

NOME: \_\_\_\_\_ NÚMERO: \_\_\_\_\_

## PARTE I - Questões de Escolha Múltipla

Preencha as respostas na tabela (usando apenas letras maiúsculas). Se nenhuma opção servir, escreva **NENHUMA**. Se pretender alterar a sua resposta, risque e escreva ao lado a sua nova opção. Todas as questões de escolha múltipla valem 0.25 valores. As questões de escolha múltipla não respondidas são cotadas com 0 valores, mas por cada resposta errada são descontados 0.25/4 valores.

Questão	1	2	3	4	5	6	7	8
Resposta								

1. Suponha que após um conjunto de iterações do algoritmo da **união rápida ponderada (ou equilibrada)** se obteve a tabela que abaixo se apresenta.

0	2	2	0	0	3	8	2	8	10	8	11
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	---	----

Indique quantos conjuntos estão formados.

A. 4	B. 5	C. 6	D. 7
------	------	------	------

2. Considere de novo a tabela da Questão 1 e suponha que, continuando a utilizar o algoritmo da **união rápida ponderada (ou equilibrada)**, se introduz a ligação para o par (7; 10). Qual das tabelas indicadas abaixo se obtém?

A.	0	2	2	0	0	3	8	10	8	10	8	11
C.	0	2	8	0	0	3	8	2	8	10	8	11
B.	0	2	2	0	0	3	8	2	8	10	8	11
D.	0	2	2	0	0	3	8	2	2	10	8	11

3. Considere a seguinte tabela (1ª linha) sobre a qual são listados alguns passos executados por um algoritmo de ordenação (restantes linhas).

[Nota: se não há alterações num dado passo a tabela é repetida].

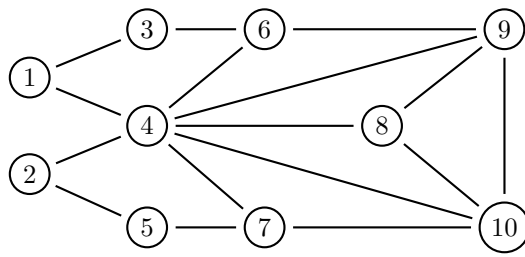
3	2	10	9	9	8	5	11	5	4	6	1
1	2	10	9	9	8	5	11	5	4	6	3
1	2	10	9	9	8	5	11	5	4	6	3
1	2	3	9	9	8	5	11	5	4	6	10
1	2	3	9	9	8	5	11	5	4	6	10
1	2	3	9	9	8	5	6	5	4	10	11
1	2	3	4	9	8	5	6	5	9	10	11
1	2	3	4	9	8	5	6	5	9	10	11

Qual a tabela que se obtém na próxima iteração?

A.	1	2	3	4	5	8	9	6	5	9	10	11
C.	1	2	3	4	8	9	5	6	5	9	10	11
B.	1	2	3	4	5	8	5	6	9	9	10	11
D.	1	2	3	4	5	5	9	6	8	9	10	11

4. Considere o grafo  $G$  indicado em baixo à esquerda e assuma que o mesmo não é direccionado mas é ponderado, como se indica do lado direito do grafo. Relativamente à MST deste grafo, e **sem a**

calcular, indique qual das afirmações é falsa.



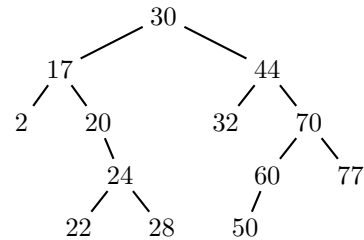
$4 \leftrightarrow 6$ , $4 \leftrightarrow 8$	1
$1 \leftrightarrow 3$ , $8 \leftrightarrow 9$	2
$6 \leftrightarrow 9$	3
$5 \leftrightarrow 7$ , $4 \leftrightarrow 9$ , $7 \leftrightarrow 10$	4
$2 \leftrightarrow 4$	5
$1 \leftrightarrow 4$ , $9 \leftrightarrow 10$	6
$2 \leftrightarrow 5$ , $4 \leftrightarrow 10$	7
$4 \leftrightarrow 7$ , $8 \leftrightarrow 10$	8
$3 \leftrightarrow 6$	9

- A. Considerando as arestas incidentes ao vértice 10, a aresta 7-10 pertence de certeza à MST.  
 B. Considerando as arestas 4-8, 4-10 e 8-10, a aresta 8-10 não pertence de certeza à MST.  
 C. Seja  $G'$  o grafo que se obtém adicionando a aresta 5-10 com peso 5. A MST de  $G'$  é igual à MST de  $G$ .  
 D. Considerando todas as arestas incidentes do par de vértices 5 e 7, a aresta 7-10 pode não pertencer à MST.

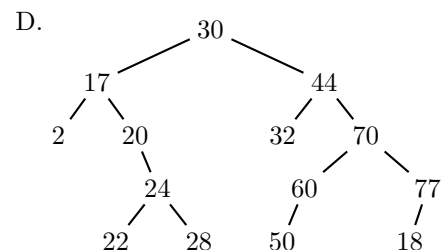
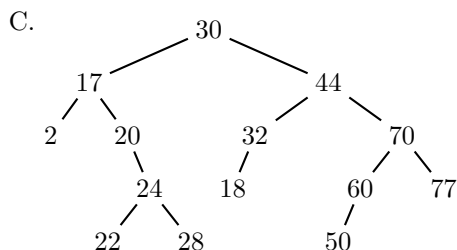
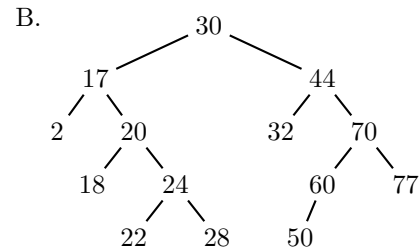
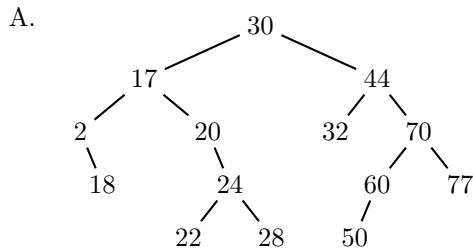
5. Considere de novo o grafo  $G$  da Questão 4. Qual das seguintes afirmações é falsa?

- A. Adicionando a aresta 6-7, o grafo tem um caminho de Euler entre 8 e 6.  
 B. Adicionando a aresta 7-8, o grafo tem um caminho de Euler entre 4 e 6.  
 C. Retirando a aresta 4-6, o grafo tem um caminho de Euler entre 7 e 8.  
 D. Retirando a aresta 4-7, o grafo tem um caminho de Euler entre 6 e 8.

6. Considere a árvore **binária** e **ordenada** representada na figura à direita.



Qual das árvores abaixo se obtém se se inserir o número 18?



7. Suponha que numa tabela de dispersão ("hash table") são introduzidos os seguintes números: {1141, 347, 41, 2041, 347, 747, 428, 321, 347, 18, 2041, 641}. Assuma que a função de dispersão (para indexação na tabela) usa os últimos dois dígitos de cada número, que números repetidos são descartados quando tal é verificado e que colisões são resolvidas por inserção numa **lista simples**. Qual das afirmações é verdadeira?

- A. Realizam-se 11 comparações com inserção no início e 11 com inserção no final.
- B. Realizam-se 11 comparações com inserção no início e 12 com inserção no final.
- C. Realizam-se 12 comparações com inserção no início e 11 com inserção no final.
- D. Realizam-se 12 comparações com inserção no início e 12 com inserção no final.

8. Considere o seguinte acervo (“heap”), no qual a prioridade é mais elevada quanto menor for o valor.

7	9	14	16	25	26	20	17	19	36	30	31	40	22
---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Suponha que execute sequencialmente o seguinte conjunto de operações, repondo sempre a propriedade do acervo após cada uma: (i) **Inserir** no acervo o valor 8; (ii) **Subir** a prioridade do valor 16 para 4; (iii) **Baixar** a prioridade do valor 26 para 29; (iv) **Subir** a prioridade do valor 30 para 2. Qual das seguintes afirmações é **falsa**?

- A. O número 2 fica na posição de índice 0 e o 14 no índice 6.
- B. O número 25 fica na posição de índice 10 e o 4 no índice 1.
- C. O número 9 fica na posição de índice 3 e o 20 no índice 14.
- D. O número 8 fica na posição de índice 2 e o 7 no índice 3.

## PARTE II - Questões de Desenvolvimento

Responda a cada uma das questões de desenvolvimento em **folhas de exame separadas** e devidamente identificadas com nome e número.

[2.0]

9. O Governo do Zizuzil pretende construir um conjunto de vias rápidas para ligar as  $N$  principais cidades do país. Para tal abriu um concurso internacional para determinar quem é capaz de apresentar a solução menos dispendiosa (i.e. de menor custo total) que garanta esse objectivo. A todos os concorrentes é facultada o resultado de um trabalho prévio efectuado pelo Governo, na forma de uma tabela, de dimensão  $M, M > N, M \in \mathcal{O}(N)$ , em que cada entrada contém o custo estimado de construção de uma via, para todas as vias cuja construção seja possível (o conjunto de vias incluído na tabela é suficiente para resolver o problema e contém além disso vias redundantes). Sabe-se que o governo do Zizuzil é apaixonado pela algoritmia e que escolherá dentro das soluções de menor custo apresentadas, a solução que for obtida da forma mais eficiente.

[1.5]

a) Descreva de forma detalhada, como se proporia resolver o problema de forma a ganhar o concurso internacional.

**Nota:** não é preciso escrever qualquer código.

**Sugestão:** tente relacionar o problema com outro que já tenha estudado (nas aulas).

[0.5]

b) Indique justificando qual a complexidade do seu algoritmo em função de  $N$  e porque pensa que pode com ele ganhar o concurso internacional (i.e. porque é que acha que a sua solução é a mais eficiente para o problema indicado).

[3.0]

10. As árvores binárias balanceadas têm múltiplas aplicações em computação devido ao seu eficiente manuseamento.

Neste contexto, uma árvore diz-se balanceada AVL se e só se em todos os seus nós a diferença entre as alturas das suas sub-árvores esquerda e direita for igual ou inferior a 1.

```
typedef struct _BTree {
    Item node;
    _BTree * esquerda;
    _BTree * direita;
} BTree;
```

[1.75]

a) Escreva uma função que dada a raiz de uma sub-árvore, determina se a mesma é balanceada AVL ou não. Assuma que os nós da árvore são do tipo `BTree` definido acima. A sua função deve retornar `-1` se a sub-árvore analisada não for balanceada AVL. Qualquer valor inteiro não negativo significa o contrário (que é balanceada).

**Sugestão:** calcule em cada nó, recursivamente, a altura das sub-árvores esquerda e direita; se a diferença entre as alturas for igual ou inferior a um, retorne a maior das alturas, caso contrário retorne `-1`.

- [0.5] b) Indique, justificando, no pior caso, qual a complexidade da função que escreveu, em função do número de nós da árvore  $N$ , ou de outro parâmetro que ache relevante.
- [0.75] c) Para evitar chamar esta função sobre toda a árvore, uma solução é guardar em cada nó uma medida da altura das suas sub-árvores esquerda e direita. Assuma que a estrutura do nó é alterada para guardar um elemento adicional, `int height` que indica a altura máxima das suas sub-árvores, esquerda ou direita. Sem escrever qualquer código diga, de forma resumida como alteraria as funções de inserção e remoção de nós da árvore para manter este valor actualizado.
- [3.0] 11. Considere de novo o grafo da Questão 4.
- [2.5] a) Tomando o vértice 8 como fonte aplique o algoritmo de Prim. Na sua resolução explicita de forma clara e precisa os cálculos intermédios, indicando a posição de cada vértice na fila prioritária após cada iteração. No final deverá apresentar a árvore que calculou, bem como qual o custo total.
- [0.5] b) Que nome tem a árvore que calculou e para que pode servir em geral esse tipo de árvore?
- [2.0] 12. Suponha que pretende calcular uma grandeza, função de um parâmetro inteiro, que se caracteriza pela seguinte recorrência

$$Z(n) = \alpha Z(n-1) + \beta Z(n-2) + \gamma Z(n-3),$$

em que  $Z(0) = Z(1) = Z(2) = 1$ .

- [1.5] a) Escreva o código que lhe permita calcular aquela grandeza, dado o valor de  $n$ , que é passado como argumento à sua função. Compete-lhe decidir se implementa a função em formato iterativo ou recursivo, mas deverá preocupar-se com a eficiência da função que escrever. Ou seja, a sua implementação deverá ser o mais eficiente possível do ponto de vista do tempo de computação.  
**Nota:** Os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  assumem-se conhecidos, de valor real e disponíveis em variáveis globais. A grandeza que pretende calcular é de valor real.
- [0.5] b) Indique de forma justificada qual a complexidade da função que implementou. Caso não tenha escrito o código, indique qual a complexidade que esperaria atingir na sua implementação e porquê. Forneça todos os elementos que entender necessários para suportar a sua resposta.