第五章

刚体力学

教学基本要求：

理解 刚体的角速度，角加速度，转动瞬心，转动瞬心轴，欧拉角，转动惯量，惯量张量，惯量主轴以及刚体的动量，角动量和动能等概念

理解 刚体定点运动中瞬时轴的存在和瞬时角速度的矢量性。作定点运动的刚体上任意一点的速度和加速度的矢量表达式。欧拉角的概念。欧拉运动学方程。

掌握 惯量张量和惯量主轴的概念。通过对称性分析确定某点的惯量主轴的方法。刚体作定点运动时的角动量和动能的计算。直接用角动量定理和质心运动定理处理比较简单的定点运动问题的方法。

本章重点：

刚体各种类型运动的定义、自由度和描述方法。

作定轴转动的刚体上任意一点的速度和加速度的矢量表达式。

刚体平面平行运动的两种描述法（基点法和瞬心法）及刚体上任意一点的速度和加速度的矢量表达式。

简单情况下刚体定点运动中速度、加速度的分析

§5.1 刚体的运动

(一)　刚体的运动及其自由度

任何物体都可以视为质点组，如果其中任意两个质点之间的距离始终保持不变，这样的物体(质点组)称作刚体

描写物体运动时独立变化的坐标变量的数目称为自由度

由于刚体中任意两个质点之间的距离始终保持不变，只需要确定不在同一直线上的三点即可，这样只需9个坐标数，9个坐标数中还需要去除三点中两两距离不变的约束，所以仅仅需要6个独立地坐标数就能确定刚体的位置。

§5.1 刚体的运动

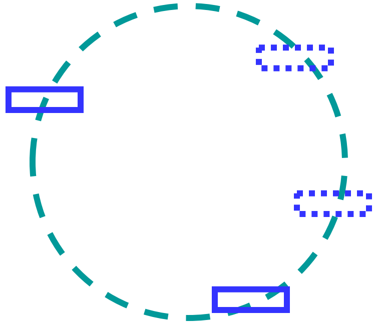
刚体运动的几种形式:

1、平动：在刚体中任意选定一条直线，如果刚体运动时此直线始终保持平行，则这种运动便称为平动。

平动的刚体可当作质点，质点力学的规律适用。

特征：各个质点的位移、速度、加速度相等。自由度为3

注意：刚体平动时，运动轨迹不一定是直线。



§5.1 刚体的运动

刚体运动的几种形式：

2、定轴转动：刚体绕一固定轴线转动便是定轴转动。

3、平面平行运动：若刚体内任一点都平行于一固定平面而运动，则此刚体做平面平行运动。

刚体中垂直于那个固定平面的直线上各点，其运动状态完全相同。任何一个与固定平面平行的刚体截面，它的运动都可用来恰当地代表刚体的运动。

§5.1 刚体的运动

刚体运动的几种形式：

4、定点转动：刚体上有一个点固定不动，整个刚体围绕这个点转动，这种运动叫刚体的定点转动。

一点固定，只有两点不确定，需6个坐标数，又去掉三点间距离不变的约束，只需要3个坐标数，所以自由度为3

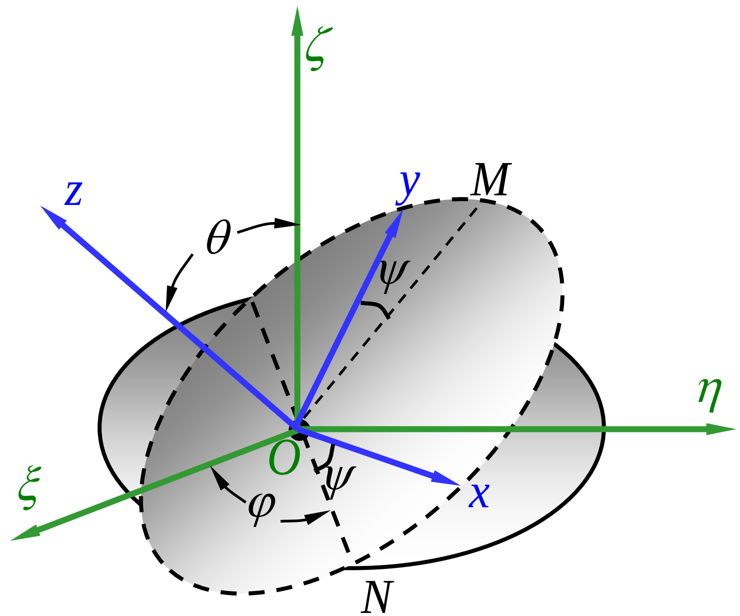
5、一般运动：刚体不受任何外部约束，在空间的任意运动便是刚体的一般运动。

可分解为质心的平动(3个坐标数)与绕通过质心的某直线的定点转动(3个坐标数)。因此，刚体作一般运动时，自由度为6

§5.1 刚体的运动

二、欧拉角

刚体的一般运动中，需要6个独立参量确定刚体的位置。其中，三个参量用于确定基点的位置，另外三个参量用于描写围绕基点的转动。



如图，为确定刚体的位置，选取一固定的坐标系$O\text{-}\xi\eta\zeta$和固着在转动刚体上的坐标系$O\text{-}xyz$

只要确定了坐标系$O\text{-}xyz$相对坐标系$O\text{-}\xi\eta\zeta$的位置，也就确定了刚体的位置。

§5.1 刚体的运动

如图，实线圆面表示O-$\xi\eta$平面

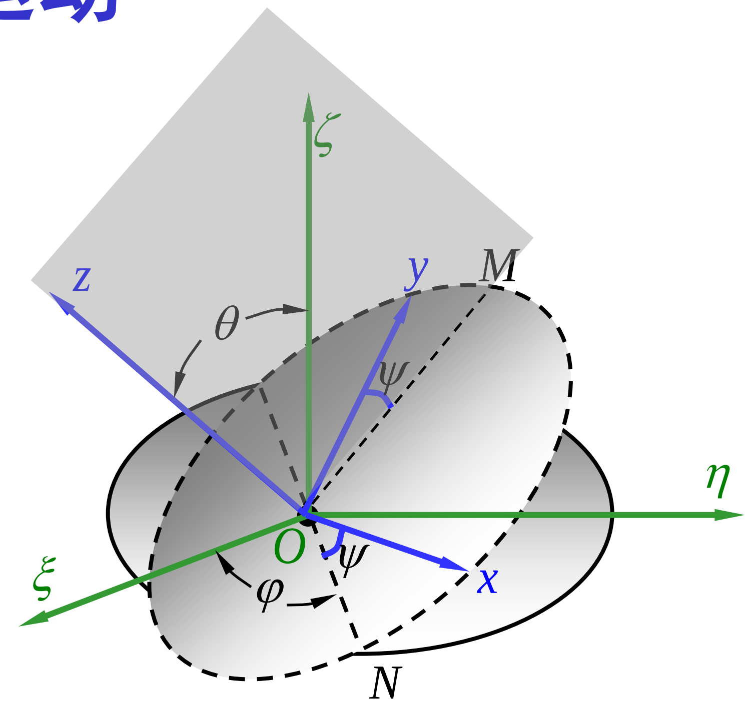
虚线圆面表示O-xy平面，两平面

相交于ON线，Oz轴, $O\zeta$轴以及

OM轴共面；Oy轴, OM线, Ox轴

ON线共面，都位于虚线圆面内，

且有OM垂直于ON



θ角是$O\zeta$轴与Oz轴间的夹角

φ角是$O\xi$轴与ON线间的夹角

Ψ角是O-xy面绕Oz轴旋转的角度

$\theta(t)$， $\varphi(t)$ ， $\Psi(t)$ 叫做欧拉角

因此，只要给定$\theta(t)$， $\varphi(t)$ ，$\Psi(t)$角就能确定刚体的位置。

§5.1 刚体的运动

角速度的欧拉角表示

如图，建立固定坐标系O-$\xi\eta\zeta$

和固着在转动的刚体的坐标系

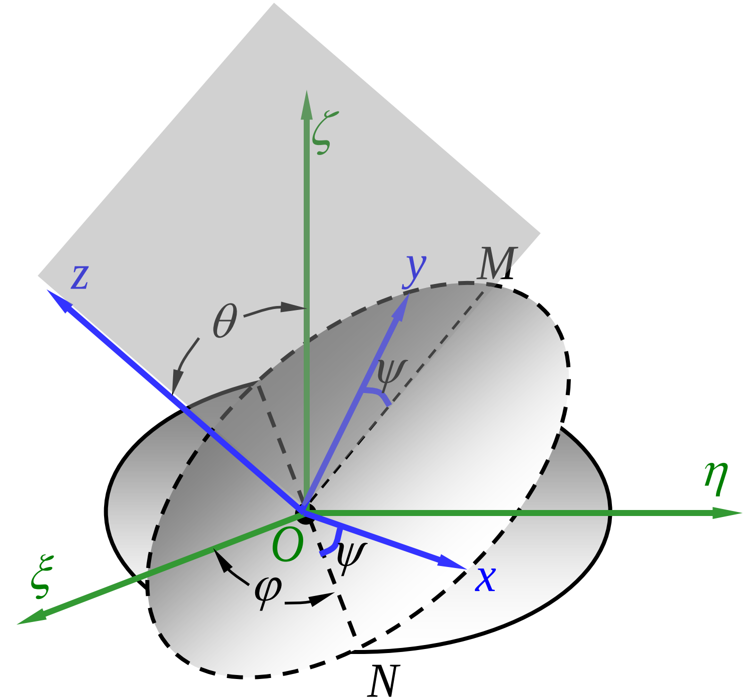
O-xyz，Oz是瞬时转动轴

ON叫做节线，φ叫进动角

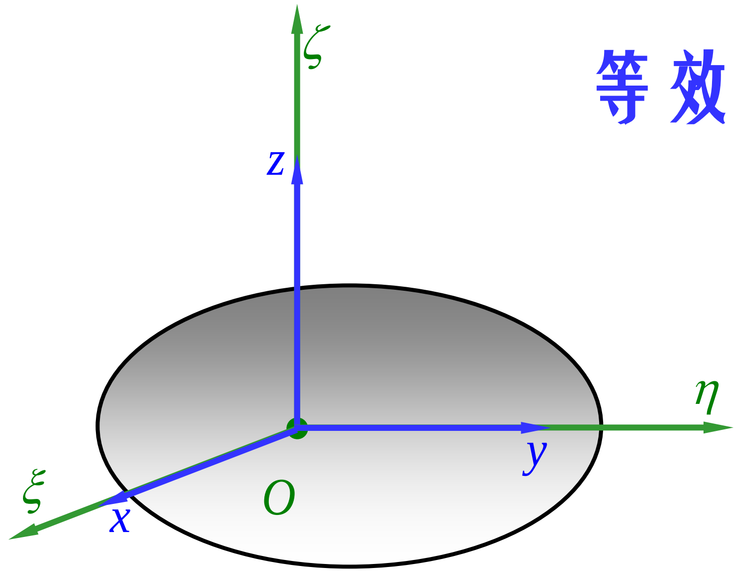
ψ叫自转角，θ叫章动角

θ ,φ确定Oz瞬时转动轴的空间取向。

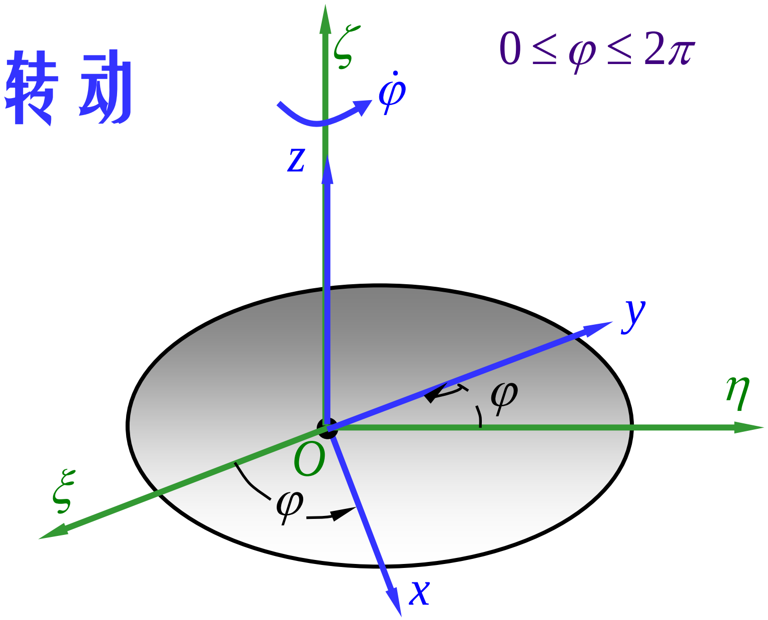
三个欧拉角的叫法从陀螺转动中得来。



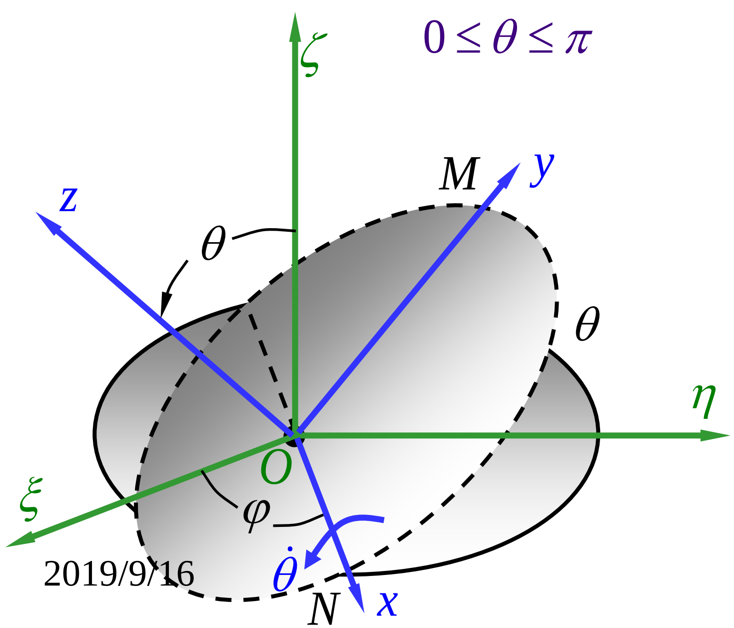
等效图解转动



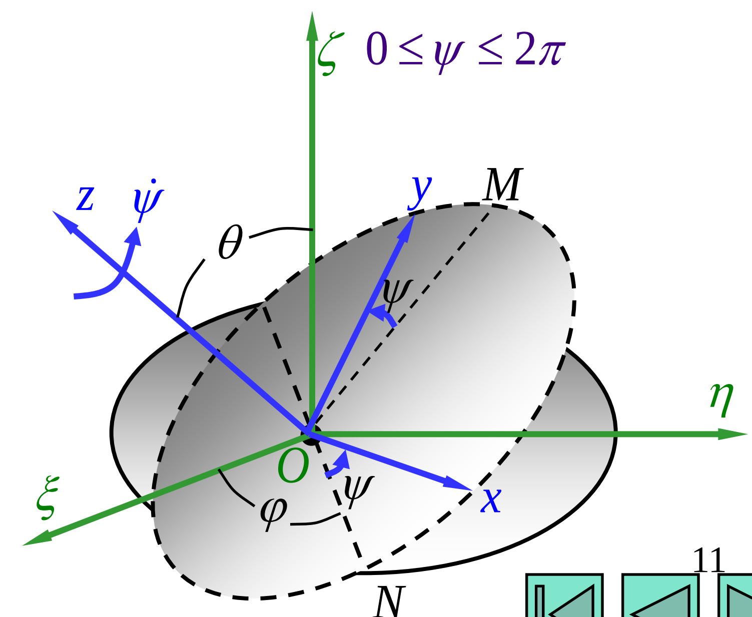
ζ
z
η
y
ξ
x
O



$0 \le \varphi \le 2\pi$
ζ
$\dot{\varphi}$
z
y
φ
η
O
ξ
φ
x



$0 \le \theta \le \pi$
ζ
M
y
z
θ
θ
η
ξ
O
φ
$\dot{\theta}$
N
x



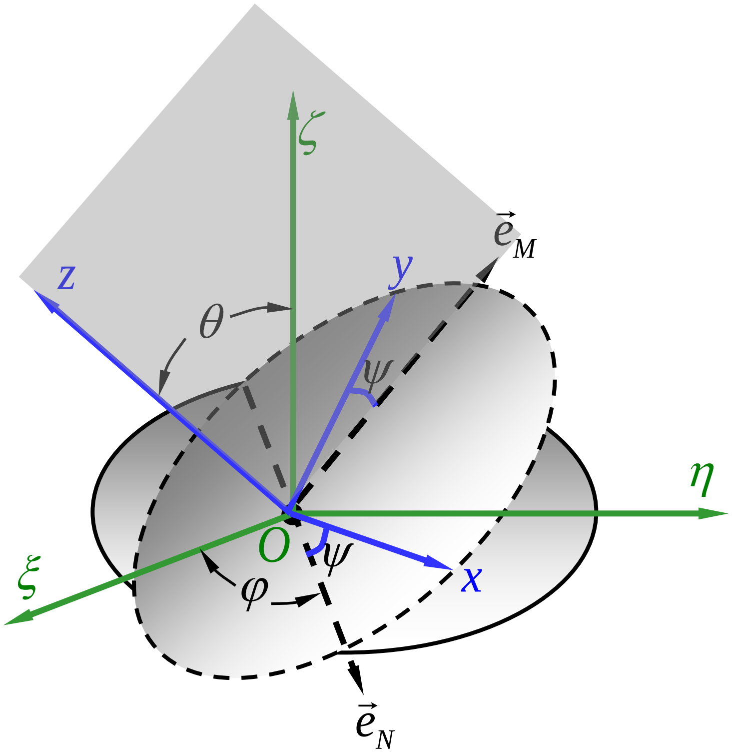
ζ
$0 \le \psi \le 2\pi$
z
$\dot{\psi}$
y
M
θ
ψ
η
ξ
O
ψ
φ
x
N

§5.1 刚体的运动

如果刚体绕着通过定点O的某一轴线以角速度ω转动，

那么ω在活动坐标系O-xyz上的投影是ω_x， ω_y， ω_z，则

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$



据前面等效图解转动知：

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{e}_N + \dot{\varphi}\vec{e}_\zeta + \dot{\psi}\vec{e}_z$$

如图，易得：

$$\vec{e}_N = \cos\psi \vec{i} - \sin\psi \vec{j}$$

$$\vec{e}_M = \sin\psi \vec{i} + \cos\psi \vec{j}$$

$$\vec{e}_\zeta = \sin\theta \vec{e}_M + \cos\theta \vec{k} = \sin\theta(\sin\psi \vec{i} + \cos\psi \vec{j}) + \cos\theta \vec{k}$$

§5.1 刚体的运动

代入角速度的表达式可得：

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{e}_N + \dot{\varphi}\vec{e}_\zeta + \dot{\psi}\vec{e}_z$$

$$= \dot{\theta}(\cos\psi\vec{i} - \sin\psi\vec{j}) + \dot{\varphi}[\sin\theta(\sin\psi\vec{i} + \cos\psi\vec{j}) + \cos\theta\vec{k}] + \dot{\psi}\vec{k}$$

$$= (\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi)\vec{i} + (\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi)\vec{j} + (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\vec{k}$$

所以在活动坐标系*O-xyz*中，角速度各分量为：

$$\omega_x = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi$$

$$\omega_y = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi$$

$$\omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}$$

欧拉运动学方程

§5.1 刚体的运动

特例

圆锥体放在水平面上滚动，圆锥体绕对称轴的自转速度是

$$\omega_{自}=\dot{\psi}e_z$$

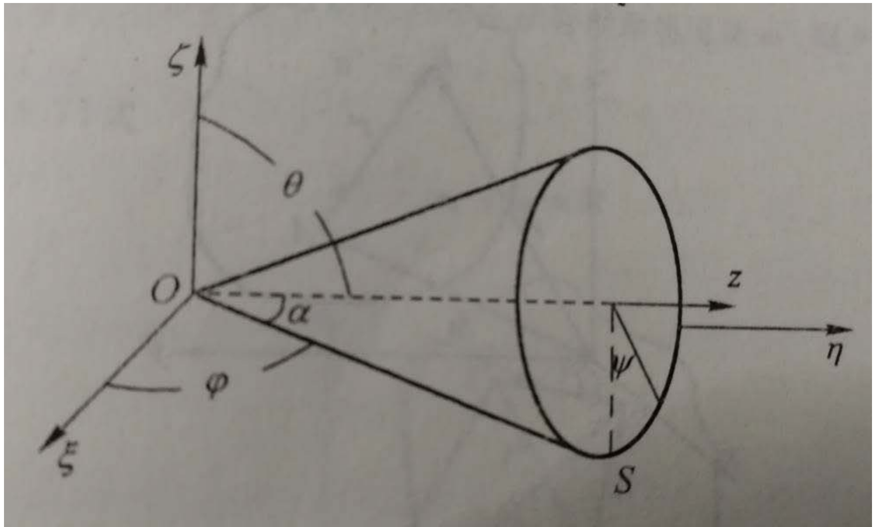


图 5.5′

刚体除自转外对称轴还绕直轴 ς 轴转动，这种转动通常称为进动，φ 则称进动角。圆锥体的进动角速度为

$$\omega_{进}=\dot{\varphi}e_{\varsigma}$$

§5.1 刚体的运动

特例

这里 θ 角是恒定不变的，$\dot{\theta}=0$。圆锥体绕定点 O 转动的角速度是自转角速度和进动角速度的合成：

$$\omega=\dot{\psi}e_z+\dot{\varphi}e_\varsigma=\dot{\psi}\sin\theta e_S+(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})e_\varsigma$$

母线 OS 与地接触，其上各点的速度都是零，它必是瞬时转轴。可见锥体绕定点 O 转动的角速度 ω 必沿 e_S 方向。因此可得自转角速度速度和进动角速度的量值间存在关系：

$$\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}=0;\qquad \dot{\varphi}=-\frac{1}{\dot{\psi}\cos\theta}$$

§5.1 刚体的运动

特例

最后得用固定坐标系 $O\xi\eta\varsigma$ 表示的角速度矢量:

$$\omega = \dot{\psi}\sin\theta e_S = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi e_\xi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi e_\eta$$

在活动坐标系 $O'xyz$ 中表示的角速度矢量为:

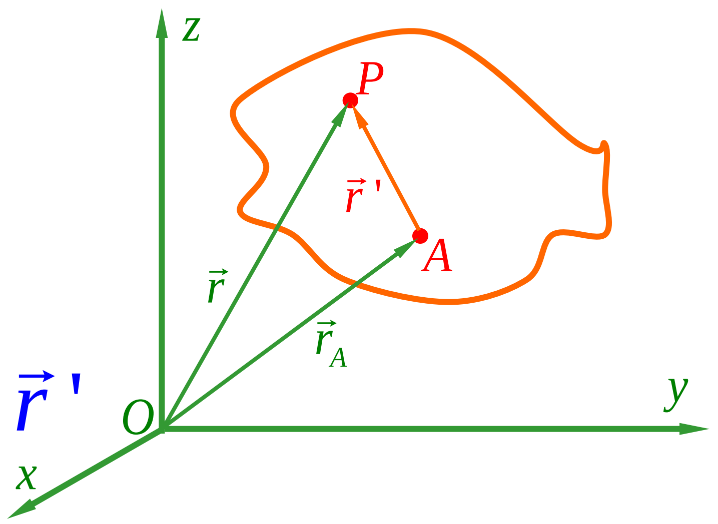
$$\begin{aligned}\omega &= \dot{\psi} e_z + \dot{\varphi} e_\varsigma = \dot{\psi} k + \dot{\varphi}(-\sin\theta i + \cos\theta k) \\ &= -\dot{\varphi}\sin\theta i + (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})k\end{aligned}$$

§5.1 刚体的运动

五、刚体内任意点的速度和加速度

在刚体内任取一点P，它的位置矢量是r，在刚体上再任取一点A作为基点，则P点的位置矢量如下图所示，可表达为：

$$\vec{r}=\vec{r}_A+\vec{r}\,'$$



P点速度为

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r}_A}{dt}+\frac{d\vec{r}\,'}{dt}=\vec{v}_A+\vec{\omega}\times\vec{r}\,'$$

刚体上任意点的速度=刚体随基点的平动速度+绕基点的转动速度

据加速度的定义有P点的加速度为：

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{v}_A+\vec{\omega}\times\vec{r}\,')$$

$$=\frac{d\vec{v}_A}{dt}+\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')$$

$$=\vec{a}_A+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\,'+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}\,'}{dt}$$

$$=\vec{a}_A+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\,'+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')$$

$$=\vec{a}_A+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\,'+\vec{\omega}(\vec{\omega}\cdot\vec{r}\,')-\omega^2\vec{r}\,'$$

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')$$

$$=\vec{\omega}\times\vec{v}\,'$$

$$=-\omega\rho^2$$

称为向轴加速度

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\,'$$

称为转动加速度

§5.1 刚体的运动

五、刚体内任意点的速度和加速度

2、刚体内任意点的加速度

（1）平动：

$$\vec{\omega}=0,\quad \vec{v}=\vec{v}_A,\quad a=\vec{a}_A$$

（2）定轴转动：取点A位于转轴上，e_z 为转轴方向的单位矢量 。

$$\vec{\omega}=\omega\vec{e}_z,\quad \vec{v}_A=0,\quad \vec{a}_A=0,\quad \vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r},\quad \vec{a}=\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

§5.1 刚体的运动

五、刚体内任意点的速度和加速度

2、刚体内任意点的加速度

（3）平面平行运动：

$$\vec{v}=\vec{v}_A+\vec{\omega}\times\vec{r}, \quad \vec{a}=\vec{a}_A+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

（4）定点运动：以定点为基点，并取作坐标原点，有

$$\vec{r}_A=0, \quad \vec{v}_A=0, \quad \vec{a}_A=0$$

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}, \quad \vec{a}=\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

例1

曲柄OA绕轴O转动，其转动方程为$\varphi=4t^2$（rad），杆BC绕轴C转动，且杆OA与杆BC平行等长，OA=BC=0.5m，试求当t=1s时，直角杆ABD上点D的速度和加速度。