

## 第一章 质点力学

### 运动学

1.1 一个物体沿着直线运动, 其加速度  $a = 4 + 3t$  (SI), 若  $x_0 = 5$ ,  $v_0 = 0$ , 计算该物体在  $t = 10$  s 时的速度和坐标.

解答: 任意时刻的速度

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a dt = \int_0^t (4 + 3t) dt = (4t + 1.5t^2) \Big|_0^t = 4t + 1.5t^2$$

将  $t = 10$  代入得  $v(10) = 190$  m/s

任意时刻的坐标

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t) dt = 5 + 2t^2 + 0.5t^3$$

将  $t = 10$  代入得  $x(10) = 705$  m

1.2 质点从坐标原点开始沿着  $x$  轴运动, 其速度为  $v(t) = 4t - \pi \sin \pi t$  (SI), 计算该物体在  $t = 10$  s 时的加速度和坐标.

解答: 加速度

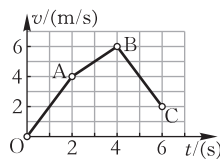
$$a(10) = \frac{dv}{dt} \Big|_{t=10} = 4 - \pi^2 \cos \pi t \Big|_{t=10} = 4 - \pi^2$$

任意时刻的坐标

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_0^t v(t) dt = \int_0^t (4t - \pi \sin \pi t) dt \\ &= (2t^2 + \cos \pi t) \Big|_0^t = 2t^2 + \cos \pi t - 1 \end{aligned}$$

将  $t = 10$  代入得  $x(10) = 200$  m

1.3 如下图所示, 一个物体沿着  $x$  轴运动, 其速度  $v(t)$  函数曲线分为三段. 问: 三个阶段的加速度各是多少? 三个阶段的位移各为多少?



总习题 1-3 图

解答: 加速度  $a = dv/dt$ , 其几何意义就是图线  $v(t)$  切线的斜率;

位移  $\Delta x = \int v(t) dt$  是速度曲线下方的面积.

OA 阶段的加速度  $a = \Delta v / \Delta t = 4/2 = 2$  m/s<sup>2</sup>;

位移  $\Delta x =$  OA 下方的面积  $= 4$  m

AB 阶段的加速度  $a = \Delta v / \Delta t = (6 - 4)/(4 - 2) = 1$  m/s<sup>2</sup>

位移  $\Delta x =$  AB 下方的面积  $= 10$  m

BC 阶段的加速度  $a = \Delta v / \Delta t = (2 - 6)/(6 - 4) = -2$  m/s<sup>2</sup>

位移  $\Delta x =$  BC 下方的面积  $= 8$  m

1.4 半径为  $R$  的轮子沿着  $x$  轴滚动, 其角速度是  $\omega$ , 轮子边缘某一个点 P 的轨迹称为“旋轮线”, 其轨迹方程为

$$\begin{cases} x = R\omega t - R \sin \omega t \\ y = R - R \cos \omega t \end{cases}$$

计算任意时刻的速率  $v$ 、加速度  $|a|$

解答：速度

$$v_x = \frac{dx}{dt} = R\omega - R\omega \cos \omega t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = R\omega \sin \omega t$$

速率

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R\omega \sqrt{(1 - \cos \omega t)^2 + \sin^2 \omega t} \\ &= R\omega \sqrt{2 - 2 \cos \omega t} = 2R\omega \sin \frac{\omega t}{2} \end{aligned}$$

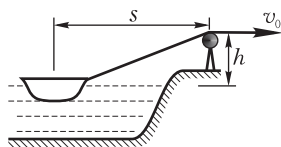
加速度

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = R\omega^2 \sin \omega t$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = R\omega^2 \cos \omega t$$

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = R\omega^2$$

1.5 如下图所示，在河堤上安装一个高于水面  $h$  的定滑轮，用绳子通过滑轮将水面上的船拉向岸边，收绳的速率  $v_0$  均匀不变。当船到河堤的水平距离为  $s$  时，船速  $v_s$  多大？（提示：船速是距离  $s$  缩短的快慢  $-ds/dt$ ，收绳的速率  $v_0$  是绳子缩短的快慢）。



总习题 1-5 图

解答：令绳子的长度为  $l$ 。由于绳子在缩短，所以  $v_0 = -dl/dt$ 。根据几何关系有

$$l^2 = s^2 + h^2$$

其中  $l, s$  都随着时间  $t$  变化，而  $h$  是常量。等式两边对时间  $t$  求导数得

$$\frac{d(l^2)}{dt} = \frac{d(s^2)}{dt} + \frac{d(h^2)}{dt}$$

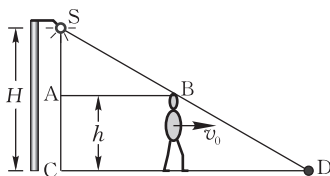
$$\frac{d(l^2)}{dl} \frac{dl}{dt} = \frac{d(s^2)}{ds} \frac{ds}{dt} + 0$$

$$2l \frac{dl}{dt} = 2s \frac{ds}{dt}$$

化简得

$$v_s = -\frac{ds}{dt} = -\frac{l}{s} \frac{dl}{dt} = \frac{\sqrt{s^2 + h^2}}{s} v_0$$

1.6 如下图所示，路灯距离地面  $H$ ，人的身高  $h$ ，若人以均匀的速率  $v_0$  远离路灯，那么人头顶在水平地面的阴影  $D$  以多大的速率  $V$  远离路灯杆？（提示：利用相似三角形）



总习题 1-6 图

解答：从图中可以看出人的速度就是  $\overline{AB}$  的变化率  $v_0 = d\overline{AB}/dt$ ，影子 D 的速率就是  $\overline{CD}$  的变化率  $V = d\overline{CD}/dt$ 。

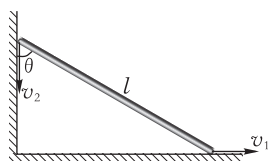
由三角形相似  $\triangle SAB \sim \triangle SCD$ ，可得到

$$\frac{\overline{AB}}{H-h} = \frac{\overline{CD}}{H}$$

注意到  $H, h$  都是常量，上式两边对时间求导可得

$$\frac{v_0}{H-h} = \frac{V}{H}, \quad V = \frac{H}{H-h} v_0$$

1.7 长度为  $l$  的梯子搭在直角墙边，在某时刻，梯子与墙壁的角度为  $\theta$ ，且梯子的下端向外移动的瞬时速率是  $v_1$ ，此刻梯子的上端向下滑动的速率  $v_2$  多大？



总习题 1-7 图

解答：设梯子的水平跨度为  $x$ ，垂直高度为  $y$ ，则

$$v_1 = |v_x| = \left| \frac{dx}{dt} \right|, \quad v_2 = |v_y| = \left| \frac{dy}{dt} \right|$$

将等式  $x^2 + y^2 = l^2$  两边对时间  $t$  求导数

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$$

即

$$2xv_x + 2yv_y = 0, \Rightarrow v_2 = \left| \frac{y}{x} \right| v_1 = \tan \theta v_1$$

令解：设梯子的水平跨度为  $x$ ，垂直高度为  $y$ ，则

$$y = \sqrt{l^2 - x^2} = (l^2 - x^2)^{1/2}$$

对时间  $t$  求导数

$$v_2 = |v_y| = \left| \frac{dy}{dt} \right| = \left| \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{l^2 - x^2}} \frac{dx}{dt} \right| = \tan \theta v_1$$

1.8 一个质点从静止出发，沿着半径  $r = 3 \text{ m}$  的圆周运动，其切向加速度  $a_t = 3 \text{ m/s}^2$ ，当总加速度与半径成  $45^\circ$  角时，计算所用的时间以及此期间所经过的路程。

解答：根据  $a_t = dv/dt$  可得  $dv = a_t dt$ ，

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a_t dt = 0 + \int_0^t 3 dt = 3t$$

角度为  $45^\circ$  时，切向加速度与法向加速度大小相等。将  $a_n = a_t$  展开可得

$$\frac{v^2}{r} = 3, \Rightarrow \frac{(3t)^2}{3} = 3, \Rightarrow t = 1 \text{ s}$$

根据  $v = ds/dt$  可知  $ds = v dt$ ，质点的位移

$$\Delta s = \int_0^1 v(t) dt = \int_0^1 3t dt = 1.5 \text{ m}$$

1.9 以国际单位制度量，某质点以初始角速度  $\omega_0 = 10$  做圆周运动，其角加速度  $\beta = -10e^{-t}$ 。(1)何时切向加速度与法向加速度大小相等？(2)质点转过的最大角位移是多少？

解答: 根据  $\beta = d\omega/dt$ , 任意时刻的角速度

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \beta dt = 10 - \int_0^t 10e^{-t} dt = 10e^{-t}$$

设圆周的半径为  $r$ . 当切向加速度与法向加速度大小时,

$$|\omega^2 r| = |\beta r|, \Rightarrow 10e^{-t} = 1, \Rightarrow t = \ln 10 \approx 2.30$$

根据  $\omega = d\theta/dt$ , 质点的角位移

$$\Delta\theta = \int_0^t \omega(t) dt = 10(1 - e^{-t})$$

从上式可以看出, 随着时间的增加, 角位移逐步增大. 当  $t \rightarrow \infty$ , 达到最大角位移  $\Delta\theta = 10$ .

1.10 某质点的运动规律为  $x = A \cos \omega t$ ,  $y = B \sin \omega t$ , 其中  $A, B, \omega$  都是常量. 证明  $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$  是常矢量.

解答:

$$\mathbf{r} = i x + j y = i A \cos \omega t + j B \sin \omega t$$

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} = -i \omega A \sin \omega t + j \omega B \cos \omega t$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \mathbf{v} &= A \cos \omega t \cdot \omega B \cos \omega t \mathbf{i} \times \mathbf{j} - B \sin \omega t \cdot \omega A \sin \omega t \mathbf{j} \times \mathbf{i} \\ &= \omega AB (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \omega AB \mathbf{k} \end{aligned}$$

1.11 质点沿直线运动, 加速度  $a = 4 - t^2$ , 式中  $a$  的单位为  $\text{m/s}^2$ ,  $t$  的单位为  $\text{s}$ . 如果当  $t = 3 \text{ s}$  时,  $x = 9 \text{ m}$ ,  $v = 2 \text{ m/s}$ , 求质点的运动方程.

解答: 在这里,  $t_0 = 3$ ,  $x_0 = 9$ ,  $v_0 = 2$ ,

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(t) dt = 2 + \int_3^t (4 - t^2) dt = 4t - \frac{1}{3}t^3 - 1 \text{ m/s}$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt = \frac{3}{4} - t + 2t^2 - \frac{1}{12}t^4$$

## 牛顿定律

1.12 粗糙的水平路面上放置质量  $m$  的重物, 摩擦系数  $\mu$ . 用大小恒定的力  $F$  拽拉, 拉力与水平方向的夹角  $\theta$  可以变化, 问  $\theta$  多大时重物获得的加速度最大?

解答: 设地面向上的支持力大小为  $N$ . 在垂直方向受力平衡

$$F \sin \theta + N = mg$$

在水平方向, 牛顿第二定律为

$$F \cos \theta - \mu N = ma$$

上述二式消去支持力  $N$  得

$$ma = F \cos \theta - \mu mg + \mu F \sin \theta$$

要使得加速度  $a$  最大, 就是要求上式等号右侧取得极大值. 根据微积分中的极值条件,

$$\frac{d}{d\theta} (F \cos \theta - \mu mg + \mu F \sin \theta) = 0$$

求解得

$$\theta = \arctan \mu$$

1.13 质量为  $m$  的子弹以  $v_0$  的初速度水平射入沙土墙壁中, 进入墙壁后, 它受到与速度成正比的水平摩擦阻力  $f = -kv$ . 计算子弹的速度随时间变化的函数关系.

解答: 由  $f = ma$  得

$$-kv = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dt$$

积分得

$$\ln v \Big|_{v_0}^v = -\frac{k}{m} t \Big|_0^t \Rightarrow v = v_0 e^{-\frac{k}{m} t}$$

1.14 质量为  $m$  的快艇在速度达到  $v_0$  时关闭发动机, 受到阻力而减速, 阻力大小与速度的平方成正比, 即  $f = -kv^2$ . 证明它在水面上再行驶距离  $x$  时的速度为  $v = v_0 e^{-kx/m}$ .

解答: 利用隐函数的求导法则

$$\begin{aligned} a = \frac{f}{m} = -\frac{k}{m} v^2 &\Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} v^2 \Rightarrow \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v = -\frac{k}{m} v^2 \\ \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{k}{m} v &\Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dx \Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\int_0^x \frac{k}{m} dx \\ \Rightarrow \ln(v/v_0) = -\frac{k}{m} x &\Rightarrow v = v_0 e^{-kx/m} \end{aligned}$$

1.15 以初速度  $v_0$  竖直上抛一个物体, 除重力外, 还受到空气阻力  $f = -kv$ , 计算上升的最大高度  $H$ .

解答: 以垂直向上为正方向, 由  $f = ma$  得

$$-kv - mg = m \frac{dv}{dt}$$

左右两边都乘以高度的微分  $dh$  得

$$-(kv + mg)dh = m \frac{dv}{dt} dh = m \frac{dh}{dt} dv = mvdv$$

分离变量得

$$\frac{m}{k} \frac{v}{v + mg/k} dv = -dh$$

积分

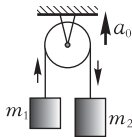
$$\frac{m}{k} \int_{v_0}^0 \frac{(v + mg/k) - mg/k}{v + mg/k} dv = -\int_0^H dh$$

注意上式中积分上下限的对应, 计算得

$$H = \frac{mv_0}{k} - \frac{m^2 g}{k^2} \ln \frac{v_0 + mg/k}{mg/k}$$

### 相对运动

1.16 如图所示, 重力场中的升降梯携带一个定滑轮以  $a_0$  加速上升. 定滑轮的质量以及摩擦忽略不计. 计算绳子中的张力  $T$ .



总习题1-16图

解答: 以定滑轮为参照系, 则该非惯性系中需要添加竖直向下的惯性力  $-ma_0$ .

设重物系统相对于定滑轮的加速度大小为  $a$ . 对于  $m_1$  列方程,

$$T - (m_1 g + m_1 a_0) = m_1 a$$

对于  $m_2$  列方程

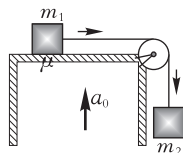
$$m_2 g + m_2 a_0 - T = m_2 a$$

综合上述两个等式, 可以得到

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} (g + a_0)$$

$$T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}(g + a_0)$$

1.17 如图所示, 重力场中的升降梯携带一个桌子以  $a_0$  加速上升. 质量为  $m_1$  的物体与桌面之间的摩擦系数为  $\mu$ , 定滑轮的质量以及摩擦忽略不计. 计算绳子中的张力  $T$ .



总习题1-17图

解答: 以桌子为参照系, 则该非惯性系中需要添加竖直向下的惯性力  $-ma_0$ .

设重物系统相对于桌子的加速度为  $a$ . 对于  $m_1$  列方程,

$$\begin{aligned} \text{水平方向} \quad T - \mu N &= m_1 a \\ \text{垂直方向} \quad m_1 g + m_1 a_0 &= N \end{aligned}$$

对于  $m_2$  列方程

$$\text{垂直方向} \quad m_2 g + m_2 a_0 - T = m_2 a$$

综合上述三个等式, 可以得到

$$\begin{aligned} a &= \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2}(g + a_0) \\ T &= \frac{m_1 m_2 (1 + \mu)}{m_1 + m_2}(g + a_0) \end{aligned}$$

### 动量

1.18 质量  $m = 0.5 \text{ kg}$  的物体沿直线运动, 其位移  $x = 4 \ln(1 + 2t) \text{ SI}$ . 计算  $0 < t < 2$  时间内物体受到的冲量.

解答: 物体的速度

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{8}{1 + 2t}$$

带入时间得

$$v_0 = 8, \quad v_2 = 1.6$$

根据定量定理,

$$I = \Delta p = mv_2 - mv_0 = -3.2 \text{ N} \cdot \text{s}$$

1.19 物体在空气中上抛, 它除了受到重力之外, 还会受到与速度方向相反的阻力  $f = kv$ . 根据冲量的定义证明在物体上升过程中和下落过程中, 空气阻力对物体的冲量大小相同.

解答: 只考虑冲量的大小. 在很短的一段时间  $dt$  内, 阻力的冲量为

$$dI = f dt = kv dt = k dl$$

其中  $dl = v dt$  是物体在这段时间内的路程. 可见阻力的冲量的大小与物体走过的路程成正比. 假设物体上升的最大高度为  $H$ , 则上升阶段和下落阶段的阻力冲量均为

$$I = \int_0^H k dl = k \int_0^H dl = kH$$

证毕.

1.20 超高压水切割又称水刀和水射流,它是将普通的水经过多级增压后所产生的高压水流,再通过一个极细的红宝石喷嘴以近千米每秒的速度喷射切割.假设喷嘴喷出的水流速率水从高压泵中以  $800 \text{ m/s}$  喷出,垂直冲击到某固体表面后速度降为零.固体表面受到水的压强有多大?已知水的密度  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ .

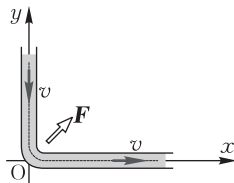
解答: 设水流截面积为  $A$ , 在  $dt$  时间内, 入射到固体表面的水流长度为  $vdt$ , 其质量  $dm = \rho Avdt$ , 动量为  $vdm = \rho Av^2 dt$ . 水流入射到表面后, 动量变为零. 在此过程中固体表面对于水流的冲量为  $Fdt$ . 根据动量定理

$$\rho Av^2 dt = Fdt$$

压强

$$P = F/A = \rho v^2 = 6.4 \times 10^8 \text{ Pa}$$

1.21 水平面上的一条输油管有一个直角拐弯. 已知管中的原油平均速度为  $v = 2.0 \text{ m/s}$ , 管道横截面积  $A = 100 \text{ cm}^2$ , 计算拐弯处受力的大小. 已知原油密度  $\rho = 0.80 \text{ t/m}^3$



总习题 1-21 图

解答: 解法一: 在  $dt$  时间内体积为  $Avdt$  的原油从管道的一侧流入并从另一侧流出, 其质量  $dm = \rho Avdt$ . 由于流入流出的原油动量大小相等而方向垂直, 故在此过程中动量变化量的大小为  $\sqrt{2}vdm$ . 根据动量定理

$$\sqrt{2}vdm = Fdt, \quad F = \sqrt{2}\rho Av^2 = 32\sqrt{2} \approx 45 \text{ N}$$

解法二: 在管道上建立直角坐标系, 原油从  $y$  轴正向流入, 从  $x$  正方向流出. 设管中的原油的总长度为  $L$ , 某时刻  $x$  方向流动的原油长度为  $x$ ,  $y$  方向流动的原油长度为  $L - x$ . 则原油的总动量为

$$\mathbf{p} = \rho A x v \mathbf{i} + \rho A (L - x) v (-\mathbf{j}) = -\rho A L \mathbf{j} + \rho A x v (\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

在上式中, 只有  $x$  是变化的, 且  $dx/dt = v$ , 根据牛顿第二定律

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \rho A \frac{dx}{dt} v (\mathbf{i} + \mathbf{j}) = \rho A v^2 (\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

这就是管道对原油的作用力,

$$F = \rho A v^2 |\mathbf{i} + \mathbf{j}| = \sqrt{2} \rho A v^2$$

1.22 质量为  $M$  的炮弹以速率  $v_0$  仰角  $\theta$  射出. 当炮弹升至最高点时, 水平向后射出质量为  $m$  的碎片, 二者的相对速率为  $u$  ( $u > 0$ ). 因为碎片的射出, 炮弹射程增加多少? 忽略空气阻力.

解答: 在爆炸的瞬间, 水平动量守恒. 炮弹爆炸前, 水平速度为  $v_0 \cos \theta$ , 设爆炸后炮弹的相对于地面的速度为  $v$ , 则碎片相对于地面向前运动的速度为  $v - u$ ,

$$M v_0 \cos \theta = m(v - u) + (M - m)v$$

爆炸前后炮弹水平速度的增量为

$$\Delta v = (v - v_0 \cos \theta) = mu/M$$

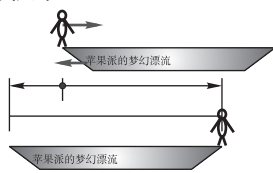
炮弹水平速度的变化并不影响垂直方向的运动. 炮弹上升到最高点花费的时间和从最高点下降的时间相同, 均为

$$T = v_0 \sin \theta / g$$

水平射程增加

$$\Delta v \cdot T = \frac{mu v_0 \sin \theta}{Mg}$$

1.23 一条质量  $m_1 = 100 \text{ kg}$  长度  $l = 3 \text{ m}$  的小船停在水面上, 质量  $m_2 = 50 \text{ kg}$  的人从船头走到船尾. 在此过程中小船的位移多大? 假定水的阻力很小.



总习题 1-23 图

解答: 解法一: 水平动量守恒. 只考虑动量大小, 可得到

$$m_1 v_1 = m_2 v_2, \quad m_1 \int_0^t v_1 dt = m_2 \int_0^t v_2 dt$$

速率的积分就是路程, 所以

$$m_1 l_1 = m_2 l_2$$

其中人相对于地面前行的路程  $l_1$  与船相对于地面后退的路程  $l_2$  之和就是船长  $l$

$$l_1 + l_2 = l$$

联立上述两式得

$$l_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} = 1 \text{ m}$$

解法二: 以人前进的方向为正方向. 水平动量守恒, 可得到

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0, \quad m_1 v_1 + m_2 (v_2 - v_1) + m_2 v_1 = 0$$

其中  $(v_2 - v_1)$  是人相对于船的速度, 它的积分就是船长  $l$

$$m_1 l_1 + m_2 l + m_2 l_1 = 0$$

$$l_1 = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} = -1 \text{ m}$$

这里的负号表示船的位移与人的位移方向相反.

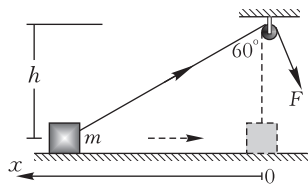
### 功与能量

1.24 一维空间的保守力场  $F = 1 - 2x$ , 规定  $E_p(x = 0.5) = 0$ , 求此力场的势能函数.

解答:

$$E_p(x) = \int_x^{0.5} F dx = \int_x^{0.5} (1 - 2x) dx = x^2 - x + 0.25$$

1.25 如图所示, 通过高度为  $h$  的定滑轮, 用恒定大小的拉力  $F$  将质量为  $m$  的物体从  $60^\circ$  处拉到垂直位置. 忽略滑轮以及绳子的质量, 忽略一切摩擦. 物体开始处于静止状态, 计算物体通过垂直位置时的速度.



总习题 1-25 图

解答: 当物体处在中间任意一个位置时, 拉力的水平分量

$$F_x = -F \cos \theta = -F \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}$$

初始位置的坐标为  $x_0 = h \tan 60^\circ = \sqrt{3}h$ , 拉力做功

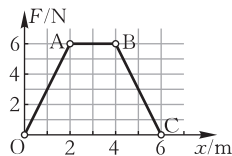
$$W = \int_{x_0}^0 F_x dx = -F \int_{x_0}^0 \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} dx = Fh$$



根据动能定理,

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2}mv^2, \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2Fh}{m}}$$

1.26 质量  $m = 2 \text{ kg}$  的物体沿着  $x$  轴运动, 初速度  $v_0 = 1 \text{ m/s}$ . 该物体受到沿着  $x$  轴正向的作用力  $F(x)$ , 从  $x = 0$  运动至  $x = 6 \text{ m}$ . 问在该过程中  $F$  的冲量多大?



总习题 1-26 图

解答: 力  $F$  做的功

$$W = \int_0^6 F(x) dx = \text{图线下方的面积} = 24 \text{ J}$$

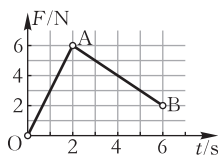
根据动能定理

$$W = \frac{1}{2}mv_6^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow v_6 = 5 \text{ m/s}$$

根据动量定理,

$$I = mv_6 - mv_0 = 8 \text{ N} \cdot \text{s}$$

1.27 质量  $m = 2 \text{ kg}$  的物体沿着  $x$  轴运动, 初速度  $v_0 = 2 \text{ m/s}$ . 该物体受到沿着  $x$  轴正向的作用力  $F(t)$  如下图所示. 问在  $0 < t < 6 \text{ s}$  这段时间内,  $F$  做功多大?



总习题 1-27 图

解答: 力  $F$  的冲量

$$I = \int_0^6 F(t) dt = \text{图线下方的面积} = 22 \text{ N} \cdot \text{s}$$

根据动量定理  $I = mv - mv_0$  得末态速度

$$v = (I + mv_0)/m = (22 + 4)/2 = 13 \text{ m/s}$$

根据动能定理, 力所做的功等于动能增量

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = 13^2 - 2^2 = 165 \text{ J}$$

1.28 用铁锤将钉子敲入墙壁. 设钉子受到的阻力与其钉入的深度成正比. 若第一次敲击能钉入  $1.00 \text{ cm}$ , 则第二次敲击能将钉子再钉入多深? 设两次敲击时铁锤的速度相同.

解答: 在两次敲击过程中, 钉子获得的动能是相同的(为什么), 墙壁与钉子间的摩擦力  $f = -kx$  做功也相同. 令第二次敲击后, 钉子深度为  $h$

$$W = - \int_0^1 kx dx = - \int_1^h kx dx$$

解得  $h = \sqrt{2}$ , 第二次将钉子敲入了  $\sqrt{2} - 1 = 0.41 \text{ cm}$

1.29 一颗速率为  $v_0 = 700 \text{ m/s}$  的子弹, 打穿第一块木板后, 速率降低为  $v_1 = 500 \text{ m/s}$ . 如果它继续打穿同样的一块木板, 速率将下降为多大?

解答: 穿透木板需要做功是相同的. 第一次做功

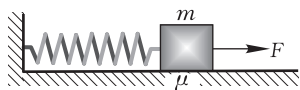
$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_0^2) = -12m \times 10^4 \quad (1)$$

设第二次穿透木板后, 速度是  $v$ ,

$$W = \frac{1}{2}m(v^2 - v_1^2) \quad (2)$$

联立等式 (1) 等式 (2) 解得  $v = 100 \text{ m/s}$

1.30 如下图所示, 水平放置的轻质弹簧劲度系数为  $k$ , 左端固定在墙上, 右端拴着质量  $m$  的方块. 方块与地面的摩擦系数  $\mu$ . 弹簧开始无变形, 方块受到水平向右的恒定外力  $F$  后开始向右运动. 在外力  $F$ 、摩擦力以及弹性力的作用下, 方块的最大速率以及最大位移是多少?



总习题1-30图

解答: 弹簧的力是保守力; 除此之外, 拉力  $F$  以及摩擦力  $-\mu mg$  做功等于系统机械能的增量.

$$Fx - \mu mgx = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 - 0 \quad (*)$$

(1) 加速度为零时, 速率达到极值, 此时物体受到的合力为零

$$F = kx + \mu mg, \quad x = \frac{F - \mu mg}{k}$$

将上式代入式 (\*), 可以转化为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= (F - \mu mg)x - \frac{1}{2}kx^2 \\ &= (kx)x - \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}x^2 \\ &= \frac{1}{2}k \left( \frac{F - \mu mg}{k} \right)^2 \end{aligned}$$

最大速率

$$v = \frac{F - \mu mg}{\sqrt{mk}}$$

(2) 速率  $v = 0$  时, 达到最大位移

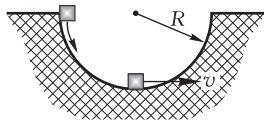
$$Fx - \mu mgx = \frac{1}{2}kx^2$$

最大位移

$$x_1 = 0(\text{略去}), \quad x_2 = \frac{2(F - \mu mg)}{k}$$

综合

1.31 如下图所示, 在坚硬的地面上挖掘一个半径为  $R$  的半球形槽, 一个很小的质量为  $m$  的物体从槽的顶端滑下, 物体与槽之间存在摩擦. 已知当物体滑动到槽的底部时, 物体受到向上的支持力为  $N$ , 计算下滑过程中摩擦力所做的功.



总习题1-31图

解答: 在滑槽底部, 由牛顿定理得

$$N - mg = ma_n = m \frac{v^2}{R}$$

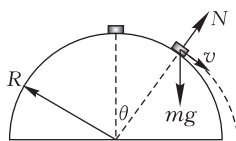
得滑块的动能

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(NR - mgR)$$

在下落过程中, 摩擦力做功等于机械能增量

$$W_f = (E_k - mgR) - 0 = \frac{1}{2}NR - \frac{3}{2}mgR$$

1.32 如下图所示, 从半径为  $R$  的半球形屋顶上滑落一块冰. 当下落到什么位置时冰块脱离屋顶? 此时的速度多大? 忽略一切摩擦.



总习题 1-32 图

解答: 设滑落至  $\theta$  角度时速度是  $v$ , 根据机械能守恒

$$mgR = mgR \cos \theta + \frac{1}{2}mv^2$$

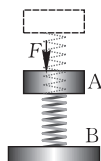
在法线方向

$$mg \cos \theta - N = m \frac{v^2}{R}$$

冰块脱离屋顶的条件是支持力  $N = 0$ . 联立上述两式得

$$v = \sqrt{\frac{2Rg}{3}}, \quad \cos \theta = \frac{2}{3}$$

1.33 两块平板 A、B 的质量分别是  $m_A$ ,  $m_B$ , B 板水平放在地面上, A 板水平放置在 B 板的上方. 两板之间垂直放置一个劲度系数  $k$  的弹簧, 其两端分别固定在两块平板的重心位置. 在 A 板上施加竖直向下的恒定压力  $F$ , 使得弹簧压缩, A 板下降. 迅速撤去压力后, A 板弹起. 问压力  $F$  多大才能保证 A 板弹到最高处时, B 板刚好被提起?



总习题 1-33 图

解答: 以弹簧不变形的位置作为弹性势能与重力势能的零点.

若弹簧向上拉伸使得 B 板刚好被提起, 则弹簧的伸长量为  $h = m_B g / k$ , 此时系统的机械能为

$$E = \frac{1}{2}kh^2 + m_A gh = \frac{m_B^2 g^2}{2k} + \frac{m_A m_B g^2}{k}$$

设在开始时刻, 弹簧由于压力  $F$  以及重力  $m_A g$  的作用而压缩  $x$  ( $x > 0$ ) 时, 则系统的机械能

$$E = \frac{1}{2}kx^2 - m_A gx$$

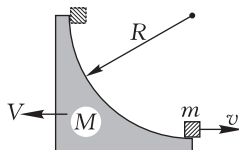
利用机械能守恒定律, 结合上述两式, 可以得到

$$x = \frac{m_A g}{k} \pm \frac{(m_A + m_B)g}{k} = \frac{2m_A g}{k} + \frac{m_B g}{k} \quad (\text{舍去负根})$$

弹簧被压缩时, 力的平衡方程给出

$$F + m_A g = kx, \quad x = kx - m_A g = (m_A + m_B)g$$

1.34 如下图所示, 半径  $R$  的四分之一光滑圆槽放在光滑的地面上, 小滑块从圆槽顶端下滑, 当落至底部时, 相对于地面的速度多大? 此时滑块对圆槽的压力多大? 假定圆槽与滑块质量相等  $M = m$ .



总习题 1-34 图

解答: 滑块运动至底部时, 滑块与圆槽之间的作用力为竖直方向, 因此二者水平方向均没有加速度. 以圆

槽为参照物, 滑块相对于圆槽做圆周运动. 在底部, 滑块相对圆槽的速度为  $v + V$ ,

$$N - mg = m \frac{(v + V)^2}{R}$$

在下落过程中, 没有耗散力做功, 机械能守恒

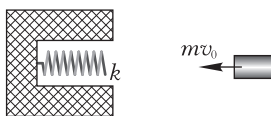
$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

滑块与圆槽在水平方向不受外力, 水平动量守恒

$$mv = MV$$

联立上述三式以及  $m = M$ , 可得到  $v = V = \sqrt{gR}$ ,  $N = 5mg$

1.35 如下图所示, 动量是  $mv_0$  的小钢柱打到一个总质量为  $M$  的静止弹簧靶上, 弹簧的劲度系数为  $k$ . 忽略一切摩擦阻力, 计算弹簧的最大压缩长度.



总习题 1-35 图

解答: 当钢柱慢慢减速、靶慢慢加速, 使得二者的速度相等时, 弹簧被压缩的长度最大. 水平方向没有阻力, 水平动量守恒. 设共同的速度是  $v$ , 最大压缩长度是  $s$ ,

$$mv_0 = (m + M)v$$

钢柱与软弹簧的碰撞可以看做完全弹性的

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(m + M)v^2 + \frac{1}{2}ks^2$$

联立上述两式可得到  $s = v_0 \sqrt{\frac{mM}{k(m + M)}}$

1.36 长度为  $l$  的细线拴着一个质量为  $M$  的沙袋. 动量为  $mv_0$  的子弹水平射入沙袋, 问沙袋向上摆动的最大高度是多少?

解答: 子弹打入沙袋的过程中, 有内摩擦力做功, 机械能不守恒. 但是水平动量守恒

$$mv_0 = (m + M)v$$

沙袋与子弹上摆过程中, 只有重力做功, 机械能守恒

$$\frac{1}{2}(m + M)v^2 = (m + M)gh$$

解得  $h = \frac{1}{2g} \left( \frac{mv_0}{m + M} \right)^2$

1.37 质量  $M$  的软木块停在摩擦系数为  $\mu$  的水平面上, 质量  $m$  的子弹水平射入木块后, 木块能够滑行  $s$  距离. 问子弹的水平初速度  $v_0$  多大?

解答: 子弹打木块的过程时间很短, 摩擦力的冲量忽略, 因此水平动量守恒

$$mv_0 = (m + M)v_1$$

二者结合后, 摩擦力做功, 最终停止. 摩擦力做的功等于机械能的增加量

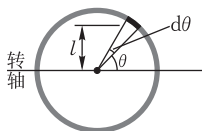
$$-\mu(m + M)gs = 0 - \frac{1}{2}(m + M)v_1^2$$

从上述两式中消去  $v_1$ , 即可得到  $v_0 = \frac{m + M}{m} \sqrt{2\mu gs}$

## 第二章 连续介质力学

## 转动惯量

2.1 半径为  $R$  质量为  $m$  的均匀细圆环绕它的一条直径转动, 根据定义计算它的转动惯量.

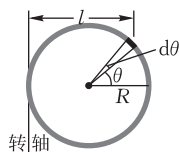


总习题2-1图

解答: 以环心为坐标原点建立极坐标, 水平坐标轴为转轴. 每个质元到转轴的距离为  $l = R \sin \theta$ , 对应的圆心角为  $d\theta$ . 整个圆周的角度为  $2\pi$ , 总质量为  $m$ , 则该质元的质量为  $dm = (m/2\pi)d\theta$

$$\begin{aligned} J &= \int_L l^2 dm = \int_0^{2\pi} R^2 \sin^2 \theta \frac{m}{2\pi} d\theta \\ &= \frac{mR^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{mR^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{2} mR^2 \end{aligned}$$

2.2 半径为  $R$  质量为  $m$  的均匀细圆环绕它的一条切线转动, 根据定义计算它的转动惯量.

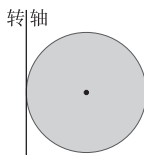


总习题2-2图

解答: 以环心为坐标原点建立极坐标, 每个质元到转轴的距离为  $l = R + R \cos \theta$ , 对应的圆心角为  $d\theta$ . 整个圆周的角度为  $2\pi$ , 总质量为  $m$ , 则该质元的质量为  $dm = (m/2\pi)d\theta$

$$\begin{aligned} J &= \int_L l^2 dm = \int_0^{2\pi} R^2 (1 + \cos^2 \theta) \frac{m}{2\pi} d\theta \\ &= \frac{mR^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{3 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{3}{2} mR^2 \end{aligned}$$

2.3 已知均匀薄圆盘质量为  $m$ , 半径为  $R$ , 根据平行轴定理和正交轴定理, 证明若圆盘绕它自己边缘的一条切线旋转, 则转动惯量为  $5mR^2/4$ .



总习题2-3图

解答: 以圆盘中心为原点建立直角坐标系, 使得  $z$  轴垂直于圆盘, 则  $J_z = \frac{1}{2} mR^2$ . 根据垂直轴定理有,  $J_x + J_y = J_z$ . 又根据对称性可知  $J_x = J_y$ , 故有  $J_y = \frac{1}{4} mR^2$ . 作切线平行于  $y$  轴, 则根据平行轴定理,  $J = J_y + mR^2 = \frac{5}{4} mR^2$

2.4 在半径为  $R_2$  的均匀薄圆盘中心再挖去半径为  $R_1$  的圆盘, 剩余的圆环总质量为  $m$ . 证明剩余部分相对于中垂轴的转动惯量为  $m(R_1^2 + R_2^2)/2$ .

解答: 圆盘的面密度为

$$\sigma = \frac{m}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$$

将该圆盘切割为细圆环, 其转动惯量

$$dJ = r^2 dm = r^2 \cdot (\sigma 2\pi r dr) = \frac{2m}{R_2^2 - R_1^2} r^3 dr$$

总转动惯量

$$J = \frac{2m}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{m}{2} (R_2^2 + R_1^2)$$

另解: 设圆盘的面密度为  $\sigma$ , 半径为  $R_2$  的大圆盘质量为  $m_2 = \sigma\pi R_2^2$ , 挖去的小圆盘质量为  $m_1 = \sigma\pi R_1^2$ , 剩余部分的质量  $m = \sigma\pi(R_2^2 - R_1^2)$ .

大圆盘的转动惯量

$$J_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 = \frac{1}{2} \sigma\pi R_2^4$$

小圆盘的转动惯量

$$J_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 = \frac{1}{2} \sigma\pi R_1^4$$

剩余部分的转动惯量

$$J = J_2 - J_1 = \frac{1}{2} \sigma\pi (R_2^4 - R_1^4) = \frac{1}{2} [\sigma\pi (R_2^2 - R_1^2)] (R_2^2 + R_1^2) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (R_2^2 + R_1^2)$$

2.5 用薄铁皮焊接一个密封的圆桶, 其直径以及高度均为  $D$ , 总质量是  $m$ . 该圆桶相对于中心轴线的转动惯量多大?

解答: 设单位面积铁皮的质量为  $k$ , 则圆桶端盖的质量为

$$m_1 = k\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{k}{4}\pi D^2$$

圆桶侧壁的质量为

$$m_2 = k(\pi D)D = k\pi D^2$$

圆桶的总质量

$$m = 2m_1 + m_2 = \frac{3}{2}k\pi D^2, \quad \Rightarrow k\pi = \frac{2}{3} \frac{m}{D^2}$$

两个端盖可视为均匀圆盘, 其总转动惯量为

$$2 \times \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{k\pi}{16} D^4$$

侧壁的转动惯量为

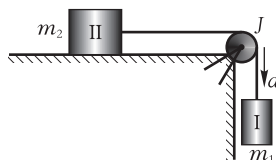
$$m_2 \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{k\pi}{4} D^4$$

圆桶总转动惯量为

$$J = \frac{k\pi}{16} D^4 + \frac{k\pi}{4} D^4 = \frac{5k\pi}{16} D^4 = \frac{5}{24} m D^2$$

转动定律

2.6 如下图所示, 重物的质量  $m_1 > m_2$ ; 定滑轮的半径为  $r$ , 转动惯量为  $J$ ; 软绳与滑轮之间无相对滑动, 滑轮的轮轴处无摩擦, 物体 II 与水平支撑面之间的摩擦系数为  $\mu$ . 计算重物加速度  $a$  的大小.



总习题2-6图

解答：设滑轮两侧绳子的张力分别为  $F_1, F_2$ 。

$$\text{重物1加速下落: } m_1g - F_1 = m_1a \quad (1)$$

$$\text{重物2向右加速: } F_2 - \mu m_2g = m_2a \quad (2)$$

$$\text{定滑轮加速转动: } F_1r - F_2r = J\beta = Ja/r \quad (3)$$

式 (1)  $\times r$  + (2)  $\times r$  + (3) 得

$$m_1gr - \mu m_2gr = r(m_1 + m_2 + J/r^2)a \implies a = \frac{m_1g - \mu m_2g}{m_1 + m_2 + J/r^2}$$

另解：假设重物下落距离  $l$  时，速率为  $v$ ，则此刻滑轮的角速度  $\omega$ 。根据动能定理，重力与摩擦力做功等于系统动能增量，

$$m_1gl - \mu m_2gl = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

将  $\omega = v/r$  代入上式化简，可得到

$$(m_1g - \mu m_2g)l = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + J/r^2)v^2$$

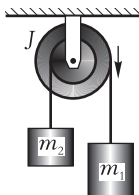
在该式中， $l$  与  $v$  是随着时间变化的。两边对时间求导，可得到

$$(m_1g - \mu m_2g)\frac{dl}{dt} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + J/r^2)2v\frac{dv}{dt}$$

其中  $\frac{dl}{dt} = v$ ,  $\frac{dv}{dt} = a$ ,

$$a = \frac{m_1g - \mu m_2g}{m_1 + m_2 + J/r^2}$$

2.7 如下图所示，定滑轮由两个半径不同的轮子拼接而成，总转动惯量为  $J$ ，半径分别为  $r_1, r_2$ ，且  $r_1 > r_2$ ；重物的质量  $m_1 > m_2$ ；软绳与滑轮之间无相对滑动，滑轮的轮轴处无摩擦，计算滑轮的角加速度  $\beta$  的大小。



总习题2-7图

解答：设悬挂两个重物的绳子的张力分别为  $F_1, F_2$ 。定滑轮转动一周，重物1下降的距离大于重物2上升的距离。因此两个重物运动的加速度是不同的；而定滑轮的角加速度是共同的。

$$\text{重物1加速下落 } m_1g - F_1 = m_1a_1 = m_1r_1\beta \quad (1)$$

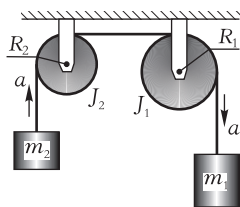
$$\text{重物2加速上升 } F_2 - m_2g = m_2a_2 = m_2r_2\beta \quad (2)$$

$$\text{定滑轮加速转动 } F_1r_1 - F_2r_2 = J\beta \quad (3)$$

式 (1)  $\times r_1$  + (2)  $\times r_2$  + (3) 得

$$m_1gr_1 - m_2gr_2 = (m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + J)\beta \implies \beta = \frac{m_1gr_1 - m_2gr_2}{m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + J}$$

2.8 如下图所示，两个定滑轮的半径分别为  $R_1, R_2$ ，转动惯量分别为  $J_1, J_2$ ；绳子的质量忽略不计，两端分别悬挂的重物质量为  $m_1, m_2$ ；软绳与滑轮之间无相对滑动，滑轮的轮轴处无摩擦，计算重物的加速度  $a$  的大小。



总习题2-8图

解答：设悬挂两个重物的绳子的张力分别为  $F_1$ ,  $F_2$ ，两定滑轮之间的水平绳子张力为  $F_0$ 。两个滑轮的线速度、线加速度相同，但是角速度、角加速度不等。

$$\text{重物1加速下落} \quad m_1 g - F_1 = m_1 a \quad (1)$$

$$\text{重物2加速上升} \quad F_2 - m_2 g = m_2 a \quad (2)$$

$$\text{滑轮1顺时针转动} \quad F_1 R_1 - F_0 R_1 = J_1 \beta_1 = J_1 a / R_1 \quad (3)$$

$$\text{滑轮2顺时针转动} \quad F_0 R_2 - F_2 R_2 = J_2 \beta_2 = J_2 a / R_2 \quad (4)$$

式(1) + (2) + (3)  $\div R_1$  + (4)  $\div R_2$  得

$$m_1 g - m_2 g = (m_1 + m_2 + J_1 / R_1^2 + J_2 / R_2^2) a$$

$$a = \frac{m_1 g - m_2 g}{m_1 + m_2 + J_1 / R_1^2 + J_2 / R_2^2}$$

另解：利用动能定理求解。重物1下落的距离与重物2上升的距离相同，设为  $h$ 。重力做功等于系统动能的增量。

$$m_1 g h - m_2 g h = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2$$

其中  $\omega_1 = v / R_1$ ,  $\omega_2 = v / R_2$ ，代入上式得

$$(m_1 - m_2) g h = \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + J_1 / R_1^2 + J_2 / R_2^2) v^2$$

两边对时间求导

$$(m_1 - m_2) g \frac{dh}{dt} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + J_1 / R_1^2 + J_2 / R_2^2) 2v \frac{dv}{dt}$$

其中  $\frac{dh}{dt} = v$ ,  $\frac{dv}{dt} = a$ ，代入即可得

$$a = \frac{(m_1 - m_2) g}{m_1 + m_2 + J_1 / R_1^2 + J_2 / R_2^2}$$

2.9 某通风扇在角速度为  $\Omega$  时撤去动力，叶片受到空气阻力矩而减速。假设阻力矩的大小与转速成正比，比例系数为  $k$ ；叶片的转动惯量为  $J$ ；问多长时间后转速降为初始值的一半？此时叶片转过了多少转？

解答：根据转动定律  $M = J\beta = J d\omega / dt$ ,

$$-k\omega = J \frac{d\omega}{dt}$$

$$\int_{\Omega}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{k}{J} \int_0^t dt \Rightarrow \omega(t) = \Omega e^{-kt/J}$$

令  $\omega = \Omega/2$ ，可得到  $t' = J \ln 2 / k$ 。

在此期间，叶片转过的角度为

$$\Delta\theta = \int_0^{t'} \omega(t) dt = -\Omega \frac{J}{k} e^{-kt/J} \Big|_0^{t'} = \frac{\Omega J}{2k}$$

转过的转数为

$$\frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{\Omega J}{4\pi k}$$

另解：第二问可以有另外一种解法。

$$-k\omega = J \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = J \frac{d\omega}{d\theta} \omega$$



分离变量, 积分

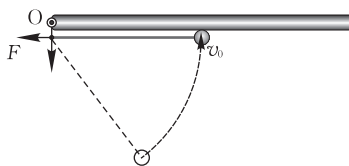
$$\int_0^{\theta'} d\theta = -\frac{J}{k} \int_{\Omega}^{\Omega/2} d\omega$$

计算得

$$\theta' = \frac{\Omega J}{2k}$$

### 角动量

2.10 如图所示, 光滑水平桌面上, 长为  $H$  质量为  $m_1$  的均匀细棒能绕一端自由转动. 开始时, 细棒静止于水平桌面上. 现有长度为  $r = H/2$  的轻质细线牵引质量为  $m_2$  的小球, 在水平桌面内以速度  $v_{20}$  垂直撞击细棒并粘在一起. 细线的固定点与细棒的转轴近似重合. 求细棒和小球一起运动时的角速度  $\Omega$ .



总习题2-10图

解答: 将细棒与小球看做系统. 水平桌面的支撑力平行于转轴, 所以不予考虑. 在水平方向存在的外力是由细线以及细棒的转轴产生的, 所以水平方向的动量不守恒. 但是这两个力是通过转轴的, 力矩为零, 因此该系统的角动量守恒.

小球的转动惯量  $J_2 = m_2 r^2 = m_2 H^2 / 4$ , 初始角速度  $\omega_{20} = v_{20} / r = 2v_{20} / H$ , 在碰撞之前, 小球的角动量

$$J_2 \omega_{20} = \frac{1}{2} m_2 v_{20} H$$

碰撞后, 小球与细棒一起运动, 相对于转轴的转动惯量为

$$J_1 + J_2 = \frac{1}{3} m_1 H^2 + \frac{1}{4} m_2 H^2$$

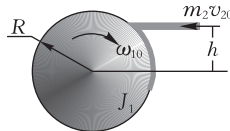
根据角动量守恒定律,

$$\frac{1}{2} m_2 v_{20} H = \left( \frac{1}{3} m_1 H^2 + \frac{1}{4} m_2 H^2 \right) \Omega$$

可得

$$\Omega = \frac{6m_2 v_{20}}{(4m_1 + 3m_2)H}$$

2.11 如下图所示, 转动惯量  $J_1$  半径为  $R$  的定滑轮以角速度  $\omega_{10}$  顺时针转动. 总质量  $m_2$  初速度  $v_{20}$  的一束液态黏胶逆时针方向直射到滑轮边缘. 滑轮与黏胶一起转动的角速度多大?



总习题2-11图

解答: 系统的角动量守恒. 以顺时针为正方向, 黏结之前系统的总角动量为

$$J_1 \omega_{10} - m_2 v_{20} h$$

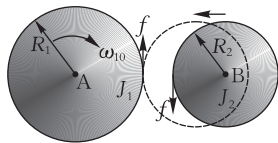
设黏结之后的角速度为  $\omega$ . 黏胶形成一个薄圆环, 其转动惯量为  $m_2 R^2$ , 所以系统的角动量为

$$(J_1 + m_2 R^2) \omega$$

由角动量守恒得

$$J_1 \omega_{10} - m_2 v_{20} h = (J_1 + m_2 R^2) \omega, \Rightarrow \omega = \frac{J_1 \omega_{10} - m_2 v_{20} h}{J_1 + m_2 R^2}$$

2.12 如下图所示, 转动惯量  $J_1$  半径为  $R_1$  的定滑轮 A 以角速度  $\omega_{10}$  顺时针转动. 转动惯量  $J_2$  半径为  $R_2$  的滑轮 B 初始静止, 缓慢的靠近滑轮 A 并通过边缘的摩擦力以达到共同的转动线速度. 共同的转动线速度多大?



总习题2-12图

解答: 两个滑轮的转动轴不相同, 角动量的参考标准不一致, 因此不能用角动量守恒. 设共同的线速度是  $v$ , 末态角速度分别为  $\omega_1, \omega_2$ , 则必有

$$v = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \quad (1)$$

设两轮之间的摩擦力大小为  $f$ , 对于 A 滑轮进行分析有

$$-\int (f R_1) dt = J_1 \omega_1 - J_1 \omega_{10} \quad (2)$$

对于 B 滑轮进行分析有

$$\int (f R_1) dt = J_2 \omega_2 \quad (2)$$

联立 (2), (3) 两式得

$$J_1 \omega_{10} = J_1 \omega_1 + J_2 \omega_2$$

再把 (1) 式代入得

$$J_1 \omega_{10} = J_1 \frac{v}{R_1} + J_2 \frac{v}{R_2}, \Rightarrow v = \frac{J_1 \omega_{10}}{J_1/R_1 + J_2/R_2}$$

2.13 质量为  $m_1$  的均匀圆盘在水平面内以角速度  $\omega_0$  无摩擦的转动, 圆盘边缘停着一只质量为  $m_2$  的小虫. 如果小虫爬到圆盘的中心, 圆盘的角速度变为多大?

解答: 令圆盘的半径为  $R$ , 小虫在边缘时, 系统的总转动惯量为

$$J_0 = \frac{1}{2} m_1 R^2 + m_2 R^2$$

小虫爬到圆盘的中心后, 其转动半径为零, 故系统的总转动惯量为  $J = \frac{1}{2} m_1 R^2$ .

在小虫爬行过程中, 无外力矩, 所以系统总角动量守恒,

$$J_0 \omega_0 = J \omega, \quad \omega = \frac{m_1 + 2m_2}{m_1} \omega_0$$

2.14 水平的均匀圆盘质量为  $m$ , 半径为  $R_1$ , 可以绕中垂轴无摩擦的转动; 圆盘上有一个质量为  $m$  的人; 开始时, 系统静止不动. 当人在圆盘上绕中心轴以半径  $R_2$  转动时, 圆盘必然倒转. 若人相对于圆盘的速度是  $v$ , 问圆盘倒转的角速度多大?

解答: 设人对地的角速度为  $\omega_{20}$ , 圆盘对地角速度为  $\omega_{10}$ , 则人相对于圆盘的角速度为

$$\omega_{21} = \omega_{20} - \omega_{10} = v/R_2$$

圆盘的转动惯量为  $mR_1^2/2$ , 人的转动惯量为  $mR_2^2$ . 根据角动量守恒有

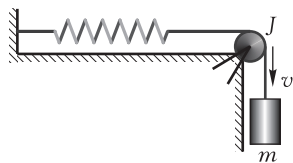
$$\frac{1}{2} m R_1^2 \cdot \omega_{10} + m R_2^2 \cdot \omega_{20} = 0$$

联立上述二式消去  $\omega_{20}$ , 可得到

$$|\omega_{10}| = \frac{2R_2 v}{2R_2^2 + R_1^2}$$

转动能量

2.15 如下图所示, 定滑轮半径为  $r$ , 转动惯量为  $J$ ; 软绳与滑轮之间无相对滑动, 滑轮的轮轴处无摩擦; 弹簧的劲度系数为  $k$ ; 系统刚开始处于静止状态且弹簧无变形. 计算物体  $m$  的最大下落速率以及最大下落距离.



总习题2-15图

**解答:** 重物下落过程中, 只有弹簧和重力做功, 机械能守恒. 设下落高度  $h$  时, 重物的速率为  $v$ , 则滑轮的角速度为  $\omega = v/r$ , 以刚开始下落的位置作为弹性势能和重力势能的零点, 则有

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}kh^2 + (-mgh)$$

化简为

$$\frac{1}{2}(m + J/r^2)v^2 = mgh - \frac{1}{2}kh^2 \quad (*)$$

在下落过程中, 首先是重力大于弹性力, 加速下落; 然后弹性力大于重力, 减速下落;

当弹性力等于重力时, 加速度为零, 下落速度最大, 即  $mg = kh$ ,  $h = mg/k$ , 代入式 (\*) 得最大速率

$$v_m = \frac{mg}{\sqrt{mk + Jk/r^2}}$$

当下落的速率  $v = 0$  时, 下落的距离最大. 将  $v = 0$  代入式 (\*) 得

$$h_m = \frac{2mg}{k}$$

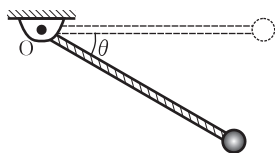
**另解:** 根据式 (\*), 速率  $v$  取得极大值时, 等价于式 (\*) 右侧的二次函数  $mgh - \frac{1}{2}kh^2$  取得极大值. 该二次函数的图像是一条开口向下的抛物线, 与横轴有两个交点,

$$mgh - \frac{1}{2}kh^2 = 0, \Rightarrow h_1 = 0, h_2 = \frac{2mg}{k}$$

抛物线的最高点必然位于两个根的中点  $h = \frac{mg}{k}$ , 将它代入式 (\*) 即可得到最大速度  $v_m$ .

因为  $v^2 \geq 0$ , 故式 (\*) 的右侧  $mgh - \frac{1}{2}kh^2 \geq 0$ , 从抛物线的图像可以看出  $0 \leq h \leq \frac{2mg}{k}$ ,  $h$  的极大值  $h_m = \frac{2mg}{k}$ .

2.16 如下图所示, 长度为  $D$ , 质量为  $M$  的均匀细棒可以绕端点自由转动, 另一端固定一个质量为  $m$  的小球. 若系统从水平位置开始摆动, 当摆动  $\theta$  角时, 角速度多大?



总习题2-16图

**解答:** 系统的总转动惯量  $J = \frac{1}{3}MD^2 + mD^2$ . 当摆动  $\theta$  角时, 细棒的重心下降  $\frac{1}{2}D \sin \theta$ , 小球重心下降  $D \sin \theta$ . 在下落过程中, 重力做功转化为系统的动能

$$Mg \cdot \frac{1}{2}D \sin \theta + mg \cdot D \sin \theta = \frac{1}{2}J\omega^2$$

将  $J$  代入, 计算得

$$\omega = \sqrt{\frac{(3M + 6m)g \sin \theta}{(M + 3m)D}}$$

**另解:** 利用“重力矩做功等于动能增量”来求解.

系统转动至任意角度  $\theta$  时, 棒的重力矩为  $Mg \cdot \frac{1}{2}D \cos \theta$ , 球的重力矩为  $mg \cdot D \cos \theta$ , 重力矩做功

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\theta M d\theta = \int_0^\theta \left( Mg \cdot \frac{1}{2}D \cos \theta + mg \cdot D \cos \theta \right) d\theta \\ &= Mg \cdot \frac{1}{2}D \sin \theta + mg \cdot D \sin \theta \end{aligned}$$

可以看到重力矩做的功与重力做的功, 其结果是相同的.

用动能定理  $W = \frac{1}{2}J\omega^2$  即可得到最终结论.

### 流体

2.17 自来水管从地面延伸至楼顶. 地面部分内径 4 cm, 流速 2 m/s, 压强  $3 \times 10^5$  Pa; 楼顶的高度为 5 m, 水管内径 2 cm, 计算楼顶水管中的水压. 重力加速度取  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

解答: 已知  $v_1 = 2 \text{ m/s}$ ,  $D_1 = 4 \text{ cm}$ ,  $p_1 = 3 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $h_1 = 0$ ,  $D_2 = 2 \text{ cm}$ ,  $h_2 = 5 \text{ m}$ . 根据连续性方程

$$v_1 S_1 = v_2 S_2, \quad v_1 \frac{\pi D_1^2}{4} = v_2 \frac{\pi D_2^2}{4}$$

得  $v_2 = 8 \text{ m/s}$ .

根据伯努利方程

$$p_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

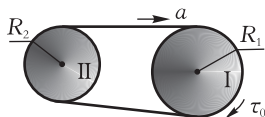
代入数据

$$3 \times 10^5 + 0 + \frac{1}{2} \times 10^3 \times 2^2 = p_2 + 10^3 \times 9.8 \times 5 + \frac{1}{2} \times 10^3 \times 8^2$$

计算得  $p_2 = 2.21 \times 10^5 \text{ Pa}$

### 综合

2.18 如下图所示, 两个定滑轮通过皮带连在一起, 半径分别为  $R_1$ ,  $R_2$ , 转动惯量分别为  $J_1$ ,  $J_2$ ; 皮带的质量忽略不计, 与滑轮之间无相对滑动; 滑轮的轮轴处无摩擦; 若在滑轮 I 上施加大小为  $M_0$  的外力矩, 计算该滑轮的角加速度的大小.



总习题2-18图

解答: 两个滑轮的线速度、线加速度相同, 但是角速度、角加速度不同.

假设滑轮 I 转过角度  $\theta_1$  时, 两个滑轮的角速度分别为  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ . 根据动能定理

$$M_0 \theta_1 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2$$

两个滑轮用皮带相连, 所以其线速度相等

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$$

联立上述二式消去  $\omega_2$  得

$$M_0 \theta_1 = \frac{1}{2} \left( J_1 + \frac{J_2 R_1^2}{R_2^2} \right) \omega_1^2$$

上式两边对时间  $t$  求导, 可得到

$$M_0 \omega_1 = \frac{1}{2} \left( J_1 + \frac{J_2 R_1^2}{R_2^2} \right) \cdot 2\omega_1 \beta_1$$

消去  $\omega_1$ ,

$$\beta_1 = \frac{M_0}{J_1 + J_2 R_1^2 / R_2^2}$$

另解: 设上层皮带的张力为  $F_u$ , 下层皮带的张力为  $F_d$ . 两个滑轮的切线加速度相等

$$R_1 \beta_1 = R_2 \beta_2 = a \quad (1)$$

令顺时针转动为正向, 对于滑轮 I

$$M_0 + (F_d - F_u)R_1 = J_1\beta_1 = J_1a/R_1 \quad (2)$$

对于滑轮 II

$$(F_u - F_d)R_2 = J_2\beta_2 = J_2a/R_2 \quad (3)$$

式 (2)  $\div R_1$  + 式 (3)  $\div R_2$  得

$$a = \frac{M_0/R_1}{J_1/R_1^2 + J_2/R_2^2}$$

角加速度

$$\beta_1 = \frac{a}{R_1} = \frac{M_0}{J_1 + J_2R_1^2/R_2^2}$$

### 第三章 静电场

#### 电荷与电场

3.1 如下图所示, 长为  $L$  的直线上均匀分布有线密度为  $\lambda$  的正电荷. 在直线延长线上与直线一端相距  $a$  ( $a > 0$ ) 的位置放置了一个电量为  $+q$  的点电荷. 计算该电荷受到的静电力的大小.



总习题 3-1 图

解答: 以直线的右端为坐标原点, 左方为正方向. 在坐标为  $x$  处取一段长度为  $dx$  的线段, 其电荷量为  $dQ = \lambda dx$ , 该电荷元在  $q$  处激发的电场强度为

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 (a+x)^2}$$

由于该电场的方向不变化, 因此总电场为

$$E = \int_0^L \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 (a+x)^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left. \frac{-1}{(a+x)} \right|_0^L = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{(a+L)a}$$

电荷  $q$  受到的电场力大小为

$$F = qE = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{(a+L)a}$$

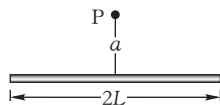
另解: 电荷元  $dQ$  与  $+q$  的作用力为

$$dF = \frac{q dQ}{4\pi\epsilon_0 (a+x)^2} = \frac{q\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 (a+x)^2}$$

因为所有的作用力都在同一个方向上, 故总作用力为

$$F = \int_0^L \frac{q\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 (a+x)^2} = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{(a+L)a}$$

3.2 如下图所示, 长为  $2L$  的直线上均匀分布有线密度为  $\lambda$  的正电荷. 计算在直线的中垂线上与直线相距为  $a$  的位置的电场强度.



总习题 3-2 图

解答: 本题需要根据“微元”思想求解.

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

我们需要将这个表达式用具体的坐标表示. 以棒的中心为原点, 线电荷方向为  $x$  轴,  $y$  轴经过  $P$  点. 令电荷元的坐标为  $x$ , 长度为  $dx$ , 其带电量  $dq = \lambda dx$ , 到  $P$  点的距离为  $r = \sqrt{x^2 + a^2}$ .

根据电荷的对称性, 总电场一定是垂直向上, 因此我们只需要计算电场的  $y$  分量.

$$dE_y = dE \cos \theta = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \cos \theta = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + a^2)} \cdot \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

总电场

$$E = \int_{-L}^L dE_y = \int_{-L}^L \frac{a\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 (\sqrt{x^2 + a^2})^3}$$

这个积分需要换元处理, 从图中可以看出:

$$\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad x = a \tan \theta \Rightarrow dx = a \sec^2 \theta d\theta$$

代入上式得

$$E = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda d\theta}{4\pi\epsilon_0 a \sec \theta} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \sin \theta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

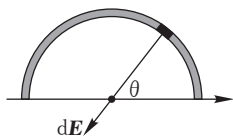
从图中可以看出, 积分上限  $x_2 = L$ , 积分下限  $x_1 = -L$ ,

$$\sin \theta_2 = \frac{x_2}{\sqrt{a^2 + x_2^2}} = \frac{L}{\sqrt{a^2 + L^2}}, \sin \theta_1 = \frac{x_1}{\sqrt{a^2 + x_1^2}} = \frac{-L}{\sqrt{a^2 + L^2}}$$

所以

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \frac{L}{\sqrt{a^2 + L^2}}$$

3.3 如下图所示, 用细绝缘线弯成的半圆形环, 半径为  $R$ , 其上均匀地携带正电荷  $Q$ , 求圆心  $O$  点处的电场强度  $E$ . 提示: 电荷元  $dq = \lambda dl = \lambda R d\theta$



总习题3-3图

解答: 从图的对称性可以发现, 总电场是垂直向下的,

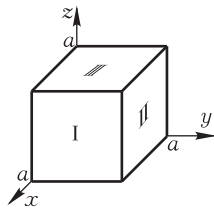
$$dE_{\perp} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin \theta = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin \theta$$

其中电荷线密度  $\lambda = Q/(\pi R)$ . 总电场垂直向下

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{2\epsilon_0 \pi^2 R^2}$$

### 电通量

3.4 如下图所示, 有一立方形的闭合曲面, 边长  $a = 0.1$  m, 已知空间的场强分布为  $E = (200i + 300j + 100k)$  V/m, 分别计算通过表面 I、II、III 的电通量.



总习题3-4图

解答: 各个平面的面积  $S = a^2 = 0.01$ , 以立方体的外法线为正方向, 可得到

$$S_1 = 0.01i, S_2 = 0.01j, S_3 = 0.01k,$$

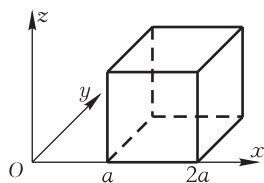
根据电通量的定义

$$\Phi_1 = E \cdot S_1 = (200i + 300j + 100k) \cdot 0.01i = 2 \text{ V} \cdot \text{m}$$

$$\Phi_2 = (200i + 300j + 100k) \cdot 0.01j = 3 \text{ V} \cdot \text{m}$$

$$\Phi_3 = (200i + 300j + 100k) \cdot 0.01k = 1 \text{ V} \cdot \text{m}$$

3.5 如下图所示, 有一立方形的闭合曲面, 边长  $a = 0.1$  m, 已知空间的场强分布为  $E_x = bx$ ,  $E_y = E_z = 0$ ,  $b = 1000$  V/m<sup>2</sup>. (1)求通过该闭合面的总电通量; (2)求该闭合面内的净电荷量.



总习题3-5图

解答: (1) 因为电场只有  $x$  分量, 所以只有  $x$  方向的两个平面存在通量. 当电场线与面积垂直(与面积的法线平行)时, 电通量=电场×面积

在  $a$  位置, 电场穿入平面, 通量为负值

$$\Phi_a = -E_x \cdot a^2 \Big|_{x=a} = -ba^3 = -1$$

在  $2a$  位置, 电场穿出平面, 通量为正

$$\Phi_{2a} = E_x \cdot a^2 \Big|_{x=2a} = 2ba^3 = 2$$

总通量为  $\Phi = -1 + 2 = 1 \text{ V} \cdot \text{m}$ .

(2) 根据高斯定理

$$\Phi = q/\epsilon_0 \Rightarrow q = \epsilon_0 \Phi = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}$$

3.6 设匀强电场的场强  $\mathbf{E}$  与半径为  $R$  的半球面的对称轴平行, 计算通过此半球面的电场强度通量.

解答: 构造一个半径为  $R$  的圆形平面, 将其与半球面拼合为一个完整的闭合曲面. 若均匀电场的电场线从平面穿过, 必然从半球面穿过. 因此通过半球面的电通量与通过平面的通量相同

$$\Phi = E \cdot S = E \cdot \pi R^2$$

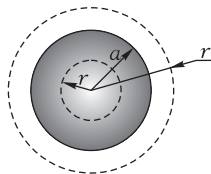
3.7 将电量为  $q$  的点电荷放在一个立方体的顶点上, 则通过立方体表面的总电通量大小为多少?

解答: 电荷所在平面的通量为零, 其它三个面的通量为  $q/(24\epsilon_0)$ , 总通量为  $q/(8\epsilon_0)$

高斯定理

3.8 在半径为  $a$  的球形空间中分布着体密度为  $\rho$  的均匀电荷, 证明球体内外的电场分布为

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \mathbf{e}_r, & r < a \\ \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r, & r \geq a \end{cases}$$



总习题3-8图

解答: 根据对称性, 球体内外的电场方向一定是沿着半径方向的. 在距离球心为  $r$  处, 场强大小  $E$  一定是相等的. 构造如图中虚线所示的半径为  $r$  的闭合高斯面, 在该闭合球面处, 场强的大小相等且处处与球面垂直, 电通量=电场×面积,

$$\Phi_e = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 4\pi r^2$$

若  $r < a$ , 则该高斯面内的电荷量为

$$q_{\text{in}} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

若  $r \geq a$ , 则该高斯面内的电荷量为

$$q_{\text{in}} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi a^3$$



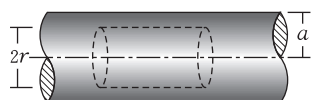
根据高斯定理  $\Phi_e = q_{\text{in}}/\epsilon_0$  得

$$E \cdot 4\pi r^2 = \begin{cases} \rho \cdot \frac{4}{3\epsilon_0} \pi r^3, & r < a \\ \rho \cdot \frac{4}{3\epsilon_0} \pi a^3, & r \geq a \end{cases}$$

化简, 并考虑到  $\mathbf{E}$  的方向沿着半径  $\mathbf{e}_r$  方向, 可得证.

3.9 横截面半径为  $a$  的无限长圆柱空间中均匀分布有体密度为  $\rho$  的电荷, 根据高斯定理证明圆柱内外空间的电场分布为

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_r, & r < a \\ \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r, & r \geq a \end{cases}$$



总习题3-9图

解答: 根据对称性, 电场方向垂直于中心轴并沿着半径方向, 即  $\mathbf{e}_r$  的方向. 构造一个长度为  $h$ , 半径为  $r$  的圆柱面. 显然, 圆柱左右两个端面与电场平行, 电通量为零. 只有圆柱的筒状侧面有电通量. 在筒状侧面处, 场强大小相等, 且始终与侧面垂直, 电通量=场强×面积,

$$\Phi_e = \Phi_{\text{左}} + \Phi_{\text{右}} + \Phi_{\text{侧}} = 0 + 0 + E \cdot S_{\text{侧}} = E \cdot 2\pi r \cdot h$$

若  $r < a$ , 则该高斯面内的电荷量为

$$q_{\text{in}} = \rho \cdot (\pi r^2 \cdot h)$$

若  $r > a$ , 则该高斯面内的电荷量为

$$q_{\text{in}} = \rho \cdot (\pi a^2 \cdot h)$$

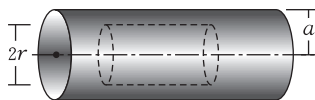
根据高斯定理  $\Phi_e = q_{\text{in}}/\epsilon_0$  得

$$E \cdot 2\pi r \cdot h = \frac{1}{\epsilon_0} \times \begin{cases} \rho \cdot \pi r^2 \cdot h, & r < a \\ \rho \cdot \pi a^2 \cdot h, & r \geq a \end{cases}$$

继续化简并添加电场方向  $\mathbf{e}_r$  即可得结论.

3.10 某无限长均匀带电空心圆筒面半径为  $a$ , 电荷线密度为  $\lambda$ , 证明圆筒面内外的电场分布为

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0, & r < a \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r, & r > a \end{cases}$$



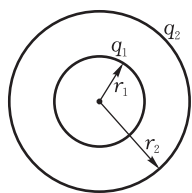
总习题3-10图

解答: 根据对称性, 电场方向垂直于中心轴并沿着半径方向, 即  $\mathbf{e}_r$  的方向. 构造一个长度为  $l$ , 半径为  $r$  的圆柱面. 显然, 圆柱的两个底面与电场平行, 电通量为零. 只有圆柱的筒状侧面有电通量, 电通量=场强×面积= $E \cdot (2\pi r \cdot l)$ . 根据高斯定理  $\Phi_e = q_{\text{in}}/\epsilon_0$  得

$$E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{1}{\epsilon_0} \times \begin{cases} 0, & r < a \\ \lambda l, & r > a \end{cases}$$

继续化简并添加电场方向  $\mathbf{e}_r$  即可得结论.

3.11 如下图所示, 均匀带电的两个同心球壳半径分别为  $r_1, r_2$ , 总电量分别为  $q_1, q_2$ , 计算空间的电场分布.



总习题3-11图

解答: 根据对称性, 球体内外的电场方向一定是沿着半径方向的. 设距离球心为  $r$  处, 场强大小为  $E$ , 电通量  $\Phi_e = E \cdot 4\pi r^2$ . 根据高斯定理  $\Phi_e = q_{in}/\epsilon_0$  得

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \times \begin{cases} 0, & r < r_1 \\ q_1, & r_1 < r < r_2 \\ q_1 + q_2, & r_2 < r \end{cases}$$

继续化简并添加电场方向  $\mathbf{e}_r$  即可得

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0, & r < r_1 \\ \frac{q_1}{\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r, & r_1 < r < r_2 \\ \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r, & r_2 < r \end{cases}$$

3.12 厚度为  $a$  的无限大均匀带电平板, 电荷体密度为  $\rho$ , 判定其周围电场的方向并计算电场的大小.



总习题3-12图

解答: 以板的中心对称面为界, 将空间分为两个区域. 空间电场与平板垂直, 并且向两侧发散. 构造一个小的柱形闭曲面横跨中心对称面的两侧并且在两侧的高度相等, 设柱形的半高度为  $l$ , 底面积为  $A$ . 显然, 只有柱形的两个底面有电通量,  $\Phi_e = 2EA$ . 根据高斯定理  $\Phi_e = q_{in}/\epsilon_0$  得

$$2EA = \frac{1}{\epsilon_0} \times \begin{cases} \rho \cdot (2Al), & l < a/2 \\ \rho \cdot (Aa), & l \geq a/2 \end{cases}$$

化简得

$$E = \begin{cases} \frac{\rho l}{\epsilon_0}, & l < a/2 \\ \frac{\rho a}{2\epsilon_0}, & l \geq a/2 \end{cases}$$

这里的  $l$  也是场点与对称中心面的距离.

### 电势

3.13 正方形四个顶点上各放置一个电量  $q = 2 \text{ nC}$  的点电荷, 各顶点距离中心点  $A$  的距离为  $r = 8 \text{ cm}$ , 若将试探电荷  $q_0 = 6 \text{ } \mu\text{C}$  从  $A$  点移动至无穷远处, 电场力做功多大?

解答: 电荷周围的电场非常复杂, 不要用定义计算功. 根据保守力做功特点: 电场力做功等于电势能的减小量

$$W_{A \rightarrow \infty} = q_0 U_A - q_0 U_\infty = q_0 U_A$$

事实上, 根据电势能的定义, 将电荷从  $A$  点移动到无穷远处的参考点, 电场力做的功就是电荷在  $A$  处的电势能.

中心点 A 的电势

$$U_A = 4 \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = 4 \times 9.0 \times 10^9 \times \frac{2 \times 10^{-9}}{8 \times 10^{-2}} = 900$$

电场力做功

$$W_{A \rightarrow \infty} = q_0 U_A = 5.4 \text{ mJ}$$

3.14 无限长带电直线沿着  $x$  轴放置, 电荷线密度为  $\lambda$ ;  $y$  轴正向有两个点, 座标分别为  $y_1, y_2$  ( $y_2 > y_1 > 0$ ), 计算两点之间的电压  $U_{12}$ .

解答: 无限长直线电荷周围的电场与直线垂直, 场强大小的分布为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}$$

根据电势的定义计算

$$U_{12} = \int_{y_1}^{y_2} E dy = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} dy = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{y_2}{y_1}$$

3.15 长为  $L$  的直线上均匀分布有线密度为  $\lambda$  的电荷. 在直线延长线上与导线一端相距  $a$  的位置放置了一个电量为  $q$  的点电荷. 若将该电荷移动至无穷远处, 电场力做功多大?

解答: 根据叠加原理计算  $a$  位置的电势

$$U_a = \int_L \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{\lambda dx}{x+a} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{a+L}{a}$$

电场力做功

$$W_{a \rightarrow \infty} = q_0 U_{a\infty} = q_0 U_a = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{a+L}{a}$$

3.16 两个同心的均匀带电球面, 半径分别为  $r_1, r_2$  ( $r_1 < r_2$ ); 携带的电量分别为  $q_1, q_2$ , 写出空间各个区域的电势表达式.

解答: 根据叠加原理, 空间任意位置的电势为两个球面电荷电势的和. 球面电荷周围的电势分布为

$$U(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}, & r \leq R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, & r > R \end{cases}$$

距离球心为  $r$  且  $r < r_1$  的位置, 位于两个球面的内部. 两个球面电荷在这个内部位置产生的电势之和为

$$U(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

距离球心  $r_1 < r < r_2$  的位置, 位于球面 1 的外部, 而在球面 2 的内部, 电势之和为

$$U(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

在  $r_2 < r$  处, 两个球面产生的电势之和为

$$U(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

3.17 两个均匀带电的同心球壳半径分别为  $r_1 = 10 \text{ cm}$ ,  $r_2 = 30 \text{ cm}$ ; 电量分别为  $q_1 = 10 \text{ nC}$ ,  $q_2 = 15 \text{ nC}$ ; 计算距离球心  $r = 20 \text{ cm}$  以及  $r = 50 \text{ cm}$  处的电势.

解答:  $r = 20 \text{ cm}$  处于两个球壳之间, 故

$$U(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} = 9 \times 10^9 \times \left( \frac{10 \times 10^{-9}}{0.2} + \frac{15 \times 10^{-9}}{0.3} \right) = 900 \text{ V}$$

$r = 50 \text{ cm}$  处于两个球壳之外,

$$U(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r} = 9 \times 10^9 \times \left( \frac{10 \times 10^{-9}}{0.5} + \frac{15 \times 10^{-9}}{0.5} \right) = 450 \text{ V}$$

3.18 半径为  $R$  的均匀带电圆盘, 电荷面密度为  $\sigma$ ; 以无穷远为势能零点, 计算圆心  $O$  处的电势. 提示: 将圆盘切割为许多同心圆环.

解答: 将圆盘切割为许多半径为  $r$ , 宽度为  $dr$  的窄圆环, 每个圆环的面积为  $dA = 2\pi r dr$ , 带电量  $dq = \sigma dA$ , 该圆环在中心  $O$  处的电势为

$$dU = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma dr}{2\epsilon_0}$$

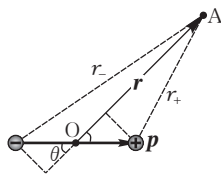
总电势

$$U = \int_0^R \frac{\sigma dr}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$$

3.19 如下图所示, 电偶极子  $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ , 证明无限远处的  $A$  点电势为

$$U = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

其中  $\mathbf{r}$  是从偶极子中心  $O$  指向  $A$  点的位置矢量.



总习题3-19图

解答: 正、负电荷在  $A$  处激发的电势和为

$$U = \frac{+q}{4\pi\epsilon_0 r_+} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r_-} = \frac{q(r_- - r_+)}{4\pi\epsilon_0 r_+ r_-}$$

根据图示,

$$r_+ \simeq r - \frac{l}{2} \cos \theta, \quad r_- \simeq r + \frac{l}{2} \cos \theta$$

略去高阶无限小量  $l^2$ , 可得到

$$r_- - r_+ = l \cos \theta, \quad r_- r_+ = r^2 - \frac{l^2}{4} \cos^2 \theta \simeq r^2$$

所以有

$$U = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

3.20 证明: 在均匀电场  $\mathbf{E}$  中, 电偶极子  $\mathbf{p}$  的电势能可以表示为

$$E_p = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -pE \cos \theta$$

解答: 根据例题, 电偶极子在电场中受到的力矩大小为  $|M| = pE \sin \theta$ , 并且此力矩倾向于令  $\theta$  减小, 因此  $M = -pE \sin \theta$ . 若规定  $\theta = 90^\circ$  的方向为势能零点,

$$E_p = \int_{\theta}^{90^\circ} M d\theta = \int_{\theta}^{90^\circ} -pE \sin \theta d\theta = -pE \cos \theta = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

## 导体与电容

3.21 球形电容器是由半径分别为  $R_A$  和  $R_B$  的两个同心的金属壳所组成的, 设  $R_A < R_B$ , 证明球形电容器的电容为

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_A R_B}{R_B - R_A}$$

解答：令内球携带正电荷  $Q$ ，外球携带负电荷  $-Q$ ，根据高斯定理，两个球面之间的电场强度为

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

电压

$$U_{AB} = \int_{R_A}^{R_B} E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_B - R_A}{R_A R_B}$$

电容

$$C = \frac{Q}{U_{AB}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_A R_B}{R_B - R_A}$$

3.22 有的计算机键盘的每一个键下面连接一小块金属片，它下面隔一定空气隙是一块固定金属片．这样两块金属片就组成一个小电容器．当键被按下时，此小电容器的电容就发生变化，与之相连的电子线路就能检测出是哪个键被按下了，从而给出相应的信号．设每个金属片的面积为  $50.0 \text{ mm}^2$ ，两金属片之间的距离是  $0.600 \text{ mm}$ ．如果电子线路能检测出的电容变化是  $0.250 \text{ pF}$ ，那么键需要按下多大的距离才能给出必要的信号？

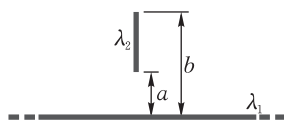
解答：提示：平板电容

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

直接代数计算．

综合

3.23 如下图所示，电荷线密度为  $\lambda_1$  的无限长直线与电荷线密度为  $\lambda_2$  的有限长直线共面放置，计算它们之间的相互作用力．



总习题3-23图

解答：无限长直线电荷1在外部空间激发的场强为

$$E = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r}$$

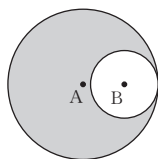
在电荷2上选取一段长度为  $dr$  的电荷，则该电荷受到的电场力为

$$dF = E dQ = E(\lambda_2 dr)$$

受到该电场的静电力为

$$F = \int_a^b E(\lambda_2 dr) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

3.24 如下图所示，在电荷体密度为  $\rho$  的均匀带电球体内挖去一个小球体，证明此空腔内的电场强度是均匀的．设两个球体的中心分别为 A, B．



总习题3-24图

解答：根据3.8题的结论，均匀荷电球体在其内部产生的电场为

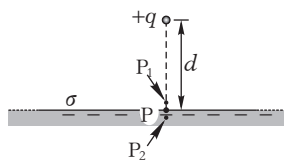
$$\mathbf{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \mathbf{e}_r = \frac{\rho \mathbf{r}}{3\epsilon_0}$$

将此空腔带电体视为一个均匀带正电的球体与一个小的均匀带负电的球体叠加而成. 则空腔内某点 P 的总电场为

$$\mathbf{E} = \frac{\rho \mathbf{r}_A}{3\epsilon_0} + \frac{-\rho \mathbf{r}_B}{3\epsilon_0} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{BP}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{AB}$$

这是一个恒定矢量.

3.25 如下图所示, 在无限大的金属导体平面的上方距离为  $d$  的位置有一个电量为  $q$  的点电荷, 计算与电荷正对的金属表面的 P 点处的感应电荷面密度  $\sigma$ .



总习题3-25图

解答: 在 P 点上方的空气中选取一个无限靠近的点  $P_1$ , 在 P 点下方的导体中选取一个无限靠近的点  $P_2$ , 并且  $P_1$  与  $P_2$  至 P 点的距离相同.

由于三个点无限靠近, 所以电荷  $q$  在这三个位置激发的电场大小、方向皆相同,

$$E_q(P) = E_q(P_1) = E_q(P_2) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2}$$

在导体表面出现的感应电荷  $q'$  ( $q' < 0$ ) 也在空间激发电场. 并且  $q'$  在  $P_1$  与  $P_2$  位置激发的电场大小相同, 方向相反, 设其大小为  $E_{q'}$

$P_2$  位置在导体内部, 其电场强度一定为零.  $q$  与  $q'$  在该位置激发的电场方向相反, 总场强为

$$E_q(P_2) - E_{q'} = 0$$

所以有

$$E_q(P) = E_q(P_1) = E_q(P_2) = E_{q'}$$

在  $P_1$  位置,  $q$  与  $q'$  激发的电场方向相同, 总场强为

$$E = E_q(P_1) + E_{q'} = 2E_q(P_1) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 d^2}$$

根据导体表面电荷与电场的关系  $E = \sigma/\epsilon_0$ ,

$$\sigma = -E\epsilon_0 = -\frac{q}{2\pi d^2}$$

3.26 证明: 导体表面是等电势面.

解答: 参见教材

3.27 运用高斯定理证明: 导体内部任意位置没有净电荷.

解答: 参见教材

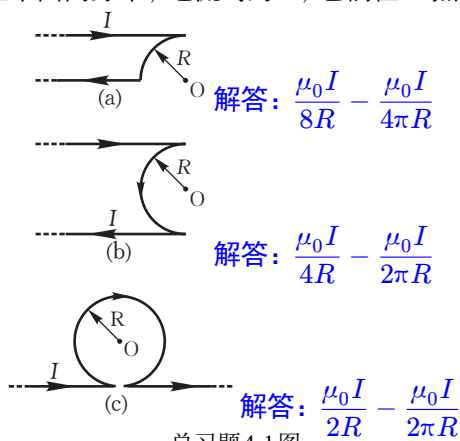
3.28 运用高斯定理证明: 空腔导体内表面的电荷量一定与空腔内电荷的电量等值异号.

解答: 参见教材

## 第四章 稳恒磁场

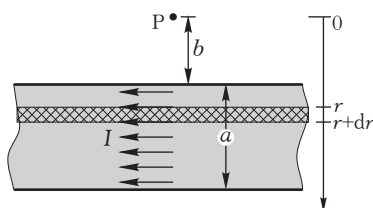
## 毕-萨定律

4.1 如下图所示, 几种载流导线在平面内分布, 电流均为  $I$ , 它们在  $O$  点的磁感应强度各为多少?



总习题4-1图

4.2 如下图所示, 宽度为  $a$  的无限长导电平板上通有均匀的电流  $I$ , 计算导电平板附近距离边缘为  $b$  的  $P$  点的磁场大小.



总习题4-2图

解答: 将平板电流切割为许多细长的直线电流元  $dI = \frac{I}{a} dr$ , 该电流元在  $P$  点激发的磁场为

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2a\pi} \frac{dr}{r}$$

因为所有  $dB$  是同方向的, 所以只要将它们的大小积分就得总磁场

$$B = \int_b^{a+b} \frac{\mu_0 I}{2a\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I}{2a\pi} \ln \frac{a+b}{b}$$

4.3 如下图所示, 半径为  $R$  的无限长半圆筒形导线中有均匀分布的电流  $I$ , 计算轴线上的磁感应强度的大小(圆筒的厚度不计).



总习题4-3图

解答: 从对称性可以看出,  $P$  点的总磁场水平向左. 将半圆形电流切割为直线电流,

$$dI = \frac{I}{\pi} d\theta$$

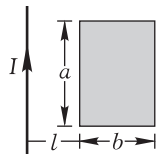
该电流元在  $P$  点激发的磁场水平分量为

$$dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} \sin \theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \sin \theta d\theta$$

$$B = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

## 磁通量

4.4 如下图所示, 无限长直线电流附近共面放置一个矩形线框, 计算线框的磁通量.



总习题4-4图

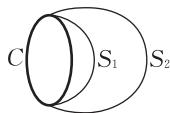
解答: 将矩形沿着上下方向切割为许多长条矩形, 其高度为  $a$ , 宽度为  $dr$ , 与直线电流的距离为  $r$ , 则该小矩形的磁通量为

$$d\Phi = B \cdot dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot (a dr) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi r} dr$$

总通量为

$$\Phi = \int_l^{l+b} \frac{\mu_0 I a}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{l+b}{l}$$

4.5 如下图所示, 根据磁场的高斯定理证明穿过以闭合曲线  $C$  为边界的任意曲面  $S_1$  和  $S_2$  的磁通量大小相等.



总习题4-5图

解答: 以曲面  $S_1$  和  $S_2$  为边界构造一个封闭曲面, 且以外法线作为正方向.

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

如果不考虑通量的正负, 则有

$$\left| \iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \right| = \left| \iint_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \right|$$

## 环路定理

4.6 如下图所示, 有一根很长的同轴电缆, 由两层厚度不计的共轴圆筒组成, 内筒的半径为  $r_1$ , 外筒的半径为  $r_2$ , 在这两导体中, 载有大小相等而方向相反的电流  $I$ , 计算空间各点的磁感应强度的大小.



总习题4-6图

解答: 选择一条同心圆作为积分路径, 磁场线的形状一定与此路径相同.

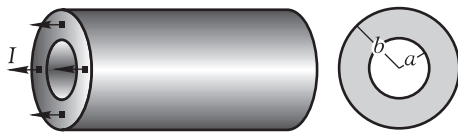
$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_{\text{in}} = \mu_0 \times \begin{cases} 0, & r < r_1 \\ I, & r_1 < r < r_2 \\ I + (-I), & r > r_2 \end{cases}$$

化简得

$$B = \begin{cases} 0, & r < r_1 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & r_1 < r < r_2 \\ 0, & r > r_2 \end{cases}$$



4.7 如下图所示, 无限长圆柱形空心导线, 柱体的内、外半径分别为  $a$  和  $b$ , 电流  $I$  均匀分布在阴影部分的横截面上. 计算导体内部各点 ( $a < r < b$ ) 的磁感应强度的大小.



总习题4-7图

解答: 选择一条同心圆作为积分路径, 磁场线的形状一定与此路径相同.

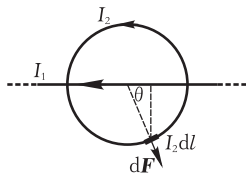
$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_{\text{in}} = \mu_0 \times \begin{cases} 0, & r < a \\ \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} I, & a < r < b \\ I, & r > b \end{cases}$$

化简得

$$B = \begin{cases} 0, & r < r_1 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}, & r_1 < r < r_2 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & r > r_2 \end{cases}$$

安培力

4.8 如下图所示, 相互绝缘的长直导线与圆形导线共面放置, 圆心与直线重合, 电流分别为  $I_1, I_2$ . 证明圆形线圈受到的安培力与其半径无关.



总习题4-8图

解答: 在直线电流产生的磁场中, 环形电流受到的合力是竖直向下的. 选取方位为  $\theta$  的一段电流元  $I_2 dl = I_2 R d\theta$ ,

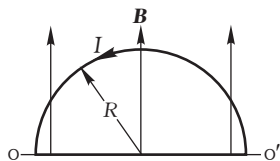
$$dF = B \cdot I_2 dl = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \cdot I_2 R d\theta = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(R \sin \theta)} \cdot I_2 R d\theta$$

所有电流元受到的垂直向下的分力之和为

$$F = \int_L dF \sin \theta = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} d\theta = \mu_0 I_1 I_2$$

此结果与环形电流半径无关.

4.9 如下图所示, 一半径为  $R = 0.1 \text{ m}$  的半圆形闭合线圈, 载有电流  $I = 10 \text{ A}$ , 放在均匀磁场中, 磁场方向与线圈面平行. 已知  $B = 0.5 \text{ T}$ , 求线圈所受力矩的大小和方向(以直径  $oo'$  为转轴).



总习题4-9图

解答: 解法一: 电流元  $I dl = IR d\theta$  受到的磁场力垂直于纸面向下, 大小等于

$$dF = I dl \cdot B \cdot \sin \theta = IRB \sin \theta d\theta$$

该作用力到转轴的距离  $r = R \sin \theta$ , 力矩为  $r dM = r \cdot d$ , 总力矩

$$M = \int_L dM = IR^2 B \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \pi IR^2 B$$

解法二: 闭合电流线圈的磁矩方向垂直纸面向上, 与磁场垂直, 其大小为

$$m = IS = \frac{1}{2} \pi R^2 I$$

该磁偶极子在磁场中受到的力矩大小为

$$M = mB = \frac{1}{2} \pi R^2 IB = \frac{\pi}{40} \text{ N} \cdot \text{m}$$

力矩矢量的方向水平向左.

综合

4.10 一个半径为  $R$  的塑料圆盘, 带电量为  $+Q$ , 且电量均匀分布在表面, 圆盘绕垂直于盘面的中心轴以角速度  $\omega$  转动. 证明:

(1) 圆盘中心处的磁感应强度大小为

$$B = \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R}$$

(2) 圆盘的磁偶极矩为

$$m = \frac{1}{4} \omega Q R^2$$

解答: 将圆盘电荷分为许多同心细圆环, 其电荷量为

$$dQ = \frac{Q}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{2Q}{R^2} r dr$$

该环形电荷旋转一周的时间是  $T = 2\pi/\omega$ , 形成的微电流为

$$dI = \frac{dQ}{T} = \frac{\omega Q}{\pi R^2} r dr$$

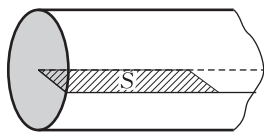
(1) 圆心处的磁场

$$B = \int_S \frac{\mu_0 dI}{2r} = \int_0^R \frac{\mu_0}{2r} \frac{\omega Q}{\pi R^2} r dr = \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R}$$

(2) 圆盘的磁偶极矩为

$$m = \int_S (\pi r^2) dI = \int_0^R \pi r^2 \frac{\omega Q}{\pi R^2} r dr = \frac{1}{4} \omega Q R^2$$

4.11 如下图所示, 一条实心导线内有均匀的电流  $I$ , 通过导线中心线作一个平面  $S$ , 计算长度为  $l$  的  $S$  平面的磁通量.



总习题4-11图

解答: 假设导线横截面的半径为  $R$ , 在导线内部, 磁场大小为

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \frac{Ir^2}{R^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}$$

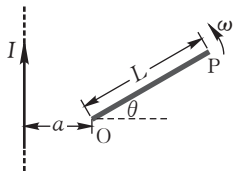
磁通量

$$\Phi = \int_0^R B \cdot l dr = \int_0^R \frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2} \cdot l dr = \frac{\mu_0 Il}{4\pi}$$

## 第五章 时变电磁场

## 感应电动势

5.1 如下图所示, 无限长恒定直线电流  $I$  旁边共面放置一段长度为  $L$  的直导线, 它可以围绕端点  $O$  以角速度  $\omega$  转动. 各几何尺寸如图所示, 当直导线与水平方向的角度为  $\theta$  时, 计算直导线的动生电动势.



总习题5-1图

解答: 在直导线上选取长度为  $dh$  的一小段微元, 其距离  $O$  点  $h$ . 该微元至无限长电流的距离为  $r = a + h \cos \theta$ ,

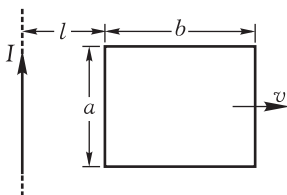
$$d\mathcal{E} = B \cdot dh \cdot v = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot dh \cdot \omega h$$

总电动势

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_0^L d\mathcal{E} = \int_0^L \frac{\mu_0 I}{2\pi(a + h \cos \theta)} \cdot dh \cdot \omega h \\ &= \frac{\mu_0 I \omega}{2\pi \cos \theta} \int_0^L \frac{h}{h + a/\cos \theta} dh \\ &= \frac{\mu_0 I \omega}{2\pi \cos \theta} \left[ L - \frac{a}{\cos \theta} \ln \frac{a + L \cos \theta}{a} \right] \end{aligned}$$

电动势方向为  $P \rightarrow O$ .

5.2 如图所示, 无限长直线电流  $I$  旁边共面放置一个矩形导线框, 其尺寸如图. 若电流  $I$  恒定不变, 导线框以速率  $v$  远离直线电流 ( $dl/dt = v$ ), 计算在当前位置时导线框内的总电动势.



总习题5-2图

解答: 解法一: 将导线框切割为向下方向的细长矩形面积元, 面积元距离直线电流  $r$ , 其面积为  $dS = a dr$ , 则矩形线框的总磁通量为

$$\Phi = \int_l^{l+b} B \cdot dS = \int_l^{l+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot a dr = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} [\ln(l+b) - \ln l]$$

在上式中, 距离  $l$  是时间的函数,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dl} \frac{dl}{dt} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \left[ \frac{v}{l} - \frac{v}{l+b} \right] = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{bv}{l(l+b)}$$

方向为顺时针环绕.

解法二: 导线框中只有最左边和最右边切割磁场线. 左边切割磁场线产生的电动势垂直向上, 顺时针环绕,

$$\mathcal{E}_1 = Bav = \frac{\mu_0 I}{2\pi l} av$$

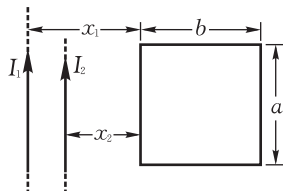
右边切割磁场线产生的电动势垂直向上, 逆时针环绕,

$$\mathcal{E}_2 = Bav = \frac{\mu_0 I}{2\pi(l+b)} av$$

总电动势

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = \dots$$

5.3 如图所示, 无限长直线电流  $I_1, I_2$  旁边共面放置一个静止的矩形导线框, 其尺寸如图所示. 若电流  $I_1 = I_0 \cos \omega t$ ,  $I_2 = I_0 \sin \omega t$ , 计算  $t = 0$  时刻导线框内总电动势的大小和方向.



总习题5-3图

解答: 将导线框切割为向下方向的细长矩形面积元, 面积元距离直线电流  $r$ , 其面积为  $dS = adr$ .

电流  $I_1$  在线框中产生的磁通量为

$$\Phi_1 = \int_{x_1}^{x_1+b} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \cdot a dr = \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi} \ln \frac{x_1+b}{x_1}$$

电流  $I_2$  在线框中产生的磁通量为

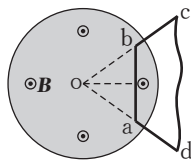
$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_2 a}{2\pi} \ln \frac{x_2+b}{x_2}$$

这里的磁通量, 垂直纸面向内为正向, 因此电动势环绕的正参考方向为顺时针.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= -\frac{d(\Phi_1 + \Phi_2)}{dt} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{x_1+b}{x_1} \frac{dI_1}{dt} - \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{x_2+b}{x_2} \frac{dI_2}{dt} \\ &= \frac{\mu_0 a \omega}{2\pi} \ln \frac{x_1+b}{x_1} I_0 \sin \omega t - \frac{\mu_0 a \omega}{2\pi} \ln \frac{x_2+b}{x_2} I_0 \cos \omega t \\ \mathcal{E}(0) &= -\frac{\mu_0 I_0 a \omega}{2\pi} \ln \frac{x_2+b}{x_2} \end{aligned}$$

式中的负号表示电动势真实环绕方向为逆时针.

5.4 如下图所示, 半径为  $R$  的圆柱形区域内有垂直于纸面向外的均匀磁场  $\mathbf{B}$ , 并且磁场以均匀的变化率  $dB/dt = k$  增大. 导体框  $abcd$  平放在纸面上,  $ab$  的长度为  $2l$ , 到圆心  $O$  的距离为  $h$ ;  $cd$  边完全在磁场区域之外. (1) 计算  $ab$  边的电动势大小; (2) 计算  $cd$  边的电动势大小; (3) 计算回路  $abcd$  中的总电动势大小并指出其环绕方向.



总习题5-4图

解答: (1) 用假想的导体将  $oab$  连接为闭合三角形. 根据磁场的对称性, 感生电场线是一系列同心圆环, 方向为顺时针. 因为感生电场的方向与  $oa, ob$  垂直, 故闭合三角形  $oab$  中仅有  $ab$  存在电动势.

$$\mathcal{E}_{ba} = \mathcal{E}_{oba} = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \left| S_{oba} \frac{dB}{dt} \right| = l h k$$

由楞次定律可知电动势的方向为  $b \rightarrow a$ .

(2) 类似的道理可明白,

$$\mathcal{E}_{cd} = \mathcal{E}_{ocd} = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \left| S_{ocd} \frac{dB}{dt} \right| = k R^2 \arctan \frac{l}{h}$$

这里需要注意的是,  $S_{ocd}$  为磁场占据的面积, 即图中的扇形阴影的面积. 由楞次定律可知电动势的方向为  $c \rightarrow d$ .

(3) 可以有两种方式求解. 方式一:

$$\mathcal{E}_{abcd} = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \left| S_{abcd} \frac{dB}{dt} \right|$$

这里  $S_{abcd}$  是线框  $abcd$  包围的阴影部分的面积.

方式二: 根据前面两个小问题的结论,  $ba$  以及  $cd$  上都有指向下方的电动势, 而沿着直径方向的  $bc$  和  $ad$  两边无电动势, 因而总电动势为

$$\mathcal{E}_{abcd} = \mathcal{E}_{cd} - \mathcal{E}_{ba} = kR^2 \arctan \frac{l}{h} - l h k$$

方向为顺时针.

5.5 在竖直方向上有随着时间变化的磁场  $B = B_0 \sin \omega t$ , 若在水平面上放入铁丝制作的闭合圆环, 则圆环中必然有感应电流. 现在用相同粗细的铁丝制作直径  $D$  不同的闭合圆环, 证明圆环所耗散的电功率  $P \propto \omega^2 D^3$ . 可见, 减小铁环的尺寸可以降低发热量, 正因为如此, 变压器的铁心才需要用薄片来限制其发热量. 提示: 铁环的电阻  $Z$  与其周长成正比; 铁环的自感忽略不计.

解答: 铁环中的磁通量

$$\Phi \propto B \cdot S \propto B_0 \sin \omega t \cdot D^2$$

电动势

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} \propto D^2 \omega B_0 \cos \omega t \propto D^2 \omega$$

铁环的电阻  $Z$  与其周长成正比, 周长与直径成正比

$$Z \propto l \propto D$$

铁环产生的焦耳功率

$$P \propto \frac{\mathcal{E}^2}{Z} \propto D^3 \omega^2$$

5.6 电阻为  $Z$  的闭合导线框, 穿过它的磁通量由  $\Phi_1$  变化至  $\Phi_2$ , 证明导线中流过的总电荷量为

$$Q = |\Phi_1 - \Phi_2|/Z$$

解答:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

电流

$$I = \frac{\mathcal{E}}{Z} = -\frac{d\Phi}{Z dt}$$

电荷

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\Phi}{Z dt} dt = \frac{1}{Z} \int_{t_2}^{t_1} d\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{Z}$$

5.7 有一测量磁感强度的线圈, 其截面积  $S = 4.0 \text{ cm}^2$ 、匝数  $N = 160$  匝、电阻  $R = 50 \Omega$ . 线圈与一内阻  $R_i = 30 \Omega$  的冲击电流计相连. 若开始时, 线圈的平面与均匀磁场的磁感强度  $B$  相垂直, 然后线圈的平面很快地转到与  $B$  的方向平行. 此时从冲击电流计中测得电荷值  $q = 4.0 \times 10^{-5} \text{ C}$ . 问此均匀磁场的磁感强度  $B$  的值为多少?

解答: 根据上一题的结果, 应用于  $N$  匝线圈串联

$$q = \frac{N(\Phi_1 - \Phi_2)}{Z} = \frac{NBS}{R + R_i}$$

代入数据解得  $B = 50 \text{ mT}$

5.8 长为  $L$  的铜棒, 以距端点  $r$  处为支点, 以角速率  $\omega$  绕通过支点且垂直于铜棒的轴转动. 设磁感强度为  $B$  的均匀磁场与轴平行, 求棒两端的电势差.

解答: 将该棒拆解为长度为  $r$  以及长度为  $L - r$  的两段, 其电动势分别为

$$\frac{1}{2}B\omega r^2, \quad \frac{1}{2}B\omega(L-r)^2$$

二者的方向相反, 故电势差为

$$\frac{1}{2}B\omega(L-r)^2 - \frac{1}{2}B\omega r^2 = \frac{1}{2}B\omega(L^2 - 2Lr)$$

### 自感与互感

5.9 两个圆线圈, 匝数分别为  $N_1$  和  $N_2$ , 半径分别为  $r_1$  和  $r_2$ , 且  $r_1 \gg r_2$ . 若两个线圈放在同一个平面上, 且圆心重合, 则它们的互感系数多大? 提示: 小线圈内部的磁场是近似均匀的.

解答: 设半径  $r_1$  的线圈载有电流  $I_1$ , 在其中心处产生的磁场为

$$B_1 = N_1 \frac{\mu_0 I_1}{2r_1}$$

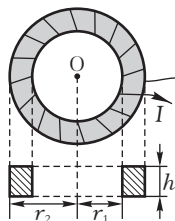
半径为  $r_2$  的线圈中的总磁链为

$$\Psi_2 = N_2(B_1 \cdot \pi r_2^2) = N_1 N_2 \frac{\mu_0 I_1}{2r_1} \pi r_2^2$$

互感系数

$$M = \frac{\Psi_2}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{2r_1} \pi r_2^2$$

5.10 一个横截面是矩形的螺绕环, 总匝数为  $N$ , 其尺寸如下图所示, 计算其自感系数.



总习题5-10图

解答: 选取一条半径  $r$  的闭合积分路径穿过螺绕环内部 ( $r_1 < r < r_2$ ). 假设给导线通电流  $I$ , 利用安培环路定理可知

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI, \quad \Rightarrow B = N \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

螺绕环横截面上的磁通量为

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} B h dr = N \frac{\mu_0 h I}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = N \frac{\mu_0 h I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

自感系数

$$L = \frac{N\Phi}{I} = N^2 \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

5.11 两个圆柱形长直螺线管共轴放置, 粗管套细管, 长度均为  $h$ , 匝数分别为  $N_1$  和  $N_2$ , 半径分别为  $r_1$  和  $r_2$ , 且  $h \gg r_1 > r_2$ . 则它们之间的互感系数多大?

解答: 在粗管中通上电流  $I_1$ , 则其内部的磁场是均匀的

$$B_1 = \mu_0 n_1 I_1 = \mu_0 \frac{N_1}{h} I_1$$

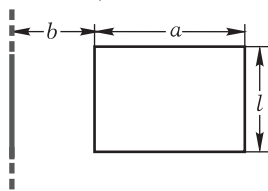
细管的磁链 ( $N_2$  匝线圈的总磁通)

$$\Psi_2 = N_2 B_1 S = N_2 B_1 \pi r_2^2$$

互感系数

$$M = \frac{\Psi_2}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{h} \pi r_2^2$$

5.12 无限长直导线旁边共面放置一个矩形导线框, 尺寸如下图所示. 计算它们的互感系数.



总习题 5-12 图

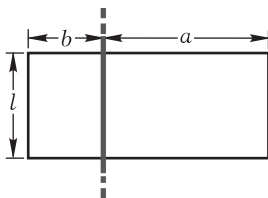
解答: 在直导线中通电流  $I$ , 矩形线框中的磁通量为

$$\Phi = \int_b^{a+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{a+b}{b}$$

互感系数

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{a+b}{b}$$

5.13 相互绝缘的无限长直导线与一个矩形导线框共面放置, 尺寸如下图所示. 计算它们的互感系数.



总习题 5-13 图

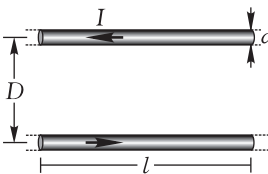
解答: 假设在直导线中通向上的电流  $I$ , 则导线右侧磁场垂直于纸面向内, 左侧磁场向外. 左右抵消后, 矩形线框中的总磁通为

$$\Phi = \int_{a-b}^a \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{a}{a-b}$$

互感系数

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{a}{a-b}$$

5.14 平行的架空输电线是存在自感的, 如下图所示, 假设导线的直径为  $d$ , 导线之间的距离为  $D$ , 且  $D \gg d$ . 计算长度为  $l$  的平行导线的自感系数.



总习题 5-14 图

解答: 两条导线之间的空气中, 磁场是由两条电流共同产生的, 且方向相同. 单条电流产生的磁通为

$$\Phi \simeq \int_{d/2}^D \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{2D}{d}$$

互感系数

$$M = \frac{2\Phi}{I} = \frac{2\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{2D}{d}$$

5.15 有一根很长的同轴电缆, 由两层厚度不计的共轴圆筒组成, 内筒的半径为  $R_1$ , 外筒的半径为  $R_2$ , 计算单位长度电缆的自感系数.

解答: 在内、外筒中加载大小相同, 方向相反的电流  $I$ , 根据安培环路定理, 只有两筒之间存在磁场.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

截取一段长度为  $h$  的电缆, 则两筒之间的磁通为

$$\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

单位长度电缆的互感系数

$$M_0 = \frac{M}{h} = \frac{\Phi/I}{h} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

位移电流

5.16 对于平行板电容器, 证明它的极板之间的位移电流是  $I_d = C(dU/dt)$ , 其中  $U$  是电容器的电压.

解答: 从电流连续性来考虑, 极板之间的位移电流一定等于导线中的电流. 设电容器极板上的电荷量为  $Q$ , 则

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(CU)}{dt} = C \frac{dU}{dt}$$

另解: 按照定义,

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \Phi_e = \epsilon_0 \frac{d}{dt} (ES) = \frac{\epsilon_0 S}{l} \frac{d}{dt} (El) = C \frac{dU}{dt}$$



## 第六章 振动与波动

## 振动方程

6.1 一个质点沿着  $x$  轴做简谐振动, 其角频率  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ , 初始位移  $x_0 = 7.5 \text{ cm}$ , 初始速度  $v_0 = 75 \text{ cm/s}$ . 请写出它的振动方程.

解答: 令振动方程为  $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ , 其中  $A, \varphi_0$  为待定常量. 根据初始条件得

$$x_0 = A \cos(\varphi_0) = 7.5 \quad \dagger$$

$$v_0 = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = -\omega A \sin(\varphi_0) = 75 \quad \ddagger$$

上述两式联立得振幅

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2} = 15/\sqrt{2} = 10.6 \text{ cm}$$

初相位

$$\varphi_0 = \arccos(7.5/A) = \arccos(\sqrt{2}/2) = \pm 45^\circ$$

根据式 ( $\ddagger$ ) 可知  $\sin(\varphi_0) < 0$ , 所以  $\varphi_0 = -45^\circ$ , 即

$$x = 10.6 \cos(10t - 45^\circ) \text{ cm}$$

注: 亦可根据初速度大于零, 故由旋转矢量图, 必选取  $\varphi_0 = -45^\circ$ .

6.2 弹簧振子沿着  $x$  轴运动, 其角频率  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ , 振幅为  $A$ , 初始时刻  $x_0 = A/2$  并且向着  $x$  负方向运动, 请写出振子的运动方程.

解答:

$$x_0 = A \cos(\varphi_0) = A/2, \quad \varphi_0 = \arccos(0.5) = \pm 60^\circ$$

根据旋转矢量图, 振子初速度向负方向, 故  $\varphi_0 = 60^\circ$ , 振动方程

$$x = A \cos(10t + 60^\circ)$$

6.3 质量为  $m = 0.10 \text{ kg}$  的物体, 以振幅  $A = 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$  作简谐运动, 其最大加速度为  $a_m = 4.0 \text{ m/s}^2$  求: (1) 振动的周期; (2) 物体通过平衡位置时的总能量与动能; (3) 物体在何处其动能和势能相等? (4) 当物体的位移大小为振幅的一半时, 动能、势能各占总能量的多少?

解答: (1)  $a_m = \omega^2 A$ , 代入数据得  $\omega = 20 \text{ rad/s}$ ,  $T = 2\pi/\omega = 0.314 \text{ s}$

(2) 通过平衡位置时, 总能量等于该时刻的总动能

$$E = E_k = \frac{1}{2} m (\omega A)^2 = 2.0 \times 10^{-3} \text{ J}$$

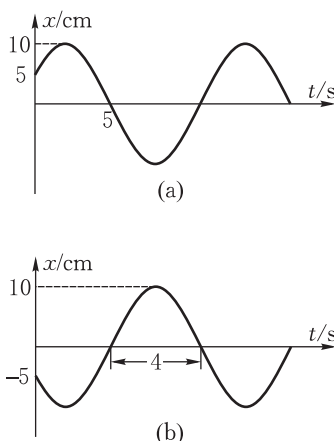
(3) 物体动能与势能相等时, 其势能为总能量的一半, 设此刻的位移是  $x$ , 则有

$$\frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} k A^2 \right) \Rightarrow x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}} = \pm 0.707 \times 10^{-3} \text{ m}$$

(4) 当位移大小为振幅的一半时, 势能

$$E_p = \frac{1}{2} k \left( \frac{A}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} E \quad \text{动能 } E_k = E - E_p = \frac{3}{4} E$$

6.4 两个简谐振动的曲线如下图所示, 分别写出振动方程.



总习题6-4图

解答：由图(a)可看出， $A = 10 \text{ cm}$ ， $x_0 = 5 \text{ cm}$ ，振子第一次回到平衡位置耗时  $\Delta t = 5 \text{ s}$ 。从图上观察，坐标原点处曲线的切线斜率  $dx/dt > 0$ ，也就是  $v_0 > 0$ 。

$$x_0 = 10 \cos(\varphi_0) = 5, \quad \varphi_0 = \arccos(0.5) = \pm 60^\circ$$

又因为  $v_0 > 0$ ，所以  $\varphi_0 = -60^\circ = -\pi/3$ 。

根据选择矢量图，振子第一次回到平衡位置，对应的选择矢量转过的角度为  $60^\circ + 90^\circ = 150^\circ = 5\pi/6$ ，角频率

$$\omega = \frac{5\pi/6}{\Delta t} = \frac{\pi}{6}$$

振动方程

$$x = 10 \cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{3}\right)$$

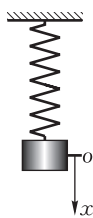
由图(b)看出， $A = 10 \text{ cm}$ ， $x_0 = -5 \text{ cm}$ ， $v_0 < 0$ ， $T = 2 \times 4 = 8 \text{ s}$ ，

$$x_0 = 10 \cos(\varphi_0) = -5, \quad \varphi_0 = \arccos(-0.5) = \pm 120^\circ$$

又因为  $v_0 < 0$ ，所以  $\varphi_0 = +120^\circ = 2\pi/3$ 。振动方程

$$x = 10 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) = 10 \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

6.5 如下图所示，质量为  $m$  的物体悬挂在劲度系数为  $k$  的弹簧下面运动，重力场强度为  $g$ ，证明物体的运动为简谐振动。



总习题6-5图

解答：重物静止不动时，弹簧拉长量为  $x_0 = mg/k$ 。

以重物静止不动处为原点，向下为正方向。当再次被拉伸至坐标  $x$  时，弹簧的伸长量为  $x_0 + x$ ，

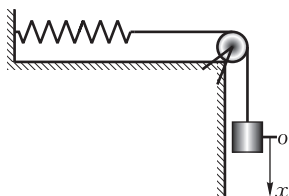
$$mg - k(x + x_0) = ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

将  $x_0$  代入后得

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

这是标准的简谐振动动力学方程，其角频率  $\omega = \sqrt{k/m}$ 。

6.6 如下图所示，物块质量为  $m$ ，弹簧的劲度系数为  $k$ ，半径为  $r$  的滑轮转动惯量为  $J$ ，重力场强度为  $g$ ，轻质绳子质量忽略，且绳子与滑轮不打滑。证明物体的运动为简谐振动并计算振动的周期。



总习题6-6图

解答：重物静止不动时，弹簧拉长量为  $x_0 = mg/k$ 。

以重物静止不动处为原点，向下为正方向。设当重物下降至坐标  $x$  时，弹簧的伸长量为  $x_0 + x$ ，则弹簧与水平绳子间的拉力为  $F_2 = k(x_0 + x)$ 。

设重物受到绳子向上的拉力为  $F_1$ ，则有

$$mg - F_1 = ma = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

对于滑轮

$$F_1 r - F_2 r = J\beta = Ja/r$$

将  $x_0$ ,  $F_2$  代入，并联立上述两式，可得到

$$(m + J/r^2)a = -kx$$

将上式与简单的弹簧振子动力学方程  $ma = -kx$  对比可知，该重物亦做简谐振动。其角频率

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + J/r^2}}$$

振动周期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + J/r^2}{k}}$$

6.7 两个劲度系数分别为  $k_1$ ,  $k_2$  的弹簧串联在一起，其等效劲度系数多大？若并联呢？

解答：弹簧串联，其受到的拉力是相同的，不妨假定为  $F$ ，则两个弹簧分别伸长

$$x_1 = F/k_1, \quad x_2 = F/k_2$$

总伸长量  $x = (x_1 + x_2)$ ，等效劲度系数

$$k = F/x = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

弹簧并联，则弹簧的伸长量相同，设为  $x$ ，则两个弹簧产生的拉力分别为

$$F_1 = k_1 x, \quad F_2 = k_2 x$$

两个弹簧的合力  $F = F_1 + F_2$ ，等效劲度系数

$$k = F/x = k_1 + k_2$$

振动合成

6.8 某质点同时参与两个同方向的简谐振动，方程分别为

$$z_1 = 4 \cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_2 = 3 \cos\left(3t - \frac{\pi}{6}\right)$$

计算合振动的方程。

解答：两个振动的相位差

$$\Delta\varphi = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{-\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}$$

合振幅

$$A = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2 \times 4 \cos \frac{\pi}{2}} = 5$$

初相位

$$\tan \varphi_0 = \frac{4 \sin(\pi/3) + 3 \sin(-\pi/6)}{4 \cos(\pi/3) + 3 \cos(-\pi/6)} = \frac{1.9641}{4.5981}$$

由于上式中分子、分母皆为正数，故  $\varphi_0$  为第一象限角，

$$\varphi_0 = 23.13^\circ = 0.4037 \text{ rad}$$

合振动方程

$$z_1 = 5 \cos(3t + 23.13^\circ)$$

6.9 三相交流发电机中有三个独立的线圈绕组，能够输出三组交流电，其电压分别为

$$u_1 = U_p \cos(100\pi t)$$

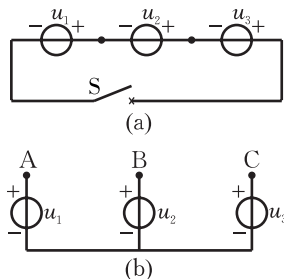
$$u_2 = U_p \cos(100\pi t - 120^\circ)$$

$$u_3 = U_p \cos(100\pi t + 120^\circ)$$

其中  $U_p$  称为三相电的相电压。

(1) 如下图(a)所示，若将三个线圈首尾相连，使电压串联，证明  $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ ，此时即便合上电闸 S，电路中也无电流；

(2) 如下图(b)所示，若将三个线圈的尾端相连， $u_{AB} = u_1 - u_2$ 、 $u_{BC} = u_2 - u_3$ 、 $u_{CA} = u_3 - u_1$  这三个电压称为线电压。证明这三个电压的振幅相等（记为  $U_\ell$ ），且  $U_\ell = \sqrt{3}U_p$ 。



总习题6-9图

解答：(1) 画出三个电压的旋转矢量图（相量图），可以发现它们大小相等，相互之间间隔  $120^\circ$ ，在一个圆周上是对称的，故矢量和为零，即  $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ 。

(2)

$$\begin{aligned} u_{AB} &= u_1 - u_2 = U_p [\cos(100\pi t) - \cos(100\pi t - 120^\circ)] \\ &= U_p [\cos(100\pi t) + \cos(100\pi t + 60^\circ)] \\ &= \sqrt{3}U_p \cos(100\pi t + 30^\circ) \end{aligned}$$

类似的可以计算出

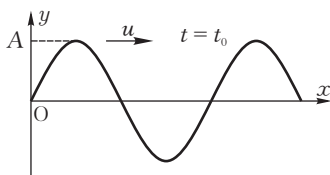
$$\begin{aligned} u_{BC} &= \sqrt{3}U_p \cos(100\pi t - 90^\circ) \\ u_{CA} &= \sqrt{3}U_p \cos(100\pi t + 150^\circ) \end{aligned}$$

波函数

6.10 横波沿着  $x$  轴向右传播, 其振幅为  $A$ , 频率为  $f$ , 波速为  $c$ , 在  $t = t_0$  时刻的波形如下图所示,

(1) 写出  $x = 0$  处质点的振动方程;

(2) 求解此波的波函数.



总习题6-10图

解答: 解法一: 波形向右传播, 可以假设波函数为

$$y = A \cos \left[ 2\pi f \left( t - t_0 - \frac{x}{c} \right) + \varphi_0 \right]$$

在这里, 只有  $\varphi_0$  是待定的常数.

从图上可以看出

$$y \Big|_{\substack{t=t_0 \\ x=0}} = A \cos(\varphi_0) = 0, \quad \varphi_0 = \pm \frac{\pi}{2}$$

又从图上可以看出, 在  $t = t_0$  时刻,  $x = 0$  位置的导数  $dy/dx > 0$ ,

$$\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{\substack{t=t_0 \\ x=0}} = \frac{2\pi f}{c} A \sin(\varphi_0) > 0, \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

波函数为

$$y = A \cos \left[ 2\pi f \left( t - t_0 - \frac{x}{c} \right) + \frac{\pi}{2} \right]$$

坐标原点的振动方程为

$$y = A \cos \left[ 2\pi f (t - t_0) + \frac{\pi}{2} \right]$$

解法二: (1) 因为波形右移, 可以发现坐标原点此刻的速度是负方向的. 根据已知条件可写出坐标原点的振动方程

$$y = A \cos [2\pi f (t - t_0) + \varphi_0]$$

由于  $t = t_0$  时,  $y_0 = 0$  且速度为负方向, 所以可知  $\varphi_0 = \pi/2$ .

$$y = A \cos \left[ 2\pi f (t - t_0) + \frac{\pi}{2} \right]$$

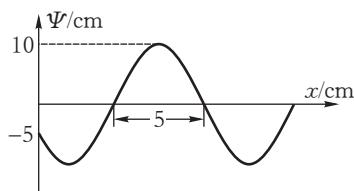
(2) 波向右传播, 所以波函数

$$y = A \cos \left[ 2\pi f \left( t - t_0 - \frac{x}{c} \right) + \frac{\pi}{2} \right]$$

6.11 一列波沿着  $x$  轴传播, 在  $t = 0$  时刻的波形如下图所示,

(1) 若已知波的频率  $f = 50$  Hz, 且向左传播, 写出该波的波函数;

(2) 若已知波向右传播, 且波速  $c = 250$  m/s, 写出此波的波函数.



总习题6-11图

解答: 从图中可以看出,  $A = 10$ ,  $\lambda = 2 \times 5 = 10$ ,  $\Psi_0 = -5$ .

(1) 向左传播的波函数可以记做

$$\Psi(x, t) = A \cos \left( 2\pi f t + \frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi_0 \right) = 10 \cos \left( 100\pi t + \frac{\pi}{5} x + \varphi_0 \right)$$

根据  $x = 0$ ,  $t = 0$  时  $\Psi_0 = -5$ , 得  $\cos \varphi_0 = -0.5$ ,  $\varphi_0 = \pm 120^\circ$ .

进一步确定  $\varphi_0$  有两种思路:

思路甲: 将波形向左微小平移, 可以发现原点向负方向运动, 所以

$$v \Big|_{t=0, x=0} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -2\pi f A \sin \varphi_0 < 0 \Rightarrow \varphi_0 = 120^\circ = 2\pi/3$$

思路乙: 坐标原点处的切线斜率

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{1}{5} \times 10 \sin \varphi_0 < 0 \Rightarrow \varphi_0 = 120^\circ$$

波函数为

$$\Psi(x, t) = 10 \cos \left( 100\pi t + \frac{\pi}{5}x + \frac{2\pi}{3} \right)$$

(2) 频率  $f = c/\lambda = 25$ , 向右传播的波函数为

$$\Psi(x, t) = A \cos \left( 2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0 \right) = 10 \cos \left( 50\pi t - \frac{\pi}{5}x + \varphi_0 \right)$$

根据  $x = 0, t = 0$  时  $\Psi_0 = -5$ , 得  $\cos \varphi_0 = -0.5$ ,  $\varphi_0 = \pm 120^\circ$ .

进一步确定  $\varphi_0$  有两种思路:

思路甲: 将波形右移, 可以发现原点向正方向运动, 所以  $\varphi_0 = -120^\circ$ .

思路乙: 坐标原点处的切线斜率  $\partial \Psi / \partial x = \frac{1}{5} \times 10 \sin \varphi_0 < 0$ ,  $\varphi_0 = -120^\circ$  波函数为

$$\Psi(x, t) = 10 \cos \left( 50\pi t - \frac{\pi}{5}x - \frac{2\pi}{3} \right)$$

6.12 一列横波沿着  $x$  轴正向传播, 波速  $c = 20 \text{ m/s}$ .  $x$  轴上有两个点 A, B, 且  $x_B - x_A = 5 \text{ m}$ . 若 A 点的振动表达式为  $y_A = 2 \cos 4\pi t$ , (1) 以 A 为坐标原点写出该波的波函数; (2) 以 B 为坐标原点写出该波的波函数.

解答: (1) 振动从坐标原点 A 向右传播到坐标为  $x$  的任意位置, 需要的时间为

$$\Delta t = \frac{|x - 0|}{c} = \frac{x}{20}$$

任意位置的振动方程为

$$y(x, t) = 2 \cos 4\pi(t - \Delta t) = 2 \cos 4\pi \left( t - \frac{x}{20} \right)$$

(2) 若 B 点为坐标原点, 坐标为  $x$  的位置至 A 点的距离  $x + 5$ ,

$$\Delta t = \frac{x + 5}{20}$$

波函数为

$$y(x, t) = 2 \cos 4\pi \left( t - \frac{x + 5}{20} \right)$$

另解: 波源的频率  $f = 2$ , 波长  $\lambda = c/f = 10$ . 在标准波函数中

$$\Psi(x, t) = A \cos \left[ 2\pi f t + \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}x \right]$$

$2\pi f t + \varphi_0$  表示波源的相位,  $\frac{2\pi}{\lambda}x$  是距离引起的相位延迟.

(1) 振动从坐标原点 A 向右传播到坐标为  $x$  的任意位置, 传播距离为  $x$ , 故波函数可以写作

$$\Psi(x, t) = 2 \cos \left[ 4\pi t - \frac{2\pi}{10}x \right]$$

(2) 若 B 点为坐标原点, 坐标为  $x$  的位置至 A 点的距离  $x + 5$ , 波函数可以写作

$$\Psi(x, t) = 2 \cos \left[ 4\pi t - \frac{2\pi}{10}(x + 5) \right]$$

干涉

6.13 同一介质中的两个波源 A, B, 其振幅相等, 频率都是 100 Hz, 相位差为  $\pi$ . 若 A, B 的间距为 30 m, 波的速度为 400 m/s, 计算线段 AB 上因干涉而静止的各点的位置.

解答: 波长  $\lambda = u/f = 400/100 = 4$  m, 以 A 为坐标原点, AB 之间坐标为  $x$  的位置到两个波源的距离为

$$r_1 = x, r_2 = 30 - x$$

两列波的相位差为

$$\Delta\varphi = (\varphi_{10} - \varphi_{20}) - \frac{2\pi(r_1 - r_2)}{\lambda} = \pi - \frac{2\pi(2x - 30)}{4} = \pi(16 - x)$$

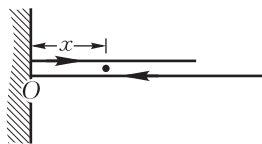
根据干涉相消的条件  $\Delta\varphi = \pi \times \text{odd number}$ , 可得到

$$16 - x = \text{odd number}, \quad x = 1, 3, 5, \dots, 29 \text{ m}$$

6.14 如下图所示, 一列电磁波自右向左从空气中垂直入射到混凝土墙壁上, 入射波的波函数为

$$\psi = 4 \cos \left( 2000\pi t + \frac{100\pi}{17} x \right) \text{ (SI)}$$

反射波的波幅为 3. (1)请指出墙壁右侧干涉加强的位置及其振幅; (2)写出反射波的波函数.



总习题6-14图

解答: (1)墙壁右侧距离为  $x$  的位置, 由于半波损失, 波程差为

$$\delta = 2x + \frac{\lambda}{2}$$

根据干涉加强的条件  $\delta = j\lambda$  得

$$2x + \frac{\lambda}{2} = j\lambda, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad \Rightarrow \quad x = i\frac{\lambda}{4}, \quad i = 1, 3, 5, \dots$$

(2)反射波的频率与波长是不变的, 振幅为 3, 可假设反射波函数为

$$\psi' = 3 \cos \left( 2000\pi t - \frac{100\pi}{17} x + \varphi_0 \right)$$

由于反射面处存在半波损失, 即  $x = 0$  处, 入射波与反射波的振动相位相差  $\pi$ , 使得  $\psi|_{x=0} = -\psi'|_{x=0}$ , 得到  $\varphi_0 = \pi$ ,

$$\psi' = 3 \cos \left( 2000\pi t - \frac{100\pi}{17} x + \pi \right)$$

### 多普勒效应

6.15 在高速公路上, 消防车与轿车同向行驶. 消防车的速度为 34 m/s, 轿车的速度为 17 m/s; 消防车警笛的频率为  $f_s = 1000$  Hz. 若消防车在轿车的后方, 轿车接收到的频率多大? 若消防车在轿车的前方, 轿车接收到的频率多大? 假设没有风, 空气中的声速为 340 m/s.

解答: 消防车在后, 轿车在前

$$f_R = \frac{c + v_R}{c - v_S} f_S = \frac{340 + (-17)}{340 - (+34)} \times 1000 = 1055.6 \text{ Hz}$$

消防车在前

$$f_R = \frac{c + v_R}{c - v_S} f_S = \frac{340 + (+17)}{340 - (-34)} \times 1000 = 954.5 \text{ Hz}$$

6.16 蝙蝠朝着平坦的墙壁飞行期间, 发出频率为 39 kHz 的超声波, 如果它的飞行速率为空气声速的 1/40, 问蝙蝠接收到的反射超声频率多大?

解答：运动蝙蝠发出的声波被墙壁接收，墙壁振动的频率为

$$f_1 = \frac{c + v_R}{c - v_S} f_S = \frac{c + 0}{c - c/40} f_S$$

墙壁振动发出反射回波，被运动的蝙蝠接收

$$f_2 = \frac{c + v_R}{c - v_S} f_1 = \frac{c + c/40}{c - 0} f_1$$

上述二式联立得

$$f_2 = \frac{c + c/40}{c} \frac{c}{c - c/40} \times 39 = 41 \text{ kHz}$$

6.17 仪器 A 与 B 皆固定在水管中，水流沿着  $A \rightarrow B$  的方向，流速  $v = 8 \text{ m/s}$ 。仪器 A 的压电陶瓷换能器以  $30 \text{ kHz}$  的频率振动。已知水中的声速  $c = 1500 \text{ m/s}$ ，问仪器 B 感受到的频率多大？

解答：以流水为参照物，则  $v_S = -v$ ,  $v_R = v$ ,

$$f_R = \frac{c + v_R}{c - v_S} f_S = \frac{c + v}{c - (-v)} f_S = 30 \text{ kHz}$$



## 第七章 波动光学

## 双缝干涉

7.1 将一束氦氖激光 ( $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ ) 垂直照射到双缝上, 在缝后  $D = 2 \text{ m}$  的墙上观察到明条纹的间距为  $\Delta x = 14 \text{ mm}$ , (1) 计算双缝的间距  $d$ ; (2) 墙壁上总共能看到几条明纹?

解答: (1)

$$\frac{\Delta x}{D} = \frac{\lambda}{d}, \quad d = \frac{632.8 \times 2}{0.014} = 90400 \text{ nm}$$

(2) 亮条纹的条件为

$$\delta = d \sin \theta = \pm j \lambda, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

又因为  $\sin \theta \leq 1$ , 所以

$$j \lambda = d \sin \theta < d, \quad j_{\max} = [d/\lambda] = 142$$

可观察到的条纹为  $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm j_{\max}$ , 数量为  $N = 2j_{\max} + 1 = 285$

7.2 用薄云母片覆盖在双缝实验中的一条缝上, 这时屏幕上的中央明纹移动到原来第 7 级明纹的位置. 若入射光波长  $\lambda = 550 \text{ nm}$ , 云母的折射率  $n = 1.52$ , 问云母的厚度几何?

解答: 设云母厚度为  $d$ . 不放置云母片时, 第七级明纹的位置满足

$$\delta = r_2 - r_1 = 7\lambda$$

在路径 1 中加入云母片后, 其光程变化为  $nd + (r_1 - d) \cdot 1$ . 由于这时该位置成为零级明纹, 必有  $\delta = 0$ ,

$$\delta = r_2 - [nd + (r_1 - d)] = r_2 - r_1 - (n - 1)d = 0$$

将  $r_2 - r_1 = 7\lambda$  以及  $n = 1.52$  代入上式得,  $d = 7404 \text{ nm}$ .

7.3 设杨氏双缝的间距  $d = 0.2 \text{ mm}$ , 双缝距离接收屏  $D = 1 \text{ m}$ , 若用白光 ( $\lambda = 390 \sim 760 \text{ nm}$ ) 照射, 距离中心明纹  $10 \text{ mm}$  处, 哪些波长的光最大限度的干涉加强?

解答:

$$\frac{x}{D} = \frac{\delta}{d}, \quad \delta = 0.2 \times \frac{10}{1000} = \frac{2}{1000} \text{ mm} = 2000 \text{ nm}$$

根据干涉加强的条件  $\delta = j\lambda$  以及  $390 < \lambda < 760$  得

$$j = \frac{\delta}{\lambda} = (5.12 \sim 2.63), \quad j = 3, 4, 5$$

干涉加强的光的波长

$$\lambda_3 = \frac{\delta}{3} = 666.7 \text{ nm}, \quad \lambda_4 = \frac{\delta}{4} = 500 \text{ nm}, \quad \lambda_5 = \frac{\delta}{5} = 400 \text{ nm}$$

## 薄膜干涉

7.4 在空气中, 用白光垂直照射厚度  $d = 400 \text{ nm}$ 、折射率为  $n = 1.5$  的玻璃片, 问在可见光范围内, 哪些波长的光在反射中加强? 哪些光在透射中加强? 可见光波长范围是  $390 \sim 760 \text{ nm}$ .

解答: 反射光的光程差存在半波损失, 光程差

$$\delta = 2nd + \frac{\lambda}{2}$$

反射光干涉加强的条件为  $\delta = j\lambda$ , 将上述两式联合得整数  $j$  的取值范围

$$2nd + \frac{\lambda}{2} = j\lambda, \quad j - \frac{1}{2} = \frac{2nd}{\lambda} = (1.6 \sim 3.1)$$

整数  $j \in (2.1, 3.6)$ ,  $j = 3$ , 此种情况下的波长

$$\lambda = \frac{2nd}{j - 1/2} = 480 \text{ nm}$$

透射光的光程差不存在半波损失, 干涉加强的条件为

$$\delta = 2nd = j\lambda, \quad j = \frac{2nd}{\lambda} = (1.6 \sim 3.1)$$

整数  $j = 2, 3$ , 波长

$$\lambda_2 = \frac{2nd}{2} = 600 \text{ nm}, \quad \lambda_3 = \frac{2nd}{3} = 400 \text{ nm}$$

7.5 折射率为 1.5 的玻璃表面有一层折射率  $n = 1.3$  的油膜, 用一个波长连续可调的单色光源垂直照射玻璃, 当波长 500 nm 时, 反射光干涉相消. 当波长增大至 700 nm 时, 反射光又一次相消. 计算油膜厚度  $d$ .

解答: 折射率依次增大, 反射光的光程差无半波损失  $\delta = 2nd$ .

当波长  $\lambda_1 = 500 \text{ nm}$  时,

$$\delta = 2nd = (j + \frac{1}{2})\lambda_1$$

当波长  $\lambda_2 = 700 \text{ nm}$  时,

$$\delta = 2nd = (j - \frac{1}{2})\lambda_2$$

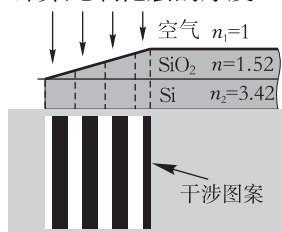
联立上述两式得  $j = 3$ . 将其回代上述任意一式, 得  $\lambda = 673 \text{ nm}$ .

7.6 折射率为  $n = 1.52$  的玻璃尖劈, 用波长为 589.3 nm 的钠光垂直照射, 测得相邻暗纹的间距是  $l = 0.5 \text{ mm}$ , 计算尖劈的顶角.

解答:

$$l\theta = \frac{\lambda}{2n}, \quad \theta = 0.388 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

7.7 制造半导体元件时, 常常需要测定硅片上的二氧化硅薄膜的厚度. 可以将二氧化硅薄膜的一部分腐蚀掉, 露出一个倾斜的劈尖膜. 用波长为 589.3 nm 的钠光垂直照射, 观察到如图所示的条纹. 已知硅的折射率为 3.42, 二氧化硅的折射率  $n = 1.52$ , 计算此氧化层的厚度  $d$ .

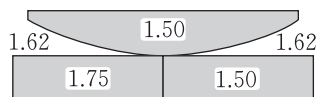


总习题 7-7 图

解答: 反射光的光程差没有半波损失. 从图中看出, 总共有 3.5 个完整条纹,

$$d = 3.5 \times \frac{\lambda}{2n} = 3.5 \times \frac{589.3}{2 \times 1.52} = 678.5 \text{ nm}$$

7.8 牛顿环干涉装置的折射率如下图所示, 大致画出反射光的干涉图案.



总习题 7-8 图

解答: 略

衍射

7.9 波长为 10 m 的水面波垂直进入宽  $a = 50 \text{ m}$  的港口. 港口内的海面上形成的衍射波束的角宽度多大?

解答：单缝衍射

$$a \sin \theta_1 = \lambda, \quad \Delta\theta = 2\theta_1 = 2 \arcsin \frac{\lambda}{a} = 23.1^\circ$$

7.10 波长  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ ，直径  $a = 2 \text{ mm}$  的氦氖激光照射到月球表面，已知地月之间的距离为  $L = 3.84 \times 10^5 \text{ km}$ ，计算月球上的光斑直径  $D$ ；如果激光直径扩展到  $2 \text{ m}$ ，月球上的光斑直径多大？

解答：激光从圆孔中射出，在月球上汇聚干涉。虽然没有汇聚透镜，但是因为距离极其遥远，所以可近似看做是平行光。利用圆孔的弗朗和非衍射，第一级暗环的衍射方向角

$$\Delta\theta = 1.22 \arcsin \frac{\lambda}{a} \simeq 1.22 \frac{\lambda}{a} = 0.386 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

光斑直径

$$D = 2 \times L \Delta\theta = 296 \text{ km}$$

若激光直径扩大至  $2 \text{ m}$ ，光斑直径缩小至

$$D = 296 \text{ m}$$

7.11 迎面驶来的汽车，其前灯距离  $l = 1.20 \text{ m}$ ，假设夜间人的瞳孔直径  $a = 5 \text{ mm}$ ，车灯平均波长  $550 \text{ nm}$ ，人与车的距离  $L$  最多多大才能分清两盏灯？

解答：若距离太远，车灯相对于人眼的张角太小，分辨不清。

车灯的张角  $\theta = l/L$ ，人眼的分辨角  $\theta_R = 1.22\lambda/a$ ，能够分辨的条件为  $\theta > \theta_R$ ，

$$\frac{l}{L} \geq 1.22 \frac{\lambda}{a}, \quad L \leq 8.94 \text{ km}$$

7.12 一架照相机在距离地面  $L = 200 \text{ km}$  的轨道上用  $400 \text{ nm}$  的波长拍照。为了要分清楚地面上相距  $l = 0.1 \text{ m}$  的点，镜头直径  $a$  最小是多少？

解答：

$$\frac{l}{L} \geq 1.22 \frac{\lambda}{a}, \quad a \geq 0.976 \text{ m}$$

光栅

7.13 某单色光垂直照射到每毫米有 600 条缝的光栅上，其第 1 级谱线的衍射角为  $20^\circ$ ，问该光的波长多大？第 2 级谱线在哪里？

原文“角宽度”  
射角”

解答：

$$d \sin \theta_1 = \lambda, \quad \lambda = \frac{1}{600} \times \sin 20^\circ = 570 \times 10^{-6} \text{ mm}$$

第二级谱线

$$d \sin \theta_2 = 2\lambda, \quad \theta_2 = \arcsin \frac{2\lambda}{d} = 43.16^\circ$$

7.14 可见光垂直照射到每毫米有 630 条缝的光栅上，计算第 1 级谱线的角宽度（可见光波长范围是  $390 \sim 760 \text{ nm}$ ）。

解答：

$$d \sin \theta = \lambda$$

将波长的上下限代入上式，可得到

$$\theta_l = \arcsin \frac{390 \times 10^{-6}}{1/630} = 14.223^\circ, \quad \theta_h = \arcsin \frac{760 \times 10^{-6}}{1/630} = 28.607^\circ$$

第一级谱线角宽度  $\Delta\theta = \theta_h - \theta_l = 14.4^\circ$

7.15 相控阵雷达：许多雷达等间距的排列为一 条直线，其间距为  $5 \text{ m}$ 。每台雷达都发射波长  $10 \text{ m}$  的电磁波，但是初相位依次递减  $\pi/6$ 。问天线在哪个方向辐射的电磁波功率最强？

解答：设发射功率最强的方向为  $\theta$ 。根据光栅衍射的结论，相邻天线发出的电磁波，由路程引起的波程差为  $\delta = d \sin \theta = 5 \sin \theta$ ，相邻天线在  $\theta$  方向电磁波的相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} - (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{2\pi \times 5 \sin \theta}{10} - \frac{-\pi}{6} = \pi \sin \theta + \frac{\pi}{6}$$

根据干涉加强的条件  $\Delta\varphi = 2j\pi$

$$\pi \sin \theta + \frac{\pi}{6} = 2j\pi, j \in \mathbb{Z}$$

上式左边

$$-\frac{5\pi}{6} < \pi \sin \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{7\pi}{6}$$

因此这里  $j = 0$  是唯一的取值， $\theta = -\arcsin(1/6) = -9.59^\circ$

偏振

7.16 两个偏振片平行放置，透振方向的夹角为  $60^\circ$ 。用自然光垂直照射，透射光强是  $I_1$ 。若在两个偏振片之间再放入另一偏振片，透振方向与前两个均为  $30^\circ$  角，则最终的透射光强是多少？

解答：令自然光的强度为  $I_0$ 。自然光透过第一片偏振片后，光强为  $I_1 = I_0/2$ ，再透过第二片偏振片，光强为

$$I_2 = I_1 \cos^2 60^\circ = \frac{I_0}{8}$$

若再插入一个偏振片，最终透光强度

$$I = I_1 \cos^2 30^\circ \cos^2 30^\circ = \frac{9I_0}{32}$$

7.17 水的折射率为 1.33，玻璃的折射率为 1.50，光从水中入射到玻璃，起偏角是多大？若光从玻璃入射到水，起偏角多大？这两个角有什么关系？

解答：从水中入射到玻璃，起偏角是

$$i_B = \arctan \frac{1.50}{1.33} = 48.44^\circ$$

光从玻璃入射到水，起偏角

$$i_B = \arctan \frac{1.33}{1.50} = 41.56^\circ$$

这两个角是“互余角”。

7.18 在空气中测得某釉质的起偏角是  $58^\circ$ ，它的折射率多大？

解答：

$$\tan i_B = \frac{n_2}{n_1} = n_2, \quad n_2 = 1.60$$

## 第八章 热学

## 气体状态方程

8.1 可见光的平均波长大约为 500 nm, 计算标准状态下, 以此波长为边长的立方体内有多少个分子?

解答: 该立方体的体积

$$V = (500 \times 10^{-9})^3$$

根据例题6.2, 标准状态下气体的分子数密度

$$n = \frac{p_0}{kT_0} = 2.687 \times 10^{25}$$

分子数

$$N = nV = 3.36 \times 10^6$$

8.2 体积为  $1 \text{ m}^3$  的钢瓶内储有供气焊用的氢气. 假定氢气的温度保持 300 K 不变, 当瓶内氢气的压强由  $4.9 \times 10^6 \text{ Pa}$  降为  $9.8 \times 10^5 \text{ Pa}$  时, 计算用去的氢气质量.

解答: 由理想气体状态方程

$$pV = \frac{M}{\mu}RT, \quad \Delta M = \Delta \left( \frac{pV\mu}{RT} \right) = \frac{(\Delta p)V\mu}{RT}$$

代入数据

$$\Delta M = \frac{(49 - 9.8) \times 10^5 \times 1 \times 0.002}{8.314 \times 300} = 3.14 \text{ kg}$$

8.3 一容器内储有氧气, 其压强为  $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 温度为  $27^\circ\text{C}$ , 求: (1) 气体分子数密度; (2) 氧气的密度; (3) 分子间的平均距离.

解答: (1)  $T = 273 + 27 = 300 \text{ K}$

$$p = nkT, \quad n = \frac{p}{kT} = \frac{1.01 \times 10^5}{1.38 \times 10^{-23} \times 300} = 2.44 \times 10^{25}$$

(2) 密度

$$pV = \frac{M}{\mu}RT, \quad \rho = \frac{M}{V} = \frac{p\mu}{RT} = 1.30 \text{ kg/m}^3$$

(3) 间距

$$d = \sqrt[3]{1/n} = 3.45 \times 10^{-9} \text{ m}$$

## 气体动理论

8.4 体积为 2 L 的容器内装有内能为  $6.75 \times 10^2 \text{ J}$  的氧气; (1) 计算气体的压强; (2) 若分子总数为  $5.4 \times 10^{22}$  个, 计算单个分子的平均平动动能以及气体的温度.

解答: 氧气为双原子分子, 自由度  $i = 5$ .

(1)

$$E = \frac{5}{2}\nu RT = \frac{5}{2}pV, \quad p = \frac{2E}{5V} = 1.35 \times 10^5 \text{ Pa}$$

(2) 单个分子的平均总动能

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{E}{N} = \frac{6.75 \times 10^2}{5.4 \times 10^{22}} = 1.25 \times 10^{-20} \text{ J}$$

温度

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{5}{2}kT, \quad T = \frac{2\bar{\epsilon}_k}{5k} = 362 \text{ K}$$

平均平动动能

$$\frac{3}{2}kT = \frac{3}{5}\bar{\epsilon}_k = 0.75 \times 10^{-20} \text{ J}$$

8.5 某容器内有 2.56 kg 氧气, 其内能为  $4.14 \times 10^5 \text{ J}$ ; (1) 计算气体的温度; (2) 计算单个分子的平均平动动能.

解答: (1) 氧气为双原子分子, 自由度  $i = 5$ .

$$E = \frac{5}{2} \frac{M}{\mu} RT$$

其中  $M = 2.56$ ,  $\mu = 0.032$ , 代入数据得  $T = 249 \text{ K}$ .

(2) 平均平动动能  $\frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 249 = 5.15 \times 10^{-21} \text{ J}$

8.6 某绝热容器被分隔为体积相等的两半, 一半装有温度为 250 K 的氦气, 一半装有温度为 310 K 的氧气; 二者的压强相等. 去掉隔板后, 混合气体的温度是多少?

解答:  $T_1 = 250 \text{ K}$ ,  $T_2 = 310 \text{ K}$ , 由  $p_1 V_1 = p_2 V_2$  得

$$1 = \frac{p_1 V_1}{p_2 V_2} = \frac{\nu_1 R T_1}{\nu_2 R T_2}, \quad \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{31}{25} = 1.24$$

设混合后的温度为  $T$ , 混合前后, 总内能是守恒的

$$\frac{3}{2} \nu_1 R T_1 + \frac{5}{2} \nu_2 R T_2 = \frac{3}{2} \nu_1 R T + \frac{5}{2} \nu_2 R T$$

得

$$T = \frac{3 \frac{\nu_1}{\nu_2} T_1 + 5 T_2}{3 \frac{\nu_1}{\nu_2} + 5} = 284 \text{ K}$$

8.7 容器中有  $N \gg 1$  个粒子, 其速率分布函数为

$$f(v) = \begin{cases} C, & 0 \leq v \leq v_0 \\ 0, & v_0 < v \end{cases}$$

(1) 作出速率分布曲线; (2) 若  $v_0$  已知, 求常数  $C$ ; (3) 求粒子平均速率.

解答: (1) 略

(2) 根据归一化条件

$$\int_0^\infty f(v) dv = \int_0^{v_0} C dv = 1, \quad C = \frac{1}{v_0}$$

(3) 平均速率

$$\bar{v} = \int_0^{v_0} v f(v) dv = \int_0^{v_0} \frac{v}{v_0} dv = \frac{v_0}{2}$$

热力学第一定律

8.8 在等压过程中, 氢气对外做功为  $W$ , 则吸热多大?

解答: 等压过程必有  $p \Delta V = \nu R \Delta T$ .

等压过程对外做功  $W = p \Delta V$ .

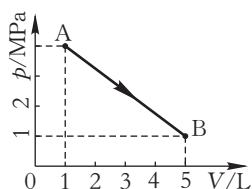
氢气分子的自由度  $i = 5$ , 内能增量

$$\Delta E = \frac{5}{2} \nu R \Delta T = \frac{5}{2} p \Delta V = \frac{5}{2} W$$

吸热

$$Q = W + \Delta E = \frac{7}{2} W$$

8.9 如下图所示, 某氧气从状态 A 沿着直线变化至状态 B, 计算该过程中的功、内能增量以及吸收的热量. ( $1 \text{ L} = 10^{-3} \text{ m}^3$ )



总习题8-9图

解答：功

$$W = \int_A^B p dV = \text{直线AB下方的梯形面积} = \frac{1+4}{2} \times 4 \times 10^6 \times 10^{-3} = 10^4 \text{ J}$$

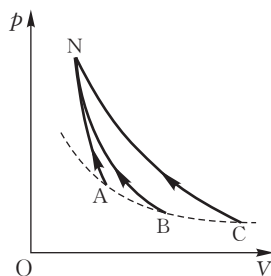
内能增量

$$\Delta E = \frac{5}{2} \nu R \Delta T = \frac{5}{2} \Delta(pV) = \frac{5}{2} (p_B V_B - p_A V_A) = 2.5 \times 10^3 \text{ J}$$

吸热

$$Q = W + \Delta E = 1.25 \times 10^4 \text{ J}$$

8.10 如下图所示，相同的理想气体沿着AN、BN、CN三个过程演化，其中A、B、C三点在同一条等温线上，且BN是绝热过程。问哪个过程是吸热的？



总习题8-10图

解答：三个不同的过程，其温度变化量是相同的，故内能变化量  $\Delta E$  相同。

从图上可以看出，三个过程的体积都缩小，故系统对外做功皆为负值。过程AN与横轴之间的面积最小，过程CN与横轴间的面积最大，

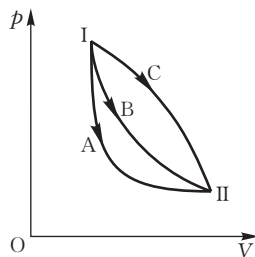
$$|W_{AN}| < |W_{BN}| < |W_{CN}|, \quad 0 > W_{AN} > W_{BN} > W_{CN}$$

根据热力学第一定律  $Q = W + \Delta E$ ，可知道  $Q_{AN}$  最大， $Q_{CN}$  最小，

$$Q_{AN} > Q_{BN} > Q_{CN}$$

由于绝热过程  $Q_{BN} = 0$ ，所以有  $Q_{AN} > 0$ ，AN是吸热过程。

8.11 如下图所示，相同的理想气体沿着A、B、C三个过程演化，其中B为绝热过程。问哪个过程是吸热的？



总习题8-11图

解答：三个不同的过程，其温度变化量是相同的，故内能变化量  $\Delta E$  相同。从图上可以看出，三个过程的功皆为正值。过程A与横轴之间的面积最小，过程C与横轴间的面积最大，

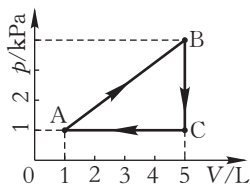
$$0 < W_A < W_B < W_C$$

根据热力学第一定律  $Q = W + \Delta E$ , 可知道  $Q_{AN}$  最小,  $Q_{CN}$  最大,

$$Q_A < Q_B < Q_C$$

由于绝热过程  $Q_B = 0$ , 所以有  $Q_C > 0$ , C是吸热过程.

8.12 如下图所示, 某氧气沿着ABCA方向循环, 计算热机效率.



总习题8-12图

解答: AB过程对外做正功, 温度升高, 恒吸热

$$W_{AB} = \text{直线AB下方的梯形面积} = 10 \text{ J}$$

$$\Delta E_{AB} = \frac{5}{2} \Delta(pV) = 47.5 \text{ J}$$

$$Q_{AB} = W_{AB} + \Delta E_{AB} = 57.5 \text{ J}$$

BC过程恒放热

$$W_{BC} = \text{直线AB下方的面积} = 0$$

$$\Delta E_{BC} = \frac{5}{2} \Delta(pV) = -37.5 \text{ J}$$

$$|Q_{BC}| = |-37.5| = 37.5 \text{ J}$$

CA过程恒放热

$$W_{CA} = -\text{直线AB下方的矩形面积} = -4 \text{ J}$$

$$\Delta E_{CA} = \frac{5}{2} \Delta(pV) = -10 \text{ J}$$

$$|Q_{BC}| = |-4 - 10| = 14 \text{ J}$$

净功

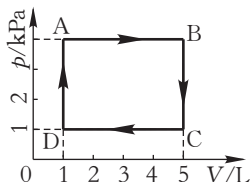
$$W = \text{三角形ABC的面积} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = 6 \text{ J}$$

热机效率

$$\eta = \frac{W}{Q_{AB}} = 10.43\%$$

注意: 如果能够确认BC以及CA两个过程放热, 则这两个过程的放热量无用, 可以不计算. 只需要计算AB过程的吸热, 然后根据三角形面积计算净功  $W$  即可.

8.13 如下图所示, 某氮气沿着ABCD方向循环, 计算该循环过程中的热机效率.



总习题8-13图

解答: 子过程DA与AB是吸热的, 其余两个子过程是放热的. 在过程DAB中,

$$W_{DAB} = \text{DAB下方的面积} = 16 \text{ J}$$

$$\Delta E_{DAB} = \frac{5}{2} \Delta(pV) = 47.5 \text{ J}$$



$$Q_{DAB} = 16 + 47.5 = 63.5 \text{ J}$$

整个循环过程中的净功为

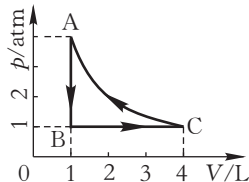
$$W = \text{矩形ABCD的面积} = 12 \text{ J}$$

热机效率

$$\eta = \frac{W}{Q_{DAB}} = 18.90\%$$

注意：这里放热的子过程没有计算。

8.14 如下图所示，某氦气沿着ABCA方向循环，计算制冷系数，其中CA是等温过程， $1 \text{ atm} = 10^5 \text{ Pa}$ 。



总习题8-14图

解答：子过程AB降温且不做功  $W_{AB} = 0$ ，放热；

子过程BC升温且对外做功，吸热；

$$W_{BC} = \text{BC下方的面积} = 3 \times 10^5 \text{ J}$$

$$\Delta E_{BC} = \frac{5}{2} \Delta(pV) = 7.5 \times 10^5 \text{ J}$$

$$Q_{BC} = W_{BC} + \Delta E_{BC} = 10.5 \times 10^5 \text{ J}$$

子过程CA温度不变，但对外做负功，放热；

$$W_{CA} = \int_C^A p dV = p_C V_C \ln \frac{V_A}{V_C} = -4 \ln 4 \times 10^5 \text{ J}$$

整个循环过程中，外界对系统做的净功为

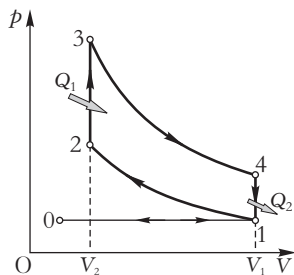
$$|W| = |W_{AB} + W_{BC} + W_{CA}| = 2.545 \times 10^5 \text{ J}$$

制冷系数

$$\zeta = \frac{Q_{BC}}{|W|} = 4.13$$

注意：只需要计算吸热子过程的吸热量以及总功，放热过程的放热量无需考虑。

8.15 如下图所示，四冲程汽油机的循环过程也称作奥托循环，他由两条绝热线与两条等容线组成。汽缸容积的最大值为  $V_1$ ，最小值为  $V_2$ 。汽油机工作过程分析如下：①汽缸的进气门打开，活塞移动，吸入汽油与空气的混合物(过程0-1)；②关闭所有气门，活塞绝热压缩混合气体(过程1-2)；③火花塞点燃混合气体，汽缸内的温度与压强迅速升高，而体积来不及增大(过程2-3)；④高温高压气体绝热膨胀，推动活塞移动对外做功(过程3-4)；⑤排气门打开，汽缸内的废气排出，汽缸的容积保持不变(过程4-1)；⑥活塞移动，将废气彻底排出(过程1-0)；计算该循环过程的热机效率。



总习题8-15图

解答：过程2-3吸热

$$|Q_1| = \nu C_V (T_3 - T_2)$$

过程4-1 放热

$$|Q_2| = \nu C_V (T_4 - T_1)$$

汽油机的效率

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

因为过程1-2以及过程3-4都是绝热的, 所以有

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \quad T_4 V_1^{\gamma-1} = T_3 V_2^{\gamma-1}$$

由上述两式可得

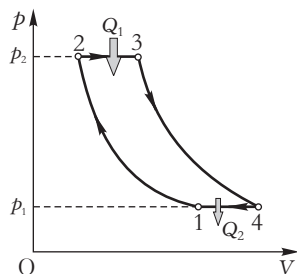
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{T_4}{T_3} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

因有

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{1}{(V_1/V_2)^{\gamma-1}} = 1 - \frac{1}{\kappa_v^{\gamma-1}}$$

其中  $\kappa_v = V_2/V_1$  是绝热压缩比.

8.16 如下图所示, 燃气涡轮机的循环过程由两条绝热线与两条等压线组成. 设汽缸气体的最大压强为  $p_2$ , 最小压强为  $p_1$ . 计算该循环过程的热机效率.



总习题8-16图

解答: 过程2-3 吸热

$$|Q_1| = \nu C_p (T_3 - T_2)$$

过程4-1 放热

$$|Q_2| = \nu C_p (T_4 - T_1)$$

汽油机的效率

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

因为过程1-2以及过程3-4都是绝热的, 所以有

$$p_1^{\gamma-1}/T_1^\gamma = p_2^{\gamma-1}/T_2^\gamma \quad p_1^{\gamma-1}/T_4^\gamma = p_2^{\gamma-1}/T_3^\gamma$$

由上述两式可得

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{T_4}{T_3} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

因有

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - 1/\kappa_p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

其中  $\kappa_p = p_2/p_1$  是绝热升压比.

## 第九章 近代物理

## 相对论运动学

9.1 在参照系  $S$  中观测到两个事件： $\Delta x = x_2 - x_1 = 0$ ，时间差  $\Delta t = t_2 - t_1 = 2 \text{ s}$ ；在另一参照系  $S'$  中观测， $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = 3 \text{ s}$ ，问  $\Delta x'$  多大？

解答：

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - u\Delta x/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

将已知数据代入上式得  $u/c = \sqrt{5}/3$ 。

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{0 - u \cdot 2}{2/3} = -3\sqrt{5} \times 10^8 \text{ m}$$

9.2 在参照系  $S$  中观测到两个事件： $\Delta x = x_2 - x_1 = 1 \text{ m}$ ，时间差  $\Delta t = t_2 - t_1 = 0$ ；在另一参照系  $S'$  中观测， $\Delta x' = x'_2 - x'_1 = 2 \text{ m}$ ，请计算  $\Delta t'$ 。

解答：

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

将已知数据代入上式得  $u/c = \sqrt{3}/2$ 。

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - u\Delta x/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{0 - u \cdot 1/c^2}{1/2} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times 10^{-8} \text{ s}$$

9.3 一根直杆在参照系  $S$  中静止并且平行于  $x$  轴，该参照系中的观察者同时测量尺子的两端，测得长度  $\Delta x = 1 \text{ m}$ 。参照系  $S'$  相对于  $S$  的速度为  $0.6c$ ，问刚才的两个测量事件在  $S'$  系中的空间距离为多大？

解答：在参照系  $S$  中， $\Delta t = 0$ ， $\Delta x = 1$ ，

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{1 - 0}{\sqrt{1 - 0.6^2}} = 1.25 \text{ m}$$

9.4 地面雷达站观测到一艘飞船以  $0.6c$  的速度飞过雷达顶部，从船头到达至船尾离开，总共花费了  $20 \mu\text{s}$  的时间。问飞船的固有长度多大？飞船上的驾驶员观测的这段时间是多大？

解答：在地面参照系，船头到达雷达以及船尾离开雷达两个事件的时间间隔  $\Delta t = 20 \times 10^{-6} \text{ s}$ ，空间间隔  $\Delta x = 0$ 。

解法一：在飞船上观察，飞船是静止的，雷达站在向后退，相对于飞船的速率为  $u = 0.6c$ 。雷达站到船头与到达船尾两个事件的时间间隔为

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - u\Delta x/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{20 \times 10^{-6} - 0}{\sqrt{1 - 0.6^2}} = 25 \times 10^{-6} \text{ s}$$

在这段时间内，雷达的位移就是飞船的固有长度

$$l_0 = u\Delta t' = 4500 \text{ m}$$

或者

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{0 - 0.6c \cdot 20 \times 10^{-6}}{\sqrt{1 - 0.6^2}} = -4500 \text{ m}$$

解法二：在地面上观察，飞船是运动的，其动长度为

$$l = u\Delta t = 3600 \text{ m}$$

在飞船上观察, 船是静止的, 长度为

$$l_0 = l / \sqrt{1 - u^2/c^2} = 4500 \text{ m}$$

### 相对论动力学

9.5 两个静质量均为  $m_0$  的小球, 其中一个静止, 另外一个以  $0.8c$  的速度撞向前一个球并粘在一起. 假设碰撞过程中没有辐射, 没有热量散失, 计算合成小球的静质量.

解答: 设碰撞后的质量为  $M$ , 速度为  $V$ , 根据动量守恒

$$\begin{aligned} \frac{m_0 \cdot 0}{\sqrt{1 - 0^2/c^2}} + \frac{m_0 \cdot 0.8c}{\sqrt{1 - 0.8^2}} &= \frac{MV}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ \Rightarrow \frac{4}{3}m_0c &= \frac{MV}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{aligned} \quad (\text{a})$$

根据能量守恒

$$\begin{aligned} \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - 0^2/c^2}} + \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - 0.8^2}} &= \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ \Rightarrow \frac{8}{3}m_0 &= \frac{M}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{aligned} \quad (\text{b})$$

等式(a)除以等式(b)得  $V = c/2$ , 回代至等式(b)得

$$M = \frac{4m_0}{\sqrt{3}}$$

### 量子论

9.6 根据德布罗意的物质波假设, 证明玻尔的量子化条件

$$mvr = n\hbar, \quad n = 1, 2, \dots$$

相当于规定电子的轨道周长是德布罗意波长的整数倍.

解答:

$$2\pi r = 2\pi \frac{n\hbar}{mv} = \frac{nh}{mv} = n\lambda$$

### 薛定谔方程

9.7  $\text{H}_2$  中的原子振动相当于一个谐振子, 其等效劲度系数  $k = 1.13 \times 10^3 \text{ N/m}$ , 质量为  $m = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ . 计算此分子振动的基态能量. 根据热学, 分子每个自由度分得的平均动能为  $k_B T/2$ , 问温度为多高时平均动能等于基态能量? 其中  $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$  是玻尔兹曼常数.

解答:

$$\omega = \sqrt{k/m} = 0.8226 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

量子谐振子的基态能量为

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega = \frac{1}{2} \times 1.055 \times 10^{-34} \times 0.8226 \times 10^{15} = 4.34 \times 10^{-20} \text{ J}$$

$$\frac{1}{2}k_B T = E_0, \quad T = 629 \text{ K}$$

9.8 谐振子第一激发态的波函数是

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2a^3}{\pi^{1/2}}} x e^{-a^2 x^2/2}$$

计算概率最大值的位置.

解答: 概率密度

$$|\psi_1(x)|^2 = \frac{2a^3}{\pi^{1/2}} x^2 e^{-a^2 x^2}$$

两边对  $x^2$  求导,

$$\frac{d(|\psi_1|^2)}{d(x^2)} = \frac{2a^3}{\pi^{1/2}} e^{-a^2 x^2} (1 - x^2 a^2) = 0$$

概率密度最大位置为

$$x = \frac{1}{a}$$

9.9 已知质量为  $m$  的粒子在宽度为  $a$  的无限深势阱中, 其能级

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

证明在量子数为  $n$  的状态中, 电子的德布罗意波长满足条件

$$\lambda_n = \frac{2a}{n}$$

解答: 在低速情形时,  $p = mv$ ,  $E = \frac{1}{2}mv^2$ , 动量  $p_n = \sqrt{2mE_n}$ , 波长

$$\lambda_n = \frac{h}{p_n} = \frac{h}{\sqrt{2mE_n}} = \frac{2a}{n}$$

9.10 一维无限深势阱在  $-a < x < a$  范围内的势能为 0, 其余位置的势能为  $\infty$ . 计算质量为  $m$  的粒子在势阱中的波函数以及能级.

解答: 在势阱的外部以及势阱的边界上,  $\psi = 0$ .

在势阱中  $U = 0$ , 定态薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi$$

此方程可以化为标准的简谐振动方程

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi = -k^2\psi$$

令该方程的通解为

$$\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$$

代入边界条件  $\psi(-a) = 0$  与  $\psi(a) = 0$  得

$$A \sin(-ka) + B \cos(-ka) = 0$$

$$A \sin(ka) + B \cos(ka) = 0 \quad (*)$$

用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} -\sin(ka) & \cos(ka) \\ \sin(ka) & \cos(ka) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$$

如果要求  $A, B$  至少存在一个不等于零, 则必须要求行列式等于零

$$\begin{vmatrix} -\sin(ka) & \cos(ka) \\ \sin(ka) & \cos(ka) \end{vmatrix} = 0$$

即  $\sin(ka) \cos(ka) = 0$ .

(1) 若  $\sin(ka) = 0$ , 则

$$k = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2$$

根据式 (\*) 可知  $\sin(ka) = 0$  必要求  $B = 0$ , 此时的波函数为

$$\psi(x) = A \sin(kx)$$

再根据归一化条件

$$\int_{-a}^a |\psi|^2 dx = 1$$

得

$$A = \sqrt{\frac{1}{a}}$$

即

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

(2) 若  $\cos(ka) = 0$ , 则

$$k_{(n+1/2)} = \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$E_{(n+1/2)} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n + \frac{1}{2})^2$$

根据式 (\*) 可知  $\cos(ka) = 0$  必要求  $A = 0$ , 此时的波函数为

$$\psi(x) = B \cos(kx)$$

再根据归一化条件

$$\int_{-a}^a |\psi|^2 dx = 1$$

得

$$B = \sqrt{\frac{1}{a}}$$

即

$$\psi_{(n+1/2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos \frac{(n + \frac{1}{2})\pi x}{a}$$

9.11 证明原子的主量子数为  $n$  的电子层最多可容纳的电子数是  $2n^2$ .

解答: 对于确定的主量子数  $n$ , 角量子数  $l = 0, 1, \dots, (n-1)$  共  $n$  个取值; 而在  $l$  确定的情况下, 磁量子数  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ , 共  $2l+1$  种不同的取值; 磁量子数  $m_l$  确定后, 自旋有  $m_s = \pm 1/2$  两个取值. 故

$$\begin{aligned} \sum_l \sum_{m_l} \sum_{m_s=-1/2}^{1/2} 1 &= \sum_l \sum_{m_l=-l}^l (2) \\ &= \sum_l 2(2l+1) \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} (2) + \sum_{l=0}^{n-1} (4l) \\ &= 2n + \frac{4(n-1)n}{2} = 2n^2 \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $\sum_{l=0}^{n-1} (4l)$  是一个等差数列的和.