Chapitre 3

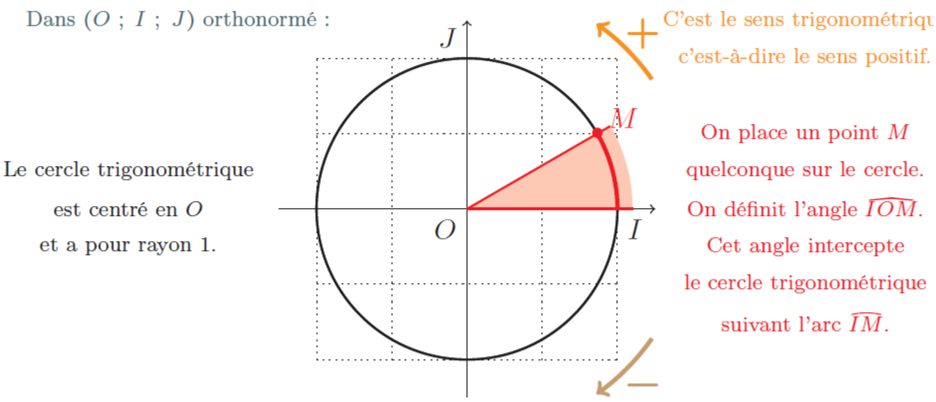
Trigonométrie

Table des matières

I. Orientation du plan et Cercle trigonométrique

Définition - Le cercle trigonométrique

1. Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle appelé sens direct (ou positif) L'autre sens est appelé sens indirect (négatif ou rétrograde).
2. Orienter le plan, c'est orienter tous les cercles du plan dans le même sens. L'usage est de choisir pour sens direct le sens contraire des aiguilles d'une montre, appelé aussi sens trigonométrique.
3. Le cercle de centre O, de rayon $R = 1$ et orienté dans le sens positif s'appelle le cercle trigonométrique. Son périmètre est égal à 2π.



II. Mesures des angles en Radian

1) Définition

Définition - Mesure en radians d'un angle

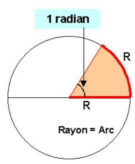
Le radian est une unité de mesure des angles. Pour mesurer un angle en radians, on utilise le cercle trigonométrique. La longueur de l'arc intercepté par cet angle est sa mesure en radian.
Soit x la mesure de l'angle en radian et R le rayon du cercle, alors :

$$\text{longueur de l'arc} = x \times R$$

Voir exemples de calculs de longueurs d'arc vus en classe.

Remarque :

1. On peut obtenir une mesure en radian positive ou négative en fonction du sens de parcours.
2. Un angle en radian a toujours une infinité de mesures.
3. Si le cercle a pour rayon 1, alors l'arc a pour longueur x.

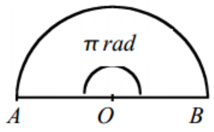


2) Proportionnalité entre radians et degrés

Théorème

Il y a proportionnalité entre les mesures en radians et les mesures en degrés d'un angle.

Un angle au centre plat (de 180°) intercepte un arc de longueur π. Il a donc pour mesure π radians.



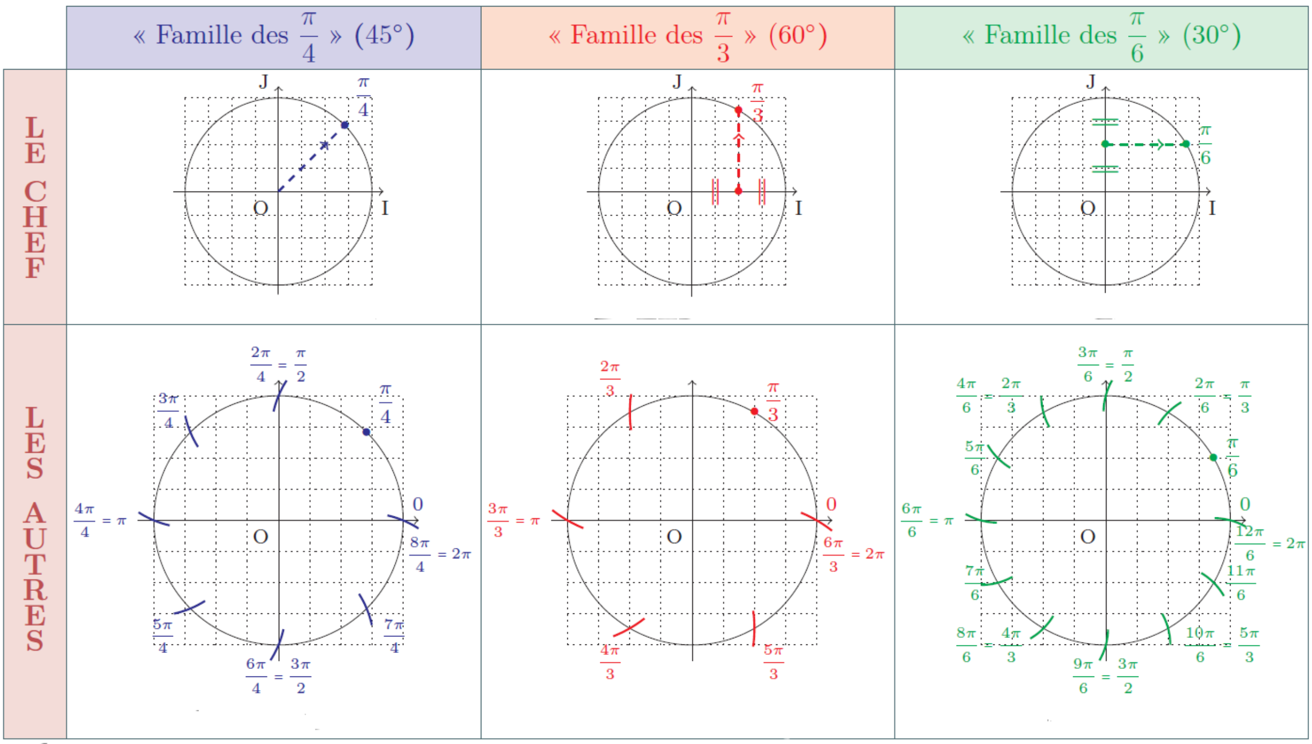
mesure en degrés (°)	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°	$\approx 57°$
mesure en radians (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π	1

Remarque : $1\text{rad} = \dfrac{180°}{\pi} \approx 57{,}3°$ et $1° = \dfrac{\pi}{180} \approx 0{,}0175\text{rad}$

Exemples :
Convertir $\frac{7\pi}{5}$ rad en degrés. Convertir 20° en radians.

III. Angles remarquables à connaître par coeur

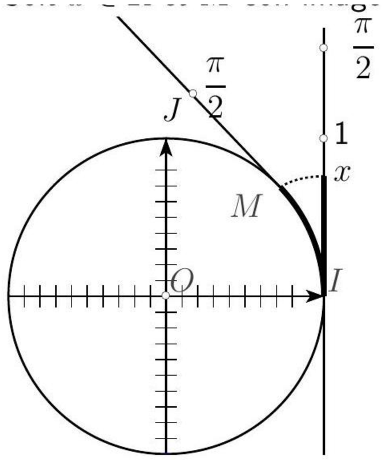
voir démonstrations faites en classe pour la construction des angles.



On tracera des cercles trigonométriques avec des rayons facilement divisibles par 2.

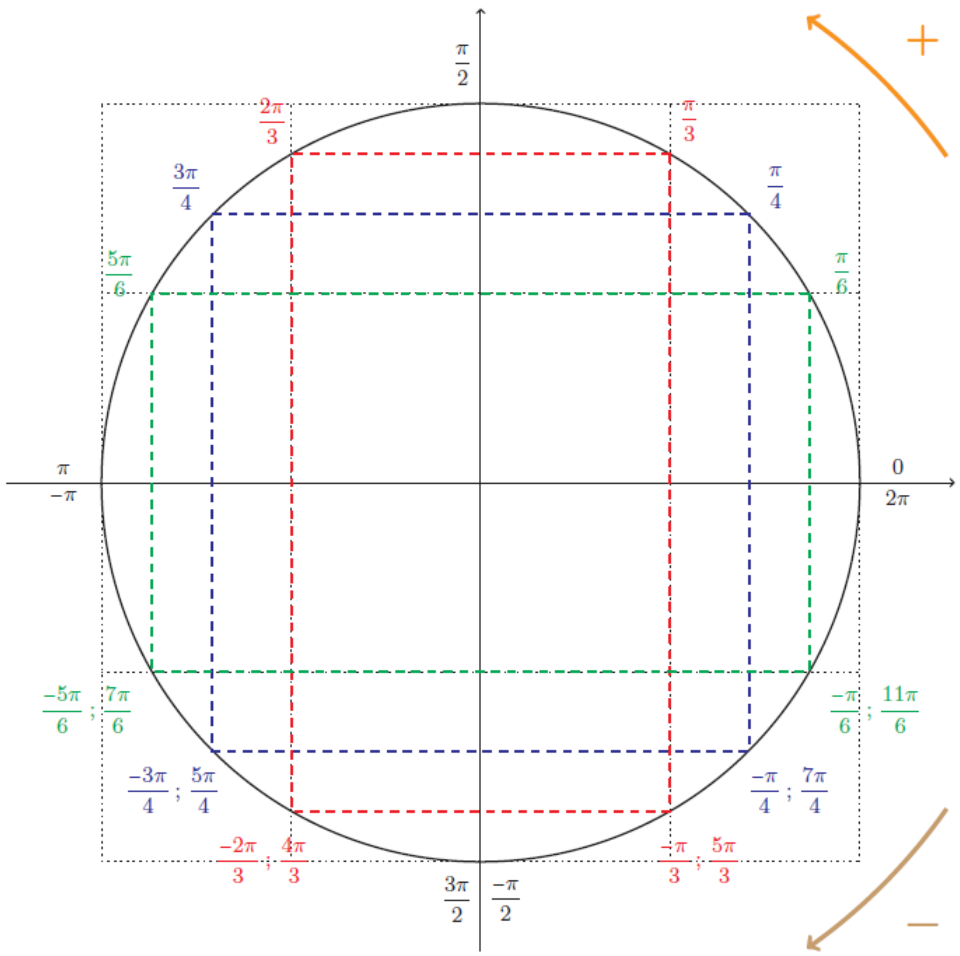
IV. Enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique et point image de x

Enroulons la droite des réels sur le cercle trigonométrique. Chaque réel x vient coïncider avec un unique point du cercle appelé **point image** de x.
Réciproquement, tout point M du cercle trigonométrique peut être repéré par une infinité de nombres réels par enroulement de la droite des réels. En effet si x repère le point M, alors $x + 2\pi$, $x + 4\pi$, $x - 2\pi$, $x - 4\pi$ ..., repèrent aussi le point M.



Exemple : Par exemple, la longueur d'un quart de cercle de rayon 1 étant $\frac{\pi}{2}$, le point J est associé à $\frac{\pi}{2}$, mais aussi à $\frac{\pi}{2} + 2\pi$, $\frac{\pi}{2} + 4\pi$, $\frac{\pi}{2} - 2\pi$ (après un ou deux tours dans le sens positif, ou un tour dans le sens négatif). I est repéré par les réels ....

Exercice : Repérage de points remarquables sur le cercle trigonométrique : savoir retrouver les lignes de construction.

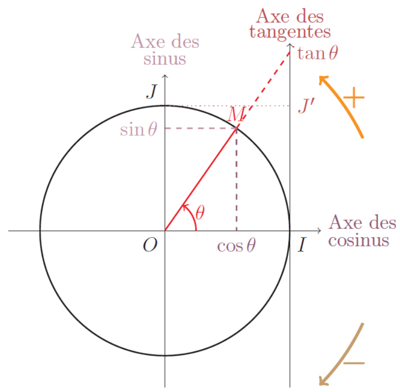


V. Cosinus et Sinus d'un réel

1) Définition

Définition - Coordonnées d'un point M sur le cercle trigonométrique

Soit $x \in R$ et M son point image sur le cercle trigonométrique. Dans le repère orthonormé $(O;I;J)$: • l'abscisse x_M du point M est le cosinus de x (noté $\cos x$),
• l'ordonnée y_M du point M est le sinus de x (noté $\sin x$)



Exemples :

$\cos(0) = \ldots$ *et* $\sin(0) = \ldots$; $\cos(\pi) = \ldots$ *et* $\sin(\pi) = \ldots$

$\cos(\frac{\pi}{2}) = \ldots$ *et* $\sin(\frac{\pi}{2}) = \ldots$; $\cos(-\frac{\pi}{2}) = \ldots$ *et* $\sin(-\frac{\pi}{2}) = \ldots$

2) Valeurs remarquables de cos et sin

Voir démonstrations faites en classe.

Propriété - Valeurs remarquables du sinus et du cosinus

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan(\theta)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Remarque : Les valeurs de la tangente sont hors programme.

3) Propriétés du sinus et du cosinus

Propriété

Pour tout réel $x \in R$, tout $k \in Z$ on a :

1. $\cos(x + k2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + k2\pi) = \sin(x)$
2. $-1 \leq \cos x \leq 1 \qquad -1 \leq \sin x \leq 1$
3. Relation fondamentale de trigonométrie :

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

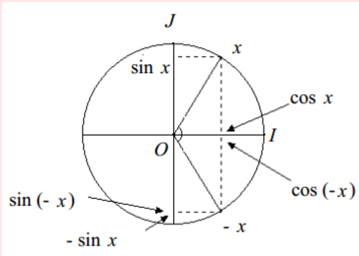
Propriété - parité du sinus et du cosinus (hors programme)

Pour tout $x \in R$ on a :

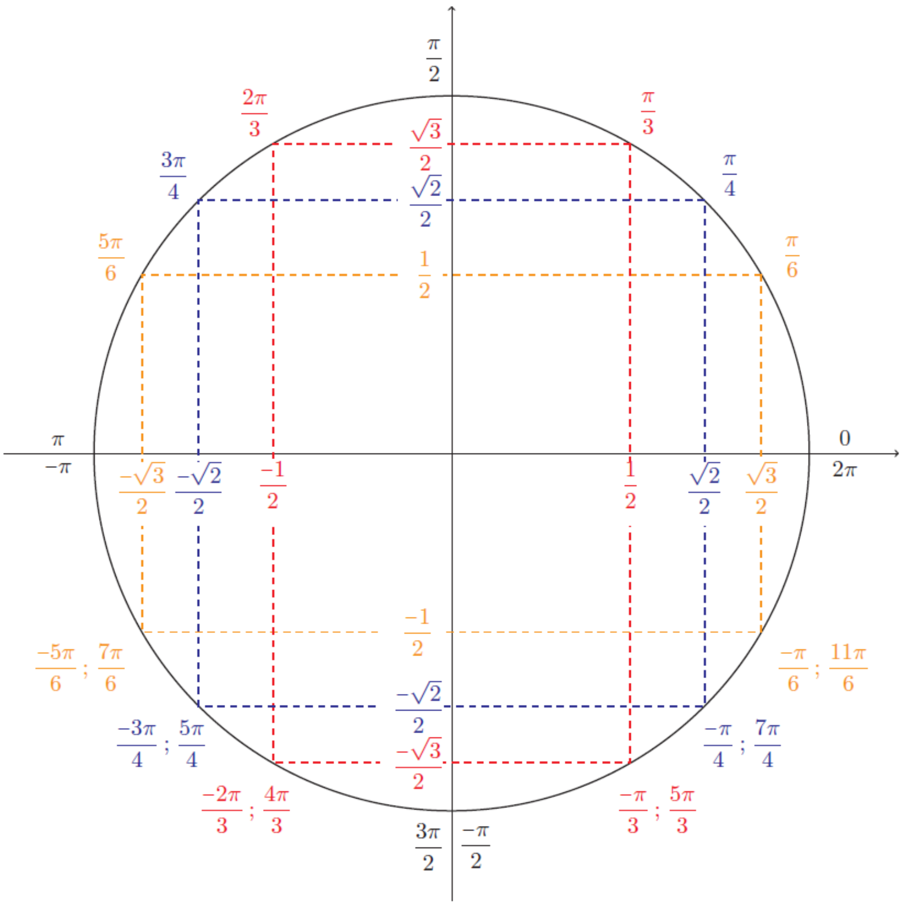
$$cos(x) = cos(-x)$$

et

$$sin(-x) = -sin(x)$$

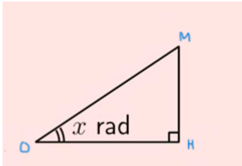


4) Cercle trigonométrique complet



5) Trigonométrie dans le triangle rectangle

Ce nouveau cosinus est-il différent de celui rencontré au collège ? Au collège et en seconde nous avons travaillé dans un triangle rectangle et maintenant dans un cercle.
Au collège, seuls les angles aigus ont un cosinus : on travaille dans le premier quart du cercle trigonométrique.
Si on appelle H le point d'intersection de la perpendiculaire à (OI) passant par M et (OI), nous sommes en présence d'un triangle OMH rectangle en H.



Dans le triangle HOM rectangle en H, on a :

$$\cos \widehat{HOM} = \frac{OH}{OM} = \frac{x_M}{1} = OH = \cos x$$

et

$$\sin \widehat{HOM} = \frac{HM}{OM} = \frac{y_M}{1} = HM = \sin x$$

Dans les deux cas $\cos x = OH$ et $\sin x = HM$. Les deux définitions coïncident donc. Il en est de même pour la tangente. En revanche, la définition du lycée ne se réduit plus aux seuls angles aigus.

VI. Fonctions sinus et cosinus

Définition - Fonctions cos et sin

La fonction $x \mapsto \cos(x)$ définie sur R s'appelle la fonction cosinus.
La fonction $x \mapsto \sin(x)$ définie sur R s'appelle la fonction sinus.
Leurs courbes représentatives sont appelées sinusoïdes.