COURS DE SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES - PREMIÈRE

SUITES NUMÉRIQUES

2 février 2024

Table des matières

I. Définition d'une suite

Définition.
Une **suite** (u_n) de nombres réels est une fonction dont la **variable** est un entier naturel.Elle est donc définie sur $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$ (comme $\mathbb{N}^*$).

$$u \colon \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longmapsto \ u(n) \end{cases}$$

Remarques :

1. Attention à ne pas confondre les deux notations :$u(n)$ est noté u_n et se lit : "u *indice* n" et s'appelle le *terme général* de la suite. La suite entière est représentée par (u_n).
2. Le terme suivant u_n est noté u_{n+1}. Attention c'est bien $n+1$ qui est en indice.
3. Une autre façon d'envisager les suites est de les considérer comme des listes infinies de nombres réels.

Exemple :

rang (ou indice) n	0	1	2	...
terme u_n	u_0	u_1	u_2	...

Exercice :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \frac{2}{n}$.
Calculer u_1 , u_2, u_{20}
Donner l'expression de u_{n+1}.

II. Modes de génération d'une suite

1. Suite définie par son terme général

Définition.
Une suite est définie par une formule explicite lorsque l'on peut calculer chaque terme u_n en fonction de n. Si f est une fonction définie sur $[0;+\infty[$, on peut définir une suite (u_n) par $u_n = f(n)$.

Exemples

1. (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{n+2}{n+1} = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$
2. (u_n) définie par : $u_n = n^2 + 5n + 3$.
3. (u_n) définie par : $u_n = \sqrt{n^2+5}$.
4. (u_n) définie par : u_n est la n^{e} décimale de π.
   Même si l'on ne connaît pas encore toutes les décimales de π, cette suite est explicite, car les décimales de π sont bien définies.

Quand une suite est définie de façon explicite, on peut calculer directement le terme de n'importe quel rang.

Exercice : Soit la suite (w_n), de terme général $w_n = \frac{1}{2}n - 1$.
Calculer u_3 et u_{50}.

2. Suite définie par récurrence

Définition.
Une suite est définie par une relation de récurrence lorsqu'elle est définie par la donnée de :
- un ou plusieurs premiers termes,
- une relation qui permet de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents.

Dans ce cas, pour calculer chaque terme u_n, il faut avoir calculé tous les termes qui le précèdent.

1. Soit (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

2. Suite de Fibonacci :
$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \end{cases}$.

3. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3+u_n} \end{cases}$ Calculer les trois premiers termes.
Est-il facile de calculer le terme u_{25} ? u_{100} ?

Remarque : Pour les suites définies par récurrence, on ne peut calculer un terme que si on connaît le précédent, mais de proche en proche, on peut calculer tous les termes en partant du premier. Pour certaines suites définies par récurrence, on essaye de se ramener à une définition explicite, mais ce n'est pas toujours facile ou possible !

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par récurrence telle que :
u: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 5 \end{cases}$ Calculer u_1, u_2, u_3

III. Représentation graphique

1. Suite définie de façon explicite

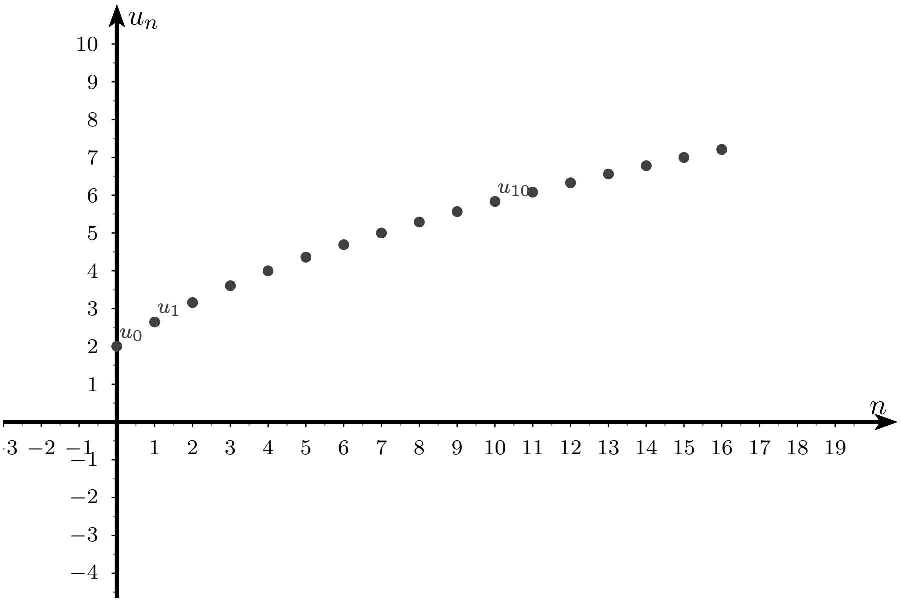
Définition.
Dans un repère $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$, la représentation graphique d'une suite (u_n) définie de manière explicite est l'ensemble des points M_n du plan de coordonnées $(n; u_n)$.

Remarque : Ce n'est pas une courbe, mais un nuage de points ! Les suites servent souvent à décrire des modèles discrets d'évolution. On aura donc en abscisse, n qui représentera souvent une variable de temps. (le nombre de secondes, heures, années, etc.) Le terme u_n sera donc le terme de la suite (u_n) à la n^{ieme} seconde, heure, année etc.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$u_n = \sqrt{3n+4} = f(n)$

On a alors la représentation graphique ci-dessous :



2. Suite définie par récurrence

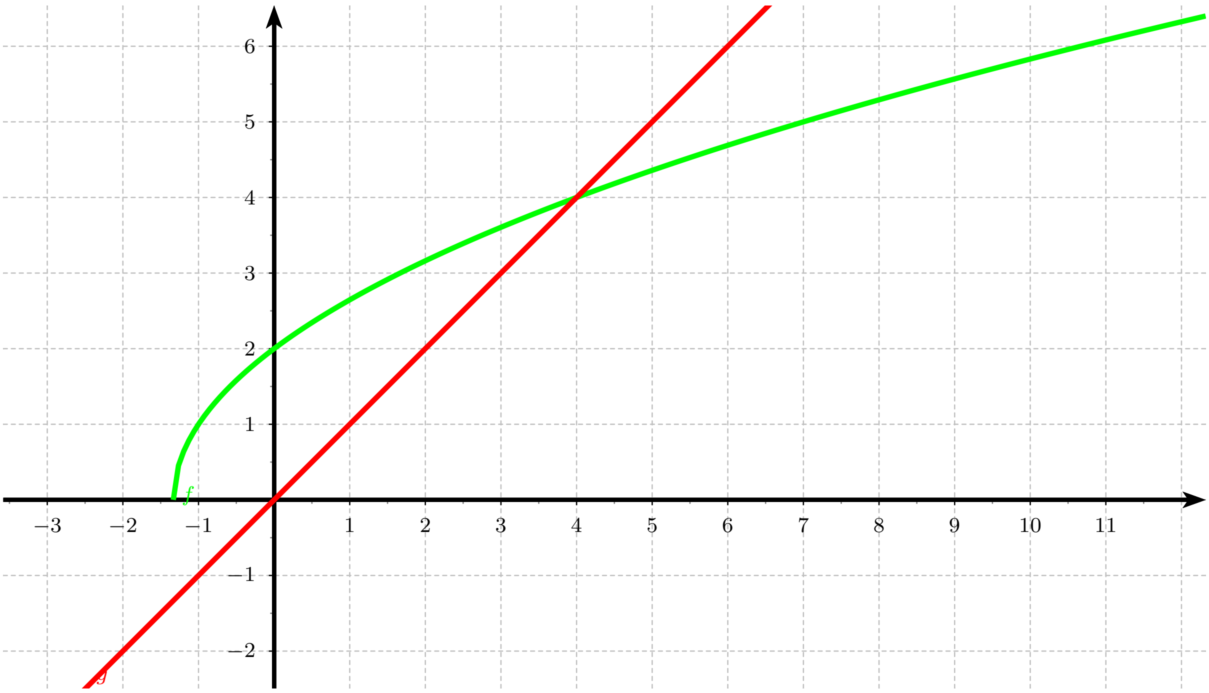
Soit une suite définie par u_0 et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction.

1. On trace un repère $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$, puis la droite D, d'équation $y = x$ (première bissectrice).
2. On trace la représentation graphique de la fonction f dans le même repère.
3. On place u_0 sur l'axe des abscisses et le point $M_0(u_0\ ;\ 0)$ sur l'axe des abscisses.
4. On veut représenter u_1 ; par définition, $u_1 = f(u_0)$. On trace en pointillés le segment parallèle à l'axe des ordonnées, joignant M_0 au point de la courbe C_f de même abscisse, puis en pointillés le segment joignant ce point au point de même ordonnée de la droite D. Ces deux points ont pour ordonnée u_1.
   Comme D a pour équation $y = x$, ce dernier point a pour abscisse u_1, que l'on place sur l'axe des abscisses et on note M_1 le point de coordonnées $(M_1\ ;\ 0)$.
5. On recommence la construction précédente avec u_1, puis u_2, etc.

Soit (v_n) la suite définie par :

$$v\colon \begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = \sqrt{3v_n + 4} \end{cases}$$

Construire les premiers termes de cette suite ci-dessous :



3. Variations d'une suite

Définition.

1. Une suite (u_n) est **croissante** si, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \geq u_n$.

2. Une suite (u_n) est **décroissante** si, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \leq u_n$.

3. Une suite (u_n) est **constante** si, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n$.

Méthode pour déterminer si une suite est croissante ou décroissante (monotone) :

1. En étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$:Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors $u_{n+1} \geq u_n$ donc (u_n) est croissante. Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors $u_{n+1} \leq u_n$ donc (u_n) est décroissante.

2. En comparant $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1, **uniquement** si les termes de la suite (u_n) sont strictement **positifs**.

3. En étudiant le sens de variation de la fonction f pour les suites définies par $u_n = f(n)$.

Exercices

Déterminer le sens de variation des suites suivantes :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = 10 - 2n$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u\colon \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n \end{cases}$$

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = (-2)^n$.

IV. Suites arithmétiques

1. Définition et variations

Définition.
Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite **arithmétique** s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est appelé **raison** de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

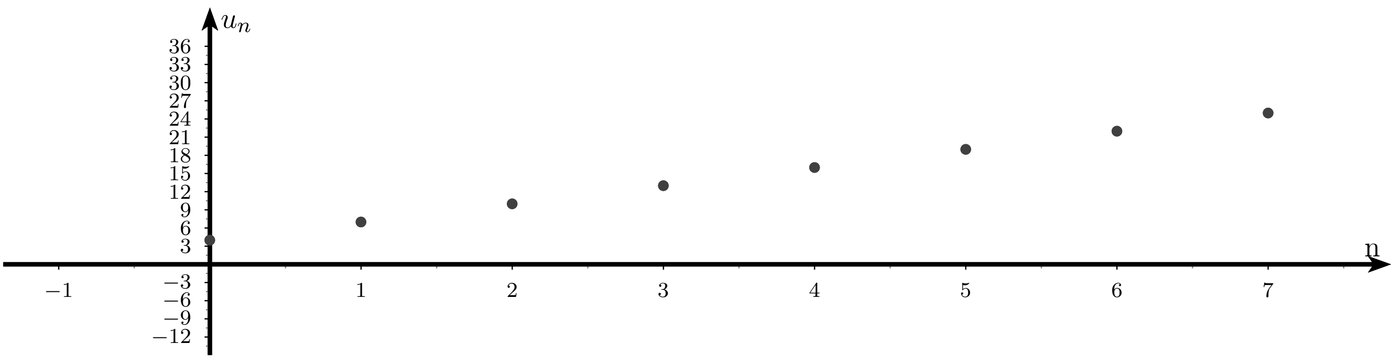
Remarque : Pour savoir si une suite est arithmétique, on calcule **l'accroissement** $u_{n+1} - u_n$ entre deux termes consécutifs. Si **l'accroissement est une constante** r alors la suite est arithmétique de raison r.

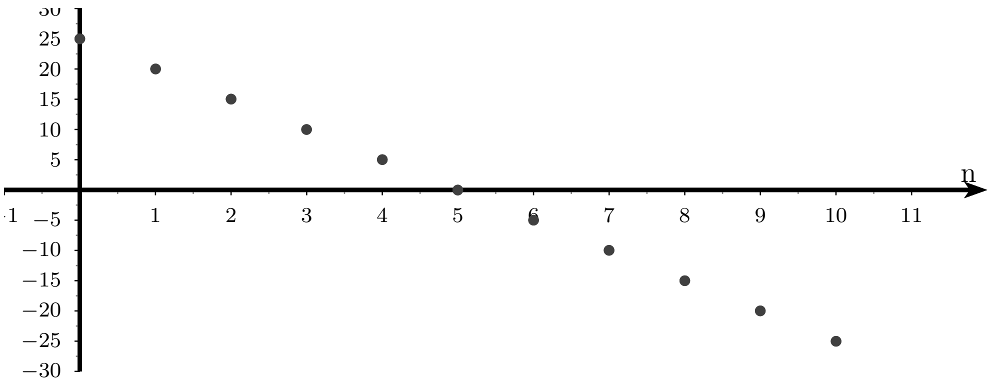
Exercice : (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 3. Calculer u_1 et u_2.

Propriété : Variation d'une suite arithmétique
Une suite arithmétique est croissante si $r > 0$, décroissante si $r < 0$ et constante si $r = 0$.

Remarque La représentation graphique d'une suite arithmétique est constituée de **points alignés**. On dit que l'évolution est **linéaire**.

Exemples : Touver le premier terme et la raison des suites arithmétiques représentées ci-dessous. Préciser leur sens de variation.





2. Calcul du terme général

Théorème

- si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$;
- Réciproquement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a \times n + b$, alors, (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = b$ et de raison a.

Démonstration.

- On a : $u_1 = u_0 + r$,
  puis, $u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$.
  De même, $u_3 = u_2 + r = (u_0 + 2r) + r = u_0 + 3r$, ...et ainsi de suite.
  On obtient finalement $u_n = u_0 + nr$.
- Réciproquement, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a + nb$, alors $u_{n+1} - u_n = (a + (n+1)b) - (a + nb) = b$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + b$, et donc u est une suite arithmétique de raison b et de premier terme $u_0 = a + 0 \cdot b = a$.

Remarque : On reconnaît bien une forme identique à celle d'une fonction affine mais définie sur $\mathbb{N}$ ce qui explique la représentation graphique par des points alignés.

Exemple : En reprenant la suite de l'exemple précédent, on a :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 5 + n \times 3 = 5 + 3n$$

Remarque : Si le premier terme d'une suite arithmétique est u_1, et sa raison est r, on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = u_1 + (n-1)r$$

Propriété : Généralisation

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, pour tous les entiers n et p on a :

$$u_n = u_p + (n-p) \times r$$

Propriété :Calcul de r

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r alors pour tout entier $n \neq p$ on a :

$$r = \frac{u_n - u_p}{n - p}$$

Exercice : Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_5 = 3$ et $u_9 = 11$. Calculer sa raison.

3. Calcul de la somme des premiers entiers

Propriété

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$s_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

Démonstration.

On écrit s_n à l'endroit puis à l'envers et on ajoute terme à terme. $s_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$
$s_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1$.
En additionnant, on trouve :
$2s_n = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) = n(n+1)$ (car il y a n termes égaux à $n+1$).
Par conséquent : $s_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exercice : Calculer la somme des 100 premiers entiers non nuls : $S_{100} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$. Pour cela, on considère la suite arithmétique v de premier terme $v_1 = 1$ et de raison $r = 1$.

4. Calcul de la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Propriété
Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 alors :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

En généralisant, la somme S des premiers termes d'une suite arithmétique est égale à :

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

Démonstration : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) = \cdots + (u_0 + (n-1)r) + (u_0 + nr)$
$= (u_0 + u_0 + \cdots u_0) + (1 + 2 + \cdots + n)r = (n+1)u_0 + \dfrac{n(n+1)}{2}r$

Autre formule :
On écrit là encore S_n de deux façons différentes (à l'endroit puis à l'envers).
$S_n = u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \cdots + (u_{n-1} + (n-1)r) + (u_0 + nr)$.
$S_n = u_n + (u_n - r) + (u_n - 2r) + \cdots + (u_n - (n-1)r) + (u_n - nr)$.
On ajoute terme à terme :
$2S_n = (u_0 + u_n) + \cdots + (u_0 + u_n) = (n+1)(u_0 + u_n)$ (car il y a $n+1$ termes dans la somme S_n).
D'où : $S_n = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}$

La formule $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n-p+1)\left(\dfrac{u_p + u_n}{2}\right)$ se démontre de la même façon ; le nombre de termes est $n - p + 1$.

Exercice : Un élève demande à ses parents, le 1^{er} janvier 2021, 10 euros d'argent de poche par mois, avec une augmentation de 0,5 euro net par mois dès le deuxième mois. Calculer le total des sommes perçues au cours de la première année. On note u_n la somme perçue à l'issue du n^e mois. Donner la nature de cette suite. Donner la somme perçue en décembre 2021. Calculer le total des sommes perçues au cours de la première année.

V. Suites géométriques

1. Rappels sur les puissances et les pourcentages

Propriété :Rappels sur les puissances
Soient $q \in \mathbb{R}^*, n, m \in \mathbb{N}$

1. $q^0 = 1$
2. $q^1 = q$
3. $q^{n+1} = q \times q^n$
4. $q^{n+m} = q^n \times q^m$
5. $\frac{q^n}{q^m} = q^{n-m}$
6. $(q^n)^m = q^{n\times m}$

Propriété :Pourcentages

1. augmenter de $t\%$ revient à multiplier par $q = 1 + \frac{t}{100}$
2. diminuer de $t\%$ revient à multiplier par $q = 1 - \frac{t}{100}$
3. multiplier par $q > 1$ revient à augmenter de $t = 100 \times (q - 1)\%$
4. multiplier par $q < 1$ revient à diminuer de $t = 100 \times (1 - q)\%$

2. Définition et variations

Définition.
Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite **géométrique** s'il existe un réel q tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$. Le réel q est appelé **raison** de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Remarque : Chaque terme d'une suite géométrique est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre q.
Pour démontrer qu'une suite (non nulle) est géométrique, il suffit de montrer que, pour tout n, le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant.

Le rapport $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} = q - 1$ est aussi constant et appelé variation relative.

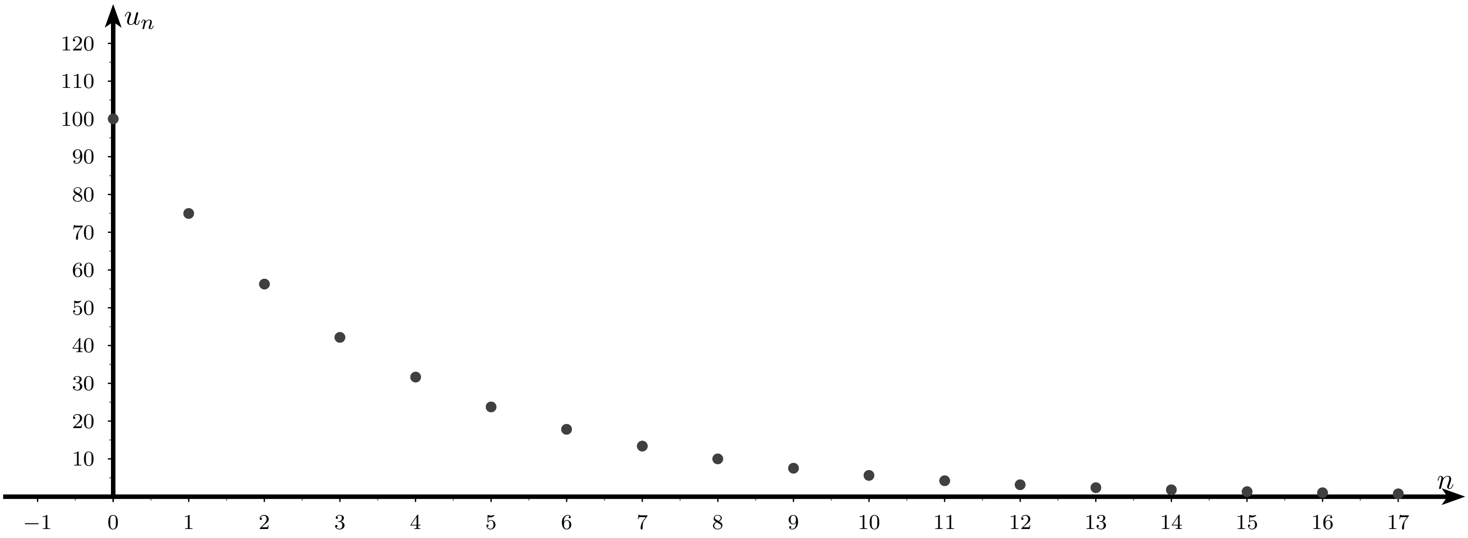
Exercices :

1. Montrer que la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3^n$ est géométrique.
2. Montrer que la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = n^2$ n'est pas géométrique.
3. On note u_n la population en $2000 + n$. On suppose qu'elle diminue tous les ans de 2%. Cette suite est-elle géométrique ?

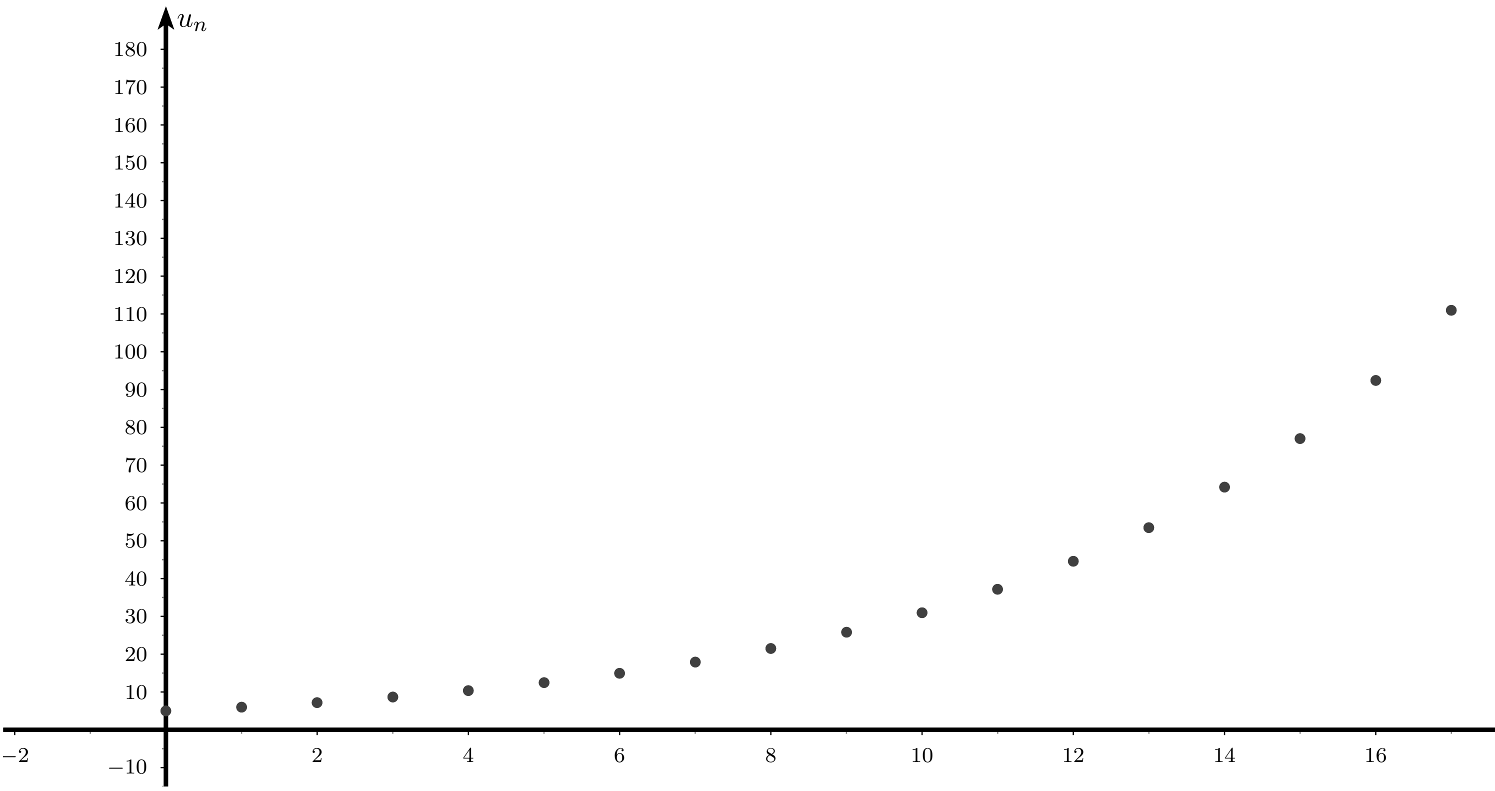
Propriété :Variations d'une suite géométrique de raison positive
Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q > 0$. Alors si $u_0 > 0$:
- si q>1, (u_n) est strictement croissante ;
- 0<q<1, (u_n) est strictement décroissante ;
- si q=1, (u_n) est constante.

Remarques :
- Si $u_0 < 0$, les sens de variations sont inversés dans le cas $q > 1$ ou $0 < q < 1$.
- Si $q < 0$ alors la suite n'est pas monotone.
- Contrairement aux suites arithmétiques, la représentation graphique d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et $q \neq 0$ n'est pas constituée de points alignés.

Exemple graphique 1 : Suite géométrique de premier terme $u_0 = 100$ et de raison $q = 0.75$



Exemple graphique 2 : Suite géométrique de premier terme $u_0 = 20$ et de raison $q = 1.2$



Propriété : Evolution exponentielle
Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q > 0$ et $q \neq 1$.
- si $q > 1$, les termes de la suite augmentent constamment de $t = 100 \times (q - 1)\%$
- si $0 < q < 1$, les termes de la suite diminuent constamment de $t = 100 \times (1 - q)\%$

3. Calcul du terme général

Théorème

- si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

- Réciproquement, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a \times b^n$, (avec a et b constantes réelles) alors, (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = a$ et de raison $q = b$.

Remarque : Si le premier terme est u_1, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_1 \times q^{n-1}$. De façon plus générale, si u est une suite géométrique de raison q alors pour tous les entiers n et p on a :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Démonstration.
(exigible) On utilise le résultat suivant : si deux suites numériques ont le même premier terme et vérifient la même relation de récurrence alors ces suites sont égales.
Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_0 \times q^n$.
On a $v_0 = u_0 \times q^0 = u_0 \times 1 = u_0$ $v_{n+1} = u_0 \times q^{n+1} = u_0 \times q^n \times q = v_n \times q$. Ainsi les suites (u_n) et (v_n) ont le même premier terme et vérifient la même relation de récurrence, elles sont donc égales.

Exemple :

(u_n): $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2 \times u_n \end{cases}$ Calculer u_{12}

4. Calcul de la somme des puissances d'un nombre réel

Propriété
Soit q un réel différent de 0 et de 1. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$1 + q + q^2 + \dots \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration.
(exigible) On note $S = 1 + q + q^2 + ... + q^n$. On remarque qu'en calculant les produits en croix de l'égalité précédente, il suffit de montrer que $(1 - q) \times S = 1 - q^{n+1}$. On a :

1. Si $q = 1$, c'est évident, puique $q^p = 1$ pour tout p.
2. On écrit s_n une première fois puis de nouveau en la multipliant par q et on soustrait terme à terme.
   $s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n$
   $q \times s_n = q + q^2 + q^3 + q^n + q^{n+1}$.
   En soustrayant, on trouve : $qs_n - s_n = q^{n+1} - 1$ (car les autres termes s'annulent deux par deux).
   Par conséquent : $s_n(q - 1) = q^{n+1} - 1$ d'où $s_n = \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$, que l'on peut aussi écrire $\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Exercice : Si $q = 2$, calculer $1 + 2 + \cdots + 2^{10}$.

5. Calcul de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Propriété
Si (u_n) est géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0 alors :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{(1 - q^{n+1})}{(1 - q)}$$

En généralisant, la somme S des premiers termes d'une suite géométrique est égale à :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{(1 - q^{\text{nombre de termes}})}{(1 - q)}$$

Démonstration :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 + u_0 q + \cdots + u_0 q^n = u_0 \left(1 + q + q^2 + \cdots + q^n\right) = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p + u_p q + \cdots + u_p q^{n-p} = u_p \left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-p}\right) = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}.$$

Exemples :

1. $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{15} = \dfrac{3^{16} - 1}{3 - 1} = \dfrac{3^{16} - 1}{2} = 21\,523\,360$
2. $5^{11} + 5^{12} + \cdots + 5^{20} = 5^{11} \dfrac{5^{20-11+1} - 1}{5 - 1} = 5^{11} \dfrac{5^{10} - 1}{4} = 119\,209\,277\,343\,750$
3. Un élève demande le 1er janvier 2021 à ses parents 10€ d'argent de poche par mois avec une augmentation de 5% par mois dès le deuxième mois. Calculer la somme perçue en décembre 2021. Calculer le total des sommes perçues au cours de la première année.

VI. Notion intuitive de limite d'une suite

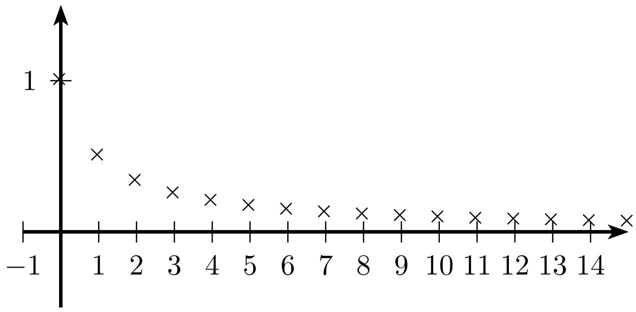
S'intéresser à la limite d'une suite (u_n), c'est étudier le comportement des termes u_n lorsque n devient de plus en plus grand, ce qui se dit aussi "quand n tend vers $+\infty$" . On note cette limite :

$$\lim_{n\to\infty} u_n$$

Exemples :
Conjecturer le comportement de chacune des suites représentées ci-dessous quand n tend vers $+\infty$.

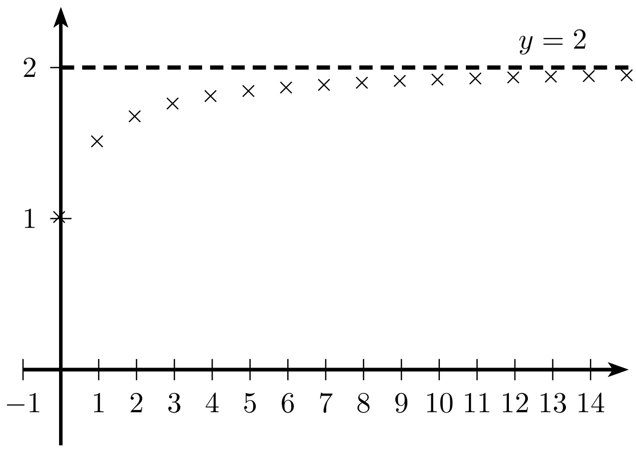
1. Limite finie :

Exemple graphique 1



Graphiquement, les termes de la suite (ordonnées des points) semblent se rapprocher de plus en plus de 0.
On note : $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$; on dit que la suite (u_n) converge vers 0 ou que le terme u_n tend vers 0.

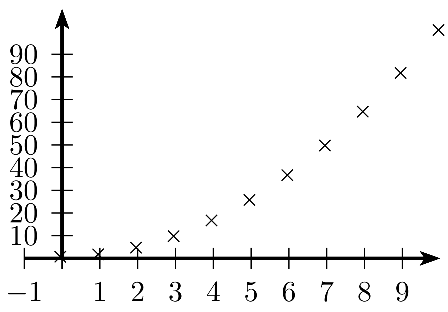
Exemple graphique 2



Graphiquement, les termes de la suite (ordonnées des points) semblent se rapprocher de plus en plus de 2.
On note : $\lim_{n\to\infty} u_n = 20$; on dit que la suite (u_n) converge vers 2 ou que le terme u_n tend vers 2.

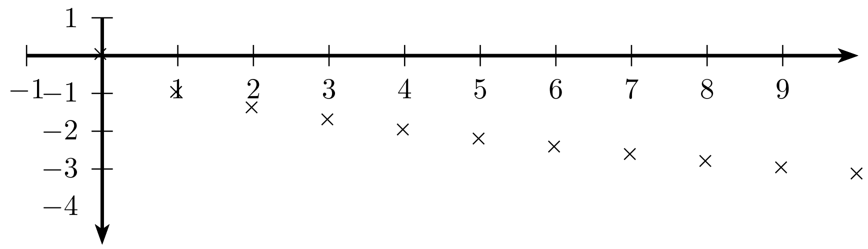
2. Limite infinie :

Exemple graphique 3



Les termes de la suite semblent devenir aussi grands que l'on veut.
On note $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = +\infty$.

Exemple graphique 4



Les termes de la suite semblent devenir aussi grands que l'on veut en valeur absolue, en étant négatifs.
On note $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = -\infty$.

Remarques

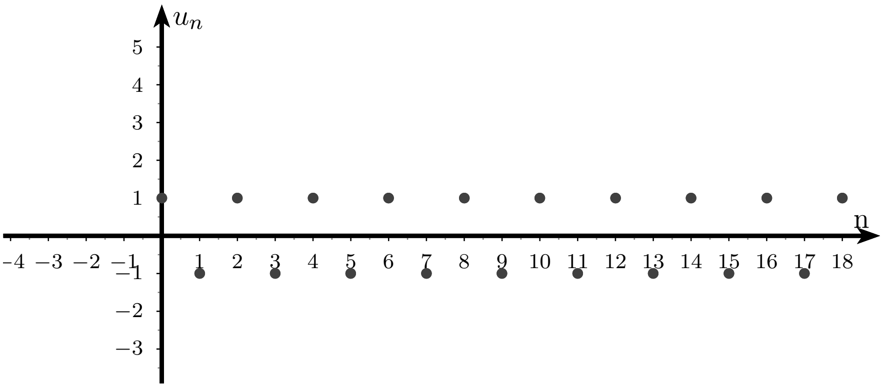
- Il existe des suites qui n'ont pas de limite : exemple : $u_n = (-1)^n$ qui alterne entre -1 et 1.

Dans ce cas, et dans le cas où une suite n'admet pas de limite finie, on dit que la suite diverge (elle ne converge pas, elle n'est pas convergente).

- On peut conjecturer des limites de fonctions par un graphique (en représentant les points de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$), en regardant les résultats d'un tableur (ou calculatrice) ou en appliquant des règles de calculs sur les limites.

Exemples graphiques de suites divergentes :

1) $u_n = (-1)^n$ qui alterne entre -1 et 1



2) Les termes de la suite semblent devenir aussi grands que l'on veut lorsque n devient de plus en plus grand.