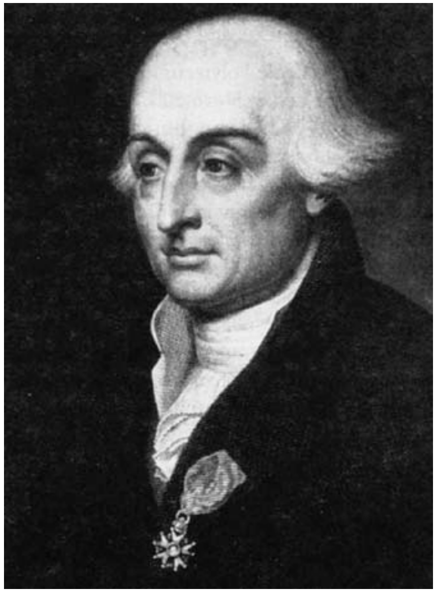
理论力学

余熳烨

第六章：分析力学



教学基本要求：

掌握约束、约束力、理想约束、虚位移、虚功、广义坐标、自由度、广义动量、广义角动量、循环坐标、循环积分、简正坐标、哈密顿函数、泊松括号、变分等概念

掌握约束(力)的分类、虚功原理、 *Legendre*变换、拉格朗日方程、哈密顿正则方程、哈密顿原理、泊松定理

本章重点：

掌握约束、理想约束、虚位移、虚功、广义坐标、自由度、广义动量、广义角动量、简正坐标、哈密顿函数、泊松括号、变分等概念

掌握约束分类、虚功原理、 *Legendre*变换、泊松定理、拉格朗日方程、哈密顿正则方程、哈密顿原理

本章难点：

掌握虚位移、虚功、简正坐标、哈密顿函数、泊松括号、变分等概念

掌握虚功原理、拉格朗日方程、哈密顿正则方程、哈密顿原理、泊松定理

分析力学是拉格朗日等在十八世纪在牛顿力学基础上建立

建立分析力学是为了 用数学方法解决复杂的力学问题

牛顿力学重于几何与矢量的应用

分析力学侧重于数学分析方法

分析力学的体系和方法不局限于力学，也适用其它物理领域

拉格朗日方程，哈密顿正则方程和正则变换应用于统计物理

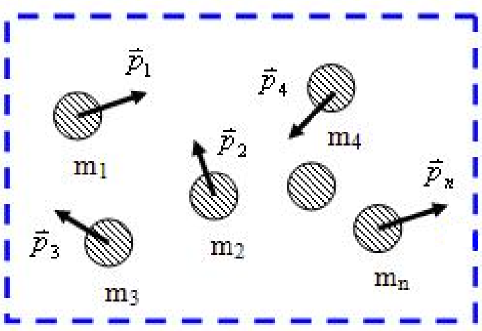
泊松括号的概念应用于量子力学

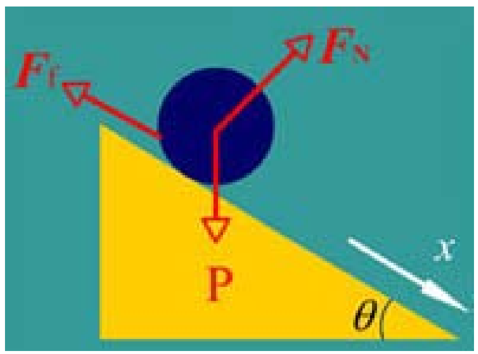
分析力学注重更广泛意义的能量，同时又扩大了坐标的概念

分析力学是将物理规律抽象为数学原理和定理，虽揭示出了物理规律背后更普遍的性质。但太多的数学推理，容易使人忘记力学的物理实质

§6.1 约束 自由度和广义坐标

- **力学系统**：由相互作用着的质点所构成的系统，或称为**力学体系**或**体系**
- **位形**：力学系中各质点的位置状态称为力学系的位形。包含 n 个质点的力学系位形需要 $3n$ 个坐标参量来确定





位形是质点的位置概念在质点系中的扩展

- **约束**：在一个力学体系中，如若存在一些限制质点自由运动的条件，则这些限制条件称为约束（其表现为在运动过程中各质点位置和速度必须满足一定的关系）

非自由体的真实运动是由主动力和约束力共同作用的结果

- 力学体系的约束可以表示为**约束方程**

$$f\left(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t\right) = 0$$

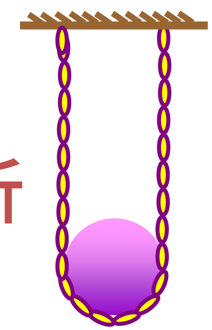
$$\left(i = 1, 2, \cdots, n\right)$$

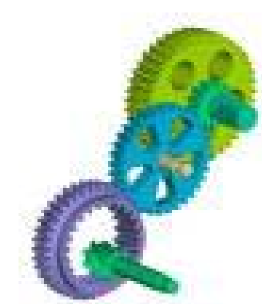
约束力

约束施加于被约束物体上的力，称为**约束力**(或**约束反力**)

约束力的方向与该约束所能阻碍的位移方向相反。

除约束力以外的其它力被称为**主动力**，它不依赖于质点的运动和约束，也称**载荷**。

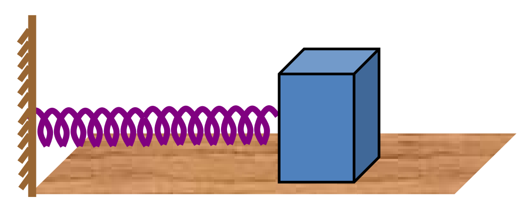




几种典型约束及其约束反力方向的分析

柔性约束、光滑接触面、齿轮啮合

光滑圆柱铰链、光滑球形铰链、固定约束



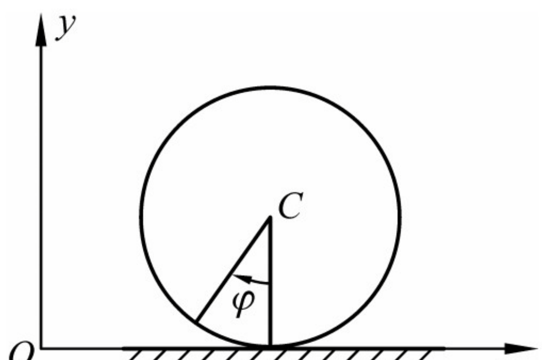
例如：a)长为 l 的刚性轻杆，一端被光滑铰链悬挂在 o 点，另一端与小球连接组成球面摆，在直角坐标系小球约束方程为

$$x^2+y^2+z^2-l^2=0$$

b)半径为 R 的车轮沿水平直线轨道无滑滚动，由于接触点速度为零，则约束方程为

$$\dot{x}_C-R\dot{\varphi}=0$$

$$\dot{y}_c=0$$



$$x_C=R\varphi$$

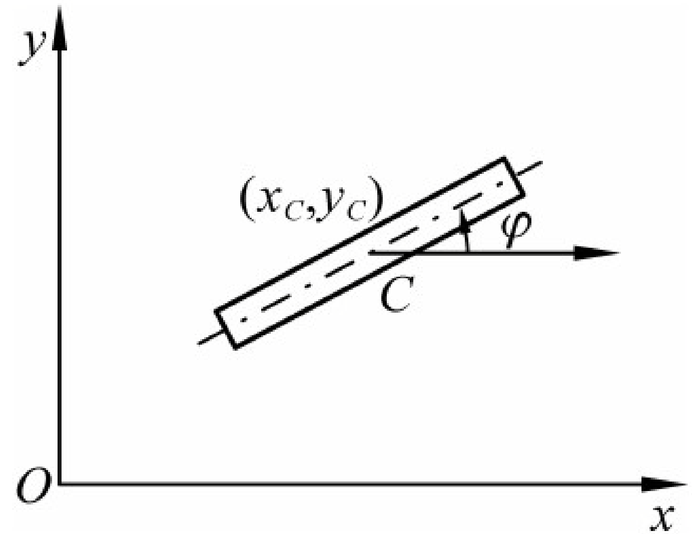
$$y_c=R$$

两组约束方程分别表明了地面对车轮的**位置**和**速度**的限制.

c)在水平冰面上滑行（固定在冰鞋上）的冰刀，冰面对冰刀横向运动的限制是冰刀质心的速度只能沿着冰刀的纵向，约束方程为

$$\frac{\dot{x}_C}{\dot{y}_c} = \cot\varphi$$

$$\mathrm{d}x_C = \cot\varphi \mathrm{d}y_c$$



由于$\cot\varphi$与y_c的函数关系不能确定，所以不可积分.

若约束只是限制各质点的几何位置，则称为**几何约束**

$$f\left(x_i, y_i, z_i, t\right)=0,\left(i=1,2,\cdots,n\right)$$

若约束方程中还包含有速度变量，则称这种约束为**微分约束**

约束方程中仅含质点的坐标和时间的约束为**完整约束**，若还包含**坐标对时间的导数或坐标的微分，且不能通过积分使之转化为完整约束**，则这种约束称为**非完整约束**

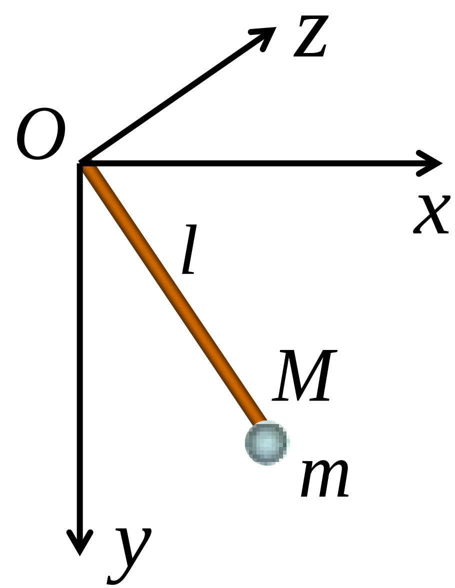
$eg:OM$为刚性轻杆

O点固定 $x^2+y^2+z^2-l^2=0$

完整约束

O点不固定 $(x-vt)^2+y^2+z^2-l^2=0$

完整约束



OM为柔软不可伸长轻绳

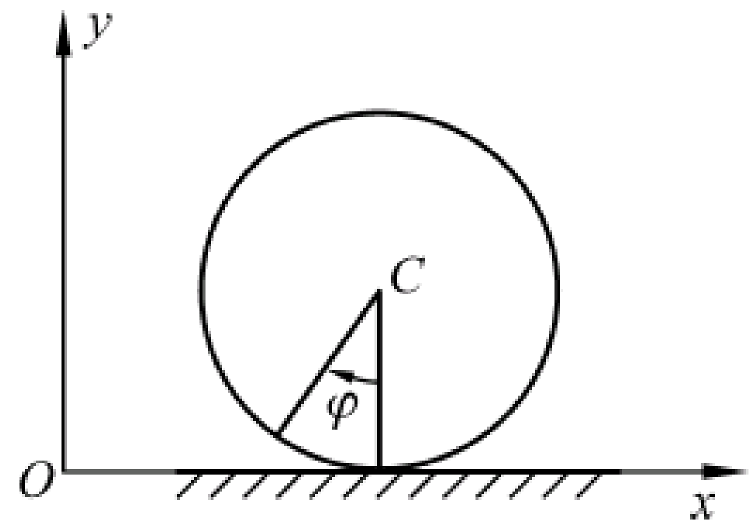
O点固定 $x^2+y^2+z^2-l^2\le 0$

完整约束

O点不固定 $(x-vt)^2+y^2+z^2-l^2\le 0$

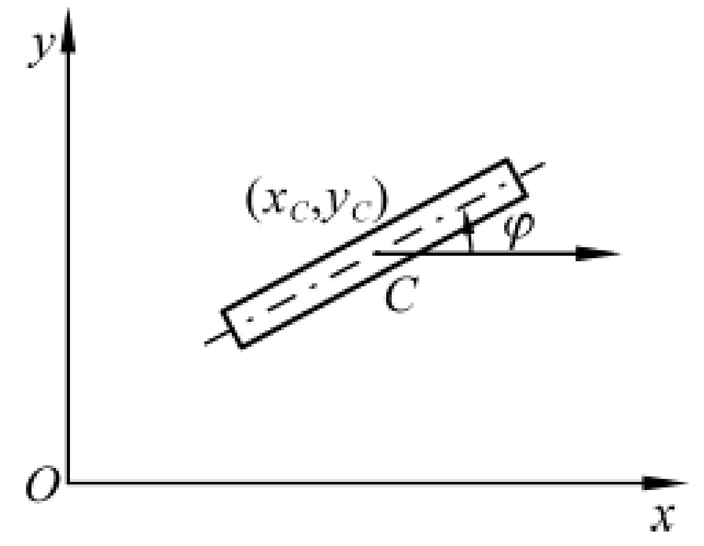
完整约束

$$\begin{cases} \dot{y}_c = 0 \\ \dot{x}_c - R\dot{\varphi} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{积分}} \begin{cases} y_c = R \\ x_c - R\varphi = 0 \end{cases}$$



完整约束

$$\frac{\dot{x}_c}{\dot{y}_c} = \cot\varphi \qquad \mathrm{d}x_c = \cot\varphi \mathrm{d}y_c$$



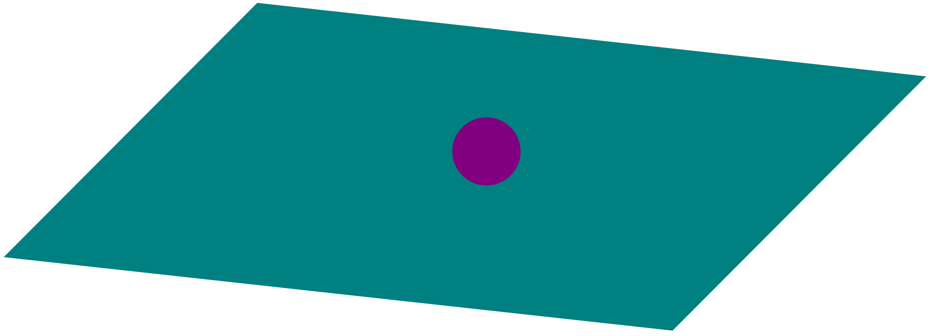
非完整约束

不随时间变化的约束称为为**稳定约束**

$$f(x, y, z)=0$$

若约束明显地随时间变化，则称为**不稳定约束**

$$f(x, y, z, t)=0$$



2、稳定约束和不稳定约束

稳定约束的约束方程中不显含时间t　$f(\vec{r})=0$

不稳定约束的约束方程中显含时间t　$f(t,\vec{r})=0$

有的书叫(不)稳定约束为**(非)定常约束**

3、可解约束和不可解约束

可解约束指在力学体系运动过程中，某些约束可以被解除

约束方程为不等式，有时也称**单侧(面)约束**　$f(\vec{r})\le 0$

不可解约束指在力学体系运动过程中，始终不能被解除

约束方程为等式，有时也称**双侧(面)约束**　$f(\vec{r})=0$

OM为刚性轻杆

O点固定 $$x^2+y^2+z^2-l^2=0$$

完整约束 定常约束 双侧约束

O点不固定 $$(x-vt)^2+y^2+z^2-l^2=0$$

完整约束 非定常约束 双侧约束

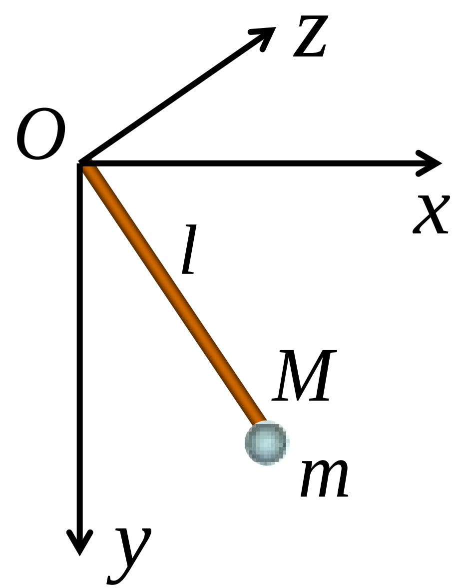
OM为柔软不可伸长轻绳

O点固定 $$x^2+y^2+z^2-l^2\le 0$$

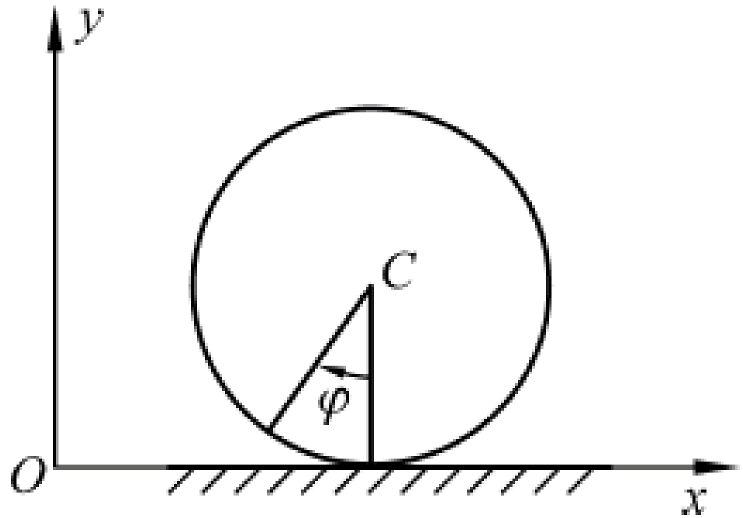
完整约束 定常约束 单侧约束

O点不固定 $$(x-vt)^2+y^2+z^2-l^2\le 0$$

完整约束 非定常约束 单侧约束



$$\begin{cases} \dot{y}_c = 0 \\ \dot{x}_c - R\dot{\varphi} = 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{积分}} \begin{cases} y_c = R \\ x_c - R\varphi = 0 \end{cases}$$

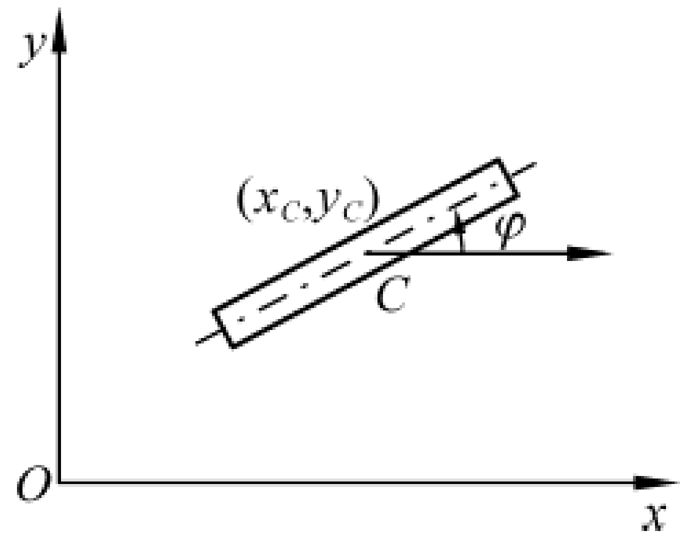


完整约束

定常约束

双侧约束

$$\frac{\dot{x}_c}{\dot{y}_c} = \cot\varphi \qquad \mathrm{d}x_c = \cot\varphi \mathrm{d}y_c$$



非完整约束

定常约束

双侧约束

三、自由度

对于完整系, 确定系统位置所需要的独立坐标的数目, 称为该系统的自由度, 用s表示.

一个自由质点 $s=3$

N个自由质点 $s=3N$

质点被约束在平面上 $s=3-1=2$ 约束方程数

质点被约束在直线上 $s=3-2=1$

推广：

n个质点，受k个完整约束 $s=3n-k$

n个质点，m个刚体，受k个完整约束 $s=3n+6m-k$

$s=?$是做任何一道题目的第一步

自由度为$s = 3n - k$

如果k个约束方程全部为几何约束方程，那么体系的独立坐标参量的数目就等于体系的自由度

如果k个约束方程中还包含有微分约束方程，那么体系的独立坐标参量的数目就大于体系的自由度

在n个质点的力学体系，有$3n$个坐标参量，k个几何约束方程

那么独立坐标参量的数目(自由度)为$s = 3n-k$

设$3n$个坐标参量为 $x_1, x_2, \dots, x_{3n}$

k个几何约束方程为 $f_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_{3n}; t) = 0$，其中 $(\alpha = 1, 2, \dots, k)$

s个独立坐标参量(用 $q_1, q_2, \dots, q_s$ 表示)称作拉格朗日广义坐标

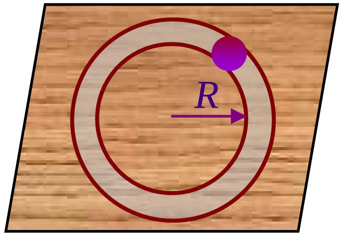
那么$3n$个坐标参量就可以用s个拉格朗日广义坐标来表示：

$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_s; t)$，其中 $(i = 1, 2, \dots, 3n)$

例如质点限制在半径为R的圆槽中时，

有3个坐标参量：x, y, z，只有1个独立坐标参量

有2个几何约束方程：$z = 0, x^2 + y^2 = R^2$



例、一卧倒的圆锥限制在一个平面上的运动（接触点可以滑动）.

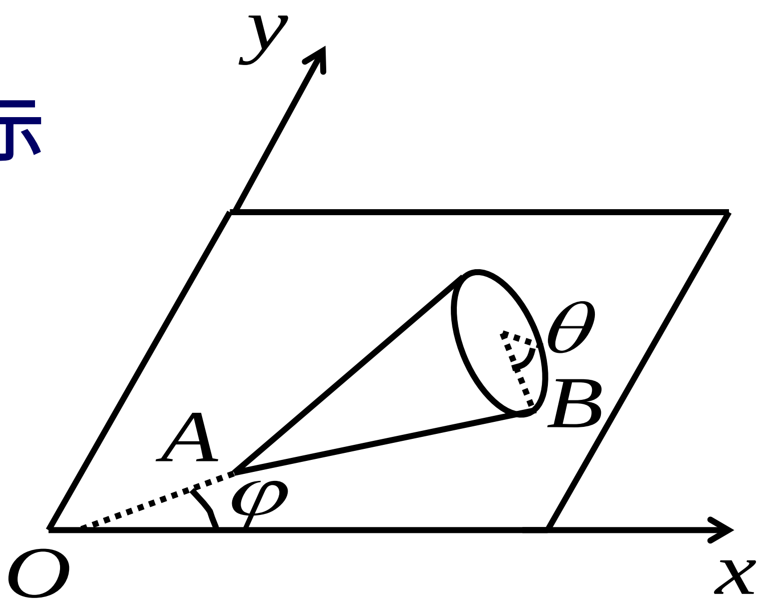
解： A点的位置由坐标(x,y)表示

对称轴方位可由接触线

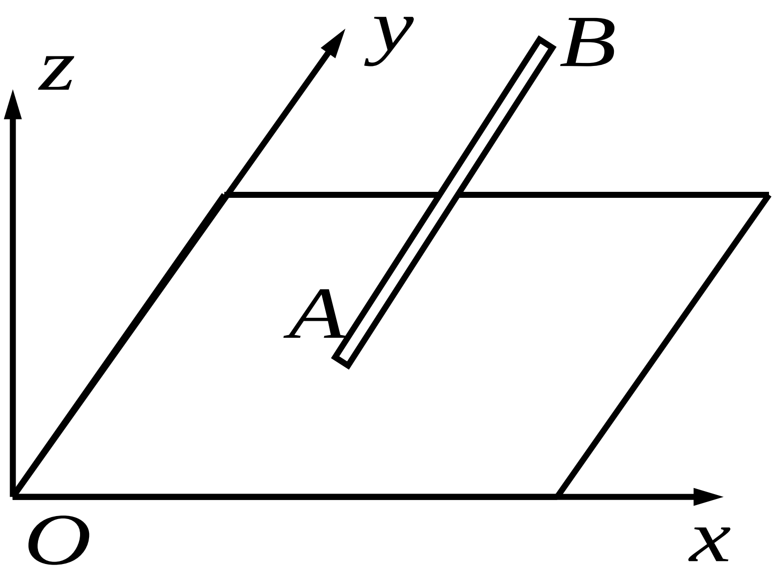
AB与x轴夹角φ确定

圆锥自转角由θ确定

$\therefore s=4$



例、长为l的细杆AB的一端被约束在水平桌面上, 确定其自由度.



法一

刚体, $s=6.\ x_A, y_A, z_A, \alpha, \beta, \gamma$

细杆, 无绕轴自转,

A点被限制在平面上, $s=4.$

法二

A,B两点确定,细杆位置确定,

$s = 6 \quad x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B$

2个约束方程:

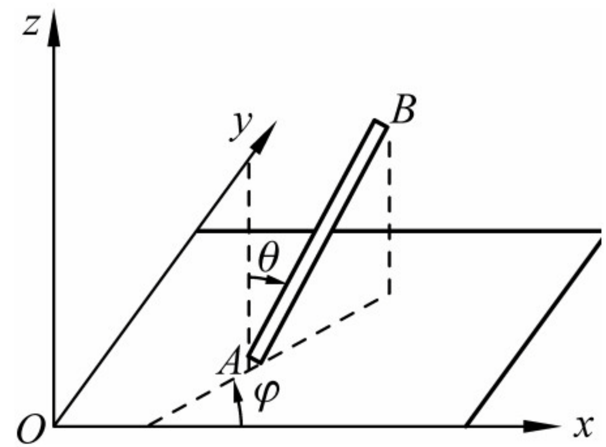
$$\begin{cases} z_A = 0 \\ (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = l^2 \end{cases}$$

$s = 6 - 2 = 4$

- 广义坐标： 在给定的约束条件下能完全确定系统位置的一组独立变量称为系统的广义坐标

$$\left(x_A, y_A, x_B, y_B\right)$$

$$\left(x_A, y_A, \theta, \varphi\right)$$



- 在完整系中，广义坐标的数目与自由度数目相等.

对于一个给定的系统，广义坐标的数目是一定的，但广义坐标的选择不是唯一的！

- 广义坐标的表示：广义坐标一般用符号 q 表示，如果系统有s个自由度，就需要 s 个广义坐标，称为拉格朗日广义坐标

$$(q_1, q_2, \cdots, q_s) \quad 或 \quad q_\alpha (\alpha = 1, 2, \cdots, s)$$

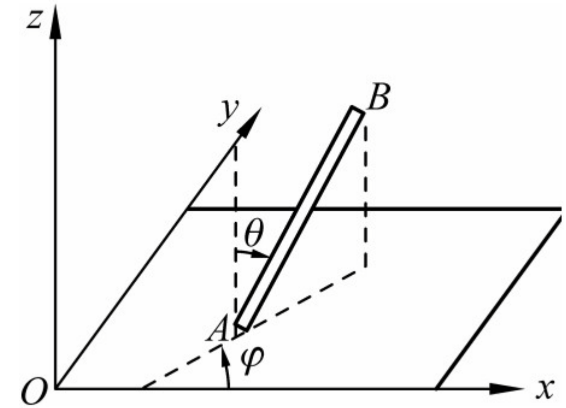
力学体系中每个质点的直角坐标都可以表示为广义坐标的函数，其变换关系称为坐标变换方程

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \cdots, q_s, t)$$

$$(i = 1, 2, \cdots, 3n)$$

如果选用 $(x_A, y_A, \theta, \varphi)$ 作为广义坐标

则坐标变换方程为：



$$x_A = x_A, y_A = y_A, z_A = 0$$

$$x_B = x_A + l\sin\theta\cos\varphi,$$

$$y_B = y_A + l\sin\theta\sin\varphi, z_B = l\cos\theta$$

广义坐标对时间的导数称为与该广义坐标对应的广义速度： $\dot{q}_\alpha = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q_\alpha$

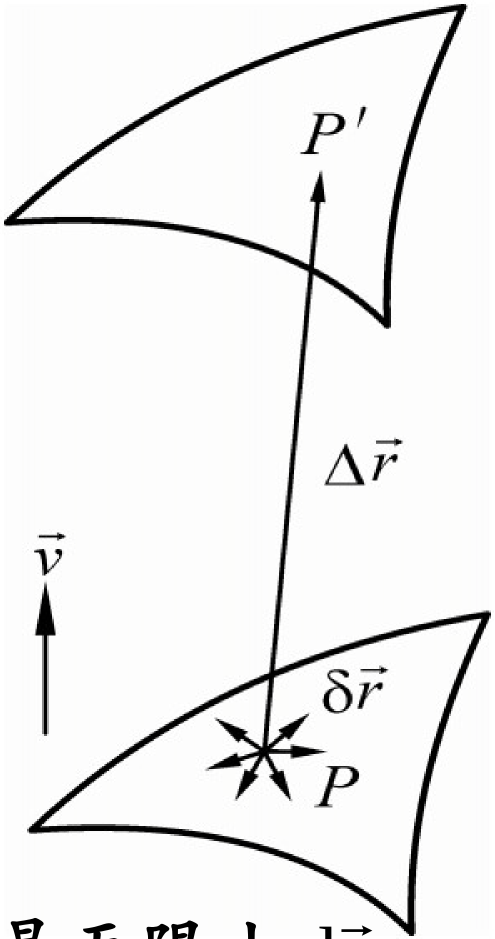
系统状态由广义坐标和广义速度共同描述

§6.2 虚功原理

分析力学——把约束条件下的各种可能运动进行比较，从中找出真实运动满足的条件.

- （一）实位移和虚位移

质点在真实运动中的位移称为**实位移**，是由真实运动产生，与一定的时间相对应，由动力学方程、初始条件和约束方程确定。在时间**dt**之内，质点的实位移只有一个。



$$\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}x\vec{i}+\mathrm{d}y\vec{j}+\mathrm{d}z\vec{k}$$

- 真实位移可以是有限大$\Delta\vec{r}$，也可以是无限小$\mathrm{d}\vec{r}$

2、虚位移

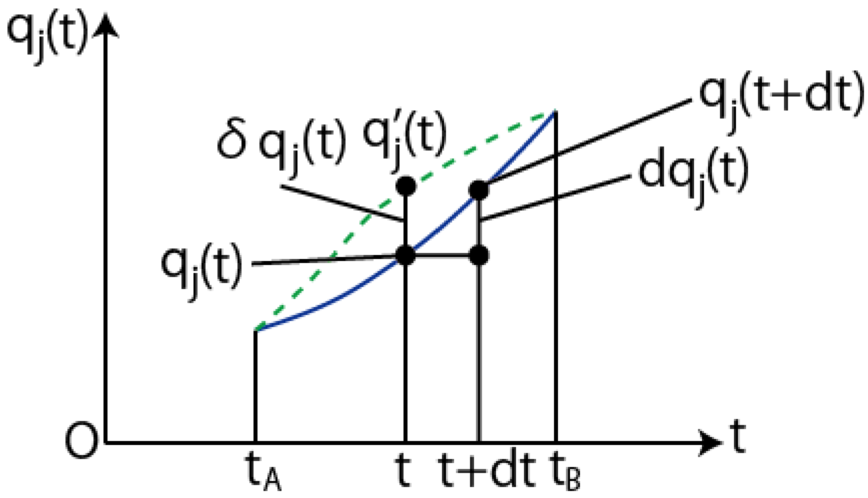
定义：质点在满足当时约束条件下一切可能的无限小位移，称为该时刻质点的**虚位移**.

- “当时”，在某时刻讨论问题. 即虚位移是在一确定时刻发生的，是不需要时间的.
- “一切可能”，虚位移包括一切可能的无限小位移，故有多个甚至无穷多个 .
- “无限小”，虚位移是一级无穷小位移 .
- 虚位移通常用$\delta\vec{r}$表示,在直角坐标系中,

$$\delta\vec{r} = \delta x\vec{i} + \delta y\vec{j} + \delta z\vec{k}$$

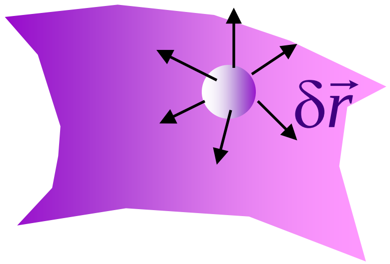
$\delta x, \delta y, \delta z$是$\delta\vec{r}$在坐标轴上的投影,称为坐标的变分

- 变分与微分的区别



变分：是两个相近邻函数间的差异 $\delta y(x)$ 由函数形式的差异性所导致的

微分：是函数 $y(x)$ 随其参量 x 真实改变 $\mathrm{d}x$ 时的增量 $\mathrm{d}y$



实位移 $d\vec{r}$ 坐标的微分(坐标作为时间t的函数)

虚位移 $\delta\vec{r}$ 坐标的变分(坐标不作为时间t的函数)

δ称为等时变分算子，d称为微分算子，二者运算规则类似

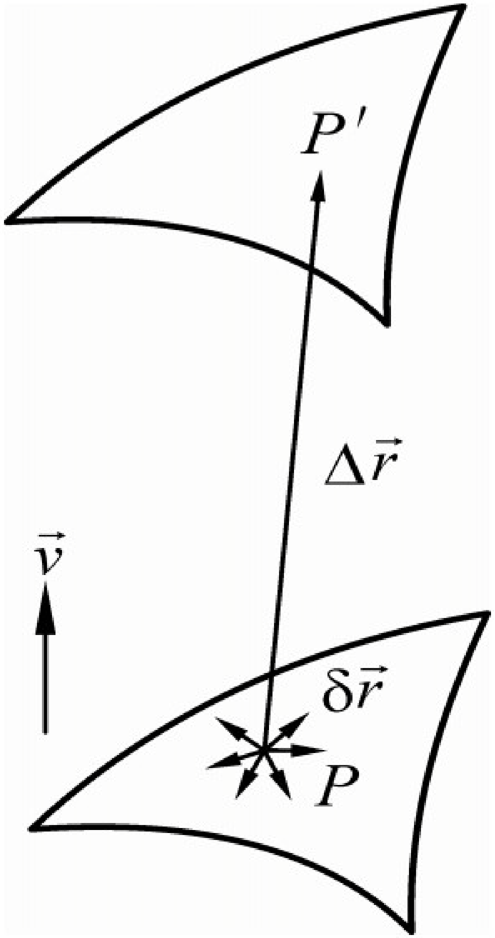
虚位移的发生不需要时间(常用 $\delta t \equiv 0$ 表示这一现象)

虚位移的个数有无穷多个

t时刻，在约束条件 $f_i(r_j, t) = 0$ 下变分有 $\delta f_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial r_j} \cdot \delta r_j = 0$

- 虚位移和实位移的区别与联系

虚位移和实位移都必须满足约束条件！虚位移是在时间没有变化，即dt=0时所设想的位移，并不曾发生，有无穷多个可能性；而实位移则是在dt>0时间内发生的真实位移



若约束为稳定约束，则实位移为虚位移中的一个，否则实位移完全不同于虚位移

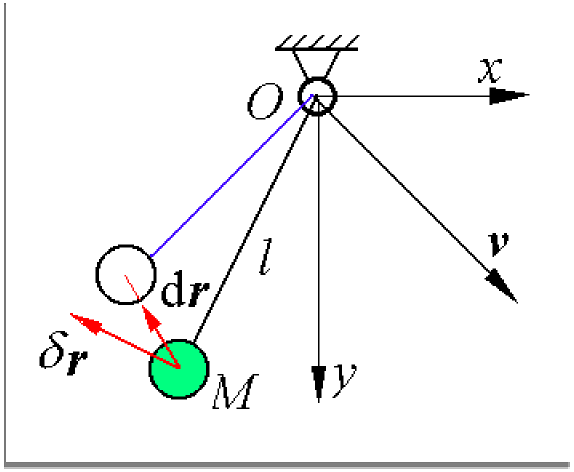
虚位移与真正运动时发生的实位移不同

① 实位移是在一定的力作用下和给定的初始条件下运动而实际发生的；虚位移是在约束容许的条件下可能发生的。

② 实位移具有确定的方向，可能是微小值，也可能是有限值；虚位移则是微小位移，视约束情况可能有几种不同的方向。

③ 实位移是在一定的时间内发生的；虚位移只是纯几何的概念，与时间无关，静止的质点系没有实位移，但可有虚位移。

在定常约束下，微小的实位移必 然是虚位移之一。而在非定常约束下，微小实位移不再是虚位移之一。



为了数学处理方便，设想虚位移δr 发生在虚拟时间$\delta t(=0)$内

可定义δr 为在 $\delta t(=0)$ 内满足变分约束方程的矢径的变分

“δt”与“$d t$”一般不同；“$\delta t = 0$”与“$d t = 0$”一般也不同

$d t = 0$时，$d r = 0$，但r 仍满足牛顿第二定律的轨道

$\delta t = 0$时，$d t$不一定等于0，且r 也不一定满足牛二轨道

约束质点(组)的虚位移垂直于约束曲面在该点的法线

即虚位移总是位于约束曲面的切平面，它不破坏约束

二、虚功和广义力

1、虚功

定义：作用在质点上的力$\vec{F}$与质点任一虚位移$\delta\vec{r}$的标积，称为此力在虚位移$\delta\vec{r}$上的虚功

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta\vec{r}$$

- 虚功有功的量纲，但没有能量转化过程与之联系.
- 虚位移的多种可能导致虚功也有多种可能.

在分析力学中，通常将相互作用力分为主动力和约束力.
因此就存在着主动力的虚功和约束力的虚功.

$\boxed{\text{主动力的虚功:}}$

$$\delta W=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_a}\right)\delta q_a$$

广义力

$$Q_\alpha=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}$$

$$\therefore\ \delta W=\sum_{\alpha=1}^{s}Q_\alpha\delta q_\alpha$$

2、广义力

n个质点,$i=1,2,\ldots n$, s个自由度, $q_1,q_2,\ldots,q_\alpha$, $\alpha=1,2,\ldots s$

$$\boxed{Q_\alpha=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}}$$

广义力

或, $$Q_\alpha=\sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha}\right)$$

3、有势系下的广义力

主动力**均为有势力**的力学系统称为**有势系**.

体系所有主动力都可表示成此势函数对相应坐标的负梯度

$$\vec{F}_i = -\nabla_i V \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$\therefore F_{ix} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \qquad F_{iy} = -\frac{\partial V}{\partial y_i} \qquad F_{iz} = -\frac{\partial V}{\partial z_i}$$

将F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}代入广义力的定义式中

$$Q_\alpha = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha}\right) \qquad \alpha = 1,2,\ldots,s$$

$$\therefore Q_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \qquad \alpha = 1,2,\ldots,s$$

这就是有势系广义力的表达式.

三、理想约束

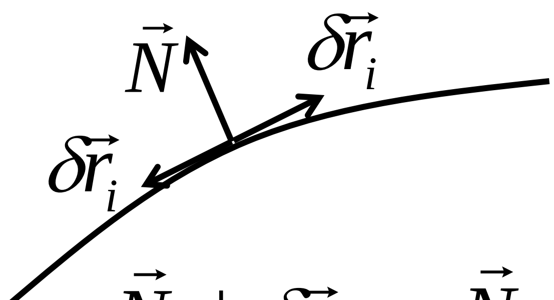
如果作用于力学系统的所有约束力在**任意虚位移**上的虚功之和为零，即

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{Ri}\cdot\delta\vec{r}_i=0$$

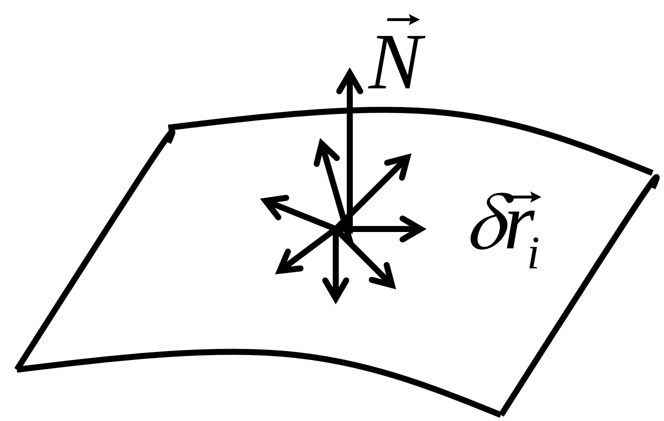
则这种约束称为**理想约束**.（整体上的约束）

几个常见的理想约束的例子:

(1)光滑的线、面

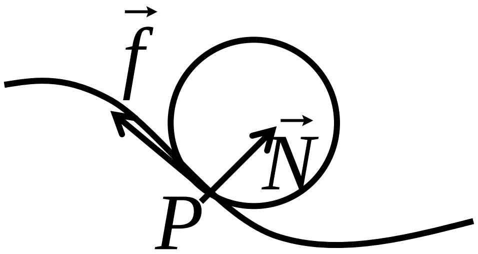


$$\because\ \vec{N}\perp\delta\vec{r}_i\qquad\therefore\ \vec{N}\cdot\delta\vec{r}_i=0$$



(2)圆柱(刚体)在粗糙面上做无滑滚动

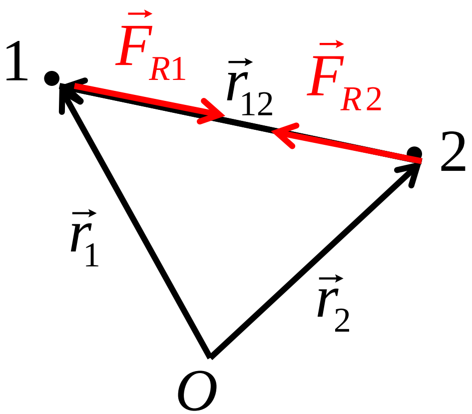
$$\vec{N}\cdot\delta\vec{r}_P+\vec{f}\cdot\delta\vec{r}_P=0$$



(3)质量可忽略的刚性轻杆所连接的两个质点

$$\vec{F}_{R1}=-\vec{F}_{R2}$$

$$\begin{aligned}\delta W&=\vec{F}_{R1}\cdot\delta\vec{r}_1+\vec{F}_{R2}\cdot\delta\vec{r}_2\\&=\vec{F}_{R1}\cdot\delta\vec{r}_{12}\\&=0\end{aligned}$$



◆其他理想约束：如两个质点（研究对象）被不可伸长的轻绳、或刚性杆连接的约束；两个刚体表面光滑相互接触，或无滑相互接触的约束，固定点约束等。

虚功原理：受理想约束的力学系统，保持平衡的必要条件是作用于该系统的全部主动力在任意虚位移中的虚功之和为零

$$\delta W=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}\cdot\delta\vec{r}_i=0$$

在直角坐标系中，上式写成

$$\sum_{i=1}^{n}(F_{ix}\delta x_i+F_{iy}\delta y_i+F_{iz}\delta z_i)=0$$

必要条件的证明：

当力学系统相对惯性系处于[静]平衡时,

$$\vec{F}_i+\vec{F}_{Ri}=0 \qquad i=1,2,\ldots,n$$

$$(\vec{F}_i+\vec{F}_{Ri})\cdot\delta\vec{r}_i=0 \qquad i=1,2,\ldots n$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i}_{\substack{\|\\ 0}}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{Ri}\cdot\delta\vec{r}_i}_{\substack{\|\\ 0}}=0$$

对理想约束

$$\therefore\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i=0$$

(2) 充分性：即当质点系满足 $\sum \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0$，质点系一定平衡。

若 $\sum \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0$，而质点系不平衡，则至少有第$i$个质点不平衡。

$$\bar{F}_i + \bar{F}_{N_i} = \bar{F}_{Ri} \neq 0$$

在$\bar{F}_{Ri}$方向上产生实位移$\mathrm{d}\bar{r}_i$，取$\delta \bar{r}_i = \mathrm{d}\bar{r}_i$，则

$$(\bar{F}_i + \bar{F}_{N_i}) \cdot \delta \bar{r}_i = \bar{F}_{Ri} \cdot \delta \bar{r}_i > 0$$

对质点系 $\sum (\bar{F}_i + \bar{F}_{N_i}) \cdot \delta \bar{r}_i > 0$

理想约束下 $\sum \bar{F}_{N_i} \cdot \delta \bar{r}_i = 0$

$\therefore \sum \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i > 0$ 与前题条件矛盾

故 $\sum \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0$ 时质点系必处于平衡。

充分条件的证明：

若系统的主动力虚功之和为零，

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

对于受有理想约束的系统

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{Ri} \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

力学系统的约束是定常的，各质点的无限小实位移必与其中一组虚位移重合，故系统的主动力和约束力的实功之和也满足上式

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{Ri} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_i = 0$$

根据质点系的动能定理

$$\mathrm{d}T = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{Ri} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_i = 0$$

$$T = 常量$$

说明系统开始时静止，以后就会始终保持静止

几点说明：

虚功原理是分析力学中解决静力学问题的基本原理，提供了解决各类力学体系（质点、质点组、刚体等）静力学问题的统一方法，有很大的普适性

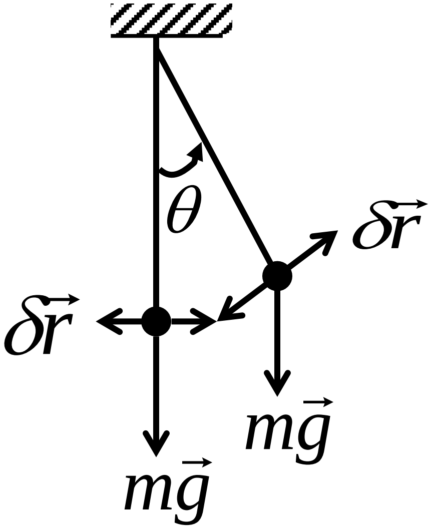
(1) 普适性.

(2) 在变动中寻找平衡的条件. 例如单摆

$\theta \neq 0$时, $\quad m\vec{g}\cdot\delta\vec{r} \neq 0$

$\theta = 0$时, $\quad m\vec{g}\cdot\delta\vec{r} = 0$

$\therefore \theta = 0$的位置为单摆的平衡位置



(3) 与牛顿力学不同, 分析力学的方法不是将注意力放在区分内力和外力上, 而是放在区分主动力和约束力上.

(4) 虚功原理中所说的主动力所做虚功之和为零, 是对任意的虚位移而言的, 而不是针对特殊的虚位移 .

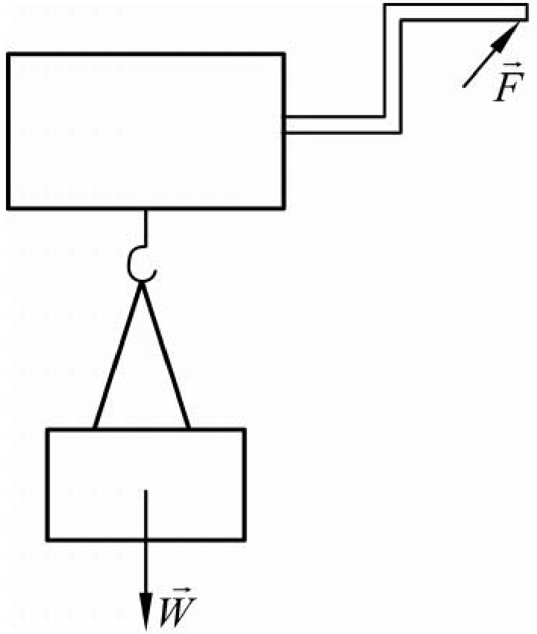
由于虚功原理的方程中不出现约束力，因此不能由虚功原理求出约束力，但是，通过释放约束或用不定乘子法, 可以求出约束力

- 例子：如图所示提升重物的装置，如果F为提升重物所需要的力的最小值，以把手端点的弧坐标s为广义坐标，设重物距地面高度为h，则根据虚功原理有

$$F\delta s + W\delta h = 0$$

$$F = -W\delta h / \delta s$$

如果知道h和s的函数关系，则可以求得力F



- （三）虚功原理的广义坐标表述和广义力

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \cdots, q_s, t)$$

则质点坐标变量的虚位移与广义坐标虚位移之间的存在关系

$$\delta x_i = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial x_i}{\partial t} \delta t$$

$$(i = 1, 2, \cdots, 3n)$$

$$\delta t = 0$$

代入虚功原理的表达式可得

$$\delta W = \sum_{i=1}^{3n} F_i \cdot \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{3n} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha = 0$$

可写为 $\delta W = \sum_{\alpha=1}^{s} Q_\alpha \delta q_\alpha$

$$= Q_1 q_1 + Q_2 q_2 + \cdots + Q_s q_s = 0$$

其中

$$Q_\alpha(q_1,q_2,\cdots,q_s;t)=\frac{\partial W}{\partial q_\alpha}=\sum_{i=1}^{3n}F_i\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}$$

称为广义力在方向 α 上的分量，所有这些力的分量构成的总体 Q 则是作用在体系上的广义力

$$\begin{cases}\text{若广义坐标}q_\alpha\text{为线量，则广义力}Q_\alpha\text{对应于力的分量}\\ \text{若广义坐标}q_\alpha\text{为角量，则广义力}Q_\alpha\text{是相应的力矩分量}\end{cases}$$

由于广义坐标是描写力学体系位形的独立参量，因此他们的虚位移变更也都分别相互独立，则虚功原理的广义坐标表述的物理意义为：体系处于平衡时广义力的各分量均为零（体系静平衡的广义平衡方程）

$$Q_\alpha(q_1, q_2, \cdots, q_s; t) = 0$$

$$(\alpha = 1,2,\cdots,s)$$

从上述s个体系的平衡方程可以解得体系处于平衡位形时未知的主动力！

根据广义平衡方程 $Q_\alpha = 0 \qquad \alpha = 1, 2, \cdots, s$

虚功原理又可以叙述为：
对于受完整的、稳定的、理想约束的力学系统，保持静平衡的充分必要条件是所有的广义力都为零。

若广义力为有势力，即 $Q_\alpha = -\dfrac{\partial V}{\partial q_\alpha}$

则广义平衡方程变为： $\dfrac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0$

- 虚功原理主要用于求解：

  (1)力学体系的静平衡位置

  (2)维持力学体系平衡时，作用于系统上的主动力之间的关系

虚功原理解题步骤

1、确定研究的力学体系

2、判断是否是理想约束

3、受力分析

a、若求的是主动力或平衡位置，只需找找出主动力

b、若求的是约束力，在找出主动力后，需要去掉要求约束力的约束，代之以主动力

4、分析约束，确定拉格朗日广义坐标和虚位移

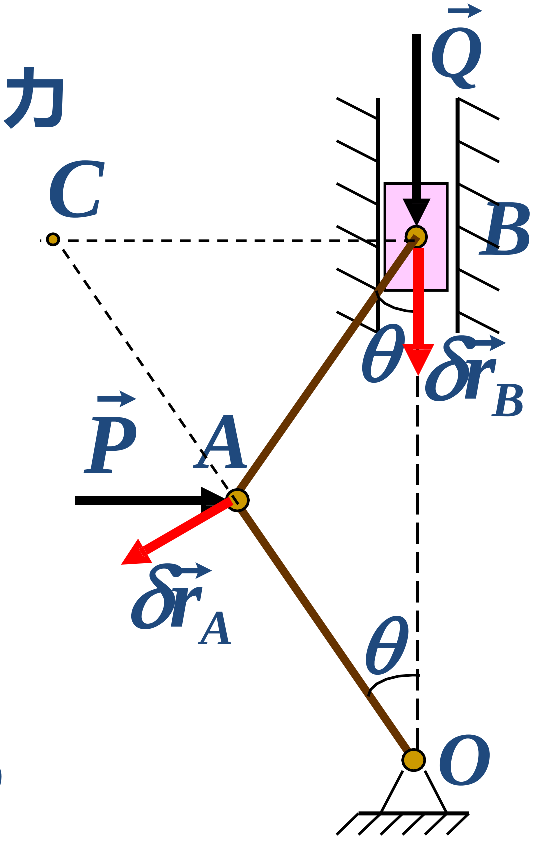
建立静系，变分得虚位移或由约束几何关系直接得

5、代入虚功原理求解

- 虚功原理是针对理想约束条件的力学体系，
  虚功原理方程中不应出现约束(反)力
- 虚位移原理可用来解决非自由质系的平衡问题：
  - 求系统在已知主动力作用下的平衡位置
  - 系统在给定位置平衡时主动力之间的关系
  - 求系统在已知主动力作用下平衡时的约束反力
- 若用虚功原理求约束力，可用拉格朗日不定乘子法
- 若用虚功原理求约束力，可用去约束为主动力的方法
- 虚功原理方程是研究静力学问题，故只能选择静系

例： 图示机构中，已知$OA=AB=l$，$\angle AOB=\theta$，如不计各构件的重量和摩擦，求在图示位置平衡时主动力 $\vec{P}$与 $\vec{Q}$的大小之间的关系。

解1：以系统为研究对象，受的主动力有 $\vec{P}$、$\vec{Q}$ 。给系统一组虚位移如图。



由虚功方程 $\sum \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$ ，得

$$-P\delta r_A \cos\theta + Q\delta r_B = 0$$

AB作平面运动，瞬心在 C 点，则

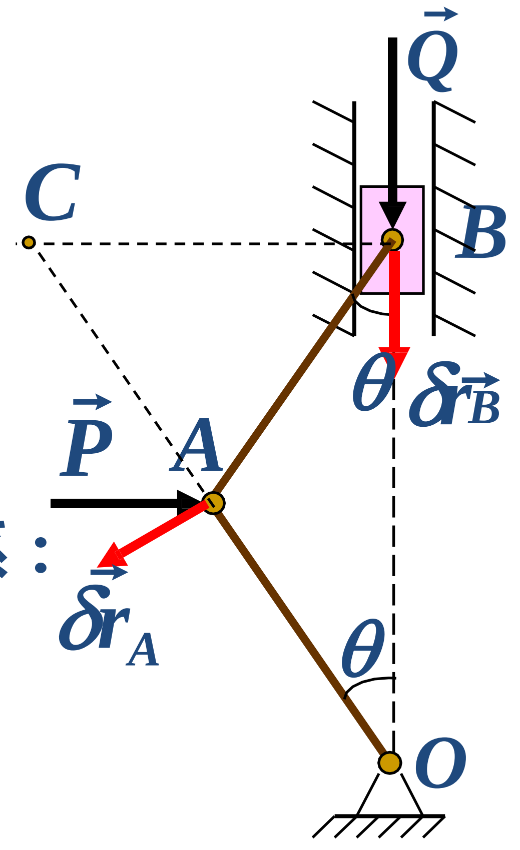
$$\frac{\delta r_B}{\delta r_A} = \frac{v_B}{v_A} = \frac{BC}{AC} = \frac{2l\sin\theta}{l} = 2\sin\theta$$

将 $\delta r_B = 2\sin\theta\delta r_A$ 代入 $-P\delta r_A\cos\theta + Q\delta r_B = 0$ 得

$$(-P\cos\theta + 2Q\sin\theta)\delta r_A = 0$$

由于 $\delta r_A \neq 0$ ，于是得

$$P = 2Q\mathrm{tg}\,\theta$$



亦可由速度投影定理求虚位移之间的关系：

由速度投影定理 $v_B\cos\theta = v_A\sin 2\theta$

$$\frac{\delta r_B}{\delta r_A} = \frac{v_B}{v_A} = 2\sin\theta$$

解2：解析法。建立如图坐标。

因为 $x_A = l\sin\theta \quad y_B = 2l\cos\theta$

对上两式作变分，得

$$\delta x_A = l\cos\theta\delta\theta \quad \delta y_B = -2l\sin\theta\delta\theta$$

由 $\sum(F_{xi}\delta x_i + F_{yi}\delta y_i + F_{zi}\delta z_i) = 0$ ，得

$$F_{Ax}\delta x_A + F_{By}\delta y_B = 0$$

即 $(-P)l\cos\theta\delta\theta + (-Q)(-2l\sin\theta\delta\theta) = 0$

由于 $\delta\theta \neq 0$ ，于是得 $P = 2Q\mathrm{tg}\theta$