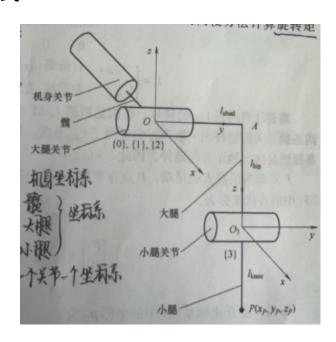
四足机器人运动学&逆运动学作业

一. 足式机器人运动学公式

1.1 单腿运动学公式



$$egin{bmatrix} p_0 \ 1 \end{bmatrix} = T_{01}T_{12}T_{23} egin{bmatrix} p_3 \ 1 \end{bmatrix}$$

$$egin{bmatrix} x_P \ y_P \ z_P \ 1 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} l_3\sin(heta_2+ heta_3) + l_2\sin heta_2 \ -l_3\sin heta_1\cos(heta_2+ heta_3) + l_1\cos heta_1 - l_2\cos heta_2\sin heta_1 \ l_3\cos heta_1\cos(heta_2+ heta_3) + l_1\sin heta_1 + l_2\cos heta_1\cos heta_2 \ 1 \end{bmatrix}$$

$$l_1 = egin{cases} -l_{
m thigh} & ext{右前腿,右后腿} \ l_{
m thigh} & ext{左前腿,左后腿} \end{cases}$$

$$l_2 = -l_{
m shank} \ l_3 = -l_{
m knee}$$

在上述公式中:

坐标系{0}: 机身坐标系

坐标系{1}: 髋关节坐标系

坐标系{2}: 大腿关节坐标系

坐标系{3}: 小腿关节坐标系

 p_0 : 坐标系 $\{0\}$ 下的足端位置

 p_3 : 坐标系 $\{3\}$ 下的足端位置

 T_{xy} : 坐标系 $\{y\}$ 相对于坐标系 $\{x\}$ 的齐次变换矩阵

 p_3 : 坐标系 $\{3\}$ 下的足端位置

 θ_1 : 髋关节旋转角度

 θ_2 : 大腿关节旋转角度

 θ_3 : 小腿关节旋转角度

1.2 四足机器人运动学公式

$$p_{bi} = T_{bs} * p_{si} = T_{sb}^{-1} * p_{si}, i = 0, 1, 2, 3$$

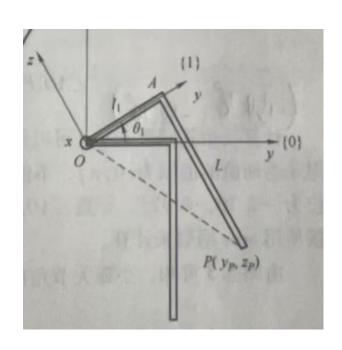
在上述公式中:

坐标系 $\{s\}$: 世界坐标系 坐标系 $\{b\}$: 机身坐标系

 p_si : 世界坐标系下的足端i位置 p_bi : 机身坐标系下的足端i位置

二. 足式机器人逆运动学公式

2.1 求髋关节角



$$heta_1 = atan2(z_pl_1 + y_pL, y_pl_1 - z_pL)$$

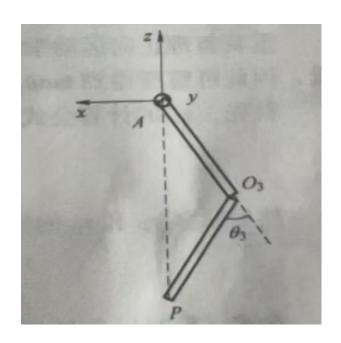
$$l_1 = egin{cases} -l_{thigh} & ext{右前腿,右后腿} \ l_{thigh} & ext{左前腿,左后腿} \ L = \sqrt{y_p^2 + z_p^2 - l_1^2} \end{cases}$$

在上述公式中:

 θ_1 : 髋关节角度

 x_p : 髋关节坐标系下足端x轴坐标 y_p : 髋关节坐标系下足端y轴坐标 z_n : 髋关节坐标系下足端y轴坐标

2.2 求小腿关节角



2.3 求大腿关节角

$$egin{aligned} heta_2 &= atan2(a_1m_1 + a_2m_2, a_2m_1 - a_1m_2) \ & \left\{ egin{aligned} a_1 &= y_p\sin heta_1 - z_p\cos heta_1, \ a_2 &= x_p, \ m_1 &= l_3\sin heta_3, \ m_2 &= l_3\cos heta_3 + l_2 \end{aligned}
ight. \ & \left\{ egin{aligned} l_2 &= -l_{
m shank} \ l_3 &= -l_{
m knee} \end{aligned}
ight. \end{aligned}$$

在上述公式中:

 θ_1 : 髋关节角度

 θ_2 : 大腿关节角度

 θ_3 : 小腿关节角度

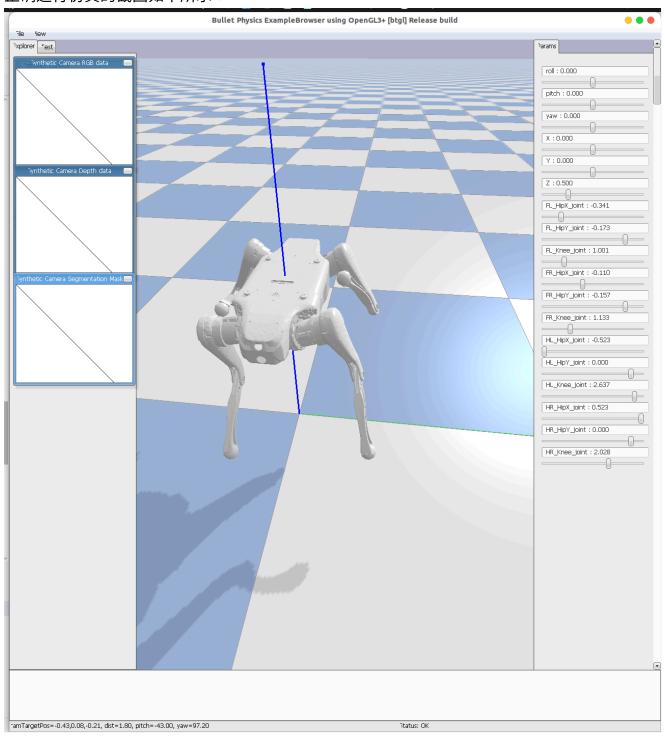
 x_p : 髋关节坐标系下足端 \mathbf{x} 轴坐标

 y_p : 髋关节坐标系下足端y轴坐标

 z_p : 髋关节坐标系下足端z轴坐标

三. 正确运行仿真的截图

正确运行仿真的截图如下所示:



四. 代码运行的结果

以下的代码分别展示了足式机器人四条腿的运动学和逆运动学结算的代码

```
leg 0 IK inv&obs:
                     [[ 0.259 -0.565 2.792]]
                                              [[ 0.259 -0.565 2.792]]
leg 0 FK sim&cal:
                     [[0.234 0.146 0.436]] |
                                               [[0.234 0.146 0.436]]
leg 0 IK inv&obs:
                     [[ 0.259 -0.565 2.792]]
                                                  [[ 0.259 -0.565 2.792]]
                     [[0.234 0.146 0.436]]
leg 0 FK sim&cal:
                                               [[0.234 0.146 0.436]]
leg 0 IK inv&obs:
                     [[ 0.259 -0.565 2.792]]
                                               [[ 0.259 -0.565 2.792]]
leg 0 FK sim&cal:
                     [[0.234 0.146 0.436]] |
                                               [[0.234 0.146 0.436]]
leg 0 IK inv&obs:
                     [[ 0.259 -0.565 2.792]]
                                                  [[ 0.259 -0.565 2.792]]
leg 0 FK sim&cal:
                     [[0.234 0.146 0.436]] |
                                               [[0.234 0.146 0.436]]
leg 0 IK inv&obs:
                     [[ 0.259 -0.565 2.792]]
                                               [[ 0.259 -0.565 2.792]]
leg 0 FK sim&cal:
                     [[0.234 0.146 0.436]] |
                                               [[0.234 0.146 0.436]]
leg 0 IK inv&obs:
                                                  [[ 0.259 -0.565 2.792]]
                     [[ 0.259 -0.565 2.792]]
                     [[0.234 0.146 0.436]]
                                               [[0.234 0.146 0.436]]
leq 0 FK sim&cal:
leg 0 IK inv&obs:
                     [[ 0.259 -0.565 2.792]]
                                                  [[ 0.259 -0.565
                                                                  2.792]]
led 0 FK sim&cal:
                     [[0.234 0.146 0.436]] | [[0.234 0.146 0.436]]
leg 1 IK inv&obs:
                     [[-0.11
                              -0.157
                                      1.133]]
                                                  [[-0.11 -0.157]
                                                                   1.133]]
leg 1 FK sim&cal:
                     [[ 0.317 -0.124
                                      0.176]]
                                                  [[ 0.317 -0.124
                                                                   0.176]]
leg 1 IK inv&obs:
                     [[-0.11 -0.157
                                      1.133]]
                                                  [[-0.11 -0.157
                                                                   1.133]]
leg 1 FK sim&cal:
                     [[ 0.317 -0.124
                                      0.176]]
                                                  [[ 0.317 -0.124
                                                                   0.176]]
leg 1 IK inv&obs:
                     [[-0.11 -0.157
                                      1.133]]
                                                  [[-0.11 -0.157
                                                                   1.133]]
leg 1 FK sim&cal:
                     [[ 0.317 -0.124
                                      0.176]]
                                                  [[ 0.317 -0.124
                                                                   0.176]]
leg 1 IK inv&obs:
                     [[-0.11 -0.157
                                      1.133]]
                                                  [[-0.11 -0.157
                                                                   1.133]]
leg 1 FK sim&cal:
                     [[ 0.317 -0.124
                                      0.176]]
                                                  [[ 0.317 -0.124
                                                                   0.176]]
leg 1 IK inv&obs:
                     [[-0.11 -0.157
                                      1.133]]
                                                  [[-0.11 -0.157
                                                                   1.133]]
leg 2 IK inv&obs:
                     [[ 0.215 -0.77
                                      2.386]]
                                                   [[ 0.215 -0.77
                                                                    2.386]]
leg 2 FK sim&cal:
                     [[-0.104 0.129
                                      0.348]]
                                                   [[-0.104 0.129
                                                                    0.348]]
leg 2 IK inv&obs:
                     [[ 0.215 -0.77
                                      2.386]]
                                                   [[ 0.215 -0.77
                                                                    2.386]]
leg 2 FK sim&cal:
                     [[-0.104 0.129
                                      0.348]]
                                                   [[-0.104 0.129
                                                                    0.348]]
leg 2 IK inv&obs:
                     [[ 0.215 -0.77
                                      2.38611
                                                   [[ 0.215 -0.77
                                                                    2.38611
leg 2 FK sim&cal:
                     [[-0.104 0.129
                                      0.348]]
                                                   [[-0.104 0.129
                                                                    0.348]]
leg 2 IK inv&obs:
                     [[ 0.215 -0.77
                                      2.386]]
                                                   [[ 0.215 -0.77
                                                                    2.386]]
leg 2 FK sim&cal:
                     [[-0.104 0.129
                                      0.348]]
                                                   [[-0.104 0.129
                                                                    0.348]]
leg 2 IK inv&obs:
                     [[ 0.215 -0.77
                                                   [[ 0.215 -0.77
                                      2.386]]
                                                                    2.386]]
leg 2 FK sim&cal:
                     [[-0.104 0.129
                                      0.348]]
                                                   [[-0.104 0.129
                                                                    0.348]]
leg 2 IK inv&obs:
                     [[ 0.215 -0.77
                                      2.386]]
                                                   [[ 0.215 -0.77
                                                                    2.386]]
leg 2 FK sim&cal:
                     [[-0.104 0.129
                                      0.348]]
                                                   [[-0.104 0.129
                                                                    0.34811
leg 2 IK inv&obs:
                     [[ 0.215 -0.77
                                      2.386]]
                                                   [[ 0.215 -0.77
                                                                    2.386]]
leg 2 FK sim&cal:
                   [[-0.104 0.129 0.348]] | [[-0.104 0.129
                                                                    0.348]]
```

leg 3 FK sim&cal:	[[-0.28 -0.164	0.496]]	[[0.069 -0.164	0.496]]
leg 3 IK inv&obs:	[[0.275 -2.67	2.601]]	[[0.275 -2.67	2.601]]
<pre>leg 3 FK sim&cal:</pre>	[[-0.28 -0.164	0.496]]	[[0.069 -0.164	0.496]]
leg 3 IK inv&obs:	[[0.275 -2.67	2.601]]	[[0.275 -2.67	2.601]]
leg 3 FK sim&cal:	[[-0.28 -0.164	0.496]]	[[0.069 -0.164	0.496]]
leg 3 IK inv&obs:	[[0.275 -2.67	2.601]]	[[0.275 -2.67	2.601]]
leg 3 FK sim&cal:	[[-0.28 -0.164	0.496]]	[[0.069 -0.164	0.496]]
leg 3 IK inv&obs:	[[0.275 -2.67	2.601]]	[[0.275 -2.67	2.601]]
leg 3 FK sim&cal:	[[-0.28 -0.164	0.496]]	[[0.069 -0.164	0.496]]
leg 3 IK inv&obs:	[[0.275 -2.67	2.601]]	[[0.275 -2.67	2.601]]
leg 3 FK sim&cal:	[[-0.28 -0.164	0.496]]	[[0.069 -0.164	0.496]]
leg 3 IK inv&obs:	[[0.275 -2.67	2.601]]	[[0.275 -2.67	2.601]]