Chapitre 8
Calcul vectoriel et produit scalaire

Objectifs :

— Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, calculer un angle, une longueur dans le plan ou l'espace
— En vue de la résolution d'un problème, calculer le produit scalaire en utilisant une méthode adaptée (en utilisant la projection orthogonale, à l'aide des coordonnées, à l'aide des normes et d'un angle, à l'aide de normes)
— Utiliser le produit scalaire pour résoudre un problème géométrique

Aperçu historique :

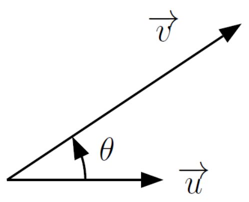
Le produit scalaire (vient du latin scolaris : escalier, échelle) est une opération s'appliquant à deux vecteurs. Il a été inventé par deux physiciens GRASSMANN *et* GIBBS *et a été baptisé ainsi par le mathématicien irlandais* HAMILTON *(1805-1865).*
En mathématiques, il permet d'utiliser les notions euclidiennes de distances, angles, orthogonalité dans des espaces de dimension quelconque. Il est aussi utilisé dans des notions beaucoup plus complexes.
En physique, il caractérise la notion de travail d'une force sur un déplacement mais est aussi utile en hydrodynamique, électromagnétisme, etc.
Les vecteurs pouvant être vus sous plusieurs « aspects » (géométrique et algébrique), on retrouve plusieurs définitions équivalentes du produit scalaire. Nous allons les étudier dans ce chapitre.

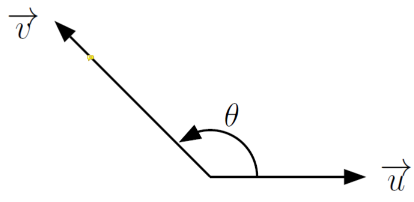
1. Quatre expressions du produit scalaire de deux vecteurs

A. Expression 1 : Avec Normes et angles

Définition 1 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. On note θ l'angle formé par ces vecteurs. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le **nombre réel** noté $\vec{u} \bullet \vec{v}$ et défini par :

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\theta)$$





Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$

Remarques :

1. Le produit scalaire est positif si l'angle est aigu et négatif si l'angle est obtus.
2. Si $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$ alors la formule du produit scalaire s'écrit :

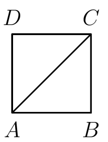
$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AC}|| \times \cos(\widehat{BAC})$$

3. La notation $||\vec{u}||$ désigne la norme de $\vec{u}$ c'est-à-dire sa longueur. On a donc $||\overrightarrow{AB}|| = AB$.
4. Le produit scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ par lui-même est noté $\vec{u}^2$. Il est égal à $||\vec{u}||^2$ et on l'appelle *carré scalaire* de $\vec{u}$.

Propriété 1
1. Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens alors $\vec{u}\bullet\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$
2. Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire alors $\vec{u}\bullet\vec{v} = -||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$
3. Si les vecteurs sont orthogonaux alors leur produit scalaire est nul : $\vec{u}\bullet\vec{v} = 0$

Exemple

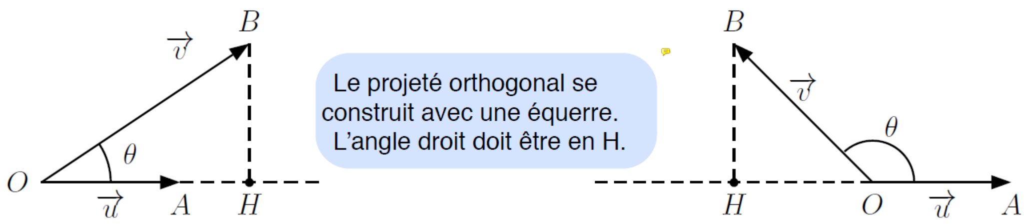
Soit $ABCD$ un carré de côté a. Soit d la longueur de sa diagonale.$d = a\sqrt{2}$.



$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) =$ ....
$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD} =$ .... car ....
$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{CD} =$ .... car ....

B. Expression 2 : Projection orthogonale

Définition 2 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Soit O, A et B trois points non-alignés du plan tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.
On appelle H le projeté orthogonal de B sur la droite (OA). C'est le point H de la droite (OA) tel que $(BH) \perp (OA)$.



Définition 3 Expression 2
On appelle *produit scalaire* de $\overrightarrow{OA}$ par $\overrightarrow{OB}$ le réel tel que :

$$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OH}$$

où H est le projeté orthogonal de B sur (OA).

Remarque 1 :

- ☐ $\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB} = OA \times OH$ si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont dans le même sens.
- ☐ $\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB} = -OA \times OH$ si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont de sens contraires.

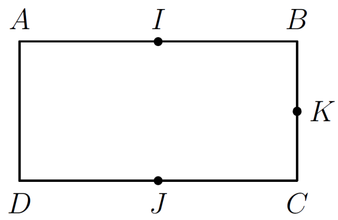
Démonstration non exigible
Si $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ alors $\vec{u}\bullet\vec{v} = \overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB} = OA \times \underbrace{OB \times \cos\theta}_{=OH} = OA \times OH = \overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OH}$

Si $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ alors $\vec{u}\bullet\vec{v} = \overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB} = OA \times \underbrace{OB \times \cos\theta}_{=-OH} = -OA \times OH = \overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OH}$

Ainsi dans tous les cas $\vec{u}\bullet\vec{v} = \overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OH}$

Remarque 2 : Cette définition nous dit que dans un produit scalaire, on peut remplacer un vecteur par son projeté orthogonal sur la droite qui supporte l'autre vecteur : $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{H_1H_2}$ où H_1 est le projeté orthogonal de C sur (AB) et H_2 celui de D sur (AB).

Exemple ABCD est un rectangle tel que AB=4 et AD=3. Les points I, J et K sont les milieux respectifs de [AB], [DC] et [BC].
$\overrightarrow{IA} \bullet \overrightarrow{IK} =$ ....
$\overrightarrow{DC} \bullet \overrightarrow{IK} =$ ....



C. Expression 3 : Avec les coordonnées dans un repère orthonormé

Propriété 2 Soit $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Alors :

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = xx' + yy'$$

Démonstration Admise.

Exemple Soit $\vec{u}(2; 1)$ et $\vec{v}(3; 2)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Alors : $\vec{u} \bullet \vec{v} = 2 \times 3 + 1 \times 2 = 6 + 2 = 8$

D. Expression 4 : Avec les normes

Propriété 3 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Alors on a :

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$$

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \frac{1}{2}(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - \left(||\vec{u} - \vec{v}||^2\right)$$

Démonstration Admise

Exemple Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 6$ et $BC = 7$. Calculer $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} =$ ....
$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} =$ ....
$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} =$ ....

2. Propriétés du produit scalaire

A. Symétrie et linéarité du produit scalaire

Le produit scalaire se comporte comme un produit multiplicatif (commutativité, distributivité, associativité).

Propriété 4 Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan. Soit $k \in \mathbb{R}$. On a :

1. $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$
2. $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{w} + \vec{v} \bullet \vec{w}$
3. $(k\vec{u}) \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet (k\vec{v}) = k(\vec{u} \bullet \vec{v})$

Exemple Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{u} \bullet \vec{v} = 1$ et $\vec{u} \bullet \vec{w} = -2$. Calculer :

1. $\vec{v} \bullet \vec{u} =$ ....
2. $\vec{u} \bullet (-5\vec{w}) =$ ....
3. $(2\vec{v} + \vec{w}) \bullet \vec{u} =$ ....

B. Identités remarquables

Propriété 5 Avec la notation $\vec{u}^2 = \vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$, on a pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

1. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
2. $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
3. $(\vec{u}+\vec{v}) \cdot (\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

3. Applications du produit scalaire

A. Orthogonalité

Définition 4 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Soit O un point du plan et soit A et B les points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *orthogonaux* si l'une des deux situations suivantes est réalisée :
- $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$;
- les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires.

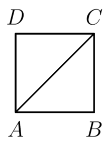
On note alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Propriété 6 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$$

.

Exemple Soit ABCD un carré de côté a.
Montrer que ses diagonales sont perpendiculaires.



$\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} =$ ....
$\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} =$ ....
$\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} =$ ....

B. Calcul d'angle

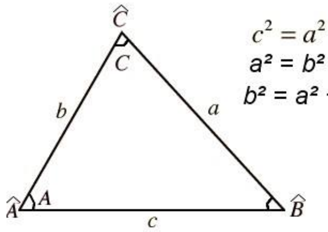
Propriété 7 On a :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}}{BA \times BC}$$

Remarque : La calculatrice nous donnera une valeur approchée de l'angle à l'aide de la touche "$cos^{-}1$".

C. Formule d'Al-Kashi

Propriété 8 Soit ABC un triangle quelconque alors :



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\widehat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\widehat{B}$$

Démonstration Exigible

1. Ecrire $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} -$ ....
2. Développer $\overrightarrow{BC}^2 =$ ....
   $\overrightarrow{BC}^2 =$ ....
   $\overrightarrow{BC}^2 =$ ....
   D'où $a^2 =$ ....

D. $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB}$ et caractérisation du cercle

Propriété 9 Soient A et B deux points distincts et I le milieu du segment $[AB]$ alors pour tout point M on a :

$$\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

En particulier l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$

Démonstration 1 Calculer $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB}$ en décomposant $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$

$\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} =$ ....

$\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} =$ ....

$\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} =$ ....

$\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} =$ ....

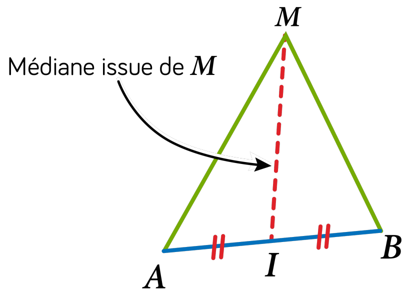
$\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} =$ ....

Démonstration 2 En déduire l'égalité qui en découle si $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = 0$:

- ....
- ....
- ....

En déduire où se situe le point M.

E. Théorème de la médiane



Théorème 1 Soient A et B deux points distincts et I le milieu du segment $[AB]$, alors pour tout point M, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

En particulier dans un triangle ABC on a :

$$CA^2 + CB^2 = 2CI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

Remarque : Cela nous permet de calculer la longueur des médianes connaissant les longueurs des trois côtés d'un triangle.