

---

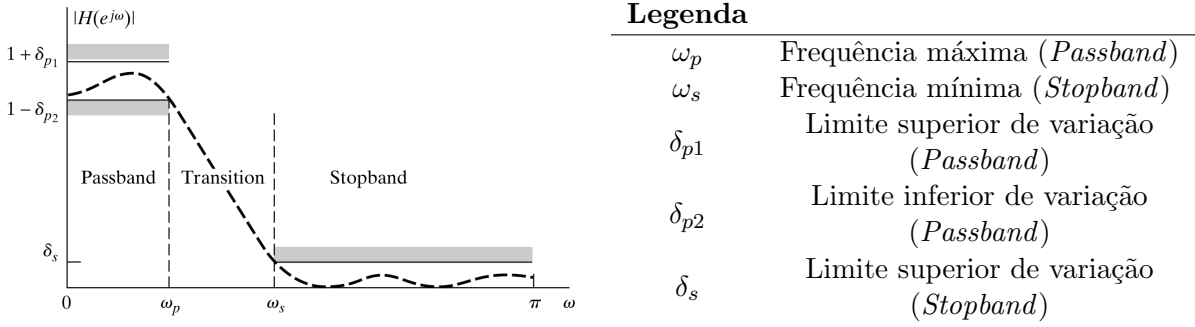
**PROJETO DE FILTROS DIGITAIS**  
**2º Exercício Computacional**

---

Otacílio Bezerra Leite Neto  
Universidade Federal do Ceará  
Departamento de Engenharia de Teleinformática  
[minhotmog@gmail.com](mailto:minhotmog@gmail.com)

# 1 Projeto de Filtro Butterworth

Neste documento apresenta-se o procedimento para o projeto de um Filtro Digital do tipo IIR (Infinite Impulse Response) utilizando dois métodos distintos: *Invariância do Impulso* e *Trasnformação Bilinear*. Um filtro de passa-baixa é um dispositivo designado a manter componentes de frequência de um sinal antes de uma certa *frequência de corte*. Da mesma forma, esse filtro deve "rejeitar" as componentes de frequência desse sinal a partir dessa mesma frequência. Uma vez que um filtro ideal é impraticável, trabalha-se com filtros que realizem uma filtragem dado as especificações digitais tais como indicadas na Figura abaixo.



Nesse trabalho, tratamos especificamente do Filtro de Butterworth, cuja função de transferência analógica é representada no formato:

$$H_c(s) = \frac{K}{\prod_{i=0}^{N-1} \left( s - \Omega_c e^{j\left(\frac{\pi(1+2k+N)}{2N}\right)} \right)}, \quad (1.1)$$

onde o ganho  $K = \lim_{s \rightarrow 0} \text{den}(H_c(s))$ , e os parâmetros  $\Omega_c$  e  $N$  são, respectivamente, a **frequência de corte** e a **ordem** do filtro. O procedimento para obter o filtro digital,  $H(z)$ , consiste em obter os parâmetros do filtro analógico e então convertê-lo para a forma digital, utilizando um dos métodos mencionados. O procedimento para cada método é detalhado abaixo.

## Invariância do Impulso

Por esse método, consideramos que a resposta do filtro digital para um impulso é obtida através de amostras discretas da resposta ao impulso do filtro analógico. Ou seja,

$$h[n] = T_d h_c(nT_d), \quad (1.2)$$

onde  $T_d$  representa o tempo de amostragem. Com o método de invariância do impulso, então, teremos a seguinte relação entre as especificações e os parâmetros do Filtro de Butterworth:

$$N = \left\lceil \frac{1}{2} \frac{\log\left(\frac{1}{(1-\delta_{p2})^2} - 1\right) - \log\left(\frac{1}{(\delta_s)^2} - 1\right)}{\log(\omega_p) - \log(\omega_s)} \right\rceil; \quad \Omega_c = \frac{\omega_p}{10^{\frac{1}{2N} \log\left(\frac{1}{(1-\delta_{p2})^2} - 1\right)}} \quad (1.3)$$

Com esses parâmetros, podemos utilizar a Função de Transferência em (1.1) e, após uma expansão por frações parciais, converter para a versão digital através da fórmula:

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{A_i}{1 - e^{s_i} z^{-1}}, \quad (1.4)$$

onde

$$s_i = \Omega_c e^{j\left(\frac{\pi(1+2i+N)}{2N}\right)}; \quad A_i = \lim_{s \rightarrow s_i} H_c(s) = \frac{K}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N-1} (s - s_j)} \quad (1.5)$$

## Transformação Bilinear

Para o método de Transformação Bilinear, o filtro digital é obtido diretamente através do filtro analógico simplesmente ao aplicar a transformação:

$$s = 2 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \rightarrow H(z) = H_c \left( 2 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \quad (1.6)$$

Substituindo  $z = e^{j\omega}$ , é possível obter a relação

$$s = \alpha + j\Omega = \frac{2j}{T_d} \tan(\omega/2) \quad (1.7)$$

que diretamente resultam em  $\Omega = 2 \tan(\omega/2)$ , assumindo  $T_d = 1$ . Dessa forma, os parâmetros do filtro analógico são obtidos de forma semelhante ao método da Invariância de Impulso, mas transformando as frequências  $\Omega_p = 2 \tan(\omega_p/2)$  e  $\Omega_s = 2 \tan(\omega_s/2)$  tal que:

$$N = \left\lceil \frac{1 \log \left( \frac{1}{(1-\delta_p^2)^2} - 1 \right) - \log \left( \frac{1}{(\delta_s^2)^2} - 1 \right)}{2 \log(\tan(\omega_p/2)) - \log(\tan(\omega_s/2))} \right\rceil; \quad \Omega_c = \frac{2 \tan(\omega_s/2)}{10^{\frac{1}{2N} \log \left( \frac{1}{(\delta_s^2)^2} - 1 \right)}}. \quad (1.8)$$

## 2 Realização de Filtros Analógicos

Dado uma função de transferência de um Filtro Analógico, é sempre possível obter e implementar o sistema físico equivalente na forma de um circuito elétrico. A síntese de um circuito RLC para um filtro de passa-baixa pode ser realizado ao transformar a função de transferência do filtro,

$$H_c(s) = \frac{1}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}, \quad (2.1)$$

no formato em cascata de

$$Z_1 = \frac{1}{Y_1 + \frac{1}{Z_2 + \frac{1}{Y_3 + \dots \frac{1}{Z_{n-1} + \frac{1}{Y_n + 1/R_L}}}}}, \quad (2.2)$$

do qual  $Y_i$  e  $Z_j$  são a transformada de Laplace dos capacitores e indutores  $C_i$  e  $L_i$ , respectivamente, dispostos na topologia série-paralela indicada na figura abaixo. Um resistor de resistência  $R_L$ , não mostrado no diagrama, também é conectado nos terminais do último capacitor, e é nos seus terminais que se afere a tensão resultante do circuito. Nessa topologia, temos a possibilidade de adicionar um resistor no início do circuito para representar o ganho do sistema.

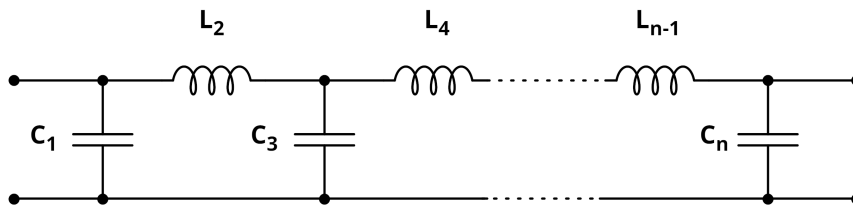


Figure 2.1: Topologia de Cauer, ou topologia *Ladder Network*.

### 3 Resultados

Abaixo são demonstrados os resultados para aplicação dos métodos apresentados anteriormente para o projeto e síntese de um filtro passa-baixa do tipo IIR através de um Filtro de Butterworth. O filtro foi projeto para alcançar as especificações:

$$\begin{cases} 0.99 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 & \text{se } 0 \leq |\omega| \leq 0.4\pi \\ |H(e^{j\omega})| \leq 0.001 & \text{se } 0.6\pi \leq |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (3.1)$$

#### Invariância do Impulso

Primeiramente, aplicamos a técnica da Invariância do Impulso para obter os parâmetros do filtro analógico. Utilizando as fórmulas em (1.3), teremos que:

$$N = \left\lceil \frac{1 \log\left(\frac{1}{(0.99)^2} - 1\right) - \log\left(\frac{1}{(0.001)^2} - 1\right)}{2 \log(0.4\pi) - \log(0.6\pi)} \right\rceil; \quad \Omega_c = \frac{0.4\pi}{10^{\frac{1}{2N} \log\left(\frac{1}{(0.99)^2} - 1\right)}}, \quad (3.2)$$

que então resultam em  $N = 22$  e  $\Omega_c = 1.373$ .

#### Transformação Bilinear

No caso da técnica de Transformação Bilinear, realizamos uma transformação não-linear das variáveis de frequência. Utilizando as fórmulas em (1.8), teremos que:

$$N = \left\lceil \frac{1 \log\left(\frac{1}{(0.99)^2} - 1\right) - \log\left(\frac{1}{(0.001)^2} - 1\right)}{2 \log(\tan(0.2\pi)) - \log(\tan(0.3\pi))} \right\rceil; \quad \Omega_c = \frac{\tan(0.3\pi)}{10^{\frac{1}{2N} \log\left(\frac{1}{(0.001)^2} - 1\right)}}, \quad (3.3)$$

que então resultam em  $N = 14$  e  $\Omega_c = 1.681$ .

#### Visualização da Resposta em Frequência

Uma vez que os parâmetros do filtro analógico são determinados, é possível realizar uma simulação da resposta do filtro, no domínio da frequência. Primeiramente, realizamos a simulação do sistema analógico dos dois filtros obtidos, utilizando a fórmula em (1.1). O resultado é demonstrado abaixo, analisando a magnitude em decibéis dessa resposta.

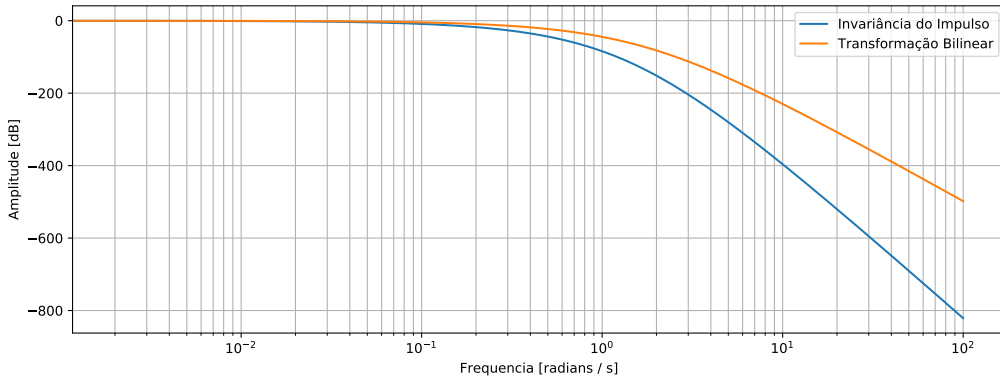


Figure 3.1: Resposta em frequência para as duas realizações do Filtro Analógico de Butterworth.

Podemos perceber que, dado a clara diferença entre os parâmetros obtidos pelos dois métodos, a resposta em frequência do filtro também demonstra uma clara diferença. No caso analógico, o

filtro obtido pelo método da invariância exibe um decaimento mais acelerado após determinada frequência, quando comparado com o filtro obtido por transformação bilinear.

Para o filtro digital, que consiste no foco do projeto, a resposta em frequência é obtida utilizando a fórmula em (1.4), no caso do método de Invariância do Impulso, e utilizando o filtro analógico com a transformação de entrada dada por 1.6, no caso do método de Transformação Bilinear. Os dois resultados são expostos abaixo.

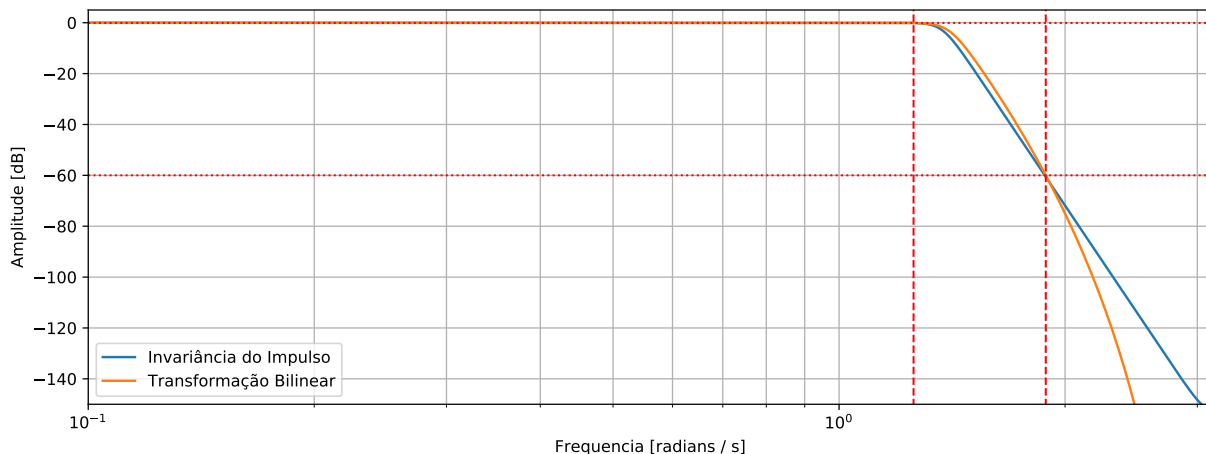


Figure 3.2: Resposta em frequência para as duas realizações do Filtro Digital IIR.

Nessa visualização, as frequências  $\omega_p$  e  $\omega_s$  são representadas pelas duas linhas vermelhas tracejadas, indicando a separação entre as bandas de passagem, banda de transição e banda de rejeição, respectivamente. Os limites superiores  $\delta_{p2}$  e  $\delta_s$ , por sua vez, são representados pelas linhas vermelhas pontilhadas. Podemos perceber que ambas as realizações do filtro demonstraram o comportamento de filtragem passa-baixa esperado. Adicionalmente, é possível observar que o filtro obtido pelo método de Transformação Bilinear, nesse caso, demonstrou um decaimento mais rápido na banda de rejeição quando comparado ao método de Invariância de Impulso, portanto demonstrando uma melhor performance nesse contexto.

## Realização do Filtro Analógico

Finalmente, demonstramos a realização do Filtro Analógico de Butterworth para a função de transferência determinada pelo método de Transformação Bilinear. Para a composição do circuito elétrico utilizamos a Topologia de Cauer (ou topologia *Ladder Network*), para a qual o circuito RLC equivalente possui a estrutura indicada pela figura abaixo:

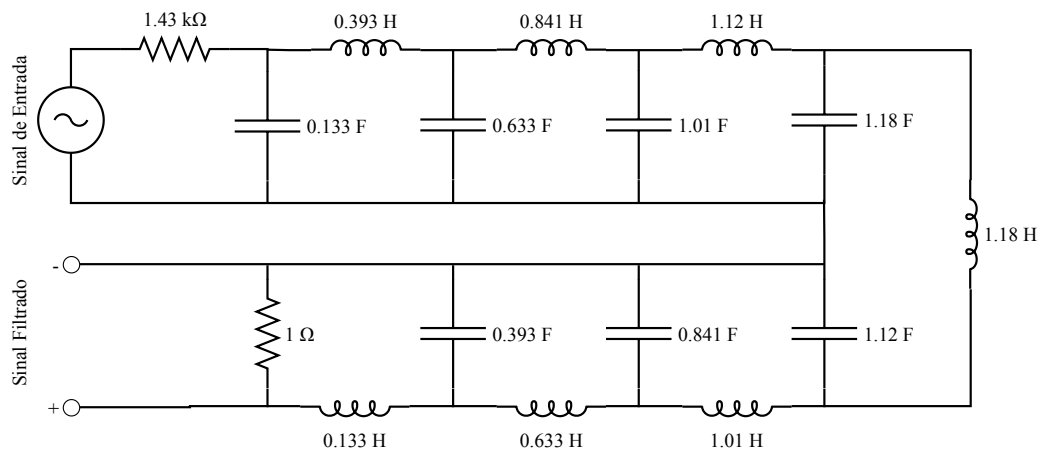


Figure 3.3: Circuito elétrico analógico para o Filtro de Butterworth.