

Estruturas para Sistemas de Tempo Discreto

1 Introdução

Nesse documento encontra-se um resumo para o arquivo “estruturas_sistemas_discreto.pdf”. O arquivo em questão discute representações gráficas e estruturas básicas para representar sistemas lineares e invariantes no tempo (sistemas LIT), especificamente para o caso discreto. O objetivo dessas representações consiste tanto em proporcionar uma forma sistemática de descrever e analisar os sistemas, como também permitir maior facilidade na implementação desses sistemas utilizando componentes de *hardware*. Esses sistemas são comumente definidos através de funções de transferência, $H(z)$, ou de uma equivalente equação de diferenças, comumente para $y[n]$, nas formas gerais:

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^M \beta_j z^{-j}}{\sum_{k=0}^N \alpha_k z^{-k}} \quad \text{e} \quad y[n] = \sum_{k=1}^N \alpha_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M \beta_k x[n-k]. \quad (1)$$

Notamos na equação anterior que a implementação dessas equações exigem três operações básicas: *adição de sequências*, *multiplicação de uma sequência por uma constante* e *atraso*. Essas operações são representadas graficamente na Figura 1.

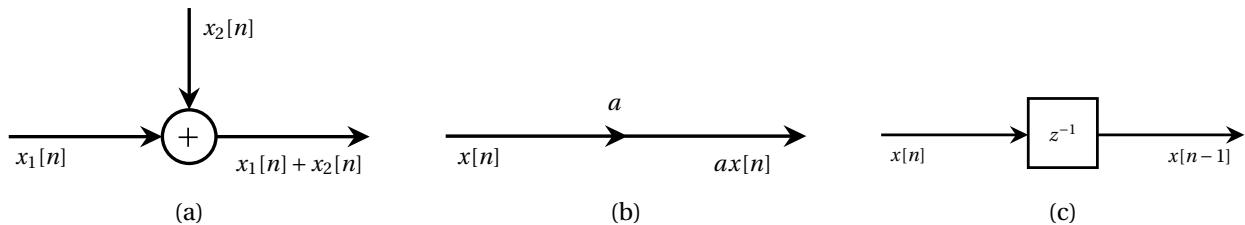


Figure 1: Representação gráfica das operações entre sinais discretos.

2 Representação em Diagrama de Blocos

Considere um sistema descrito por uma equação de diferenças genérica como a exposta em (1). Podemos representar o sistema através de um diagrama de blocos genérico tal qual representado na Figura ???. Esse diagrama é uma realização direta da equação de diferenças, sendo cada cadeia de blocos representativo de um somatório da fórmula.

[img]

Esse formato, denominado de *Forma Direta I*, define uma variável $v[n]$ que equivale a

$$v[n] = \sum_{k=0}^M \beta_k x[n-k]. \quad (2)$$

No domínio \mathbb{Z} , teremos a seguinte representação para a transformada dos sinais $v[n]$ e $y[n]$:

$$V(z) = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^M \beta_k z^{-k} \right)}_{H_1(z)} X(z); \quad Y(z) = \frac{1}{\underbrace{1 - \left(\sum_{k=1}^M \alpha_k z^{-k} \right)}_{H_2(z)}} V(z), \quad (3)$$

o que implica que $Y(z) = H_2(z) [H_1(z) X(z)] = H_1(z) [H_2(z) X(z)]$. Considerando $W(z) = H_2(z) X(z)$, podemos obter a mesma equação de diferenças anterior agora na forma:

$$w[n] = \sum_{k=1}^N \alpha_k w[n-k] + x[n]; \quad y[n] = \sum_{k=0}^M \beta_k w[n-k]. \quad (4)$$

Essa forma alternativa para as equações sugere uma topologia para o diagrama de blocos no formato da Figura ?? . Essa fórmula é denominada de *Forma Direta II*.

[img]

As duas formas anteriormente derivada são semelhantes, com exceção de uma inversão entre as constantes de multiplicação. No entanto, nota-se que os mesmos sinais $w[n-k]$ são representados de forma repetida na cadeia esquerda e direita do diagrama de blocos. Isso evidencia a possibilidade de uma simplificação dessa representação para um diagrama de blocos de cadeia única, que reduz a complexidade de implementação desse sistema. Essa nova forma, apresentada na Figura ?? , é denominada de *Forma Direta II Canônica*.

[img]

3 Representação em Diagrama de Fluxo de Sinais

Uma outra representação gráfica para sistemas LIT consiste nos diagramas (ou grafos) de fluxo. Essa representação consiste num conjunto de nós e ramos interconectados, no qual cada nó representa um sinal e um ramo, possivelmente associado a um peso, indica a direção do fluxo desse sinal (ou o valor de sinais que entram nesse nó). Nesses diagramas, os ramos que incidem sobre um nó são somados para compor o valor do sinal naquele ponto, e esse valor é transmitido pelos ramos que incidem a partir desse nó. A Figura ?? demonstra um caso genérico de um diagrama de fluxo mostrando um nó de origem (sobre o qual não incide nenhum ramo), um nó de saída (que não possui nenhum ramo de saída) e os nós intermediários.

[img]

Uma vez que o Diagrama de Fluxo representa a mesma informação que um Diagrama de Bloco, é sempre possível obter uma representação equivalente entre essas duas formas ao substituir um bloco de soma por um nó, e um bloco de atraso por um ramo carregando a variável z^{-1} . Dessa forma, é sempre possível obter *Formas Direta I* e *Formas Diretas II* utilizando essa notação, como demonstrado na Figura ?? .

[img]

4 Estruturas Básicas para Sistemas IIR

Além da *Forma Direta I* e da *Forma Direta II*, existem também outras possibilidades de representar um Sistema IIR.

Formas em Cascata

Considere a função de transferência genérica exposta em (1). Considere, agora, a seguinte fatoração:

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - f_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 - g_k z^{-1}) (1 - g_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - d_k z^{-1}) (1 - d_k^* z^{-1})}, \quad (5)$$

onde $M = M_1 + 2 * M_2$ e $N = N_1 + 2 * N_2$. Nessa representação, os fatores f_k e c_k estão associados com os polos e zeros reais do sistema, enquanto (g_k, g_k^*) e (d_k, d_k^*) são os fatores associados aos pares de zeros e polos complexos conjugados. Essa formulação sugere a possibilidade de representar o sistema com um estrutura modular em cascata de sistemas de primeira e segunda ordem. Um formato específico em cascata, por exemplo, consiste na implementação baseada em secções de segunda ordem, obtido ao combinar pares de fatores reais e/ou pares de complexos conjugados:

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N_s} \frac{\beta_0 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}}, \quad (6)$$

onde $N_s = \lfloor (N+1)/2 \rfloor$ e assumimos que o sistema é causal ($M \leq N$). Para construir uma representação gráfica, podemos considerar a *Forma Direta II Canônica* e as equações de diferenças associadas à função de transferência anterior. O diagrama, apresentado na Figura ?? para o caso de $N = 6$, é resultado da aplicação às equações

$$y_0[n] = x[n], \quad (7)$$

$$w_k[n] = \alpha_{1k} w_k[n-1] + \alpha_{2k} w_k[n-2] + y_{k-1}[n], \quad k = 1, 2, \dots, N_s, \quad (8)$$

$$y_k[n] = \beta_{0k} w_k[n] + \beta_{1k} w_k[n-1] + \beta_{2k} w_k[n-2], \quad k = 1, 2, \dots, N_s, \quad (9)$$

$$y[n] = y_{N_s}[n]. \quad (10)$$

[img]

Forma Paralela

Uma função de transferência racional com coeficientes reais pode ser expressa da seguinte forma:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k (1 - e_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1}) (1 - d_k^* z^{-1})} = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{(e_{0k} + e_{1k} z^{-1})}{(1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2})} \quad (11)$$

onde $N = N_1 + 2N_2$, $N_p = M - N$ e $N_s = \lfloor (N+1)/2 \rfloor$. Essa representação implica numa outra forma alternativa, denominada de *Forma Paralela*, para a representação de sistemas, indicada pela soma de N_p secções de multiplicação simples em paralelo com N_s secções de segunda-ordem com um zero. A Figura ?? exemplifica o diagrama para o caso $M = N = 6$.

[img]

Formas Transpostas

Um procedimento comum utilizado para transformar diagramas de fluxo em formas equivalentes é o denominado de *Transposição* ou *Diagramas de Fluxo Reverso*. A *Transposição* pode ser aplicado a qualquer uma das estruturas discutidas anteriormente, e tem o efeito de inverter a ordem sobre a qual os componentes são implementados. O procedimento é descrito pelos passos:

1. Inverta as direções de todos os ramos da rede;
2. Mantenha as transmitâncias (ganhos) dos ramos;
3. Troque os papéis da entrada e da saída (nós fontes se tornam nós de saída e vice-versa).

A Figura ?? exemplifica o efeito da *Transposição* para um sistema de primeira ordem e um sistema de segunda ordem, respectivamente.

[img]

5 Estruturas Básicas para Sistemas FIR

As estruturas de um Sistema de Resposta ao Impulso Finito (Sistema FIR) podem ser consideradas como caso particulares das estruturas para os sistemas IIR. No caso de um Sistema FIR, a função de transferência possui apenas zeros (exceto os polos em $z = 0$), e possui a forma:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M \beta_k x[n-k]. \quad (12)$$

Forma Direta

A representação gráfica da Forma Direta pode ser obtida simplesmente ao excluir as cadeias relacionadas aos fatores dos polos da representação apresentada anteriormente. Um exemplo dessa aplicação é mostrada na Figura ??.

[img]

Forma em Cascata

Para obter uma forma em cascata, a função de transferência de um Sistema FIR pode ser fatorada da seguinte forma:

$$H(z) = \sum_{n=0}^M = \prod_{k=1}^{M_s} (\beta_{0k} + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}), \quad (13)$$

em que $M_s = \lfloor (M+1)/2 \rfloor$. Um exemplo do diagrama de fluxo em cascata é disposto na Figura ??.

[img]

Sistemas FIR com Fase Generalizada

Dentre os sistemas LTI que apresentam fase linear generalizada, destacam-se os sistemas FIR do tipo:

$$h[n] = \pm h[M-n], \quad n = 0, 1, \dots, M. \quad (14)$$

Existem quatro possíveis categorias para sistemas dessa forma: Tipo I, Tipo II, Tipo III e Tipo IV. As categorias I e II são definidas para $h[M-n]$ positivo, mas com M par e ímpar respectivamente. Já as categorias III e IV são definidas para $h[M-n]$ negativo, com M par e ímpar respectivamente. Aplicando a fórmula de sistema FIR com fase linear generalizada à forma genérica da equação de diferenças resulta

nas fórmulas:

$$y[n] = \begin{cases} \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k](x[n-k] + x[n-M+k]) + h[M/2]x[n-M/2] & \text{(Tipo I)} \\ \sum_{k=0}^{(M-1)/2} h[k](x[n-k] + x[n-M+k]) & \text{(Tipo II)} \\ \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k](x[n-k] - x[n-M+k]) + h[M/2]x[n-M/2] & \text{(Tipo III)} \\ \sum_{k=0}^{(M-1)/2} h[k](x[n-k] - x[n-M+k]) & \text{(Tipo IV)} \end{cases} \quad (15)$$

Os diagramas equivalentes para as equações acima são apresentadas na Figura ??.

[img]