§5.1 刚体的运动

六、瞬时转动中心

假设，任一瞬时刚体速度为零的点位于r_s处，基点为A，则有

$$0 = v_A + \omega \times (r_s - r_A)$$

对上式两边矢乘 ω得

$$0 = \omega \times v_A + \omega \times \omega \times (r_s - r_A)$$

§5.1 刚体的运动

计算瞬时转动中心

假设速度为0的点位于r_S处，基点为A，由速度公式知：

$$0=\vec{v}_A+\vec{\omega}\times(\vec{r}_S-\vec{r}_A)$$

等式两边左叉乘ω有：

$$0=\vec{\omega}\times\vec{v}_A+\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times(\vec{r}_S-\vec{r}_A)]$$
$$=\vec{\omega}\times\vec{v}_A+\vec{\omega}[\vec{\omega}\cdot(\vec{r}_S-\vec{r}_A)]-\omega^2(\vec{r}_S-\vec{r}_A)$$

在平面平行运动中，角速度垂直于运动平面(r)

$$0=\vec{\omega}\times\vec{v}_A-\omega^2(\vec{r}_S-\vec{r}_A)$$

§5.1 刚体的运动

所以速度为0的点的位矢为： $\vec{r}_S=\vec{r}_A+\dfrac{\vec{\omega}\times\vec{v}_A}{\omega^2}$

因 $\vec{r}_S=x_S\vec{i}+y_S\vec{j}$

$$\vec{r}_A=x_A\vec{i}+y_A\vec{j}$$

$$\vec{\omega}=\omega\vec{k}$$

代入并比较等式两边，各分量应相等：

$$x_S=x_A-\frac{v_{Ay}}{\omega}$$

$$y_S=y_A+\frac{v_{Ax}}{\omega}$$

在平面平行运动中，刚体上速度为零的点，被称为瞬时转动中心，简称**瞬心**。刚体在任一瞬时的运动是绕瞬心的转动；若取瞬心为基点，刚体在这瞬时只是绕瞬心的转动。

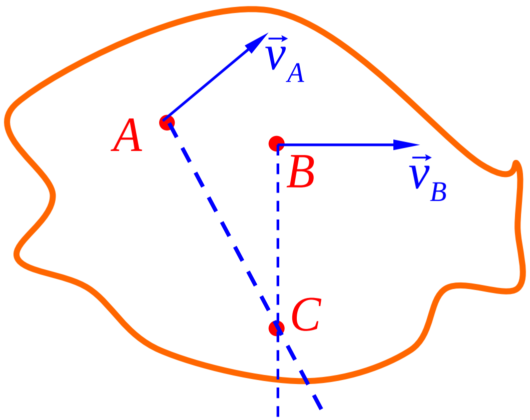
§5.1 刚体的运动

瞬心的几何求法

若刚体上有两点的速度方向已知，则分别通过这两点作该处速度的垂线，它们的交点就是瞬心。

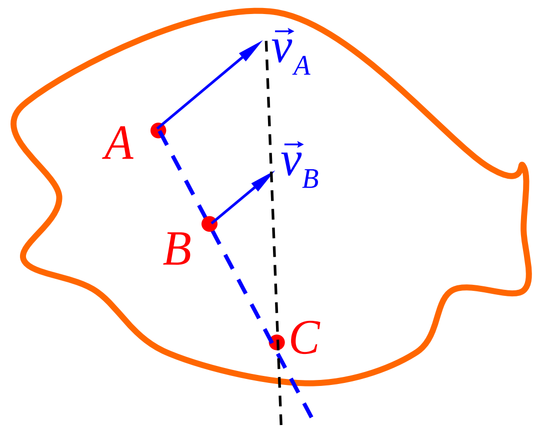
几何法确定瞬时转动中心

瞬时中心，指刚体瞬时速度为0，由 $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}\,'$ 知V⊥r



v_A与v_B相交

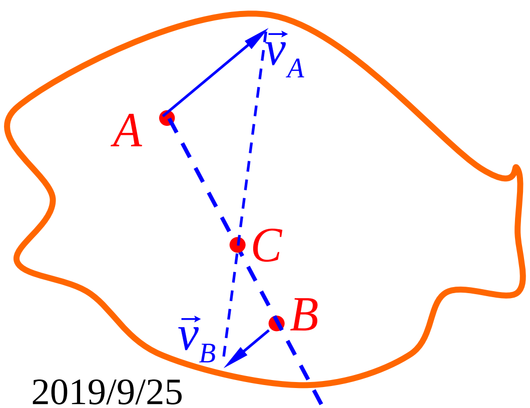
垂线交点C



v_A与v_B平行

$v_A \neq v_B$

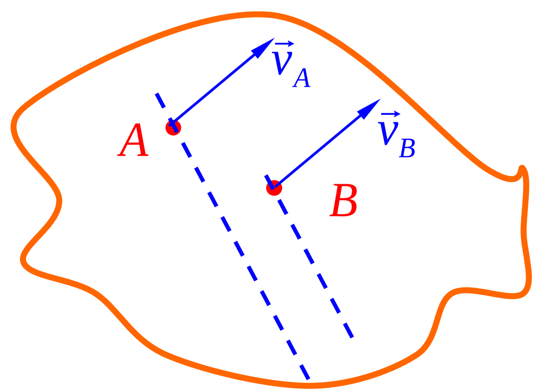
比例点C



v_A与v_B平行

$v_A \neq v_B$

比例点C



v_A与v_B平行

$v_A = v_B$

C在∞

由刚体内任意点的速度公式 $\vec{v}=\vec{v}_A+\vec{\omega}\times\vec{r}\,'$ 可知：

◆若$V_A\neq0$，A点的选择原则上是使计算最简，称为基点法

◆若$V_A=0$，A点为瞬心，不能任意选择，称为瞬心法

◆把速度公式投影在r'方向上，由于$\omega\times r'$与r'垂直，从而有 $\vec{v}_{r'}=\vec{v}_{Ar'}$ ，称为速度投影法。

速度投影法常用于一些多杆相连的转动中，杆两端点的速度在杆上的投影相等

◆在刚体中，某点的速度为：$\vec{v}=\vec{v}_A+\vec{\omega}\times\vec{r}\,'$与非惯性系中质点的速度合成原理 $\vec{v}=\vec{v}\,'+\vec{v}_t+\vec{\omega}\times\vec{r}\,'=\vec{v}\,'+\vec{v}_e$比较知，区别在于，刚体中，任意两点距离不变，所以$v'=0$

在刚体中是以基点为参考点，没有画出坐标系而已。

若把动系相对静系的牵连运动看作是动系代表的刚体运动，则刚体的绝对运动就是两个刚体运动的合成。

刚体的绝对运动由基点的运动和绕基点的定点运动合成。

而基点的运动可通过质点的速度和加速度合成原理求得。

绕基点的定点运动可通过刚体的角速度合成原理和角加速度合成原理求得。

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}'$$ (角速度合成原理)

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_e + \vec{\alpha}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r$$ (角加速度合成原理)

式中 $\vec{\omega}_e, \vec{\alpha}_e$ 表示刚体的牵连角速度和牵连角加速度

$\vec{\omega}', \vec{\alpha}'$表示刚体的相对角速度和相对角加速度

若刚体相对动系作定轴转动，动系又相对定系作定轴转动时，且两转轴平行，则简化为：

$$\omega = \omega_e + \omega' \qquad \alpha = \alpha_e + \alpha_r$$

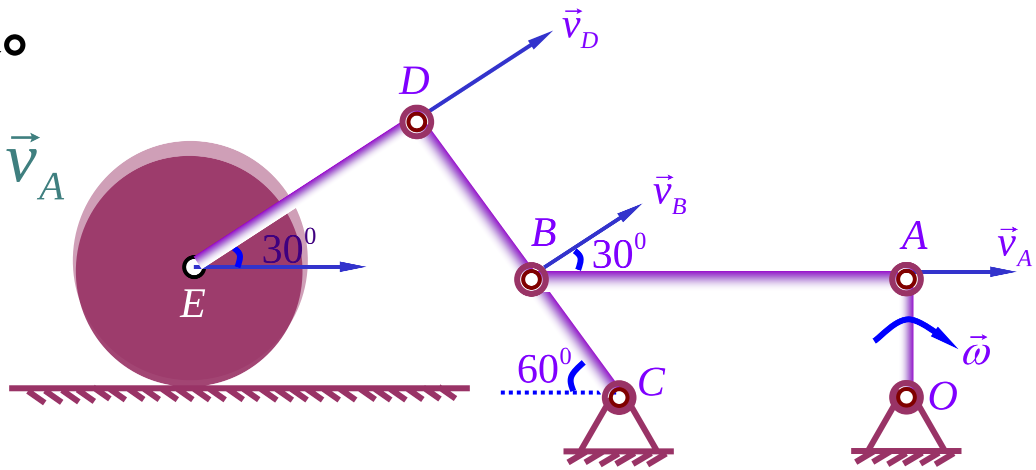
[例5.0]

如图所示的平面机构中，曲柄OA长为100mm，以角速度ω=2rad/s转动，连杆AB带动摇杆CD，并拖动轮E沿水平面纯滚动；OA与轮E的半径相等，CD=3CB。若图示位置时A,B,E三点恰在一水平线上，且$CD \perp ED$，ED与水平线成30度角，CD与水平线成60度角。

求：此瞬时点E的速度。

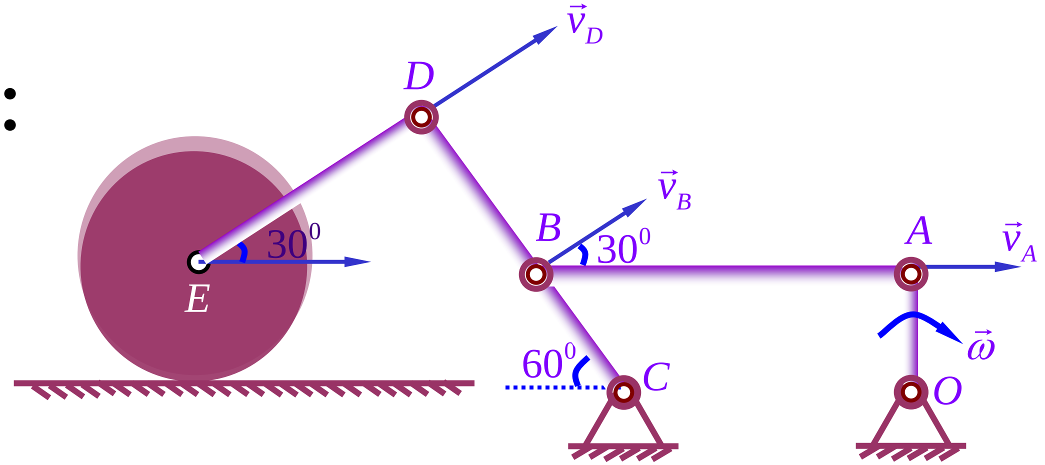
说明：$\vec{v}_E \leftarrow \vec{v}_D \leftarrow \vec{v}_B \leftarrow \vec{v}_A$

此题是基点法、瞬心法速度投影法的综合应用



解： 对*OA*杆，瞬心法：

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{OA} = \omega r_{OA} \vec{e}_{v_A}$$



对*AB*杆，速度投影法：

$$\vec{v}_B \cos 30^0 = \vec{v}_A$$

即 $v_B = \dfrac{\omega r_{OA}}{\cos 30^\circ} = 0.2309 m/s$

则有：$\dfrac{v_B}{v_D} = \dfrac{\omega_{CD} r_{CB} \vec{e}_{v_{cB}}}{\omega_{CD} r_{CD} \vec{e}_{v_{cB}}} = \dfrac{r_{CB}}{r_{CD}} = \dfrac{1}{3}$

即 $v_D = 3 v_B$

对*CD*杆，瞬心法：

$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_{CD} \times \vec{r}_{CB} = \omega_{CD} r_{CB} \vec{e}_{v_{cB}}$$

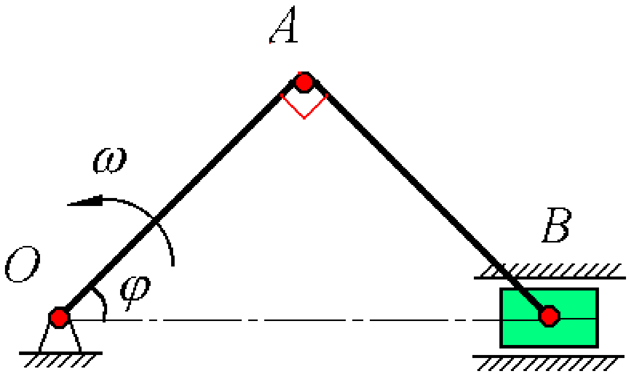
$$\vec{v}_D = \vec{\omega}_{CD} \times \vec{r}_{CD} = \omega_{CD} r_{CD} \vec{e}_{v_{cB}}$$

对*DE*杆，速度投影法：

$$\vec{v}_E \cos 30^0 = \vec{v}_D$$

即 $v_E = \dfrac{v_D}{\cos 30^0} = 0.8 m/s$

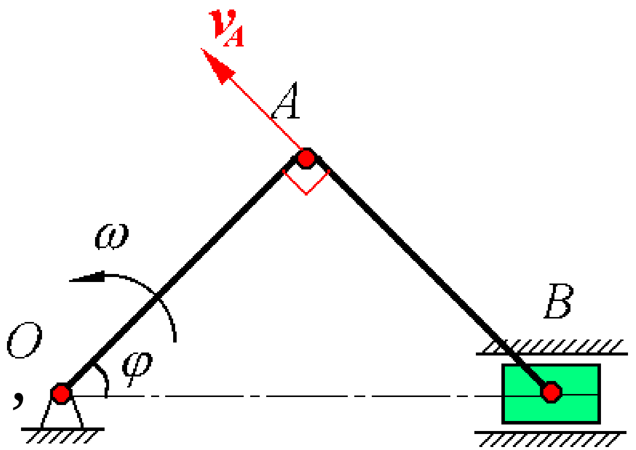
曲柄连杆机构$OA=AB=l$，取柄OA以匀ω转动。 求：
当$\varphi=45^{\circ}$时，滑块B的速度及AB杆的角速度。



解：机构中,*OA*作定轴转动,*AB*作平面运动,滑块*B*作平动。

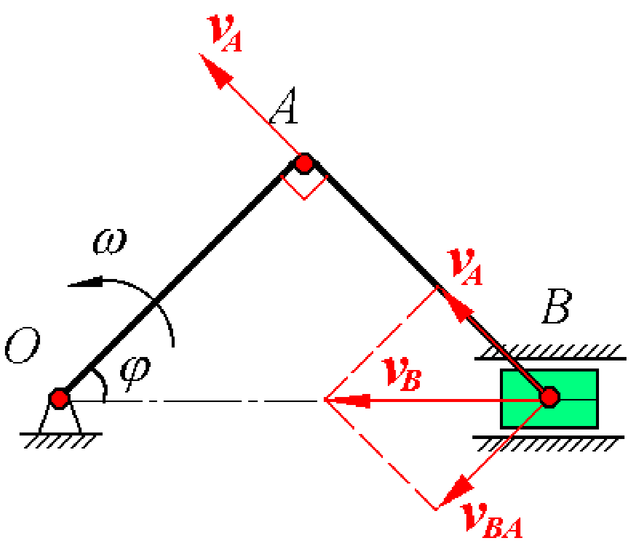
★基点法（合成法）

研究 *AB*，以 *A*为基点， 且 $v_A = l\omega$，方向如图示。



根据 $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$,

在 B 点做 速度平行四边形，如图示。



$v_B = v_A / \cos\varphi$

$= l\omega / \cos 45^\circ = 2l\omega \ (\leftarrow)$

$v_{BA} = v_A \mathrm{tg}\varphi = l\omega \cdot \mathrm{tg} 45^\circ = l\omega$

$\therefore \omega_{AB} = v_{BA} / AB = l\omega / l = \omega$ （ ↷ ）

[例5.1]

椭圆规尺*AB*的两端点分别沿相互垂直的直线槽*Ox*及*Oy*滑动，已知*B*端以匀速*u*运动，如图所示。求：

(i)随圆规尺上*M*点的速度v_M及加速度a_M

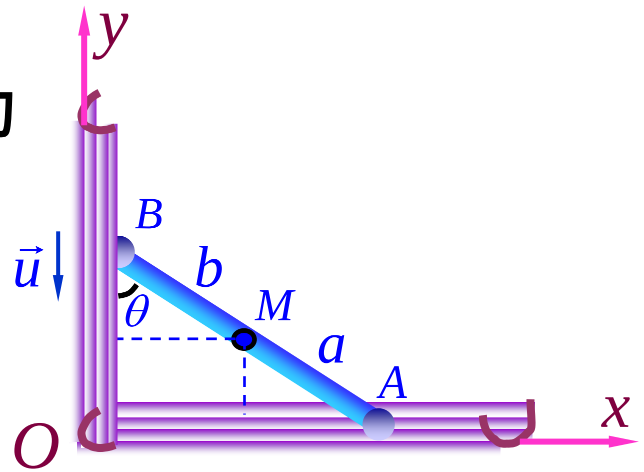
(ii)规尺的瞬时中心*S*点的位置。

已知*M*点离*A*、*B*点的距离分别为*a* 和 *b*

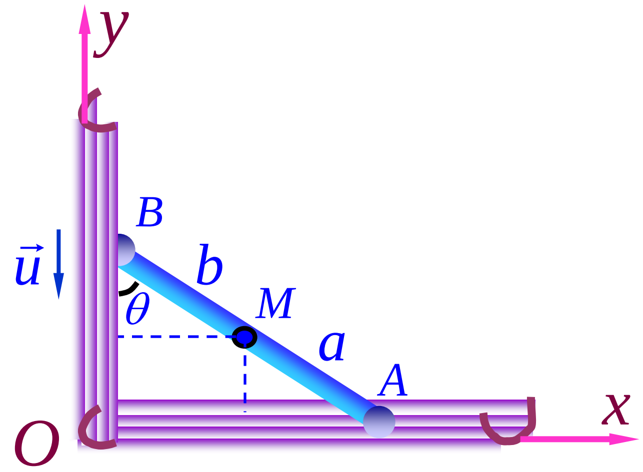
解：(i) 椭圆规尺作平面平行运动

以*B*点为基点，则

$$\vec{v}_M = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BM}$$



如图，几何关系有：



$$\vec{r}_{BM} = b\sin\theta\vec{i} - b\cos\theta\vec{j}$$

$$\vec{v}_B = -u\vec{j} \qquad \vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k}$$

所以M点的速度为：

$$\vec{v}_M = \vec{v}_B + \vec{\omega}\times\vec{r}_{BM} = -u\vec{j} + \dot{\theta}\vec{k}\times(b\sin\theta\vec{i} - b\cos\theta\vec{j})$$

$$= \dot{\theta}b\cos\theta\vec{i} + (\dot{\theta}b\sin\theta - u)\vec{j}$$

又 $\vec{v}_B = -u\vec{j} = \frac{d\vec{r}_{OB}}{dt} = \frac{d}{dt}[(a+b)\cos\theta\vec{j}] = -(a+b)\dot{\theta}\sin\theta\vec{j}$

于是有 $\dot{\theta} = \frac{u}{(a+b)\sin\theta}$ ，所以$\vec{v}_M = \frac{u}{a+b}(bctg\theta\vec{i} - a\vec{j})$

M点的加速度为：

$$\vec{a}_M=\frac{d\vec{v}_M}{dt}=\frac{d}{dt}[\frac{u}{a+b}(bctg\theta\vec{i}-a\vec{j})]$$

$$=-\frac{ub}{a+b}\dot{\theta}\csc^2\theta\vec{i}=-\frac{ub}{a+b}\frac{u}{(a+b)\sin\theta}\csc^2\theta\vec{i}$$

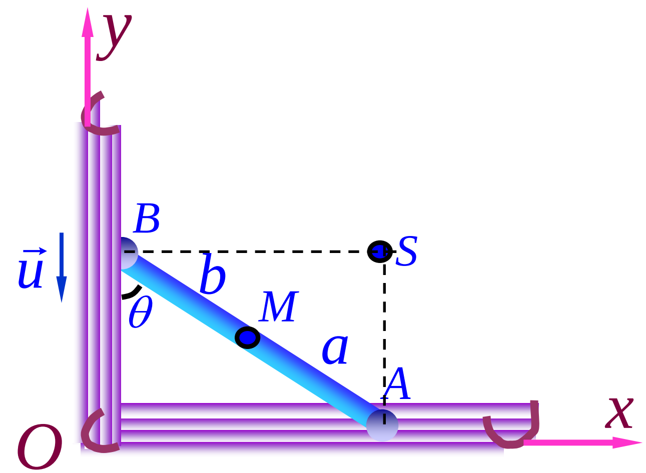
$$=-\frac{u^2b}{(a+b)^2\sin^3\theta}\vec{i}$$

(ii) 如图，因规尺作平面平行运动

规尺上A点和B点的速度方向已知，

作垂线相交于S，S就为瞬心的位置

定量计算瞬心，看书。



§5.2 刚体的动量、角动量和动能

刚体的动量定义

$$\vec{P}=\sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i=\sum_i m_i\vec{v}_i=m\vec{v}_C=\vec{P}_C$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

质点组对一固定点（坐标原点）的角动量是

$$L=\sum_i r_i\times m_i v_i$$

刚体绕固定点以角速度 ω 转动时，刚体上任意点的速度为

$$v_i=\omega\times r_i$$

将上式代入角动量表达式可得

$$L=\sum_i m_i r_i\times(\omega\times r_i)=\sum_i m_i[r_i^2\omega-r_i(r_i\cdot\omega)]$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

将 $r_i = x_i i + y_i j + z_i k; \quad \omega = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k$

代入并作矢量运算，可得

$$L = L_x i + L_y j + L_z k$$

其中

$$\begin{cases} L_x = \omega_x \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i \\ L_y = -\omega_x \sum_i m_i y_i x_i + \omega_y \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2) - \omega_z \sum_i m_i y_i z_i \\ L_z = -\omega_x \sum_i m_i z_i x_i - \omega_y \sum_i m_i z_i y_i + \omega_z \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{cases}$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

角动量与角速度之间的关系是较为复杂，但关系式中各角速度分量的系数，都只与刚体的质量分布有关而与刚体的运动状况无关。分别将这些系数相应地以下列符号表示:

$$\begin{cases} J_{xx} = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) = \int (y^2 + z^2)dm \\ J_{yy} = \sum_i m_i(z_i^2 + x_i^2) = \int (z^2 + x^2)dm \\ J_{zz} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) = \int (x^2 + y^2)dm \end{cases} \qquad \begin{cases} J_{yz} = J_{zy} = \sum_i m_i y_i z_i = \int yzdm \\ J_{zx} = J_{xz} = \sum_i m_i z_i x_i = \int zxdm \\ J_{xy} = J_{yx} = \sum_i m_i x_i y_i = \int xydm \end{cases}$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

角动量的表达式可写为

$$L=(J_{xx}\omega_x-J_{xy}\omega_y-J_{xz}\omega_z)i+$$
$$(-J_{yx}\omega_x+J_{yy}\omega_y-J_{yz}\omega_z)j+$$
$$(-J_{zx}\omega_x-J_{zy}\omega_y+J_{zz}\omega_z)k$$

写成矩阵形式为

$$\vec{L}=\begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}=\vec{\vec{J}}\cdot\vec{\omega}$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

$$\vec{\vec{J}}=\begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}$$

由上式表示的J诸分量构成一个二阶张量，称为刚体的**惯量张量**。这个张量的矩阵称为惯量矩阵。矩阵中非对角元素称为**惯量积**。

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

1. 惯量主轴

刚体绕通过定点沿一些特殊方向的主轴转动时，L 与 ω 的方向一致，这些特殊方向的轴称为惯量主轴，简称主轴。

与惯量主轴相关的惯量积等于零，利用此特性，可轻易找出具有对称性均匀刚体的惯量主轴。

（1）对称轴

（2）对称面的法线

从数学上易证：惯量积为0，是L与ω平行的充分必要条件

这也就很容易有如下结论：

◆匀质刚体的对称轴是轴上各点的惯量主轴

◆与匀质刚体的对称面垂直的轴, 是轴与对称面交点的惯量主轴

◆若坐标系的两个轴是惯量主轴, 则第三轴也是惯量主轴

◆匀质刚体若有旋转对称轴, 则以旋转对称轴为轴的坐标系是主轴坐标系(此时不必固连坐标系于刚体)

如：对称重陀螺的定点运动。

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

2. 转动惯量

刚体绕定点转动时的惯性是以张量J来量度，刚体定轴转动的惯量则以转动惯量J来表示。前者是二阶张量，后者是标量。

刚体是由大量质点构成的，故跟质点情形一样，刚体对某一轴线*l*的角动量，其大小是刚体对轴上一点的角动量在该轴线方向上的分量:

$$L_l = \vec{e}_l \cdot \vec{L} = J\omega$$

其中， e_l 是沿轴 l 方向的单位矢量； J 即是刚体对该转轴的转动惯量。

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

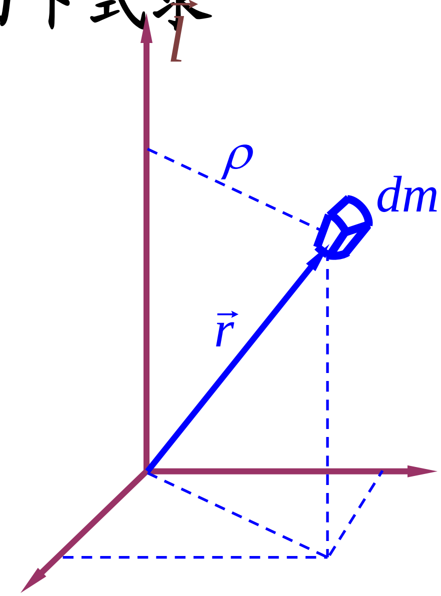
一、刚体的角动量和惯量张量

2.转动惯量

对于质点不连续分布的刚体，转动惯量可由下式求出：

$$J=\sum_i m_i\rho_i^2$$

ρ_i 是 i 质点至转轴的垂直距离。



对于质量连续分布的刚体，

$$J=\int_V \rho^2 dm=\int_V \rho^2\sigma dV$$

dm是元体积dV内的质量， σ 为刚体的密度，ρ 是dV至转轴的垂直距离。

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

2.转动惯量

转动惯量也可由对定点 O 的惯量矩阵求得。设转轴的方向余弦是 α、β 和 γ，则轴线方向的单位矢量为：

$$\vec{e}_l = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$$

既为定轴转动，角速度 ω 沿轴线方向，有

$$\vec{\omega} = \omega\vec{e}_l = (\alpha i + \beta j + \gamma k)\omega$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

2.转动惯量

刚体绕此轴转动的角动量为

$$\vec{L}_l = L_l \vec{e}_l$$

其中

$$L_l = \vec{e}_l \cdot \vec{L} = \vec{e}_l \cdot \vec{J} \cdot \vec{\omega} = (\vec{e}_l \cdot \vec{J} \cdot \vec{e}_l)\omega$$

$$= (\alpha \quad \beta \quad \gamma)\begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}\omega$$

$$= J\omega$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

2.转动惯量

刚体关于定点的惯量张量 $\vec{J}$ ，与关于通过此定点的轴线的转动惯量 J 之间存在如下关系：

$$J=\vec{e}_l\cdot\vec{J}\cdot\vec{e}_l$$

$$=(\alpha\ \ \beta\ \ \gamma)\begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$$

$$=J_{xx}\alpha^2+J_{yy}\beta^2+J_{zz}\gamma^2-2J_{yz}\beta\gamma-2J_{zx}\gamma\alpha-2J_{xy}\alpha\beta$$

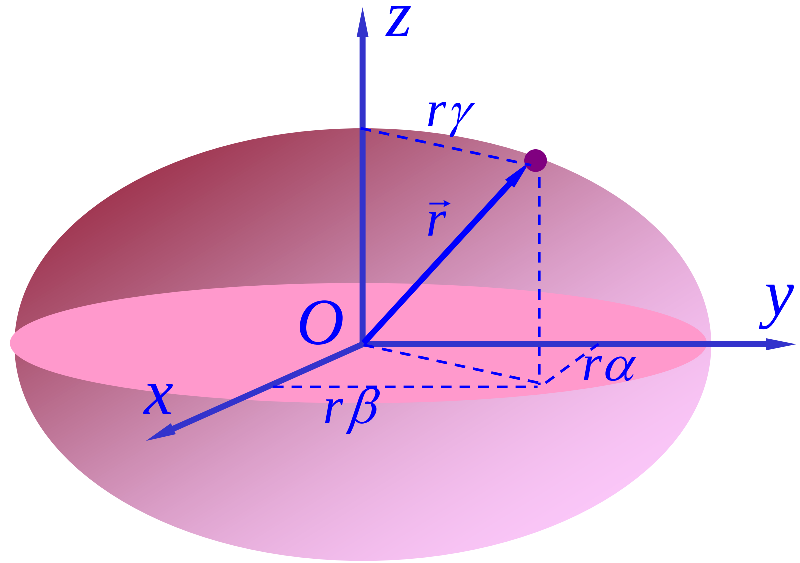
大家熟知 $J_{xx}x^2+J_{yy}y^2+J_{zz}z^2-2J_{xy}xy-2J_{xz}xz-2J_{yz}yz=1$

中，因 $J_{xx},J_{yy},J_{zz},J_{xy},J_{xz},J_{yz}$ 为正常数，故它是一个椭球面

若 $\vec{r}$ 表示从原点到椭球面的矢量

α，β，γ为其方向余弦

则有：$x=r\alpha, y=r\beta, z=r\gamma$



代入可得：

$$r^2(J_{xx}\alpha^2+J_{yy}\beta^2+J_{zz}\gamma^2-2J_{xy}\alpha\beta-2J_{xz}\alpha\gamma-2J_{yz}\beta\gamma)=r^2J_l=1$$

因此，只要让 $r=\dfrac{1}{\sqrt{J_l}}$，就形成了惯量椭球。$\vec{e}_r=\vec{e}_l$

对于匀质刚体，据方程画出椭球，求出r，知绕r方向的转动惯量

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

2. 转动惯量

由上式可知，知道了刚体对某点惯量张量 J 后，便可利用它的诸分量 J_{ij} ，求出对通过该点的任意 e_l 方向轴线的转动惯量 J 。

刚体对惯量主轴的转动惯量，称为主转动惯量。以惯量主轴为坐标轴时，各惯量积为零，惯量矩阵是对角化的，三个对角元素就是分别对三个惯量主轴的主转动惯量。

刚体对通过质心的轴线的转动惯量 J_c ，跟对与之相距为 d 的平行轴的转动惯量 J 间，有如下关系

$$J = J_c + md^2$$

平行轴定理：如果刚体对通过质心的轴的转动惯量为J_C，那么对与此轴平行的任意轴的转动惯量可以表示为 $J = J_C + md^2$

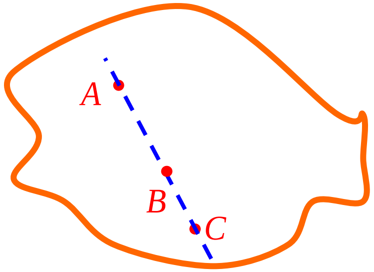
证：

$$J_{zz} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i[(x_i' + x_c)^2 + (y_i' + y_c)^2]$$

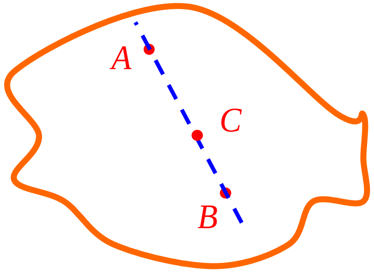
$$J_{zz} = \sum_i m_i(x_i'^2 + y_i'^2) + 2x_c\sum_i m_i x_i' + 2y_c\sum_i m_i y_i' + (x_c^2 + y_c^2)\sum_i m_i$$

$$J_{zz} = \sum_i m_i(x_i'^2 + y_i'^2) + (x_c^2 + y_c^2)\sum_i m_i = J_c + md^2$$

推论： 若过刚体上任意两点A、B的轴均与过质心轴平行，那么两轴的转动惯量为 $J_A = J_B + m(r_{AC} + r_{BC})(r_{AC} - r_{BC})$



$J_A = J_B + mr_{AB}(r_{AC} + r_{BC})$



$J_A = J_B + mr_{AB}(r_{AC} - r_{BC})$

垂直轴定理：如果刚体对于直角坐标系x轴，y轴，z轴，原点O的转动惯量分别为J_x，J_y，J_z，J_O，那么有：$J_x + J_y + J_z = 2J_O$

证：由于 $J_x = \int (y^2 + z^2) dm \quad J_y = \int (x^2 + z^2) dm \quad J_z = \int (x^2 + y^2) dm$

所以 $J_x + J_y + J_z = 2\int (x^2 + y^2 + z^2) dm = 2J_O$

当z→0时，$J_x = \int y^2 dm \qquad J_y = \int x^2 dm \qquad J_z = \int (x^2 + y^2) dm$

推论 如果刚体是薄板(二维情形)，建立三维直角坐标系O-xyz z轴垂直于薄板，x轴和y轴位于薄板内，则 $J_x + J_y = J_z$

我们现在简化角动量的表达式

$$\vec{L}=\begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}=\vec{\vec{J}}\cdot\vec{\omega}$$

从角动量的表达式知，关键在于惯量张量的化简

由线性代数知识可知，只需要把惯量张量化为对角矩阵

此时惯量积为0，惯量张量对角化为：

$$\vec{\vec{J}}=\begin{pmatrix} J_{xx}' & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy}' & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz}' \end{pmatrix}$$

刚体对定点的角动量简化为：

$$\vec{L}=\vec{\vec{J}}\cdot\vec{\omega}=\begin{pmatrix}L_x\\L_y\\L_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_{xx}' & 0 & 0\\0 & J_{yy}' & 0\\0 & 0 & J_{zz}'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{pmatrix}$$

即 $\vec{L}=J_{xx}'\omega_x\vec{i}+J_{yy}'\omega_y\vec{j}+J_{zz}'\omega_z\vec{k}$

从线性代数知识可知，矩阵对角化就是求本征值和本征向量

对 $\boldsymbol{n}$ 阶满秩方阵 $\boldsymbol{A}$，总能找到可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P^{-1}AP=\Lambda}$

为对角阵。方法是：$|\boldsymbol{A-\lambda E}|=\boldsymbol{0}$ 求得特征根λ

代入特征根λ从 $(\boldsymbol{A-\lambda E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 反解特征向量$\boldsymbol{x}$

为了书写，略掉对角化的惯量矩阵中惯量系数的撇’，则

$$\vec{L}=\vec{\vec{J}}\cdot\vec{\omega}=\begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{\vec{J}}\to A$$

$$\vec{\omega}\to x$$

主轴坐标系的每一个轴称为该固定点的惯量主轴

显然，若角速度沿某一主轴方向，则角动量必沿此方向

即有 $\vec{L}=\lambda\vec{\omega}$ 其中λ为正的比例系数

于是有主轴的另一定义：

若刚体绕过定点某轴以角速度ω转动，而刚体对该点

L与ω方向相同，则此轴就是该点的惯量主轴

从数学上易证：惯量积为0，是L与ω平行的充分必要条件

这也就很容易有如下结论：

- ◆匀质刚体的对称轴是轴上各点的惯量主轴
- ◆与匀质刚体的对称面垂直的轴, 是轴与对称面交点的惯量主轴
- ◆若坐标系的两个轴是惯量主轴, 则第三轴也是惯量主轴
- ◆匀质刚体若有旋转对称轴, 则以旋转对称轴为轴的坐标系是主轴坐标系(此时不必固连坐标系于刚体)

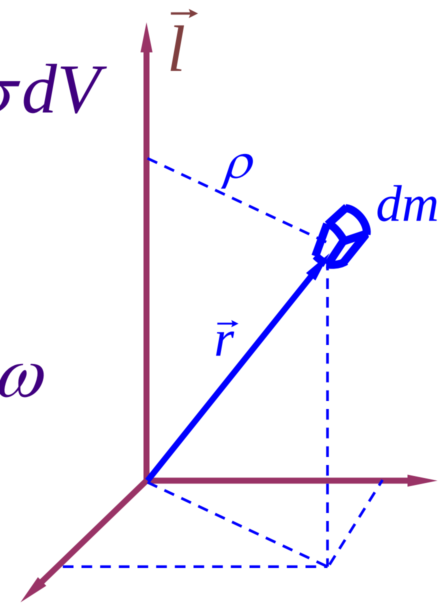
如：对称重陀螺的定点运动。

由于过定点有无数多条轴线，需求某轴线*l*的转动惯量：

刚体是特殊的质点组，因而满足： $\vec{L}_l = \vec{L}\cdot\vec{e}_l = J_l\omega$

式中 $J_l = \sum_i m_i\rho_i^2$ J_l为刚体对*l*轴的转动惯量，ρ_i轴距

质点连续均匀分布的刚体 $J_l = \int_V \rho^2 dm = \int_V \rho^2\sigma dV$



又 $\vec{L} = \vec{\vec{J}}\cdot\vec{\omega}$

故 $\vec{L}_l = J_l\omega = \vec{L}\cdot\vec{e}_l = \vec{e}_l\cdot\vec{L} = \vec{e}_l\cdot\vec{\vec{J}}\cdot\vec{\omega} = \vec{e}_l\cdot\vec{\vec{J}}\cdot\vec{e}_l\omega$

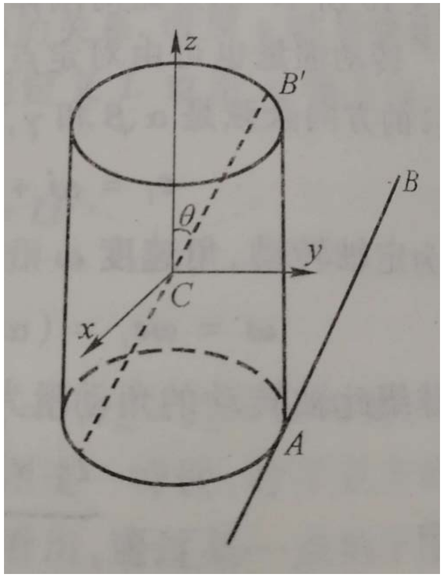
比较可知：$J_l = \vec{e}_l\cdot\vec{\vec{J}}\cdot\vec{e}_l$

反映了刚体定点与过定点的某轴线的转动惯量之间的关系

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

例5.3 一半径为 r_0 ，高为$2r_0$的均质正圆柱体，如下图所示绕AB轴以角速度 ω 转动。轴线AB与圆柱轴共面，并成 30° 角，A点是柱体底面边界上的固定点。求（1）柱体对于轴线AB的转动惯量；（2）柱体对A点的角动量。



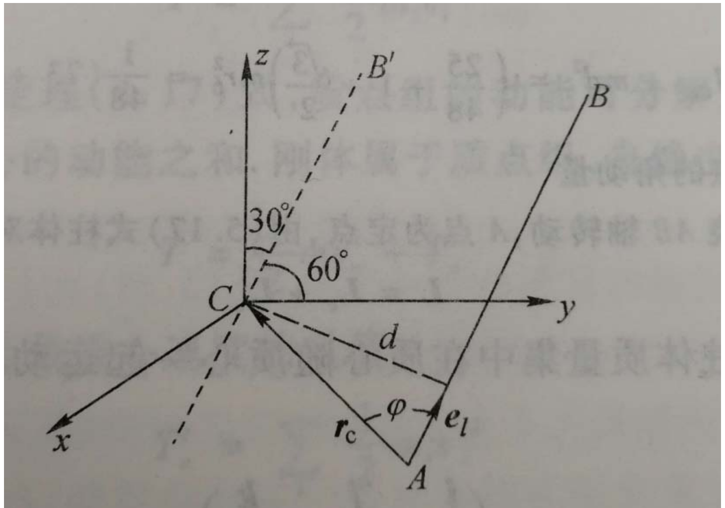


图 L5. 3

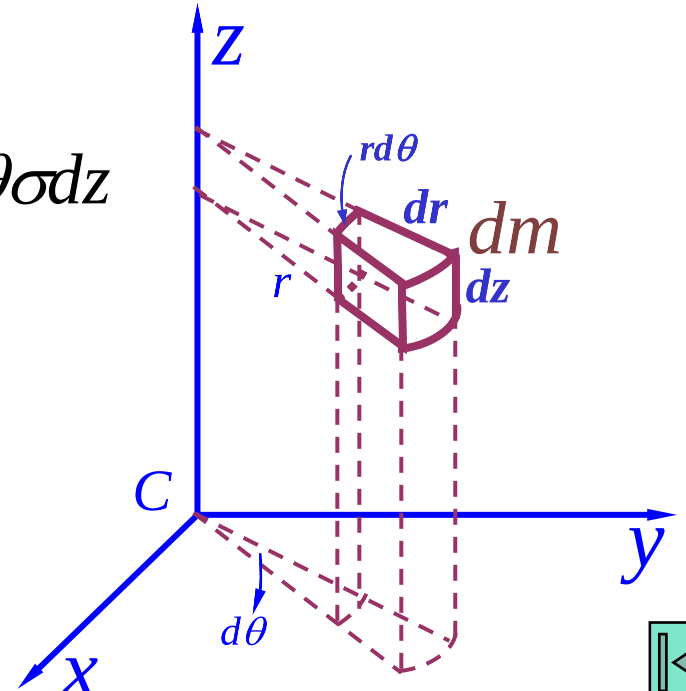
§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

[解]取质心C为坐标原点，建立直角坐标系C-xyz，AB位于yz平面内。由于柱体是均匀的，质心位于几何中心，显然x、y和z轴都是对称轴，它们都是惯量主轴。对圆柱轴的转动惯量J_z，即是惯量矩阵的对角元素J_{zz}，按公式可求出

$$J_{zz} = J_z = \int_{-a}^{a}\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} r^2 r dr d\theta \sigma dz$$

$$= \sigma\pi r_0^5 = \frac{1}{2} m r_0^2$$

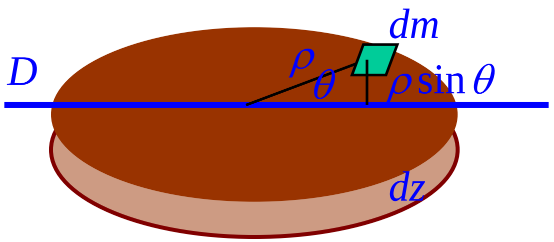


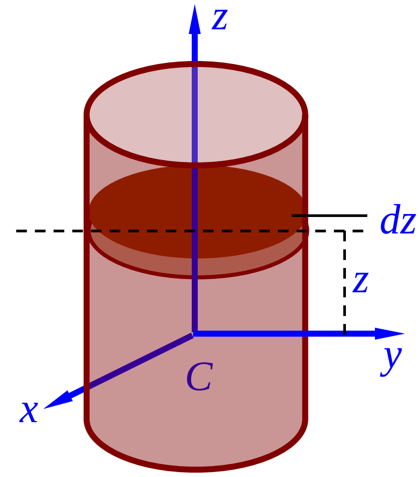
$$J_{xx} = J_x = J_{yy} = J_y = \int_{-a}^{a} \sigma(y^2 + z^2)dxdydz$$

$$= \int_{-r_0}^{r_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \sigma(r^2 \sin^2 \theta + z^2) r d\theta dr dz = \frac{7}{6} \sigma \pi r_0^5 = \frac{7}{12} m r_0^2$$

由于对称性，圆柱对x轴，y轴的转动惯量相等，即 $J_{xx}=J_{yy}$

如图，薄板对直径的转动惯量为：





$$dJ_D=\int r_D{}^2 dm$$

$$=\int(\rho\sin\theta)^2 dm$$

$$=\int(\rho\sin\theta)^2\sigma dV=\int(\rho\sin\theta)^2\sigma dS dz$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^r(\rho\sin\theta)^2\sigma\rho d\theta d\rho dz$$

$$=\frac{1}{4}\pi r^4\sigma dz$$

如图，据平行轴定理有 $J_{xx}=\int(dJ_D+z^2dm)=\int_{-r}^{r}(\frac{1}{4}\pi r^4\sigma+z^2\pi r^2\sigma)dz$

化简有： $J_{xx}=J_{yy}=\dfrac{7}{6}\pi\sigma r^5=\dfrac{7}{12}mr^2$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

[解]现在坐标轴都是惯量主轴，非对角元素均为0，对质心C的惯量矩阵是一对角矩阵，柱体对CB’轴的转动惯量是

$$J_{CB'}=(\alpha \quad \beta \quad \gamma)\begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}=J_{xx}\alpha^2+J_{yy}\beta^2+J_{zz}\gamma^2$$

$$\alpha=\cos(\frac{\pi}{2})=0, \beta=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}, \gamma=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$J_{CB'}=\frac{1}{4}(J_{yy}+3J_{zz})=\frac{25}{48}mr_0^2$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

[解]再由平行轴定理，要求得柱体对AB轴的转动惯量，先求出AB与CB’ 间的垂直距离d。柱体质心相对于A点的位矢 $r_c = -r_0 j + r_0 k$；AB方向的单位矢量

$e_l = \frac{1}{2} j + \frac{\sqrt{3}}{2} k$，设 e_l 与 r_c 之间的夹角为 φ ，则

$$d = \left| r_c \sin\varphi \right| = \left| e_l \times r_c \right| = \frac{1+\sqrt{3}}{2} r_0, d^2 = (1+\frac{\sqrt{3}}{2}) r_0^2$$

$$J_{AB} = J_{CB'} + md^2 = (\frac{25}{48} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}) m r_0^2 = \frac{1}{48}(73 + 24\sqrt{3}) m r_0^2$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

[解]柱体以角速度 ω 绕AB轴转动，A点为定点，柱体对A点的角动量:

$$L = L_c + L_c'$$

$$v_c = \omega \times r_c = \omega \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -r_0 & r_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})\omega r_0 i$$

$$L_c = m r_c \times v_c = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})\omega r_0^2 (j+k)$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

[解]柱体以角速度 ω 绕质心转动的角动量:

$$L_c' = J_c \cdot \omega = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \omega$$

$$= \frac{\omega}{2}(J_{yy} j + \sqrt{3} J_{zz} k) = \frac{m\omega}{24} r_0^2 (7j + 6\sqrt{3}k)$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

[解]柱体对A点的角动量:

$$L = L_c + L_c' = \frac{m\omega}{24} r_0^2 \left[(19 + 12\sqrt{3}) j + (12 + 18\sqrt{3}) k \right]$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

二、刚体的动能

刚体的动能是刚体中各质点的动能之和：

$$T=\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

质点组的动能可分解为随质心运动（平动）的动能和相对于质心的动能之和。刚体属于质点组，也满足如下关系：

$$T=\frac{1}{2}mv_c^2+T_c'$$

其中

$$T_c'=\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i'^2$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

二、刚体的动能

由刚体的特点知，刚体中质点与质心间的距离不变，刚体相对于质心的运动只可能是围绕质心的转动

柯尼希定理：刚体的动能等于刚体随质心运动的平动动能 T_c 及绕质心转动的转动动能 T_c' 之和。

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

二、刚体的动能

取定点 O 为坐标原点。当刚体以角速度 ω 绕固定点 O 转动时，位矢 r 处质点的速度为

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

则有

$$v^2 = (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \vec{v} = \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{v})$$

刚体绕定点 O 转动的动能为

$$T_o = \Sigma \frac{1}{2} m \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \Sigma m \vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

二、刚体的动能

利用 L 与惯量矩阵 J 、角速度 ω 的关系，T_0 可写成

$$T_0 = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{J}\cdot\vec{\omega} = \frac{1}{2}J_\omega \omega^2$$

其中

$$J_\omega = \vec{\omega}\cdot\vec{J}\cdot\vec{\omega}$$

是刚体对通过定点的瞬时转轴的转动惯量。

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

二、刚体的动能

如果所取的坐标轴是关于定点（坐标原点）的惯量主轴，则惯量矩阵 J 是对角化；三个对角元素分别为刚体对三个主转动惯量：J_x、J_y 和 J_z 。这时转动动能可写为

$$T_0 = \frac{1}{2}(J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2)$$

刚体对于质心的转动动能表达式也可写为

$$T_c' = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{J}\cdot\vec{\omega}$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

二、刚体的动能

刚体一般运动时的动能表达式可写为

$$T = T_c + T_c' = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{J}_c \cdot \vec{\omega}$$

（1）平动：$\omega = 0$即刚体无转动，不存在转动动能，故

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 = \frac{1}{2} m v^2$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

二、刚体的动能

（2）定轴转动：设转轴为z轴，在转轴上适当取坐标原点 O ，则定轴转动可看成角速度方向沿转轴不变的定点运动，$\omega = \omega k$ ，可得

$$T = \frac{1}{2} L_z \omega = \frac{1}{2} J_{zz} \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2$$

其中

$$J_{zz} = J = \int (x^2 + y^2) dm$$

是刚体对于转轴的转动惯量。

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

二、刚体的动能

（3）平面平行运动：取与刚体运动平面垂直的方向为z轴，$\vec{\omega}=\omega\vec{k}$，则

$$T=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}J_c\omega^2$$

J_c 是刚体对通过质心的转轴的转动惯量。

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

例5.4 边长为a质量为m的均质立方体，绕对角线以角速度 ω 转动，求出此立方体的动能。

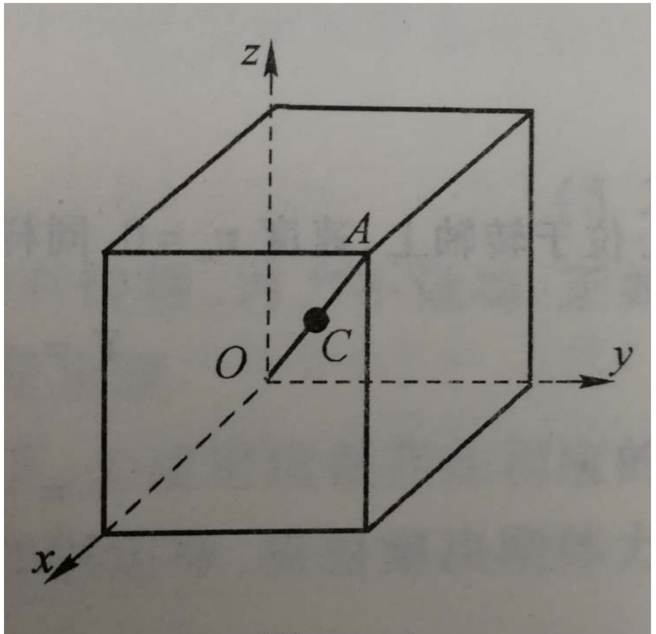
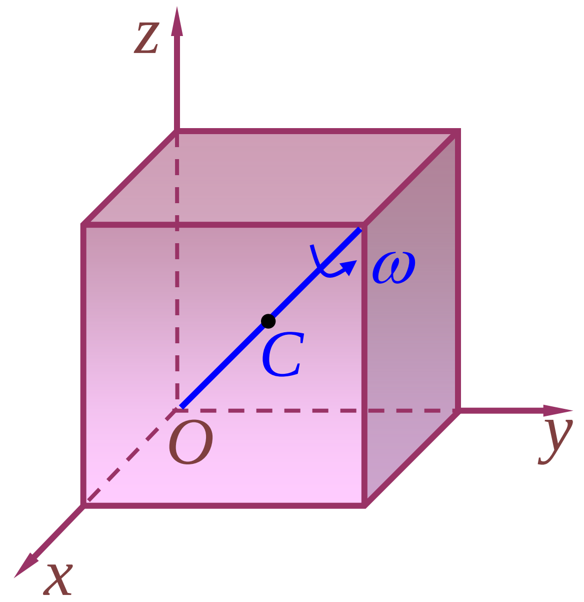


图 L5.4

解1 :如图，取棱交点为原点，建立直角坐标系 $O-xyz$

由图中几何关系知转轴的方向余弦为：$\vec{e}_\omega = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_\omega = \frac{1}{\sqrt{3}}\omega\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$



由立方体的对称性知：

$$J_x = J_y = J_z = \int_0^a \int_0^a \int_0^a (x^2 + y^2)\sigma dxdydz$$

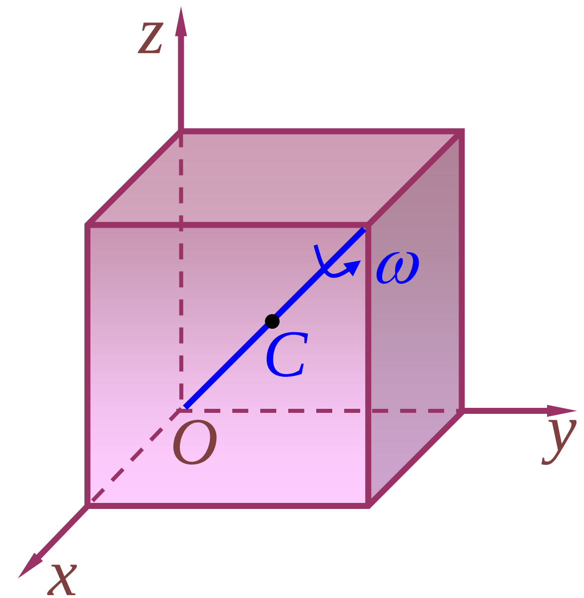
$$= \frac{2}{3}a^5\sigma = \frac{2}{3}ma^2$$

$$J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = \int_0^a \int_0^a \int_0^a xy\sigma dxdydz$$

$$= \frac{1}{4}a^5\sigma = \frac{1}{4}ma^2$$

立方体对O点的惯量张量为：

$$\vec{\vec{J}}_O = ma^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$



所以立方体的转动能为：

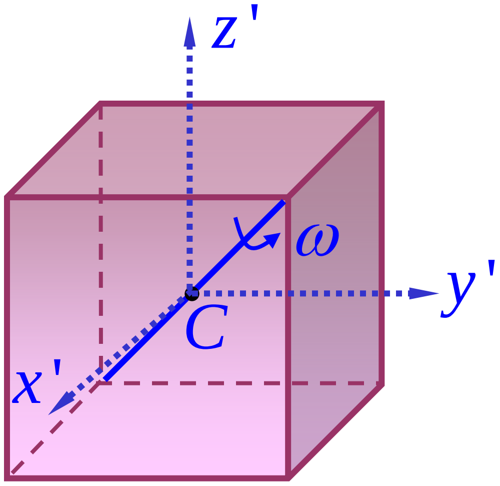
$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{\vec{J}}_O\cdot\vec{\omega} = \frac{1}{6}m\omega^2 a^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}m\omega^2 a^2$$

解2：如图，取质心C为原点，建立直角坐标系 $C-x'y'z'$

由于立方体的对称性，坐标轴为惯量主轴，于是有：

$$J_{x'}=J_{y'}=J_{z'}=\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}(x'^2+y'^2)\sigma dxdydz$$

$$=\frac{1}{6}a^5\sigma=\frac{1}{6}ma^2$$



那么，立方体对质心的惯量张量为：

$$\vec{\vec{J}}_C=\frac{1}{6}ma^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

又因立方体的质心位于转轴上，因此 $\vec{v}_C=0$

所以立方体的转动能为：

$$T=T_C+T_C'=\frac{1}{2}mv_C{}^2+\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{\vec{J}}_C\cdot\vec{\omega}=\frac{1}{12}m\omega^2a^2$$

例：一个质量为m，半径为R，高为h的均匀圆柱体，它绕着过质心、偏离其对称轴角度为θ的定轴以角速度ω转动。求圆柱体转动的动能。