TI0119 - PROCESSAMENTO DIGITAL DE SINAIS

TRANSFORMADA Z
1º Exercício Computacional

Otacílio Bezerra Leite Neto
Universidade Federal do Ceará
Departamento de Engenharia de Teleinformática
minhotmog@gmail.com

1 Sinal de Filtro de 1a Ordem

No primeiro exemplo, iremos visualizar os polos e zeros, no Plano Z, e os gráficos de magnitude e fase do seguinte sistema:

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \tag{1.1}$$

O resultado para diferentes valores de a entre $[-1.5, 1.5]$ são demonstrados na Fig. 1.1, onde cada cor relaciona um polo no Plano Z a um par de curvas de magnitude e fase.

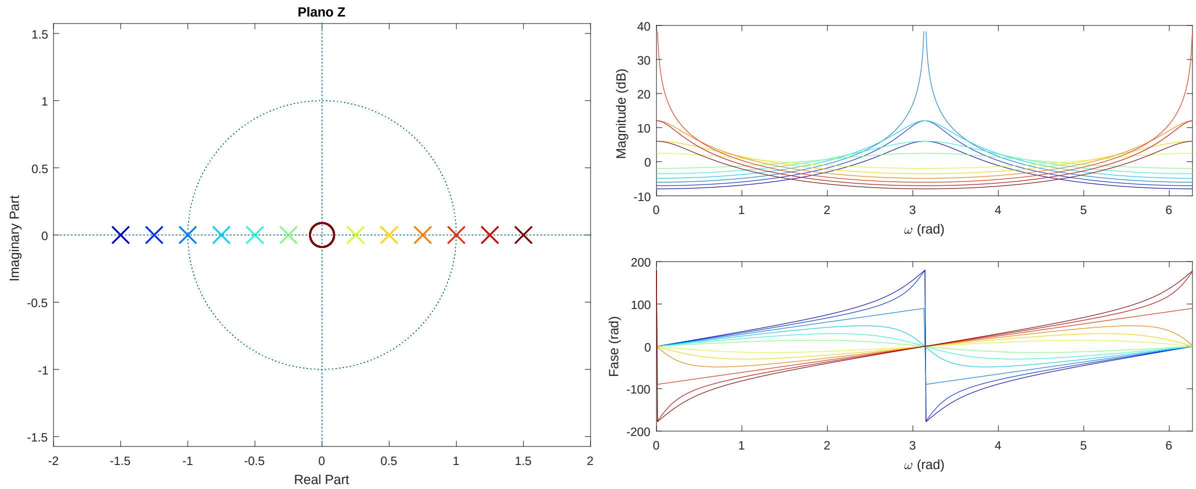

Figure 1.1: Visualização do Plano Z e das componentes de magnitude e fase para (1.1)

Pelas visualizações podemos notar uma relação entre a posição dos polos no plano complexo com as componentes de magnitude e fase do sinal resultante. Primeiramente, note que o valor do pico da magnitude tende a crescer à medida que fazemos os polos se aproximarem do círculo de raio unitário (centrado na origem). Nesse caso, os maiores picos se encontram na frequência $\omega = \pi$, quando o polo $a = -1$, e nas frequências $\omega = 0$ e $\omega = 2\pi$, quando o polo $a = 1$. Para entender o porquê dessa ocorrência, primeiro note que, pela álgebra complexa, a magnitude da resposta de um sistema pode ser calculada como:

$$|H(z)| = \frac{|N(z)|}{|D(z)|} = \frac{|1|}{|1 - az^{-1}|} \tag{1.2}$$

onde o denominador resultante é interpretado como a distância no plano Z de um ponto qualquer até o polo a. Nesse caso, se avaliarmos a magnitude do sinal quando $a = -1$, para um ponto no raio unitário dado como $z = 0 - j1$, veremos que um valor nulo surgirá no denominador. Como resultado, a magnitude calculada aproxima-se ao infinito quando o polo se aproxima do circulo de raio unitário. Perceba que o mesmo raciocínio é válido para o polo $a = 1$, quando avaliado sobre $z = 0 + 1j$.

Utilizando álgebra complexa, também é possível caracterizar a fórmula da fase:

$$\angle H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M} \angle(1 - n_k e^{-jw}) - \sum_{k=0}^{M} \angle(1 - d_k e^{-jw}) = -\angle(1 - ae^{-jw}) \tag{1.3}$$

onde n_k e d_k são, respectivamente, um zero e um polo do sistema. Note que, com essa fórmula, é possível interpretar a fase resultante como a diferença do ângulo de um vetor que parte do zero até um ponto no círculo unitário com o ângulo de um vetor que parte do polo até esse mesmo ponto. Por esse exato motivo é possível entender porque a fase do sistema sofre uma inversão mais acentuada na frequência $\omega = \pi$ quando os polos estão localizados no lado esquerdo do plano, enquanto que sofre uma inversão mais acentuada nas frequências $\omega = 0$ e $\omega = 2\pi$ quando os polos estão localizados no lado direito.

2 Sinal de Filtro de Ordem N

No segundo exemplo, iremos visualizar os polos e zeros, no Plano Z, e os gráficos de magnitude e fase do seguinte sistema:

$$H(z) = \frac{1 - a^n z^{-n}}{1 - az^{-1}} = 1 - a^{n-1} z^{-(n-1)} \tag{2.1}$$

Antes de mais nada, note que para este específico exemplo foi possível realizar o *Cancelamento de Polos e Zeros* para simplificar a função de trasnferência ao remover o polo em $z = a + j0$ com o zero existente nessa posição. O resultado para diferentes valores pares de n entre $[4, 10]$ são demonstrados na Fig. 2.1, para diferentes valores de a entre $[0.2, 0.8]$, e na Fig. 2.2, para diferentes valores positivos de a entre $[-0.8, -0.2]$, onde cada cor relaciona um zero no Plano Z a um par de curvas de magnitude e fase.

Pela visualização, o primeiro padrão que torna-se evidente consiste na relação do número de zeros no plano complexo com o número de componentes de frequência nas magnitudes e fases do sistema. De fato, como um círculo no Plano Z está relacionado a um valor de frequência, o número de zeros em um mesmo círculo diretamente indica o número de oscilações que a magnitude e a fase realizam em uma revolução completa de 2π. A distância dos zeros para o centro do plano (e, consequentemente, aos zeros do sistema) providenciam a informação da magnitude dos picos do sinal. Esse fato se torna ainda mais evidente se analisarmos a fórmula de Euler para o número complexo z na equação (2.1):

$$H(z) = 1 - a^{n-1} z^{-(n-1)} = 1 - a^{n-1} r^{-(n-1)} \left(cos[(n-1)\omega] - jsen[(n-1)\omega] \right) \tag{2.2}$$

onde $r^{-(n-1)}$ representa a amplitude do número complexo $z^{-(n-1)}$. Perceba, então, que um aumento do valor de n está diretamente relacionado à frequência das componentes oscilatórias do sinal.

Note que, no que cerne ao pico das magnitudes, todas as visualizações seguiram o mesmo resultado discutido anteriormente, onde nesse caso os picos se localizam nas frequencias $\omega = 0$ e $\omega = 2\pi$ quando apenas valores positivos de a se aproximam do círculo unitário, enquanto que os picos se localizam nas frequências $\omega = \pi$ no caso dos valores negativos de a, como demonstrado respectivamente nas duas figuras.

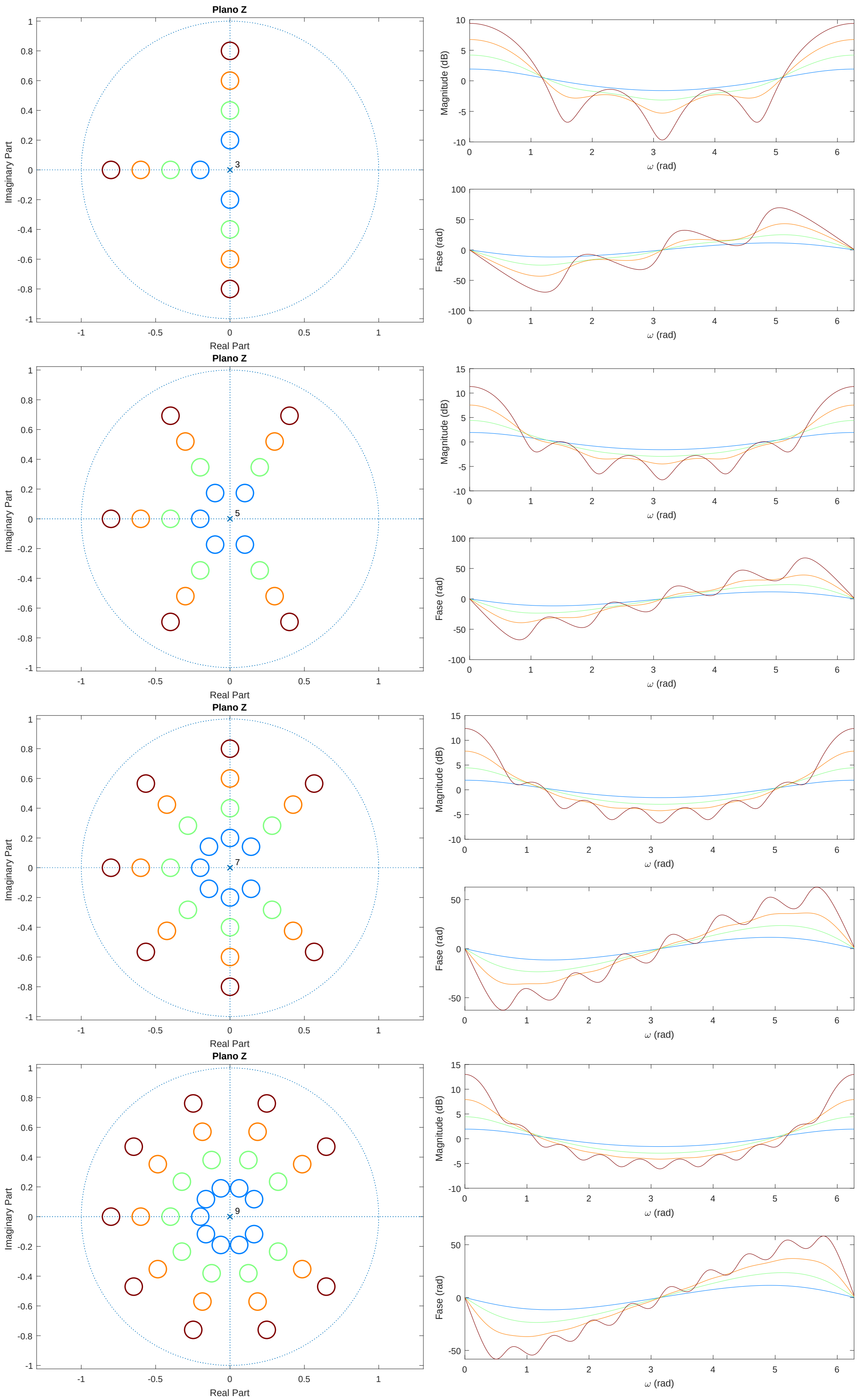

Figure 2.1: Visualização do Plano Z e das componentes de magnitude e fase para o sistema em (2.1) com o parâmetro $a > 0$

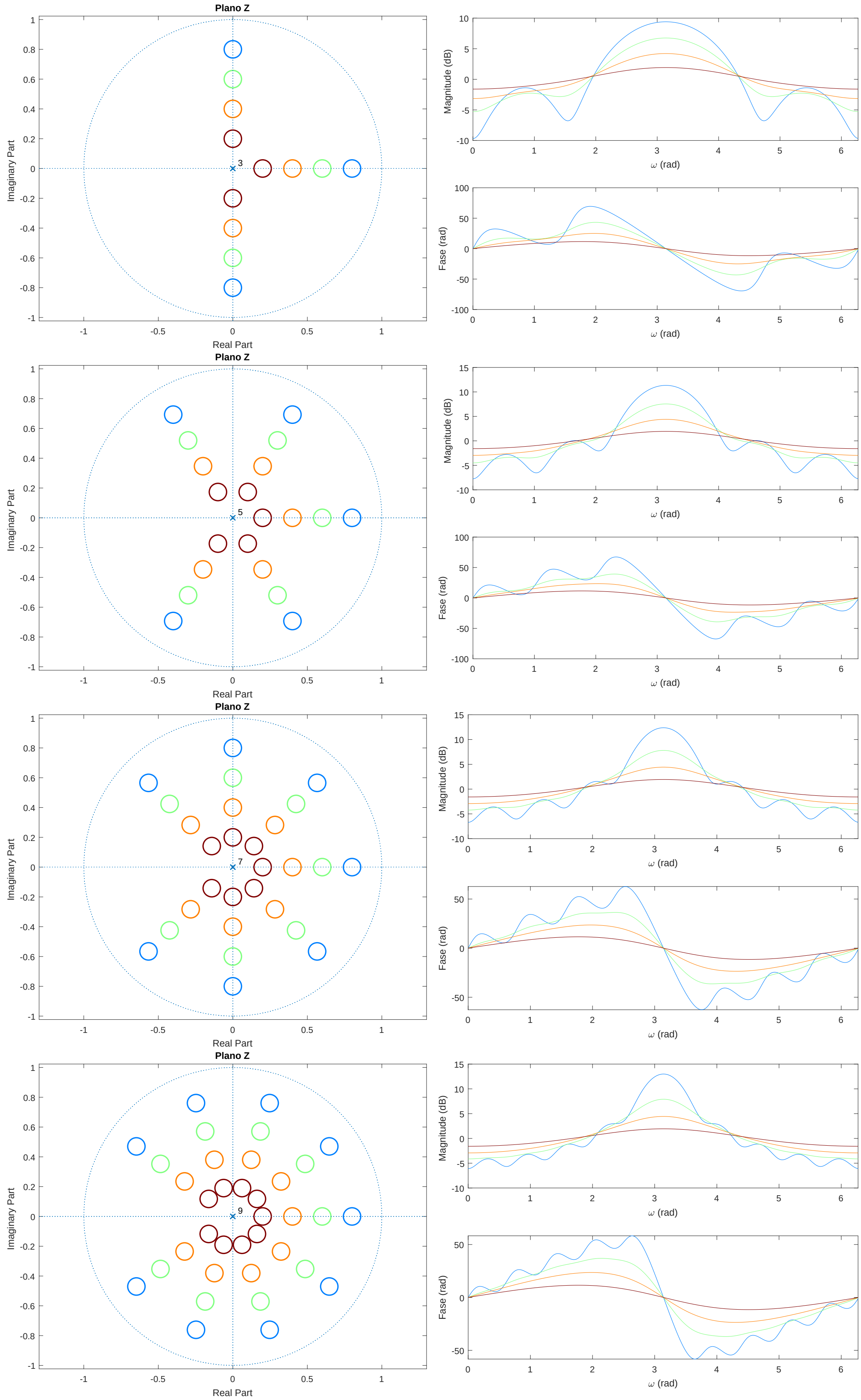

Figure 2.2: Visualização do Plano Z e das componentes de magnitude e fase para o sistema em (2.1) com o parâmetro $a < 0$