem separável. Resta-nos investigar se será uma equação exacta (ou redutível a exacta). Definindo

$$M(x,y) = y - x^3 \quad , \quad N(x,y) = y^3 + x$$

Dado que ambas as funções são de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, e

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

concluimos que se trata de uma equação exacta, pelo que existe $\Phi(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $\nabla\Phi = (M,N)$ e $\Phi(x,y) = C$ define implicitamente a solução da equação diferencial.

- **Cálculo de Φ**

  Atendendo a que $\nabla\Phi = (M,N)$ tem-se que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = y - x^3 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(x,y) = xy - \frac{x^4}{4} + c(y)$$

  Por outro lado

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = N \quad \Leftrightarrow \quad x + c'(y) = y^3 + x \quad \Leftrightarrow \quad c'(y) = y^3$$

  tem-se assim que $c(y) = \frac{y^4}{4} + c$ e

$$\Phi(x,y) = xy - \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

- **Cálculo da solução geral da equação**

  Para M, N e Φ definidas acima

$$\begin{aligned} M(x,y) + N/x,y)y' = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \Phi(x,y) = c \\ &\Leftrightarrow \quad xy - \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} = k \end{aligned}$$

  Ou seja as curvas de nível da função $\Phi(x,y)$ definem implicitamente a solução geral da equação diferencial.

(c) Note-se em primeiro lugar que a equação não é linear mas é separável. Vamos resolvê-la como equação exacta mas aconselha-se o aluno a resolvê-la também como equação separável. Resta-nos investigar se será uma equação exacta (ou redutível a exacta). Definindo

$$M(x,y) = 2y^3 + 2 \quad , \quad N(x,y) = 6xy^2$$

Dado que ambas as funções são de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, e

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 6y^2 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

concluimos que se trata de uma equação exacta, pelo que existe $\Phi(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $\nabla\Phi = (M,N)$ e $\Phi(x,y) = C$ define implicitamente a solução da equação diferencial.

- **Cálculo de** Φ

  Atendendo a que $\nabla\Phi = (M,N)$ tem-se que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2y^3 + 2 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(x,y) = 2xy^3 + 2x + c(y)$$

  Por outro lado

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = N \quad \Leftrightarrow \quad 6xy^2 + c'(y) = 6xy^2 \quad \Leftrightarrow \quad c'(y) = 0$$

  tem-se assim que $c(y) = c$ e

$$\Phi(x,y) = 2xy^3 + 2x + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

- **Cálculo da solução geral da equação**

  Para M, N e Φ definidas acima

$$\begin{aligned} M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}y' = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \Phi(x,y) = c \\ &\Leftrightarrow \quad 2xy^3 + 2x = k \end{aligned}$$

  Ou seja as curvas de nível da função $\Phi(x,y)$ definem implicitamente a solução geral da equação diferencial. Dado que neste caso se consegue resolver a equação em ordem a y, obtemos a forma explícita da solução da equação diferencial

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{k-2x}{2x}} \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

(d) Note-se em primeiro lugar que a equação não é linear nem separável. Resta-nos investigar se será uma equação exacta (ou redutível a exacta). Definindo

$$M(x,y) = \frac{y}{x} + 6x \quad , \quad N(x,y) = \log x - 2$$

Dado que ambas as funções são de classe C^1 em $U = \{(x,y) \,:\, x > 0\,, y \in \mathbb{R}\}$, e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

concluimos que se trata de uma equação exacta, pelo que existe $\Phi(x,y) : U \to \mathbb{R}$, tal que $\nabla\Phi = (M,N)$ e $\Phi(x,y) = C$ define implicitamente a solução da equação diferencial.

- **Cálculo de Φ**
  Atendendo a que $\nabla\Phi = (M,N)$ tem-se que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{y}{x} + 6x \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(x,y) = y\log x + 3x^2 + c(y)$$

  Por outro lado

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = N \quad \Leftrightarrow \quad \log x + c'(y) = \log x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad c'(y) = -2$$

  tem-se assim que $c(y) = -2y + c$ e

$$\Phi(x,y) = y\log x + 3x^2 - 2y + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

- **Cálculo da solução geral da equação**
  Para M, N e Φ definidas acima

$$\begin{aligned} M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}y' = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \Phi(x,y) = c \\ &\Leftrightarrow \quad y\log x + 3x^2 - 2y = k \end{aligned}$$

  Ou seja as curvas de nível da função $\Phi(x,y)$ definem implicitamente a solução geral da equação diferencial. Dado que neste caso se consegue resolver a equação em ordem a y, obtemos a forma explícita da solução da equação diferencial

$$y(\log x - 2) + 3x^2 + k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{-3x^2 + k}{\log x - 2}$$

  em que $k \in \mathbb{R}$.

8. Considere a equação diferencial

$$\frac{y}{x} + \left(y^3 - \log x\right)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1}$$

a) Verifique que (1) tem um factor integrante da forma $\mu = \mu(y)$ e determine-o.

b) Prove que as soluções de (1) são dadas implicitamente por $\Phi(x, y) = C$, onde C é uma constante arbitrária e

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{y}\log x$$

c) Determine a solução de (1) que satisfaz a condição inicial $y(1) = \sqrt{2}$.

Resolução:

(a) Sendo

$$M(x, y) = \frac{y}{x} \qquad , \qquad N(x, y) = y^3 - \log x$$

é óbvio que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x} \neq \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{x}$$

pelo que teremos que investigar a existência de um factor integrante. Vamos averiguar se existirá $\mu(y)$ (como sugerido, tal que a equação

$$\mu(y)\frac{y}{x} + \mu(y)\left(y^3 - \log x\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta, isto é verifica

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(y)\frac{y}{x}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu(y)\left(y^3 - \log x\right)\Big)$$

Efectuando as derivadas

$$\mu'(y)\frac{y}{x} + \mu(y)\frac{1}{x} = -\mu(y)\frac{1}{x}$$

e para $x \neq 0$, $y \neq 0$ obtemos

$$\mu'(y) = -\frac{2}{y}\mu(y)$$

pelo que

$$\mu(y) = y^{-2}$$

é um factor integrante da equação.

(b) Pela alínea (a) a equação

$$\frac{1}{xy} + (y - \frac{\log(x)}{y^2})y' = 0$$

é exacta, pelo que existe $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ verifcando

$$\nabla\Phi(x,y) = \left(\frac{1}{xy}, y - \frac{\log(x)}{y^2}\right)$$

e $\Phi(x,y) = C$ define implicitamente a solução da equação diferencial. Para calcular Φ

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{1}{xy} \;\Leftrightarrow\; \Phi(x,y) = \frac{1}{y}\log x + c(y)$$

e

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = y - \frac{\log(x)}{y^2} \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{y^2}\log x + c'(y) = y - \frac{\log(x)}{y^2} \;\Leftrightarrow\; c(y) = \frac{y^2}{2} + c$$

e finalmente

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{y}\log x + \frac{y^2}{2} = C$$

define implicitamente a solução da equação diferencial como se queria mostrar.

(c) Dado que $y(1) = \sqrt{2}$, tem-se $C = 1$, e visto $N(1,\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \neq 0$, o Teorema da função Implícita garante existência e unicidade de solução do PVI, definida pela equação

$$\frac{1}{y}\log x + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$$

para x numa vizinhança de $x_0 = 1$.

9. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{4y^2 + 2x}$$

a) Mostre que esta equação tem um factor integrante $\mu = \mu(y)$.

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial $y(1) = 1$.

c) Determine o intervalo máximo de existência da solução que calculou na alínea anterior.

Resolução:

(a) A equação pode ser escrita na forma

$$y + (4y^2 + 2x)\frac{dy}{dx} = 0$$

Fazendo

$$M(x,y) = y \qquad , \qquad N(x,y) = 4y^2 + 2x$$

é óbvio que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 2$$

pelo que teremos que investigar a existência de um factor integrante. Vamos averiguar se existirá $\mu(y)$ (como sugerido), tal que a equação

$$\mu(y)y + \mu(y)\left(4y^2 + 2x\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta, isto é verifica

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(y)y\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu(y)\left(4y^2 + 2x\right)\Big)$$

Efectuando as derivadas

$$\mu'(y)y + \mu(y) = 2\mu(y)$$

e para $y \neq 0$ obtemos

$$\mu'(y) = \frac{1}{y}\mu(y)$$

pelo que

$$\mu(y) = y$$

é um factor integrante da equação.

(b) Pela alínea (a) a equação

$$y^2 + (4y^3 + 2xy)y' = 0$$

é exacta, pelo que existe $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ verifcando

$$\nabla\Phi(x, y) = (y^2, 4y^3 + 2xy)$$

e $\Phi(x, y) = C$ define implicitamente a solução da equação diferencial. Para calcular Φ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = y^2 \;\Leftrightarrow\; \Phi(x, y) = xy^2 + c(y)$$

e

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 4y^3 + 2xy \;\Leftrightarrow\; 2xy + c'(y) = 4y^3 + 2xy \;\Leftrightarrow\; c(y) = y^4 + c$$

e finalmente

$$\Phi(x, y) = xy^2 + y^4 = C$$

define implicitamente a solução da equação diferencial. Dado que $y(1) = 1$, tem-se que $C = 2$. Por outro lado $N(1, 1) = 6 \neq 0$, o Teorema da Função Implícita garante a existência de solução única do PVI, definida por

$$xy^2 + y^4 - 2 = 0 \tag{2}$$

para x numa vizinhança de $x_0 = 1$.

(c) Para calcular o intervalo máximo de solução, note-se que, resolvendo a equação (2) em ordem a y

$$y(x) = \sqrt{\frac{-x + \sqrt{x^2+8}}{2}}$$

(onde as escolhas dos ramos das raízes foi baseado no facto de os dados iniciais $x_0 = 1 > 0$ e $y_0 = 1 > 0$). Dado que $x^2 + 8 > 0$ e

$$-x + \sqrt{x^2+8} > 0 \qquad , \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

tem-se que o intervalo máximo de solução é $\mathbb{R}$.

10. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y^2\left(\dfrac{1}{x} + \log x\right) + 2y\log x \dfrac{dy}{dx} \; = \; 0 \\ \\ y(e) \; = \; -1 \end{cases}$$

Obtenha explicitamente a solução deste problema e determine o seu intervalo máximo de definição.

Resolução:

Trata-se de uma equação da forma

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0,$$

com $M(x,y) = y^2\left(\frac{1}{x} + \log x\right)$ e $N(x,y) = 2y\log x$. Estas funções estão definidas e são de classe C^1 no semi-plano

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0\}$$

Temos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2y}{x} + 2y\log x \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2y}{x},$$

pelo que a equação não é exacta. Multiplicando a equação por um factor integrante $\mu = \mu(x,y)$, obtém-se:

$$\mu(x,y)M(x,y) + \mu(x,y)N(x,y)y' = 0.$$

Para que esta equação seja exacta, μ deverá verificar

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N),$$

o que é equivalente a

$$y^2\left(\frac{1}{x}+\log x\right)\frac{\partial \mu}{\partial y}+\mu\left(\frac{2y}{x}+2y\log x\right)=2y\log x\frac{\partial \mu}{\partial x}+\mu\frac{2y}{x},$$

ou, ainda:

$$y^2\left(\frac{1}{x}+\log x\right)\frac{\partial \mu}{\partial y}-2y\log x\frac{\partial \mu}{\partial x}=-2y\log x\mu \tag{3}$$

Parece pois provável a existência de um factor integrante dependente apenas de x. De facto, admitindo que $\mu=\mu(x)$, então $\frac{\partial \mu}{\partial y}=0$, $\frac{\partial \mu}{\partial y}=\mu'(x)$, pelo que a equação (3) reduz-se a:

$$\mu'=\mu.$$

Podemos então tomar $\mu(x)=e^x$. Desta forma, a equação:

$$e^x\left(\frac{1}{x}+\log x\right)y^2+2ye^x\log x\frac{dy}{dx}=0$$

é exacta, e portanto existe $F(x,y)$ tal que esta mesma equação se pode escrever:

$$\frac{d}{dx}F(x,y(x))=0.$$

F é então o potencial do campo gradiente $\left(e^x\left(\frac{1}{x}+\log x\right)y^2, 2ye^x\log x\right)$. Assim sendo:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2ye^x\log x.$$

Integrando (em ordem a y), obtém-se:

$$F(x,y)=y^2e^x\log x+h(x). \tag{4}$$

Por outro lado, como

$$\frac{\partial F}{\partial x}=y^2e^x\left(\frac{1}{x}+\log x\right)+h'(x)=e^x\left(\frac{1}{x}+\log x\right)y^2,$$

temos $h'(x)=0$, pelo que se pode tomar $h(x)=0$ em (4). A solução geral da equação diferencial é então dada implicitamente por:

$$y^2e^x\log x=C, \quad \text{com } C\in\mathbb{R}.$$

Da condição inicial $y(e) = -1$, resulta que $C = e^e$.

Como $\log x \neq 0$ para x numa vizinhança de e, podemos dividir por $e^x \log x$ e obter (escolhendo o sinal de acordo com a condição inicial):

$$y(x) = -\sqrt{\frac{e^e}{e^x \log x}} = -\sqrt{\frac{e^{e-x}}{\log x}}. \tag{5}$$

Esta expressão define uma função continuamente diferenciável em $]1, +\infty[$ e satisfaz a forma implícita da solução nesse intervalo. De acordo com (5), temos que a solução explode quando $x \to 1$, pelo que $]1, +\infty[$ é mesmo o intervalo máximo de solução.

11. Considere a equação diferencial ordinária

$$\left(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3\right) + \left(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2\right)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{6}$$

a) Mostre que (6) tem um factor integrante do tipo $\mu = \mu(xy)$.

b) Mostre que a solução de (6) com condição inicial $y(-1) = 1$ é dada implicitamente pela expressão $x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 = 1$.

c) Determine o polinómio de Taylor de segunda ordem, no ponto -1, da solução dada implicitamente na alínea anterior.

Resolução:

(a) Admitindo que a equação (6) admite um factor integrante do tipo $\mu = \mu(xy)$, tem-se que

$$\mu(xy)\left(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3\right) + \mu(xy)\left(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

é uma equação exacta, pelo que

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(xy)\left(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3\right)\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu(xy)\left(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2\right)\Big)$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial y}\mu(xy) = \mu'(xy)\frac{\partial}{\partial y}(xy) = x\mu'(xy)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu(xy) = \mu'(xy)\frac{\partial}{\partial}(xy) = y\mu'(xy)$$

tem-se

$$\begin{aligned} \mu'(xy)x\left(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3\right) + \mu(xy)(4x^2 + 6xy + 6y^2) &= \\ \mu'(xy)y\left(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2\right) + \mu(xy)(6x^2 + 6xy + 4y^2) & \end{aligned}$$

Fazendo $v = xy$, obtém-se então

$$\mu'(v) = \frac{1}{v}\mu(v) \ \Leftrightarrow\ \mu(v) = v \ \Leftrightarrow\ \mu(xy) = xy$$

Por construção a equação

$$xy\left(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3\right) + xy\left(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta, pelo que existe $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla\Phi(x,y) = (4x^3y^2 + 3x^2y^3 + 2xy^4, 2x^4y + 3x^3y^2 + 4x^2y^3)$$

e $\Phi(x,y) = C$ define implicitamente a solução da equação. Para calcular Φ,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 4x^3y^2 + 3x^2y^3 + 2xy^4 \ \Rightarrow\ \Phi(x,y) = x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + c(y)$$

e

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 2x^4y + 3x^3y^2 + 4x^2y^3 \ \Rightarrow\ 2x^4y + 3x^3y^2 + 4x^2y^3 + c'(y) = 2x^4y + 3x^3y^2 + 4x^2y^3$$

o que implica $c(y) = c$. Tem-se então

$$\Phi(x,y) = x^4y^3 + x^3y^3 + x^2y^4 = C$$

define implicitamente a solução da equação diferencial. Finalmente, visto $y(-1) = 1$ e $N(-1,1) = -3 \neq 0$, o Teorema da Função Implícita garante a existência de solução única de (6) definida por

$$x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 - 1 = 0$$

para x numa vizinhança de $x_0 = -1$ como se queria mostrar.

(c) O polinómio de Taylor de segunda ordem pedido, será

$$P_2(x) = y(-1) + y'(-1)(x+1) + y''(-1)\frac{(x+1)^2}{2}$$

É dado que $y(-1) = 1$, e atendendo a que

$$y'(x) = \frac{4x^2y + 3xy^2 + 2y^3}{2x^3 + 3x^2y + 4xy^2}$$

para todo (x,y) em $\mathbb{R}^2$ que não anule $2x^3 + 3x^2y + 4xy^2$, tem-se em particular que

$$y'(-1) = \left.\frac{4x^2y + 3xy^2 + 2y^3}{2x^3 + 3x^2y + 4xy^2}\right|_{(x,y)=(-1,1)} = -1$$

Finalmente, derivando (7) em ordem a x

$$y''(x) = \frac{(8xy + 4x^2y' + 3y^2 + 6xyy' + 6y^2y')(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2)}{(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2)^2} - $$
$$- \frac{(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3)(6x^2 + 6xy + 3x^2y' + 4y^2 + 8xyy')}{(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2)^2}$$

Sabendo que se $x = -1$, $y = 1$ e $y' = -1$, tem-se então

$$y''(-1) = -6$$

e

$$P_2(x) = 1 - (x+1) - 6\frac{(x+1)^2}{2}$$

12. Sejam f e g funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$,

   (a) Determine todas as funções f que tornam exata a equação diferencial

   $$y^2 \operatorname{sen} x + yf(x)\frac{dy}{dx} = 0.$$

   (b) Determine todas as possíveis funções g, de modo que a equação

   $$g(x)\frac{dy}{dx} + y + x = 0$$

   admite $\mu(x) = x$ como factor integrante.

   (c) Sendo $a \in \mathbb{R}$, a equação

   $$e^x \sec y - \operatorname{tg} y + y' = 0$$

   admite um factor integrante da forma $\mu(x, y) = e^{ax} \cos y$. Determine a e resolva a equação.

Resolução:

(a) Sendo

$$M(x, y) = y^2 \operatorname{sen} x \quad , \quad N(x, y) = yf(x)$$

que são funções de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$, a equação será exacta sse para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad 2y \operatorname{sen} x = yf'(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = -2\cos x + c$$

com $c \in \mathbb{R}$.

(b) Sendo $\mu(x) = x$ um factor integrante, significa que a equação

$$xg(x)\frac{dy}{dx} + yx + x^2 = 0$$

é uma equação exacta. Então

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(yx+x^2\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(xg(x)\Big) \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{\partial}{\partial x}\Big(xg(x)\Big) \quad\Leftrightarrow\quad xg(x) = \frac{x^2}{2}+c \quad\Leftrightarrow\quad g(x) = \frac{x}{2}+\frac{c}{x}$$

com $c \in \mathbb{R}$.

(c) Sendo $\mu(x,y)$ um factor integrante da equação tem.se que a equação

$$e^{ax}\cos y(e^x \sec y - \operatorname{tg} y) + e^{ax}\cos y y' = 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{(a+1)x} - e^{ax}\operatorname{sen} y + e^{ax}\cos y y' = 0$$

é exacta. Ou seja

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(e^{(a+1)x} - e^{ax}\operatorname{sen} y\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(e^{ax}\cos y\Big) \quad\Leftrightarrow\quad -e^{ax}\cos y = ae^{ax}\cos y$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Para que esta igualdade se verifique $a = -1$ e assim $\mu(x,y) = e^{-x}\cos y$ e a equação

$$1 - e^{-x}\operatorname{sen} y + e^{-x}\cos y y' = 0$$

é exacta. Então, sendo

$$M(x,y) = 1 - e^{-x}\operatorname{sen} y \quad , \quad N(x,y) = e^{-x}\cos y$$

existe $\Phi(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $\nabla\Phi = (M,N)$ e $\Phi(x,y) = C$ define implicitamente a solução da equação diferencial.

- **Cálculo de Φ**

  Atendendo a que $\nabla\Phi = (M,N)$ tem-se que:

  $$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 1 - e^{-x}\operatorname{sen} y \quad\Leftrightarrow\quad \Phi(x,y) = x + e^{-x}\operatorname{sen} y + c(y)$$

  Por outro lado

  $$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = N \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(x + e^{-x}\operatorname{sen} y + c(y)\Big) = e^{-x}\cos y \quad\Leftrightarrow\quad c'(y) = 0$$

  tem-se assim que $c(y) = c$ e

  $$\Phi(x,y) = x + e^{-x}\operatorname{sen} y + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

- **Cálculo da solução geral da equação**

  Para M, N e Φ definidas acima

$$
\begin{aligned}
M(x,y)+N(x,y)y'=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y'=0\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y)=0\\
&\Leftrightarrow \quad \Phi(x,y)=c\\
&\Leftrightarrow \quad x+e^{-x}\operatorname{sen}y=k
\end{aligned}
$$

  Ou seja as curvas de nível da função $\Phi(x,y)$ definem implicitamente a solução geral da equação diferencial. Resolvendo em ordem a y obtem-se a solução geral explícita

$$y(x)=\arcsin\Big(e^{x}(k-x)\Big) \quad , \quad k\in\mathbb{R}$$

2 Exercícios Propostos

1. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias

(a) $\dfrac{d\,y}{d\,x}=xy^2$ (b) $y'=\dfrac{y\cos x}{1+2y^2}$ (c) $\dfrac{d\,y}{d\,x}=\dfrac{3x^2+2x-4}{2y-2}$

(d) $y'=1+x+y^2+xy^2$ (e) $x\dfrac{d\,v}{d\,x}=\dfrac{1-4v^2}{3v}$ (f) $y'=y\log(y)$

2. Determine a solução dos seguintes problemas de valor inicial:

(a $\dfrac{d\,y}{d\,x}=y(3-x)\,,\;\; y(0)=5$ (b) $\dfrac{d\,y}{d\,x}=2x\cos^2 y\,,\;\; y(0)=\dfrac{\pi}{4}$

(c) $\dfrac{d\,y}{d\,t}=1+t^2+y^2+t^2y^2\,,\;\; y(0)=1$ (d) $\dfrac{d\,y}{d\,x}=\dfrac{\operatorname{sen}x}{\log y}\,,\;\; y(\pi)=e$

3. Considere a equação diferencial separável $x\,e^{y}\operatorname{sen}x-y\,y'=0$. Determine a solução (na forma implícita) desta equação que satisfaz a condição inicial $y(\frac{\pi}{2})=-1$.

4. Resolva as seguintes equações diferenciais efectuando a mudança de variável sugerida no problema 5 da secção anterior.

$$(\mathbf{a})\; y'=(8x+2y+1)^2 \qquad (\mathbf{b})\; 2x-y+(4x-2y+3)\frac{dy}{dx}=0.$$

5. Considere uma população num ecosistema, $P(t)$, cujo crescimento é proporcional a $P(t)$ e à quantidade de recursos disponíveis. A quantidade de recursos disponíveis é proporcional a $\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right)$, onde K é a *capacidade de carga* (a população máxima que os recursos do ecosistema conseguem suportar). A função $P(t)$ evolui de acordo com a *equação logística*:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

Admitindo que $P(0) = P_0 \geq 0$.

a) Sendo $x(t) = \frac{P(t)}{K}$ e $x_0 = \frac{P_0}{K}$, escreva o problema de valor inicial satisfeito por $x(t)$ e resolva-o.

b) Determine $P(t)$ para qualquer $t \geq 0$, e calcule o $\lim_{t\to\infty} P(t)$. Esboce os gráficos das soluções obtidas nos casos $P_0 = 0$, $0 < P_0 < K$, $P_0 = K$ e $P_0 > K$.

6. Determine a solução da equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2x^4 + t^4}{x^3 t} \quad , \quad t > 0 \quad \text{e} \quad x > 0$$

que verifica a condição inicial $x(1) = 1$ e indique o intervalo máximo de definição da solução.

Sugestão: Considere a mudança de varável $v = x/t$.

7. Mostre que qualquer equação separável,

$$M(x) + N(y)y' = 0$$

é exata.

8. Determine a solução dos problemas de Cauchy

(a) $xy^2 + x + yx^2y' = 0$, $y(1) = 1$ **(b)** $\cos y + (y^2 - x \operatorname{sen} y)y' = 0$, $y(0) = 1$

(c) $2xy - 3x^2 + (x^2 - 2y)y' = 0$, $y(0) = -1$

(d) $\cos x - x \operatorname{sen} x + y^2 + 2xyy' = 0 \quad , \quad y(\pi) = 1$

9. Determine o factor integrante e a solução de cada um dos seguintes problemas de valor inicial:

(a) $y - (x + 6y^2)y' = 0$, $y(1) = 1$ **(b)** $5x^2 - y^2 + 2yy' = 0$, $y(0) = -3$

(c) $x + y + \operatorname{tg}(x)y' = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = -1$ **(d)** $2y + (x - \operatorname{sen}\sqrt{y})y' = 0$, $y(2) = \pi^2$

10. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{ye^y - 2x}$$

(a) Mostre que esta equação tem um factor integrante $\mu = \mu(y)$.

(b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial $y(0) = 1$.

11. Considere a equação diferencial

$$3y^2 + 5x^2y + (3xy + 2x^3)\frac{dy}{dx} \ = \ 0$$

(a) Determine os valores de inteiros p e q de modo a que $\mu(x, y) = x^p y^q$ seja um factor integrante da equação.

(b) Determine a solução da equação que verifica $y(1) = -1$.

12. Mostre que as seguintes equações diferenciais não são nem exactas nem redutíveis a exacta com fatores integrantes só dependendo de x ou de y. Mostre que admitem factor integrante da forma indicada, determine-o e resolva as equações.

(a) $x^2y^3 + x(1 + y^2)y' = 0$, com $\mu(x, y) = \mu(xy)$

(b) $x^2 + y^2 - x - y\dfrac{dy}{dx} = 0$, com $\mu(x, y) = \mu(x^2 + y^2)$

Soluções

1. **(a)** $y(x) = \frac{2}{C-x^2}$, $C \in \mathbb{R}$ ou $y(x) = 0$ **(b)** $ye^{y^2} = Ke^{\operatorname{sen} x}$, $K \in \mathbb{R}$
(c) $y(x) = 1 + \sqrt{x^3 + x^2 - 4x + C}$ ou $y(x) = 1 - \sqrt{x^3 + x^2 - 4x + C}$, $C \in \mathbb{R}$
(d) $y(x) = \operatorname{tg}(x - \frac{x^2}{2} + C)$, $C \in \mathbb{R}$ **(e)** $4v^2 - 1 = Cx^{-8/3}$, $C \in \mathbb{R}$
(f) $y(t) = e^{Ke^t}$, $K \in \mathbb{R}$

2. **(a)** $y(x) = 5e^{3x-x^2}$ **(b)** $y(x) = \operatorname{arctg}(x^2 + 1)$ **(c)** $y(t) = \operatorname{tg}(1 + \frac{t^3}{3} + \frac{\pi}{4})$
(d) $y(1 - \log y) = 1 + \cos x$

3. $(1 + y)e^{-y} = x \cos x - \operatorname{sen} x + 1$

4. **(a)** $8x + 2y + 1 = 2 \operatorname{tg}(4x + c)$ **(b)** $5x + 10y + c = 3 \log |10x - 5y + 6|$.

5. **a)** $x' = kx(1 - x)$, $x(0) = x_0$, $x(t) = \frac{x_0 e^{rt}}{1+x_0(e^{rt}-1)}$, para $t \in \mathbb{R}$.
b) $P(t) = \frac{KP_0 e^{rt}}{K+P_0(e^{rt}-1)}$.

6. $y(x) = t\sqrt[4]{2t^4 - 1}$ e $I_{\text{Max}} =]\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, +\infty[$

7.

8. **(a)** $y(x) = \sqrt{\frac{2-x^2}{x^2}}$ **(b)** $3x \cos y + y^3 - 1 = 0$ **(c)** $y(x) = \frac{x^2-\sqrt{x^4-4x^3+4}}{2}$
(d) $y(x) = \sqrt{-\cos x}$

9. **(a)** $\mu(y) = y^{-2}$; $y(x) = \frac{5+\sqrt{25+24x}}{12}$ **(b)** $\mu(x) = e^{-x}$; $y(x) = -\sqrt{5(x^2 + 2x + 2) - e^x}$
(c) $\mu(x) = \cos x$; $y(x) = \frac{\frac{\pi}{1}-1-x \operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x}$ **(d)** $\mu(y) = 1/\sqrt{y}$; $x\sqrt{y} + \cos\sqrt{y} = 2\pi - 1$

10. **(a)** $\mu(y) = y$ **(b)** $xy^2 - (y^2 - 2y + 2)e^y = -2$

11. **(a)** $p = 2$ e $q = 1$ **(b)** $y(x) = -x^2$.

12. **(a)** $\mu(x, y) = \frac{1}{xy^3}$, Sol: $x^2 + 2 \log |y| - y - 2 = c$ ou $y \equiv 0$ **(b)** $\mu(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1}$,
Sol. $y(x) = \sqrt{ce^{2x} - x^2}$ ou $y(x) = -\sqrt{ce^{2x} - x^2}$