



2º Exame, 4 de fevereiro de 2019, 11h30m Duração: 3 horas
Prova escrita, individual e sem consulta

NOME: _____ NÚMERO: _____

PARTE I - Questões de Escolha Múltipla (A/B/C/D)

Preencha as respostas na tabela (usando apenas letras maiúsculas). Se nenhuma opção servir, escreva **NENHUMA**. Se pretender alterar a sua resposta, risque e escreva ao lado a sua nova opção. Todas as questões de escolha múltipla seguintes valem 0.75 valores. Estas questões de escolha múltipla não respondidas são cotadas com 0 valores, mas por cada resposta errada são descontados 0.75/4 valores.

Questão	1	2	3	4	5	6
Resposta						

1. Uma das tabelas seguintes não representa um acervo. Qual?

A. 2-2-8-8-2-14-10	B. 26-21-26-6-10-26-21
C. 2-4-8-10-18-4-26	D. 2-6-3-8-18-10-24

2. Considere uma árvore binária balanceada AVL. Qual é o número mínimo (m) e máximo (M) de nós na árvore se esta tiver altura 3 (recorde que a altura de uma árvore com apenas um nó interno é 1)?

A. m=7, M=15	B. m=4, M=15	C. m=8, M=16	D. m=9, M=16
--------------	--------------	--------------	--------------

3. Suponha uma tabela de dispersão em que as colisões são resolvidas pelo método de dispersão com índices livres. Assuma que a função de dispersão é $h(x) = x \% 9$, e que o conteúdo da tabela num dado momento é o seguinte:

9	18		12	3	14	4	21	
---	----	--	----	---	----	---	----	--

Em que ordem podem os elementos da tabela ter sido adicionados (assuma que a tabela anteriormente estava vazia)?

A. 9-14-4-18-12-3-21	B. 12-3-14-18-4-9-21
C. 12-14-3-9-4-18-21	D. 12-9-18-3-14-21-4

4. Suponha a seguinte tabela de números inteiros positivos.

1	3	4	5	6	9	12	17	13	19	20	16	21	26	18	28	27	25	...
---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----

Após um certo número de passos do algoritmo de *ShellSort*, é dito que a tabela está ordenada para um dado h . Qual o maior valor de h que justifica a afirmação e os dados na tabela?

A. $h = 2$	B. $h = 3$	C. $h = 4$	D. $h = 5$
------------	------------	------------	------------

5. Após a aplicação de um determinado número de iterações do algoritmo de “união rápida equilibrada”, no problema da conectividade com 12 objetos, identificados por números inteiros entre 0 e 11, obteve-se a seguinte tabela.

[0, 0, 0, 3, 3, 9, 6, 1, 1, 9, 0, 3]

Assume que de seguida se analisam os seguintes pares: 8 – 10 e 4 – 7, efectuando as alterações daí decorrentes, quando necessário. Qual é a tabela resultante?

A.	[0, 0, 0, 0, 3, 9, 6, 1, 1, 9, 0, 3]	B.	[3, 0, 0, 3, 3, 9, 6, 1, 1, 9, 0, 3]
C.	[0, 0, 0, 0, 3, 9, 6, 1, 10, 9, 0, 3]	D.	[3, 0, 0, 3, 3, 9, 6, 1, 10, 9, 0, 3]

6. Considere o resultado de um varrimento in-fixado a uma árvore binária **A**: 1-3-4-5-9-8-7. Para que uma árvore binária **B**, com varrimento pós-fixado igual a 1-4-3-5, seja sempre sub-árvore de **A**, indique qual dos seguintes pares de condições se têm de verificar:

A.	A tem varrimento pós-fixado: 1-3-4-9-8-7-5 B tem varrimento in-fixado: 1-3-4-5	B.	A tem varrimento pós-fixado: 1-3-4-9-8-7-5 B tem varrimento pré-fixado: 5-3-1-4
C.	A tem varrimento pós-fixado: 1-4-3-9-8-7-5 B tem varrimento pré-fixado: 5-4-3-1	D.	A tem varrimento pós-fixado: 1-4-3-9-8-7-5 B tem varrimento in-fixado: 1-3-4-5

PARTE II - Questões de Escolha Binária (V/F)

Preencha as respostas na tabela (usando apenas letras maiúsculas – V(erdadeira) ou F(alsa)). Todas as questões de escolha múltipla seguintes valem 0.50 valores. Estas questões de escolha múltipla não respondidas ou erradas são cotadas com 0 valores.

Questão	7	8	9	10	11	12	13	14
Resposta								

- Para a recorrência $C_N = 3C_{N/2} + N \lg N$ a complexidade extrínseca que lhe está associada é limitada superiormente por $N^{\lg_2 3}$.
 - Uma dada instrução para ser considerada básica tem de possuir o mesmo tempo de execução em diferentes computadores.
 - A complexidade de execução temporal é tanto maior quanto maior for o número de linhas de código.
 - Em qualquer grafo com arestas de pesos todos distintos, dado qualquer nó, a aresta de menor peso incidente nesse nó faz necessariamente sempre parte de qualquer MST do grafo.
 - Se o algoritmo de ordenação de *Quicksort*, na versão padrão sem qualquer tipo de melhoramento para casos especiais, for aplicado numa tabela já ordenada, o custo computacional é quadrático.
 - O tempo de execução do algoritmo de união rápida não é afectado pela ordem de leitura dos dados de entrada.
 - Numa tabela de dispersão de dimensão M, com N elementos, quando as colisões são resolvidas por dupla dispersão, o número médio de comparações não depende do factor de carga (N/M).
 - A implementação de um acervo com recurso a um vector auxiliar para guardar a posição de cada elemento (acervo indirecto) permite que a modificação da prioridade de um elemento específico seja feita em tempo de execução proporcional a $\mathcal{O}(1)$.
-

Responda em folhas separadas. Não se esqueça de mudar de folha

PARTE III - Questões de Desenvolvimento

Responda a cada uma das questões de desenvolvimento em folhas de exame separadas e devidamente identificadas com nome e número.

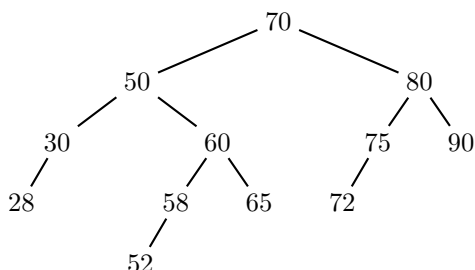
- [5.0] 15. O **quadrado** de um grafo direccionado $G = (V, E)$ define-se como o grafo $G^2 = (V, E^2)$ tal que $(u, w) \in E^2$ se e só se $(u, w) \in E$ ou se para algum $v \in V$, tanto $(u, v) \in E$ como $(v, w) \in E$. Ou seja, G^2 contém as arestas originais e ainda uma aresta entre u e w sempre que G possua um caminho com exactamente duas arestas entre u e w .
- [3.0] a) Escreva código que implemente um algoritmo para produzir G^2 a partir de um dado G que esteja representado por matriz de adjacências. Utilize como assinatura da função a indicada abaixo e assuma que a estrutura do grafo é a indicada à direita.
- ```
typedef struct _grafo {
 int V;
 int E;
 int **mat;
} Grafo;
```
- Grafo \*createG2(Grafo \*G);
- [0.5] b) Para um grafo com  $V$  vértices e  $E$  arestas, indique qual a complexidade computacional do seu algoritmo.
- [1.5] c) Considere o caso do grafo ser representado por vector de listas de adjacências. Analise, justificando, a complexidade do seu algoritmo nesta representação caso o grafo seja esparso ou seja denso.

---

Responda em folhas separadas. Não se esqueça de mudar de folha

---

- [4.5] 16. Considere uma árvore binária, ordenada e balanceada AVL em que é possível efectuar operações de inserção (**i** x) e remoção (**d** y). Assumindo uma árvore inicialmente vazia, suponha que são feitas, em sequência, as seguintes operações:
- i 50; i 70; i 30; i 20; i 10; i 40; i 25; i 35; i 28; i 72; i 42; i 48;
- [2.0] a) Indique qual o estado da árvore após cada operação, e sempre que haja uma alteração de uma ligação na árvore indique a razão de ser da mesma e justifique o procedimento a executar.
- [0.5] b) No exemplo anterior foram efectuadas operações de inserção e como resultado de algumas dentre elas, foi necessário alterar ligações na árvore para a deixar balanceada. No pior caso quantas operações de balanceamento são efectuadas após uma inserção.
- [1.0] c) Considere a árvore representada na figura seguinte. Assuma que nessa árvore é feita uma operação de remoção do nó com o valor 90 (i.e. é executada a operação **d** 90). Indique, justificando, que operações é necessário efectuar, e por que ordem, para reestabelecer o balanceamento (AVL) da árvore e qual o resultado final.



- [1.0] d) Diga, justificando, qual a complexidade de execução das operações de inserção e de remoção numa árvore binária ordenada AVL contendo  $N$  nós.

---

**Responda em folhas separadas. Não se esqueça de mudar de folha**

---

- [2.0] 17. Num grafo ligado não direccionado pretende-se utilizar o **algoritmo de Prim** para produção da MST (*Minimum Spanning Tree*). Assuma que o algoritmo é executado na implementação para grafos representados por listas de adjacências usando fila prioritária e que apenas os vértices de custos finitos são introduzidos na fila prioritária.

Após a execução de algumas iterações do algoritmo os vectores `st []` e `wt []` neste estado intermédio são os seguintes:

|    |   |   |          |   |   |   |          |   |    |          |   |   |    |
|----|---|---|----------|---|---|---|----------|---|----|----------|---|---|----|
| st | = | 3 | -1       | 3 | 3 | 3 | -1       | 2 | 10 | -1       | 2 | 0 | 10 |
| wt | = | 8 | $\infty$ | 4 | 0 | 6 | $\infty$ | 9 | 10 | $\infty$ | 5 | 2 | 12 |

- [0.5] a) Indique qual ou quais os vértices que já estão de certeza na MST final. Justifique.
- [0.75] b) Indique qual ou quais os vértices que estão de certeza ainda na fila prioritária, sem ter entrado na MST. Justifique.
- [0.75] c) Tomando o vértice 2 como origem, e aplicando o **algoritmo de Dijkstra** para produzir a SPT (*Shortest Path Tree*), qual será o segundo vértice a ser acrescentado à SPT?