偏微分方程复习

问题

1、某个物理量(电场强度、电势、磁感应强度、声压、杂质浓度)在空间的某个区域中的分布情况，以及它怎样随着时间而变化。解决这些问题，须掌握所研究的物理量在空间中的分布规律和在时间中的变化规律。须考虑到研究对象处在怎样的特定“环境”中，边界所处的物理状况，即边界条件。须考虑到研究对象的特定“历史”，即它在早先某个所谓“初始”时刻的状态，即初始条件。边界条件和初始条件反映了具体问题的特定环境和历史。在数学上，边界条件和初始条件合称为定解条件.

2、

$$
\begin{aligned}
\text{拉普拉斯方程} \quad & \nabla^2 u = 0 \\
\text{泊松方程} \quad & \nabla^2 u = f(x, y, z) \\
\text{扩散或热流方程} \quad & \nabla^2 u = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial t} \\
\text{波动方程} \quad & \nabla^2 u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}
\end{aligned}
$$

$$
\text{亥姆霍兹方程} \quad \nabla^2 F + k^2 F = 0
$$

$$
\text{薛定谔方程} \quad \frac{-h^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi = ih \frac{\partial}{\partial t} \Psi
$$

3、拉普拉斯方程;矩形长平板稳态温度

例题

4、扩散方程

例题

5、波动方程

例题

6、 圆柱体稳态温度

例题

7、 圆膜振动

> 例题
> 8、球体稳态温度
> 例题

偏微分方程

1 介绍

数学物理学里的许多问题都涉及到部分偏微分方程的解。不同的物理问题，偏微分方程却可能是相同的。本章的例子讨论了一些问题，其数学方法适用于更多问题。下面概述介绍物理问题及其偏微分方程。

$$\text{拉普拉斯方程} \quad \nabla^2 u = 0 \tag{1.1}$$

> 注：复习
> 符号∇是一个矢量微分算子，三维情况下$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\mathbf{y}}\mathbf{j} + \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\mathbf{z}}\mathbf{k}$
> ∇^2，数量积，为$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$。
>
> ∇^2称拉普拉斯算子，$\nabla^2 u$，即 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$
>
> $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\boldsymbol{\partial}\mathbf{u}}{\boldsymbol{\partial}\mathbf{y}}\mathbf{j} + \frac{\boldsymbol{\partial}\mathbf{u}}{\boldsymbol{\partial}\mathbf{z}}\mathbf{k}$
>
> $\nabla \cdot (v_x\mathbf{i} + \mathbf{v_y}\mathbf{j} + \mathbf{v_z}\mathbf{k})$，数量积，为$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$
>
> $\nabla \times (v_x\mathbf{i} + \mathbf{v_y}\mathbf{j} + \mathbf{v_z}\mathbf{k})$，矢量积，为

> $$\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix}$$
>
> - 问题：梯度，散度，旋度是什么？

函数u，或是无质量区域的引力势函数， 或是无电荷区域的静电势，或是温度不随时间变化区域，不含热源的稳态温度，或是不可压缩流体的速度势，没有涡流或涡流源。

$$\text{泊松方程} \quad \nabla^2 u = f(x, y, z) \tag{1.2}$$

函数u表示包含质量、电荷或热或流体源区域，适用拉普拉斯方程的各种情况的物理量。函数$f(x，y，z)$叫做源密度，在电学与电荷密度成正比。

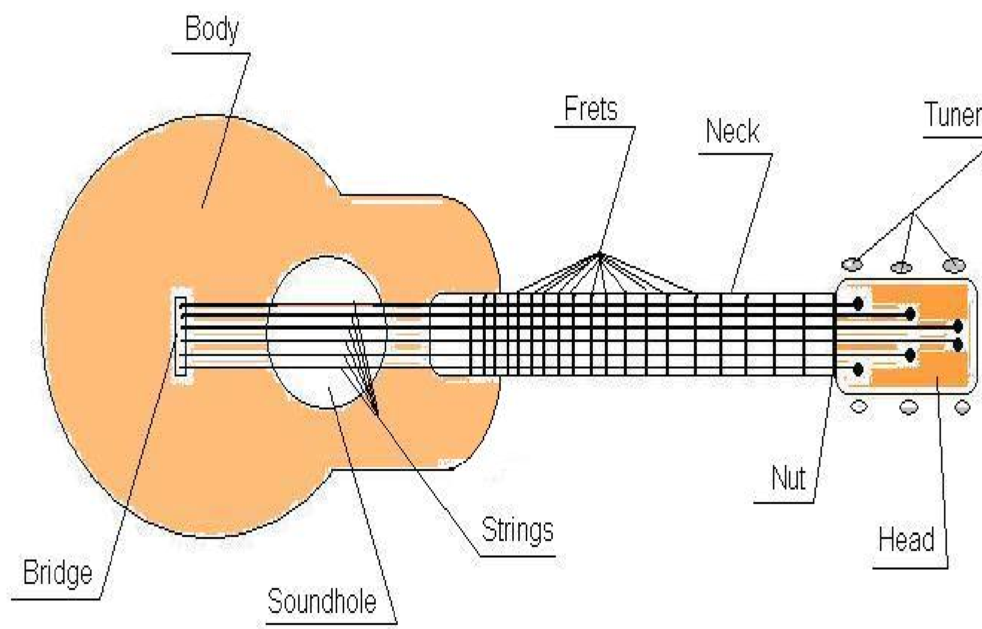
$$\text{扩散或热流方程} \quad \nabla^2 u = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial t} \tag{1.3 }$$

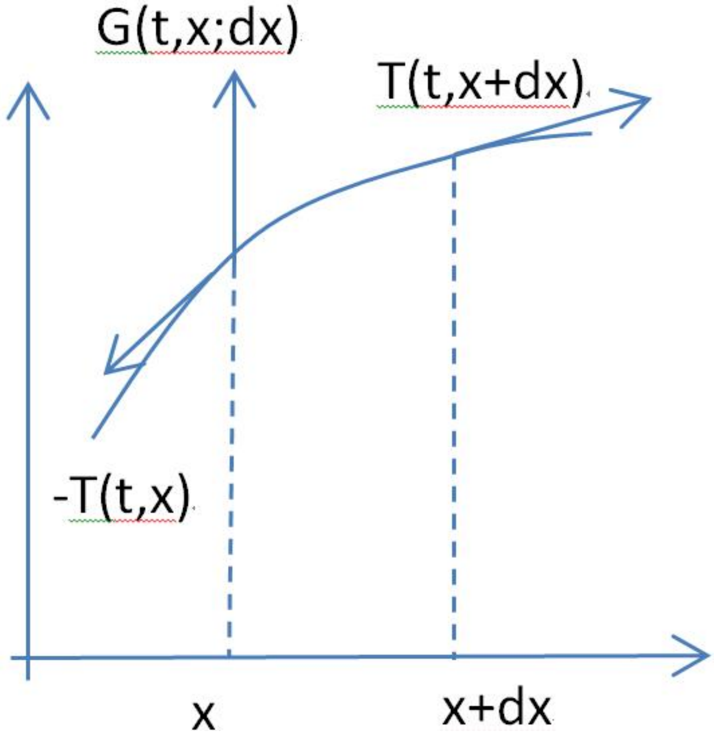
u是无热源区域非稳态温度，温度随时间变化。或是扩散物质的浓度，如化学物质，或像中子这样的粒子。$1/\alpha^2$ 常数，常称扩散系数。

$$\text{波动方程} \quad \nabla^2 u = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.4}$$

函数u可表示振动弦或膜的位移。在声学上，振动介质如气体、液体或固体的位移。在电场中，u是电路电流或电势。在电磁波中，如光、无线电波，u是电场强度E或磁感应强度B的组成部分。v是波速，如对真空中的

光，是光速c，对于声波来说，是声音在介质中传播的速度。$\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$为达朗贝尔运算符

> - 弦的横振动
>
> 
>
>
> 一根弦在内部张力作用下处于平衡位置，某个微小扰动引起部分质点的位移，内部张力又使邻近的部分随之产生位移，形成称为波的运动。建立物理模型。假设弦均匀细长，横截面可忽略而视作线，线密度为常数，又设弦柔软弹性，可任意弯曲，张力满足胡克定律，弦的运动在同一平面进行，每个质点的位移都是横向的，即垂直于平衡位置，且绝对位移和相对位移都很小，这些假设是推导方程过程中自然提出的，在物理问题中也是合理的。



取弦在自身张力作用下的平衡位置所在直线为x轴，横向位移方向为u轴，设t时刻弦上x处的质点相对

于平衡位置的横向位移$u=u(t,x)$为未知函数. 采用微元分析法. 在弦上任取微元$[x,x+dx]$, 微分记号dx表示一个无穷小改变量. 此微元可视作质量为ρdx的质点，在t时刻的运动遵循牛顿第二定律

$$F=ma$$

微元所受的外力有左端点的张力$-T(t,x)$, 右端点的张力$T(t,x+dx)$, 和加在微元上的垂直于x轴的外力$G(t,x;dx)$. 如果线密度ρ为常数，t时刻作用于x处的单位长度上的外力，即外力密度$g(t,x)$已知，张力$T(t,x)$关于x可微，则微元服从的牛顿第二定律可具体表为

$$
\begin{aligned}
\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\vec{u} &= -\vec{T}(t,x) + \vec{T}(t,x+dx) + G(t,x;dx) \\
&= \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} dx + g(t,x) dx \vec{u}
\end{aligned}
$$

其中第二个等号忽略了dx的高阶无穷小. 其分量形式为

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T_1}{\partial x} &= 0 \\
\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial T_2}{\partial x} + g(t,x)
\end{aligned}
$$

T_1, T_2分别是张力T在x和u方向的分量. 这就是弦振动满足的基本偏微分方程组. 由于张力沿弦的切向作用，有$T_2 = T_1 \frac{\partial u}{\partial x}$代入, 可得

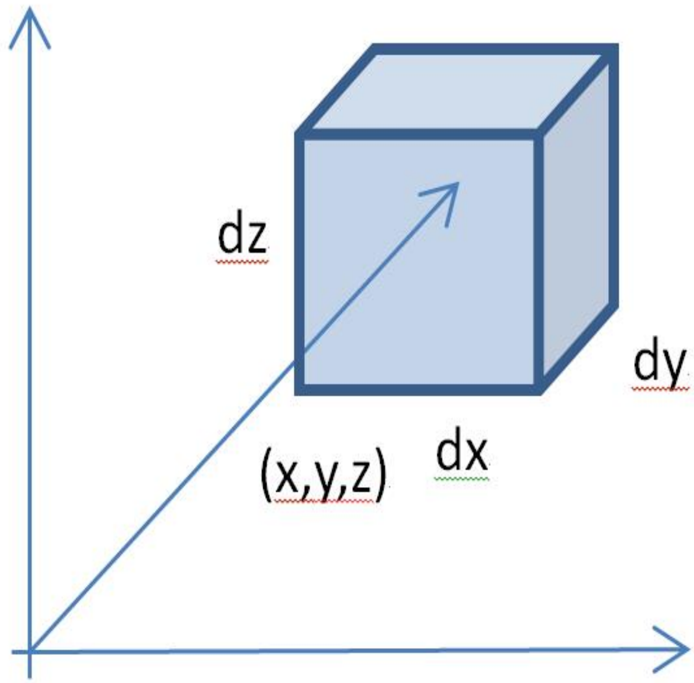
$$
\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_1(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(t,x)
$$

进一步约简

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), \text{其中} a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}, f(t,x) = \frac{g(t,x)}{\rho}
$$

弦横振动的数学模型是偏微分方程，为一维波动方程。对于经典运动问题，可以建立更一般的固体弹性波方程，流体波方程，电磁波方程等，在一些重要的特殊情况下，这些方程都可约化为波动方程。

> 热传导方程



> 傅里叶热传导定律：热量从温度高处流向低处，流动热量的多少与温度差成比例.
>
> $$Q_n = -k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial n}\vec{n}$$

$$\text{亥姆霍兹方程}\quad \nabla^2 F + k^2 F = 0 \tag{1.5}$$

函数F表示扩散方程或波动方程解的空间部分，即与时间无关的部分。

$$\text{薛定谔方程}\quad \frac{-h^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi = ih\frac{\partial}{\partial t}\Psi \tag{1.6}$$

量子力学波动方程。在方程中，h是普朗克常数除以2π，m是粒子质量，$i=\sqrt{-1}$，V是粒子的势能。波函数Ψ是复数，其绝对平方与粒子的位置概率成正比。

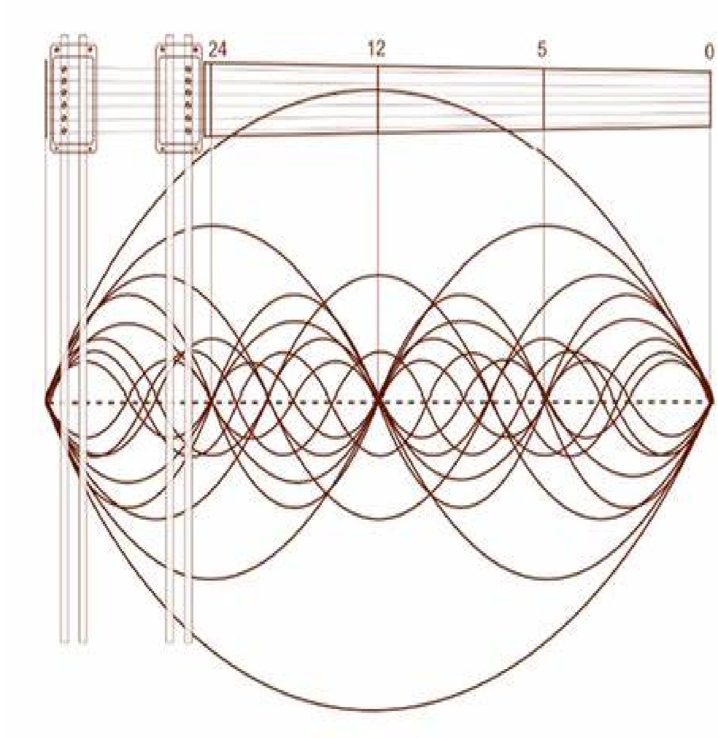
现在我们主要关心方程的解，不是方程推导。可以认为在实验中以上物理量满足给定的方程。这些方程也可以从简单的实验假设中推导出来。在第6章第10节和第11节中，考虑了流体的流动。第六章，问题10.15 证明了不含源或汇区域中不可压缩流体中，$\nabla\cdot\mathbf{v}=\mathbf{0}$。如果没有漩涡，即无旋流，旋度$curl\mathbf{v}=\mathbf{0}$，$\mathbf{v}$为标量函数的梯度:$\mathbf{v}=\nabla\mathbf{u}$。结合这两个方程有$\nabla\bullet\nabla u=\nabla^2u=0$。函数u称为速度势，在给定条件下满足拉普拉斯方程。还概述了一些类似例子。

下面几节讨论分离变量法，这是对大量物理问题较有效的偏微分方程解法，但与第8章常微分方程中的方法不同。在第2至4节为直角坐标系中用傅里叶级数法求解。往后章节用其他坐标系如圆柱坐标系、球面坐标系，用勒让德或贝塞尔级数求解。

- 小结

> $$\begin{aligned}\text{拉普拉斯方程}\quad&\nabla^2u=0\\\text{泊松方程}\quad&\nabla^2u=f(x,y,z)\\\text{扩散或热流方程}\quad&\nabla^2u=\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial t}\\\text{波动方程}\quad&\nabla^2u=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\\\text{亥姆霍兹方程}\quad&\nabla^2F+k^2F=0\\\text{薛定谔方程}\quad&\frac{-h^2}{2m}\nabla^2\Psi+V\Psi=ih\frac{\partial}{\partial t}\Psi\end{aligned}$$

- 现象（自然、人、社会）是复杂的。建模起点。弦振动方程是在一定的理想化假设下导出的. 如果存在其他不能忽略的因素，比如弦在黏稠液体中振动，阻尼必须考虑。
- 偏微分方程的解是很复杂的。简单的弦振动方程解



- 一般的偏微分方程，找出通解非常困难。
- 把确定运动的制约条件称为定解条件。初始条件,边界条件
- 初始条件。某一时刻的状态将影响该时刻以后的运动过程，该时刻的运动状态便是初始条件。如弦振动。初值问题
- 边界条件。如弦振动。边值问题

第一节问题

- 1.静电学中设$\nabla \cdot E = \rho/\epsilon_0$，$E = -\nabla\phi$，$E =$电场，$\rho =$电荷密度，$\epsilon_0 =$常数，$\phi =$静电势。证明静电势在无电荷区满足拉普拉斯方程（1.1），在电荷密度ρ区域满足泊松方程（1.2）
- 2.(a)证明正弦波方程$u = sin(x - vt)$，见第7章，图2.3，满足波动方程（1.4）。证明在一般情况下，$u = f(x - vt)$和$u = f(x + vt)$满足波动方程，f是二次可导的函数。这是波方程的d’Alembert解。（见第4章，第11节，第1节）。函数$f(x - vt)$代表波动在x正方向运动移动，$f(x + vt)$代表向相反方向移动。

（b）证明$u(r，t) = (1/r)f(r - vt)$和$u(r，t) = (1/r)f(r + vt)$球坐标下满足波动方程。用（7.1）$\nabla^2 u$第一项u，u是θ和ϕ独立变量。这些函数表示球面波从原点向外扩散，或汇聚到原点。

- 3. 电动力学，在空间中麦克斯韦方程组成立

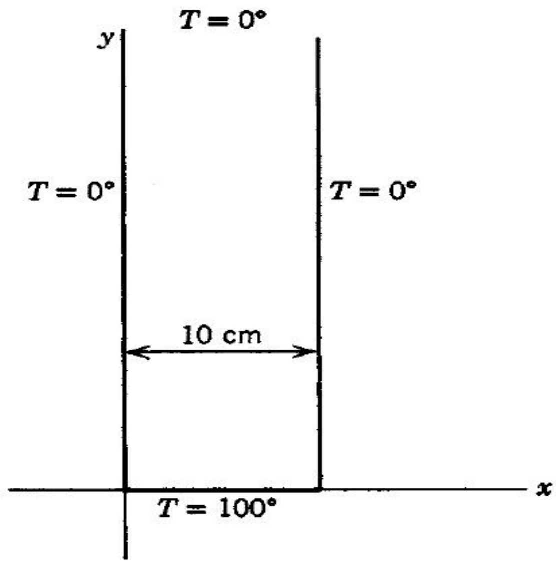
$$\begin{array}{ll} \nabla \cdot E = 0 & \nabla \cdot B = 0 \\ \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} & \nabla \times B = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} \end{array}$$

E和B是电场和磁场，c是真空中的光速。证明E或B分量都满足$v = c$波动方程（1.4）

- 4. 导出热流方程(1.3)如下:穿过表面热量Q与温度梯度(-∇T)•n法向量成负比例。比较第六章方程(10.4)，将水流应用于热流。证明单位时间单位体积热量比与∇·∇T成正比。∂T/∂t正比于热量的增加，证明T满足（1.3）。

2 拉普拉斯方程;矩形长平板稳态温度

求解问题：长矩形金属板有两长边，远端为温度为0，底部温度为100（图2.1）。平板宽度10厘米。求平板内稳态温度分布。



为简化问题，假设平板长度比宽度长得多，在y方向上延伸近似于无穷远处。称为半无限板。如果关注的是不接近远端的温度，这个近似是可以的。

在没有热源的平板内部，温度T满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 T = 0 \quad 或 \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{2.1}$$

平板边界为矩形，给出了在直角坐标系中的∇^2。平板在二维空间中，忽略了z项。用以下公式解方程：

$$T(x,\ y) = X(x)Y(y) \tag{2.2}$$

此式中X是只有一个变量x的函数，Y也是只有变量y的函数。怎么知道解是这种形式呢？它还不是最终答案。一旦得到了式(2.2)的解，将其组合起来才可得解。注意，(2.1)解之和也是(2.1)的解。将(2.2)代入(2.1)，得到

$$Y\frac{d^2 X}{dx^2} + X\frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \tag{2.3}$$

此时X只依赖于x，Y只依赖于y，可用导数代替偏导数。(2.3)除以XY，得

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=0 \tag{2.4}$$

下一步是**分离变量**的关键。(2.4)中第一项是关于独立变量x的函数，第二项是关于独立变量y的函数，**两项都是常数**。$u=sint$是$u=\ddot{u}$的解，把$u=sint$代入微分方程，$\ddot{u}=u$成为$-sint=-sint$，方程对所有t值成立。对一个方程，代入微分方程解，就得到变量的等式。在第12章第1节和第2节中，微分方程级数解由此方式进行。(2.1)至(2.4)中有两个独立变量x和y，(2.2)是(2.1)的一个解,这意味着：(2.4)是独立变量x和y的等式。而(2.4)是将(2.2)代入(2.1)得到的。换句话说，如果(2.2)是(2.1)的解，(2.4)必满足两个独立变量x和y任何值和所有值。因X是只有变量x的函数，Y是只有变量y的函数，(2.4)第一项是只有x的函数，第二项是只有y的函数，假设把特定的x代入第一项，第一项是常数。要满足(2.4)，第二项必须减去相同的常数。

当x保持不变时y变化，因x和y是独立的，对固定的x和任意的y，(2.4)都是恒等式，因此第二项在y变化时保持不变,为常数。类似地，如果固定y，让x变化，(2.4)的第一项是常数。简单地说，方程$f(x)=g(y)$，有x和y独立变量，只有当两个函数是相同的常数时才是恒等式。这是分离变量过程的基础。从(2.4)可得

$$\begin{gathered}\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=const.=-k^2,k\geq 0\text{或}\\ X''=-k^2X \quad Y''=k^2Y\end{gathered} \tag{2.5}$$

返回

常量k^2称为分离常量，(2.5)的解为：（见常微分方程解）

$$X=\begin{cases}\sin kx,\\ \cos kx\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}e^{ky},\\ e^{-kx}\end{cases}\tag{2.6}$$

(2.1)的解为

$$T=XY=\begin{Bmatrix}e^{ky}\\ e^{-ky}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sin kx\\ \cos kx\end{Bmatrix}\tag{2.7}$$

在（2.7）中，四个解都不满足给定的边界温度。要把（2.7）的解通过选择合适的常数k组合起来，以满足给定的边界条件。因微分方程（2.1）是线性的，（2.1）的任何线性组合都是（2.1）的解（参见第3章第7节，第8章第1节和第6节）。设定k大于0，（见问题5）。因边界条件$T\to 0$时$y\to\infty$，而e^ky不符合，先舍去。同样，因$x=0$时$T=0$，舍去含有$coskx$的解。只剩下了$e^{-ky}\sin kx$，k值仍待确定。当$x=10$时，$T=0$，即$sin(10k)=0$，则$k=\pi n/10$，$n=1,2,\cdots$。对任何整数n，解

$$T=e^{-n\pi y/10}\sin\frac{n\pi x}{10}\tag{2.8}$$

在$T=0^\circ$的三条边满足给定的边界条件

当$y=0$时，有$T=100^\circ$。对于任何n，这个条件都不满足（2.8），但（2.8）的线性组合是（2.1）的解。为此求满足$y=0$时，$T=100^\circ$的线性组合。对所有n，用无穷级数表示T

$$T=\sum_{n=1}^{\infty}b_n e^{-n\pi y/10}\sin\frac{n\pi x}{10}\tag{2.9}$$

对$y=0$，有$T=100^{\circ}$。由$y=0$从(2.9)得到

$$T_{y=0}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{10}=100 \tag{2.10}$$

这是$l=10$时，$f(x)=100$的傅里叶级数（第7章，第9节）。用第7章的方法计算系数b_n可得

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)sin\frac{n\pi x}{l}dx\\&=\frac{2}{10}\int_0^{10}100sin\frac{n\pi x}{10}dx\\&=\begin{cases}\frac{400}{n\pi}, & n\text{为奇数}\\0, & n\text{为偶数}\end{cases}\end{aligned}$$

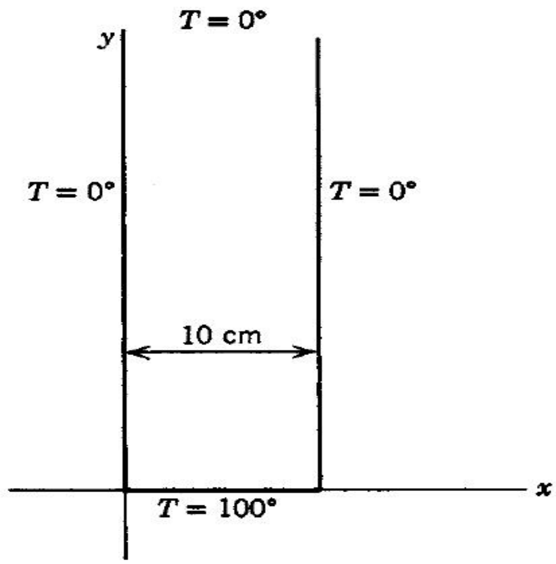
$$T=\frac{400}{\pi}(e^{-\pi y/10}sin\frac{\pi x}{10}+\frac{1}{3}e^{-3\pi y/10}sin\frac{3\pi x}{10}+\cdots) \tag{2.12}$$

如果$\pi y/10$不是太小，级数收敛很快，方程（2.12）可用于计算(参见问题6)。例如，在平板的中心线x=5，y=5时，有

$$T=\frac{400}{\pi}(e^{-\pi/2}sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}e^{-3\pi/2}sin\frac{3\pi}{2}+\cdots)\approx 26.1^{\circ} \tag{2.13}$$

为描述温度在平板随x和y变化，可用计算机绘制出（2.12）的$T(x，y)$几项的三维图形。或绘出二维等高线图，表示等温过程，即常数T的曲线。如果底边温度不是100℃是而是函数$f(x)$，其他三条边都是0℃，可

用同样的方法求解。只需用傅里叶级数展开给定的f(x)，并把系数代入（2.9）。



考虑30厘米高，顶部边缘$T=0°C$，其他维度和温度如图2.1所示。这时不能舍去e^{ky}解，因y并不是无限长的, 可用线性组合$ae^{-ky}+be^{ky}$来代替e^{-ky}，当$y=30$时，$e^0-e^0=0$等于0。最方便的方法是使用组合

$$\frac{1}{2}e^{k(30-y)}-\frac{1}{2}e^{-k(30-y)} \tag{2.14}$$

上式就是设$a=1/2e^{30k}$，$b=-1/2e^{-30k}$而得。当$y=30$，$e^0-e^0=0$, 满足(2.14)。这时(2.14)即为$sinhk(30-y)$（见第2章，12节），这样对有限平板，解为：

$$T=\sum_{n=1}^{\infty}B_n sinh\frac{n\pi}{10}(30-y)sin\frac{n\pi x}{10} \tag{2.15}$$

在平板三个$T=0$边, 级数每一项都是0。$y=0$时，$T=100$:

$$T_{y=0}=100=\sum_{n=1}^{\infty}Bnsinh(3n\pi)sin\frac{n\pi x}{10}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n sin\frac{n\pi x}{10} \quad (2.16)$$

$b_n=B_n sinh3n\pi$或$B_n=b_n/sinh3n\pi$。计算b_n，求解B_n，代入(2. 15)得到有限平板的温度分布：

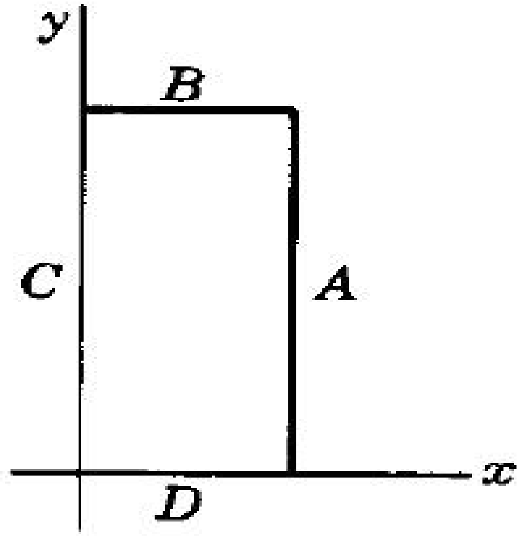
$$T=\sum_{oddn}\frac{400}{n\pi sinh3n\pi}sinh\frac{n\pi}{10}(30-y)sin\frac{n\pi x}{10} \quad (2.17)$$

在（2. 12）和（2. 17）中，函数$T(x, y)$满足（2. 1）和所有给定的边界条件。对于有边界温度的有界区域，这是一个实验事实。这也可以用数学方法证明（见第16题和第14章，第11章38节）。只有一个$T(x, y)$满足拉普拉斯方程和给定的边界条件。因此（2. 17）是平板所需要的解。也可以证明，在∞，$T\to 0$的半无限板上只有一个解。因此（2. 12）是满足条件的解。

为什么把（2. 5）的常数写成$-k^2$，如果用$+k^2$情况怎么样。就微分方程的解而言，关心使用$+k^2$正确性。代替（2. 7）可得

$$T=XY=\begin{Bmatrix}e^{kx}\\e^{-kx}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}sinky\\cosky\end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

假设k是实数。(2. 18) 虚数k也可得(2. 7) 解组合，见问题5。(2. 18) 的解不能用于半无限平板问题求解，因为$y\to\infty$时，都不趋向于零，而在$x=0$和$x=10$的情况下，e^{kx} 和e^{-kx}的线性组合不能为零。如果考虑半无限平板，长边与x轴平行，而不是y轴，而沿着y轴的短端T=100，那么（2. 18）为解之一。或者，对于有限平板，如果100°的边沿着y轴，则需要（2. 18）。



如果两相邻边保持100°，另两边保持0°,如何求出平板温度分布。或者，四条边都给了值。我们可以通过已知解的组合求问题的解。平板边为A、B、C、D（图2.2）。如果A、B和C保持0°，D 保持100°，沿D边设x轴，用(2.17)的方法，可以求出温度分布。假设同样的平板，A、B、C边保持0度，D边保持100度，也是同样的问题，但这次用解（2.18）。或者为了减少工作,同样用(2.17)，沿C边设x轴，在结果中交换x和y，获得了与图2.2一样的两个解（一个是C在100°，一个是D在100°），把这两解加起来。结果是微分方程（2.1）的解（线性：任意两个解之和也是解）。边界上的温度和内部的温度是两个解相加温度之和，也就是，A边0°，B边0°，C边100°，D边是100°，这是须满足的边界条件。因此，两个简单问题的解之和给出了复杂问题的解（参见问题11到13）。

总结一下分离变量。后面讨论偏微分方程也用到分离变量，基本是一样的。分离变量法是，先设定一个解为独立变量的函数的乘积，如（2.2），由此可把偏微分方程分解成几个常微分方程，如（2.5）。求解常微分方程，这些解可能是指数函数，三角函数，幂（正或负），贝塞尔函数，勒让德多项式等等。对任何分离常数所得的解的线性组合，都是偏微分方程的解。问题变成确定分离常数的值，及满足给定边界或初始条件的线性组合。

在给定的边界条件下，求解微分方程解问题称为边界值问题。这些问题常常导致特征值问题。参见第3章11节，第12章2节结尾。在特征值问题中，参数值选定，则解满足给定条件。分离常数就是这样的参数。分离常数的值通过满足边界条件而确定，如在（2.8），由条件当$x = 10, T = 0^o$，求取了 $k = n\pi/10$ 。分离常数的结果值称为特征值，与特征值对应的微分方程的解称为特征函数。也有可能在偏微分方程中除了分离常数之外还有一个参数,如（1.6）中的Schrodinger方程。这个参数的可能值也称为特征值，由特征值方程的解满足特定的要求，相应的解被称为特征函数。

求出特征函数后，下一步是把给定的函数按边界条件或初始条件展开。例如（2.10）和（2.16），及后面章节的例子。特征函数是函数展开的一组基函数，参见第7章第8节和第12章第6节。选择函数满足给定的边界条件或初始条件，问题的基函数于是确定，如（2.7）的$e^{-ky} sinkx$

常微分方程解

- 一阶线性微分方程

$$y' + Py = Q$$

过程

$$\begin{aligned}
&(1)、I = \int P dx \\
&(2)、计算 e^I, e^{-I} \\
&(3)、计算 y = e^{-I} \int Q e^I dx + c e^{-1}
\end{aligned}$$

- 伯努利方程

$$y' + Py = Qy^n$$

- 二阶线性常系数微分方程
  右边为0，齐次

$$a_2\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_0y = 0$$

  右边不为0

$$a_2\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_0y = f(x)$$

- 右边为零：
  微分算子$\frac{d}{dx}$y为D

特征方程

(1) 两个不相等的实根$D = a, D = b$，通解

$$y = c_1e^{ax} + c_2e^{bx}$$

(2) 两个相等的实根$D = a, D = a$，通解

$$y = (Ax + B)e^{ax}$$

(3) 两个复根$\alpha + i\beta, \alpha - i\beta$

$$y = e^{\alpha x}c_1\sin\beta x + c_2cos\beta x,$$
$$y = ce^{\alpha x}\sin(\beta x + \gamma)$$

- 右边不为零：

$$a_2\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\frac{dy}{dx}+a_0y=f(x)$$

通解

$$y=y_c+y_p$$

互补函数y_c是齐次方程的通解，y_p是原方程特解

- 右边是指数

$$f(x)=ke^{cx}$$

齐次方程的特征方程根a,b，特解Y_p

$$\begin{cases}Ce^{cx}, & c\text{不等于}a,b\\ Cxe^{cx}, & c\text{等于}a,b\text{之一}\\ Cx^2e^{cx} & c,a,b\text{三者相等}\end{cases}$$

- 右边是三角函数，化为指数形式

$$y''+y'-2y=4sin2x$$

$e^{2ix}=\cos 2x+i\sin 2x$，则特解$Y_p=Ce^{2ix}$

- 右边是一个指数乘以一个多项式

$$a_2\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\frac{dy}{dx}+a_0y=e^{cx}P_n(x)$$

特解Y_p为

$$Y_p=\begin{cases}e^{cx}Q_n(x), & c\text{不等于}a,b\\ xe^{cx}Q_n(x), & c\text{等于}a,b\text{之一}\\ x^2e^{cx}Q_n(x) & c,a,b\text{三者相等}\end{cases}$$

$Q_n(x)$的结构与$P_n(x)$相同，系数待定

右边有多项:叠加原理。每个不同的指数求解单独方程，再把所有解相加

返回2.5

3 扩散或热流方程;薛定谔方程

热流方程是

$$\nabla^2u=\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial t}\tag{3.1}$$

u是温度，α^2是热量流过物质的特性常数。

求解过程。先将（3.1）分离成一个空间方程和一个时间方程。空间方程不是一维的，再分离成x和y的常微分方程，或x，y，z的常微分方程，或r，θ，ϕ的常微分方程等。假设（3.1）解为

$$u = F(x,y,z)T(t). \tag{3.2}$$

（注意T含义的变化，前一节T表示温度，在这里u是温度，T是u的时间相关因子。把(3.2)代入(3.1)得

$$T\nabla^2 F = \frac{1}{\alpha^2}\frac{dT}{dt} \tag{3.3}$$

两边除以FT得

$$\frac{1}{F}\nabla^2 F = \frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} \tag{3.4}$$

等式的左边是只有空间变量x，y，z的函数，右边是只有时间的函数，因此两边都是相同的常数，可得

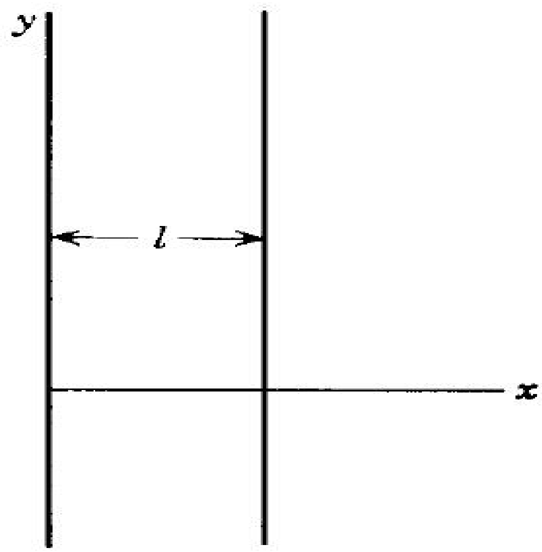
$$\begin{aligned} \frac{1}{F}\nabla^2 F = -k^2 \quad & \nabla^2 F + k^2 F = 0 \quad 及 \\ \frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = -k^2 \quad & \frac{dT}{dt} = -k^2\alpha^2 T \end{aligned} \tag{3.5}$$

对时间方程积分，可得

$$T = e^{-k^2\alpha^2 t} \tag{3.6}$$

可以看到选择分离常数（$-k^2$）为负的物理原因。当t增加时，在（3.6）物体温度可下降到0，但如果在（3.5）和（3.6）中使用$+k^2$的话，温度随时间增加，没有极限。（3.5）中的空间方程是亥姆霍兹方程（1.5）。（问题10）波动方程的空间部分也是亥姆霍兹方程。

例1 现在考虑l厚板的热量流动，如冰箱壁。假设板表面足够大，可忽略底端影响，并假设热量只在x方向流动（图3.1）。这个问题和棒长度为l，绝热边的的热流问题是一样的，因为在这两种情况下热流都是在x方向上的。假设平板的初始状态是稳定的温度分布，$x=0$为0^o，$x=l$为100^o。从$t=0$开始，$x=l$（以及$x=0$）保持0^o。求任何时间点任何x的温度。



首先，求初始稳态温度分布。初始稳态温度是线性的。初始稳态温度u_0满足拉普拉斯方程，一维情况下是$\frac{d^2u_0}{dx^2}=0$。方程的解是$u_0=ax+b$，其中a和b是常数，a,b通过符合给定条件求出。因在$x=0,u_0=0$，在$x=l,u_0=100$，有

$$u_0=\frac{100}{l}x \tag{3.7}$$

从t=0开始，u满足热流方程（3.1），已分离变量，$T(t)$由（3.6）给出，$F(x)$满足（3.5）第一个方程，解是（3.2），即

$$\nabla^2F+k^2F=0 \quad 或 \quad \frac{d^2F}{dx^2}+k^2F=0 \tag{3.8}$$

（对这一维问题，F是只有x的函数）（3.8）的解是

$$F(x)=\begin{cases} sinkx, \\ coskx, \end{cases} \tag{3.9}$$

（3.2)解是

$$F(x)=\begin{cases} e^{-k^2\alpha^2t}sinkx, \\ e^{-k^2\alpha^2t}coskx, \end{cases} \tag{3.10}$$

消去$coskx$解，因为在$x=0$，$u=0$。在$x=l$时要得到$u=0$，则$\sin kl=0$，也就是$kl=n\pi$或$k=n\pi/l$（特征值），基函数（特征函数）

$$u=e^{-(n\pi\alpha/l)^2t)}sin\frac{n\pi x}{l} \tag{3.11}$$

问题的解是级数

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}b_ne^{-(n\pi\alpha/l)^2t}sin\frac{n\pi x}{l} \tag{3.12}$$

在$t=0$，要使$u=u_0$

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}b_nsin\frac{n\pi x}{l}=u_0=\frac{100}{l}x \tag{3.13}$$

这意味着在（0，l）上求（$100/l$）x的傅里叶级数。系数为（见问题1）

$$b_n=\frac{100}{l}\frac{2l}{\pi}\frac{1}{n}(-1)^{n-1}=\frac{200}{\pi}\frac{(-1)^{n-1}}{n} \tag{3.14}$$

将（3.14）代入（3.12），得最终解

$$u=\frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1)}}{n}e^{-(n\pi\alpha/l)^2t}sin\frac{n\pi x}{l} \tag{3.15}$$

例2，对这问题做一些改变。假设表面最终温度是不等于0的两个常数。对于初始稳态，最终稳态是距离的线性函数。级数（3.12）趋向于最终稳定状态为0。为得到趋向于其他最终稳定状态的解，（3.12）加线性函数u_f表示最终稳态。不同于（3.12），有

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}b_ne^{-(n\pi\alpha/l)^2t}sin\frac{n\pi x}{l}+u_f \tag{3.16}$$

对t=0，对应于（3.13）的方程是

$$u_0=\sum_{n=1}^{\infty}b_nsin\frac{n\pi x}{l}+u_f \tag{3.17}$$

或

$$u_0-u_f=\sum_{n=1}^{\infty}b_nsin\frac{n\pi x}{l} \tag{3.18}$$

因此，当$uf\neq 0$时，为u_0-u_f而不是u_0，须用傅里叶级数展开

- 绝热边界

到目前为止，都是给定边界温度。可以绝热，没有热量流入或流出。温度的法向导数$\frac{\partial u}{\partial n}$在边界为0。给定u边的值，称为狄利克雷问题，给定导数$\frac{\partial u}{\partial n}$,称为范力曼问题。一维绝热情况，用x=0, x=l时\frac{\partial u}{\partial x}=0替换x=0, u=0。意味着（3.10）中的有效解包含$coskx$,须包括常数项（对应于k=0）

薛定谔方程

比较方程（1.3）和（1.6）。如果V=0两个方程有相同的形式，在一般的方程中（1.6）分离变量。可比较(3.2)

$$\Psi = \psi(x，\ y，\ z)T(t) \tag{3.19}$$

(3.19)代入(1.6),除以Ψ

$$\frac{-h^2}{2m}\frac{1}{\psi}\nabla^2\psi + V = ih\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = E \tag{3.20}$$

E是分离常数比较（3.5）。在量子力学中，E代表粒子的能量。对时间方程积分

$$T = e^{-iEt/h} \tag{3.21}$$

空间方程，称为时间无关的Schrodinger方程，是

$$\frac{-h^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi \tag{3.22}$$

对一维问题，当V=0，有

$$-\frac{h^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}=E\psi \quad 或 \quad \frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2mE}{h^2}\psi=0 \tag{3.23}$$

即（3.8）$k^2=2mE/h^2$。因此（3.23）解与（3.9）相同，相应Ψ解是

$$\Psi=\psi(x)T(t)=\begin{Bmatrix} sinkx \\ coskx \end{Bmatrix} e^{-iEt/h} \tag{3.24}$$

例：在量子力学中“盒子里的粒子问题”需薛定谔方程，在$(0,l)$，$V=0$，在端点$x=0$，$x=l$，$\Psi=0$。这时波函数Ψ描述了限制在0和l之间的粒子。如热流问题一样，在x=0，Ψ=0时，正弦解，$x=l$时$\Psi=0$，要求$k=n\pi/l$。因$k^2=2mE/h^2$，求得$E=h^2/2m(n^2\pi^2)/l^2$，基本函数是特征函数

$$\Psi_n=sin\frac{n\pi x}{l}e^{-iEnt/h} \tag{3.25}$$

把Ψ(x，t)是其线性组合

$$\Psi_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n sin\frac{n\pi x}{l}e^{-iEnt/h} \tag{3.26}$$

初始状态$\Psi(x，0)$与in（3.7）函数相同，b_n系数与（3.14）相同，有

$$\Psi_n(x,t)=\frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}sin\frac{n\pi x}{l}e^{-iEnt/h} \tag{3.27}$$

见问题11和12;及6.6到6.8，7.17到7.22.

4波动方程;弦振动

拉紧绳，如架钢琴或小提琴弦，两端固定在$x=0$及$x=l$。弦振动时，离平衡位置的垂直位移y，取决x及时间t。假设y很小，弦的斜率$\partial y/\partial x$任何时候任何点都很小，即弦没有远离平衡位置。弦长度和支撑点距离也不变，尽管弦在平衡位置振动时会稍有延伸。在这些假设下，位移y(x，t)满足一维波动方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{4.1}$$

常数v为波速，取决于弦的张力和线密度，是弦上一点扰动沿弦方向传播的速度。为进行分离变量，代入

$$y=X(x)T(t) \tag{4.2}$$

由(4.1)得(问题3.10)

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=\frac{1}{v^2}\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}=-k^2$$

或

$$\begin{aligned}&X''+k^2X=0,\\&\ddot{T}+k^2v^2T=0\end{aligned} \tag{4.3}$$

这里使用一个负的分离常数。振动的解用三角函数sin和cos表示，而不用实指数表示，因用实数k的$+k^2$，不能满足边界条件。
讨论波现象用下列符号（见第7章，问题2.17）

> $\nu=$ 频率(sec^{-1}) $\qquad\qquad \omega=2\pi\nu=$ 角频率
> $v=\lambda\nu$ $\qquad\qquad \lambda=$ 波长
> $k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi\nu}{v}=\frac{\omega}{v}=$ 波数

这两个方程（4.3）的解是

$$X=\begin{cases}sinkx,\\coskx,\end{cases}\quad T=\begin{cases}sinkvx=sin\omega t,\\coskvx=cos\omega t,\end{cases}\tag{4.4}$$

对y（4.2）的解是

$$y=\begin{Bmatrix}sinkx\\coskx\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}sin\omega t\\cos\omega t\end{Bmatrix}\quad\omega=kv\tag{4.5}$$

因为弦固定在$x=0$和$x=l$两端，对所有t，$y=0$。这意味着(4.5)只有$sinkx$因子，选择k使sinkl = 0或 k =nπ/ l $，得解：

$$y=\begin{cases}sin\frac{n\pi x}{l}sin\frac{n\pi vt}{l}\\sin\frac{n\pi x}{l}cos\frac{n\pi vt}{l}\end{cases}\tag{4.6}$$

（4.6）给定问题的解的线性组合取决于初始条件

假设弦拨动后开始振动的，即在弦中间拉开一小段距离h，然后放手。$t=0$时弦的形状为$y_0=f(x)$，如图4.1所示。弦上一点的速度$\partial y/\partial t$在$t=0$时为零。$\partial y/\partial t$与波速v没有关系，不要混淆。（4.6）中包含$sin(n\pi vt/l)$的项，当$t=0$时时间导数不是零，须舍去。因此，基函数是$sin(n\pi x/l)cos(n\pi vt/l)$，解的形式是

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}b_n sin\frac{n\pi x}{l}cos\frac{n\pi vt}{l} \tag{4.7}$$

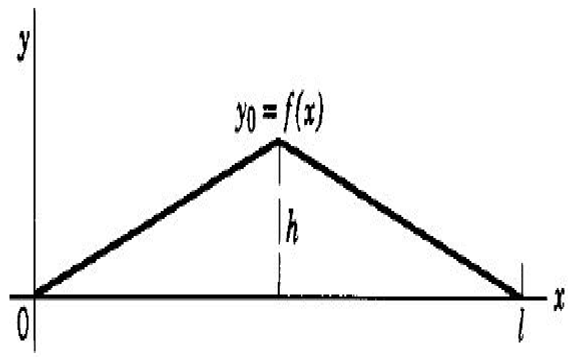


图4.1

系数b_n由$t=0$时，$y_0=f(x)$确定，即

$$y_0=\sum_{n=1}^{\infty}b_n sin\frac{n\pi x}{l}=f(x) \tag{4.8}$$

如前述，求出给定f(x)的傅里叶级数系数，并代入（4.7）。结果是（问题1）

$$y=\frac{8h}{\pi^2}sin\frac{\pi x}{l}cos\frac{\pi vt}{l}-\frac{1}{9}sin\frac{3\pi x}{l}cos\frac{3\pi vt}{l}+\cdots \tag{4.9}$$

使弦振动的另一种方法是击打，如弹钢琴弦。在这种情况下，初始条件$t=0$时$y=0$，及$t=0$时$\partial y/\partial t$ 为x的函数。也就是说，t = 0时，弦上的点给定初速度。这时须舍去(4.6)中$cos(n\pi vt/l)$项，因为在t = 0时不为零。基函数是$sin(n\pi x/l)sin(n\pi vt/l)$，解形式为

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}B_n sin\frac{n\pi x}{l}sin\frac{n\pi vt}{l} \tag{4.10}$$

系数由以下方程确定

$$(\frac{\partial y}{\partial t})_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n sin\frac{n\pi x}{l}cos\frac{n\pi x}{l}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n sin\frac{n\pi x}{l}(4.11)$$

也就是说初始速度$V(x)$，须用傅里叶级数中（见问题5到8）
弦以这样的方式振动，则(4.6) 对某一n值可只有一个解，而不是y的无穷级数，

$$y=sin\frac{n\pi x}{l}sin\frac{n\pi vt}{l} \tag{4.12}$$

对任何t，$sin(n\pi vt/l)$的最大值是1，弦的形状是

$$y=sin\frac{n\pi x}{l} \tag{4.13}$$

n=1，2，3，4时(4.13)的形状如图4.2所示。注意位移实际上是非常小的。

考虑弦上的点x，$sin(n\pi x/l)$是确定数，比如A，这个点在t时刻位移是（由4.12导出）

$$y=Asin\frac{n\pi vt}{l} \tag{4.14}$$

弦上此点以频率v_n随时间振荡，频率是$v_n,\omega_n=\frac{n\pi v}{l}=2\pi v_n,$或$v_n=\frac{nv}{2l}$。振幅是$A=sin(n\pi x/l)$（参见图4.2）。其他点振幅不同，但频率相同。这是弦产生的音符的频率（见第7章第10节）。如果n=1（见图4.2），频率为$v/(2l)$，在音乐中，这种音调称为基频、基波或第一谐波。如果n=2，频率是基频的两倍，称为第一泛音或第二次谐波等。弦产

生的所有频率都是基频的整数倍，称为弦的特征频率或倍频，与特征值$k = n\pi/l$成正比。弦振动产生只有一个频率的纯音的相应方式称为简正振动模式，如（4.2）的y只有一个n值。图4.2中显示了前4个简正振动模式。任何振动都是简正振动模式的组合，例如（4.9）或（4.10）。对（4.12）一个n解描述的简正模式，称特征函数。

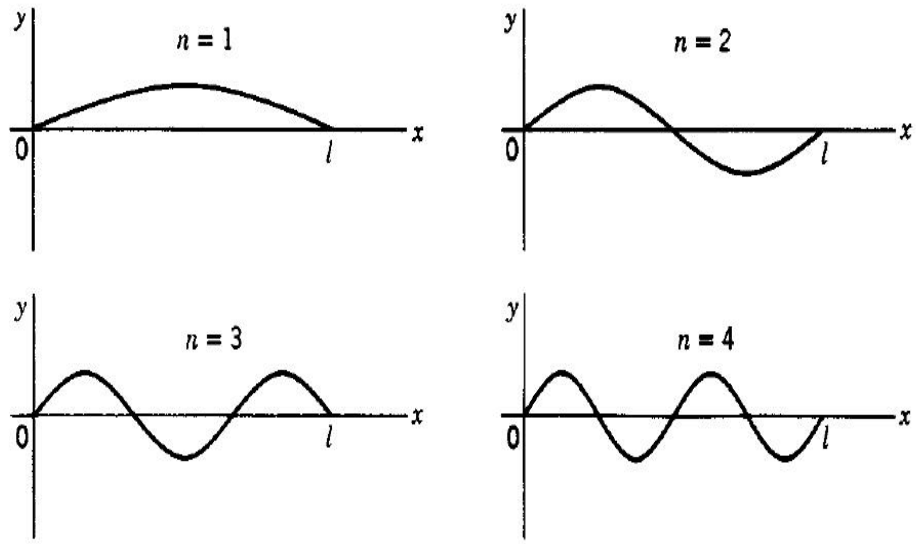


图4.2中波形称为驻波。波方程的达朗贝尔特解（见问题1.2）为行波。假设将两个向相反方向运动的行波合并如下：

$$cosk(x-vt)-cosk(x+vt) = 2sinkxsinkvt \qquad (4.15)$$

(通过一个三角公式)。这是（4.5）的一个解，两个行波的组合产生了一个驻波。假设这两个行波沿着两端固定在$x = 0$和$x = l$的弦运动，首先考虑$cosk(x+vt)$沿x负方向向$x = 0$移动。当它达到$x = 0$时反射，入射波和反射波的组合对于所有t在$x = 0$时必等于0。波$cosk(x-vt)$是$-cosk(x+vt)$的反射。考虑$cosk(x-vt)$往$x = l$方向移动, 到达$x = l$反射。可以验证(第10题), 如果$k = n\pi/l$，$x = l$反射，是$-\cos\frac{n\pi}{l}(x+v)$。可以认为谐波在x = 0和x = l固定端点之间来回移动，在两端反射，成为同频率的反向波。从(4.15)可以看出，原来的波与

反向波叠加，最终结果是驻波。两端固定弦的运动由一系列驻波叠加而成。

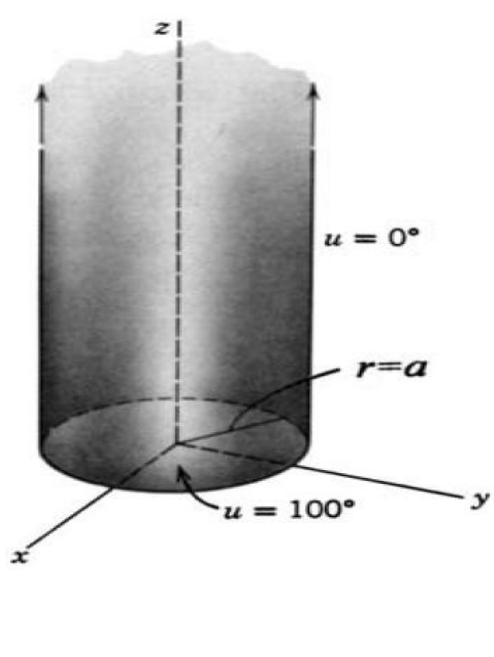
到目前为止，都是考虑两端固定的弦的问题。也可以有一个“自由”的情况，可以沿着x=0或x=l自由地上下移动，比如末端沿着无摩擦轨迹滑动。自由端的条件是$\partial y/\partial x=0$。如果$x=0$端是自由的，选择的解包含$coskx$, 因为在$x=0$，$\partial/\partial x coskx=-ksinkx=0$。如果弦固定在$x=l$，要使$coskl=0$，则$kl=\pi(n+1/2)\pi$。当$x=0$端自由，$x=l$端固定，初始弦速度为0，基函数是

$$y=cos\frac{(n+1/2)\pi x}{l}cos\frac{(n+1/2)\pi vt}{l} \tag{4.16}$$

关于这些函数的讨论，参见第7章第11节和第11章11节

5 圆柱体稳态温度

考虑以下问题。在一个半径为a的半无限固体圆柱(图5. 1) 中，基座温度100^o，圆柱曲面侧温度0^o，求稳态温度分布。



这个问题与半无限平板的温度分布问题很相似。变量是圆柱坐标r，θ，z。由于边界条件是$r=a,u=0$，而不是x或y的值，不便于在直角坐标系中求解。圆柱体内温度满足拉普拉斯方程，因为没有热源。

在柱坐标下的拉普拉斯方程是（见第10章，第9节）

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{5.1}$$

为分离变量，假设解的形式为

$$u = R(r)\Theta(\theta)Z(z) \tag{5.2}$$

（5.2）代入到（5.1）并除以RΘZ

$$\frac{1}{R}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dR}{dr}) + \frac{1}{\Theta}\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dt^2} = 0 \tag{5.3}$$

最后一项是只有z的函数，而另外两项不包含z，所以最后一项是常数。前两项的和，是与最后一项相同的常数。注意，前两项都不是常数，因为都包含r。

为了使其中一项是常数，须确保：
（a）它是只有一个变量的函数，
（b）这个变量没有出现在方程的其他地方

由于最后一项是常数，有

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dt^2} = K^2, \quad Z = \begin{cases} e^{Kz} \\ e^{-Kz} \end{cases} \tag{5.4}$$

z趋向于无穷时，要让温度u趋于零，分离常数为$+K^2$（$K > 0$），因此只取e^{-Kz}解。（5.3）最后一项用K^2取代, 参见（5.4）

$$\frac{1}{R}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dR}{dr}) + \frac{1}{\Theta}\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + K^2 = 0$$

通过乘以r^2分离变量。

$$\frac{r}{R}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dR}{dr}) + \frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + K^2r^2 = 0 \tag{5.5}$$

在（5.5）中，第二项是唯一的θ函数，而其他项独立于θ。因此第二项为常量，有

$$\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -n^2, \Theta = \begin{cases} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{cases} \tag{5.6}$$

用$-n^2$作为分离常数，且n为整数，原因如下：当用极坐标来定位一个点时，可以选择角度θ，也可选$\theta + 2m\pi, m$为任意整数。但是不管m的值是多少，都为一个点和相应的温度。这个点的温度的数学方程必须在θ，$\theta + 2m\pi$都有相同的值，温度必须是周期为2π的周期函数。因负分离常数，Θ解是正弦和余弦函数，而不是指数，因此常数n是整数，以得到2π周期。

$n = 0$ 时(5.6)的解是θ和常数。因为θ不是周期函数, 只能用当$n = 0$时包含在$cosn\theta$中的常数解。

r方程是

$$\begin{aligned}\frac{r}{R}\frac{d}{dr}(r\frac{dR}{dr})-n^2+K^2r^2=0\\ r\frac{d}{dr}(r\frac{dR}{dr})+(K^2r^2-n^2)R=0\end{aligned} \tag{5.7}$$

这是贝塞尔方程，有解$J_n(Kr)$和$N_n(Kr)$，见第12章方程（16.5）。由于圆柱体的底部包含原点，所以只能用J_n，而不是N_n解，因为N_n在原点处变得无限大。因此有

$$R(r)=J_n(Kr) \tag{5.8}$$

圆柱体曲面温度为0，可利用此条件求K的可能值。当对所有θ和z，$r=a$时，或当$r=a, R(r)=0$时，$u=0$。从（5.8）可知$J_n(Ka)=0$，也就是说，K_a的可能值是J_n的零点。如果定义$k=Ka$，或者$K=k/a$，那么

$$R(r)=J_n(kr/a) \quad Z(z)=e^{-kz/a} \tag{5.9}$$

u的解是

$$u=\begin{cases}J_n(kr/a)\sin n\theta e^{-kz/a}\\ J_n(kr/a)\cos n\theta e^{-kz/a}\end{cases} \tag{5.10}$$

对于该问题，圆柱体基座保持100^o恒定温度。如果我们把圆柱旋转到任何角度，边界条件不会改变。因此，解不依赖于角度θ。这意味着在（5.10）中使用$\cos n\theta, n=0$。k的可能值是J_0的零点，称k_m 点，$m=123\ldots$, 因此可得基函数，以基函数为项的解为：

$$u=\sum_{m=1}^{\infty} c_m J_0(k_m r/a) e^{-k_m z/a} \tag{5.11}$$

当$z=0$，$u=100$，即

$$u_{z=0}=\sum_{m=1}^{\infty} c_m J_0(k_m r/a)=100 \tag{5.12}$$

这里要在贝塞尔函数级数中展开100，而不是正弦或余弦函数级数。我们已经证明了[第12章，方程（19.11）]关于权函数r，函数$J_0(kmr/a)$正交于（0，a），可以用与傅里叶正弦或余弦级数中同样的方法求出（5.12）系数c_m。（事实上，像（5.12）的级数通常称为傅里叶贝塞尔级数）。（5.12）乘以$rJ_0(k_\mu r/a)$，$\mu=1,2,3$，...从$r=0$到$r=a$的积分，因为正交性[见第12章，方程（19.11）]，除了$m=\mu$项，级数所有项都消去，我们有

$$c_\mu \int_0^a r[J_0(k_\mu r/a)]^2 dr=\int_0^a 100 J_0(k_\mu r/a) dr \tag{5.13}$$

对于每一个$\mu=1$，2，$3\ldots$的值，方程（5.13）给出了（5.11）和（5.12）其中一个系数。因此，（5.11）中的任何c_m都从（5.13）由m代替μ而得

我们需要计算（5.13）的积分。第12章方程（19.11）给出（$p=0$，$\alpha=\beta=k_m$）

$$\begin{gathered}\int_0^a r|J_0(k_m r/a)|^2 dr=\frac{a^2}{2}J_1^2(k_m)\\ \frac{d}{dx}[xJ_1(x)]=xJ_0(x)\end{gathered} \tag{5.14}$$

由12章的15.1方程

如果在方程中设$x = k_m r/a$，我们得到

$$\frac{a}{k_m}\frac{d}{dr}[(k_m r/a)J_1(k_m r/a)] = (k_m r/a)J_0(k_m r/a)$$

消去一个k_m/a因子并从0到a积分，有

$$\int_0^a rJ_0(k_m r/a)dr = \frac{a}{k_m}J_1(k_m r/a)|_0^a = \frac{a^2}{k_m}J_1(k_m) \tag{5.15}$$

现在由（5.13）c_m，代入（5.14）和（5.15）的积分值，并解出c_m。结果是

$$c_m = \frac{100a^2 J_1(k_m)}{k_m}\cdot\frac{2}{a^2 J_1^2(k_m)} = \frac{200}{k_m J_1(k_m)} \tag{5.16}$$

(5.11)的解，c_m值由（5.16）给出。通过计算级数几个项（问题1），可以计算任何点的温度。的数值。贝塞尔函数零值可由电脑或查计算。k_m是J_0 的零值 ，而不是J_1的零值。
假设圆柱体底部给定温度不是常数，而是更复杂的函数，比如r, θ的函数$f(r, \theta)$。计算步骤（5.10）前是一样的，但级数解要比（5.11）复杂，因为J_n 代替了J_0。这时k需要双下标，这是贝塞尔函数零点，$k_m n$的意思是J_n的第m个正零点，$n = 0, 1, 2 \ldots$及 $m = 1, 2, 3 \ldots$。温度u是双无穷级数，是所有J_n的所有零点之和。

$$u = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_{mn}r/a)(A_{mn}/cosn\theta + B_{mn}\sin n\theta)e^{-k_{mn}z/a} \tag{5.17}$$

要使$z = 0$，$u = f(r, \theta)$，

$$u_{z=0}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}J_n(k_{mn}r/a)(A_{mn}/cosn\theta+B_{mn}\sin n\theta)=f(r,\theta) \quad (5.18)$$

为确定系数A_mn，方程乘以$J_\nu(k_(\mu\nu)r/a)cos\theta$，在圆柱底座积分(θ从0到2π,r从0到a)。由于$sinn\theta$和$cosn\theta$ 在$(0，2\pi)$函数正交性，所有B_mn舍去，只有$n=\nu$时A_mn保留。由于函数的正交性$J_n(k_mnr/a)$（对n的所有m），只有一项$A_\mu v$保留，因此有

$$\begin{aligned}&\int_0^a\int_0^{2\pi}f(r,\theta)J_v(k_{\mu v}r/a)cosv\theta rdr\\&=A_{\mu v}\int_0^a\int_0^{2\pi}J_v^2(k_{\mu v}r/a)cos^2v\theta rdrd\theta\\&=A_{\mu v}\cdot\frac{a^2}{2}J_{v+1}^2(k_{\mu v})\cdot\pi\end{aligned} \quad (5.19)$$

r积分由第12章的（19.11）求出，积分θ由第7章第4节求出。注意在贝塞尔函数积分中权重函数r是如何作为极坐标一部分面积元的。同样可得

$$B_{\mu v}=\frac{2}{\pi a^2J_{v+1}^2(k_{\mu v})}\int_0^a\int_0^{2\pi}f(r,\theta)J_v(k_{\mu vr/a})sinv\theta rdrd\theta)$$

将（5.19）和（5.20）得到A和B系数的值代入（5.17），问题得解。

6 圆膜振动

在圆周上有刚性支撑的圆膜,例如鼓点，求振动频率的特性，及对应简正振动模式。

以圆膜建立平面（x，y），圆膜中心为原点。设z(x，y，t)是圆膜离（x，y）面的位移。z满足波动方程

$$\nabla^2 z=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \tag{6.1}$$

设

$$z=F(x,y)T(t) \tag{6.2}$$

把（6.1）分离成一个空间方程（亥姆霍兹）和一个时间方程（见问题3.10和第3节），得

$$\nabla^2 F+K^2F=0 \quad 及 \quad T''+K^2v^2T=0 \tag{6.3}$$

因为膜是圆形，在极坐标下表示∇^2，F方程为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial F}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}+K^2F=0 \tag{6.4}$$

$$F=R(r)\Theta(\theta) \tag{6.5}$$

（6.4）变成（5.5），分离方程及其解是（5.6），（5.7）和（5.8）。（6.3）时间方程的解是

$$sinKvt和cosKvt$$

因此，z的解是

$$z=R(r)\Theta(\theta)T(t)$$

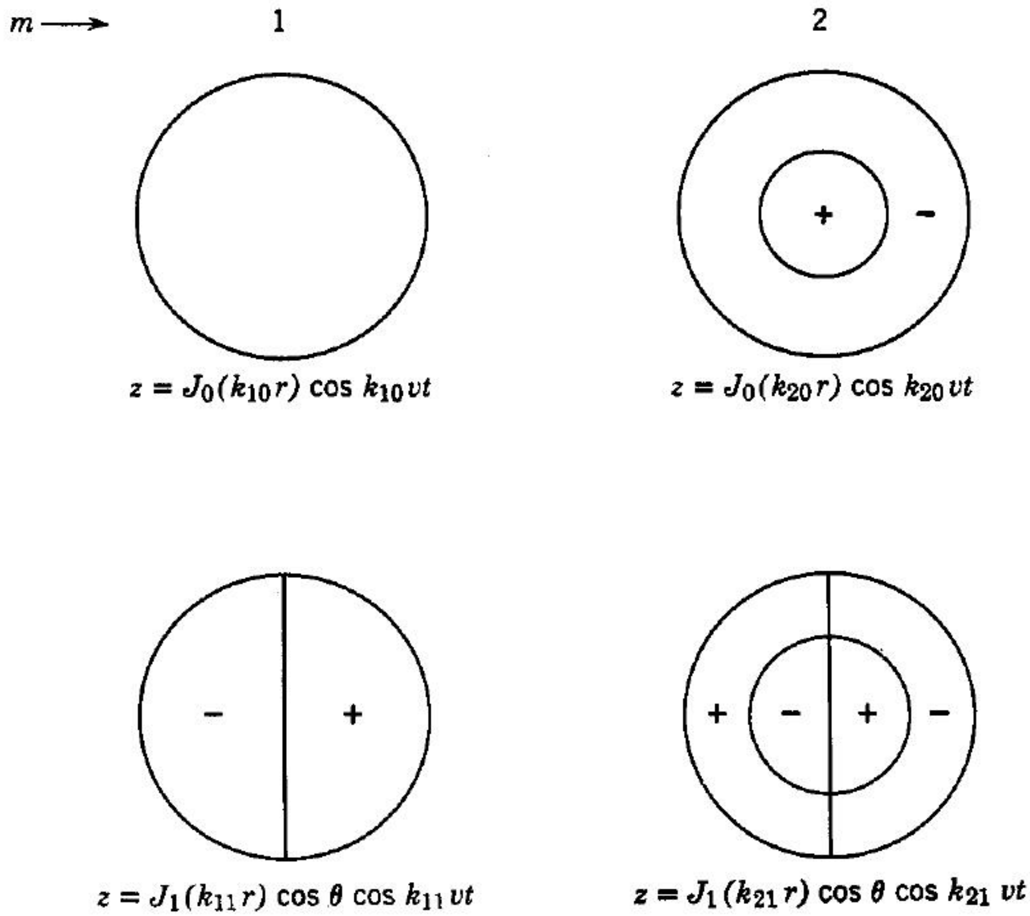
其中$R(r)=J_n(Kr)$，$\Theta(\theta)=sinn\theta cosn\theta$，$T(t)=sinKvt$，$cosKvt$。就像第5节一样，n是整数。为求K的可能值，由圆膜固定在$r=a$的刚性范围的边界条件，对所有θ,t，必有$r=a$时，$z=0$。因此$J_n(Ka)=0$，K_a的可能值是J_n的零点。如第5节中，设$k=Ka$，$K=k/a$，那么每个J_n的可能值k是k_{mn}，J_n的零点。解z为

$$z=J_n(kr/a)\begin{Bmatrix}\sin n\theta\\ \cos n\theta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sin kvt/a\\ \cos kvt/a\end{Bmatrix} \tag{6.6}$$

对于给定的初始位移或膜的速度， z是双级数，类似（5.17）圆柱体温度。这里研究不同的简正常振动模式和它们的频率。回想一下，振动弦（第4节），每个n给出一个不同的频率和一个相应的简正振动模式（图4.2）。弦的频率是$v_1=nv/(2l)$;所有频率都是基频$v_1=v/(2l)$的整数倍。对于圆形膜，频率是[依(6.6)]

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{kv}{2\pi a}$$

k 的可能值是贝塞尔函数的零点 k_{mn}。k_{mn}的每个值都给出了一个频率$v_{mn}=k_{mn}v/(2\pi a)$， 得到双无限的特性频集和相应的简正振动模式。所有这些频率都是不同的，不是基频的整数倍，而弦振动是整数倍。这就是鼓的音乐性不如小提琴的原因。用计算机或查表， 可计算k_{mn}（问题2）， 并求出基频非整数倍的频率，(对应于 k_{10}，J_0 的第一个零项。绘制对应于图4.2 中弦振动的圆膜简正振动模式图形(图 6.1)，（6.6）中的位移 z对应的函数（特征函数）。



为简单起见， 只使用了图6.1 中的 $cosncoskvt/a$ 解。与 k_{10} 对应的基振动模式，圆膜整体振动。

在k_{20}模式下，振动分两部分，如图所示，当+部分向上振动，-部分向下振动，反之亦然，它们之间静止状态。可以证明有这样一个圆（称为节点线）并求出其半径。$k_{20} > k_{10}$，圆$r = ak_{10}/k_{20}$是半径小于a的圆，是圆膜上的圆。对r，$J_0(k_{20}r/a) = J_0(k_{20}k_{10}/k_{20})) = J_0(k_{10}) = 0$，所以这个圆上的点是静止的。对于$k_{11}$模式，$cos\theta = 0$时$\theta = \pm\pi/2$，如图所示为正或负。以这种方式可以对任何简正模式绘图（问题1）。

在实验中很难获得物体振动的纯简正振动模式。在复杂振动会有这种节点的线，且容易观察到。洒在振动物体上的细沙会沿着没有振动的节线聚集，这是可以清楚看到的。

7 球体稳态温度

求半径a的球体内稳态温度，上半部球面初始温度100°，下半部分球面温度0°。在球体内部温度u满足拉普拉斯方程。球坐标拉普拉斯方程（见第10章，第9节）

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \quad (7.1)$$

按一般过程方程分离。设

$$u = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (7.2)$$

代入（7.1），两边乘以$r^2/R\Theta\Phi$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr}) + \frac{1}{\Theta}\frac{1}{sin\theta}\frac{d}{d\theta}(sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}) + \frac{1}{\Phi}\frac{1}{sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\phi} = 0 \quad (7.3)$$

（7.3）乘以$sin^2\theta$，最后一项就变了只有θ的函数，而其他项不包含θ，可得θ方程及其解：

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} == -m^2, \quad \Phi = \begin{cases} \sin m\phi, \\ \cos m\phi \end{cases} \quad (7.4)$$

分离常数须是负的，Φ为ϕ的周期函数，m须为整数，见（5.6）后的讨论方程（7.3）可写成

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr}) + \frac{1}{\Theta}\frac{1}{sin\theta}\frac{d}{d\theta}(sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} = 0 \quad (7.5)$$

第一项是r的函数，后两项是θ的函数，可得两个方程

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr}) = k \tag{7.6}$$

$$\frac{1}{sin\theta}\frac{d}{d\theta}(sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\Theta + k\Theta = 0 \tag{7.7}$$

方程(7.7)与第十二章问题10.2比较可见方程(7.7)是$k = l(l+1)$的关联勒让德函数。l须是整数，以使勒让德方程的解有限，这时$x = cos\theta = \pm 1$，$\theta = 0$或者π。对于关联勒让德函数的方程也一样。(7.7)的对应结果是k必须是两个连续整数的乘积，用$l(l+1)$代替k，l是整数。（7.7）的解是关联勒让德函数（见问题10.2，第12章）

$$\Theta = P_l^m(cos\theta) \tag{7.8}$$

在（7.6）中设$k = l(l+1)$，可以很容易地验证（问题5.11），（7.6）的解是

$$R = \begin{cases} r^l, \\ r^{-l-1} \end{cases} \tag{7.9}$$

由于只求球体内部温度，舍去r^{-l-1}的解，因为在原点处变得无限大。如果讨论水流量或静电势的相关问题，保留r^{-l-1}的解，舍去r^l，因为在无穷远处变得无穷大。

解的基函数是

$$u = r^l P_l^m(cos\theta) \begin{cases} \sin m\phi \\ \cos m\phi \end{cases} \tag{7.10}$$

函数$P_l^m(cos\theta)sinm\phi$ 和 $P_l^m(cos\theta)cosm\phi$称为球函数，通常表示为$Y_l^m(\theta,\phi)$，见16题。如果在$r=a$时，表面温度是θ和ϕ的函数，得到对l和m双求和级数。由于表面温度给定：高半球100^o，低半球0^o，温度独立于ϕ，在（7.10）中，须 $m=0$，$cosm\phi=1$。（7.10）的解减少到$r^lP_l(cos\theta)$。问题的解为以下基函数的级数：

$$u=\sum_{l=0}^{\infty}c_lr^lP_l(cos\theta) \tag{7.11}$$

当$r=a$时，用给定的温度来确定系数c_l，须

$$\begin{aligned} u_{r=a}&=\sum_{l=0}^{\infty}c_la^lP_l(cos\theta) \\ &=\begin{cases}100, & 0<\theta<\frac{\pi}{2},\text{即，}0<cos\theta<1,\\ 0, & \frac{\pi}{2}<\theta<\pi,\text{即，}\ -1<cos\theta<0\end{cases}\end{aligned} \tag{7.12}$$

（注意，这里x代表$cos\theta$，而不是坐标x）在第12章第9节中，将$f(x)$扩展为勒让德多项式，得：

$$u_{r=a}=\sum_{l=0}^{\infty}c_la^lP_l(x)=100f(x)$$

其中

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1<x<0,\\ 1, & 0<x<1\end{cases}$$

这里x代表$\cos\theta$,而不是坐标x

（7.13）系数c_l就是$f(x)$系数乘以$100/a^l$。将$c's$代入（7.11），得最终解：

$$f(x)=\frac{1}{2}P_0(x)+\frac{3}{4}P_1(x)-\frac{7}{16}P_3(x)+\frac{11}{32}P_5(x)+\cdots \tag{7.14}$$

$$\begin{aligned}u=&100[\frac{1}{2}P_0(cos\theta)+\frac{3}{4}\frac{r}{a}P_1(cos\theta)-\frac{7}{16}(\frac{r}{a})^3P_3(cos\theta)\\&+\frac{11}{32}(\frac{r}{a})^5P_5(cos\theta)+\cdots]\end{aligned} \tag{7.15}$$

我们可以对这个问题做不同的处理。请注意，到目前为止我们还没有提到我们使用的温标（摄氏温度，华氏度，绝对值，等等）。调整到任何温标都较容易做到。如果u是拉普拉斯方程$\nabla^2u=0$的解，或热流方程$\nabla^2u=(1/\alpha^2)\partial u/\partial t$的解，对任意常数$C$，$u+C$和$Cu$也是解。如果（7.15）的解增加到$50^\circ$，球体内部的温度分布，球面的上半部分$150^o$,下半部分$50^\circ$。如果我们把（7.15）解乘以2，就得到球面温度$200^o$和$0^o$的温度分布，以此类推。

赤道面$\theta=\pi/2$或$cos\theta=0$，其温度由方程(7.11)(7.15)给出，是介于顶部和底部球面温度，勒让德级数，如傅里叶级数一样收敛展开函数区间中点，可依此展开得到赤道面的解。为了解决给定曲面和赤道平面温度的半球温度问题，只需要在适当的位置适当的温度下给出所需的赤道平面平均温度。当赤道面温度为0°，这相当于定义函数$f(x)$在(7.13)上$(-1,0)$，使其成为一个奇函数。