2021 ICPC(上海) 试题分析

11月28日

A. Strange Functions

计算几何/半平面交

给出 n 个形如 $f_i(x) = |\arctan(k_i \cdot \sec(x - a_i))|$ 的函数。询问每个函数是否存在 x 使得 $f_i(x)$ 比所有 $j \neq i$ 的 $f_j(x)$ 都小。

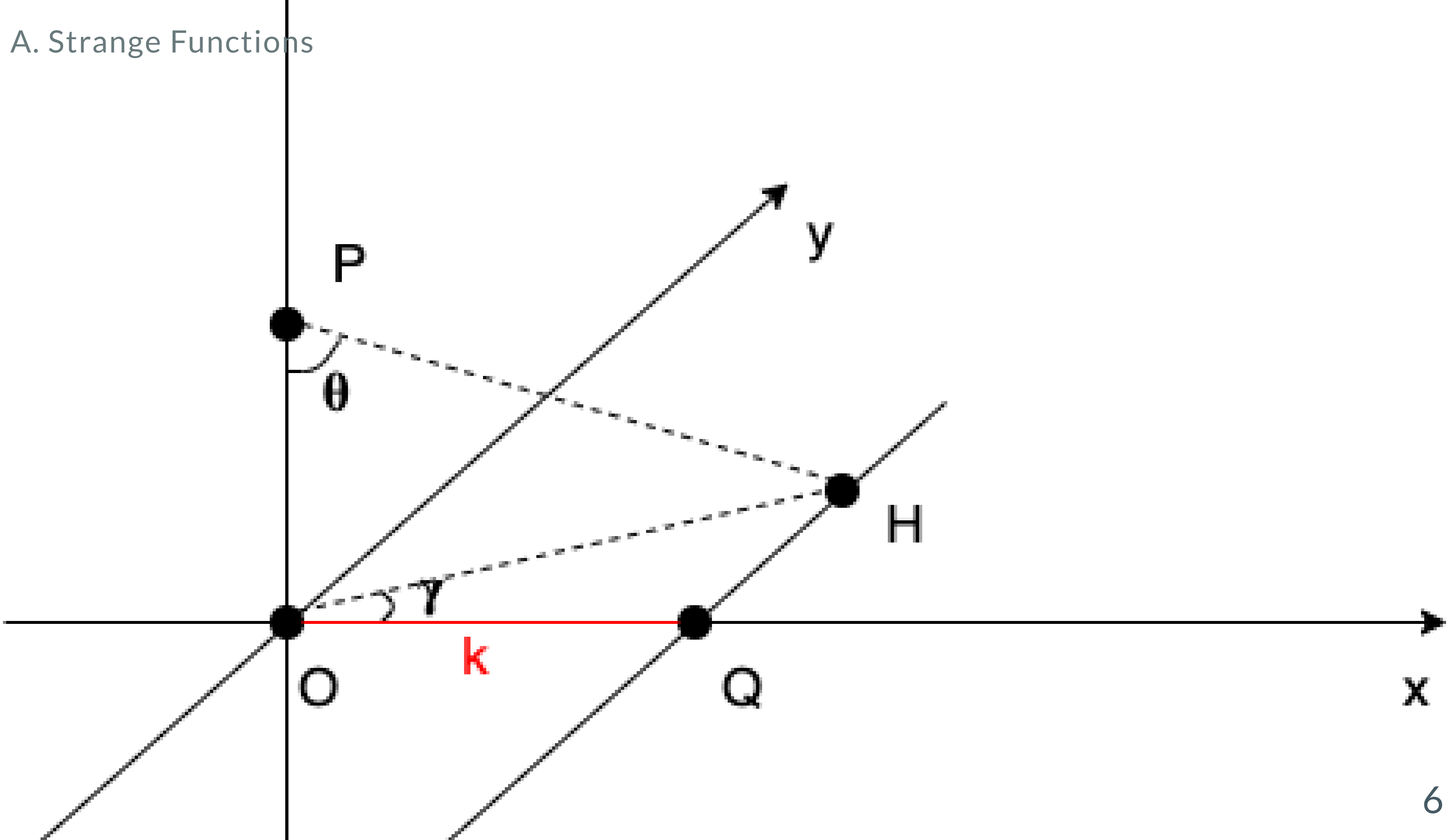
给出 n 个形如 $f_i(x) = |\arctan(k_i \cdot \sec(x - a_i))|$ 的函数。询问每个函数是否存在 x 使得 $f_i(x)$ 比所有 $j \neq i$ 的 $f_j(x)$ 都小。

考虑空间直角坐标系 $Oxyz$ 中有一个点 P 坐标为 $(0, 0, 1)$ ，在 Oxy 平面上有一条直线 $L : x = k$ ，其中 k 是一个常数。不妨设 L 与 x 轴的交点为 Q 。

给出 n 个形如 $f_i(x)=|\arctan(k_i\cdot\sec(x-a_i))|$ 的函数。询问每个函数是否存在 x 使得 $f_i(x)$ 比所有 $j\neq i$ 的 $f_j(x)$ 都小。

考虑空间直角坐标系 $Oxyz$ 中有一个点 P 坐标为 $(0,0,1)$，在 Oxy 平面上有一条直线 $L:x=k$，其中 k 是一个常数。不妨设 L 与 x 轴的交点为 Q。

考虑 L 上的一个动点 $H:(k,y,0)$，令$\angle HOQ=\gamma$ 随着 γ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$的变化，$H$ 的 y 发生变化。


y
P
θ
H
γ
k
O
Q
x

观察 $\triangle HOQ$ 可以发现，$|HO| = k \cdot \sec(\gamma)$。
令 $\angle HPO = \theta$，再观察 $\triangle HPO$ 可以发现，
$\theta = \arctan(k \cdot \sec(\gamma))$。

补上关于原点对称的直线 $L' : x = -k$，拓展 γ 的范围后，我们可以得到题目中的函数 $\theta = |\arctan(k \cdot \sec(\gamma))|$。

由此可以发现题目中每个函数其实对应了 Oxy 平面上距离 O 为 k_i ，并且斜率与 a_i 相关的两条平行直线。

因此可以看作平面上有 $2n$ 条直线。

由此可以发现题目中每个函数其实对应了 Oxy 平面上距离 O 为 k_i ，并且斜率与 a_i 相关的两条平行直线。
因此可以看作平面上有 $2n$ 条直线。

考虑自变量 γ，表示了一条从 O 射出的，位于 Oxy 平面上，与 x 轴角度为 γ 的射线。
题目中函数f_i存在最小点，等价于存在角度 γ ，射线射出后遇到的第一条直线是 f_i 所对应的直线。通过半平面交解决即可。

复杂度 $O(n \log n)$

B. Strange Permutations

容斥/NTT/启发式合并

B. Strange Permutations

给出一个长度为 n 的排列 $\{p_i\}$

询问有多少个长度为 n 的排列，对其任意两个相邻的数字 a, b 满足 $b \neq p_a$ 。

给出一个长度为 n 的排列 $\{p_i\}$

询问有多少个长度为 n 的排列，对其任意两个相邻的数字 a, b 满足 $b \neq p_a$ 。

问题等价于选出一条经过 $1, 2 \cdots n$ 各恰好一次的路径（含 $n-1$ 条边），并且不能含有边 $(i, p_i), 1 \leq i \leq n$ ，问有多少种不同的选法。

给出一个长度为 n 的排列 $\{p_i\}$
询问有多少个长度为 n 的排列，对其任意两个相邻的数字 a, b 满足 $b \neq p_a$ 。

问题等价于选出一条经过 $1, 2 \cdots n$ 各恰好一次的路径（含 $n-1$ 条边），并且不能含有边 $(i, p_i), 1 \le i \le n$ ，问有多少种不同的选法。

对于确定的 x 条禁选边，考虑所有排列形成的路径中，包含这 x 条禁选边的方案数，总是有 $(n-x)!$ 个。那么如果求出选择 $x(0 \le x \le n)$ 条禁选边的方案数，就能容斥求解问题。

可以知道，所有的禁选边 $(i, p_i), 1 \le i \le n$ 组成了若干个环。我们先考虑只有一个 k 元环的情况。

可以知道，所有的禁选边 $(i, p_i), 1 \le i \le n$ 组成了若干个环。我们先考虑只有一个 k 元环的情况。

考虑 a_i 表示从一个 k 元环中选取 $i(0 \le i \le k)$ 条边的方案数。容易知道 $a_i = \binom{k}{i}$。特殊地，我们令 $a_k = 0$ 这是因为答案是一个排列，不可能走出环来使得一个点出现两次。

于是得到 a_i 的生成函数 $\left((1+x)^k - x^k\right)$

当输入数据的排列形成了多个环的时候，不妨设一共有 m 个环，它们的大小分别是 $s_1, s_2, \cdots s_m$

当输入数据的排列形成了多个环的时候，不妨设一共有 m 个环，它们的大小分别是 $s_1, s_2, \cdots s_m$

那么对于 $\{a_i\}$ 表示从 n 条禁选边中选出 i 条的选法，有生成函数：

$$\prod_{r=1}^{m}\left((1+x)^{s_r} - x^{s_r}\right)$$

实质是 m 个多项式的乘法，用 NTT 快速算出，注意需要启发式合并。

求出了数列 $\{a_i\}$ ，做一遍容斥，答案就是：

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(n-i)!\cdot a_i$$

总复杂度 $O(n\log^2 n)$

C. Strange Matrices

状态压缩dp

C. Strange Matrices

给定一个0,1,2矩阵（8*8），所有2可以自由选择变成0或1，0代表空地，1代表障碍。

然后在空地上放**尽可能少的**（象棋中的）车，

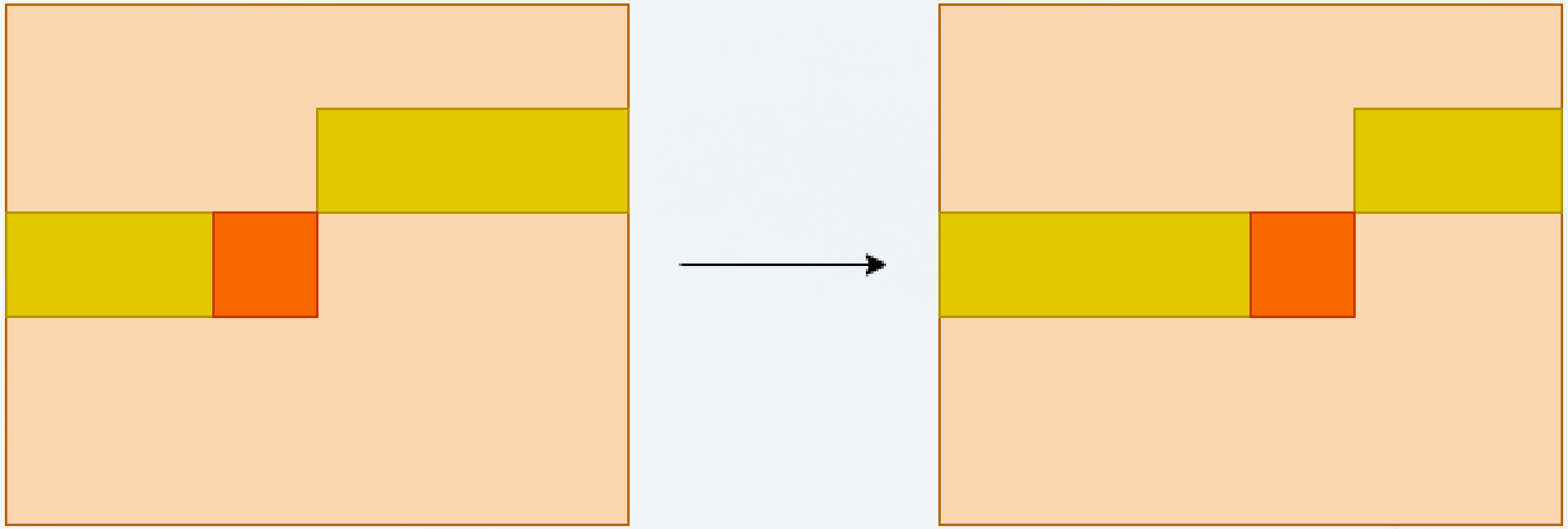
使得所有空地都被至少一个车给控制。

考虑按照从上往下，从左往右的顺序 dp 。

每个格子维护四种状态，分别表示上面没有 0 ，上面有一个 0，上面有若干个 0 ，上面有一个放了车的 0 。

转移的时候维护轮廓线上 m 个位置的格子状态。

需要考虑当前格子左边前面放的车的影响。



实现具有一定细节。

状态数是 $O(nm^2 \cdot 4^m)$ 的，

用位运算优化可以实现 $O(1)$ 转移。

复杂度 $O(nm^2 \cdot 4^m)$，约为 2^{25} 级别。

存在一些其他状压方法，也可以通过此题。

D. Strange Fractions

简单数学

D. Strange Fractions

给出 $\frac{p}{q}$，判断是否存在 $1 \le a, b \le 10^9$，满足 $\frac{p}{q} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$，有则输出 a, b。

给出 $\frac{p}{q}$ ，判断是否存在 $1 \le a, b \le 10^9$ ，满足 $\frac{p}{q} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ ，有则输出 a, b。

数论做法：

不妨假设 $\gcd(p,q) = 1$ （如果不满足则约分后满足）。假设存在合法 a, b ，不妨设 $\gcd(a,b) = 1$，那么 $\frac{p}{q} = \frac{a^2+b^2}{ab}$ 。容易证明 $\gcd(a^2+b^2, ab) = 1$。于是就有 $q = ab$ 和 $p = a^2+b^2$ 。

D. Strange Fractions

给出 $\frac{p}{q}$，判断是否存在 $1 \le a, b \le 10^9$，满足 $\frac{p}{q} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$，有则输出 a, b。

数论做法：

不妨假设 $\gcd(p, q) = 1$（如果不满足则约分后满足）。假设存在合法 a, b，不妨设 $\gcd(a, b) = 1$，那么 $\frac{p}{q} = \frac{a^2+b^2}{ab}$。容易证明 $\gcd(a^2 + b^2, ab) = 1$。于是就有 $q = ab$ 和 $p = a^2 + b^2$。

注意到 q 的质因子最多 8 个，因此可以枚举 a, b 做验证即可，复杂度 $O(256T)$。

求根公式做法：

不妨设 $\frac{a}{b} = x$，那么有 $\frac{p}{q} = x + \frac{1}{x}$

问题转化为求 $x^2 - \frac{p}{q}x + 1 = 0$ 的有理根。

求根公式做法：

不妨设 $\frac{a}{b} = x$，那么有 $\frac{p}{q} = x + \frac{1}{x}$

问题转化为求 $x^2 - \frac{p}{q}x + 1 = 0$ 的有理根。

只需要判断 $\sqrt{\frac{p^2}{q^2} - 4}$ 是否有理，即 $p^2 - 4q^2$ 是否是完全平方数。可以二分或者直接用 sqrt 函数判断，复杂度 $O(T \log p)$

E. Strange Integers

签到/贪心

E. Strange Integers

从 n 个数中选出 m 个数使得两两之差绝对值不低于 k ，要求最大化 m 。

排序后从小到大贪心选取合法且尽可能接近的数字即可。

F. Kaiji!

博弈

F. Kaiji!

A 从 n 个非降排序的数字中选出两个尽可能靠近的数字，放到 B 的手上，B 选择一个数字获取其信息，然后猜测手上两个数字的大小关系。B 需要找到策略使得无论 A 怎么选这两个数字，自己总能够保证至少有 ans 的胜率。

离散化后可以认为有 m 种数字，分别是 $1, 2, \cdots m$

F. Kaiji!

A 从 n 个非降排序的数字中选出两个尽可能靠近的数字，放到 B 的手上，B 选择一个数字获取其信息，然后猜测手上两个数字的大小关系。B 需要找到策略使得无论 A 怎么选这两个数字，自己总能够保证至少有 ans 的胜率。

离散化后可以认为有 m 种数字，分别是 $1, 2, \cdots m$

B 能获得的信息仅仅是一个数字，因此 B 的策略是对题目中的每一个数字 i，确定一个概率分布 f_i, g_i, h_i（满足非负且 $f_i + g_i + h_i = 1$），分别表示听到数字 i 的时候 B 猜测 小于，等于，大于 的概率。

注意到当一个数字出现次数 ≥ 2 时才需要猜等于。

我们用 $t_i = 0$ 表示数字 i 仅出现一次，$t_i = 1$ 表示出现不低于一次。

注意到当一个数字出现次数 ≥ 2 时才需要猜等于。

我们用 $t_i = 0$ 表示数字 i 仅出现一次，$t_i = 1$ 表示出现不低于一次。

假设我们的答案是 ans ，
那么有 $g_i \geq ans \cdot t_i$ 和 $\frac{f_i + h_{i+1}}{2} \geq ans$ 这两种限制。

容易发现，当 $g_i > ans \times t_i$ 时，将其多余的部分移到 f_i 或者 h_i 上都仍然满足条件，故不妨让 $g_i = ans \times t_i$ 。

这时，不难推出 ans 合法等价于存在一列 f_i ，满足

- $0 \le f_i \le 1 - ans \times t_i$
- $f_i <= f_{i-1} + 1 - 2ans - ans \times t_i$ 。

这时，不难推出 ans 合法等价于存在一列 f_i，满足

- $0 \le f_i \le 1 - ans \times t_i$
- $f_i <= f_{i-1} + 1 - 2ans - ans \times t_i$。

注意到在 ans 已知的情况下每个 f_i 的限制仅由 t_i 和 f_{i-1} 确定，并且在满足限制的前提下最大化 f_i 的做法对 f_{i+1} 来说总是好的。

二分 ans 并且贪心检验是一个 $O(n\log n)$ 的可行的做法，但在这道题中被卡了时间。

可以发现上述做法中，

$f_i = \min(f_{i-1} + 1 - 2ans, 1) - ans \times t_i$，

由于不知道 ans 的取值，所以经常不知道 $\min$ 该取哪一边。

注意到 f_i 总是 $a - b \times ans$ 的形式。

可以发现上述做法中，

$f_i=\min(f_{i-1}+1-2ans,1)-ans\times t_i$，

由于不知道 ans 的取值，所以经常不知道 $\min$ 该取哪一边。

注意到 f_i 总是 $a-b\times ans$ 的形式。

我们定义一个五元组 $\{i,l,r,a,b\}$ 表示考虑前 i 个 f 函数的条件限制，当 ans 取值范围是 $[l,r]$ 时，f_i 的最大值是 $a-b\times ans$ 。

根据限制条件中 f_i 与 ans 的分段函数关系，
我们从小到大扫一遍 i ，在这个过程中容易用链表
维护合法的若干五元组，它们代表了 ans 可以取到的
值域范围，最后就可以得到 ans 的最大值。

根据限制条件中 f_i 与 ans 的分段函数关系，
我们从小到大扫一遍 i ，在这个过程中容易用链表
维护合法的若干五元组，它们代表了 ans 可以取到的
值域范围，最后就可以得到 ans 的最大值。

以复杂度 $O(n)$ 求得精确解。

G. Edge Groups

树dp

求树分解成若干长度为 2 的路径的方案数。
$size(i)$ 表示以 i 为根的子树中的点数。定义 $dp(i)$：

- 若 $size(i)$ 为奇，$dp(i)$ 表示子树边全部分解的方案数。
- 若 $size(i)$ 为偶，$dp(i)$ 表示子树边尽可能分解，还剩下一条与 i 相连的边的方案数。
  若 i 的奇儿子有 k 个，有转移方程：

$$dp(i) = \begin{cases} (k-1)!! \cdot \prod dp(v) & , k \text{ is even} \\ k!! \cdot \prod dp(v) & , k \text{ is odd} \end{cases}$$

H. Life is a Game

Kruskal 重构树

一张带边权带点权无向图。从某点出发，有初始声望。
每第一次到达一个点将获得点权等值的声望加成。
经过一条边需要满足边权等值的最低声望限制。
多次给出起点和初始声望，询问能达到的最大声望。

按照边权从小到大建立 Kruskal 重构树。每次询问都是从叶子出发，在树上倍增。向上找到第一条不能通过的边（即，该边下面的子树的 **叶子点权和** 加上 **初始声望** 小于该边边权），把下面子树的 **叶子点权和** 加上 **初始声望** 即为答案。

复杂度 $O((n+m)\log m + q\log n)$

I. Steadily Growing Steam

背包dp

若干物品具有体积 t_i 和价值 v_i ，选出至多 k 件物品将其体积翻倍，然后选出若干物品并将其分为体积和相同的两堆，问选出的物品价值之和最大是多少。

若干物品具有体积 t_i 和价值 v_i ，选出至多 k 件物品将其体积翻倍，然后选出若干物品并将其分为体积和相同的两堆，问选出的物品价值之和最大是多少。

选入集合 1 的物品体积视为正，选入集合 2 的体积视为负。定义 $dp(w,i,j)$ 表示已选物品体积和为 w ，已考虑前 i 件物品并且 j 件物品体积翻倍的状态下的最优价值和。

$dp(w, i, j)$ 可以从下面几个过程转移过来：

- $dp(w, i-1, j)$
- $dp(w-t_i, i-1, j)$
- $dp(w+t_i, i-1, j)$
- $dp(w-2t_i, i-1, j-1)$
- $dp(w+2t_i, i-1, j-1)$

  可以滚动数组优化空间。

  最后答案为 $\max\{dp(0, n, j) | 0 \le j \le k\}$

  复杂度 $O(n^3 \cdot t_{\max})$

J. Two Binary Strings Problem

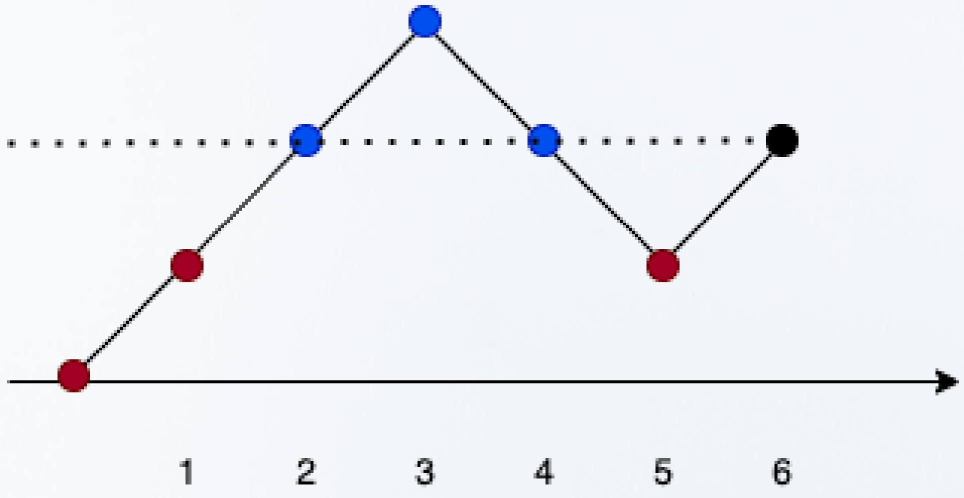
bitset/位运算

给出01序列 B, A，对每一个 $1 \le k \le n$ ，如果对所有的 i 满足序列 A 的以 i 为右端点的长度为 k 的区间众数是 B_i，则输出一个 1 ，否则输出一个 0 。

具体细节定义见题目描述。

给出01序列 B, A，对每一个 $1 \le k \le n$，如果对所有的 i 满足序列 A 的以 i 为右端点的长度为 k 的区间众数是 B_i，则输出一个 1，否则输出一个 0 。
具体细节定义见题目描述。

考虑把 A 序列中的 0 看成 -1 得到序列 C，然后考虑 C 的前缀和数组 S。
对每个端点 i，如果 $b_i = 1$ 那么满足其条件的 k 有 $s_{i-k} < s_i$，如果 $b_i = 0$ 那么满足其条件的 k 有 $s_{i-k} \ge s_i$ 。也就是说，通过 s_i 将不同的 k 值分到了两个集合。



从小到大扫描 i ，我们维护两个集合 U,V 分别表示当前比 s_i 小和不小于 s_i 的 s_j 的下标，这样通过移位和补位操作我们就能得到满足 b_i 的所有区间长度 k 。最后我们对每个 i 的合法 k 集合求交，即可得到答案。

用 bitset 和 位运算实现

复杂度 $O(\frac{n^2}{w})$ 其中 w 是机器的位数。

K. Circle of Life

构造

要求构造一个开始局面，使得能在规则下迭代 $2n$ 次以内就产生循环，并且循环不能是全 0 的局面。

存在构造方案，循环节长度只有 2 。
注意到下面两种情况的可拼接性：

- $1001 \to 0110 \to 1001$
- $10001 \to 01010 \to 10001$

以及上面的任何拼接在尾部加上 "10" 仍然合法。
因此长度为 $4k/4k+2/4k+5b/4k+5b+2$ 的情况都解决了。事实上只有 $n=3$ 不包含在上述情况中。

观察发现 $n=3$ 时无解，特判即可。

L. Three,Three,Three

一般图匹配/解的构造

三正则图 G 能分解为若干 P_4 （长度为 3 的路径）

$\iff$ 它有完美匹配

三正则图 G 能分解为若干 P_4 （长度为 3 的路径）

$\iff$ 它有完美匹配

证明：

先证 $\Longrightarrow$ ：

> “一条 P_4 给 2 个端点贡献 1 个度，给 2 个内点贡献 2 个度。因此两条不同的 P_4 不可能拥有同样的内点（否则内点的度数超过 3）。于是将每条 P_4 的两个内点匹配即可得到图 G 的完美匹配。”

再证 $\Longleftarrow$ ：

> “ 假设 G 存在完美匹配，将匹配边删掉后，每个点度数都为 2 。剩下的图一定是若干个环组成的，并且每个点都在且仅在一个环上。 ”

> “ 考虑在每个环上按顺序给环上的边定向，那么每个点都有且仅有一条出边，不妨称为 e_i 。那么对于原图中每对匹配点 u,v ，可以构造出一条 $P_4 : e_u,(u,v),e_v$ 。容易发现这些 P_4 就是一个合法的分解。 ”

L. Three,Three,Three

因此，此题做法是先用带花树求解最大匹配。
然后去掉匹配边，给环定向，构造出答案。

复杂度至少可以做到 $O(n^3)$

M. Harmony in Harmony

结论题/构造/霍尔定理

此题等价于存在一个两侧各有 n 个结点的带边权的满二分图，边权为实数，并且对任何一个结点，其所连边的权值和等于 $1/n$ 。

要求寻找一个尽可能大的 ans ，使得在任何满足上述条件的二分图下，都能够找到二分图的完美匹配，使得匹配边的权值都不低于 ans 。

考虑如下构造产生的答案的一个上界：

取 t 个白点，令前 $t-1$ 个黑点每个和这 t 个白点连边的权值都是 $\frac{1}{nt}$，这些白点剩下的 $\frac{1}{nt}$ 权值平分给剩下的 $n+1-t$ 个黑点，则一定有一个黑点的匹配边权值是 $\frac{1}{n(n+1-t)t}$。

考虑如下构造产生的答案的一个上界：
取 t 个白点，令前 $t-1$ 个黑点每个和这 t 个白点
连边的权值都是 $\frac{1}{nt}$，这些白点剩下的 $\frac{1}{nt}$ 权值平
分给剩下的 $n+1-t$ 个黑点，则一定有一个黑点的匹配边权
值是 $\frac{1}{n(n+1-t)t}$。

取 $t=\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$，得到答案的上界: $\frac{1}{n\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor\lfloor\frac{n+2}{2}\rfloor}$

不妨设该上界为 ε
接下来证明该上界总是可以取到。

将任意满足题中条件的二分图中至少为 ε 的边留下，根据 Hall 条件不难证明存在完美匹配。

因此答案就是：

$$\frac{1}{n\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor}$$

输出即可。