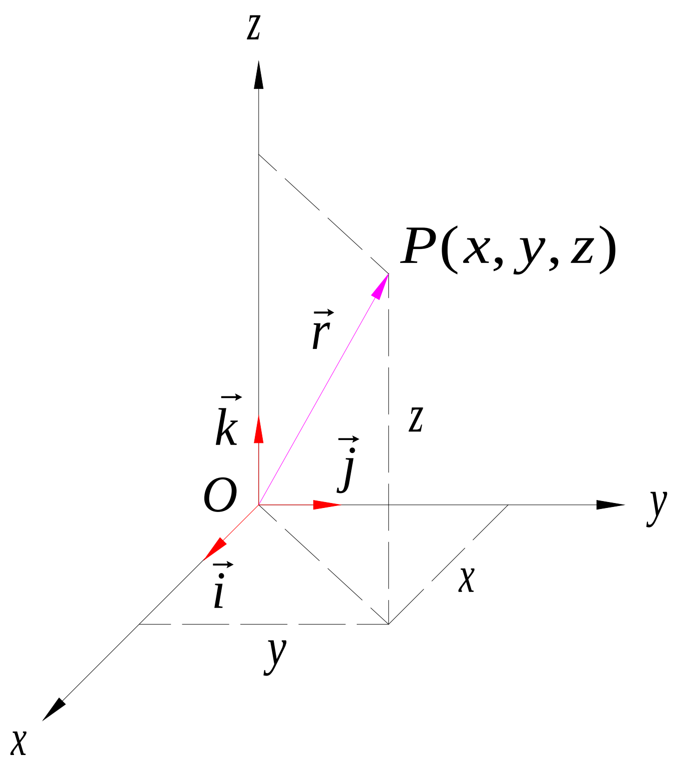
理论力学复习

余熳烨

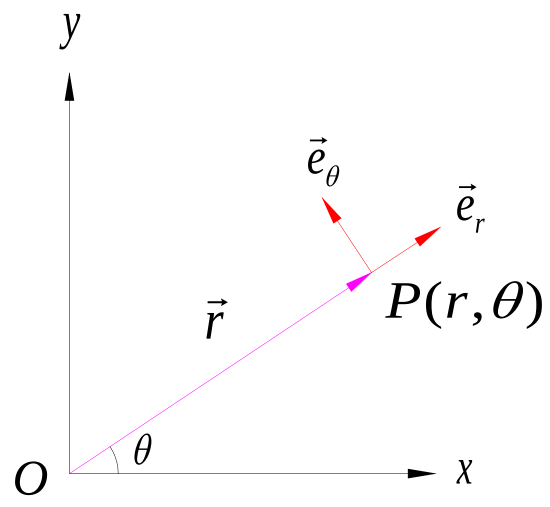
质点的运动

(1) 直角坐标系



坐标变量	单位矢量	位矢表达式	位矢长度
(x,y,z)	$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$	$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$	$\lvert\vec{r}\rvert=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

(2) 平面极坐标系



坐标变量	单位矢量	位矢表达式	位矢长度
(r,θ)	$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$	$\vec{r} = r\vec{e}_r$	$\lvert\vec{r}\rvert = r$

1. 速度、加速度的各种坐标表示及相应动力学方程

	坐标	速度	加速度	动力学方程
直角坐标	$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$	$v_x=\dot{x}$ $v_y=\dot{y}$ $v_z=\dot{z}$	$a_x=\dot{v}_x=\ddot{x}$ $a_y=\dot{v}_y=\ddot{y}$ $a_z=\dot{v}_z=\ddot{z}$	$ma_x=F_x$ $ma_y=F_y$ $ma_z=F_z$
极坐标	$\vec{r}=r\vec{i}$	$v_r=\dot{r}$ $v_\theta=r\dot{\theta}$	$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$ $a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}$	$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=F_r$ $m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})=F_\theta$
自然坐标	$s=s(t)$	$\vec{v}=v\vec{i}=\frac{ds}{dt}\vec{i}$	$a_\tau=\frac{dv}{dt}$ $a_n=v^2/\rho$	$m\dot{v}=F_\tau$ $mv^2/\rho=F_n$ $0=F_b$

质点运动学问题的解

一、三种类型

1、已知 $\vec{r}=\vec{r}(t)$,求 $\vec{v},\vec{a}$ 微分、导数

2、已知 $\vec{a}=\vec{a}(t),\vec{a}=\vec{a}(\vec{v}),\ \vec{a}=\vec{a}(\vec{r})$

求 $\vec{v},\vec{r}$ 积分，解微分方程

（1） 已知 $a=f(v)\rightarrow\dfrac{dv}{dt}=f(v)$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{f(v)}=\int_{t_0}^{t}dt\rightarrow v(t)\rightarrow x(t)$$

（2）已知 $a = f(x) \rightarrow \dfrac{dv}{dt} = f(x)$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} = f(x) \rightarrow \int_{v_0}^{v} v dv = \int_{x_0}^{x} f(x) dx$$

$$v = \varphi(x) \rightarrow x = x(t)$$

（3）已知 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ，求轨道、ρ

$$a_n \rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_n}$$

[**例**] 设质点P沿螺旋线

$$x = 2\sin 4t \quad y = 2\cos 4t \quad z = 4t$$

运动，试求速度、加速度及轨道的曲率半径。

解:

$$\dot{x} = 8\cos 4t, \quad \dot{y} = -8\sin 4t \quad \dot{z} = 4$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = 4\sqrt{5}$$

$$\ddot{x} = -32\sin 4t, \quad \ddot{y} = -32\cos 4t, \quad \ddot{z} = 0$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = 32$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$$

$$a_n = a = 32$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{5}{2}$$

质点运动微分方程

将动力学基本方程用微分形式表示所得到的方程称为质点运动微分方程。

1.矢径形式的质点运动微分方程

由动力学基本方程： $m\vec{a}=\vec{F}$

由运动学可知： $$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

于是可得： $m\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}$ 或 $m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}$

2.直角坐标形式的质点运动微分方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x \qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y \qquad m\frac{d^2z}{dt^2}=F_z$$

3、自然坐标形式的质点运动微分方程

$$m\frac{dv}{dt}=F_{\tau} \qquad m\frac{v^2}{\rho}=F_n \qquad 0=F_b$$

或

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=F_{\tau} \qquad m\frac{\dot{s}^2}{\rho}=F_n \qquad 0=F_b$$

4、用质点运动微分方程解题

第一类问题：已知质点的运动，求作用在质点上的力。

这类问题其实质可归结为数学上的**求导问题**。

第二类问题：已知作用在质点上的力，求质点的运动。

这类问题其实质可归结为数学上的解微分方程或**求积分问题**。

质点组

- **质心位置**

$$\vec{r}_c=\frac{\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N}m_i}=\frac{\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{r}_i}{m}$$

根据 $\vec{r}_i=\vec{r}_i-\vec{r}_c+\vec{r}_c=\vec{r}_i'+\vec{r}_c$ **定义，可得出以下结论：**

（1）质点组中各质点相对于质心的质量一次矩之和恒等于零

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{r}_i'=\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{r}_i-\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{r}_c=0$$

（2）满足叠加原理

$$r_c=\frac{\int r\,dm}{m}=\frac{\int_V r\rho\,dV}{\int_V \rho\,dV}$$

动量定理

- 质点的动量：质点的质量与速度的乘积 $m\vec{v}$
- 质点组的动量：$\vec{p}=\sum m_i\vec{v}_i=M\vec{v}_c$
- 刚体的动量：与质点组一样表示为刚体随质心一起整体运动的动量
- 质点系的动量定理 $$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt}=\sum\vec{F}_i^{(e)}}$$
- 质心运动定理

$$\boxed{m\vec{a}_C=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(e)}}$$

动量定理

- 质心运动定理

$$\boxed{m\vec{a}_C = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(e)}}$$

$$\vec{a}_c = \frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2}$$

在一般情况下，建立坐标系后，质心坐标是比较容易写出的，所以通常应用此类方法求解较容易

若 $\sum F_i = 0$ ，初始静止，所以质心不变，即r_c=常矢量，又称质心位置不变原理，利用此式可以直接求出物系中各个物体质心之间的运动关系

动量矩（角动量）

- 质点对点O的动量矩 $\vec{L}_o = \vec{r} \times m\vec{v}$ 矢量
- 质点对轴Z的动量矩 $L_z = L_o(m\vec{v}_{xy})$ 代数量
- 质点组对点O的动量矩

$$L = \sum_{i=1}^{N} r_i \times m_i v_i = \sum_{i=1}^{N} r_i \times m_i \dot{r}_i$$

质点组随质心整体运动对定点的角动量

$$= \sum_{i=1}^{N} (r_i' + r_c) \times m_i (\dot{r}_i' + \dot{r}_c)$$

相对质心运动对质心的角动量

$$= \sum_{i=1}^{N} r_i' \times m_i \dot{r}_i' + r_c \times m\dot{r}_c = L_c' + L_c$$

动量矩（角动量）

- 平动刚体的动量矩 $L_z = L_z(m\vec{v}_c)$
  - 平动刚体对固定轴的动量矩等于刚体质心的动量对该轴的动量矩
- 定轴转动刚体的动量矩 $L_z = J_z \cdot \omega$
  - 定轴转动刚体 对转轴的动量矩等于刚体对该轴转动惯量与角速度的乘积
- 平面运动刚体的动量矩 $L_z = L_z(m\vec{v}_c) + J_c \cdot \omega$
  - 平面运动刚体对垂直于质量对称平面的的固定轴的动量矩，等于刚体随同质心作平动时质心的动量对该轴的动量矩与绕质心轴作转动时的动量矩之和

动量矩（角动量）

- 质点的动量矩定理

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

质点对某一定点的角动量的时间变化率等于作用于质点的外力对同一定点的力矩

- 质点组的动量矩定理

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i$$

动能

- 质点的动能 $T=\frac{1}{2}mv^2$
- 质点组的动能 $T=\frac{1}{2}m\dot{r}_c^2+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{r}_i'^2=T_c+\sum_{i=1}^{N}T_i$

质点组的总动能可分解为质点组随质心运动的动能和质点组相对于质心运动的动能，这个称为柯尼希定理。

- 动能定理

$$\boxed{T_2-T_1=\sum w_i}$$

动能

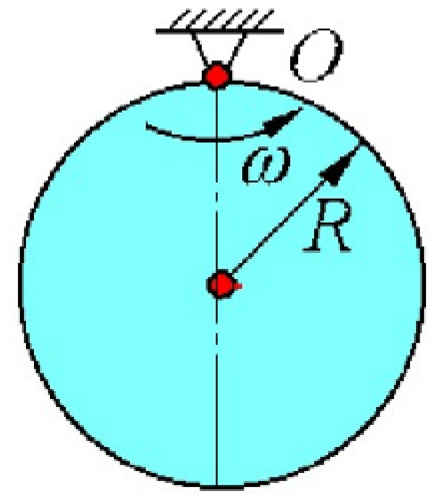
- 平移刚体的动能 $T=\frac{1}{2}mv^2$
- 定轴转动刚体的动能

$$\boxed{T=\frac{1}{2}J_z\omega^2}$$

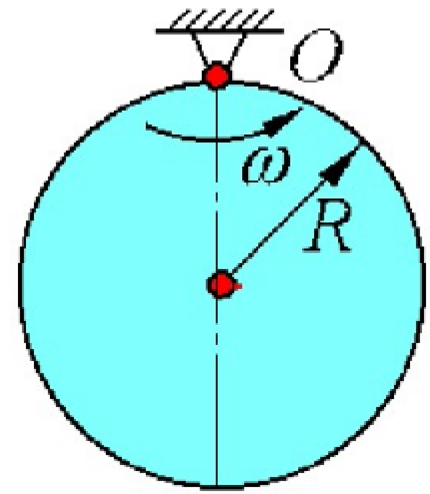
- 平面运动刚体的动能

$$\boxed{T=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2}$$

- 均质圆盘质量为m，计算动量、对O点的动量矩、动能



- 均质圆盘质量为m，计算动量、对O点的动量矩、动能

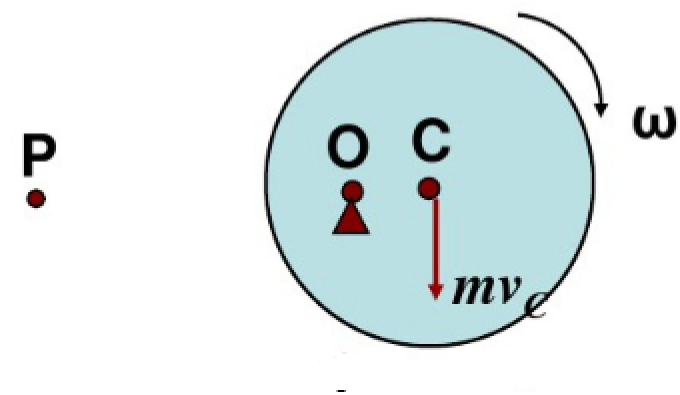


$$p = mR\omega$$

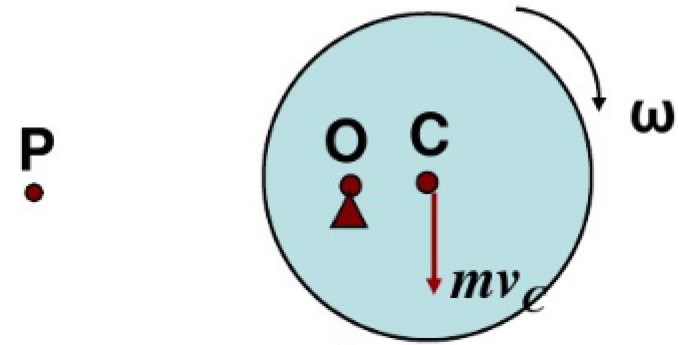
$$L_O = J_O\omega = \frac{3}{2}mR^2\omega$$

$$T = \frac{1}{2}J_O\omega^2 = \frac{3}{4}mR^2\omega^2$$

- **几何条件已知，求刚体对O、P、C三点的动量矩**



- 几何条件已知，求刚体对O、P、C三点的动量矩



$$L_C = J_C\omega = \frac{1}{2}mR^2\omega$$ 顺时针

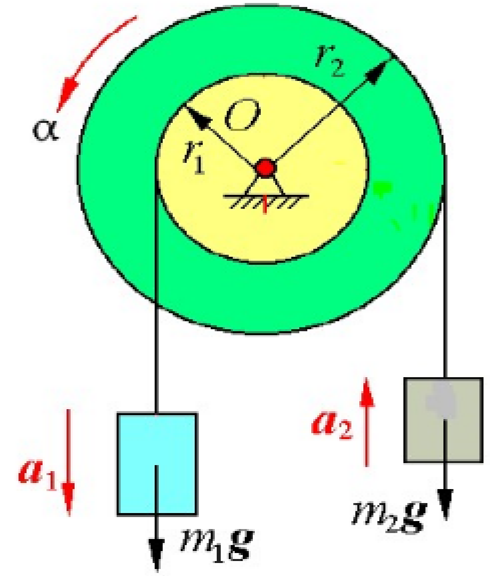
$$\boxed{\begin{aligned} &L_O = J_O\omega = (J_C + m\times OC^2)\omega \quad \text{顺时针} \\ &L_O = L_C + L_O(m\vec{v}_C) = J_C\omega + mv_C\times CO \end{aligned}}$$

$$L_P = L_C + L_P(m\vec{v}_C) = J_C\omega + mv_C\times CP$$ 顺时针

[例] 质量为m_1和m_2的两重物，分别挂在两条绳子上，绳分别绕在半径为r_1和r_2并装在同一轴的两鼓轮上，已知两鼓轮对转轴O的转动惯量为J，两鼓轮重P，系统在重力作用下发生运动，

（1）求鼓轮的角加速度和O处约束力。

（2）若系统由静止开始运动，当重物m_1下降h高度时，求鼓轮的角速度。



$$\alpha=\frac{m_1r_1-m_2r_2}{m_1r_1^2+m_2r_2^2+J}g$$

约束力

$$0=X_O$$

$$-m_1a_1+m_2a_2=Y_O-P-m_1g-m_2g$$

$$\omega=\sqrt{\frac{2(m_1g-m_2gr_2/r_1)h}{m_1r_1^2+m_2r_2^2+J}}$$

保守力

F(r)为保守力的充要条件： $\nabla \times \vec{F} = 0$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k} = 0$$

【例】设作用在质点上的力是

$$F_X = x + 2y + z + 5, F_y = 2x + y + z, F_z = x + y + z - 6$$

沿此质点沿螺旋线 $x = \cos\theta, y = \sin\theta, z = 7\theta$，运行自 θ=0至 θ=2π时，力对质点所做的功。

解：先验证力是否为保守力

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 2 - 2 = 0, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 1 - 1 = 0, \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 1 - 1 = 0$$

根据初始条件：$\theta = 0$时，$x = 1, y = 0, z = 0,$

$\theta = 2\pi$时，$x = 1, y = 0, z = 14\pi$

$$w = \int_{(1,0,0)}^{(1,0,14\pi)} F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$= \int_{(1,0,0)}^{(1,0,14\pi)} (x + 2y + z + 5)dx + (2x + y + z)dy + (x + y + z - 6)dz$$

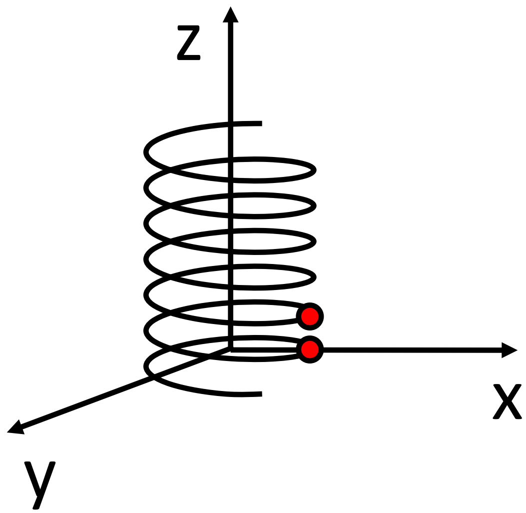
$$= \int_{(1,0,0)}^{(1,0,14\pi)} d\left(2xy + xz + yz + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2 + 5x - 6z\right)$$

$$= \left(2xy + xz + yz + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2 + 5x - 6z\right)\Big|_{(1,0,0)}^{(1,0,14\pi)}$$

$$= 98\pi^2 - 70\pi$$

解法二：选直线路径积分

$$W = \int_0^{14\pi} F_z dz = \int_0^{14\pi} (z-5) dz = 98\pi^2 - 70\pi$$



刚体运动

- 刚体运动的类型
- 刚体运动的分解

$$\text{分解为}\begin{cases}\text{随基点的平动（平动规律与基点的选择有关）}\\ \text{绕基点的转动（转动规律与基点的选择无关）}\end{cases}$$

- 基点
  - 可以选择任一点，通常是选择运动状态已知的点
- 求任意点上的速度和加速度
  - 基点法
  - 速度瞬心法

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r}_A}{dt}+\frac{d\vec{r}\,'}{dt}=\vec{v}_A+\vec{\omega}\times\vec{r}\,'$$

刚体上任意点的速度=刚体随基点的平动速度+绕基点的转动速度

- 求刚体上点的运动是一个普遍问题，此时要注意刚体做什么运动
  - 平动刚体上的点：各点均一样，借点
  - 定轴转动刚体上的点：圆周运动公式
  - 平面运动刚体上的点：速度基点法和瞬心法

刚体运动的动力学

运动形式	平动	定轴转动		平面运动
动量	$M\vec{V}_c$	$M\vec{V}_c$		$M\vec{V}_c$
动量矩	$\vec{r}_c \times M\vec{V}_c$ 对任意点	$J_O\omega$（对转轴）	$J_C\omega$（对质心）	$J_C\omega$（对质心）
		其他点：主矩定理		其它：主矩定理
动能	$\frac{1}{2}M\vec{V}_c^2$	$\frac{1}{2}J_O\omega^2$ （O为转轴）		$\frac{1}{2}mV_c^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2$
动力学方程	$\sum\vec{F}=m\vec{a}_c$	$\sum M_O(F)=J_O\alpha$ （O为转轴）		$\sum\vec{F}=m\vec{a}_c$ $\sum M_C(F)=J_C\alpha$

刚体的角动量与惯量张量

$$\vec{L}=\begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}=\vec{\vec{J}}\cdot\vec{\omega}$$

$$\boxed{\vec{\vec{J}}=\begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}}$$

- 惯量主轴
- 与惯量主轴相关的惯量积等于零，利用此特性，可轻易找出具有对称性均匀刚体的惯量主轴。
- （1）对称轴
- （2）对称面的法线

刚体的转动惯量

$$J=\sum_i m_i\rho_i^2$$

$$L_l=\vec{e}_l\cdot\vec{L}=J\omega$$

$$J=\int_V\rho^2dm=\int_V\rho^2\sigma dV$$

$$J=\vec{e}_l\cdot\vec{J}\cdot\vec{e}_l$$

$$=(\alpha\ \ \beta\ \ \gamma)\begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$$

$$=J_{xx}\alpha^2+J_{yy}\beta^2+J_{zz}\gamma^2-2J_{yz}\beta\gamma-2J_{zx}\gamma\alpha-2J_{xy}\alpha\beta$$

- **平行轴定理** $\boxed{J=J_c+md^2}$
- **刚体绕定点0转动的动能为** $\boxed{T_0=\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L}=\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{J}\cdot\vec{\omega}=\frac{1}{2}J_\omega\omega^2}$

分析力学

- 约束类型、自由度
- 虚位移
  - 与实位移的区别
- 虚功原理

虚功原理：受理想约束的力学系统，保持平衡的必要条件是作用于该系统的全部主动力在任意虚位移中的虚功之和为零

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \qquad \delta W = \sum_{\alpha=1}^{s} Q_\alpha \delta q_\alpha$$

$$= Q_1 q_1 + Q_2 q_2 + \cdots + Q_s q_s = 0$$

2、虚位移

定义：质点在满足当时约束条件下一切可能的无限小位移，称为该时刻质点的虚位移.

- “当时”，在某时刻讨论问题. 即虚位移是在一确定时刻发生的，是不需要时间的.
- “一切可能”，虚位移包括一切可能的无限小位移，故有多个甚至无穷多个 .
- “无限小”，虚位移是一级无穷小位移 .
- 虚位移通常用$\delta\vec{r}$表示，在直角坐标系中，

$$\delta\vec{r} = \delta x\vec{i} + \delta y\vec{j} + \delta z\vec{k}$$

$\delta x, \delta y, \delta z$是$\delta\vec{r}$在坐标轴上的投影，称为坐标的变分

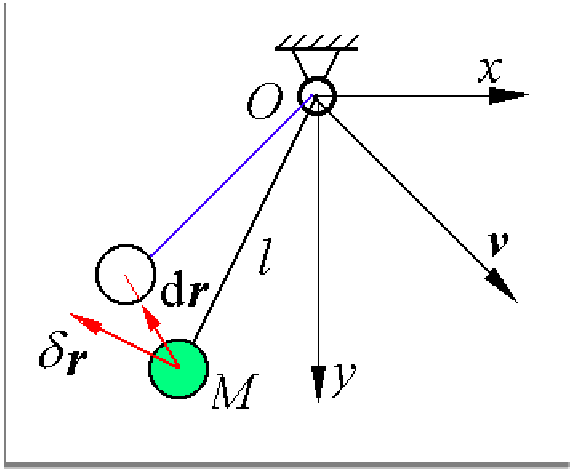
虚位移与真正运动时发生的实位移不同

① 实位移是在一定的力作用下和给定的初始条件下运动而实际发生的；虚位移是在约束容许的条件下可能发生的。

② 实位移具有确定的方向，可能是微小值，也可能是有限值；虚位移则是微小位移，视约束情况可能有几种不同的方向。

③ 实位移是在一定的时间内发生的；虚位移只是纯几何的概念，与时间无关，静止的质点系没有实位移，但可有虚位移。

在定常约束下，微小的实位移必 然是虚位移之一。而在非定常约束下，微小实位移不再是虚位移之一。



分析力学

- **达朗贝尔原理**

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

在理想约束下，运动的每一瞬间系统所受主动力和逆效力的虚功之和为零

- **拉格朗日方程**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \cdots s)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1,2,\cdots,s)$$

分析力学

- 循环坐标，广义动量积分

- 勒让德变换

新函数等于不要的变量**乘以**原函数对该变量的**偏微商**，再**减去**原函数

——勒让德变换的基本法则

- 哈密顿函数&正则方程

$$\boxed{H(p,q,t) = -L + \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha}$$

$$\begin{cases} \dot{q}_\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha} \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, s)$$

利用拉格朗日方程解题的步骤及注意事项

步骤：

1、确定系统的自由度并选择合适的广义坐标

2、利用广义坐标表示出系统的动能；

3、确定每个质点上的主动力，判断是否是保守系统

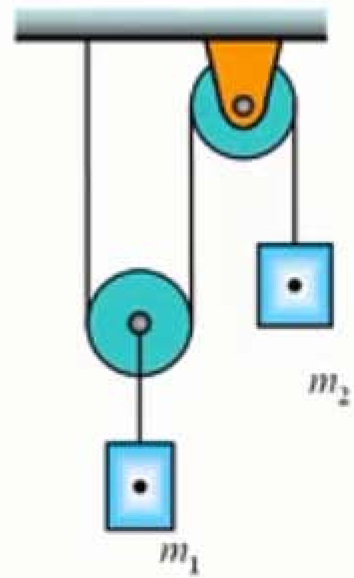
4、对于保守系统，利用广义坐标表示系统的势能，写出系统的动能

5、对于非保守系统，计算每个广义坐标对应的广义力

6、将动势或者是动能和广义力分别代入保守系统的拉格朗日方程或一般形式的拉格朗日方程进行计算

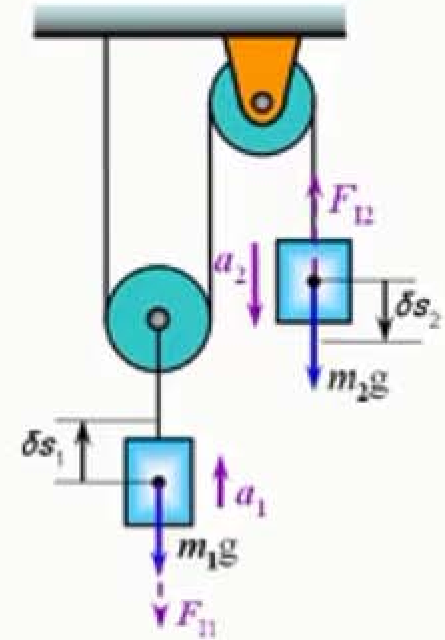
例8 已知：滑轮系统中，动滑轮上悬挂着质量为m_1的重物，绳子绕过定滑轮后悬挂着质量为m_2的重物。设滑轮和绳子的重量以及轮轴摩擦都忽略不计。

求：质量为m_2的物体下降的加速度。



例8 已知：滑轮系统中，动滑轮上悬挂着质量为m_1的重物，绳子绕过定滑轮后悬挂着质量为m_2的重物。设滑轮和绳子的重量以及轮轴摩擦都忽略不计。

求：质量为m_2的物体下降的加速度。



解：取整个滑轮系统为研究对象，分析主动力，

分析运动，虚加惯性力：

$$F_{I1}=m_1a_1\text{，}F_{I2}=m_2a_2$$

施加虚位移。

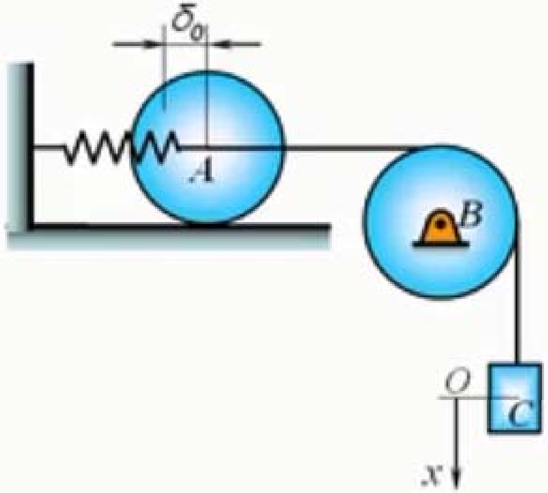
由动力学普遍方程，所有主动力和惯性力在任意虚位移上所作的虚功之和等于零，得到：

$$-(m_1g+F_{I1})\delta s_1+(m_2g-F_{I2})\delta s_2=0$$

代入F_{I1}、F_{I2}表达式，和 δs_1和δs_2之间的关系$\delta s_1=\delta s_2/2$，得到：

$$\boxed{a_2=\frac{4m_2-2m_1}{4m_2+m_1}g}$$

例 1 质量为m_1的物块C以细绳跨过定滑轮B联于点A，A，B两轮皆为均质圆盘，半径为R，质量为m_2，弹簧刚度为k，质量不计。



求：当弹簧较软，在细绳能始终保持张紧的条件此系统的运动微分方程。

解：此系统具有一个自由度，以物块平衡位置为原点，取x为广义坐标。以平衡位置为重力零势能点。

取弹簧原长处为弹性力零势能点。

系统在任意位置x处的势能为：

$$V=\frac{1}{2}k(\delta_0+x)^2-m_1gx$$ 其中δ_0为平衡位置处弹簧的伸长

系统的动能为：

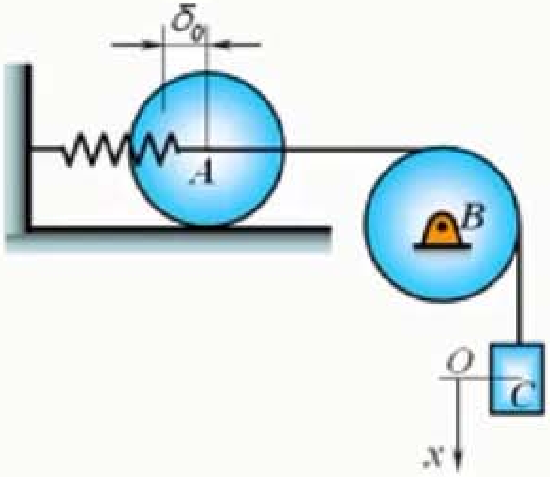
$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m_2R^2(\frac{\dot{x}}{R})^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m_2R^2(\frac{\dot{x}}{R})^2=(m_2+\frac{1}{2}m_1)\dot{x}^2$$

系统的主动力为有势力，为保守系统，系统的拉格朗日函数为：

$$L=T-V=(m_2+\frac{1}{2}m_1)\dot{x}^2-\frac{1}{2}k(\delta_0+x)^2+m_1gx$$

代入保守系统的拉格朗日方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0$$



得 $(2m_2+m_1)\ddot{x}+k\delta_0+kx-m_1g=0$

注意 $k\delta_0=m_1g$

则系统的运动微分方程为:

$$(2m_2+m_1)\ddot{x}+kx=0$$

这是自由振动的微分方程，其振动周期为:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{2m_2+m_1}{k}}$$

运用拉格朗日方程求解完整约束系统的动力学问题，特别是保守系统的动力学问题，不比分析受力，也不用分析运动，只需用广义坐标表示出系统的动能和势能，形式简洁，便于计算，应用非常简单方便