理论力学

余熳烨

第四章
质点组动力学

1. 质点组
2. 质点组的动量、角动量和动能
3. 质点组运动的基本定理

教学基本要求：

理解　　质点组的内力和外力的概念；质心的概念；质点组的动量、角动量、动能等概念。

掌握　　质点组的运动基本定理及应用。包括动量(守恒)定理、角动量(守恒)定理、以及动能定理、机械能守恒。

掌握　　质心的求法以及质心坐标系下的运动基本定理及应用

本章重点：

质心的概念和求法。

质点组的运动基本定理及应用。

质心坐标系下的质点组运动基本定理及应用

本章难点：

质点组的运动基本定理的应用。

质心坐标系下的质点组运动基本定理的应用

§4.1　质点组

1 基本概念

质点组由许多（有限或无限）相互联系着的质点所组成的系统.

外力指质点组以外的物体对质点组内任一质点的作用力.

内力指质点组中质点间相互作用的力。

质点组的质心位置是描写质点组整体运动的最恰当的位置参量。质心位置矢量定义如下:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{m}$$

§4.1　质点组

1 基本概念

各质点相对于质心的相对位置矢量r_i可表示为:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_c + \vec{r}_c = \vec{r}_i' + \vec{r}_c$$

根据以上定义，可得出以下结论:

（1）质点组中各质点相对于质心的质量一次矩之和恒等于零

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i' = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i - \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_c = 0$$

§4.1　质点组

1 基本概念

（2）满足叠加原理

$$r_c = \frac{\int r dm}{m} = \frac{\int_V r\rho dV}{\int_V \rho dV}$$

§4.1　质点组

1 基本概念

例4.1 一凹底圆锥体，由高为h底面半径为R的均质正圆锥体，自底面挖去高d（d<h）的共轴圆锥而成，如图所示。求此凹底圆锥体的质心位置。

解：以圆锥底中心O点为坐标原点，圆锥轴为z轴，如图所示。设凹底椎体的体积为V1，底部凹进去部分体积为V2，锥体密度为ρ，由叠加原理可得

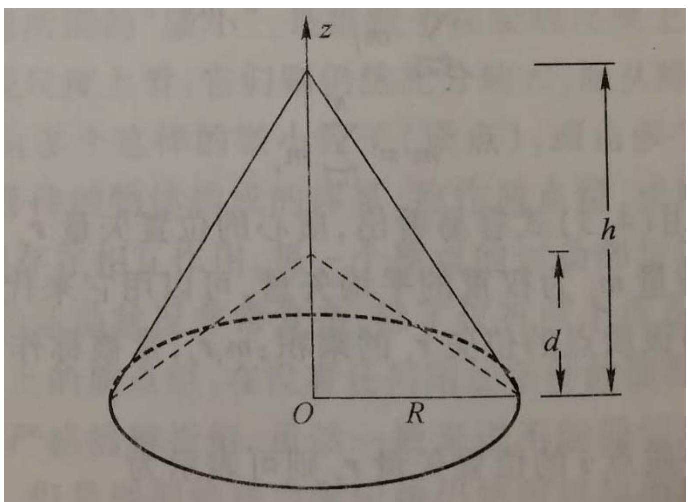


图 L4.1

$$r_c = \frac{\int r dm}{m} = \frac{\int_V r\rho dV}{\int_V \rho dV}$$

§4.1 质点组

1 基本概念

例4.1 一凹底圆锥体，由高为h底面半径为R的均质正圆锥体，自底面挖去高d（d<h）的共轴圆锥而成，如图所示。求此凹底圆锥体的质心位置。

$$r_c=\frac{\int r\,dm}{m}=\frac{\int_{V_1} r\rho\,dV}{\int_{V_1}\rho\,dV}=\frac{\int_{V_1+V_2} r\,dV-\int_{V_2} r\,dV}{\int_{V_1+V_2} dV-\int_{V_2} dV}$$

$$x_c=0,\quad y_c=0$$

$$z_c=\frac{\int_0^h [R(h-z)/h]^2 z\,dz-\int_0^d [R(h-z)/d]^2 z\,dz}{\int_0^h [R(h-z)/h]^2 dz-\int_0^d [R(h-z)/d]^2 dz}$$

$$=(h+d)/4$$

补充：

如图所示，曲线**oa**是一条二次抛物线，其方程为

$$y=\frac{b}{a^2}x^2$$

试求面积**OAB**所围成的均质板的质心位置。

§4.2 质点组的动量、角动量和动能

1 动量

质点组的总动量是各质点动量之和，即

$$\vec{p} = \vec{p}_c = \sum_{i=1}^{n} (m_i \dot{\vec{r}}_i) = m\dot{\vec{r}}_c$$

质点组的总动量恒等于质点组随质心做整体运动的动量，即

$$p = p_c = m\dot{r}_c = mv_c$$

§4.2　质点组的动量、角动量和动能

2 角动量

质点组对固定点（这里是指坐标原点）的角动量，是质点组中各质点对同一固定点的角动量（动量矩）之和，即

$$L=\sum_{i=1}^{N} r_i\times m_i v_i=\sum_{i=1}^{N} r_i\times m_i\dot{r}_i$$

$$=\sum_{i=1}^{N}(r_i'+r_c)\times m_i(\dot{r}_i'+\dot{r}_c)$$

$$=\sum_{i=1}^{N} r_i'\times m_i\dot{r}_i'+r_c\times m\dot{r}_c=L_c'+L_c$$

也就是质点组对定点的角动量由质点组随质心整体运动对定点的角动量，以及质点组中各质点相对于质心运动对质心的角动量之和

§4.2　质点组的动量、角动量和动能

3 动能

质点组的总动能等于质点组内各质点动能之和，即

$$T=\sum_{i=1}^{N}T_i=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{r}_i^2$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i(\dot{r}_i'+\dot{r}_c)\cdot(\dot{r}_i'+\dot{r}_c)=\frac{1}{2}m\dot{r}_c^2+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{r}_i'^2+\dot{r}_c\cdot\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{r}_i'$$

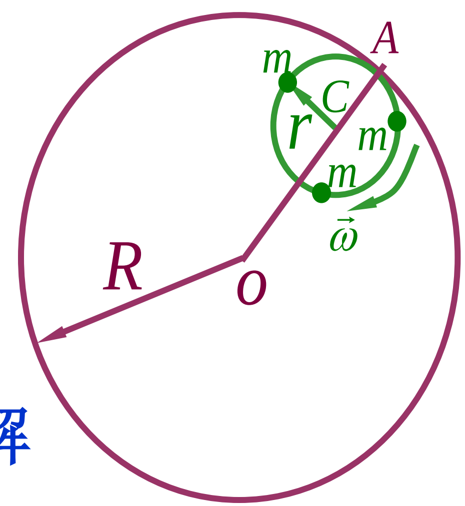
$$=\frac{1}{2}m\dot{r}_c^2+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{r}_i'^2=T_c+\sum_{i=1}^{N}T_i$$

质点组的总动能可分解为质点组随质心运动的动能和质点组相对于质心运动的动能，这个称为柯尼希定理。

§4.2　质点组的动量、角动量和动能

［例4.2］

三个质量都是m的相同质点，等间距地粘贴在半径为r的轻质圆盘的边缘，圆盘则沿固定的共面圆环内侧，以角速度 ω滚动，如图所示。设圆环的半径为R，求出此三个质点构成的质点组相对于圆环中心O点的动量、角动量和动能。

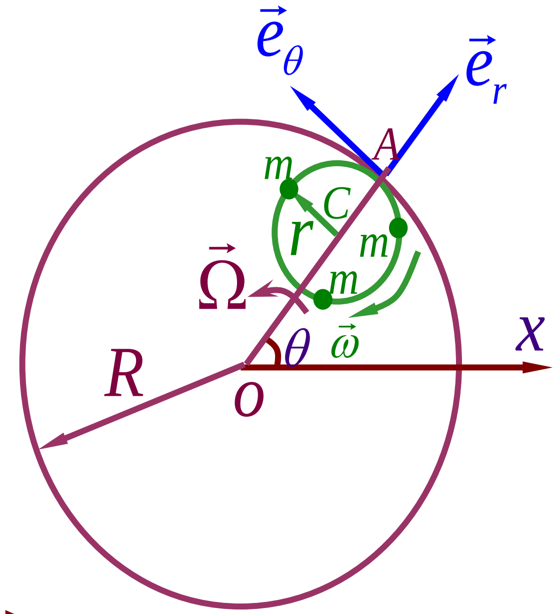


分析：　圆环不动，圆盘绕圆环匀速滚动但是圆盘上等间距地粘有三个相同质点可以把圆盘和一个质点当作质点组，其质心正好是圆盘的圆心。利用质心系求解

§4.2　质点组的动量、角动量和动能

解： 圆盘绕圆环匀速滚动，圆盘和圆环接触点速度为0

选取极坐标系较为简捷，如图所示



设圆盘绕*OA*转动的角速度为 Ω

对*C*点有：$\vec{v}_C = \vec{\Omega}\times\vec{r}_{OC} = \vec{\omega}\times\vec{r}_{AC}$

所以有 $\vec{\Omega} = \dfrac{\omega r_{AC}}{r_{OC}}\vec{e}_\theta = \dfrac{\omega r}{R-r}\vec{e}_\theta$

由于三个相同质点等间距地粘在圆盘上，

则质心正好是圆盘的圆心，利用质心系求解

质点组对圆环O点的动量为：$\vec{p}_O = \vec{p}_C = m\vec{v}_C = 3m\omega r\vec{e}_\theta$

§4.2　质点组的动量、角动量和动能

质点组对圆环*O*点的角动量为：

$$\vec{L}_O=\vec{L}_C+\vec{L}_C'=(R-r)\vec{e}_r\times 3m\vec{v}_C+3\vec{r}\times m(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$=3m\omega r(R-r)\vec{e}_z-3m\omega r^2\vec{e}_z$$

$$=3m\omega r(R-2r)\vec{e}_z$$

质点组对圆环*O*点的动能为：

$$T=T_C+T_C'=\frac{1}{2}\cdot 3m\cdot\vec{v}_C^{\,2}+3\cdot\frac{1}{2}m\vec{v}_m{}'^2$$

$$=\frac{3}{2}m\omega^2r^2+\frac{3}{2}m\omega^2r^2$$

$$=3m\omega^2r^2$$

§4.3　质点组运动的基本定理

1 动量定理和质心定理

质点组动量的时间变化率为　$\vec{p}=\vec{p}_c=\sum_{i=1}^{n}(m_i\dot{\vec{r}}_i)=m\dot{\vec{r}}_c$

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d\vec{p}_c}{dt}=\sum_{i=1}^{n}(m_i\ddot{\vec{r}}_i)=m\ddot{\vec{r}}_c=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(e)}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\vec{F}_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(e)}=\vec{F}^{(e)}$$

上式表示的是质点组的动量定理：质点组总动量的时间变化率等于质点组受到的外力总和，与内力无关。

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}^{(e)}\qquad\qquad \frac{d\vec{p}_c}{dt}=m\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2}=\vec{F}^{(e)}$$

--质心定理

质心的加速度决定于作用在质点组上的外力总和。

§4.3 质点组运动的基本定理

1 动量定理和质心定理

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{(e)} \qquad \frac{d\vec{p}_c}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = \vec{F}^{(e)}$$

质心的加速度决定于作用在质点组上的外力总和。

$$\Delta\vec{p} = \int_t^{t+\Delta t} \vec{F}^{(e)} dt = \vec{I}$$

$$\Delta\vec{p}_c = \int_t^{t+\Delta t} \vec{F}^{(e)} dt = \vec{I}$$

其中，**I**是作用在质点组的总冲量; Δp和Δp_c 是质点组受冲量作用前后，质点组总动量的变化。

§4.3　质点组运动的基本定理

1 动量定理和质心定理

结论：如果质点组不受外力作用或外力相互抵消时，质点组的总动量守恒，是一常矢量，质心做惯性运动；在某一方向外力分量为零，则在该方向的动量分量守恒，质心在该方向具有恒定的速度分量，这是质点组的动量守恒定律。

§4.3　质点组运动的基本定理

2 角动量定理

与质点角动量定理推导一样，用位矢叉乘质点组的牛二定律

先看第 i 个质点：　$\vec{r}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{F}_{ij}$

因　$\vec{r}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i = \dfrac{d}{dt}(\vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i) - \dot{\vec{r}}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \dfrac{d}{dt}(\vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i) = \dfrac{d\vec{L}_i}{dt}$

故对质点组来说，累加各方程有：

$$\sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i) = \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\vec{F}_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$$

§4.3　质点组运动的基本定理

即 $\sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{L}_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i$ 或 $\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}$ 或 $\Delta\vec{L}=\int_{t}^{t+\Delta t}\vec{M}dt$

显然，当 $\vec{M}=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i=0$ 时，$\vec{L}=\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i=\vec{c}$ 即角动量守恒

质点组的角动量定理是矢量式，所以在正交分解方向上仍然成立。角动量守恒也一样，可以在某一正交分解方向上，合力矩为零时，也满足此方向上角动量守恒

3 动能定理

$$\frac{dT}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2})=\sum_{i=1}^{n}[\dot{\vec{r}}_i\cdot(m_i\ddot{\vec{r}}_i)]=\sum_{i=1}^{n}[\dot{\vec{r}}_i\cdot(\vec{F}_i^{(e)}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\vec{F}_{ij})]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\dot{\vec{r}}_i\cdot\vec{F}_i^{(e)})+\sum_{i=1}^{n}(\dot{\vec{r}}_i\cdot\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\vec{F}_{ij})$$

或写为：

$$dT=\sum_{i=1}^{n}(\dot{\vec{r}}_i dt\cdot\vec{F}_i^{(e)})+\sum_{i=1}^{n}(\dot{\vec{r}}_i dt\cdot\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\vec{F}_{ij})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i^{(e)}\cdot d\vec{r}_i)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\vec{F}_{ij}\cdot d\vec{r}_i$$

$$=dW^{(e)}+dW^{(i)}$$

§4.3 质点组运动的基本定理

$$W^{(i)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\vec{F}_{ij}\cdot d\vec{r}_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(\vec{F}_{ij}\cdot d\vec{r}_i+\vec{F}_{ji}\cdot d\vec{r}_j)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\vec{F}_{ij}\cdot(d\vec{r}_i-d\vec{r}_j)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\vec{F}_{ij}\cdot d\vec{r}_{ij}$$

式中， $\vec{r}_{ij}=\vec{r}_i-\vec{r}_j$

从内力的表达式可知，质点组内力是否做功，

取决于任意两质点间在内力方向上是否有相对位移

$$dT=\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i^{(e)}\cdot d\vec{r}_i)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\vec{F}_{ij}\cdot d\vec{r}_{ij}=dW^{(e)}+dW^{(i)}$$

§4.3　质点组运动的基本定理

如果作用于质点的内力和外力都属于保守力，则有：

$$\vec{F}_i^{(e)}\cdot d\vec{r}_i=-dV_i^{(e)}(\vec{r}_i)$$

$$\vec{F}_{ij}\cdot d\vec{r}_{ij}=-dV_{ij}^{(i)}(\vec{r}_{ij})$$

于是动能定理可写为：

$$dT=-d\left(\sum_{i=1}^{n}V_i^{(e)}+\frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}V_{ij}^{(i)}\right)=-dV \quad \text{即} \quad d(T+V)=0$$

从而有质点组的机械能守恒定律：$T+V=E$

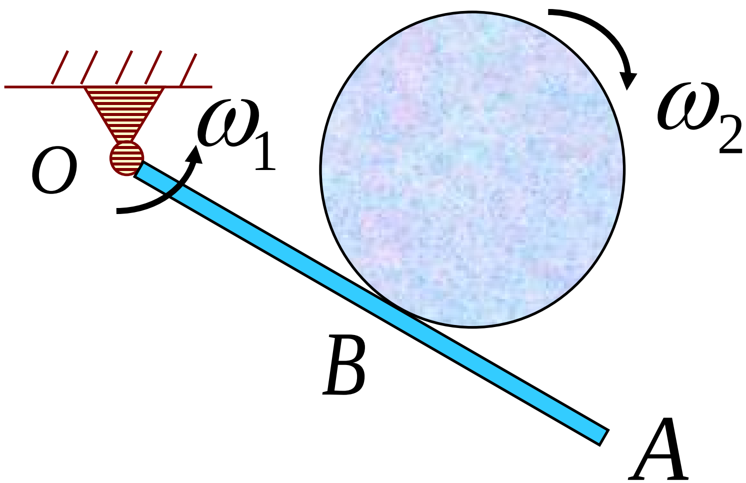
同样可得质心系下的动能定理：

$$d\sum_{i=1}^{n}T_i'=d\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i'^2\right)=\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i^{(e)}\cdot d\vec{r}_i')+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(\vec{F}_{ij}\cdot d\vec{r}_i')$$

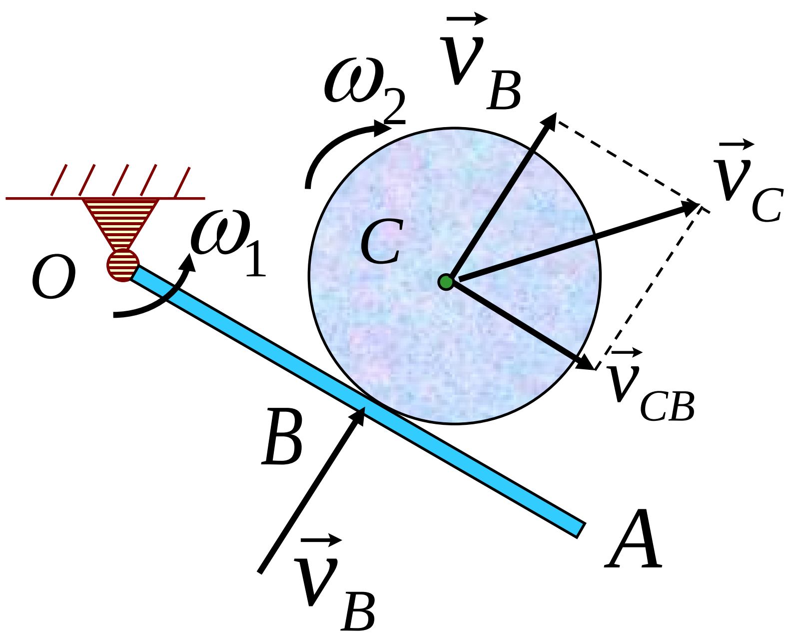
例1

已知：均质圆盘在***OA***杆上纯滚动，***m***＝**20kg**，***R***＝**100mm**，***OA***杆的角速度为 $\omega_1 = 1\text{rad/s}$，圆盘相对于***OA***杆转动的角速度为 $\omega_2 = 4\text{rad/s}$，$OB = 100\sqrt{3}\text{mm}$。

求：此时圆盘的动量。



解:



$$v_B = \omega_1 \cdot OB = 100\sqrt{3}\text{mm/s}$$

$$v_{CB} = (\omega_2 - \omega_1) \cdot R = 300\text{mm/s}$$

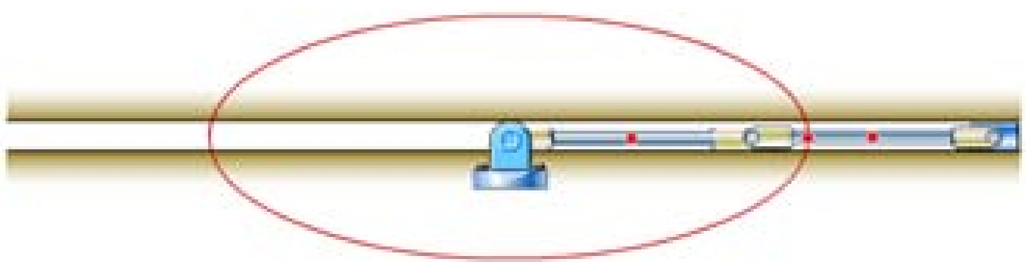
$$v_C = \sqrt{v_B^2 + v_{CB}^2} = 200\sqrt{3}\text{mm/s}$$

$$\vec{p} = m\vec{v}_C \quad \Rightarrow \quad p = 6.93\text{N} \cdot \text{s}$$

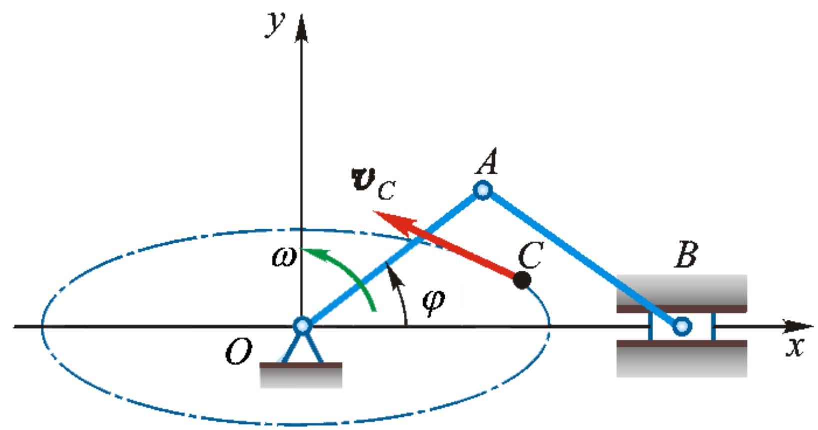
例2

已知: ω 为常量, 均质杆$OA = AB = l$, 两杆质量皆为 m_1, 滑块B 质量 m_2 .

求: 质心运动方程、轨迹及系统动量.



解: 设 $\varphi = \omega t$，质心运动方程为



$$x_C = \frac{m_1 \frac{l}{2} + m_1 \frac{3l}{2} + 2m_2 l}{2m_1 + m_2} \cos \omega t$$

$$= \frac{2(m_1 + m_2)}{2m_1 + m_2} l \cos \omega t$$

$$y_C = \frac{2m_1 \frac{l}{2}}{2m_1 + m_2} \sin \omega t = \frac{m_1}{2m_1 + m_2} l \sin \omega t$$

消去 t 得轨迹方程

$$[\frac{x_c}{2(m_1 + m_2)l/(2m_1 + m_2)}]^2 + [\frac{y_c}{m_1 l/(2m_1 + m_2)}]^2 = 1$$

系统动量沿x, y轴的投影为:

$$p_x = mv_{Cx} = m\dot{x}_C = -2(m_1 + m_2)l\omega \sin \omega t$$

$$p_y = mv_{Cy} = m\dot{y}_C = m_1 l\omega \cos \omega t$$

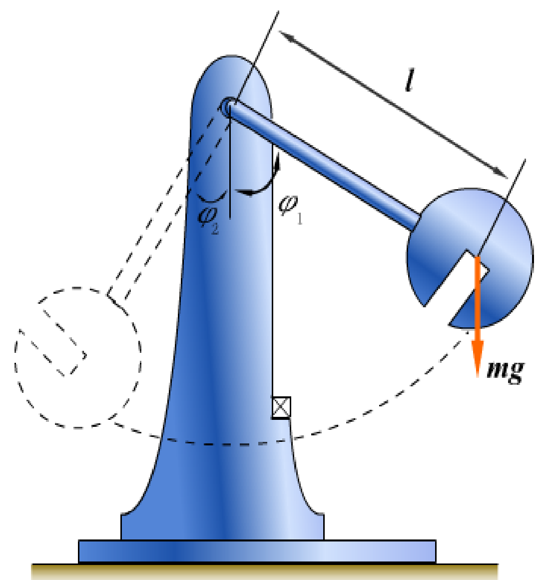
系统动量的大小为:

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = l\omega\sqrt{4(m_1 + m_2)^2 \sin^2 \omega t + m_1^2 \cos^2 \omega t}$$

例3

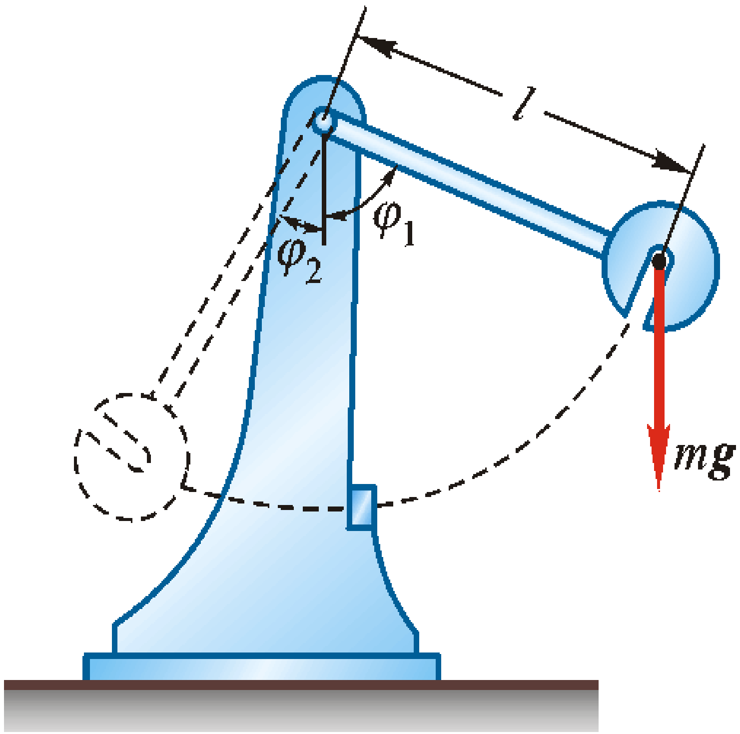
已知: 冲击试验机m=18kg，l=840mm，杆重不计，在$\varphi_1 = 70°$时静止释放，冲断试件后摆至$\varphi_2 = 29°$

求: 冲断试件需用的能量。



解:

$$T_1 = 0, T_2 = 0$$



$$0 - 0 = mgl(1 - \cos\varphi_1) -$$

$$mgl(1 - \cos\varphi_2) - W_k$$

得冲断试件需要的能量为 $W_k = 78.92\text{J}$

$$\alpha_k = \frac{W_k}{A}$$

冲击韧度：衡量材料抵抗冲击能力的指标。

【要点分析与总结】

1 质点组

（1） 质心：

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{m}$$

对于连续体：

$$\vec{r}_c = \frac{\int \vec{r}\,dm}{m}$$

（2） 内力与外力：

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ij}$$

且内力满足：

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

2 质点组运动的动量、角动量、动能

（1） 动量 $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}_c = \vec{p}_c$

（2） 角动量 $\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times m_i \dot{\vec{r}}_i + \vec{r}_c \times m\dot{\vec{r}}_c = \vec{L}_c' + \vec{L}_c$

（3） 动能 $T = \frac{1}{2} m\dot{\vec{r}}_c^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i'^2 = T_c + \sum_{i=1}^{N} T_i'$

3 质点组运动的基本定理

（1） 动量定理： $\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}^{(e)}$

质心定理： $m\ddot{\vec{r}}_c = \dot{\vec{P}} = \vec{F}^{(e)}$

（2）　角动量定理：$\dfrac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}$

$$\frac{d\vec{L}_c}{dt}=\vec{M}^{(e)}$$

$$\frac{d\vec{L}'_c}{dt}=\vec{M}'_c$$

（3）　动能定理：$dT=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\ d\vec{r}_i+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ij}\ d\vec{r}_i$

对质心：$dT'=\sum\vec{F}_i\ d\vec{r}'_i+\sum_{i,j=1;i\neq j}^{N}\vec{F}_{ij}\ d\vec{r}'$