1 贝塞尔方程标准形式是

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0, \tag{12.1}$$

其中p是常数，但不一定是整数。p称为贝塞尔方程解y的阶数。

2 贝塞尔方程一般幂级数解的过程

3 第一类p阶的贝塞尔函数$J_p(x)$

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+p)} (\frac{x}{2})^{2n+p}$$

4 N_p或Y_p称为第二类贝塞尔函数。

$$N_p(x) = Y_p(x) = \frac{cos(\pi p)J_p(x) - J_{-p}(x)}{sin\pi p}$$

5 贝塞尔函数图形

6 可类似贝塞尔函数

$$y'' + \frac{1-2a}{x}y' + [(bcx^{c-1})^2 + \frac{a^2 - p^2c^2}{x^2}]y = 0 \tag{16.1}$$

有解

$$y = x^a Z_p(bx^c) \tag{16.2}$$

Z代表J或N，或其线性组合，a, b, c, p是常数。

6 汉克尔函数或第三类贝塞尔函数

$$H_p^{(1)}(x) = J_p(x) + iN_p(x),$$
$$H_p^{(2)}(x) = J_p(x) - iN_p(x).$$

可对比$(e^{\pm ix} = cosx \pm isinx.)$

7 修正或双曲贝塞尔函数

方程

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + p^2)y = 0$$

两个独立解为

$$I_p(x) = i^{-p} J_p(ix),$$
$$K_p(x) = \frac{\pi}{2} i^{p+1} H_p^{(1)}(ix).$$

8 球贝塞尔函数，开尔文函数

9 贝塞尔函数的正交性

10 贝塞尔函数python计算程序

广义幂级数

微分方程的解可能不是幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,而是以下的情况

（a） 例如，包含x的负幂

$$y = \frac{cosx}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2!} + \frac{x^2}{4!} - ...$$

（b）例如，x的分数次方作为因数

$$y = \sqrt{x}\, sinx = x^{1/2}(x - \frac{x^3}{3!} + ...)$$

这两种情况及其他,参见第21节,包含一种级数形式

$$y = x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} \tag{11.1}$$

其中s为适合问题的量，可以是正数，负数，也可以是分数，甚至可以是复数，不过现在不考虑复数情况。$a_0 x^s$是级数第一项，设a_0不为零。级数(11.1)称为广义幂级数。我们将考虑一些微分方程，这些方程可以假定（11.1）形式的级数解求解。这种微分方程解法称弗罗比尼乌斯法。

例1. 为了说明这种方法，解方程

$$x^2 y'' + 4xy' + (x^2 + 2)y = 0 \tag{11.2}$$

从（11.1）有

$$
\begin{aligned}
y &= a_0x^s + a_1x^{s+1} + a_2x^{s+2} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \\
y' &= sa_0x^{s-1} + (s+1)a_1x^s + (s+2)a_2x^{s+1} + ... \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_nx^{n+s-1} \qquad (11.3) \\
y'' &= s(s-1)a_0x^{s-2} + (s+1)sa_1x^{s-1} + (s+2)(s+1)a_2x^s + ... \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_nx^{n+s-2}
\end{aligned}
$$

将(11.3)代入(11.2)，对x幂列表。就像解勒让德方程一样

	x^s	x^{s+1}	x^{s+2}	$\ldots\ x^{s+n}$	
x^2y''	$s(s-1)a_0$	$(s+1)sa_1$	$(s+2)(s+1)a_2$	$(n+s)(n+s-1)a_n$	
$4xy'$	$4sa_0$	$4(s+1)a_1$	$4(s+2)a_2$	$4(n+s)a_n$	
x^2y			a_0	a_{n-2}	
$2y$	$2a_0$	$2a_1$	$2a_2$	$2a_n$	

x幂次的所有系数必为0，从x^s的系数，得$(s^2+3s+2)a_0=0$,由假设$a_0 \neq 0$，有

$$s^2+3s+2=0 \qquad (11.4)$$

此s方程称指示方程，解得

$$s=-2, s=-1.$$

求s =- 2和s = -1时的两个独立解，这两个独立解的线性组合即为方程的通解。就像Asinx +Bcosx是y’’ + y = 0的通解一样。

例2 对于$s=-1$，从表中x^{s+1}得出系数$a_1=0$。从x^{s+2}列开始，可以使用上一列给出的一般公式。使用通式时要注意表中前两列不包含a_{n-2}项，(第13和14题)。对s =- 1，在通列中有

$$a_n[(n-1)(n+2)+2]=-a_{n-2}$$

$$a_n=\frac{-a_{n-2}}{n(n+1)} \quad n \geq 2$$

因$a_1=0$，a所有奇数项都等于 0。对偶数项

$$a_2=-\frac{a_0}{3!},a_4=\frac{a_0}{5!},a_6=-\frac{a_0}{7!},\ldots$$

所以方程的解是

$$y=a_0x^{-1}-\frac{a_0}{3!}x+\frac{a_0}{5!}x^3+\ldots\quad=a_0x^{-2}(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots)=\frac{a_0sinx}{x^2}$$

贝塞尔函数

与勒让德方程一样，贝塞尔方程也广为关注。贝塞尔函数的资料很多，在计算机程序和参考文献中可找到大量的公式、图形和数值。可以认为贝塞尔函数是带阻尼的正弦和余弦函数。
方程$y''=-n^2y$代替幂级数解是基本三角函数，sinnx和cosnx，贝塞尔函数与此一样，不会比三角函数稍难或奇怪。像正弦和余弦函数一样，贝塞尔函数是微分方程的解，可用级数表示，可画出图形，与三角恒等式一样有很多公式。科学相关专业的学生感兴趣的是应用。贝塞尔函数与电、热、流体力学、弹性、波动、量子力学等方面的问题相关，从这些问题可大致的了解贝塞尔函数的应用情况。贝塞尔函数涉及圆柱对称，也称为圆柱函数。长度稳定增加的钟摆的运动，柔性链的小振动，铁路过渡曲线，垂直钢索或钢梁的稳定性，光学中的菲涅耳积分，导体中的电流分布，圆弧的傅里叶级数。我们稍后将讨论其中一些应用程序(参见第18节和第13章第5和6节)。

贝塞尔方程

第一类贝塞尔函数

贝塞尔方程标准形式是

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0, \tag{12.1}$$

其中p是常数，但不一定是整数。p称为贝塞尔方程解y的阶数。可验证$x(xy')'=x^2y''+xy'$，因此(12.1)可写成更简单的形式

$$x(xy')'+(x^2-p^2)y=0 \tag{12.2}$$

(12.2)的一般幂级数解与(11.2)解法相同。事实上，(11.2)即为贝塞尔方程的一种，见第16.1和17.1题。设级数解中y的一般项和导数为：

$$
\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} \\
y' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s) x^{n+s-1} \\
xy' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s) x^{n+s} \\
(xy')' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s)^2 x^{n+s-1} \\
x(xy')' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s)^2 x^{n+s}
\end{aligned}
\tag{12.3}
$$

把(12.3)代入(12.2)，x幂的系数列表

	x^s	x^{s+1}	x^{s+2}	$\ldots$	x^{s+n}
$x(xy')'$	$s^2 a_0$	$(1+s)^2 a^1$	$(2+s)^2 a_2$		$(n+s)^2 a_n$
$x^2 y$			a_0		a_{n-2}
$-p^2 y$	$-p^2 a_0$	$-p^2 a_1$	$-p^2 a_2$		$-p^2 a_n$

x^s的系数给出了指示方程和s的值

$$s^2 - p^2 = 0, s = \pm p.$$

x^{s+1}的系数是$a_1 = 0, x^{s+2}$的系数是a_0关联a_2的等项，也可以写出上一列的通式。

$$[(n+s)^2 - p^2] a_n + a_{n-2} = 0$$

或

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+s)^2 - p^2} \tag{12.4}$$

首先求出s = p的情况下的系数

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+p)^2 - p^2} = -\frac{a_{n-2}}{n^2+2np} = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2p)} \tag{12.5}$$

因为$a_1 = 0$，所有奇数项a都是0。对偶数项a，用$2n$代替n，从(12.5)得

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{2n(2n+2p)} = -\frac{a_{2n-2}}{2^2 n(n+p)} \tag{12.6}$$

系数的公式可以使用Γ函数符号简化，见11章,章节2到5，如(12.7)所示。$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$，有

$$\begin{aligned}
&\Gamma(p+2) = (p+1)\Gamma(p+1), \\
&\Gamma(p+3) = (p+2)\Gamma(p+2) = (p+2)(p+1)\Gamma(p+1)
\end{aligned}$$

等，从(12.6)可求得

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{a_0}{2^2(1+p)} = -\frac{a_0\Gamma(1+p)}{2^2\Gamma(2+p)}, \\
a_4 &= -\frac{-a_2}{2^3(2+p)} = \frac{a_0}{2!2^4(1+p)(2+p)} = \frac{a_0\Gamma(1+p)}{2!2^4\Gamma(3+p)}, \\
a_6 &= --\frac{a_4}{3!2(3+p)} = -\frac{a_0}{3!2^6(1+p)(2+p)(3+p)} = -\frac{a_0\Gamma(1+p)}{3!2^6\Gamma(4+p)}
\end{aligned} \tag{12.7}$$

等等。则$s = p$时级数解为

$$\begin{aligned}
y &= a_0 x^p [\frac{1}{\Gamma(1+p)} - \frac{1}{\Gamma(2+p)}(\frac{x}{2})^2 + \frac{1}{2!\Gamma(3+p)}(\frac{x}{2})^2 - \frac{1}{3!\Gamma(4+p)}(\frac{x}{2})^2 + ...] \\
&= a_0 2^p (\frac{x}{2})^p \Gamma(1+p) [\frac{1}{\Gamma(1)\Gamma(1+p)} - \frac{1}{\Gamma(2)\Gamma(2+p)}(\frac{x}{2})^2 \\
&+ \frac{1}{\Gamma(3)\Gamma(3+p)}(\frac{x}{2})^4 - \frac{1}{\Gamma(4)\Gamma(4+p)}(\frac{x}{2})^6 + ...]
\end{aligned} \tag{12.8}$$

在前面两项插入$\Gamma(1)$和$\Gamma(2)$，$x^p = 2^p(\frac{x}{2})^p$,使级数更一致。
设

$$a_0 = \frac{1}{2p\Gamma(1+p)}，或\frac{1}{2^p p!}$$

y称为第一类p阶的贝塞尔函数，写成$J_p(x)$

$$J_p(x) = \frac{1}{\Gamma(1)\Gamma(1+p)}(\frac{x}{2})^p - \frac{1}{\Gamma(2)\Gamma(2+p)}(\frac{x}{2})^{2+p} + \frac{1}{\Gamma(3)\Gamma(3+p)}(\frac{x}{2})^{4+p} - \frac{1}{\Gamma(4)\Gamma(4+p)}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+p)}(\frac{x}{2})^{2n+p} \tag{12.9}$$

贝塞方程的一个解：

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+p)}(\frac{x}{2})^{2n+p}$$

- Γ函数

> $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx, p > 0.$
> $\Gamma(P+1) = p\Gamma(p), p > 0$
> $\Gamma(9/4) = \Gamma(5/4+1) = (5/4)\Gamma(5/4) = (5/4)(1/4)\Gamma(1/4); \Gamma(1/4) \div \Gamma(9/4) = 16/5.$
> $\Gamma(p) = \frac{1}{p}\Gamma(p+1), p < 0$

第二类贝塞尔函数

贝塞尔方程第二解

以上为贝塞尔方程两个解中$s = p$时的一个。下面求出$s = -p$的解。在(12.9)中用$-p$代替p。$s = -p$时的解通常写成J_{-p}。由(12.9)得

$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-p+1)}(\frac{x}{2})^{2n-p} \tag{13.1}$$

若p不是整数，$J_p(x)$是从x^p开始的级数，J_{-p}是从x^{-p}开始的级数，$J_p(x)$和$J_{-p}(x)$是两个独立解，它们的线性组合为通解。如果p是整数, J_p前几项是零, 因为分母的$\Gamma(n-p+1)$是负整数的Γ，是无限的。$J_{-p}(x)$、$J_p(x)$一样都由x_p项开始，可以证明(问题2)对整数p ，

$$J_{-p}(x) = (-1)^p J_p(x) \quad p\text{为整数} \tag{13.2}$$

因此当p是整数时，$J_{-p}(x)$不是独立解。这种情况下第二个解不是(11.1)的Frobenius级数，包含一个对数。$J_p(x)$在原点处是有限的，但第二个解是无限的，只适用于不包含原点的区域。

当p不是整数，$J_{-p}(x)$满足第二解条件，但通常使用$Jp(x)$和$J_{-p}(x)$的线性组合作为第二解。这很像$y'' + y = 0$方程中，用$sinx, (2\sin x - 3\cos x)$代替$sin(x), cos(x)$. 微分方程的通解是$sin(x), cosx$任意系数的线性组合。$Asinx + B(2sinx - 3cosx)$是与$c_1 sinx + c_2 cosx$一样的线

性组合。同样地，$J_p(x)$和$J_{-p}(x)$的线性组合可满足贝塞尔方程第二解，其线性组合称为诺伊曼函数或韦伯函数，用N_p或Y_p表示

$$N_p(x)=Y_p(x)=\frac{cos(\pi p)J_p(x)-J_{-p}(x)}{sin\pi p} \tag{13.3}$$

对整数p，上式是不定式$\frac{0}{0}$。对于任何$x\neq 0$，当p趋向于一个整数值时有极限，为第二解。这就是为什么使用（13.3）特别形式的原因，对任何p有效。N_p或Y_p称为第二类贝塞尔函数。贝塞尔方程(12.1)或(12.2)的通解可写成

$$y=AJ_p(x)+BN_p(x), \tag{13.4}$$

其中A和B是任意常数。

贝塞尔函数图形和零点

可依据计算机程序和参考书中计算贝塞尔函数的值，也可用计算机绘制贝塞尔函数的图形(见问题)。除了$J_0(x)$，所有的J_p都是从原点开始，类似x^p，然后像sinx一样振荡，但幅度减小。当$x=0$时，$J_0(x)=1$，像阻尼余弦。所有的N次在原点为$\pm\infty$，远离原点时振幅也在减小。

满足$sin(x)=0$ 的x值 ，称为$sin(x)$零点，$x=n\pi$，$n=0,1,2,...$。贝塞尔函数的零点并不按等间隔出现，可通过计算机或查表计算。值得注意的是，当x很大时，连续两个零点之间的区隔近似π，就象$sin(x),cos(x)$。可从函数曲线或者查表看到这点，当x很大时贝塞尔函数的近似公式中也可看到这点，参见20节。

- 贝塞尔方程和勒让德方程

> 勒让德方程
>
> $$(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0$$
>
> 解为
>
> $$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$
>
> $$y_1(x)=a_0[1+\frac{(-l)(1+l)}{2!}x^2+\frac{(2-l)(-l)(1+l)(3+l)}{4!}x^4+...]$$
> $$y_2(x)=a_1[x+\frac{(1-l)(2+l)}{3!}x^3+\frac{(3-l)(1-l)(2+l)(4+l)}{5!}x^5+...]$$

勒让德多项式

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k},\quad \text{n=1,2,...}$$

贝塞尔方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$$

解为

$$J_p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+p)}(\frac{x}{2})^{2n+p}$$

p为非整数时
J_p、J_{-p}是贝塞尔方程的独立解，其线性组合为方程的通解
p为整数时J_p、J_{-p}线性相关，另一独立解为

$$N_p(x)=Y_p(x)=\frac{cos(\pi p)J_p(x)-J_{-p}(x)}{sin\pi p}$$

递推关系

以下是贝塞尔函数及其导数之间的关系。公式及简要证明均为$J_p(x)$的情况，也同样适用于$N_p(x)$

$$\frac{d}{dx}[x^pJp(x)]=x^pJ_{p-1}(x) \tag{15.1}$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-p}J_p(x)]=-x^{-p}J_{p+1}(x), \tag{15.2}$$

$$J_{p-1}(x)+J_{p+1}(x)=\frac{2p}{x}J_p(x), \tag{15.3}$$

$$Jp_{-1}(x) - J_{p+1}(x) = 2J'_p(x) \tag{15.4}$$

$$J'p(x) = -\frac{p}{x}J_p(x) + J_{p-1}(x) = \frac{p}{x}J_p(x) - J_{p+1}(x) \tag{15.5}$$

(15.1)证明如下

将(12.9)乘以x^p,两边求导得

$$\frac{d}{dx}[x^pJ_p(x)] = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+p)}\frac{x^{2n+2p}}{2^{2n+p}} \quad = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+2p)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+p)}\frac{x^{2n+2p-}}{2^{2n+p}}$$

由$\Gamma(n+1+p) = (n+p)\Gamma(n+p)$,消去2和$(n+p)$,得

$$\frac{d}{dx}[x^pJ_p(x)] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+p)}\frac{x^{2n+2p-1}}{2^{2n+p-1}}$$

除以x_p并与(12.9)比较

$$\frac{1}{x^p}\frac{d}{dx}[x^pJ_p(x)] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+p)}(\frac{x}{2})^{2n+p-1} = J_{p-1}(x),$$

这个级数是(12.9)用$p-1$替换了p。其他关系的证明见问题1至3。

具贝塞尔函数解的微分方程

在实际中许多微分方程不是标准形式(12.1)

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \quad 即$$
$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{(x^2-p^2)}{x^2}y = 0$$

但其解可以用贝塞尔函数表示。如微分方程(见13题)

$$y'' + \frac{1-2a}{x}y' + [(bcx^{c-1})^2 + \frac{a^2-p^2c^2}{x^2}]y = 0 \tag{16.1}$$

有解

$$y = x^aZ_p(bx^c) \tag{16.2}$$

Z代表J或N，或其线性组合，a,b,c,p是常数。

如解微分方程

$$y''+9xy=0 \tag{16.3}$$

如果(16.3)是(16.1)的类型，则有

$$1-2a=0,(bc)^2=9,2(c-1)=1,a^2-p^2c^2=0.$$

从中可得

$$a=\frac{1}{2},c=\frac{3}{2},b=2,p=\frac{a}{c}=\frac{1}{3}$$

那么(16.3)的解是

$$y=x^{1/2}Z_{1/3}(2x^{3/2}). \tag{16.4}$$

即(16.3)的通解是

$$y=x^{1/2}[AJ_{1/3}(2x^{3/2})+BN_{1/3}(2x^{3/2})],$$

其中A和B是任意常数

此微分方程的解为$J_p(Kx)$和$N_p(Kx),K$是常量。Kx代入(12.2)中的x，$x(dy/dx)$变成$Kx[dy/d(Kx)]=x(dy/dx)$，同理，$x(xy')'$不变。因此(12.2)中唯一的变化是用x^2-p^2替换$K^2x^2-p^2$，得

$$x(xy')'+(K^2x^2-p^2)y=0\text{有}J_p(Kx)\text{和}N_p(Kx)\text{解}. \tag{16.5}$$

其他类型的贝塞尔函数

我们分别讨论了第一类贝塞尔函数和第二类贝塞尔函数的$J_p(x)$和$N_p(x)$。贝塞尔方程是二阶的，只有两个独立的解。一些相关函数也称为贝塞尔函数。这里和sin和cos很相似。我们可以认为$cosx$和$sinx$是$y''=0$的解。$cosx\pm isinx$也是通解，也写成$e^{\pm ix}$。用ix代替x，得到函数$e^x,e^{-x},coshx,sinhx$，它们是$y''-y=0$的解。下面列举一些常用的贝塞尔函数及其三角相似函数

汉克尔函数或第三类贝塞尔函数

$$\begin{aligned} H_p^{(1)}(x) = J_p(x) + iN_p(x), \\ H_p^{(2)}(x) = J_p(x) - iN_p(x). \end{aligned} \tag{17.1}$$

可对比$(e^{\pm ix} = cosx \pm isinx.)$

修正或双曲贝塞尔函数

方程

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + p^2)y = 0 \tag{17.2}$$

由（16.1）得解为$Z_p(ix)$

将其与标准贝塞尔方程进行比较，类比$y'' + y = 0$和$y'' - y = 0$两者之间的关系.(17.2)的两个独立解为

$$\begin{aligned} I_p(x) = i^{-p}J_p(ix), \\ K_p(x) = \frac{\pi}{2}i^{p+1}H_p^{(1)}(ix). \end{aligned} \tag{17.3}$$

比较$sinhx = isin(ix)$和$coshx = cosix$，因之，I和K称为双曲贝塞尔函数。对实数x，i为调整为使I和K为实数

球贝塞尔函数

如果$p = (2n + 1)/2 = n + 1/2, n$为整数，则$J_p(x)$和$N_p(x)$称为半奇数阶贝塞尔函数。它们可以用$sinx$、$cosx$和$x$的幂来表示。从下面的公式(17.4)可以看出，球贝塞尔函数与它们密切相关。球贝塞尔函数在各种振动问题中都会出现，特别是在球坐标的情况下。我们定义了$n = 0, 1, 2, ...$的球面贝塞尔函数$j_n(x)$、$y_n(x)$、$h^{(1)}(x)$、$h^{(2)}(x)$，并以初等函数的形式表示它们的值(见问题2和3)。

$$\begin{aligned} j_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{(2n+1)/2}(x) = x^n(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^n(\frac{sinx}{x}), \\ y_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}Y_{(2n+1)/2}(x) = -x^n(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^n(\frac{cosx}{x}), \\ h_n^{(1)} &= j_n(x) + iy_n(x), \\ h_n^{(2)} &= j_n(x) - iy_n(x), \end{aligned} \tag{17.4}$$

开尔文函数

解决振动问题的一种标准方法是假设解包含$e^{i\omega t}$,得到的方程含有虚数项。例如，交流电流在导线中的分布问题(皮效应)有下面这个方程(Relton，第177页)

$$y'' + \frac{1}{x}y' - iy = 0 \tag{17.5}$$

方程的解是(见练习8a)

$$y = Z_0(i^{3/2}x) \tag{17.6}$$

这是复数，习惯上分为实部和虚部，称为ber，bei，贝塞尔实部和贝塞尔虚部。定义ber, bei, ker, kei函数

$$\begin{aligned} J_0(i^{3/2}x) &= ber\,x + i\,bei\,x, \\ K_0(i^{1/2}x) &= ker\,x + i\,kei\,x. \end{aligned} \tag{17.7}$$

$n=0$时也有类似的函数。这些函数出现在热流问题、粘性流体理论以及电气工程中。

艾里函数

艾里微分方程是(17.8)

$$y'' - xy = 0. \tag{17.8}$$

根据第16节，8b题，解是

$$\sqrt{x}Z_{1/3}(2/3ix^{3/2}) \tag{17.9}$$

由(17.3)，可以写成$I_{1/3}$和$K_{1/3}$的形式。艾里函数定义为

$$\begin{aligned} Ai(x) &= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{x}{3}}K_{1/3}(\frac{2}{3}x^{3/2}), \\ Bi(x) &= \sqrt{\frac{x}{3}}[I_{-1/3}(\frac{2}{3}x^{3/2}) + I_{1/3}(\frac{2}{3}x^{3/2})] \end{aligned} \tag{17.10}$$

对于x的负值，Ai和Bi可以用$J_{1/3}$和$N_{1/3}$项表示，或者用$1/3$阶$Hankel$函数(17.1)表示。艾里函数用于电动力学和量子力学

变长摆

举变长摆作为贝塞尔函数应用的例子。假设单摆(见第11章，第8节)长度l以稳定速度增加,例如，由起重机升降过程重物摆动。求运动方程和小振动的解。

由第11章第8节，得运动方程

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta})+mgl\,sin\,\theta=0. \tag{18.1}$$

令t时刻弦摆长为

$$l=l_0+vt, \tag{18.2}$$

自变量由t改为l。对于小振荡,可用θ取代$sin\theta$，方程为

$$l\frac{d^2\dot{\theta}}{dl}+2\frac{d\theta}{dl}+\frac{g}{v^2}\theta=0 \tag{18.3}$$

将(18.3)与标准方程(16.1)进行比较，得

$$\theta=l^{-1/2}Z_1(bl^{1/2}),b=2g^{1/2}/v. \tag{18.4}$$

为简化，令

$$u=bl^{1/2}=(2g^{1/2}/v)l^{1/2}. \tag{18.5}$$

(18.3)的通解是

$$\theta=Au^{-1}J_1(u)+Bu^{-1}N_1(u) \tag{18.6}$$

用(15.2)通过(18.6)可计$d\theta/du$

$$\frac{d\theta}{du}=-[Au^{-1}J_2(u)+Bu^{-1}N_2(u)]. \tag{18.7}$$

常数A和B由初始条件求得，单摆初始长度l。例如,在一般情况下,$t=0$时，如果$\theta=0,\dot{\theta}=0$,通解$\theta=cos\omega t+Bsin\omega t$ 得$\theta=\theta_0 cos\omega t$。对变长摆,用同样的初始条件,即$t=0$时，$\theta=0,\dot{\theta}=0$。由初始条件，可求(见问题3至6)

$$A=-\frac{\pi u_0^2}{2}\theta_0 N_2(u_0),\quad B=\frac{\pi u_0^2}{2}\theta_0 J_2(u_0) \tag{18.8}$$

如果调整常数v和l）0, 有简单形式解

$$u0 = 2(gl0)^{1/2}/v \quad 是J_2(u)的零点 \tag{18.9}$$

B = 0，(18.6)的第2项是0，有

$$\theta = Au^{-1}J_1(u) = Cl^{-1/2}J_1(bl^{1/2}) \tag{18.10}$$

其中

$$b = \frac{2g^{1/2}}{v} = \frac{u_0}{l_0^{1/2}}, \quad C = \frac{\theta_0 l_0^{1/2}}{J_1(u_0)} \tag{18.11}$$

贝塞尔函数的正交性

贝塞尔函数与正弦和余弦的比较

正弦余弦函数	贝塞尔函数$J_p(x)$、$N_p(x)$
sinx	$J_p(x)$
$sinx$零点，$x = n\pi, sinx = 0, x = 1, sinn\pi x = 0$	$J_p(x) = 0, x = \alpha, \beta ..., x = 1$时$, J_p(\alpha x) = 0, J_p(\beta x) = 0,$
满足$y = sinn\pi x$的微分方程是$y'' + (n\pi)^2 y = 0$	满足$y = J_p(\alpha x)$的微分方程是$x(xy')' + (\alpha^2 x^2 - p^2)y = 0$

在比较微分方程时，记住p是常数。$sin(x)$的$n\pi$对应$J_p(x)$的零点$, \alpha, \beta$等

由(16.5)，满足$J_p(\alpha x)$的微分方程

$$x(xy')' + (\alpha^2 x^2 - p^2)y = 0 \tag{19.2}$$

满足$J_p(\beta x)$的微分方程

$$x(xy')' + (\beta^2 x^2 - p^2)y = 0. \tag{19.3}$$

设$J_p(\alpha x) = u, J_p(\beta x) = v$，(19.2)及（19.3）为

$$\begin{aligned} x(xu')' + (\alpha^2 x^2 - p^2)u = 0, \\ x(xv')' + (\beta^2 x^2 - p^2)v = 0. \end{aligned} \tag{19.4}$$

与勒让德多项式正交性证明方法类似(第7节)，用方程(19.4)来证明方程(19.1）。第一个方程乘以v, 第二个方程乘以u, 两方程相减，消去x

$$v(xu')'-u(xv')'+(\alpha^2-\beta^2)xuv=0 \tag{19.5}$$

(19.5)的前两项等于

$$\frac{d}{dx}(vxu'-uxv') \tag{19.6}$$

（19.5）积分

$$(vxu'-uxv)|_0^1+(\alpha^2-\beta^2)\int_0^1 xuv\,dx=0 \tag{19.7}$$

积分项的下限是0，因为$x=0,u,v,u',v'$有限，以上限计算积分，$u=J_p(\alpha x),v=J_p(\beta x)$, 在$x=1,u=J_p(\alpha)=0,v=J_p(\beta)=0$, 因此在上限积分也是零。因此(19.7)为

$$\int_0^1 xuv\,dx=0 \tag{19.8}$$

或

$$\int_0^1 xJ_p(\alpha x)J_p(\beta x)\,dx=0 \tag{19.9}$$

如果$\alpha\neq\beta$, 即α和β是J_p的不同零点, 积分为零。如果$\alpha=\beta$, 积分不为零, 可计算，现只给出结果(见问题1)

$$\int_0^1 xJ_p(\alpha x)J_p(\beta x)\,dx=\begin{cases}0 & \alpha\neq\beta\\ \frac{1}{2}J_{p+1}^2(\alpha)\frac{1}{2}J_{p-1}^2(\alpha)=\frac{1}{2}J_p'^2(\alpha) & \alpha=\beta\end{cases} \tag{19.10}$$

α、β是$J_p(x)$的零点

$$\int_{x_1}^{x_2} y_n(x)y_m(x)w(x)dx=0\quad n\neq m.$$

$$\int_0^a (r/a)J_p(\alpha r/a)J_p(\beta r/a)d(r/a)=\frac{1}{a^2}\int_0^a rJ_p(\alpha r/a)J_p(\beta r/a)dr$$

$$\int_0^a rJ_p(\alpha r/a)J_p(\beta r/a)dr=\begin{cases}0 & \alpha\neq\beta\\ \frac{a^2}{2}J_{p+1}^2(\alpha)=\frac{a^2}{2}J_{p-1}^2(\alpha)=\frac{a^2}{2}J_p'^2(\alpha) & \alpha=\beta\end{cases} \tag{19.11}$$

α、β是$J_p(x)$

由方程(15.3)至(15.5)在$\alpha=\beta$时的三个答案是相等的。α是J_pr的一个零点。

可用两种方式解释(19.10)。如果$\alpha_n, n=1,2,3,...$是$J_p(x)$的零点,那么

$$(a)\text{函数}\sqrt{x}J_p(\alpha)\text{在区间}(0,1)\text{正交}\quad (b)\text{函数}J_p(\alpha)\text{在区间}(0,1)\text{关于关于权函数}x\text{正交}$$

还存在其它与正交相关的权函数。例如见第22节。一般来说，我们说$y_n(x)$是关于权函数$w(x)$在(x_1,x_2)的正交函数集，如果

$$\int_{x_1}^{x_2} y_n(x)y_m(x)w_(x)dx=0 \quad n\neq m$$

满足(19.10)的贝塞尔函数Jp(αnx)可用一组贝塞尔函数展开给定函数，就如用傅里叶级数和勒让德级数展开一样。对此在第13章物理例子中讲述。

正如对傅里叶级数推广到区间(0,l)一样，可将(19.10)推广到区间(0,a)。在(19.10)中，令$x=r/a$，积分限是$x=r/a=0$到1，即r从0到a，原积分变为

$$\int_0^a (r/a)J_p(\alpha r/a)J_p(\beta r/a)d(r/a)=\frac{1}{a^2}\int_0^a rJ_p(\alpha r/a)J_p(\beta r/a)d(r/a)$$

因此有

$$\int_0^a rJ_p(\alpha r/a)J_p(\beta r/a)d(r/a)=\begin{cases}0, & \alpha\neq\beta\\ \frac{\alpha^2}{2}J_{p+1}^2(\alpha)=\frac{a^2}{2}J_{p-1}^2(\alpha)=\frac{\alpha^2}{2}J_p'^2(\alpha), & \alpha=\beta\end{cases}$$

贝塞尔函数近似公式

通常情况下，当x接近0或x非常大时，可给出贝塞尔函数近似公式。列出其中一些供参考。符号$O(x_n)$表示x_n项的阶数或更小的阶数，表示近似值的误差小于x_n$的倍数。0(1)表示有界项。