理论力学

余熳烨

一、力学的分类

- 宏观系统(h不起作用)
  - 低速运动(v远远小于c)--经典力学
    - （以观点分）
      - 运动学
      - 动力学
      - 静力学
    - （以对象分）
      - 质点力学
      - 质点组力学
      - 刚体力学
      - 连续介质力学
    - （以方法分）
      - 牛顿力学（矢量力学）
      - 分析力学
  - 高速运动(v接近c)--相对论力学
- 微观系统(h起作用)
  - 低速运动——量子力学
  - 高速运动——量子场论（相对论量子力学）

注：连续介质力学(包括弹性体力学和流体力学)是研究质量连续分布的可变形物体运动规律的科学。

经典力学的应用范围是：宏观、低速运动物体。理论力学是经典力学的一大部分，但不讨论连续介质力学。静力学不象工科一样详尽，而只是作为动力学的一特例。

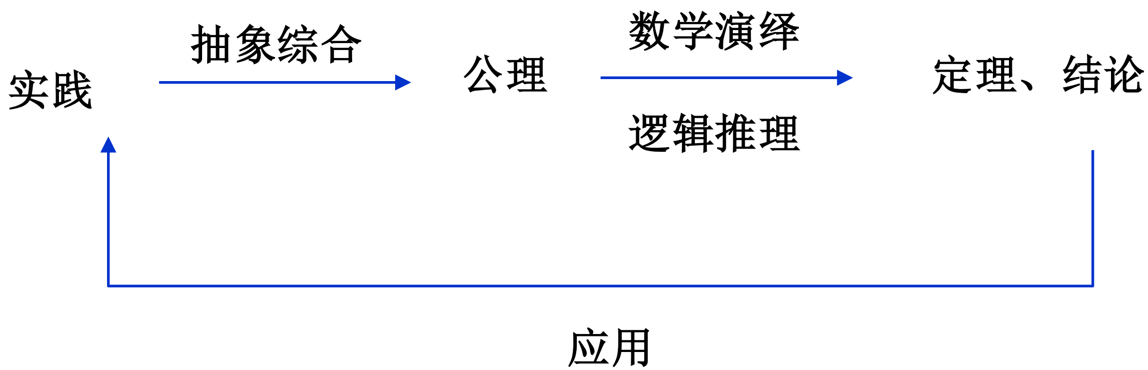
二、理论力学的研究对象

理论力学：是研究宏观物体机械运动规律的一门学科。

机械运动：是物体在空间的位置随时间的变化。

三、理论力学的研究方法

是从实践出发，经过抽象化、综合、归纳、建立公理，再应用数学演绎和逻辑推理而得到定理和结论，形成理论体系，然后再通过实践来验证理论的正确性。



四、理论力学的发展史

早在(公元前287~212)古希腊阿基米德著的《论比重》就奠定了静力学基础。

意大利的达芬奇(1452~1519)研究滑动摩擦、平衡、力矩。

波兰的哥白尼(1473~1543)创立宇宙“日心说”。

德国的开普勒(1571~1630)提出行星运动三定律。

意大利的伽利略(1564~1642)提出自由落体规律、惯性定律及加速度的概念。

英国伟大科学家牛顿(1643~1727)在1687年版的《自然哲学的数学原理》一书总其大成，提出动力学的三个基本定律，万有引力定律，天体力学等。是力学奠基人。

瑞士的伯努利(1667~1748)提出虚位移原理。

瑞士的欧拉(1707~1783)出版著作《力学》用微分方程研究。

法国达朗伯(1717~1785)出版著作《动力学专论》达朗伯原理。

法国拉格朗日(1736~1813)出版名著《分析力学》。

五、《理论力学教程》的内容框架(40学时)

- 质点力学
- 质点组动力学
- 刚体力学
- 分析力学

主要参考书目：

1 陈世民.理论力学简明教程, 高教出版社, 2001

2 周衍柏.理论力学教程（第三版）,高教出版社,1986

3 刘焕堂.理论力学原理与方法,厦大出版社,1997

4 胡慧玲等.理论力学基础教程,高教出版社,1986

5 卢圣治.理论力学基本教程，北师大出版社，2004

6 H.Goldstein, Classical Mechanics, 2-nd edition, Addison Wesley,1980

第一章

牛顿力学的基本原理

1. 质点运动的描写
2. 牛顿定律
3. 质点运动的基本定理
4. 保守力、势能和机械能守恒定律

【重点掌握】

① 描述质点运动所需的各个概念和与之相应的数学表达式，以及它们之间的关系。

② 速度和加速度在直角坐标系、平面极坐标系、柱坐标系中的表达式。

③ 质点的受力分析和质点运动微分方程的建立；掌握常见情况下运动微分方程求解析解的方法。

④ 理解三个定理分别揭示了机械运动在三个不同方面的客观规律，是力学和物理学中最具普遍意义的定理，并能运用各定理分析和解决力学问题。

⑤ 掌握保守力存在的条件和力与势能的关系，会求与保守力相应的势能

§1.1 质点运动的描述方法

一、参照系与坐标系

1.参照系

物质的运动是绝对的，运动的描述是相对的。物体的位置只能相对地确定，为研究一个物体必须事先选定另一个物体作为参考标准（参照物），这样的物体就叫做参照系或参考系。

说明：

① 参照物不同，对同一个物体运动的描述结果可能不同；

② 观察者是站在参照系的观察点上；

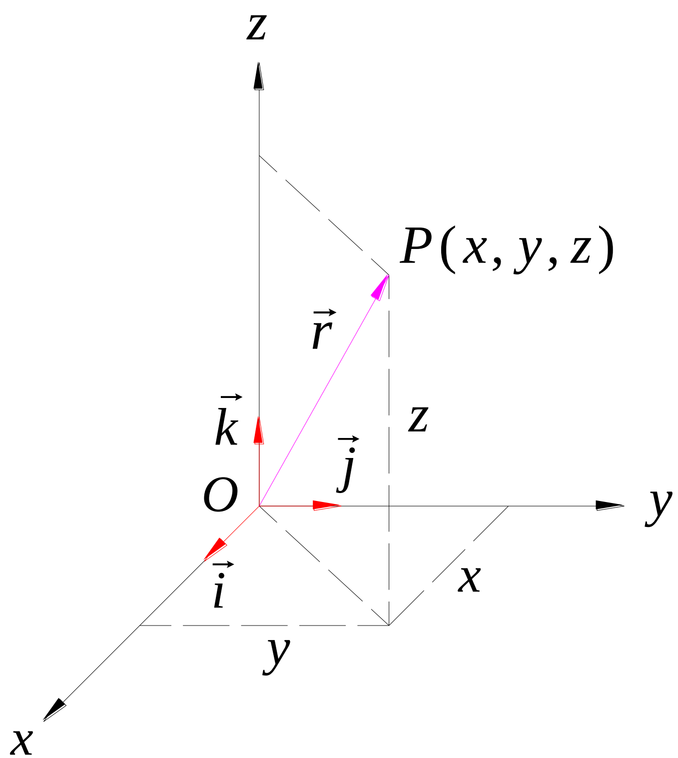
③ 不特别说明都以地球为参照系。

2. 坐标系

为了定量研究的空间位置，就必须在参考系上建立坐标系。参照系确定后，在参照系上选择适宜的坐标系，便于用数学方式描述质点在空间的相对位置（方法）。

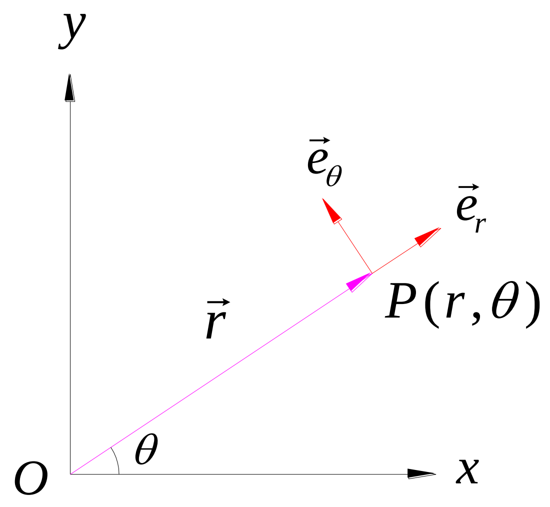
坐标系
- 直角坐标系
- 自然坐标系
- 极坐标系
- 柱坐标系
- 球坐标系

(1) 直角坐标系



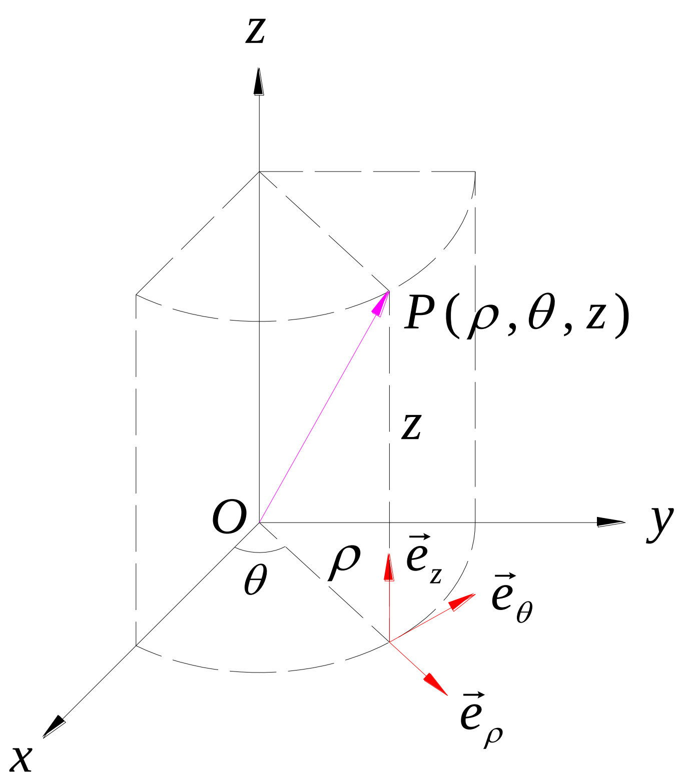
坐标变量	单位矢量	位矢表达式	位矢长度
(x, y, z)	$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$	$\lvert\vec{r}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

(2) 平面极坐标系



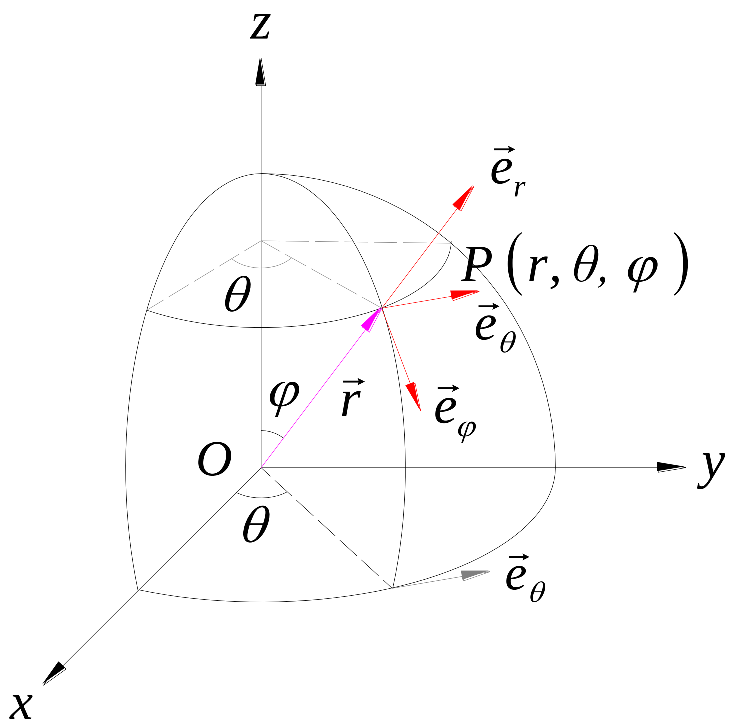
坐标变量	单位矢量	位矢表达式	位矢长度
(r,θ)	$\vec{e}_r,\vec{e}_\theta$	$\vec{r} = r\vec{e}_r$	$\lvert\vec{r}\rvert = r$

(3) 柱坐标系



坐标变量	单位矢量	位矢表达式	位矢长度
(ρ,θ,z)	$\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z$	$\vec{r}=\rho\vec{e}_\rho+z\vec{e}_z$	$\lvert\vec{r}\rvert=\sqrt{\rho^2+z^2}$

(4) 球坐标系



坐标变量	单位矢量	位矢表达式	位矢长度
(r,θ,φ)	$\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi$	$\vec{r}=r\vec{e}_r$	$\lvert\vec{r}\rvert=r$

3、质点及位置的描述

(1) 质点：理想模型，有一定质量的几何点（物体形状可忽略，物体作平动）。在研究物体的机械运动时，不考虑物体的大小和形状，而只计及其质量的力学模型就叫质点。

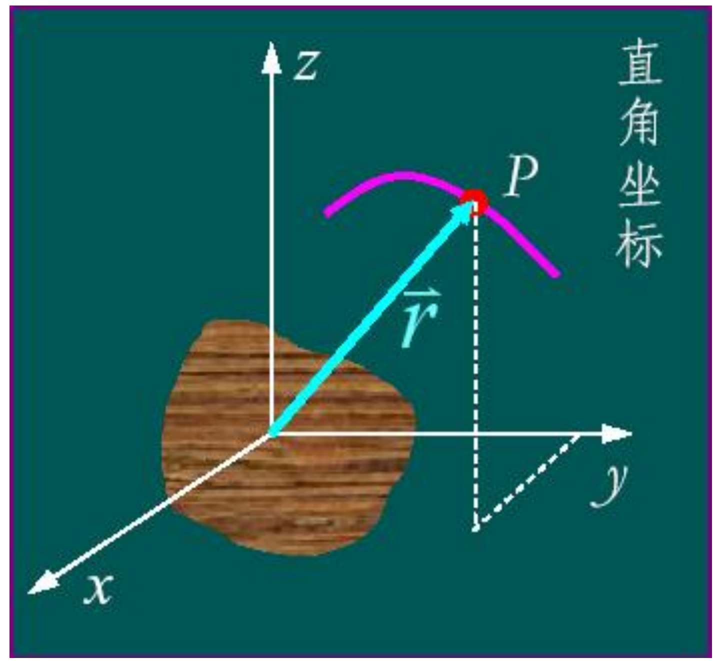
(2) 位置描述

①质点相对某参照系的位置，可由位矢r 确定;

②坐标描述：

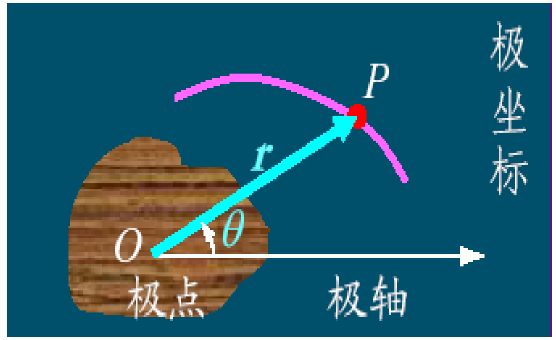
直角坐标系：

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

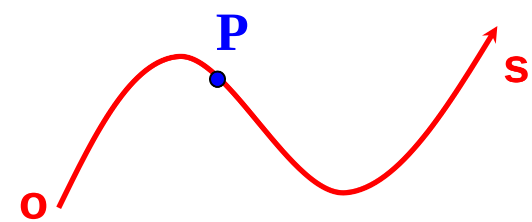


极坐标系：

$P(r,\theta)$



自然坐标系：



$P(s)$

二、运动学方程及轨道

1、运动方程

描述物体在参考空间中任一瞬时位置的数学表达式称为运动学方程。

质点的运动学方程确定了点在参考空间中任一瞬时的位置，并由此可进一步揭示质点运动的几何性质：轨迹、速度和加速度等。写出质点的运动学方程是研究质点的运动学的首要任务。一般常用的方程有

（1）矢量形式的运动学方程

$$\vec{r}=\vec{r}(t)$$

当质点运动时r是时间t的单值连续函数。此方程常用来进行理论推导。它的特点是概念清晰，是矢量法分析质点运动的基础。

（2）直角坐标形式的运动学方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

这是常用的运动学方程，尤其当质点的轨迹未知时。它是代数方程，虽然依赖于坐标系，但是运算容易。

（3）极坐标下的运动学方程

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases}$$

当质点在某平面上运动时，在任一瞬时，其位置也可用极坐标确定。

（4）自然坐标形式的运动学方程

$$s = s(t)$$

对运动轨迹已知的质点，常用此方程。用自然法研究运动，运算比较简便，各运动参数的物理意义明确。

质点在参考空间中的位置还可用其它的方法确定，例如柱坐标法或球坐标法。通过坐标形式的方程表示质点的运动方程，并由此继续描述质点的其它运动量的方法称为分析方法。

2、轨道

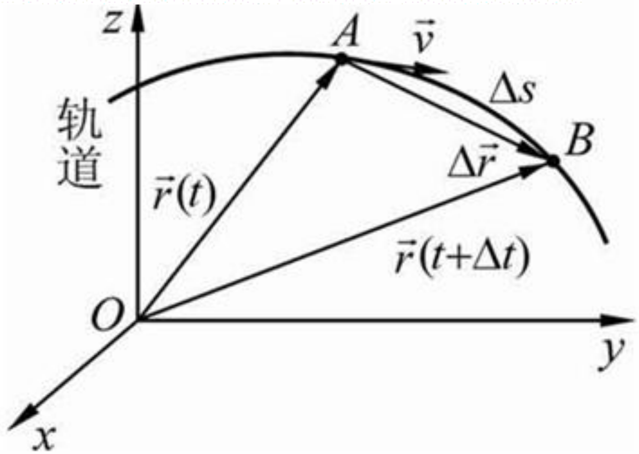
质点运动过程中在空间描述出的连续曲线，运动学方程中消去t得轨道方程。(直线运动、曲线运动)。

三、位移、速度、加速度

1、位移：

位移—质点位置矢量的增量

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$$



$\Delta s=AB$ 弧长

注意

$$\Delta\vec{r}\neq\Delta s$$

$$\left|\Delta\vec{r}\right|\neq\Delta s$$

$$\left|\Delta\vec{r}\right|\neq\Delta r$$

路程—质点沿轨道走过的长度—恒正标量Δs

但当 $\Delta t\to 0$ 时， A,B 间弦长与弧长相等，

$\left|\Delta\vec{r}\right|\to\Delta s$， 或 $\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|=\mathrm{d}s$.

2、速度：

瞬时速度矢量—速度—位置矢量对时间的导数

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{\vec{r}}$$

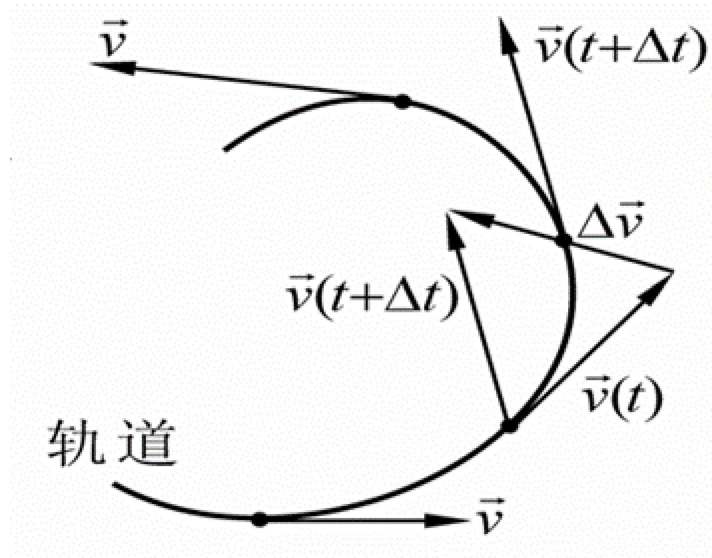
方向沿轨道($\vec{r}$ 的矢端曲线)的切线指向运动的前方，大小为速率v

$$v = |\vec{v}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \frac{|\mathrm{d}\vec{r}|}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s}$$

3、加速度：

瞬时加速度矢量—加速度—速度对时间的导数

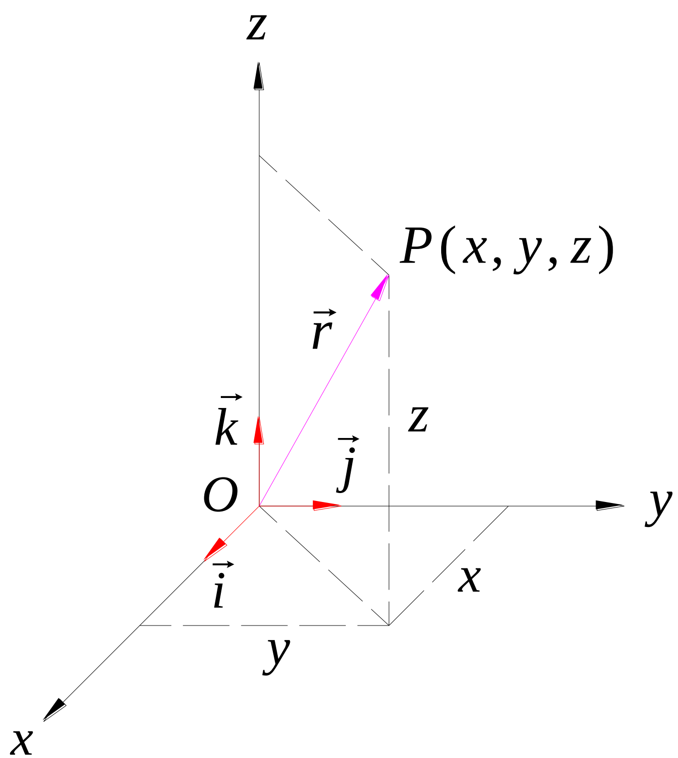
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{v}} = \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\vec{r}}$$



$\vec{a}$一定指向轨道的凹侧.

四、 速度、加速度分量表示式

(1) 直角坐标系



坐标变量	单位矢量	位矢表达式	位矢长度
(x, y, z)	$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$	$\lvert\vec{r}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

位矢 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

1、速度：

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

分量式： $v_x = \dot{x},\quad v_z = \dot{z},\quad v_y = \dot{y}$

大小： $v = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

方向：　可用速度与三个坐标轴的方向余弦表示

$$\cos(\vec{v},\vec{i}) = v_x / v = \dot{x} / \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

$$\cos(\vec{v},\vec{j}) = v_y / v = \dot{y} / \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

$$\cos(\vec{v},\vec{k}) = v_z / v = \dot{z} / \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

2、加速度：

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

分量式：

$$\begin{cases} a_x = \ddot{x} \\ a_y = \ddot{y} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases}$$

大小：

$$a=|\vec{a}|=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}$$

[例1]设椭圆规尺AB的端点A与端点B沿直线导槽ox及oy滑动（如下图所示），而B以匀速度c运动，求椭圆规尺上M点的轨道方程，速度及加速度. 设MA=a, $MB=b$, $\angle OBA=\theta$.

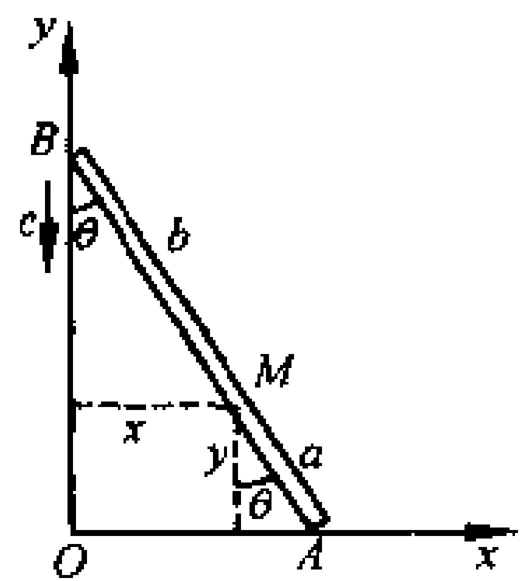
解：1)选择参照系,坐标系

2)写出M点的坐标

$$x=b\sin\theta$$

$$y=a\cos\theta$$

消去参数θ得轨道方程:



$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

速度分量:

$$\dot{x}=b\cos\theta\dot{\theta} \qquad \dot{y}=-a\sin\theta\dot{\theta}$$

$$x_B=0, \quad \dot{x}_B=0$$

$$y_B=(a+b)\cos\theta$$

$$\dot{y}_B=-(a+b)\sin\theta\dot{\theta}=-c$$

$$\therefore \dot{\theta}=\frac{c}{(a+b)\sin\theta}$$

$$\dot{x}=\frac{bc\cos\theta}{(a+b)\sin\theta}=\frac{bc}{(a+b)}\cot g\theta,$$

$$\dot{y}=-\frac{ac\sin\theta}{(a+b)\sin\theta}=-\frac{ac}{(a+b)}$$

$$v_M=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\frac{c}{a+b}\sqrt{a^2+b^2\cot g^2\theta}$$

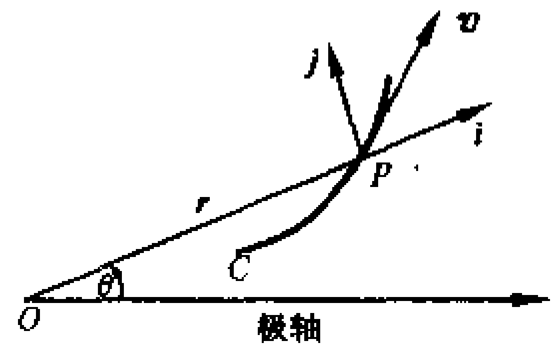
M点速度的方向： $\cos\alpha=\dfrac{\dot{x}}{\upsilon_M},\cos\beta=\dfrac{\dot{y}}{\upsilon_M}$

$$\begin{cases}\ddot{x}=-\dfrac{bc}{(a+b)}\csc^2\theta\dot{\theta}=-\dfrac{bc}{(a+b)}\csc^2\theta\dfrac{c}{(a+b)\sin\theta}\\ =-\dfrac{bc^2}{(a+b)^2}\dfrac{1}{\sin^3\theta}=-\dfrac{bc^2}{(a+b)^2}\csc^3\theta=-\dfrac{bc^2}{(a+b)^2}\dfrac{1}{\sin^3\theta}\\ \ddot{y}=0\end{cases}$$

$$a_M=|\vec{a}|=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=\frac{bc^2}{(a+b)^2\sin^3\theta}$$

M点加速度的方向：$\cos\alpha'=\dfrac{\ddot{x}}{a_M},\cos\beta'=\dfrac{\ddot{y}}{a_M}$

二、极坐标系



质点 P —平面运动

建立与参考系固连的极坐标系.

P —位置由坐标量 r 和 θ

确定—明确极角 θ 的正方向

(即 θ 的增加方向)！

$\vec{i}$ 为径向单位矢，沿径向;

$\vec{j}$ 横向单位矢,垂直于径向并指向θ增加的方向.

在极坐标系中，质点的运动学方程为

$$\vec{r}=r\vec{i}$$

标量形式

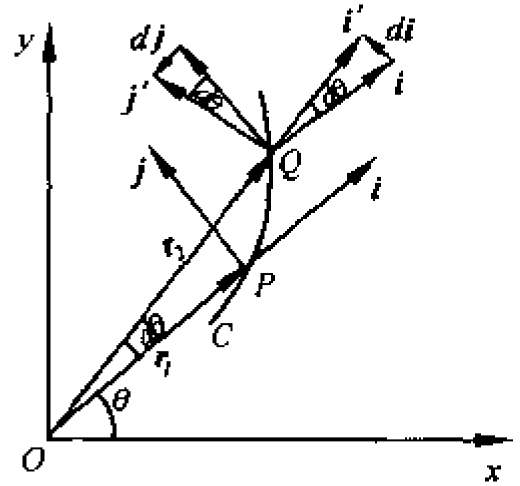
$$r=r(t)\quad,\quad\theta=\theta(t)$$

1、速度：

$$\vec{v}=\frac{d}{dt}(r\vec{i}\,)=\dot{r}\vec{i}+r\dot{\vec{i}}$$

注意：$\vec{i},\vec{j}$ 方向都变化，乘积函数求导。

①先求：$\dfrac{d\,\vec{i}}{dt}$，$\dfrac{d\,\vec{j}}{dt}$



$$\because \quad \left|d\vec{i}\right|=\left|\vec{i}'-\vec{i}\right|=1\times d\theta$$

$d\theta\rightarrow 0$ $\quad |\,d\vec{i}\,|=d\theta$

$d\vec{i}\perp\vec{i}$ 方向沿 $\vec{j}$

$$\therefore d\vec{i}=d\theta\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{i}}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\vec{j}=\dot{\theta}\vec{j}$$

同理：

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = -\dot{\theta}\vec{i}$$

②速度分量式：

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{i} + r\dot{\vec{i}} = \dot{r}\vec{i} + r\dot{\theta}\vec{j} = v_r\vec{i} + v_\theta\vec{j}$$

$v_r = \dot{r}$: 速度径向分量，称为径向速度，是矢径量值变化产生的。

$v_\theta = r\dot{\theta}$:速度横向分量，称为横向速度，是矢径方向变化产生的。

大小： $|\vec{v}| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2}$

2、加速度

$$\vec{a}=\ddot{\vec{r}}=\dot{\vec{\upsilon}}=\frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{i}+r\dot{\theta}\vec{j})$$

$$=\ddot{r}\vec{i}+\dot{r}\dot{\vec{i}}+\dot{r}\dot{\theta}\vec{j}+r\ddot{\theta}\vec{j}+r\dot{\theta}\dot{\vec{j}}$$

$$=\ddot{r}\vec{i}+2\dot{r}\dot{\theta}\vec{j}+r\ddot{\theta}\vec{j}-r\dot{\theta}^2\vec{i}$$

$$=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\vec{i}+\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{j}$$

即：

$$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{i}+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\vec{j}$$
$$=a_r\vec{i}+a_\theta\vec{j}$$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ ：

加速度径向分量，称为径向加速度。

$\ddot{r}$ 是径向速度量值变化产生的。

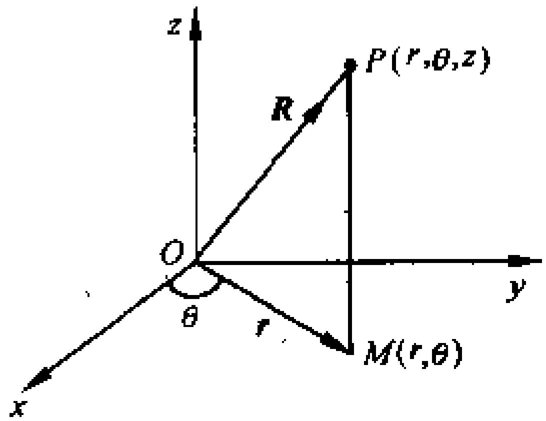
$r\dot{\theta}^2$ 是横向速度方向变化产生的。

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$：

加速度横向分量，称为横向加速度。

$r\ddot{\theta}$ 是横向速度量值变化产生的

$\dot{r}\dot{\theta}$是径向速度方向变化产生的。



[例3]已知一质点的运动方程为

$$r = e^{ct}, \theta = bt,$$ 试求其速度与加速度。

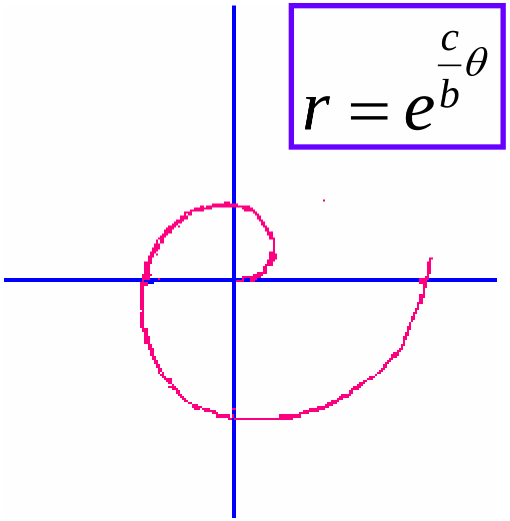
$$v_r = \dot{r} = ce^{ct} = cr \qquad v_\theta = r\dot{\theta} = rb$$

$$\vec{v} = cr\vec{i} + rb\vec{j}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = c^2 e^{ct} - rb^2 = (c^2 - b^2)r$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 2bcr$$

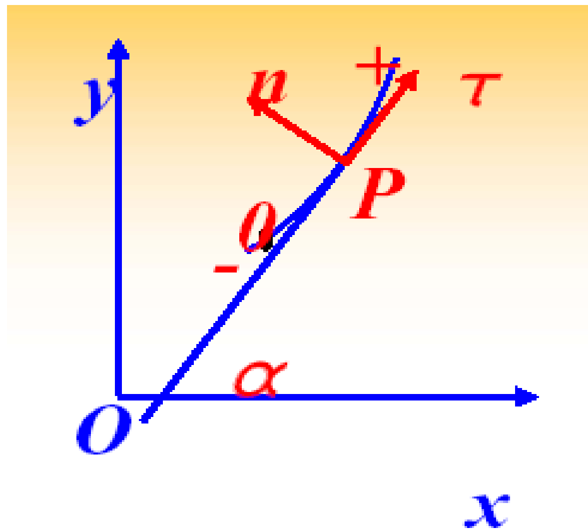
$$\vec{a} = (c^2 - b^2)r\vec{i} + 2bc\vec{j}$$



$$\boxed{r = e^{\frac{c}{b}\theta}}$$

三、自然坐标系

1、自然坐标 —利用质点运动轨道本身的几何特性(如切线、法线方向等)来描述质点的运动.



在轨道上取一点作原点O，规定沿轨道的某一方向为弧长的正方向，质点位置可由原点O到质点间的一段弧长s来确定，s称为弧坐标

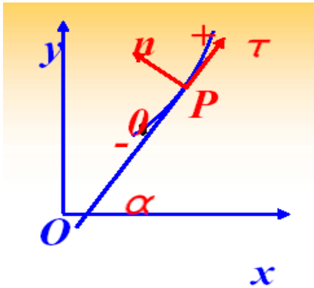
$$s = s(t)$$

规定： τ 为切向单位矢，沿轨道切线并指向 s 增加的方向。

弧坐标 s —可正可负的标量—与恒正的路程是不同的.

n 为法向单位矢，沿轨道上该点法线指向 s 的凹侧。

（τ，n）构成平面自然坐标系。



2. $\vec{\tau} = \cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{j}$

$$\vec{n} = \cos(\alpha + \tfrac{\pi}{2})\vec{i} + \sin(\alpha + \tfrac{\pi}{2})\vec{j} = -\sin\alpha\vec{i} + \cos\alpha\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = (-\sin\alpha\vec{i} + \cos\alpha\vec{j})\dot{\alpha} = \dot{\alpha}\vec{n} = \frac{d\alpha}{dt}\vec{n}$$

$$= \frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{dt}\vec{n} = \frac{\upsilon}{\rho}\vec{n}$$

ρ 质点所在位置处轨道曲线的曲率半径

3、速度

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{\tau} \frac{ds}{dt} = \vec{\tau}\, v$$

$\because$ $$\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = 1$$

$\therefore$ $$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}$$

$v = \dfrac{ds}{dt}$ 表示速度在切线的投影

$\dfrac{ds}{dt} > 0$ 表示沿弧坐标正向，$\dfrac{ds}{dt} < 0$ 表示沿弧坐标反向，

4、加速度

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\vec{\tau}\,v\right)$$

$$=\frac{dv}{dt}\vec{\tau}\quad+v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt}\boxed{=\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{dt}\vec{n}=\frac{\upsilon}{\rho}\vec{n}}$$

$$=\frac{dv}{dt}\vec{\tau}+v\frac{v}{\rho}\vec{n}$$

$$=\frac{dv}{dt}\vec{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

$a_\tau=\dfrac{dv}{dt}$ 描述速度大小随时间的变化率

$a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$ 描述速度方向随时间的变化率

［**例4**］设质点P沿螺旋线

$$x = 2\sin 4t \quad y = 2\cos 4t \quad z = 4t$$

运动，试求速度、加速度及轨道的曲率半径。

解：

$$\dot{x} = 8\cos 4t, \quad \dot{y} = -8\sin 4t \quad \dot{z} = 4$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = 4\sqrt{5}$$

$$\ddot{x} = -32\sin 4t, \quad \ddot{y} = -32\cos 4t, \quad \ddot{z} = 0$$

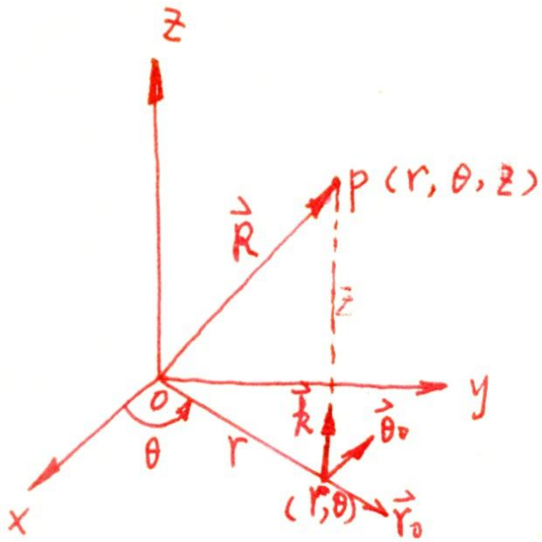
$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = 32$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$$

$$a_n = a = 32$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{5}{2}$$

四、柱坐标系



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = z.$$

$$\vec{R} = r\vec{r}_0 + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\theta}\vec{\theta}_0 + \dot{z}\vec{k}$$

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \\ v_z = \dot{z} \end{cases}$$

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_r^{\ 2} + v_\theta^{\ 2} + v_z^{\ 2}}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}}$$

$$= \vec{r}_0\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) + \vec{\theta}_0\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases}$$

$$a = \sqrt{a_r^{\ 2} + a_\theta^{\ 2} + a_z^{\ 2}}$$

六、质点运动学问题的解

一、三种类型

1、已知 $\vec{r}=\vec{r}(t)$，求 $\vec{v},\vec{a}$ 微分、导数

2、已知 $\vec{a}=\vec{a}(t),\ \vec{a}=\vec{a}(\vec{v}),\ \vec{a}=\vec{a}(\vec{r})$

求 $\vec{v},\vec{r}$ 积分，解微分方程

（1） 已知 $a=f(v)\rightarrow\dfrac{dv}{dt}=f(v)$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{f(v)}=\int_{t_0}^{t}dt\rightarrow v(t)\rightarrow x(t)$$

（2）已知$a = f(x) \rightarrow \dfrac{dv}{dt} = f(x)$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} = f(x) \rightarrow \int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

$$v = \varphi(x) \rightarrow x = x(t)$$

（3）已知 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ，求轨道、ρ

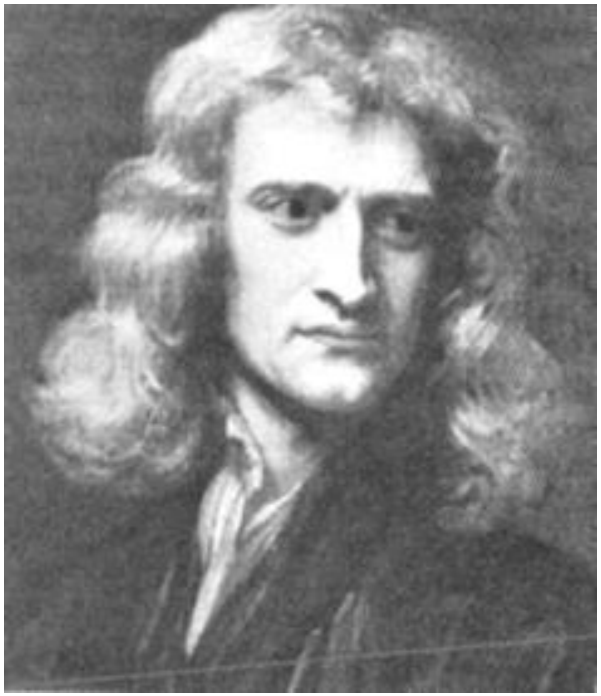
$$a_n \rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_n}$$

动力学引言

动力学研究物体的机械运动与作用力之间的关系。

动力学中所研究的力学模型是质点和质点系(包括刚体)。

动力学的理论基础：是牛顿三大定律，它们也被称为动力学的基本定律。



牛顿 Issac Newton

（1643－1727）

英国物理学家，经典物理
学的奠基人．他对力学、光学、热学、天文学和数学等学科都有重大发现.

★ 牛顿在光学上的主要贡献是发现了太阳光是由7种不同颜色的光合成的，他提出了光的微粒说。

★ 牛顿在数学上的主要贡献是与莱布尼兹各自独立地发明了微积分，给出了二项式定理。

★ 牛顿在力学上最重要的贡献，也是牛顿对整个自然科学的最重要贡献是他的巨著《自然哲学的数学原理》。这本书出版于1687年，书中提出了万有引力理论并且系统总结了前人对动力学的研究成果，后人将这本书所总结的经典力学系统称为牛顿力学。

§1.2 牛顿定律

一. 第一定律（惯性定律）

任何质点如不受力作用，则将保持其原来静止的或匀速直线运动的状态不变。

质点保持其原有运动状态不变的属性称为惯性

事实上，不存在不受力的质点，若作用在质点上的力系为平衡力系，则等效于质点不受力。

★ $\vec{F}=0$ 时， $\vec{v}=$恒矢量

★ 惯性和力的概念

惯性是物体保持静止或匀速直线运动状态的内禀属性；
力是改变物体运动状态的外加因素。

该定律表明：力是改变质点运动状态的原因。

惯性定律成立的参考系，称为惯性参考系，简称惯性系。

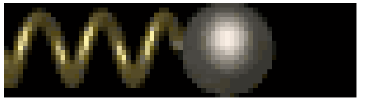
存在一惯性参考系，可建立一系列相对它匀速平动的其它惯性系。

非惯性系：相对惯性系做变速平动或转动的参考系

常见力

- 重力 $$mg_h=\frac{GM_{地}m}{(R+h)^2}\approx\frac{GM_{地}m}{R^2}\left(1-\frac{2h}{R}\right)$$

- 弹性力 $$F=-kx$$



- 摩擦力 $$f=\mu N$$
- 阻力 $$\vec{f}=-\gamma\vec{v}$$

四种基本相互作用

力的种类	相互作用的物体	力的强度	力程
万有引力	一切质点	10^{-38}	无限远
弱力	大多数粒子	10^{-13}	小于10^{-17} m
电磁力	电荷	10^{-2}	无限远
强力	核子、介子等	1 *	10^{-15} m

* 以距源 10^{-15}m 处强相互作用的力强度为 1

二. 第二定律（力与加速度关系定律）

质点受力作用时所获得的加速度的大小与作用力的大小成正比，与质点的质量成反比，加速度的方向与力的方向相同。

即： $\vec{a}=\dfrac{\vec{F}}{m}$ 或 $m\vec{a}=\vec{F}$

由于上式是推导其它动力学方程的出发点，所以通常称上式为**动力学基本方程**。

注意： 当质点同时受几个力的作用时,式中的F 为这些力的合力。

牛顿第二定律只在惯性系中成立

四．第三定律（作用反作用定律）

两物体之间 的作用与反作用力总是大小相等、方向相反、作用线在沿同一直线上。

应说明：此定律它不仅对静力问题适用，对运动问题也适用。

五、质点运动微分方程

将动力学基本方程用微分形式表示所得到的方程称为质点运动微分方程。

1.矢径形式的质点运动微分方程

由动力学基本方程： $m\vec{a}=\vec{F}$

由运动学可知： $$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

于是可得： $$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F} \quad \text{或} \quad m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}$$

2.直角坐标形式的质点运动微分方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x \qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y \qquad m\frac{d^2z}{dt^2}=F_z$$

3、自然坐标形式的质点运动微分方程

$$m\frac{dv}{dt}=F_\tau \qquad m\frac{v^2}{\rho}=F_n \qquad 0=F_b$$

或

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=F_\tau \qquad m\frac{\dot{s}^2}{\rho}=F_n \qquad 0=F_b$$

4 、用质点运动微分方程解题

第一类问题：已知质点的运动，求作用在质点上的力。

这类问题其实质可归结为数学上的**求导问题**。

第二类问题：已知作用在质点上的力，求质点的运动。

这类问题其实质可归结为数学上的解微分方程或**求积分问题**。

应说明的是:

1、当力是常数或是时间的简单函数时，有 $m\dfrac{dv}{dt}=F(t)$

则 。$\int_{v_0}^{v} m dv=\int_0^t F(t)dt$

2、当力是位置的简单函数时，有 $m\dfrac{dv}{dt}=F(x)$

利用循环求导变换,则有 $\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt}=v\dfrac{dv}{dx}$

$mv\dfrac{dv}{dx}=F(x)$ 分离变量积分 $\int_{v_0}^{v} mvdv=\int_{x_0}^{x} F(x)dx$

3.、当力是速度的简单函数时，有 $m\dfrac{dv}{dt}=F(v)$

分离变量积分

$$\int_{v_0}^{v}\frac{m}{F(v)}dv=\int_0^t dt$$

质点动力学两类问题的求解

1. 第一类：已知质点运动，求作用在质点上的力（微分问题）

解题步骤和要点：

①正确选择研究对象（一般选择联系已知量和待求量的质点）。

②正确进行受力分析, 画出受力图(应在一般位置上进行分析)。

③正确进行运动分析（分析质点运动的特征量）。

④选择并列出适当形式的质点运动微分方程（建立坐标系）。

⑤求解未知量。

2.第二类：已知作用在质点上的力，求质点的运动（积分问题）

已知的作用力可能是常力, 也可能是变力。变力可能是时间、位置、速度或者同时是上述几种变量的函数。

解题步骤如下：

①正确选择研究对象。

②正确进行受力分析，画出受力图。判断力是什么性质的力（应放在一般位置上进行分析，对变力建立力的表达式）。

③正确进行运动分析。（除应分析质点的运动特征外，还要确定出其运动初始条件）。

④选择并列出适当的质点运动微分方程。

⑤求解未知量。应根据力的函数形式决定如何积分，并利用运动的初始条件，求出质点的运动。

如力是常量或是时间及速度函数时，

可直接分离变量 $\dfrac{dv}{dt}$ 积分。

如力是位置的函数，需进行变量置换

$$\frac{dv}{dt}=v\frac{dv}{ds}$$，再分离变量积分。

预备知识

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

基本求解思路如下，我们先要有一个总的思路用于解题

求解步骤如下：

(1)求对应的齐次方程即 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的解，该解即为通解，我们设其为 $Y(x)$

(2)求出该非齐次方程的特解，我们设为 $y^*(x)$

(3)最后求得的解应为 $y(x) = Y(x) + y^*(x)$

通解(特解)的形式及其解法

特征方程：$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

(1) 当 λ_1，λ_2 为相异的特征根时，方程 $y'' + py' + qy = 0$ 通解为 $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

(2)当 $\lambda_1 = \lambda_2$ 时，方程 $y'' + py' + qy = 0$ 通解为 $y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_1 x}$

(3) 当 $\lambda = \alpha \pm i\beta$（复根）时，方程 $y'' + py' + qy = 0$ 通解为 $y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

预备知识

$y'' + py' + qy = f(x)$

$f(x) = X_n(x)$,

其中$X_n(x)$为x的n次多项式

特解 $y^*(x)$ 的形式

0不是特征根

$y^*(x) = R_n(x)$,

其中$R_n(x)$为n次多项式

即$R_n(x) = Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + Kx + Z$

0是特征方程的单根，$y^*(x) = xR_n(x)$,

其中$R_n(x)$同上