- 循环坐标和广义动量积分

拉格朗日函数对广义速度的偏导数，称为力学系的广义动量

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

若广义坐标 q_α 为线坐标，则 p_α 是线动量
若广义坐标 q_α 为角坐标，则 p_α 是角动量

若某一广义坐标 q_β 在拉格朗日函数中不出现，则有

$$\frac{\partial L}{\partial q_\beta} = 0$$

根据拉格朗日方程可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} = 0$$

则其所对应的第一积分为

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} = p_\beta = \mathrm{C}$$

在体系的拉格朗日函数 L内不出现的广义坐标，称为该体系的**循环坐标**，其所对应的第一积分为该循环坐标的**广义动量积分**

与循环坐标对应的广义动量是体系的运动守恒量

循环积分

例：质点在有心力场中的动能和势能

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right) \qquad V=-\frac{k^2m}{r}$$

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+\frac{k^2m}{r}$$

广义坐标：r，θ

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}=0 \quad ,\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right)=0} \quad mr^2\dot{\theta}=\text{常量}$$

例 重力场中的抛体运动，直角坐标系下，

$$L = T - V = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

可见 L **中不显含**x, y **，则**

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = c_1$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = c_2$$

水平方向动量守恒

利用拉格朗日方程解题的步骤及注意事项

步骤：

1、确定系统的自由度并选择合适的广义坐标

2、利用广义坐标表示出系统的动能；

3、确定每个质点上的主动力，判断是否是保守系统

4、对于保守系统，利用广义坐标表示系统的势能，写出系统的动能

5、对于非保守系统，计算每个广义坐标对应的广义力

6、将动势或者是动能和广义力分别代入保守系统的拉格朗日方程或一般形式的拉格朗日方程进行计算

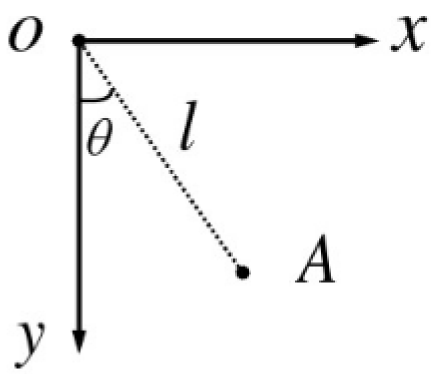
利用拉格朗日方程解题的步骤及注意事项

注意事项：

1、表示系统的势能时，需要选取系统的零势能位置，这个位置选取是灵活的，需要表示的是系统相对该位置的相对势能，选取的原则是：相对势能表示越方便、越简单越好

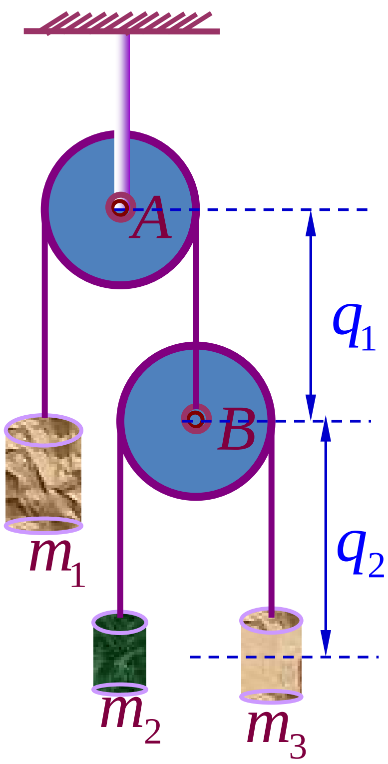
2、涉及广义力的计算时，可以利用广义力的定义计算，也可以利用广义虚位移的任意性进行计算，保守系统还可以通过势能函数对广义坐标的偏导数来计算。

用基本形式的拉格朗日方程求单摆的运动微分方程



[例]

如图所示，滑轮组悬挂三个重物，质量分别为m_1、m_2和m_3，试分别求出这三个重物加速度的大小。滑轮及绳子的质量可忽略不计。



分析：利用拉格朗日方程组可求解

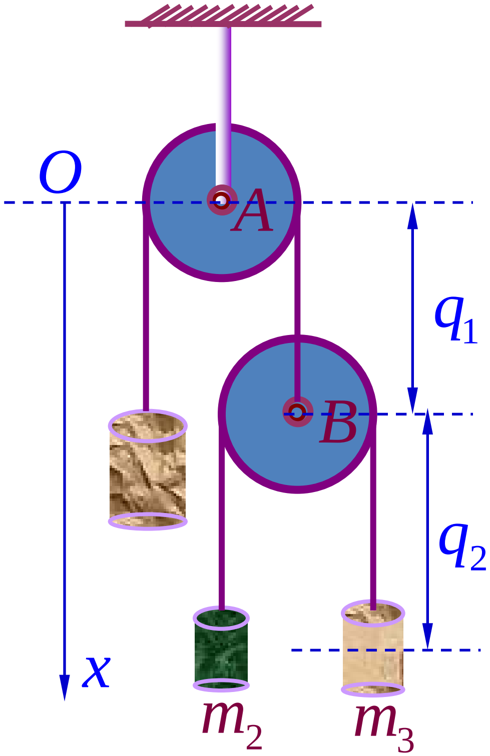
关键是找出广义坐标，因三个重物，二个滑轮，在同一平面作一维运动，需5个参量描述，又A固定和两个绳长一定的约束，故只需2个独立坐标q_1，q_2

解： 建立如图所示的一维坐标系Ox

三重物分别对应的坐标为x_1，x_2，x_3

设滑轮A、B半周长分别为s_1和s_2

滑轮A、B上的绳长分别为l_1和l_2



由图中几何关系有：

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= l_1 - s_1 - q_1 \\ x_2 &= q_1 + l_2 - s_2 - q_2 \\ x_3 &= q_1 + q_2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{速度}]{\text{重物}} \left\{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\dot{q}_1 \\ \dot{x}_2 &= \dot{q}_1 - \dot{q}_2 \\ \dot{x}_3 &= \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{aligned}\right.$$

不计滑轮和绳了的质量，那么体系的动能为：

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^{\ 2}+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^{\ 2}+\frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^{\ 2}$$

$$=\frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^{\ 2}+\frac{1}{2}m_2(\dot{q}_1-\dot{q}_2)^2+\frac{1}{2}m_3(\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2$$

$$=\frac{1}{2}(m_1+m_2+m_3)\dot{q}_1^{\ 2}+\frac{1}{2}(m_2+m_3)\dot{q}_2^{\ 2}+(m_3-m_2)\dot{q}_1\dot{q}_2$$

体系的势能为：

$$V=-m_1gx_1-m_2gx_2-m_3gx_3$$

$$=-m_1g(l_1-s_1-q_1)-m_2g(q_1+l_2-s_2-q_2)-m_3g(q_1+q_2)$$

$$=(m_1-m_2-m_3)gq_1+(m_2-m_3)gq_2+(m_1gs_1-m_1gl_1+m_2gs_2-m_2gl_2)$$

$$=(m_1-m_2-m_3)gq_1+(m_2-m_3)gq_2+V_0$$

体系的拉格朗日函数为：

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)\dot{q}_1^{\,2} + \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\dot{q}_2^{\,2} + (m_3 - m_2)\dot{q}_1\dot{q}_2$$

$$-(m_1 - m_2 - m_3)gq_1 - (m_2 - m_3)gq_2 - V_0$$

代入拉格朗日方程组有：

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}[(m_1 + m_2 + m_3)\dot{q}_1 + (m_3 - m_2)\dot{q}_2] + (m_1 - m_2 - m_3)g = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = \frac{d}{dt}[(m_2 + m_3)\dot{q}_2 + (m_3 - m_2)\dot{q}_1] + (m_2 - m_3)g = 0$$

化简为： $(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{q}_1 + (m_3 - m_2)\ddot{q}_2 + (m_1 - m_2 - m_3)g = 0$

$$(m_2 + m_3)\ddot{q}_2 + (m_3 - m_2)\ddot{q}_1 + (m_2 - m_3)g = 0$$

解得：

$$\ddot{q}_1 = \frac{(4m_2 - m_1)m_3 - m_1 m_2}{(m_1 + 4m_2)m_3 + m_1 m_2} g$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{2m_1(m_3 - m_2)}{(m_1 + 4m_2)m_3 + m_1 m_2} g$$

所以各重物的加速度为：

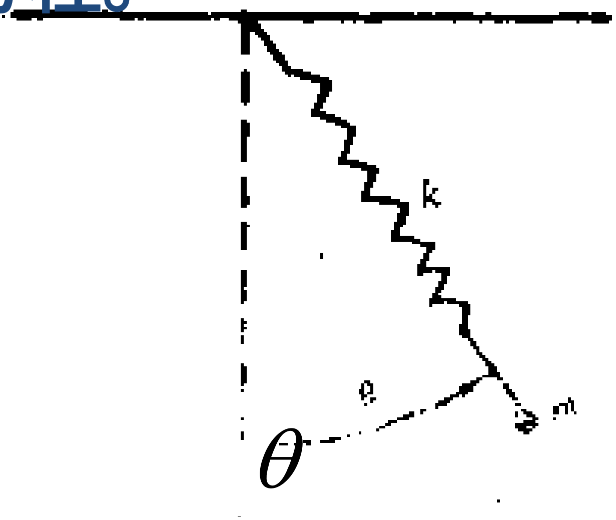
$$\ddot{x}_1 = -\ddot{q}_1 = \frac{m_1 m_2 - (4m_2 - m_1)m_3}{(m_1 + 4m_2)m_3 + m_1 m_2} g$$

$$\ddot{x}_2 = \ddot{q}_1 - \ddot{q}_2 = \frac{(4m_2 - 3m_1)m_3 + m_1 m_2}{(m_1 + 4m_2)m_3 + m_1 m_2} g$$

$$\ddot{x}_3 = \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = \frac{(4m_2 + m_1)m_3 - 3m_1 m_2}{(m_1 + 4m_2)m_3 + m_1 m_2} g$$

拉格朗日方程组是虚功原理在广义坐标的推广，解题步骤一样

一弹簧摆由质点m系于倔强系数为k的无质量弹簧的一端组成。弹簧另一端拴在一固定点上，弹簧原长为l。假定系统的运动限制在一个平面内，导出运动方程，并在相对平衡位置的角位移和径向位移都很小的近似下解运动方程。



解：　1.体系的自由度数?　　S=2

2.广义坐标选什么?　　r和θ

3.动能和势能如何表达?

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right),\quad V=\frac{1}{2}k\left(r-l\right)^2-mgr\cos\theta$$

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-\frac{1}{2}k\left(r-l\right)^2+mgr\cos\theta$$

4.如何求解拉氏方程?

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=0\rightarrow m\ddot{r}=mr\dot{\theta}^2-k\left(r-l\right)+mg\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0\rightarrow r\ddot{\theta}=-g\sin\theta-2\dot{r}\dot{\theta}$$

在平衡位置 $r_0=l+\dfrac{mg}{k},\quad \theta_0=0$

令 $r' = r - r_0$

代入前面运动方程，略去高阶小量，简化后得:

$$\ddot{r}' = \dot{\theta}^2 r' - \frac{k}{m} r' + \dot{\theta}^2 r_0$$

$$r'\ddot{\theta} = -g\sin\theta - r_0\ddot{\theta}$$

取 $\sin\theta \approx \theta$

$$\ddot{r}' + \frac{k}{m} r' = 0$$

$$r_0\ddot{\theta} + g\theta = 0$$

$$r' = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_1\right)$$

$$\theta = B\cos\left(\sqrt{\frac{g}{r_0}}t + \varphi_2\right)$$

$$r = l + \frac{mg}{k} + A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_1\right)$$

$$\theta = B\cos\left(\sqrt{\frac{kg}{mg + kl}}t + \varphi_2\right)$$