问题

1、微分方程级数解法的步骤

- 设微分方程有级数解
- 将级数解代入原方程，得两个相互相等的幂级数
- 由系数方程组，求出级数的系数，原方程解可得

2、勒让德方程为

$$(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0$$

l是常数,勒让德方程方程出现在球坐标下偏微分方程解

3、勒让德方程级数解的主要步骤

- 假定y具级数解，逐项求导两次得到y,y',y''

$$\begin{cases} y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots \\ y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots \\ y''=a_2x+6a_3x+12a_4x^2+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\ldots \end{cases}$$

- 将y,y',y''代入原方程，到x各项幂次的系数
- y,y',y''代入方程可得系数递推公式

$$a_{n+2}=-\frac{(l-n)(l+n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n$$

- 由此可得勒让德方程的解为：

$$\begin{aligned} y=&a_0[1-\frac{l(l+1)}{2!}x^2+\frac{l(l+1)(l-2)(l+3)}{4!}x^4+\ldots]+ \\ &a_1[x-\frac{(l-1)(l+2)}{3!}x^3+\frac{(l-1)(l+2)(l-3)(l+4)}{5!}x^5+\ldots] \end{aligned}$$

为两个级数的线性组合

4 勒让德多项式

勒让德方程的解，l取非负整数。当l为偶数时，第一个级数会截止，如$l=2,x^4$的系数为0，且之后都是0,。第二个级数发散。当l为奇数时，第二个级数会截止，如$l=1,x^3$的系数为0，且之后都是0,第一

个级数发散。

当l 分别取偶数、奇数时所得的解，为勒让德多项式，并设为P_l。令$x=1$时$y=1,$可得a_0,a_1如

$l=0,y=a_0,$第二个级数发散，由$x=1,y=1,$得$a_0=1,$所以$P_0=1$
$l=1,y=a_1x,$第一个级数发散，由$x=1,y=1,$得$1=a_1,$所以$P_1=x$
$l=2,y=a_0[1-\frac{2(2+1)}{2!}x^2],$第二个级数发散，由$x=1,y=1,$得$1=a_0[1-3],$所以$a_0=-\frac{1}{2},P_2=-\frac{1}{2}(1-3x^2),$即$P_2=\frac{1}{2}(3x^2-1)$
同样，$P_3=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$

所以 0～3阶Legendre多项式为

$$\begin{cases}P_0=1\\P_1=x\\P_2=\frac{1}{2}(3x^2-1)\\P_3=\frac{1}{2}(5x^3-3x)\end{cases}$$

5 Legendre方程特征值问题

6、罗德里格斯公式

> $$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^m}{dx^n}(x^2-1)^n$$

从罗德里格公式求 P_0（x），P_1（x），P_2（x），P_3（x）

7、正交

- 两个向量A和B正交，(垂直)如果它们的标量积为零。
- 两个函数A(x)和B(x)正交。
- 正交函数集
- 三维欧氏空间中e_1,e_2,e_3构成一个完备系，是指不存在任何矢量与e_1,e_2,e_3都正交；三维空间的任一矢量A均可用 $e_k(k=1,2,3)$展开为
  $A=\sum_{k=1}^{3}A_ke_k$
- 二维空间中e_l与e_2构一个完备系
- 三角函数系也构成一个完备系,可以看作函数空间的“基矢”，满足一定条件的函数f(x)可以用这个函数系作为基来展开，函数系完备性.
- 标准正交函数：自身的标量积，A•A =A^2，得到向量长度(或范数)的平方。如果用A除以它的长度，得到一个单位向量。函数范数
- 勒让德多项式是在(−1,1)上正交函数组。可把任意n阶多项式写成n阶勒让德多项式的线性组合

8 勒让德多项式python计算程序

1. 介绍

物理很多领域的问题，用微分方程解决。第13章讨论偏微分方程相关的各种物理问题。
求解这些偏微分方程，需用到常微分方程，而常微分方程的解没有初等函数解。这一章将学习这些常微分方程及其解。

如果学习这些数学之前，了解相应的物理问题，且已学了第七章和第八章，可以先学第13章第1节至第4节，再回到第12章学习第13章其余部分所需的材料。（参见前言）。

可能会有人认为微分方程解可由计算机得出，不需要学习。计算机会给函数名，但我们需要了解函数的图形、导数、积分，相应于正弦和余弦函数的相关三角等式，以及其他信息，以便可以使用应用中经常出现的函数。这就是本章讨论的内容。

与第8章第5节方程一样，我们要解微分方程是线性的，但系数不是常数，而是x的函数，形式为$y''+f(x)y'+g(x)y=0$。解这类方程常用方法是假定方程有无穷级数解.

例1. 通过求解下面简单方程说明级数解法。当然这个方程可用用简单方法求解。

$$y' = 2xy \tag{1.1}$$

设微分方程有级数解

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n + ... = \sum_0^\infty a_n(x)^n \tag{1.2}$$

系数a_n未定。对（1.2）逐项求导，得

$$\begin{aligned} y' &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots = \sum_1^\infty na_nx^{n-1} \\ 2xy &= 2xa_0 + 2a_1x^2 + 2a_2x^3 + ... + 2a_nx_{n+1} + ... \end{aligned} \tag{1.3}$$

(1.2)、(1.3)代入原方程(1.1)，可得两个相互相等的幂级数。原方程对所有x值成立，y'和$2xy$都是关于x的同一个函数。由于一个函数只有一个幂级数展开式(见第一章第11节)，这两个级数必相同，即幂级数对应的系数必相等。由此可得方程组

$$y' = 2xy, \quad y' - 2xy = 0$$

x由幂次对应的系数相等，得

$$a_1 = 0, a_2 = a_0, a_3 = \frac{2}{3}a_1 = 0, a_4 = \frac{1}{2}a_0 \tag{1.4}$$

一般地

$$na_n = 2a_{n-2}, a_n = \begin{cases} 0, & \text{n为奇数}, \\ 2/na_{n-2}, & \text{n为偶数} \end{cases} \tag{1.5}$$

级数中只有偶数项,令n = 2m,可得

$$a_{2m} = \frac{2}{2m}a_{2m-2} = \frac{1}{m}a_{2m-2} = \frac{1}{m}\frac{1}{m-1}a_{2m-4} = \cdots = \frac{1}{m!}a_0 \tag{1.6}$$

将系数值代入假定解(1.2),可得原方程解

$$y = a_0 + a_0x^2 + \frac{1}{2!}a_0x^4 + \cdots + \frac{1}{m!}a_0x^{2m} + \cdots = a_0\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{2m}}{m!} \tag{1.7}$$

例2,用基本方法求解对比,分离变量

$$y' = 2xy, \frac{dy}{y} = 2xdx, lny = x^2 + lnc, y = ce^{x^2}$$

以x^2展开

$$y = c(1 + x^2 + x^4/2! + \cdots = c(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!})$$

$$y = c(1 + x^2 + x^4/2! + \cdots = c(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}/n!)$$

与级数解(1.7)相同

2 勒让德方程

- 勒让德方程是

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0 \tag{2.1}$$

  l是常数,方程出现在球坐标下偏微分方程解中,见10.2题和第13章第7节。在力学、量子力学、电磁理论、热学等球对称问题中也多见。参阅第5节的应用。

勒让德方程解是多项式，称为勒让德多项式。方程解法之一是假定微分方程的级数解，级数在有限项之后截止。求勒让德多项式还有其他方法, 参见第4和第5节，第3章第14节，例6。假定y具级数解(1.2)，逐项求导两次得到y', y''

级数解：

$$\begin{cases} y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + ... + a_nx^n + ... \\ y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + ... + na_nx^{n-1} + ... \\ y'' = a_2x + 6a_3x + 12a_4x^2 + ... + n(n-1)a_nx^{n-2} + ... \end{cases} \tag{2.2}$$

将(2.2)代入(2.1)，到x各项幂次的系数，列表如下

函数y	**系数**	x	x^2	x^3	$\dots\ x^n\ \dots$
y''	$2a_2$	$6a_3$	$12a_4$	$20a_5$	$(n+2)(n+1)a_{n+2}$
$-x^2y''$			$-2a_2$	$-6a_3$	$-n(n-1)a_n$
$-2xy'$		$-2a_1$	$-4a_2$	$-6a_3$	$-2na_n$
$l(l+1)y$	$l(l+1)a_0$	$l(l+1)a_2$	$l(l+1)a_3$	$20a_5$	$l(l+1)a_n$

$$\begin{cases} y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + ... + a_nx^n + ... \\ y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + ... + na_nx^{n-1} + ... \\ -xy' = -a_1x + 2a_2x^2 + 3a_3x^3 + 4a_4x^3 + ... + na_nx^{n-1} + ... \end{cases}$$

x所有幂次的系数都为0。对于x的前几次幂

$$\begin{aligned} 2a_2 + l(l+1)a_0 = 0, \text{或} a_2 = -\frac{l(l+1)}{2}a_0; \\ 6a_3 + (l^2 + l - 2)a_1 = 0\text{，或} a_3 = -\frac{(l-1)(l+2)}{6}a_1; \\ 12a_4 + (l^2 + l - 6)a_2 = 0, \text{或} a_4 = -\frac{(l-2)(l+3)}{12}a_2 = \frac{l(l+1)(l-2)(l+3)}{4!}a_0; \end{aligned} \tag{2.3}$$

从x^n系数得到

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (l^2 + l - n^2 - n)a_n = 0 \tag{2.4}$$

左边a_n系数

$$l^2 - n^2 + l - n = (l+n)(l-n) + (l-n) = (l-n)(l+n+1) \tag{2.5}$$

可用a_n来表示a_{n+2}的通式。式(2.6)包含了式(2.3)的a_2、a_3和a_4，可求得任意偶数项系数是a0的倍数，任意奇数项系数是a1的倍数。从式(2.4)解得a_{n+2}，由(2.5)，有

$$a_{n+2} = -\frac{(l-n)(l+n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n \tag{2.6}$$

作为二阶微分方程的解，通解是两个级数的和，其中包含两个常数a_0和a_1，由给定的初始条件确定。
作为二阶微分方程的解，通解是两个级数的和，其中包含两个常数a_0和a_1，由给定的初始条件确定。

$$\begin{aligned} y =& a_0[1-\frac{l(l+1)}{2!}x^2+\frac{l(l+1)(l-2)(l+3)}{4!}x^4+...]+ \\ & a_1[x-\frac{(l-1)(l+2)}{3!}x^3+\frac{(l-1)(l+2)(l-3)(l+4)}{5!}x^5+...] \end{aligned} \tag{2.7}$$

由式(2.6)比值法判敛，级数在$x^2<1$时收敛。可以证明对于$x^2=1$, 一般不收敛。

例. 考虑l = 0时的a_1级数。如果$x^2=1$，则该级数为$1+1/3+1/5+...$，由积分判别法可知发散。在许多应用程序中x是角θ的余弦，l是非负整数。我们得到一个对所有θ都收敛的解，也就是说，在$x=\pm$与$x<1$一样收敛。当l是整数时，总能找到一个这样的解，而不是两个。

- 勒让德多项式

我们已经看到，对于$l=0$，(2.7)中的a_1级数是发散的。但是看看a_0级数;$l=0$时只有$y=a_0$，其它所有项都包含因子l。如果$l=1$，a_0级数在$x^2=1$发散，a_1级数在$y=a_1x$处截止，因为a_1级数其余项都包含因子$(l-1)$。对于任何整数l，一个级数终止给出一个多项式解，另一个级数在$x^2=1$处发散。对于任何整数l，其中一个级数截止得出一个多项式解，另一个级数在$x^2=1$处发散。l的负整数值可由已知解l的正数项简单得出，如$l=-2$的$y=a_1x$多项式解与$l=1$的解相同，因此，习惯上l取非负值。由此, 非负整数l都有一个多项式解, 可得勒让德方程的一组多项式解。对于$l=0, y=a_0$;对于$l=1, y=a_1x$，依此类推。每个解都包含一个任意常数因子a_0或a_1。在每个多项式中分别选择a_0或a_1值，使$x=1$时$y=1$，由此得到的多项式称为勒让德多项式，即$P_l(x)$。从(2.6)和(2.7)及$P_l(1)=1$，可求得前几项的勒让德多项式，如

> $$P_0(x)=1, \quad P_1(x)=x, \quad p_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1) \tag{2.8}$$

通过这种方法和其他方法找求勒让德多项式留给问题中。对任何整数l都可以用这种方法求出$P_l(x)$，但对于较大的l，求勒让德多项式的更简单的方法将在第4节和第5节中概述。当然，如果只想得到特定P_l式，可通过计算机或参考书找到

特征值问题

求解勒让德方程(2.1)解勒让德多项式时，解决了一个特征值问题。特征值问题参见第三章11及12节，在特征值问题中，给定一个方程或一组包含参数的方程，求满足某些特殊要求的解，为得到这样的解，给参数选择特定的值，所选的值称为特征值。在求勒让德多项式时，要求勒让德方程(2.1)在$x=\pm 1$处收敛的级数解。我们知道参数取任意整数值，就可以得到这样的解。l的值，$0,1,2,\cdots$，称为特征值,相应的解$P_l(x)$称为特征函数。

第三章的特征值、特征向量问题与本章的特征值、特征函数问题是相一致的。在第三章，特征值方程$Mr=\lambda r$，M为矩阵算子，作用于特征向量r得到r的λ倍数。
勒让德方程为$f(D)y(x)=l(l+1)y(x)$,其中$f(D)$是微分算子,作用于特征函数$y(x)$得到$y(x)$的倍数。有关微分方程解特征函数的例子，请参阅第22节和第13章。

勒让德多项式也称为第一类勒让德函数。每个l的第二个解，是无穷级数,$x^2<1$收敛，称为第二类勒让德函数，用$Q_l(x)$表示(见问题4)。函数$Q_l(x)$不如多项式$P_l(x)$常用。对于分数l，两个解都是无穷级数,应用情况更少。

$$\begin{aligned}&n=0\text{时，}y_1(x)=a_0\cdot 1,\quad \text{取}y_1(1)=1\quad \text{得}a_0=1,\quad P_0(x)=1\\&n=1\text{时，}y_2(x)=a_1\cdot x,\quad \text{取}y_1(1)=1,\quad a_1\cdot 1=1,\quad \text{得}a_1=1,\quad P_1(x)=x\end{aligned}$$

3 乘积导数的莱布尼茨法则

先讨论一个求乘积的高阶导数的公式，叫做莱布尼兹法则。用一个例子来说明。当然可以用计算机计算数值问题，但我们的目的是理解在推导过程中用到的一般公式。运用莱布尼茨法则，可能会发现一些简单情况，求乘积高阶导数，比问题输入计算机的速度还要快(见问题2到5)。

- 例.求 $\frac{d^9}{dx^9}(xsinx)$

由莱布尼茨法则,
高次求导

$$x\frac{d^9}{dx^9}(sinx)+9\frac{d}{dx}(x)\frac{d^8}{dx^8}(sinx)+\frac{9\cdot 8}{2!}\frac{d^2}{dx^2}(x)\frac{d^7}{dx^7}(sinx)+... \tag{3.1}$$

二项式展开

$$\begin{aligned}(a+b)^9&=a^0b^9+9a^1b^8+\frac{9\cdot 8}{2!}a^2b^7+\cdots\\&=\frac{9!}{0!(9-0)!}a^0b^9+\frac{9!}{1!(9-1)!}a^1b^8+\frac{9!}{2!(9-2)!}a^2b^7+...\end{aligned}$$

(3.1)中的系数实际上是二项式系数，每一项中两个导数的阶数之和为9。问题6中的第二个提示对理解

和记忆有帮助。在这里，因式的导数在前几项之后变成了0，由此节省很多工作。在(3.1)中，$(d^2/dx^2)(x)=0$，且x的所有高阶导数均为0，得到

$$\frac{d^9}{dx^9}(xsinx)=x\frac{d^9}{dx^9}(sinx)+9\frac{d^8}{dx^8}(sinx)=xcosx+9sinx$$

4. 罗德里格斯公式

求l为整数时勒让德方程的勒让德多项式解,还有其他方法。下面将证明$P_n(x)$有微分表示，罗德里格斯公式

> $$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^m}{dx^n}(x^2-1)^n \tag{4.1}$$

证明分为两部分。首先证明如果

$$v=(x^2{-}1)^l \tag{4.2}$$

那么$d^l v/dx^l$是勒让德方程的一个解。再证明式(4.1)中$P_l(1)=1$。
式（4.2)两边求导，乘以$(x^2{-}1)$

$$(x^2-1)\frac{dv}{dx}=(x^2-1)l(x^2-1)^{l-1}\cdot 2x=2lxv \tag{4.3}$$

对上式求导$l+1$次(莱布尼兹法求导)

$$(x^2{-}1)\frac{d^{l+2}v}{dx^{l+2}}+(l+1)(2x)\frac{d^{l+1}v}{dx^{l+1}}+\frac{(l+1)l}{2!}\cdot 2\cdot\frac{d^l v}{dx^l}=2lx\frac{d^{l+1}v}{dx^{l+1}}+2l(l+1)\frac{d^l v}{dx^l} \tag{4.4}$$

整理得

$$(1-x^2)\left(\frac{d^l v}{dx^l}\right)''-2x\left(\frac{d^l v}{dx^l}\right)'+l(l+1)\frac{d^l v}{dx^l}=0$$

这就是由$d^l v/dx^l$而得(2.1)的勒让德方程。$d^l v/dx^l=d^l/dx^l(x^2-1)^l$是勒让德方程的解。

5 勒让德多项式母函数

函数

> $$\Phi(x,h)=(1-2xh+h^2)^{-1/2},|h|<1 \tag{5.1}$$

> 称为勒让德多项式生成函数。将证明
>
> $$\Phi(x,h)=P_0(x)+hP_l(x)+h^2P_2(x)+...=\sum_{l=0}^{\infty}h^lP_l(x) \tag{5.2}$$

其中函数$P_l(x)$是勒让德多项式。关于级数收敛性的讨论，见第14章，第2.43题。验证(5.2)中的前几项。为简单起见，将$2xh-h^2=y$代入(5.1)，以y的幂次，展开$(1-y)^{-1/2}$，再代入$y=2xh-h^2$，整理为h幂

$$\begin{aligned}\Phi&=(1-y)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}y+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}+...\\&=1+\frac{1}{2}(2xh-h^2)+\frac{3}{8}(2xh-h^2)^2+...\\&=1+xh-\frac{1}{2}h^2+\frac{3}{8}(2xh-h^2)^2+...\\&=1+xh+h^2(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2})+...\\&=P_0(x)+hP_1(x)+h^2P_2(x)+...\end{aligned} \tag{5.3}$$

这不是(5.2)中$P_l(x)$为勒让德多项式的证明，只是对前几项的验证。为证明此，须证明它们满足勒让德方程，并且$P_l(1)=1$的性质。设式(5.1)、(5.2)，x=1

$$\begin{aligned}\Phi(1,h)&=(1-2h+h^2)^{-1/2}=\frac{1}{1-h}=1+h+h^2+...\\&=P_0(1)+P_1(1)h+P_2(1)h^2+...\end{aligned} \tag{5.4}$$

因为这是关于h中的恒等式，(5.2)函数$P_l(x)$有$P_l(1)=1$。为证明它们满足勒让德方程，我们将使用下面的方程，此方程可从(5.1)通过简单的微分和一些代数来验证，见问题2。

$$(1-x^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-2x\frac{\partial\Phi}{\partial x}+h\frac{\partial^2}{\partial h^2}(h\Phi)=0 \tag{5.5}$$

将 (5.2)代入得(5.5)Φ得

$$(1-x^2)\sum_{l=0}^{\infty}h^lP_l''(x)-2x\sum_{l=0}^{\infty}h^lP_l'(x)+\sum_{l=0}^{\infty}l(l+1)h^lP_l(x)=0 \tag{5.6}$$

这是h恒等式，h的幂系数必为0

$$(1-x^2)P_l''(x)-2xP_l''(x)+l(l+1)P_l(x)=0 \tag{5.7}$$

这就是勒让德方程，我们已经证明了(5.2)中的函数$P_l(x)$为满足勒让德方程的解。

递推公式

母函数用于推导勒让德多项式的递推关系，也称递归关系。这些递推关系是关于x的恒等式，可简化证明和推导。

> $$\begin{aligned} &(a) \quad lP_l(x) = (2l-1)xP_{l-1}(x) - (l-1)P_{l-2}(x) \\ &(b) \quad xP_l'(x) - P_{l-1}'(x) = lP_l(x) \\ &(c) \quad P_l'(x) - xP_{l-1}'(x) = lP_{l-1}(x) \\ &(d) \quad (1-x^2)P_l'(x) = lP_{l-1}(x) - lxP_l(x) \\ &(e) \quad (2l+1)P_l(x) = P_{l+1}'(x) - P_{l-1}'(x) \\ &(f) \quad (1-x^2)P_{l-1}'(x) = lxP_{l-1}(x) - lP_l(x) \end{aligned} \tag{5.8}$$

现推导(5.8a)，其他方程的推导与此类似。由(5.1)得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial h} &= -\frac{1}{2}(1-2xh+h^2)^{-3/2}(-2x+2h); \\ \frac{1}{2}(1-2xh+h^2)\frac{\partial \Phi}{\partial h} &= (x-h)\Phi \end{aligned} \tag{5.9}$$

将级数(5.2)及其对h的导数代入(5.9)，得

$$(1{-}2xh+h^2)\sum_{l=1}^{i} nftylh^{l-1}P_l(x) = (x-h)\sum_{l=1}^{\infty} h^l P_l(x)$$

这是h恒等式，设使h^{l-1}的系数相等.仔细对好h^{l-1}，得ParseError: KaTeX parse error: \tag works only in display equations$

化简为$(5.8a)$。当对较小l的勒让德多项式，递归关系(5.8a)是求取勒让德多项式简单方法(问题3)。

正交函数

线性无关

在矢量空间V的矢量组 $A_1, A_2, ...A_n$, 数$k_1, k_2, ...k_n$全为0的时

$$k_1A_1 + k_2A_2 + ... + k_nA_n = 0$$

才成立，称矢量组 $A_1, A_2, ...A_n$线性无关

正交矢量

两个向量A和B正交,即垂直,如果它们的数量积是零，即

$$\sum_i A_i B_i = 0$$

线性无关矢量组未必是正交矢量组。从一个线性无关向量组出发，构造出一个标准正交向量组，并且使向量组与原向量组等价。施密特正交化（Schmidt orthogonalization）。

正交函数

我们可以把函数看作是向量空间的元素。两函数的“数量积等于0”相当于积分：

$$\int_b^a A(x)B(x)dx = 0.$$

如果函数A(x)和B(x)是复数，则正交性的定义为

$$\int_b^a A^*(x)B(x)dx = 0.$$

$A^*(x)$是A(x)的共轭复数

如果有一组函数$A_n(x)$，$n = 1, 2, 3, ...$及

$$\int_b^a A_n^*(x)A_m(x)dx = \begin{cases} 0 & if \quad m \neq n \\ const. \neq 0 & if \quad m = n \end{cases}$$

$A(x)$与$B(x)$在(a, b)上正交性的定义

傅里叶级数

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0 & if \quad m \neq n \\ \pi & if \quad m = n \end{cases}$$

因此$\sin nx$是一组$[-\pi, \pi]$区间的正交函数，或其他间隔2π的区间。同样, $\cos nx$ 也是$[-\pi, \pi]$上的正交函数。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0 \quad 对任何 m, n$$

对复变函数也一样

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{(inx)*} e^{imx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} e^{imx} dx = \begin{cases} 0 & if \quad m \neq n \\ 2\pi & if \quad m = n \end{cases}$$

幂函数$1, x, x^2, x^3 ... x^n ...$是线性无关的，可以表示其他函数，但不是正交的。正交矢量，正交函数在运算时较为方便。线性无关的矢量、函数可转换成正交的，可用Gram-Schmidt方法，就是先取一个矢量，单位化，取第二个矢量时，把它在第一个矢量的分量减去，只剩下垂直的分量，单位化，这样第一个矢量、第二个矢量正交，取第三个矢量，把它在前面第一、第二矢量的投影减去，单位化，得第三个正交矢量，以此类推。

其实线性无关函数集$1, x, x^2, x^3 ... x^n ...$，正交化之后就是勒让德多项式。

完备集

在平面，二维空间，正交矢量i, j可以表示平面的任何点，不需要第三个矢量，也不存在第三个与i, j都正交的矢量，我们就说正交矢量i, j是完备的。在三维空间，正交矢量i, j虽然是正交的，但有其表示不了的点，还存在与它们都正交的矢量k, (i, j, k)是完备的，因为再没有与它们都正交的矢量，三维空间任何一点都可由它们表示，也不需要第四个矢量。

正交函数集的情况一样，称函数集的完备性，可以表示函数空间的任意点，不存在与它们都正交的函数（如果有，就是它们自己）

勒让德多项正交性质

勒让德多项式是(-1, 1)上的一组正交函数

$$\int_{-1}^{1} P_l(x) P_m(x) dx = 0$$

证明：
由勒让德方程

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + l(l+1) y = 0$$

可写成

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)y'(x)]+l(l+1)y(x)=0. \tag{1}$$

多项式$P_l(x), P_m(x)$为其解，则

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_l'(x)]+l(l+1)P_l(x)=0. \tag{1}$$

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_m'(x)]+m(m+1)P_m(x)=0. \tag{2}$$

(1) 式乘$P_m(x)$减(2) 式乘$P_l(x)$，得

$$P_m(x)\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_l'(x)]-P_l(x)\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_m'(x)]+[l(l+1)-m(m+1)]P_m(x)P_l(x)=0.$$

前两项可写成

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)(P_m(x)P_l(x)-P_l(x)P_m(x)]$$

$$(1-x^2)(P_mP_l'-P_lP_m')|_{-1}^{1}+[l(l+1)-m(m+1)]\int_{-1}^{1}P_m(x)P_l(x)dx=0.$$

积分项是0，因为$(1-x^2)$在$x=\pm 1$时为0，而$P_m(x)$、$P_l(x)$是有限的。除$m=l$外积分前括号不等于0，因此$l=m$时积分为0。由此 可得

$$\int_{-1}^{1}P_l(x)P_m(x)dx=0$$

当$l=m$时

$$\int_{-1}^{1}P_l(x)P_l(x)dx=\int_{-1}^{1}(P_l(x))^2dx=\frac{2}{2l+1}$$

综上

$$\int_{-1}^{1}P_l(x)P_m(x)dx=\frac{2}{2l+1}\delta_{lm}$$

勒让德级数

勒让德多项式在(1, 1)上是正交完备集，可用勒让德级数展开函数，傅里叶级数一样

设有函数$f(x)$, 可用勒让德多项式展开

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}c_lP_l(x)$$

需求出c_l。对其中任一项$c_mP_m(x)$, 由勒让德多项式的正交性质，消去所有$P_l(x)$求出c_m

两边乘以$P_m(x)$并积分

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}f(x)P_m(x)dx&=\sum_{l=0}^{\infty}\int_{-1}^{1}c_lP_l(x)P_m(x)dx\\&=\sum_{l=0}^{\infty}c_l\int_{-1}^{1}P_l(x)P_m(x)dx\\&=c_m\cdot\frac{2}{2m+1}\end{aligned}$$

所以

$$c_m=\frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_m(x)dx$$

例 1 求函数的勒让德级数展开

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1<x<0,\\1, & 0<x<1\end{cases}$$

解：

$$\begin{aligned}c_0&=\frac{2*0+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_0(x)dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}1dx=\frac{1}{2}\\c_1&=\frac{2*1+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_1(x)dx=\frac{3}{2}\int_{0}^{1}xdx=\frac{3}{4}\\c_2&=\frac{2*2+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_1(x)dx=\frac{5}{2}\int_{0}^{1}(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2})dx=0\end{aligned}$$

由此可得

$$f(x) = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{3}{4}P_1(x) - \frac{7}{16}P_3(x) + \frac{11}{32}P_5(x) + \ldots$$