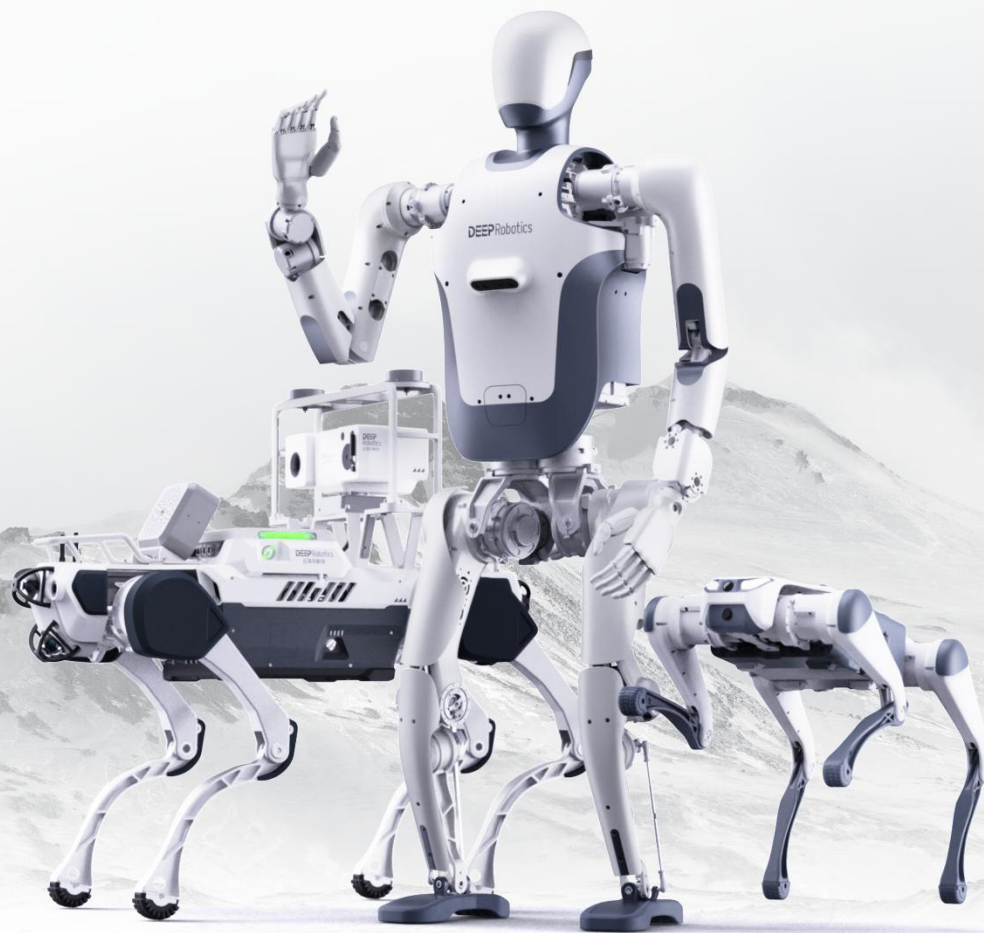


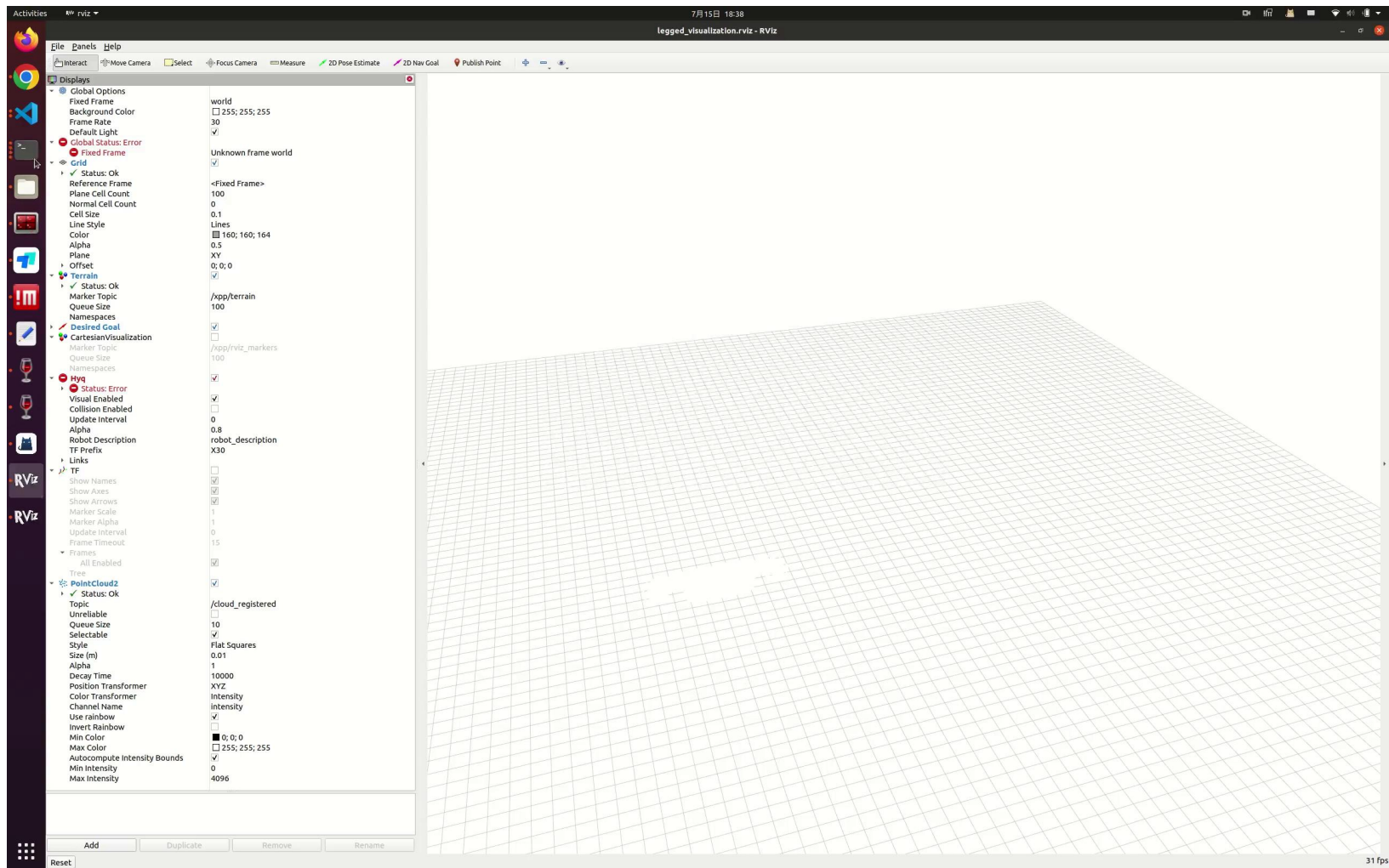
# 《足式机器人运动控制》第五章

## 状态估计





# 状态估计



- 一、卡尔曼滤波
- 二、状态方程和观测方程
- 三、Project

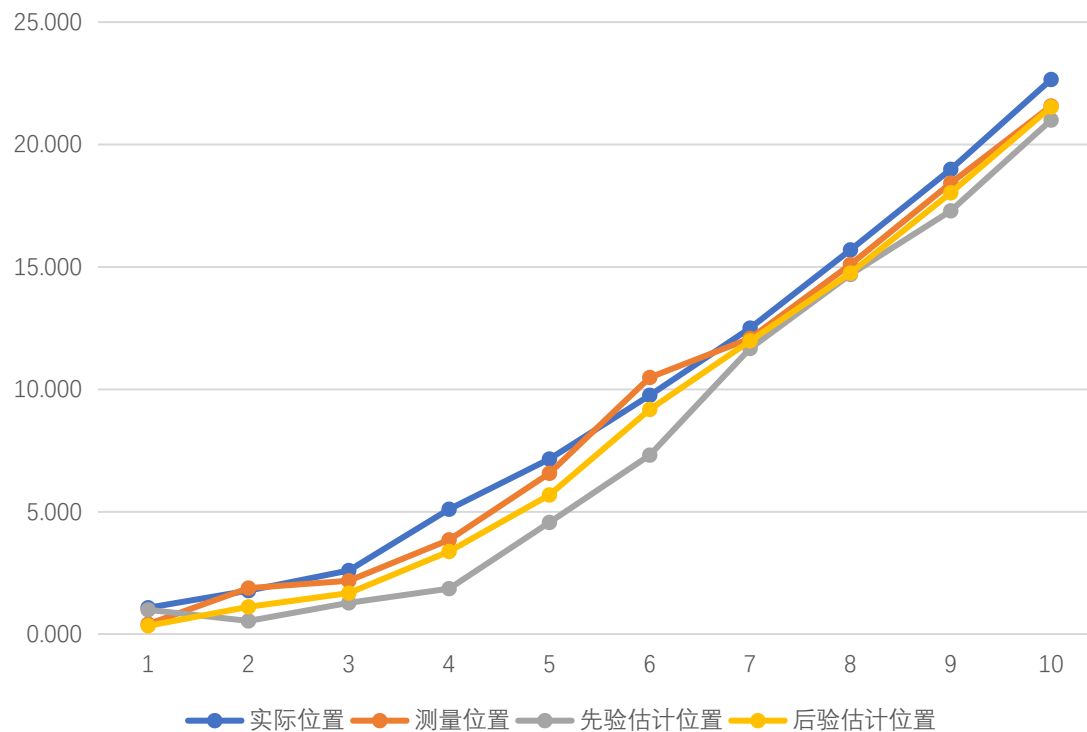
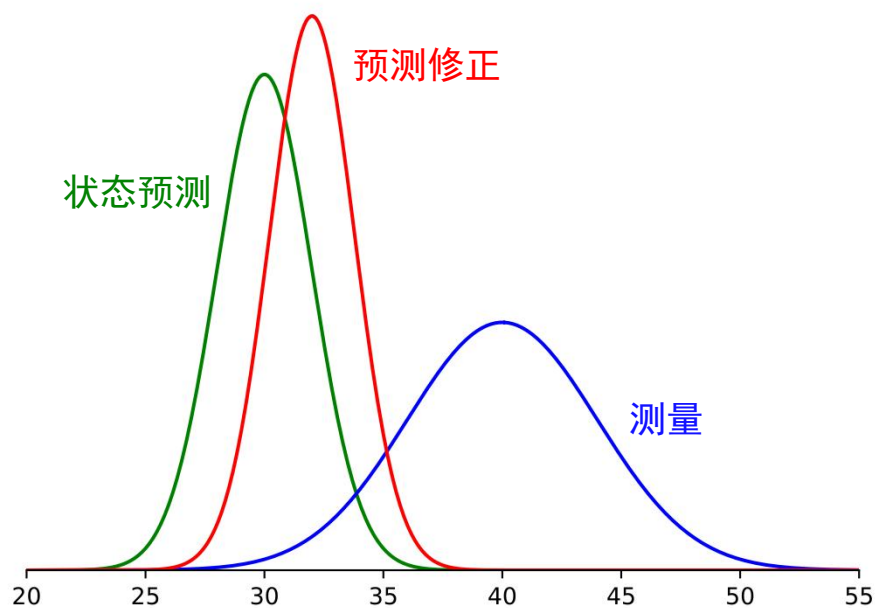


# 卡尔曼滤波

## □ 卡尔曼滤波器 (Kalman Filter)

卡尔曼滤波器 (Kalman filter) 是一种利用线性系统状态方程，通过系统输入输出观测数据，对系统状态进行最优估计的算法。由于观测数据中包括系统中的噪声和干扰的影响，所以最优估计也可看作是滤波过程。

卡尔曼滤波会根据各测量方差已知的量在不同时间下的值，考虑各时间下的联合分布，再产生对未知变量的估计，因此会比只以单一测量量为基础的估计方式要准。







# 卡尔曼滤波

## □ 卡尔曼滤波器

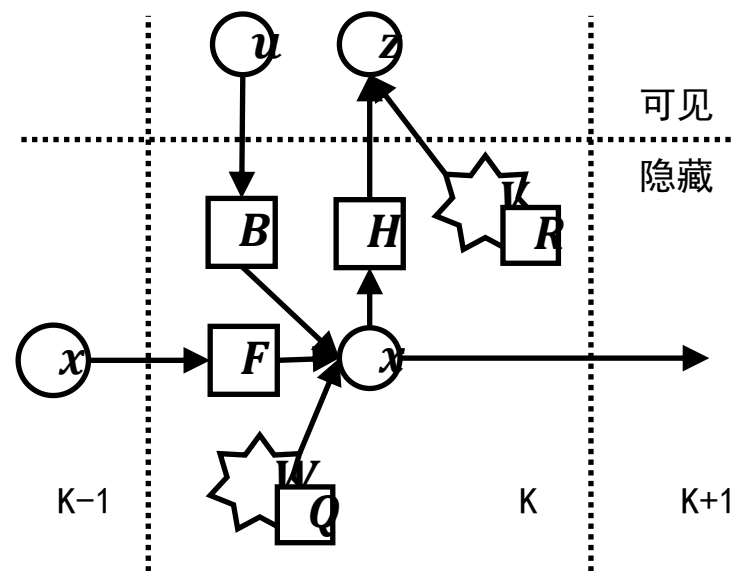
动态系统的基本模型：离散控制过程的系统

- 过程模型：用线性随机微分方程（Linear Stochastic Difference Equation）来描述： $x_k = F \cdot x_{k-1} + B \cdot u_k + w_k$
- 系统观测模型： $z_k = H \cdot x_k + v_k$
- $w_k \sim N(0, Q_k)$ ,  $Q_k$ 过程噪声的协方差矩阵
- $v_k \sim N(0, R_k)$ ,  $R_k$ 过程噪声的协方差矩阵

卡尔曼滤波器的状态由以下两个变量表示：

- $\hat{x}_{k|k}$ ，在时刻 $k$ 的状态的估计；
- $P_{k|k}$ ，后验估计误差协方差矩阵，度量估计值的精确程度。

卡尔曼滤波器的操作包括两个阶段：预测与更新。





# 卡尔曼滤波

- 利用状态转移方程可以得到预测状态  $\hat{x}_{k|k-1} = F_k \hat{x}_{k-1|k-1} + B_k u_k$
- 算出测量的参差  $y_k = z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}$ ， $y_k$  衡量的是测量值和预测值的偏差
- 后验估计  $\hat{x}_{k|k}$  为：  $\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1})$ ，其中  $K_k$  就是卡尔曼增益

目标：寻找  $K_k$ ，使得  $\hat{x}_{k|k} \rightarrow x_k$ ，也就是估计值的均方误差小

- $e_k = x_k - \hat{x}_{k|k}$ ，求最小的  $E(|x_k - \hat{x}_{k|k}|^2)$
- $P_k = cov(\hat{x}_{k|k}) = cov(\hat{x}_{k|k}, \hat{x}_{k|k})$   
$$= cov(x_k - \hat{x}_{k|k}, x_k - \hat{x}_{k|k})$$
- 协方差定义：  $cov(a, b) = E(ab) - (a)E(b)$
- $P_k = cov(x_k - \hat{x}_{k|k}, x_k - \hat{x}_{k|k}) = E((x_k - \hat{x}_{k|k})(x_k - \hat{x}_{k|k})^T) - E(x_k - \hat{x}_{k|k})E((x_k - \hat{x}_{k|k})^T)$   
$$= E((x_k - \hat{x}_{k|k})(x_k - \hat{x}_{k|k})^T)$$
- $E(|x_k - \hat{x}_{k|k}|^2) = tr(P_k)$



# 卡尔曼滤波

- 预测状态的协方差  $P_{k|k-1}$

- $$\begin{aligned} cov(\hat{x}_{k|k-1}) &= cov(F_k \hat{x}_{k-1|k-1} + B_k u_k + w_k) \\ &= cov(F_k \hat{x}_{k-1|k-1}) + cov(B_k u_k) + cov(w_k) \\ &= F_k cov(\hat{x}_{k-1|k-1}) F_k^T + 0 + Q_k \\ &= F_k P_{k-1} F_k^T + Q_k \end{aligned}$$

- $$P_{k|k-1} = F_k P_{k-1} F_k^T + Q_k$$

- 测量残差的协方差  $S_k$

- $$\begin{aligned} cov(y_k) &= cov(z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}) \\ &= cov(z_k) + cov(H_k \hat{x}_{k|k-1}) \\ &= cov(z_k) + H_k cov(\hat{x}_{k|k-1}) H_k^T \\ &= cov(H_k x_k + v_k) + H_k cov(\hat{x}_{k|k-1}) H_k^T = R_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T \end{aligned}$$

- $$S_k = R_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T$$



# 卡尔曼滤波

目标：寻找 $K_k$ ，使得 $\hat{x}_{k|k} \rightarrow x_k$

- $$\begin{aligned} P_k &= cov(x_k - \hat{x}_{k|k}) = cov(x_k - (\hat{x}_{k|k-1} + K_k(z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}))) \\ &= cov(x_k - (\hat{x}_{k|k-1} + K_k(H_k x_k + v_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}))) \\ &= cov((I - K_k H_k)(x_k - \hat{x}_{k|k-1}) - K_k v_k) \\ &= (I - K_k H_k)P_{k|k-1}(I - K_k H_k)^T + K_k R K_k^T \end{aligned}$$
- $$P_k = P_{k|k-1} - K_k H P_{k|k-1} - P_{k|k-1} H^T K_k^T + K_k H P_{k|k-1} H^T K_k^T + K_k R K_k^T$$
- $$tr(P_k) = tr(P_{k|k-1}) - 2tr(K_k H P_{k|k-1}) + tr(K_k H P_{k|k-1} H^T K_k^T) + tr(K_k R K_k^T)$$





# 卡尔曼滤波

- $tr(P_k) = tr(P_{k|k-1}) - 2tr(K_k H P_{k|k-1}) + tr(K_k H P_{k|k-1} H^T K_k^T) + tr(K_k R K_k^T)$

目标:  $\frac{tr(P_k)}{tr(K_k)} = 0$

- $\frac{tr(P_k)}{tr(K_k)} = 0 - 2(HP_{k|k-1})^T + 2K_k H P_{k|k-1} H^T + 2K_k R = 0$

$$\Rightarrow -P_{k|k-1} H^T + K_k (H P_{k|k-1} H^T + R) = 0$$

- $K_k = P_{k|k-1} H^T S_k^{-1}$

- 代入可得  $P_k = (I - K_k H) P_{k|k-1}$

- $\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k y_k$



# 卡尔曼滤波

## □ 预测

- 预测状态估计（先验）方程： $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k$
- 预测的协方差矩阵估计方程： $\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k$

## □ 更新

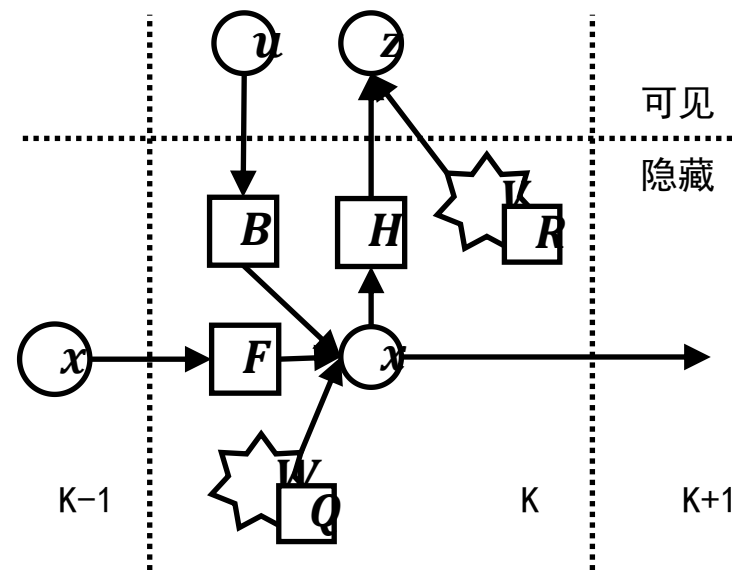
更新方程需要计算的量：

- 测量残差方程： $\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$
- 测量残差协方差矩阵方程： $\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k$
- 最优卡尔曼增益： $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1}$

然后用它们来更新滤波器变量 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{P}$ ：

- 更新的状态估计（后验）方程： $\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{y}}_k$
- 更新的协方差矩阵估计方程： $\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1}$

使用上述公式计算 $\mathbf{P}_{k|k}$ 仅在最优卡尔曼增益的时候有效。





# 卡尔曼滤波

## 扩展卡尔曼滤波 (Extended Kalman Filter, EKF)

- 现实中控制系统通常会存在不同程度的非线性环节，对于非线性系统：
- $x_k = f(x_{k-1}, u_k, \omega_k)$
- $z_k = h(x_{k-1}, v_k)$

一种直观的想法是利用Taylor级数展开，将非线性系统在滤波结果估计处线性化：

$$f(x_{k-1}) \approx f(\hat{x}_{k-1|k-1}) + F_k(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1|k-1})$$

$$F_k = \nabla_{x^T} \mathbf{f}(\mathbf{x})|_{x=\hat{x}_{k-1|k-1}} \triangleq \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n} \right] \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

EKF当近似后验均值与真值相差较大时，易造成滤波发散！

$$h(x_k) \approx h(\hat{x}_{k|k-1}) + H_k(x_k - \hat{x}_{k|k-1})$$

其余操作与线性卡尔曼滤波类似

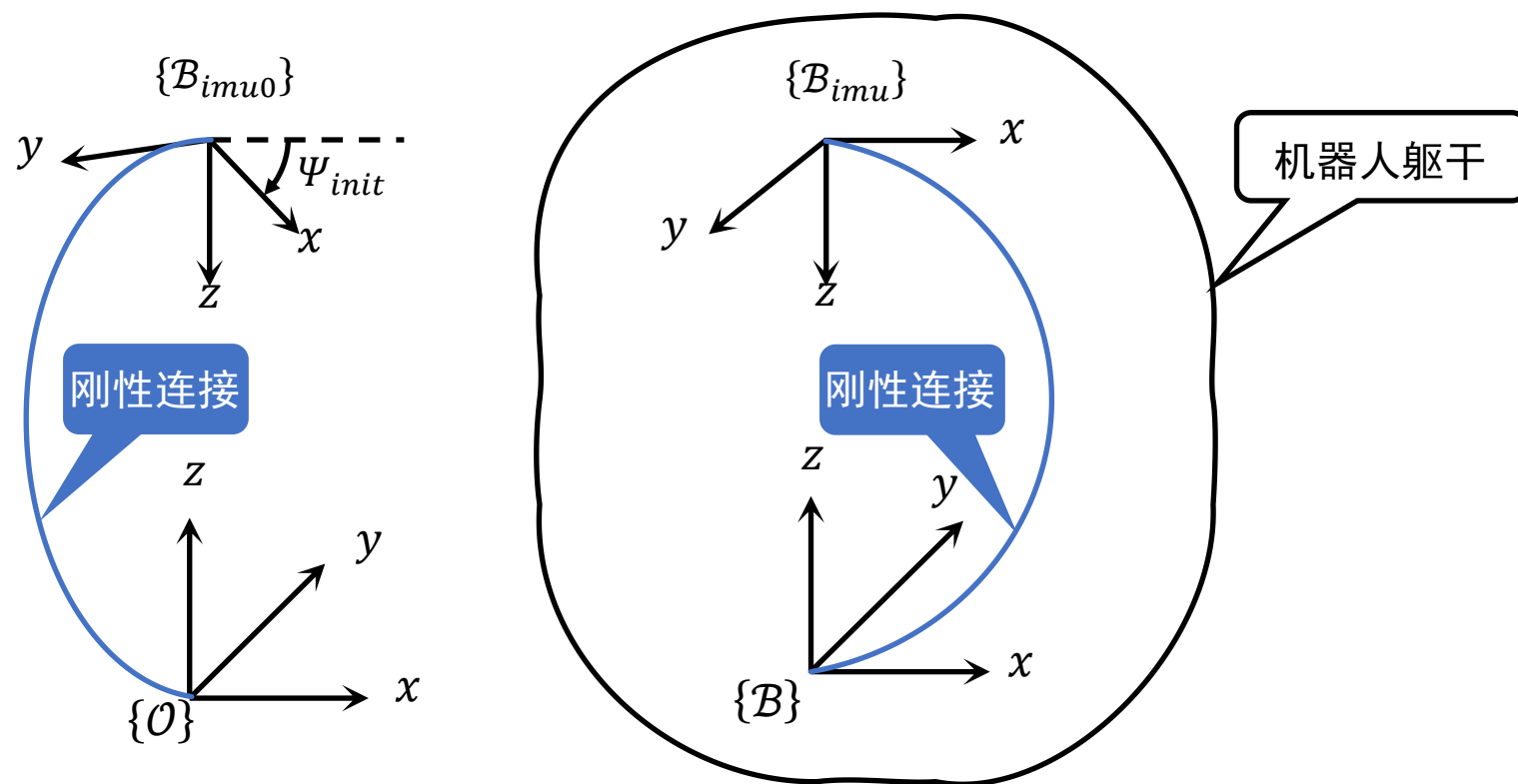
- 一、卡尔曼滤波
- 二、状态方程和观测方程
- 三、Project



# 四足机器人状态方程和观测方程

## □ 坐标系与符号说明

四足机器人使用的传感器，包括测量关节角度 ${}_i q^j$ 与转速 ${}_i \dot{q}^j$ 的电机编码器；以及测量质心加速度 ${}^B a_{com}$ 、躯干旋转矩阵 ${}^O R_B$ 、躯干角速度 ${}^B \omega_{OB}$ 的IMU。机器人躯干的转动状态（旋转矩阵与角速度）可以直接从IMU读取，还需要融合多种传感器数据来获取质心在世界系下的位置 ${}^O p_{com}$ 与速度 ${}^O v_{com}$ 。





# 四足机器人状态方程和观测方程

## □ 状态方程

加速度与角速度在世界系下的描述：

$${}^O\mathbf{a}_{com} = {}^OR_B \cdot {}^B\mathbf{a}_{com}$$

$${}^O\boldsymbol{\omega}_{OB} = {}^OR_B \cdot {}^B\boldsymbol{\omega}_{OB}$$

构建卡尔曼滤波器连续状态方程：

$$\begin{cases} {}^O\dot{\mathbf{p}}_{com} = {}^O\mathbf{v}_{com} \\ {}^O\dot{\mathbf{v}}_{com} = {}^O\mathbf{a}_{com} + {}^O\mathbf{g} \\ {}^O_i\dot{\mathbf{p}} = 0 \quad \forall i \in \{1,2,3,4\} \end{cases} \quad {}^O\mathbf{g} = [0 \quad 0 \quad -9.8m/s^2]^T$$

↓

$$\underbrace{\begin{bmatrix} {}^O\mathbf{p}_{com} \\ {}^O\mathbf{v}_{com} \\ {}^O\mathbf{p}_{foot} \end{bmatrix}_{k+1}}_{\mathbf{x}_{i+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{I}_3 & \Delta t \cdot \mathbb{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 12} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbb{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 12} \\ \mathbf{0}_{12 \times 3} & \mathbf{0}_{12 \times 3} & \mathbb{I}_{12} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} {}^O\mathbf{p}_{com} \\ {}^O\mathbf{v}_{com} \\ {}^O\mathbf{p}_{foot} \end{bmatrix}_k}_{\mathbf{x}_k} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \Delta t \cdot \mathbb{I}_3 \\ \mathbf{0}_{12 \times 3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_k} {}^O\mathbf{g}$$

↓

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k + B\mathbf{u}_k$$

卡尔曼滤波器的离散状态方程：





# 四足机器人状态方程和观测方程

## □ 观测方程

利用空间几何关系可以求得本体系下足底位置：

$${}^B_i\mathbf{p} = \begin{bmatrix} {}^B_i p^x \\ {}^B_i p^y \\ {}^B_i p^z \end{bmatrix} = FK(q)$$

本体系下足底速度与关节速度的关系：

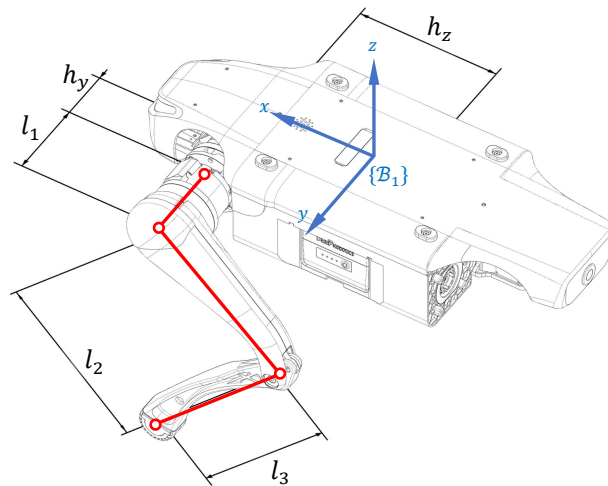
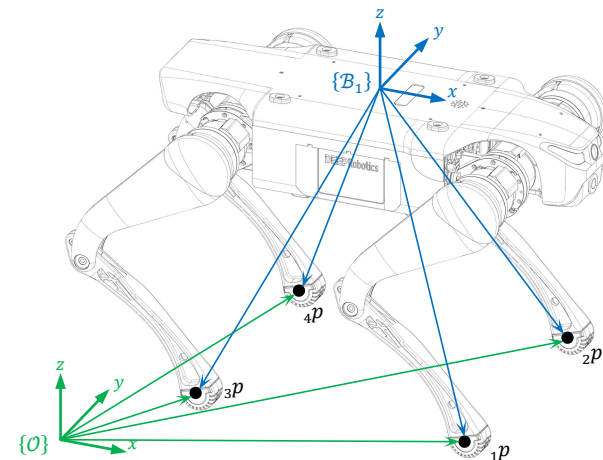
$${}^B_i\dot{\mathbf{p}} = J(q)\dot{q}$$

足底坐标从本体系到世界系的映射关系为：

$${}^O_i\mathbf{p} = {}^O\mathbf{p}_{com} + {}^OR_B \cdot {}^B_i\mathbf{p}$$

对上式微分，以求足底速度从本体系到世界系的映射关系：

$$\begin{aligned} {}^O_i\dot{\mathbf{p}} &= {}^O\mathbf{v}_{com} + {}^O\dot{R}_B \cdot {}^B_i\mathbf{p} + {}^OR_B \cdot {}^B_i\dot{\mathbf{p}} \\ &= {}^O\mathbf{v}_{com} + {}^OR_B \cdot {}^B\boldsymbol{\omega}_{OB\times} \cdot {}^B_i\mathbf{p} + {}^OR_B \cdot {}^B_i\dot{\mathbf{p}} \\ &= {}^O\mathbf{v}_{com} + {}^OR_B \cdot ({}^B\boldsymbol{\omega}_{OB\times} \cdot {}^B_i\mathbf{p} + {}^B_i\dot{\mathbf{p}}) \end{aligned}$$





# 四足机器人状态方程和观测方程

## □ 观测方程

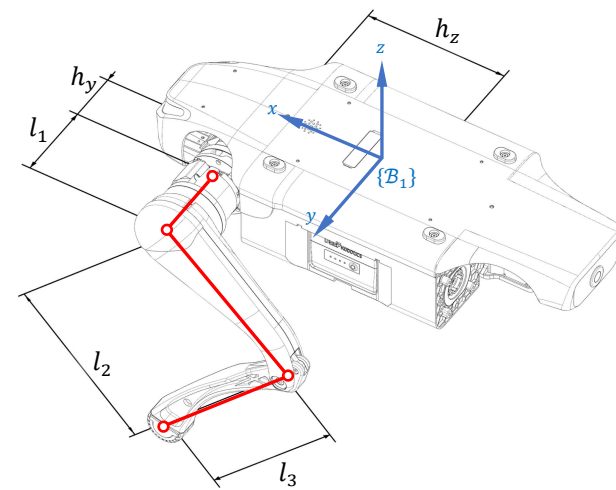
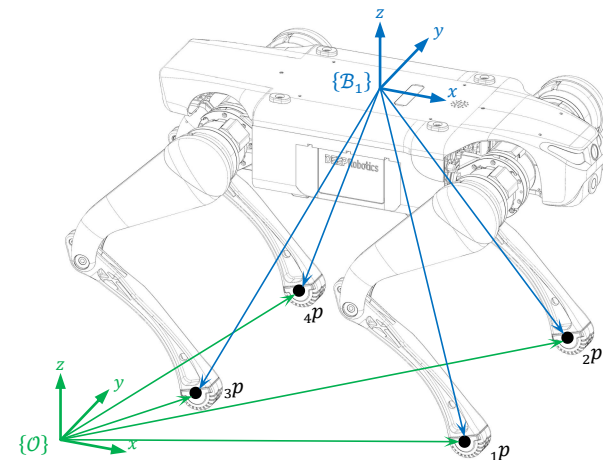
$$\begin{aligned} {}^0_i\dot{p} &= {}^0v_{com} + {}^0\dot{R}_B \cdot {}^B_i p + {}^0R_B \cdot {}^B_i\dot{p} \\ &= {}^0v_{com} + {}^0R_B \cdot {}^B\omega_{OB\times} \cdot {}^B_i p + {}^0R_B \cdot {}^B_i\dot{p} \\ &= {}^0v_{com} + {}^0R_B \cdot ({}^B\omega_{OB\times} \cdot {}^B_i p + {}^B_i\dot{p}) \end{aligned}$$

根据支撑足不打滑假设，足底在世界系下静止，即 ${}^0_i\dot{p} = 0$ ，从而有：

$${}^0v_{com} = -{}^0R_B \cdot ({}^B\omega_{OB\times} \cdot {}^B_i p + {}^B_i\dot{p})$$

另外，足底高度 ${}^0p^z$ 与足底坐标 ${}^0_i p$ 有如下关系：

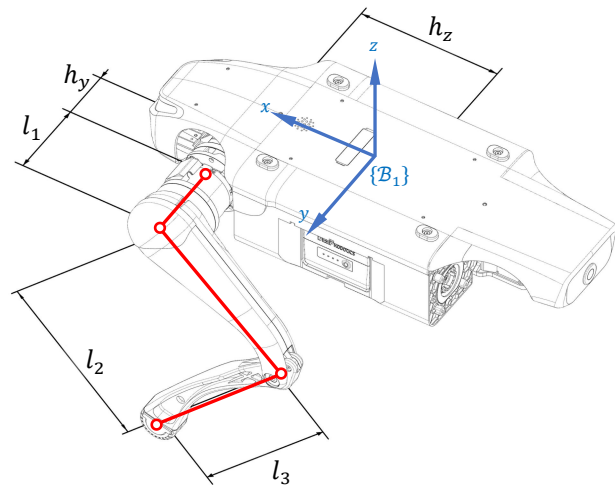
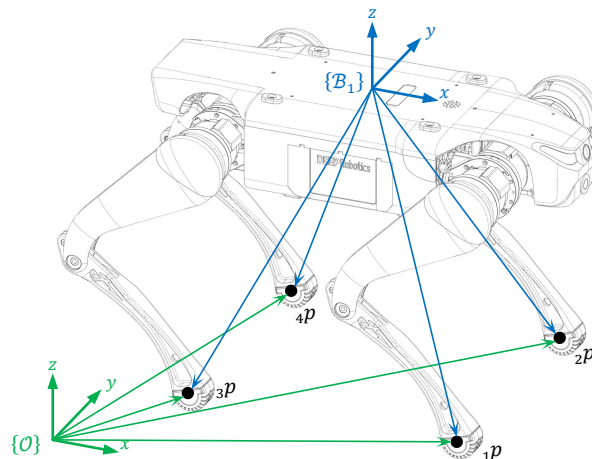
$${}^0_i p^z = [0 \quad 0 \quad 1] \cdot {}^0_i p$$





# 四足机器人状态方程和观测方程

## □ 观测方程



$$\begin{aligned} {}^0_i p &= {}^0 p_{com} + {}^0 R_B \cdot {}^B_i p \\ {}^0 v_{com} &= - {}^0 R_B \cdot ({}^B \omega_{OB \times} \cdot {}^B_i p + {}^B_i \dot{p}) \\ {}^0_i p^z &= [0 \quad 0 \quad 1] \cdot {}^0_i p \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} - {}^0 R_B \cdot {}^B_1 p \\ - {}^0 R_B \cdot {}^B_2 p \\ - {}^0 R_B \cdot {}^B_3 p \\ - {}^0 R_B \cdot {}^B_4 p \\ - {}^0 R_B \cdot ({}^B \omega_{OB \times} \cdot {}^B_1 p + {}^B_1 \dot{p}) \\ - {}^0 R_B \cdot ({}^B \omega_{OB \times} \cdot {}^B_2 p + {}^B_2 \dot{p}) \\ - {}^0 R_B \cdot ({}^B \omega_{OB \times} \cdot {}^B_3 p + {}^B_3 \dot{p}) \\ - {}^0 R_B \cdot ({}^B \omega_{OB \times} \cdot {}^B_4 p + {}^B_4 \dot{p}) \\ {}^0_1 p^z \\ {}^0_2 p^z \\ {}^0_3 p^z \\ {}^0_4 p^z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_3 & 0_{3 \times 3} & & & \\ I_3 & 0_{3 \times 3} & & & \\ I_3 & 0_{3 \times 3} & -I_{12} & & \\ I_3 & 0_{3 \times 3} & & & \\ 0_{3 \times 3} & I_3 & & & \\ 0_{3 \times 3} & I_3 & & & \\ 0_{3 \times 3} & I_3 & 0_{12 \times 12} & & \\ 0_{3 \times 3} & I_3 & & & \\ 0_{1 \times 6} & 0 & 0 & 1 & 0_{1 \times 9} \\ 0_{1 \times 9} & 0 & 0 & 1 & 0_{1 \times 6} \\ 0_{1 \times 12} & 0 & 0 & 1 & 0_{1 \times 3} \\ 0_{1 \times 12} & 0 & 0 & 1 & 0_{1 \times 0} \end{bmatrix}}_H \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0 p_{com} \\ {}^0 v_{com} \\ {}^0_1 p \\ {}^0_2 p \\ {}^0_3 p \\ {}^0_4 p \end{bmatrix}_k}_{x_k} \Leftrightarrow z_k = H \cdot x_k$$



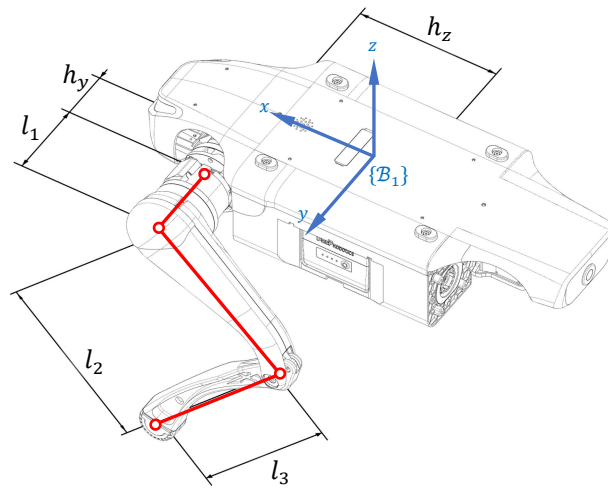
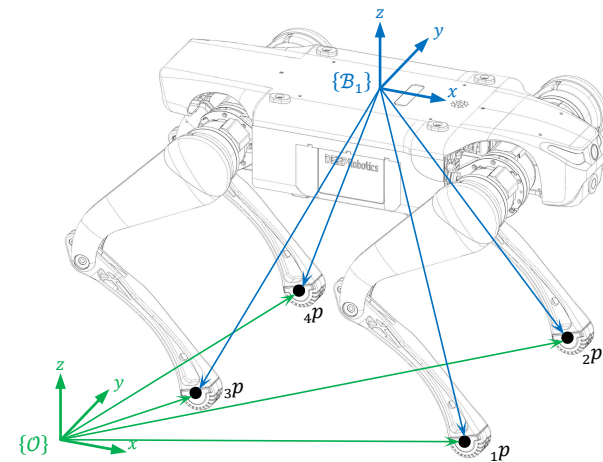
# 四足机器人状态方程和观测方程

## □ 系统估计

假设:  ${}^0_i p^z = 0$

使用标准的卡尔曼滤波递归方程对系统进行估计:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\underline{x}}_k = A\hat{\underline{x}}_{k-1} + B\mathbf{u}_{k-1} \\ \underline{P}_k = A\underline{P}_{k-1}A^T + Q \\ K_k = \frac{\underline{P}_k H^T}{H\underline{P}_k H^T + R} \\ \hat{\underline{x}}_k = \hat{\underline{x}}_k + K_k (\mathbf{z}_k - H\hat{\underline{x}}_k) \\ \underline{P}_k = (I - K_k H)\underline{P}_k \end{array} \right.$$

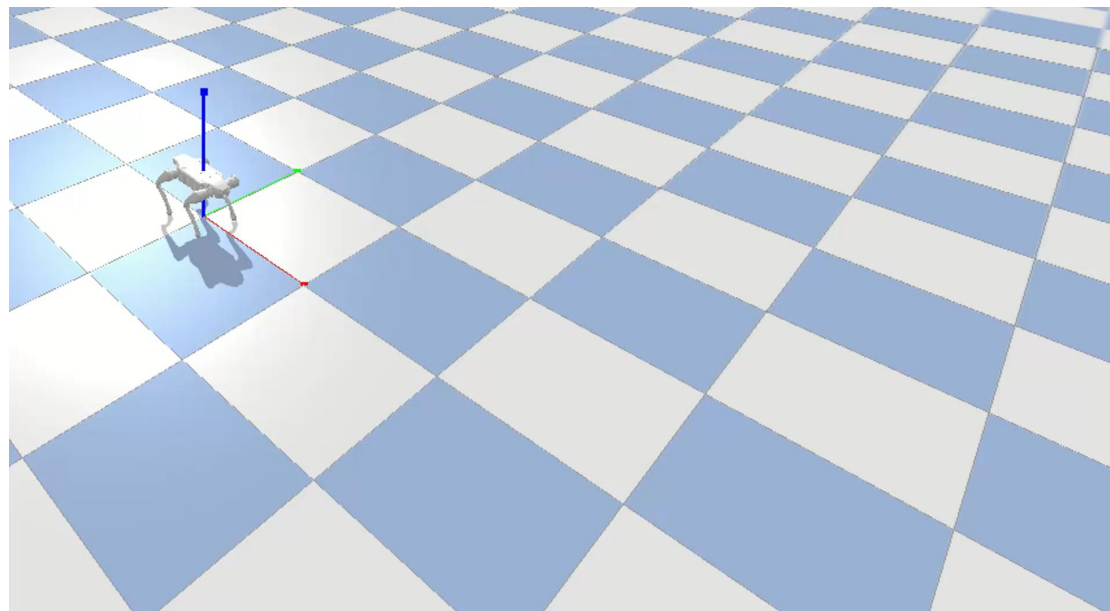


-  一、卡尔曼滤波
-  二、状态方程和观测方程
-  三、Project



## □ 状态估计实践：

- 根据Lite3的离线数据写出预测方程和卡尔曼滤波迭代公式
- 在仿真环境中绘制Lite3的状态估计曲线
- 对比先验数据和后验数据







## 参考资料

1. DR\_CAN. <https://space.bilibili.com/230105574/channel/collectiondetail>, 2021
2. Bloesch M, Hutter M, Hoepflinger M A, et al. State estimation for legged robots: Consistent fusion of leg kinematics and IMU[J]. 2013.
3. 卡尔曼滤波: <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8D%A1%E5%B0%94%E6%9B%BC%E6%BB%A4%E6%B3%A2>



# 感谢聆听！

Thanks for Listening