§1.3 质点运动的基本定理及守恒定律

一、动量定理与动量守恒律

1. 动量:

定义: $\vec{p} = m\vec{v}$

物理学中一个非常重要的物理量。在机械运动的范围内，质点间运动的传递通过动量的交换来实现。动量是机械运动强弱的度量。

2. 动量定理

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}m\vec{v} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

为动量定理的微分形式。

质点在受到外力时质点的动量将发生改变。

变形并积分 $\vec{p}_2-\vec{p}_1=\int_1^2\vec{F}dt$ 或 $m\vec{v}_2-m\vec{v}_1=\int_1^2\vec{F}dt$

$$\vec{I}=\int_1^2\vec{F}dt$$

力对质点的冲量，是一个矢量。上式为动量定理的积分形式（冲量定理）。

3. 动量守恒

$$若\vec{F}=0, d\vec{p}=0, \vec{p}=\vec{C}$$

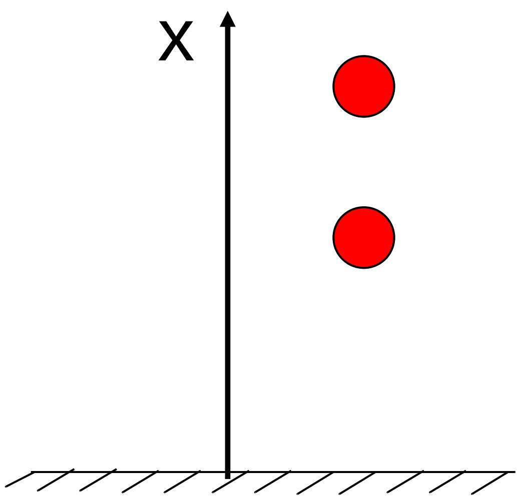
即：如果质点受到的合外力等于零， 则其动量守恒。常数由初值确定

$$\begin{cases} m\dot{x}=c_1 \\ m\dot{y}=c_2 \\ m\dot{z}=c_3 \end{cases}$$

$$若\vec{F} \neq 0, 但F_x = 0, dp_x = 0, p_x = c$$

即：如果质点在某方向上受到的合外力为0, 则该方向上的动量守恒。

例：一质量为0.01kg的小球，从 $h_1 = 0.256m$ 的高度处由静止下落到水平桌面上，反弹后的最大高度为 $h_1 = 0.196m$。小球与桌面碰撞时间t，求小球与桌面碰撞时对桌面作用的冲量是多少？



解法一：(1) 研究对象：小球

(2) 参照系：桌面，坐标系：ox

(3) 受力分析：重力，桌面对小球的正压力(冲力)，用平均正压力代替

$$\vec{I} = \bar{\vec{N}}\tau \longrightarrow$$ 桌面对小球的冲量

$$\vec{I}' = \bar{\vec{N}}'\tau \longrightarrow$$ 小球对桌面的冲量

(4) 在小球与桌面碰撞过程中应用动量定理

$$\left(\bar{\vec{N}} + \vec{P}\right)\tau = m\vec{\upsilon}_2 - m\vec{\upsilon}_1$$

投影到x轴得标量方程 $\left(N - P\right)\tau = m\upsilon_2 - \left(-m\upsilon_1\right)$

其中， $\upsilon_1=\sqrt{2gh_1}$，$\upsilon_2=\sqrt{2gh_2}$

$$I'=I=\bar{N}\tau=mg\tau+m\left(\sqrt{2gh_1}+\sqrt{2gh_2}\right)$$

小球对桌面的冲量方向竖直向下

解法二：将动量定理用于小球下落、与桌面碰撞和上升的整个过程。

$$\bar{\vec{N}}\tau+\vec{P}\left(t_1+\tau+t_2\right)=0$$

标量方程为

$$\bar{N}\tau-P\left(t_1+\tau+t_2\right)=0$$

其中， $t_1=\sqrt{\frac{2h_1}{g}}$, $t_2=\sqrt{\frac{2h_2}{g}}$

$$I'=I=\bar{N}\tau=mg\tau+m\left(\sqrt{2gh_1}+\sqrt{2gh_2}\right)$$

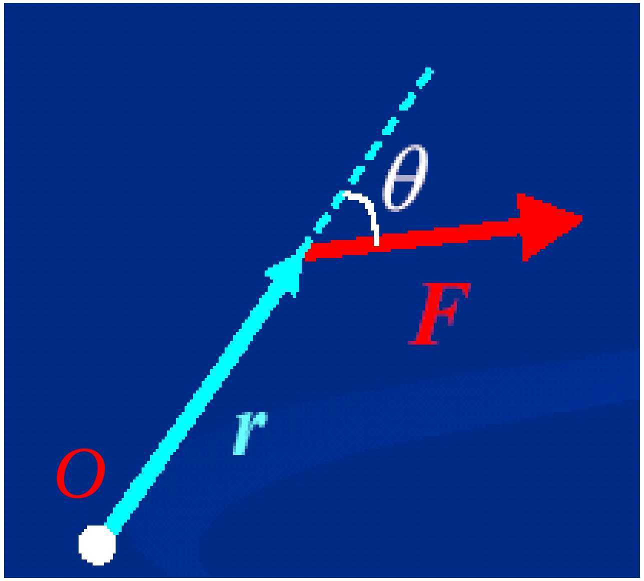
小球对桌面的冲量方向竖直向下

二、力矩与动量矩

1. 力矩

★力对空间某一点0的力矩：

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F} \qquad |\vec{M}|=rF\sin\theta$$



0点称为矩心

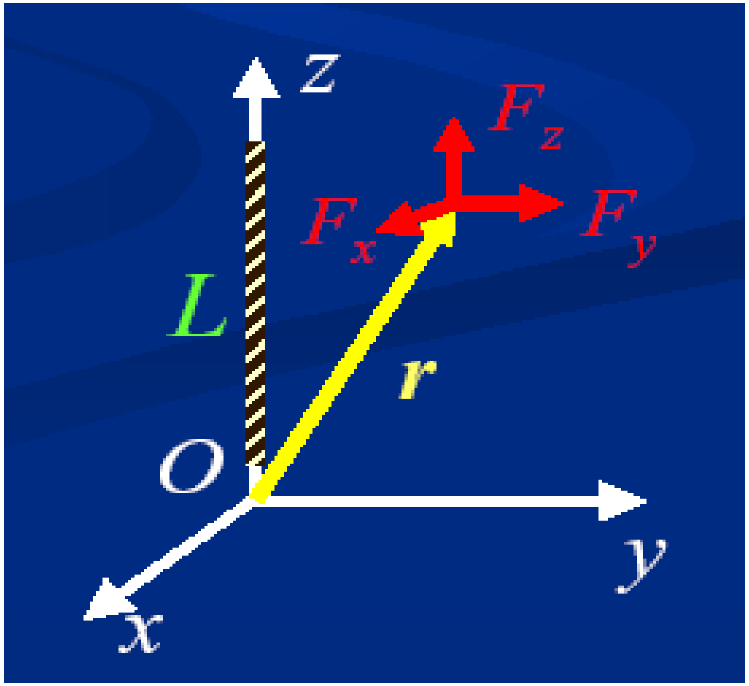
$$M_z=\vec{M}\cdot\vec{k}$$

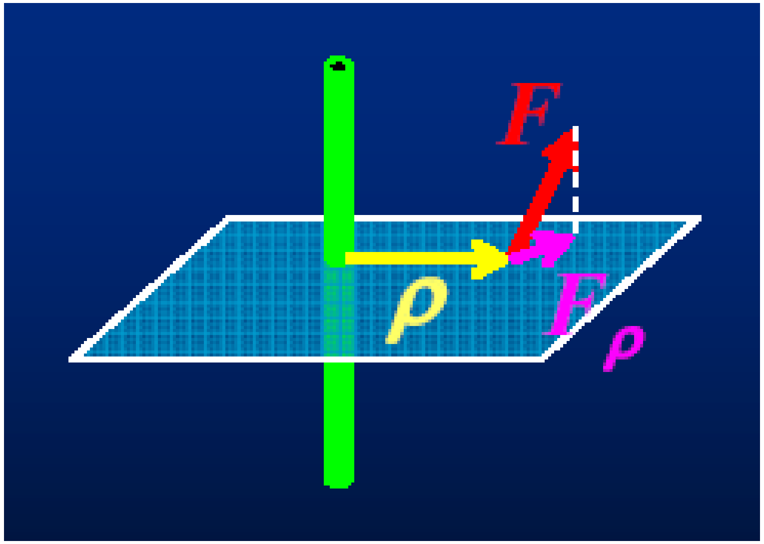
★力对空间某一轴线的力矩：(力矩矢量沿轴的投影)

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=(yF_z-zF_y)\vec{i}+(zF_x-xF_z)\vec{j}+(xF_y-yF_x)\vec{k}$$

*F*对 *L*轴力矩：

$$M_z = xF_y - yF_x = \vec{\rho} \times \vec{F}_\rho$$





即：力沿轴上一点的力矩在该轴上的投影。或者力在平面上的投影对力的作用点在轴上的垂直投影点的力矩大小。

2. 动量矩（矢量）

对 *O* 点的动量矩：$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} = (my\dot{z} - mz\dot{y})\vec{i} + (mz\dot{x} - mx\dot{z})\vec{j} + (mx\dot{y} - my\dot{x})\vec{k}$$

对x，y，z轴的投影：$\vec{L}_z = \vec{J} \cdot \vec{k}$

$$\vec{L}_x = my\dot{z} - mz\dot{y}$$

$$\vec{L}_y = mz\dot{x} - mx\dot{z}$$

$$\vec{L}_z = mx\dot{y} - my\dot{x}$$

三、动量矩定理与动量矩守恒律(对固定点0)

1. 动量矩定理（ 出发点：牛顿第二运动定律 ）

$$\because m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F} \qquad \therefore \vec{r}\times m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$r\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right)-\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{v})$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v})=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}$$ 动量矩定理的微分形式

质点对某一定点的角动量的时间变化率等于作用于质点的外力对同一定点的力矩

投影式：

$$\frac{d}{dt}(my\dot{z}-mz\dot{y})=yF_z-zF_y$$

$$\frac{d}{dt}(mz\dot{x}-mx\dot{z})=zF_x-xF_z$$

$$\frac{d}{dt}(mx\dot{y}-my\dot{x})=xF_y-yF_x$$

2. 冲量矩

$$\because d\vec{L}=\vec{M}\,dt$$

$$\therefore \vec{L}_2-\vec{L}_1=\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\,dt$$

3. 动量矩守恒律

$$若\vec{M}=0, d\vec{L}=0, \vec{L}=\vec{C}$$

即：如果质点受到的外力矩等于零，则其动量矩守恒。常数由初值确定。

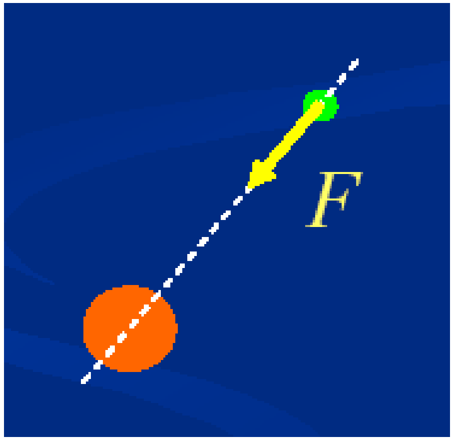
$$\begin{cases} my\dot{z} - mz\dot{y} = C_4 \\ mz\dot{x} - mx\dot{z} = C_5 \\ mx\dot{y} - my\dot{x} = C_6 \end{cases}$$

$$若\vec{M} \neq 0, 但M_x = 0, dL_x = 0, L_x = c$$

即：如果质点在某方向上受到的外力矩为0, 则该方向上的动量矩守恒。

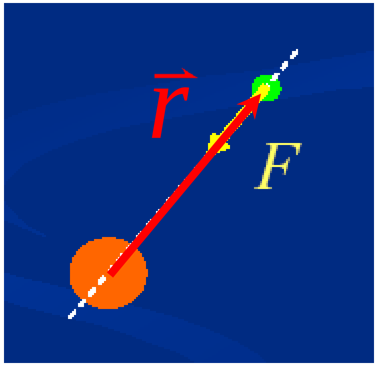
【例1】质点所受的力恒通过某一个定点，则质点必在一平面上运动（如地球绕太阳运动，卫星绕地球运动等）。试证明之。

解：



由于力恒通过一个定点，那么力对该定点的力矩：

$$\vec{r}\times\vec{F}=0 \qquad 所以: \vec{L}=\vec{C}$$



分量式为：

$$\begin{cases} my\dot{z}-mz\dot{y}=C_4 \\ mz\dot{x}-mx\dot{z}=C_5 \\ mx\dot{y}-my\dot{x}=C_6 \end{cases}$$

x乘(1)， y乘(2)， z乘(3)，并相加，得：

$$C_4x+C_5y+C_6z=0$$

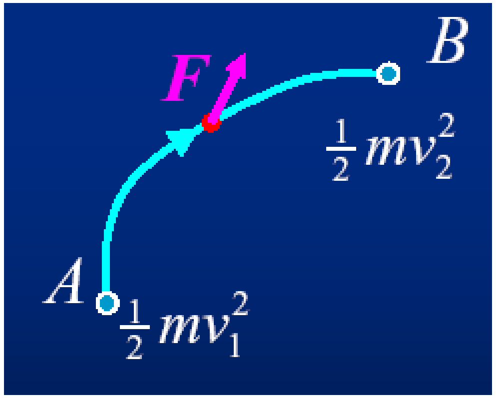
经过固定点的平面方程。

四、动能定理与机械能守恒律

1. 动能定理

$$\because m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F} \qquad \therefore m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r}=\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$m\vec{v}\cdot d\vec{v}=\vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad d(\frac{1}{2}mv^2)=\vec{F}\cdot d\vec{r}$$



定义动能 $T=\frac{1}{2}mv^2$

$$\boxed{dT=dW}$$

质点动能的微分等于作用在该点上的力所作的元功

$$T_2-T_1=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=\int_{AB}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

2. 若F为保守力场，那么 $dW=-dV$

$$\Rightarrow \quad dT=-dV$$

$$d(T+V)=0 \Rightarrow T+V=E$$ 机械能守恒

五、势能曲线

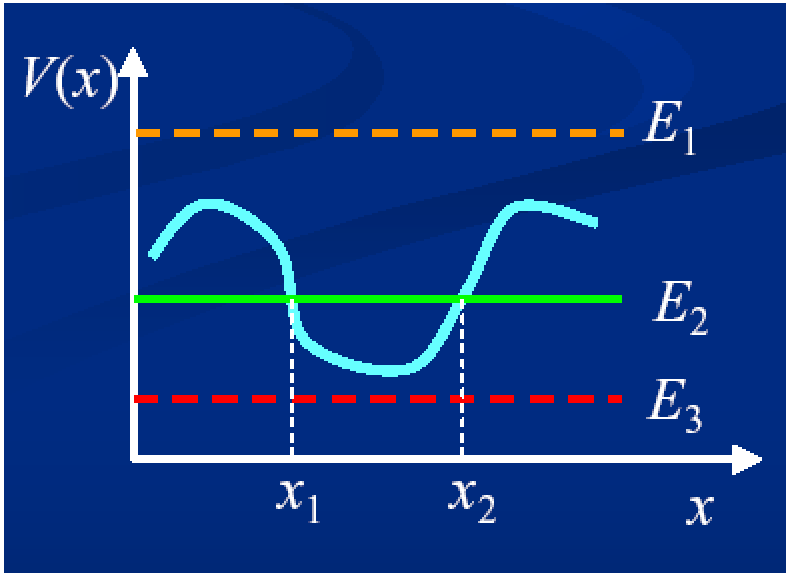
质点受一维守恒力的作用，则质点的势能是其坐标的函数。假设该一维坐标为x，则$V(x)-x$图形称为势能曲线。

$$T+V=E$$

$$\because T\geq 0$$

$$\therefore V\leq E$$

$$\dot{x}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}[E-V(x)]}$$



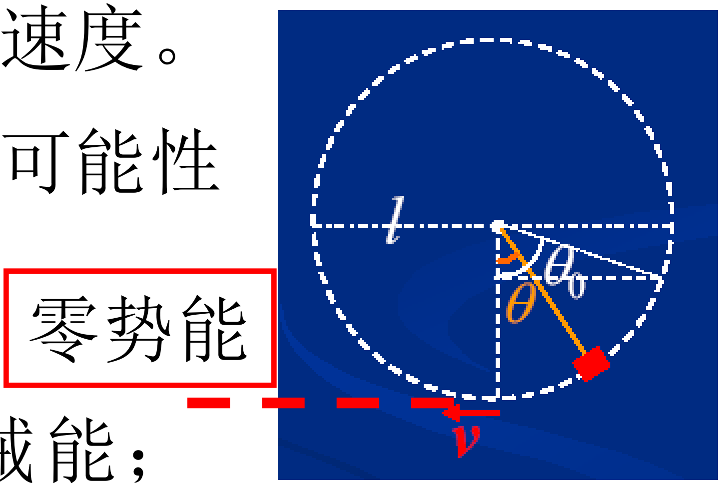
经典力学与量子力学的区别之一，隧穿效应

【例2】如图所示，一重锤固定一轻杆末端，将其约束在竖直圆周上运动。假设初始角度为 θ_0，忽略空气阻力，求重锤经过最低点的速度。

解：（1）分析用机械能守恒律的可能性

重锤受到哪些力？

哪些做功哪些不做功？



(2) 确定初末态时重锤的总机械能；用机械能守恒定律求出速度

$$0 + mg(l - l\cos\theta_0) = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

$$v = \sqrt{2gl(1-\cos\theta_0)}$$

缺点：无法求出 T 的大小。(若考虑空气阻力，则不能用机械能守恒)

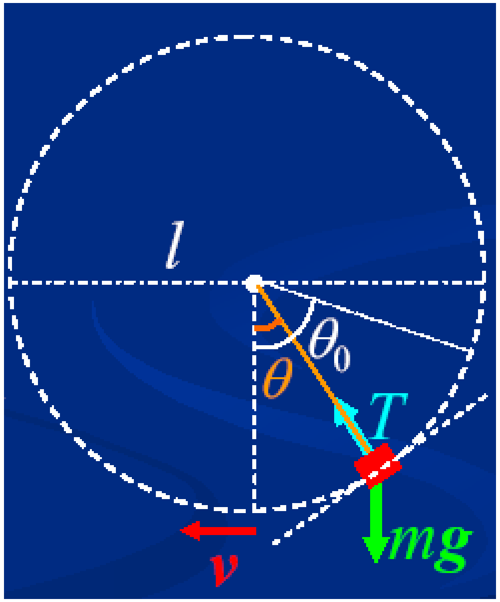
（3）尝试用动力学的方法

写出动力学方程(自然坐标或极坐标)

$$mg\sin\theta = m\dot{v} = ml(-\ddot{\theta})$$

$$v = -l\dot{\theta}$$

(过程中，$\dot{\theta} < 0$)



受力分析

注意：假设了速度的方向后，那么就应该考虑相关表达式的正负。由于这里只关心速度的值，因此求解时最好把dt换成$d\theta$：

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$$

于是微分方程变为：

$$g\sin\theta d\theta = -l\dot{\theta}d\dot{\theta}$$

$$gl\sin\theta d\theta = -vdv$$

两边积分：

$$\int_{\theta_0}^{0} gl\sin\theta d\theta = -\int_{0}^{\upsilon} \upsilon d\upsilon$$

$$v = \sqrt{2gl(1-\cos\theta_0)}$$

求杆对重锤的作用力

$$T - mg\cos\theta = \frac{m\upsilon^2}{l}$$

$$T = 3mg - 2mg\cos\theta_0$$

守恒律小结

基础：$m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt}=\vec{F}$

	动量	动量矩	动能
微分形式	$\dfrac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$	$\dfrac{d\vec{J}}{dt}=\vec{M}$	$d(\frac{1}{2}mv^2)=dW$
积分形式	$p_2-p_1=\int_1^2\vec{F}dt$	$J_2-J_1=\int_1^2\vec{M}dt$	$T_2-T_1=\int_{(A)}^{(B)}dW$
守恒律	$\vec{F}=0$时 $m\vec{v}$守恒	$\vec{M}=0$时 $\vec{J}$守恒	当$\nabla\times\vec{F}=0$时 $T+V=E$

2.　牛顿第二定律是二阶微分方程，守恒律是一阶的，称为第一积分，能量守恒也称能量积分。用初积分比用运动方程来的简单。