TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral 3
1º Semestre 2021/2022

Ficha de Problemas nº 4

Exponencial de Matriz. Equações Vectoriais de 1ª Ordem, Equações de ordem n - caso não homogéneo

1 Exercícios Resolvidos

1. Determine e^{At}, sendo A

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ (e) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(f) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (g) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Resolução:

(a) A matriz A é uma matriz diagonal, pelo que (Ex. 8 a) da Ficha 9)

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}$$

(b) A matriz A é uma matriz triangular superior. Resolvemos o prblema $\mathbf{X}' = a\mathbf{X}$, (Ex. 8 b) da Ficha 9) obteve-se

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} ae^{2t} \\ -\frac{3a}{2}e^{2t} + be^{-4t} \\ -ae^{2t} + bte^{-4t} + ce^{-4t} \end{bmatrix}$$

Escrevendo a solução na forma $\mathbf{X}(t) = S(t)C$, em que C é uma matriz 3×1 de constantes

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}e^{2t} & e^{-4t} & 0 \\ -e^{2t} & te^{-4t} & e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

obtém-se uma (MSF)

$$S(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}e^{2t} & e^{-4t} & 0 \\ -e^{2t} & te^{-4t} & e^{-4t} \end{bmatrix}$$

Calculando em $t = 0$

$$S(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq Id_3$$

Tem-se então que

$$\begin{aligned} e^{At} &= S(t)S^{-1}(0) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}e^{2t} & e^{-4t} & 0 \\ -e^{2t} & te^{-4t} & e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}e^{2t} & e^{-4t} & 0 \\ -e^{2t} & te^{-4t} & e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}e^{2t} + \frac{3}{2}e^{-4t} & e^{-4t} & 0 \\ -e^{2t} + \frac{3}{2}te^{-4t} + e^{-4t} & te^{-4t} & e^{-4t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(c) Resolvemos o prblema $\mathbf{X}' = a\mathbf{X}$, (Ex. 10 b) da Ficha 9) e obteve-se

$$\mathbf{X}(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} -3a + b(t-3) \\ a + bt \end{bmatrix}$$

Escrevendo a solução na forma $\mathbf{X}(t) = S(t)C$, em que C é uma matriz 2×1 de constantes

$$\mathbf{X}(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} -3 & t-3 \\ 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

obtem-se a matriz solução fundamental (MSF)

$$S(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} -3 & t-3 \\ 1 & t \end{bmatrix}$$

Calculando em $t = 0$

$$S(0) = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq Id_2$$

Tem-se então que

$$\begin{aligned} e^{At} &= S(t)S^{-1}(0) = e^{4t}\begin{bmatrix} 1 & t-3 \\ 1 & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{e^{4t}}{3}\begin{bmatrix} 1 & t-3 \\ 1 & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{e^{4t}}{3}\begin{bmatrix} 3-t & -3t \\ -t & 3-3t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(d) Vamos começar por determinar uma matriz solução fundamenteal associada à equação $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$. Fazendo $\mathbf{X} = (x, y)$ e escrevendo na forma de sistema, tem-se que

$$\begin{cases} x' = -3x + 2y \\ y' = -5x + 3y \end{cases}$$

Resolvendo a primeira equação em ordem a y obtem-se

$$y = \frac{x' + 3x}{2} \tag{1}$$

Substituindo na segunda equação, obtemos a equação de segunda ordem em x

$$\begin{aligned} \Big(\frac{x'+3x}{2}\Big)' = -5x + 3\Big(\frac{x'+3x}{2}\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad x'' + x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (D^2+1)x = 0 \end{aligned}$$

e assim a solução geral da equação é

$$x(t) = a\cos t + b\,\mathrm{sen}\, t$$

Substituindo em (**??**) pbtemos

$$y(t) = \frac{1}{2}\Big((a\cos t + b\,\mathrm{sen}\, t)' + 3(a\cos t + b\,\mathrm{sen}\, t)\Big) = \frac{1}{3}\Big(a(-\mathrm{sen}\, t + 3\cos t) + b(\cos t + 3\,\mathrm{sen}\, t)\Big)$$

A solução do sistema é

$$\mathbf{X}(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2a\cos t + 2b\,\mathrm{sen}\, t \\ a(-\mathrm{sen}\, t + 3\cos t) + b(\cos t + 3\,\mathrm{sen}\, t) \end{bmatrix}$$

com a e b constantes reais. Escrevendo a solução na forma $\mathbf{X}(t) = S(t)C$, em que C é uma matriz 2×1 de constantes

$$\mathbf{X}(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\cos t & 2\,\mathrm{sen}\, t \\ -\mathrm{sen}\, t + 3\cos t & \cos t + 3\,\mathrm{sen}\, t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

obtem-se umaa (MSF)

$$S(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\cos t & 2\operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t + 3\cos t & \cos t + 3\operatorname{sen} t \end{bmatrix}$$

Calculando em $t = 0$

$$S(0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \neq Id_2$$

Tem-se então que

$$e^{At} = S(t)S^{-1}(0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\cos t & 2\operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t + 3\cos t & \cos t + 3\operatorname{sen} t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

e finalmente

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t - 3\operatorname{sen} t & 2\operatorname{sen} t \\ -5\operatorname{sen} t & \cos t + 3\operatorname{sen} t \end{bmatrix}$$

(e) Escrevendo na forma de sistema

$$\begin{cases} x' = 3x + z \\ y' = 2x + y + z \\ z' = -4x - z \end{cases}$$

Começamos por resolver os istema que nos permite calcular as soluções $x(t)$ e $z(t)$, ou seja

$$\begin{cases} x' = 3x + z \\ z' = -4x - z \end{cases}$$

Resolvendo a primeira equação em ordem a z obtemos

$$z = x' - 3x \tag{2}$$

Substituindo na segunda obtém-se

$$(x' - x)' = -4x - x' + 3x \quad \Leftrightarrow \quad x'' - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 - 1)x = 0$$

pelo que

$$x(t) = (a + bt)e^t$$

Substituindo em (**??**)

$$z = x' - 3x = (a + b + bt)e^t$$

Vamos agora substituir e resolver a equação em y

$$y' - y = (3a + b + 3bt)e^t \quad \Leftrightarrow \quad (te^{-t})' = 3a + b + 3bt$$

ou seja

$$y(t) = (3a + b)t + \frac{3b}{2}t^2 + c)e^t$$

Tem-se então que

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+bt)e^t \\ (3a+b)t + \frac{3b}{2}t^2 + c)e^t \\ (a+b+bt)e^t \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 3t & t+\frac{3}{2}t^2 & 1 \\ 1 & 1+t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

A matriz

$$S(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 3t & t+\frac{3}{2}t^2 & 1 \\ 1 & 1+t & 0 \end{bmatrix}$$

é uma (MSF) associada à equação $Y' = AY$, Calculando em

$$S(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \neq Id_3$$

pelo que

$$e^{At} = S8t)S^{-1}(0) = e^t \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 3t & t+\frac{3}{2}t^2 & 1 \\ 1 & 1+t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 1-t & 0 & t \\ 2t-\frac{3}{2}t^2 & 1 & t+\frac{3}{2}t^2 \\ -t & 0 & t+1 \end{bmatrix}$$

(f) A matriz A é um bloco de Jorfan em $\mathbb{R}^4$ e como tal (Ex 8 c) da Ficha 9)

$$e^{At} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/3! \\ 0 & 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(g) Neste caso a matriz A é diagonal por blocos, isto é tem a forma

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

em que

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$$

Sendo assim

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & 0 \\ 0 & e^{A_2 t} \end{bmatrix}$$

A matriz A_1 é um bloco de Jorfan em $\mathbb{R}^3$ e como tal (Ex 11 c) do cap 3)

$$e^{At} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e obviamente

$$e^{A_2 t} = \left[\begin{array}{c} e^{-2t} \end{array}\right]$$

Finalmente

$$e^{At} = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Sabendo que

$$S(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ e^{2t} & -e^{3t} \end{bmatrix}$$

é uma matriz fundameiital psra o sistema y' = Ay, determine

(a) e^{At}

(b) $\left.\frac{d}{dt}e^{At}\right|_{t=0}$

(c) a matriz A

(d) umaa solução particular de $Y' = AY + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Resolução:

(a) Começamos por calcular

$$S(o) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \neq Id_2$$

e então

$$e^{At} = S(t)S^{-1}(0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ e^{2t} & -e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{2t}+e^{3t} & e^{2t}-e^{3t} \\ e^{2t}-e^{3t} & e^{2t}+e^{3t} \end{bmatrix}$$

(b) Usando a regra de derivação de uma função matricial

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} (e^{2t}+e^{3t})' & (e^{2t}-e^{3t})' \\ (e^{2t}-e^{3t})' & (e^{2t}+e^{3t})' \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2e^{2t}+3e^{3t} & 2e^{2t}-3e^{3t} \\ 2e^{2t}-3e^{3t} & 2e^{2t}+3e^{3t} \end{bmatrix}$$

pelo que

$$\left.\frac{d}{dt}e^{At}\right|_{t=0} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

(c) A matriz e^{At} é solução da equação $M'(t) = AM(t)$ e esta igualdade é válida para todo o $t \in \mathbb{R}$. Assim

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} \quad \Leftrightarrow \quad A = \left(e^{At}\right)^{-1}\left(e^{At}\right)' \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Em particular a igualdae verifica-se para $t = 0$. Então

$$A = \left.\left(e^{At}\right)^{-1}\right|_{t=0}\left.\left(e^{At}\right)'\right|_{t=0} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

onde usámos a alíbea (b) e o facto de e^{At} em $t = 0$ ser a matriz identidade.

(d) Pela fórmula da variação das constantes

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_p(t) &= e^{At}\int e^{-At}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} dt \\
&= e^{At}\int \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-2t}+e^{-3t} & e^{-2t}-e^{-3t} \\ e^{-2t}-e^{-3t} & e^{-2t}+e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} dt \\
&= \frac{1}{2}e^{At}\int \begin{bmatrix} 2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{bmatrix} dt \\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} e^{2t}+e^{3t} & e^{2t}-e^{3t} \\ e^{2t}-e^{3t} & e^{2t}+e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1+e^{t} \\ -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

3. Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine e^{At}.

(b) Resolva o problema de valor inicial:

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(c) Sendo $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma solução arbitrária de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, determine $\lim_{t\to+\infty} \mathbf{y}(t)$.

Resolução:

(a) A matriz A tem um único valor próprio, dado por:

$$\det(A - \lambda I) = (-1-\lambda)(-3-\lambda) + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -2$$

O vector próprio associado é solução não nula de

$$(A+2I)\mathbf{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \quad b = -a \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} = (a, -a) = a(1,-1),$$

com $a \in \mathbb{R}$, pelo que podemos escolher $\mathbf{v}_p = (1,-1)$ como vector próprio. Como não existem dois vectores próprios linearmente independentes associados ao único valor próprio de A, a matriz não é diagonalizável. Prosseguimos então com o cálculo de um vector próprio generalizado:

$$(A+2I)\mathbf{v} = \mathbf{v}_p \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \quad a = 1-b \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} = (1-b, b) = (1,0) - b(1,-1).$$

Podemos então tomar $\mathbf{v}_g = (1,0)$.
A matriz A é então semelhante a uma matriz de Jordan $A = SJS^{-1}$, com

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por fim:

$$e^{At} = Se^{Jt}S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= e^{-2t}\begin{bmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix}$$

ou

Vamos determinar a solução geral do sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, com $\mathbf{y}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$:

$$\begin{cases} x' &= -x + y \\ y' &= -x - 3y \end{cases}$$

A primeira equação é equivalente a $y = x' + x$. Substituindo na segunda equação, obtém-se

$$(x'+x)' = -x - 3(x'+x) \Leftrightarrow x'' + 4x' + 4 = 0 \Leftrightarrow (D+2)^2 x = 0,$$

pelo que $x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Substituindo na primeira equação, obtém-se

$$y(t) = x'(t) + x(t) = -c_1 e^{-2t} + c_2(1-t)e^{-2t}.$$

Desta forma,

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t}(c_1 + c_2 t) \\ e^{-2t}(-c_1 + c_2(1-t)) \end{bmatrix} = \underbrace{e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ -1 & 1-t \end{bmatrix}}_{S(t)} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

pelo que $S(t)$ é uma matriz solução fundamental de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Resulta então que:

$$\begin{aligned} e^{At} = S(t)S^{-1}(0) &= e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ -1 & 1-t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ -1 & 1-t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(b) Usando a fórmula da variação das constantes:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= e^{At}\left(\mathbf{y}(0) + \int_0^t e^{-As}e^{-2s}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} ds\right) \\ &= e^{At}\left(\mathbf{y}(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} 1-s & -s \\ s & 1+s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} ds\right) \\ &= e^{At}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} ds\right) \\ &= e^{At}\begin{bmatrix} 1+t \\ -1-t \end{bmatrix} \\ &= e^{-2t}\begin{bmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix}(1+t)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= (1+t)e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

ou

O polinómio característico da matriz A é $P(\lambda) = (\lambda+2)^2$. Pelo Teorema de Cayley-Hamilton tem-se que a matriz A verifica a equação dos valores próprios, isto é

$$P(A) = (A + 2Id)^2 = 0\,,$$

e sendo assim a matriz $A + 2Id$ é uma matriz nilpotente e a série da exponencial é uma série finita (neste caso tem apenas 2 termos). Então

$$e^{At} = e^{(-2Id + A + 2Id)t} = e^{-2Id\,t + (A+2Id)t}\,.$$

Dado que as matrizes $-2Id$ e $A + 2Id$ comutam, tem-se então que

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{-2Id\,t} e^{(A+2Id)t} = e^{-2t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+2Id)^n t^n}{n!} \\ &= e^{-2t}\Big(Id + (A+2Id)t\Big) = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(c) A solução geral da equação $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ é:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= e^{At} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} c_1 + (c_1+c_2)t \\ c_2 - (c_1+c_2)t \end{bmatrix} \\ &= e^{-2t} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + (c_1+c_2)te^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Como $\lim_{t\to+\infty} e^{-2t} = 0$ e $\lim_{t\to+\infty} te^{-2t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^{2t}} = 0$, então $\lim_{t\to+\infty} \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (para quaisquer $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$).

4. Considere a seguinte matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule $e^{\mathbf{A}t}$.

(b) Determine a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{h}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{y}(1) = (1,1,1)^T \end{cases}$$

onde $\mathbf{h(t)} = (0, 2e^t, e^t)^T$.

Resolução:

(a)

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

(b) A solução geral da equação homogénea é dada por $\dot{\mathbf{y}} - \mathbf{A}\mathbf{y} = 0$

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

Para determinar uma solução particular da equação basta determinar soluções particulares das equações

$$\dot{y}_2 - y_2 = 2e^t$$
$$\dot{y}_3 - y_3 = e^t.$$

Segue-se que

$$y_2(t) = Ate^t \quad \text{e} \quad y_3(t) = Bte^t.$$

Para determinar A e B tem-se

$$\dot{y}_2 - y_2 = 2e^t \quad \Rightarrow \quad Ae^t + Ate^t - Ate^t = 2e^t \quad \Rightarrow \quad A = 2$$

e

$$\dot{y}_3 - y_3 = e^t \quad \Rightarrow \quad Be^t + Bte^t - Bte^t = e^t \quad \Rightarrow \quad B = 1$$

Logo uma solução particular é

$$\mathbf{y}_P(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2te^t \\ te^t \end{bmatrix}.$$

Aplicando a condição inicial, obtém-se

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}(t-1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2e \\ 1-e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2te^t \\ te^t \end{bmatrix}.$$

Nota: O problema tambem pode ser resolvido usando a fórmula da variação das constantes.

5. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \\ \\ \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \end{cases}$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Determine a solução geral da equação homogénea.

(b) Sendo $\mathbf{y}(t) = [y_1(t)\ y_2(t)\ y_3(t)\ y_4(t)]^T$ a solução do problema não homogéneo, determine $y_2(3)$.

Resolução:

(a) Visto a matriz $\mathbf{A}$ ser da forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A_1} & 0 \\ 0 & \mathbf{A_2} \end{bmatrix} \quad \text{sendo} \quad \mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

temos que

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{A_1}t} & 0 \\ 0 & e^{\mathbf{A_2}t} \end{bmatrix}$$

o que facilita bastante os cálculos. Comecemos por calcular $e^{\mathbf{A_1}t}$. Escrevendo na forma de sistema a equação $\mathbf{Y}' = A_1\mathbf{Y}$ tem-se que

$$\begin{cases} x' = -2x \\ y' = 3x - 2y \end{cases}$$

Resolvendo a primeira equação obtém-se

$$x(t) = ae^{-2t}$$

Substituindo na segunda, obtém-se a equação linear não homogénea

$$y' + 2y = 3ae^{-2t}$$

que admite o factor integrante $\mu(t) = e^{2t}$. Então, resolvendo da forma usua

$$\left(e^{2t}y\right)' = 3a \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = e^{-2t}(3at + b)$$

Então

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} a \\ 3at+b \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & 3t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

A matriz

$$S(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3t & 1 \end{bmatrix}$$

é uma (MSF) para a equação, e dedo que $S(0) = Id_2$ conclui-se que $e^{A_1 t} = S(t)$.

Vamos agora calcular $e^{\mathbf{A_2}t}$. Escrevendo na forma de sistema a equação $\mathbf{Y}' = A_2\mathbf{Y}$ tem-se que

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -2x + y \end{cases}$$

Resolvendo a primeira equação em ordem a y obtém-se

$$y = \frac{x' - x}{2} \tag{3}$$

Substituindo na segunda equação

$$\left(\frac{x'-x}{2}\right)' = -2x + \frac{x'-x}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x'' - 2x' + 5x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 - 2D + 5)x = 0$$

O polinómio característico associado tem raízes complexas conjugadas $2 \pm \mathrm{i}$ (com multiplicidade 1 cada), e assim uma base complexa para o espaço de soluções é

$$\mathcal{B}_c = \{e^{(2+\mathrm{i})t},\, e^{(2-\mathrm{i})t}\}$$

e uma base real será

$$\mathcal{B}_{=}\{e^{2t}\cos t,\, e^{2t}\operatorname{sen} t\}$$

pelo que

$$x(t) = ae^{2t}\cos t + be^{2t}\operatorname{sen} t \quad , \quad a,\, b \in \mathbb{R}$$

Substituindo em (**??**) obtemos

$$y = \frac{1}{2}(x' - x) = \frac{e^{2t}}{2}\Big((a+b)\cos t + (b-a)\operatorname{sen} t\Big)$$

Entáo

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} a\cos t + b\operatorname{sen} t \\ (a+b)\cos t + (b-a)1sent \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ \cos t - \operatorname{sen} t & \cos t + \operatorname{sen} t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

A matriz

$$S(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ \cos t - \operatorname{sen} t & \cos t + \operatorname{sen} t \end{bmatrix}$$

é uma (MSF) para a equação $\mathbf{Y}' = A_2\mathbf{Y}$. Dado que

$$S(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq Id_2$$

tem-se que

$$
\begin{aligned}
e^{A_2 t} &= S(t)S^{-1}(0) = e^{2t}\begin{bmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ \cos t - \operatorname{sen} t & \cos t + \operatorname{sen} t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= e^{2t}\begin{bmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t & \operatorname{sen} t \\ -2\operatorname{sen} t & \cos t + \operatorname{sen} t \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Finalmente

$$
e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{A_1}t} & 0 \\ 0 & e^{\mathbf{A_2}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 3te^{-2t} & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t}(\cos(t) - \operatorname{sen} t) & -e^{2t}\operatorname{sen}(t) \\ 0 & 0 & -2e^{2t}\operatorname{sen}(t) & e^{2t}(\cos(t) + \operatorname{sen} t) \end{bmatrix}
$$

e a solução geral do sistema homogéneo é dada por

$$
\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{A_1}t} & 0 \\ 0 & e^{\mathbf{A_2}t} \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 & 0 \\ 3te^{-4t} & e^{-4t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(t) - \operatorname{sen} t & -\operatorname{sen}(t) \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}(t) & \cos(t) + \operatorname{sen} t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}
$$

(b) Pela fórmula da variação das constantes, a solução do problema de valor inicial dado será

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{b}(s)\,ds \\
&= e^{2t}\begin{bmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 & 0 \\ 3te^{-4t} & e^{-4t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(t) - \operatorname{sen} t & -\operatorname{sen}(t) \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}(t) & \cos(t) + \operatorname{sen} t \end{bmatrix}\int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ 2e^{2s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ds \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - e^{-2t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

pelo que

$$
y_2(3) = 1 - e^{-6}
$$

6. (a) Determine a solução do sistema linear

$$
\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \end{cases}
$$

que satisfaz a condição inicial $x(0) = y(0) + 1 = 1$.

(b) Considerando agora o sistema

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \\ z' = y - (\operatorname{sen} t)z \end{cases}$$

utilize a alínea anterior para determinar a solução que verifica a condição inicial $x(0) = y(0) + 1 = z(0) = 1$.

Resolução:

(a) Resolvendo a segunda equação em ordem a x obtém-se

$$x = \frac{y' + y}{2} \tag{4}$$

Substituindo na primeira equação

$$\left(\frac{y'+y}{2}\right)' = \frac{y'+y}{2} - y \quad \Leftrightarrow \quad y'' + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2+1)y = 0$$

O polinómio característico associad te raízes complexas conjugadas $\pm \mathrm{i}$ (com multiplicidade 1 cada), e assim uma base complexa para o espaço de soluções é

$$\mathcal{B}_c = \{e^{\mathrm{i}t},\, e^{\mathrm{i}t}\}$$

e uma base real será

$$\mathcal{B}_=\{\cos t,\, \operatorname{sen} t\}$$

pelo que

$$y(t) = a\cos t + b \operatorname{sen} t \quad , \quad a,\, b \in \mathbb{R}$$

Substituindo em (**??**) obtemos

$$x(t) = \frac{1}{2}(x' - x) = \frac{e^{2t}}{2}\Big((a+b)\cos t + (b-a)\operatorname{sen} t\Big)$$

Entáo

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (a+b)\cos t + (b-a)1sent \\ a\cos t + b\operatorname{sen} t \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t & \cos t + \operatorname{sen} t \\ 2\cos t & 2\operatorname{sen} t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

A matriz

$$S(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t & \cos t + \operatorname{sen} t \\ 2\cos t & 2\operatorname{sen} t \end{bmatrix}$$

é uma (MSF) para a equação $\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y}$. Dado que

$$S(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \neq Id_2$$

tem-se que

$$\begin{aligned} e^{At} &= S(t)S^{-1}(0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t & \cos t + \operatorname{sen} t \\ 2\cos t & 2\operatorname{sen} t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos t + \operatorname{sen} t & -\operatorname{sen} t \\ 2\operatorname{sen} t & \cos t - \operatorname{sen} t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

pelo que a solução pedida é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t + \cos t \\ 2\operatorname{sen} t \end{bmatrix}$$

(b) Dado que nas duas primeiras equações não há dependência em z podemos concluir de imediato por (i) que

$$x(t) = \operatorname{sen} t + \cos t \qquad \text{e} \qquad y(t) = 2\operatorname{sen} t$$

Falta então determinar z, ou seja resolver o PVI

$$z' = 2\operatorname{sen} t - (\operatorname{sen} t)z \quad , \quad z(0) = 1$$

Trata-se de uma equação linear, de factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int \operatorname{sen} t\, dt} = e^{-\cos t}$$

Então, a equação é equivalente a

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\cos t}z\right) = 2\operatorname{sen} t e^{-\cos t} \Leftrightarrow e^{-\cos t}z = 2e^{-\cos t} + c \Leftrightarrow z(t) = 2 + ce^{\cos t}$$

Dado que $z(0) = 1$, conclui-se

$$z(t) = 2 - e^{\cos t - 1}$$

7. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Decomponha A na soma de duas matrizes que comutam.

(b) Calcule e^{At}

(c) Determine a solução geral do sistema $Y' = AY$.

(d) Determine a solução particular do sistema

$$Y' = Ay + B(t) \quad , \quad y(0) = (1, 0, 0)$$

onde $B(t) = (t, 0, 0)$

Resolução:

(a) Dado que os elementos da diagonal principal são todos iguais, a decomposição pedido é bastante simples $A = 3Id_3 + N$ em que Id_3 é a matriz identidade em $\mathbb{R}^3$ e

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Dado que as matrizes comutasm

$$e^{At} = e^{(Id_3+N)t} = e^{Id_3t}e^{Nt} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} e^{Nt} = e^{3t}e^{Nt}$$

Uma matriz que tem uma potência nula denomina-se uma matriz *nilpotente*. A matriz N tem essa propriedade dado que $N^3 = 0$ (o que pode ser verificado facilmente). Sendo assim, usamdo a série da exponencial da matriz

$$e^{Nt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n!} t^n = Id_3 + Nt + \frac{N^2}{2} t^2$$

Esta é uma propriedade importante das matrizes nilpotentes - a sua série da exponencial é finita. Finalmente

$$e^{Nt} = \begin{bmatrix} 1 & t & t + t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e então

$$e^{At} = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & t & t + t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) A soluçãp geral da equação é dada por

$$\mathbf{Y}(t) = e^{At}C = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & t & t + t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

(d) Pela fórmula da variação das constantes

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Y}_p(t) &= e^{At}\int e^{-At}\begin{bmatrix} t\\ 0\\ 0\end{bmatrix}dt\\
&= e^{At}\int e^{-3t}\begin{bmatrix} 1 & -t & -t+t^2/2\\ 0 & 1 & -t\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} t\\ 0\\ 0\end{bmatrix}dt\\
&= e^{At}\int e^{-3t}\begin{bmatrix} t\\ 0\\ 0\end{bmatrix}dt\\
&= e^{3t}\begin{bmatrix} 1 & t & t+t^2/2\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\frac{e^{-3t}}{9}\begin{bmatrix} -3t-1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -3t-1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

8. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

   (a) O polinómio diferencial $D^4(D+1)^2$ é um polinómio aniquilador das funções te^{-t} e t^3

   (b) $e^{\lambda t}v$ é solução do sistema $Y' = AY$, quaisquer que sejam o vector v e o escalar λ

   (c) $e^{At}v$ é solução do sistema $Y' = AY$, qualquer que seja o vector v

   (d) Se $S(t)$ é uma matriz fundamental do sistema $Y' = AY$, então $S^{-1}(t)$ é solução do sistema $Y' = -YA$

Resolução:

(a) Verdadeira. O polinómio aniquilador, $P(D)$, de uma função $f(t)$ é um polinómio diferencial tal que $P(D)f(t) = 0$. Podemos verificar directamente:

$$D^4(t^3) = 0 \quad , \quad D^3(t^3) = 6 \neq 0$$

e

$$(D+1)^2(te^{-t}) = (te^{-t})'' + 2(te^{-t})' + te^{-t} = 0 \quad , \quad (D+1)(te^{-t}) = e^{-t} \neq 0$$

(b) Falsa. O resultado é verdadeiro sse λ for valor próprio de A associado ao vector próprio v.

(c) Verdadeira. Observe-se que sendo $Y = e^{At}v$

$$Y' = \left(e^{At}v\right)' = Ae^{At}v = AY$$

(d) Verdadeira - Dado que $S(t)S^{-1}(t) = Id$ para todo $t \in \mathbb{R}$ tem-se que

$$\left(S(t)S^{-1}(t)\right)' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S'(t)S^{-1}(t) + S(t)\left(S^{-1}(t)\right)' = 0$$

Visto $S(t)$ ser uma (MSF) associada à equação $Y')AY$, tem-se que $S'(t) = AS(t)$. Substituindo

$$AS(t)S^{-1}(t) + S(t)\left(S^{-1}(t)\right)' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(S^{-1}(t)\right)' = -S^{-1}(t)A$$

9. Considere a seguinte família de equações diferenciais:

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0$$

onde α e β são parâmetros reais.

(a) Poderá alguma das equações diferenciais da família anterior admitir $\{\cos t, e^{2t}\}$ como base do espaço vectorial das suas soluções?

(b) Determine α e β por forma a que $y = e^{2t}$ e $y = te^{2t}$ sejam soluções da equação.

(c) Condsiderando os valores de α e β determinados na alínea anterior, determine a solução geral de $y'' + \alpha y' + \beta y = 1$

Resolução:

(a) Não. Tratando-se de uma equação de segunda ordem, o seu espaço de soluções tem dimensão 2, o que significa que qualquer base do mesmo tem exactamente duas funções linearmente independentes. Porém, se $\cos t$ faz parte dessa base também $\operatorname{sen} t$ deverá fazer, pelo que a referida base teria pelo menos 3 funções. A equação diferencial teria então que ser (pelo menos) de terceira ordem.

(b) Para que e^{2t} e te^{2t} sejam soluções da equação de 2ª ordem $y'' + \alpha y' + \beta y = 0$, esta terá de ser da forma

$$(D-2)^2 y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D'' - 4D + 4)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'' - 4y' + 4y = 0;$$

resulta assim que

$$\alpha = -4 \quad \text{e} \quad \beta = 4.$$

(c) A solução geral da equação é da forma

$$y = y_G + y_P$$

em que y_G é a solução geral da equação homogénea associada e y_P é uma solução particular da equação completa. Pela alínea anterior

$$y_G(t) = ae^{2t} + bte^{2t} \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, queremos calcular uma soluçao particular, y_P, da equação

$$y'' - 4y' + 4y = 1$$

Podemos procurar uma solução particular constante, $y_P(t) \equiv c$, com $c \in \mathbb{R}$, pois as derivadas de uma função constante são a função nula e, assim:

$$y_P'' - 4y_P' + 4y_P = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4y_p = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y_P(t) \equiv \frac{1}{4}$$

Desta forma, a solução geral da equação pretendida é

$$y(t) = y_G(t) + y_P(t) = ae^{2t} + bte^{2t} + \frac{1}{4} \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

10. Sendo $R(x)$ uma função real de variável real contínua e $k \neq 0$, mostre que a função

$$y_p(x) = \frac{1}{k} \int_0^x R(t) \operatorname{sen}\big(k(x-t)\big)\, dt$$

é solução particular de $y'' + k^2 y = R(x)$.

Resolução:

Sendo $a(x)$ e $b(x)$ funções de classe C^1 em $\mathbb{R}$ e $f(t,x)$ contínua e com derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ também contínua (ambas em $\mathbb{R}^2$), a regra de Leibniz garante-nos que:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t,x)\, dt\right) = f\big(b(x),x\big)\, b'(x) - f\big(a(x),x\big)\, a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(t,x)\, dt$$

Como estamos nas condições enunciadas — note que $f(t,x) = R(t) \operatorname{sen}\big(k(x-t)\big)$ é contínua em $\mathbb{R}^2$ e tem derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial x} = kR(t)\cos\big(k(x-t)\big)$$

também contínua (em $\mathbb{R}^2$) — podemos usar a regra de Leibniz para calcular:

$$\begin{aligned}
y_p'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k}\int_0^x R(t)\,\mathrm{sen}\,\big(k(x-t)\big)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{k}R(x)\,\mathrm{sen}\,\big(k(x-x)\big) + \int_0^x R(t)\cos\big(k(x-t)\big)\,dt \\
&= \int_0^x R(t)\cos\big(k(x-t)\big)\,dt
\end{aligned}$$

Aplicando de novo da regra de Leibniz:

$$\begin{aligned}
y_p''(x) &= \frac{d}{dx}\left(\int_0^x R(t)\cos\big(k(x-t)\big)dt\right)' \\
&= R(x)\cos\big(k(x-x)\big) - k\int_0^x R(t)\,\mathrm{sen}\,\big(k(x-t)\big)\,dt \\
&= R(x) - k^2 y_p(x)
\end{aligned}$$

Em conclusão:

$$y_p'' + k^2 y_p = R(x) - k^2 y_p(x) + k^2 y_p(x) = R(x).$$

11. Determine a solução geral das seguintes equações

(a) $y'' - 4y = e^t\,\mathrm{sen}\,t$

(b) $y'' + y = 2e^t + t^2$

(c) $y'' - 6y' + 9y = 4e^{3t} + \frac{e^{3t}}{t}$, para $t > 0$.

(d) $y'' + 4y = \mathrm{sen}\,2t$

Resolução:

(a) O polinómio característico da equação homogénea associada,

$$y'' - 4y = 0,$$

é $P(r) = r^2 - 4 = (r-2)(r+2)$, cujas raízes são ± 2 (ambas com multiplicidade 1). Desta forma, a solução geral da equação homogénea é

$$y_G(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}, \qquad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

O polinómio aniquilador de $b(t) = e^t \operatorname{sen} t$ é

$$P_A(D) = \big(D - (1+\mathrm{i})\big)\big(D - (1-\mathrm{i})\big) = (D-1)^2 + 1 = D^2 - 2D + 2.$$

Logo, uma solução da equação não homogénea terá que ser solução da equação diferencial

$$P_A(D)(D-2)(D+2)y = P_A(D)\big(e^t \operatorname{sen} t\big) = 0,$$

ou seja,

$$\big(D - (1+\mathrm{i})\big)\big(D - (1-\mathrm{i})\big)(D-2)(D+2)y = 0.$$

A solução geral desta equação é

$$\begin{aligned} y(t) &= \underbrace{c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}}_{\substack{\shortparallel \\ y_G(t)}} + a e^t \cos t + b e^t \operatorname{sen} t \\ &= y_G(t) + a e^t \cos t + b e^t \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

para certos $c_1, c_2, a, b \in \mathbb{R}$. Desta forma, existe uma solução particular da equação

$$y'' - 4y = e^t \operatorname{sen} t \tag{5}$$

da forma $y_p(t) = a\, e^t \cos t + b\, e^t \operatorname{sen} t$. Como

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= (b+a)\, e^t \cos t + (b-a)\, e^t \operatorname{sen} t, \\ y_p''(t) &= 2b\, e^t \cos t - 2a\, e^t \operatorname{sen} t, \end{aligned}$$

substituindo estas expressões na equação (**??**), obtemos

$$2b\, e^t \cos t - 2a\, e^t \operatorname{sen} t - 4a\, e^t \cos t - 4b\, e^t \operatorname{sen} t = e^t \operatorname{sen} t, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Esta equação é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} 2b - 4a = 0 \\ -2a - 4b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{5} \\ a = -\frac{1}{10} \end{cases}$$

Assim $y_p(t) = -\frac{1}{10}\, e^t \cos t - \frac{1}{5}\, e^t \operatorname{sen} t$ é uma solução particular da equação, pelo que a solução geral da equação (**??**) é

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} - \frac{1}{10}\, e^t \cos t - \frac{1}{5}\, e^t \operatorname{sen} t, \qquad \text{com} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) O polinómio característico da equação homogénea associada,

$$y'' + y = 0,$$

é $P(r) = r^2 + 1 = (r - \mathrm{i})(r + \mathrm{i})$, cujas raízes são $\pm\mathrm{i}$ (ambas com multiplicidade 1). Desta forma, a solução geral da equação homogénea é

$$y_G(t) = c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t, \qquad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Como os polinómios aniquiladores de e^t e de t^2 são, respectivamente, $D-1$ e D^3, então o polinómio aniquilador de $b(t)=2e^t+t^2$ é

$$P_A(D)=(D-1)D^3.$$

Logo, uma solução da equação não homogénea terá que ser solução da equação diferencial

$$P_A(D)(D-\mathrm{i})(D+\mathrm{i})y=P_A(D)\big(2e^t+t^2\big)=0,$$

ou seja,

$$(D-1)D^3(D-\mathrm{i})(D+\mathrm{i})y=0.$$

A solução geral desta equação é

$$\begin{aligned} y(t) &= \underbrace{c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t}_{\substack{\shortparallel \\ y_G(t)}} + a+bt+ct^2+de^t \\ &= y_G(t)+a+bt+ct^2+de^t \end{aligned}$$

para certos $c_1,c_2,a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Desta forma, existe uma solução particular da equação

$$y''+y=2e^t+t^2 \tag{6}$$

da forma $y_p(t)=a+bt+ct^2+de^t$. Como

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= b+2ct+de^t \\ y_p''(t) &= 2c+de^t \end{aligned}$$

substituindo estas expressões na equação (**??**), obtemos

$$2c+de^t+a+bt+ct^2+de^t=t^2+2e^t, \qquad \forall\, t\in\mathbb{R}.$$

Esta equação é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} a+2c=0 \\ b=0 \\ c=1 \\ 2d=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=0 \\ c=1 \\ d=1 \end{cases}$$

Assim $y_p(t)=-2+t^2+e^t$ é uma solução particular da equação, pelo que a solução geral da equação (**??**) é

$$y(t)=c_1e^t\cos t+c_2e^t\operatorname{sen} t-2+t^2+e^t, \qquad \text{com} \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

(c) O polinómio característico da equação homogénea associada,

$$y''-6y'+9y=0,$$

é $P(r) = r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2$, que tem uma única raiz, $r = 3$, com multiplicidade 2. Desta forma, a solução geral da equação homogénea é

$$y_G(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}, \qquad \text{com } \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dado que $\frac{e^{3t}}{t}$ não é combinação linear de funções que sejam soluções de equações lineares homogéneas, vamos usar a fórmula da variação das constantes para determinar uma solução particular de

$$y'' - 6y' + 9y = 4e^{3t} + \frac{1}{t}e^{3t} \tag{7}$$

Para esta equação, a matriz wronskiana é

$$W(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 3e^{3t} & (1+3t)e^{3t} \end{bmatrix} = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 3 & 1+3t \end{bmatrix}$$

e a sua inversa é, então, relativamente fácil de calcular:

$$W^{-1}(t) = e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 3 & 1+3t \end{bmatrix}^{-1} = e^{-3t} \begin{bmatrix} 1+3t & -t \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Utilizando a fórmula da variação das constantes:

$$\begin{aligned}
y_p(t) &= \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} \end{bmatrix} \int W^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 4e^{3t} + \frac{1}{t}e^{3t} \end{bmatrix} dt \\
&= e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix} \int e^{-3t} \begin{bmatrix} 1+3t & -t \\ -3 & 1 \end{bmatrix} e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 4+\frac{1}{t} \end{bmatrix} dt \\
&= e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} -4t-1 \\ 4+\frac{1}{t} \end{bmatrix} dt \\
&= e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2t^2 - t \\ 4t + \log t \end{bmatrix} \\
&= e^{3t}\big(-2t^2 - t + 4t^2 + t\log t \big) \;\; = \;\; \big(2t^2 + t\log t\big)e^{3t} - te^{3t}
\end{aligned}$$

A solução geral da equação (**??**) é, então (para $t > 0$):

$$y(t) = y_G(t) + y_p(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + \big(2t^2 + t\log t\big)e^{3t}, \qquad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Note que o termo $-te^{3t}$ da solução particular pode, obviamente, ser absorvido pelo termo $c_2 t e^{3t}$ de $y_G(t)$.

(d) O polinómio característico da equação homogénea associada,

$$y'' + 4y = 0,$$

é $P(r) = r^2 + 4 = (r - 2\mathrm{i})(r + 2\mathrm{i})$, cujas raízes são $\pm 2\mathrm{i}$ (ambas com multiplicidade 1). Desta forma, a solução geral da equação homogénea é

$$y_G(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t, \qquad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

O polinómio aniquilador de $b(t) = \operatorname{sen} 2t$ é

$$P_A(D) = (D - 2\mathrm{i})(D + 2\mathrm{i})$$

Logo, uma solução da equação não homogénea terá que ser solução da equação diferencial

$$P_A(D)(D - 2\mathrm{i})(D + 2\mathrm{i})y = P_A(D) \operatorname{sen} 2t = 0,$$

ou seja,

$$(D - 2\mathrm{i})^2(D + 2\mathrm{i})^2 y = 0.$$

Como várias raízes do polinómio característico da equação homogénea (neste caso, todas) coincidem com raízes do polinómio aniquilador, trata-se de uma **equação diferencial linear com ressonância**.

A solução geral da equação anterior é

$$\begin{aligned} y(t) &= \underbrace{c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t}_{\substack{\shortparallel \\ y_G(t)}} + at \cos 2t + bt \operatorname{sen} 2t \\ &= y_G(t) + at \cos 2t + bt \operatorname{sen} 2t \end{aligned}$$

para certos $c_1, c_2, a, b \in \mathbb{R}$. Desta forma, existe uma solução particular da equação

$$y'' + 4y = \operatorname{sen} 2t \tag{8}$$

da forma $y_p(t) = at \cos 2t + bt \operatorname{sen} 2t$. Como

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= (a + 2bt) \cos 2t + (b - 2at) \operatorname{sen} 2t, \\ y_p''(t) &= 4(b - at) \cos 2t + 4(-a - bt) \operatorname{sen} 2t, \end{aligned}$$

substituindo estas expressões na equação (**??**), obtemos

$$4b \cos 2t - 4a \operatorname{sen} 2t = \operatorname{sen} 2t, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Esta equação é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} 4b = 0 \\ -4a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Assim $y_p(t) = -\frac{1}{4}\, t \operatorname{sen} 2t$ é uma solução particular da equação, pelo que a solução geral da equação (**??**) é

$$y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{4}\, t \operatorname{sen} 2t, \qquad \text{com} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Comparando as soluções da equação homogénea com as da não homogénea, vê-se que o efeito da ressonância (provocada pelo termo não homogéneo, $b(t) = \operatorname{sen} 2t$) é o aparecimento de oscilações de amplitude crescente, na solução.

12. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 8t + 2e^{2t} \\ y(0) = 1\,,\; y'(0) = 2. \end{cases}$$

(a) Escreva e resolva a equação homogénea associada.

(b) Determine uma solução particular da equação diferencial.

(c) Resolva o problema de valor inicial.

(Problema do 2º Teste ACED 2017/18, 1º Semestre).

Resolução:

(a) A equação homogénea associada é

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

O seu polinómio característico, $P(R) = R^2 - 4R + 4 = (R-2)^2$, tem uma única raiz, $R = 2$, com multiplicidade 2. Desta forma, a solução geral da equação homogénea é

$$y_G(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t},$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(b) O aniquilador de $b(t) = 8t + 2e^{2t}$ é

$$P_A(D) = D^2(D-2)$$

Logo, uma solução da equação não homogénea terá que ser solução da equação diferencial

$$P_A(D)(D-2)^2 y = P_A(D)\big(8t + 2e^{2t}\big) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad D^2(D-2)^3 y = 0$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + c_3 t^2 e^{2t} + c_4 + c_5 t \\ &= y_G(t) + c_3 t^2 e^{2t} + c_4 + c_5 t \end{aligned}$$

para certos $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}$. Desta forma, existe uma solução particular da equação

$$(D-2)^2 y = 8t + 2e^{2t} \tag{9}$$

da forma $y_p(t) = c_3 t^2 e^{2t} + c_4 + c_5 t$. Substituindo esta expressão na equação (**??**), obtemos

$$2c_3 e^{2t} + 4c_4 - 4c_5 + 4c_5 t = 8t + 2e^{2t}, \qquad \text{para qualquer } \; t \in \mathbb{R},$$

o que é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} 2c_3 = 2 \\ 4c_4 - 4c_5 = 0 \\ 4c_5 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_3 = 1 \\ c_4 = 2 \\ c_5 = 2 \end{cases}$$

Assim $y_p(t) = t^2e^{2t} + 2 + 2t$ é uma solução particular da equação, pelo que a solução geral da equação (**??**) é

$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + t^2e^{2t} + 2 + 2t, \qquad \text{com} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) Como $y'(t) = 2c_1e^{2t} + c_2(1+2t)e^{2t} + (2t+2t^2)e^{2t} + 2$, resulta das condições iniciais que:

$$\begin{cases} 1 = y(0) = c_1 + 2 \\ 2 = y'(0) = 2c_1 + c_2 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

Assim, a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = (-1 + 2t + t^2)e^{2t} + 2 + 2t.$$

13. Determine a solução da equação diferencial

$$y'' - 4y' + 3y = (1 + e^{-x})^{-1}$$

que verifica as condições iniciais $y(0) = y'(0) = 1$

Resolução:

A solução da equação é da forma

$$y(x) = y_g(x) + y_p(x)$$

sendo y_g a solução geral da equação homogénea associada e y_p uma solução particular da equação completa. Começemos por calcular y_g. As raízes do polinómio característico associado são

$$r^2 - 4r + 3 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \text{ ou } r = 3$$

Sendo assim, e^x e e^{3x} são duas soluções linearmente independentes da equação homogénea, pelo que

$$y_g(t) = c_1e^x + c_2e^{3x}$$

Para calcular y_p, note que somos forçados a utilizar a fórmula da variação das constantes, pois o termo não homogéneo,

$$h(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

não é solução de qualquer equação diferencial linear de coeficientes constantes. Assim sendo,

$$y_p(x) = \begin{bmatrix} e^x & e^{3x} \end{bmatrix} \int^x W^{-1}(s) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+e^{-s}} \end{bmatrix} ds$$

em que $W(x)$ é a matriz Wronskiana associada:

$$W(x) = \begin{bmatrix} e^x & e^{3x} \\ e^x & 3e^{3x} \end{bmatrix}.$$

Assim

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \begin{bmatrix} e^x & e^{3x} \end{bmatrix} \int^x \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-s} & -e^{-s} \\ -e^{-3s} & e^{-3s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+e^{-s}} \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} e^x & e^{3x} \end{bmatrix} \int^x \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\frac{e^{-s}}{1+e^{-s}} \\ \frac{e^{-3s}}{1+e^{-s}} \end{bmatrix} ds \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^x & e^{3x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \log(1+e^{-x}) \\ -\frac{e^{-2x}}{2} + e^{-x} - \log(1+e^{-x}) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left(e^x \log(1+e^{-x}) - \frac{e^x}{2} + e^{2x} - e^{3x} \log(1+e^{-x}) \right) \\ &= \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^x}{4} + \frac{e^x - e^{3x}}{2} \log(1+e^{-x}) \end{aligned}$$

onde calculámos a primitiva de $\frac{e^{-3s}}{1+e^{-s}}$ fazendo a substituição $e^{-s} = t$. Assim sendo, a solução geral da equação é:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^x + \underbrace{\left(\tilde{c}_2 - \tfrac{1}{4}\right)}_{\substack{\shortparallel \\ c_2}} e^{3x} + \frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^x - e^{3x}}{2} \log(1+e^{-x})$$

Dado que $y(0) = y'(0) = 1$, tem-se que

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{1}{2} = 1 \\ c_1 + 3c_2 + 1 - \log 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{1}{2} \\ c_1 + 3c_2 = \log 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\log 2 \\ c_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\log 2 \end{cases}$$

pelo que

$$y(x) = \frac{3e^x - e^{3x}}{4} + \frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^x - e^{3x}}{2} \log\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right)$$

14. Considere a equação

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + y^{(2)} = t + \cos t \tag{10}$$

(a) Determine a solução geral da equação homogénea correspondente a (**??**).

(b) Determine uma solução particular de (**??**).

(c) Determine a solução de (**??**) que verifica a condição inicial

$$y(0) = y'(0) = y^{(2)}(0) = y^{(3)}(0) = 0$$

Resolução:

(a) O polinómio característico associado é

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 = 0 \iff \lambda^2(\lambda+1)^2 = 0$$

pelo que 1, t, e^{-t} e te^{-t} são soluções independentes da equação homogénea, e como tal

$$y_h(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t}$$

é a solução pedida.

(b) Como usualmente a solução de (**??**) é dada por

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t} + y_p(t)$$

em que y_p é uma solução particular de (**??**). Para utilizar o método dos coeficientes indeterminados, podemos considerar

$$y_p(t) = z_1(t) + z_2(t)$$

em que z_1 é solução da equação diferencial

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + y^{(2)} = t \tag{11}$$

e, z_2 é solução da equação diferencial

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + y^{(2)} = \cos t \tag{12}$$

Começemos por calcular z_1. Visto t ser solução da equação

$$y'' = D^2 y = 0$$

aplicando $P_a(D) = D^2$ à equação (**??**)

$$D^4(D+1)^2 y = D^2 t = 0$$

Esta equação admite como solução geral (atenda a que as soluções do polinómio característico são 0 de multiplicidade 4 e -1 de multiplicidade 2)

$$y(t) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + a_4 t^3 + a_5 e^{-t} + a_6 t e^{-t}$$

e conclui-se que $a_3 t^2 + a_4 t^3$ é a candidata a solução particular (dado que $a_1 + a_2 t + a_5 e^{-t} + a_6 t e^{-t}$ é y_h). Resta agora calcular as constantes a_3 e a_4 de modo a que $z_1(t) = a_3 t^2 + a_4 t^3$ seja solução de (**??**). Assim

$$z_1(t) = a_3 t^2 + a_4 t^3 \;\; , \;\; z_1'(t) = 2a_3 t + 3a_4 t^2 \;\; , \;\; z_1''(t) = 2a_3 + 6a_4 t \;\; , \;\; z_1'''(t) = 6a_4 \; , \; z_1^{(iv)}(t) = 0$$

pelo que

$$z_1^{(4)} + 2z_1^{(3)} + z_1^{(2)} = t \;\Leftrightarrow\; 12a_4 + 2a_3 + 6a_4 t = t \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} a_3 = -1 \\ a_4 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Tem-se então que $z_1(t) = -t^2 + \frac{t^3}{6}$. Para calcular z_2, note-se que $\cos t$ é solução da equação

$$y'' + y = (D^2 + 1)y = 0$$

aplicando $P_a(D) = D^2 + 1$ à equação (**??**)

$$(D^2 + 1)D^2(D + 1)^2 y = (D^2 + 1)\cos t = 0$$

As raizes do polinómio característico são 0 (com multiplicidade 2), -1 (com multiplicidade 2) e $\pm i$ (simples). Assim, a equação acima admite como solução geral:

$$y(t) = a_1 + a_2 t + a_3 e^{-t} + a_4 t e^{-t} + a_5 \cos t + a_6 \operatorname{sen} t$$

e conclui-se que $a_5 \cos t + a_6 \operatorname{sen} t$ é a candidata a solução particular (dado que $a_1 + a_2 t + a_3 e^{-t} + a_4 t e^{-t}$ é y_h). Resta agora calcular as constantes a_5 e a_6 de modo a que $z_2(t) = a_5 \cos t + a_6 \operatorname{sen} t$ seja solução de (**??**). Assim

$$z_2(t) = a_5 \cos t + a_6 \operatorname{sen} t \;\; , \;\; z_2'(t) = -a_5 \operatorname{sen} t + a_6 \cos t \;\; , \;\; z_2''(t) = -a_5 \cos t - a_6 \operatorname{sen} t$$
$$z_2'''(t) = a_5 \operatorname{sen} t - a_6 \cos t \; , \; z_2^{(iv)}(t) = z_2(t)$$

pelo que

$$z_2^{(4)} + 2z_2^{(3)} + z_2^{(2)} = t \;\Leftrightarrow\; -2a_6 \cos t + 2a_5 \operatorname{sen} t = \cos t \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} a_5 = 0 \\ a_6 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Tem-se então que $z_2(t) = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} t$. Finalmente

$$y(t) = y_h(t) + z_1(t) + z_2(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t} - t^2 + \frac{t^3}{6} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} t$$

(c) Dado que $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$ concluimos

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ \\ c_2 - c_3 + c_4 - \frac{1}{2} = 0 \\ \\ c_3 - 2c_4 - 2 = 0 \\ \\ -c_3 + 3c_4 - \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -9 \\ \\ c_2 = 6 \\ \\ c_3 = 9 \\ \\ c_4 = \frac{7}{2} \end{cases}$$

pelo que

$$y(t) = -9 + 6t + 9e^{-t} + \frac{7}{2}te^{-t} - t^2 + \frac{t^3}{8} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t$$

15. Considere a equação diferencial linear não homogénea de coeficientes não constantes:

$$y''' - \frac{3}{x}y'' = \frac{20}{x^2} \tag{13}$$

onde a solução, $y(x)$, está definida no intervalo $I =]0, \infty[$.

(a) Determine a solução geral da equação homogénea.

(b) Determine a solução geral da equação (**??**).

Resolução:

(a) A equação homogénea associada a (**??**) é

$$y''' - \frac{3}{x}y'' = 0.$$

Fazendo a substituição $z = y''$ obtém-se a equação linear homogénea de 1ª ordem

$$z' - \frac{3}{x}z = 0,$$

cuja solução geral é dada por

$$z(x) = Ke^{\int \frac{3}{x}dx} = Ke^{3\log x} = Kx^3, \qquad \text{com } K \in \mathbb{R},$$

para $x > 0$. Resolvendo agora a equação diferencial

$$y'' = z(x) = Kx^3$$

(basta primitivar duas vezes) obtém-se

$$y(x) = a + bx + \frac{K}{20}x^5 = a + bx + cx^5 \qquad \text{com } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

(b) A solução geral da equação é da forma

$$y(x) = a + bx + cx^5 + y_p(x)$$

em que $y_p(x)$ é uma solução particular da equação. Pela fórmula de variação das constantes

$$y_p(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^5 \end{bmatrix} \int W^{-1}(x) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{20}{x^2} \end{bmatrix} dx$$

em que a $W(x)$ é a matriz wronskiana associada à equação:

$$W(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^5 \\ 0 & 1 & 5x^4 \\ 0 & 0 & 20x^3 \end{bmatrix}$$

Então

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= \begin{bmatrix} 1 & x & x^5 \end{bmatrix} \int \frac{1}{20x^3} \begin{bmatrix} 20x^3 & -20x^4 & 4x^5 \\ 0 & 20x^3 & -5x^4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{20}{x^2} \end{bmatrix} dx \\
&= \begin{bmatrix} 1 & x & x^5 \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} 4 \\ -\frac{5}{x} \\ \frac{1}{x^5} \end{bmatrix} dx \\
&= \begin{bmatrix} 1 & x & x^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4x \\ -5\log x \\ -\frac{1}{5x^4} \end{bmatrix} = \frac{19}{5}x - 5x\log x
\end{aligned}$$

Finalmente, a solução geral da equação é

$$y(x) = a + \underbrace{\left(\tilde{b} - \tfrac{19}{5}\right)}_{\overset{\shortparallel}{b}} x + cx^5 - 5x\log x, = a + bx + cx^5 + 5x\log x, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

16. Considere a equação

$$y'' + \left(t - \frac{3}{t}\right)y' - 2y = 0 \quad , \quad t > 0$$

e duas soluções $y_1(t) = e^{-t^2/2}$ e $y_2(t) = t^2 - 2$

(a) Prove que y_1 e y_2 são linearmente independentes.

(b) Encontre uma solução particular de

$$y'' + \left(t - \frac{3}{t}\right)y' - 2y = t^4$$

Resolução:

(a) Se as duas soluções fossem linearmente dependentes em $\mathbb{R}^+$ então o determinante da matriz wronskiana teria que ser igual a zero para todo o $t \in \mathbb{R}^+$. Ora

$$\begin{vmatrix} e^{-t^2/2} & t^2-2 \\ -te^{-t^2/2} & 2t \end{vmatrix} = t^3 e^{-t^2/2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0$$

Resulta assim que y_1 e y_2 são linearmente independentes em $\mathbb{R}^+$.

(b) Pela fórmula da variação das constantes

$$y_p(t) = \begin{bmatrix} e^{-t^2/2} & t^2-2 \end{bmatrix} \int W^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ t^4 \end{bmatrix} dt$$

em que a $W(x)$ é a matriz wronskiana escrita na alínea anterior. Então

$$\begin{aligned}
y_p(t) &= \begin{bmatrix} e^{-t^2/2} & t^2-2 \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} \frac{2}{t^2}e^{t^2/2} & \frac{2-t^2}{t^3}e^{t^2/2} \\ \frac{1}{t^2} & \frac{1}{t^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t^4 \end{bmatrix} dt \\
&= \begin{bmatrix} e^{-t^2/2} & t^2-2 \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} (2t-t^3)e^{t^2/2} \\ t \end{bmatrix} dt \\
&= \begin{bmatrix} e^{-t^2/2} & t^2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (4-t^2)e^{t^2/2} \\ \frac{t^2}{2} \end{bmatrix} = 4 - t^2 + (t^2-2)\frac{t^2}{2} \\
&= 4 - 2t^2 + \frac{t^4}{2}
\end{aligned}$$

Tendo em conta que $4-2t^2 = -2(t^2-2)$ é solução da equação homogénea, então uma solução particular mais simples é:

$$\tilde{y}_p(t) = \frac{t^4}{2}.$$

2 Exercícios Propostos

1. Para cada uma das seguintes matrizes determine e^{At}:

(a) $A = 0$ (b) $A = I$ (c) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (f) $A = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$ (g) $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(h) $A = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{5} & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (i) $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ (j) $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

2. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = 2x - 3y + e^{2t} \\ y' = -8y + 8 \end{cases} , \quad \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule e^{At}.

(b) Determine a solução do problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \\ \\ \mathbf{y}(0) = (0, 1, 1) \end{cases}$$

onde $\mathbf{b}(t) = (0, e^{t\sqrt{2}}, e^{-t})$

4. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{h}(t) \\ \\ \mathbf{y}(0) = (0, 0, 0, 0) \end{cases}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \pi \\ 0 & 0 & -\pi & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -e^{-2t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Determine a solução geral da equação homogénea associada.

(b) Resolva o problema.

5. Resolva o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + 2 \\ \dot{y} = 3x - y + 2 \\ \dot{z} = ty - tz \end{cases}$$

sujeito às condições iniciais $x(0) = y(0) = -z(0) = -1$.

(

6. Sejam A e B duas matrizes $n \times n$ de componentes reais ou complexas. Mostre que se $AB = BA$, então $e^{A+B} = e^A e^B$. Aproveite o resultado para calcular:

$$\exp\left(t\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

7. Determine a solução geral de cada uma das equações:

(a) $y'' - 2y' - 3y = \cos t$ (b) $y'' - 2y' + y = te^t$

(c) $y^{(4)} + y = t + e^{2t}\operatorname{sen} t$ (d) $y^{(3)} - 2y^{(2)} = t$

(e) $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t}$ (f) $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(e^t)$

8. Determine a solução do problema de valor inicial

$$y^{(3)} + 2y^{(2)} + y' - 3 = b(t) \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0 \quad , \quad y^{(2)}(0) = 1$$

quando:

(a) $b(t) = 0$ (b) $b(t) = t$ (c) $b(t) = e^{-t}$

9. Determine a solução da equação diferencial

$$y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\cos x}$$

que verifica as condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$

10. Considere a equação

$$y^{(4)} - 3y^{(3)} + 2y^{(2)} = t + \operatorname{sen} t \tag{14}$$

(a) Determine a solução geral da equação homogénea correspondente a (**??**).

(b) Determine uma solução particular de (**??**).

(c) Determine a solução de (**??**) que verifica a condição inicial

$$y(0) = y'(0) = y^{(2)}(0) = y^{(3)}(0) = 0$$

11. Considere a equação que descreve um sistema mola-amortecedor:

$$y'' + 2by' + ky = F(t)\ , \tag{15}$$

onde $2b > 0$ é o coeficiente de atrito do amortecedor, $k > 0$ é o coeficiente de elasticidade da mola e a função contínua $F(t)$ representa a força exterior aplicada ao sistema. Seja $\omega_0 = \sqrt{|b^2 - k|}$.

a) Escreva a solução geral da equação homogénea associada a (**??**). Será conveniente escrevê-la em função dos parâmetros b e ω_0.

b) Escreva uma equação vectorial da forma $\dot{\mathbf{Y}} = A\mathbf{Y} + \mathbf{h}(t)$ que seja equivalente a (**??**). Verifique que os valores próprios da matriz A são as raízes do polinómio característico da equação homogénea associada a (**??**).

c) Resolva a equação não homogénea no caso $b = 0$ e $F(t) = F_0 \operatorname{sen}(\omega t)$, onde $F_0 > 0$ (oscilações forçadas). Será conveniente tratar separadamente os casos $\omega \neq \omega_0$ (sem ressonância) e $\omega = \omega_0$ (com ressonância).

12. Considere a equação diferencial

$$y'' + \frac{t}{1-t}y' + \frac{1}{t-1}y = 1 - \frac{1}{t}$$

(a) Determine soluções da equação homogénea associada da forma $y(t) = t^k$ e da forma $y(t) = e^{\lambda t}$, e aproveite os resultados para escrever a solução geral da equação homogénea.

(b) Calcule a solução da equação que verifica as condições iniciais $y(2) = 1$ e $y'(2) = -1$.

Soluções

1. (a) $e^{At} = I$ (b) $e^{At} = e^t I$ (c) $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\pi t} \end{bmatrix}$

   (d) $e^{At} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^{4t} - e^{2t} & -3e^{4t} + 3e^{2t} \\ e^{4t} - e^{2t} & -e^{4t} + 3e^{2t} \end{bmatrix}$ (e) $e^{At} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (f) $e^{At} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1-6t & 12t \\ -3t & 1+6t \end{bmatrix}$ (g) $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$

   (h) $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\pi t} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{5}te^{\pi t} & e^{\pi t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & \sqrt{2}te^t \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$ (i) $e^{At} = \begin{bmatrix} \cos(4t) & -\operatorname{sen}(4t) \\ \operatorname{sen}(4t) & \cos(4t) \end{bmatrix}$

   (j) $e^{At} = \begin{bmatrix} \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t) & 2\operatorname{sen}(2t) \\ \operatorname{sen}(2t) & \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t) \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} + (t + \frac{1}{2})e^{2t} \\ 1 \end{bmatrix}$

3. (a) $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\sqrt{2}t} & 2te^{\sqrt{2}t} & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{2}t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\sqrt{2}t}(t^2 + 2t) \\ e^{\sqrt{2}t}(t+1) \\ e^{-t}(t+1) \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \frac{e^{-2t}}{\pi}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\operatorname{sen}((\pi t) \\ 1 - \cos(\pi t) \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 + 2e^{t^2/2} \end{bmatrix}$

7. (a) $y(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{-t} - \frac{1}{10}\Big(\operatorname{sen} t + 2\cos t\Big)$ com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

   (b) $y(t) = \Big(c_1 + c_2t + \frac{t^3}{6}\Big)e^t$ com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

   (c) $y(t) = \cos(\sqrt{2}t/2)\Big(c_1e^{\sqrt{2}t/2} + c_2e^{-\sqrt{2}t/2}\Big) + \operatorname{sen}(\sqrt{2}t/2)\Big(c_3e^{\sqrt{2}t/2} + c_4e^{-\sqrt{2}t/2}\Big) + t - \frac{e^{2t}}{102}\Big(\operatorname{sen} t + 4\cos t\Big)$ com $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

   (d) $y(t) = c_1 + c_2t + c_3e^{2t} - \frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{12}t^3$ com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

   (e) $y(t) = c_1e^t + c_2te^t + e^t\Big(t\log t - t\Big)$ com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

   (f) $y(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} - e^{-2t}\operatorname{sen}(e^t)$ com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

8. (a) $y(t) = -5 + 5e^{-t} + 2te^{-t} + 3t$ (b) $y(t) = -2 + 2e^{-t} + te^{-t} + \frac{t^2}{2} + t$
(c) $y(t) = -6 + 6e^{-t} + 3te^{-t} + 3t + \frac{t^2 e^{-t}}{2}$

9. $y(x) = e^x \Big(\cos x - \operatorname{sen} x + \cos x \log(\cos x) + x \operatorname{sen} x \Big)$

10. (a) $y_H(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 e^{2t}$, com c_1, c_2, c_3 e $c_4 \in \mathbb{R}$
(b) $y_p(t) = \frac{3t^2}{8} + \frac{t^3}{12} - \frac{\operatorname{sen} t + 3\cos t}{10}$ (c) $y(t) = \frac{9}{80} + \frac{t}{40} - \frac{9}{80}e^t + \frac{3}{10}e^{2t} + \frac{3t^2}{8} + \frac{t^3}{12} - \frac{\operatorname{sen} t + 3\cos t}{10}$

11. (a) $y_H(t) = \begin{cases} e^{-bt}(c_1 e^{\omega_0 t} + c_2 e^{-\omega_0 t}) & \text{se } \; b^2 > k \\ e^{-bt}(c_1 + c_2 t) & \text{se } \; b^2 = k \\ e^{-bt}(c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t)) & \text{se } \; b^2 < k \end{cases}$
(b) $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -2b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F(t) \end{bmatrix}$
(c) $y(t) = \begin{cases} c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\operatorname{sen}(\omega t) & \text{se } \; \omega \neq 0 \\ \\ c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) - \frac{F_0}{2\omega_0}\cos(\omega_0 t) & \text{se } \; \omega = 0 \end{cases}$

12. (a) $\lambda = k = 1$; $y_h(t) = c_1 e^t + c_2 t$ (b) $y(t) = (2 + \log 2)t - 2e^{t-2} - 1 - t\log t$