理论力学

余熳烨

第五章

刚体力学

教学基本要求：

理解 刚体的角速度，角加速度，转动瞬心，转动瞬心轴，欧拉角，转动惯量，惯量张量，惯量主轴以及刚体的动量，角动量和动能等概念

理解 刚体定点运动中瞬时轴的存在和瞬时角速度的矢量性。作定点运动的刚体上任意一点的速度和加速度的矢量表达式。欧拉角的概念。欧拉运动学方程。

掌握 惯量张量和惯量主轴的概念。通过对称性分析确定某点的惯量主轴的方法。刚体作定点运动时的角动量和动能的计算。直接用角动量定理和质心运动定理处理比较简单的定点运动问题的方法。

本章重点：

刚体各种类型运动的定义、自由度和描述方法。

作定轴转动的刚体上任意一点的速度和加速度的矢量表达式。

刚体平面平行运动的两种描述法（基点法和瞬心法）及刚体上任意一点的速度和加速度的矢量表达式。

简单情况下刚体定点运动中速度、加速度的分析

§5.1 刚体的运动

(一) 刚体的运动及其自由度

任何物体都可以视为质点组，如果其中任意两个质点之间的距离始终保持不变，这样的物体(质点组)称作刚体

描写物体运动时独立变化的坐标变量的数目称为自由度

由于刚体中任意两个质点之间的距离始终保持不变，只需要确定不在同一直线上的三点即可，这样只需9个坐标数，9个坐标数中还需要去除三点中两两距离不变的约束，所以仅仅需要6个独立地坐标数就能确定刚体的位置。

§5.1 刚体的运动

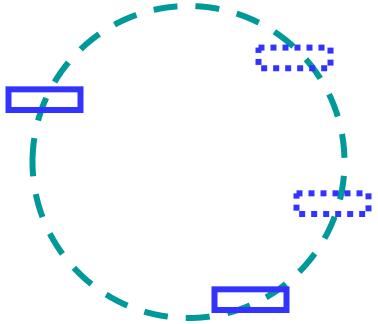
刚体运动的几种形式:

1、平动: 在刚体中任意选定一条直线，如果刚体运动时此直线始终保持平行，则这种运动便称为平动。

平动的刚体可当作质点，质点力学的规律适用。

特征: 各个质点的位移、速度、加速度相等。自由度为3

注意: 刚体平动时，运动轨迹不一定是直线。



§5.1 刚体的运动

刚体运动的几种形式:

2、定轴转动：刚体绕一固定轴线转动便是定轴转动。

3、平面平行运动：若刚体内任一点都平行于一固定平面而运动，则此刚体做平面平行运动。

刚体中垂直于那个固定平面的直线上各点，其运动状态完全相同。任何一个与固定平面平行的刚体截面，它的运动都可用来恰当地代表刚体的运动。

§5.1 刚体的运动

刚体运动的几种形式：

4、定点转动：刚体上有一个点固定不动，整个刚体围绕这个点转动，这种运动叫刚体的定点转动。

一点固定，只有两点不确定，需6个坐标数，又去掉三点间距离不变的约束，只需要3个坐标数，所以自由度为3

5、一般运动：刚体不受任何外部约束，在空间的任意运动便是刚体的一般运动。

可分解为质心的平动(3个坐标数)与绕通过质心的某直线的定点转动(3个坐标数)。因此，刚体作一般运动时，自由度为6

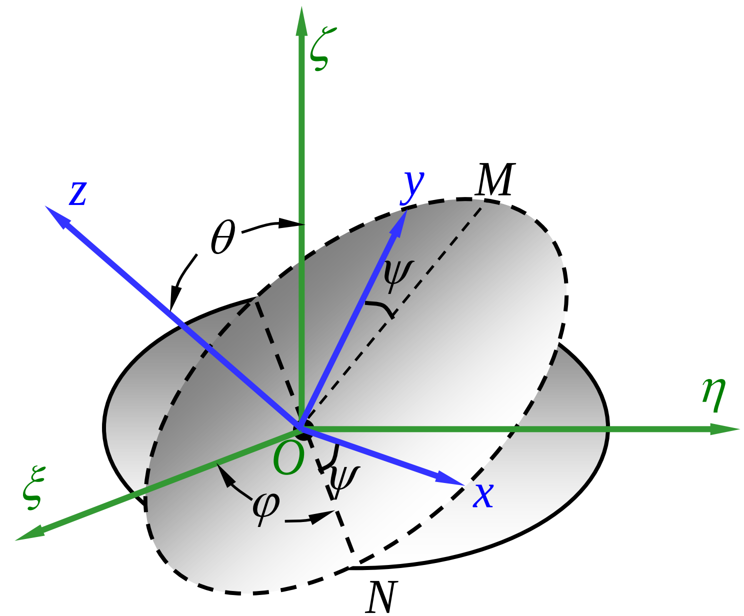
§5.1 刚体的运动

二、欧拉角

刚体的一般运动中，需要6个独立参量确定刚体的位置。其中，三个参量用于确定基点的位置，另外三个参量用于描写围绕基点的转动。

如图，为确定刚体的位置，选取一固定的坐标系$O\text{-}\xi\eta\zeta$和固着在转动刚体上的坐标系$O\text{-}xyz$

只要确定了坐标系$O\text{-}xyz$相对坐标系$O\text{-}\xi\eta\zeta$的位置，也就确定了刚体的位置。



§5.1 刚体的运动

如图，实线圆面表示O-$\xi\eta$平面

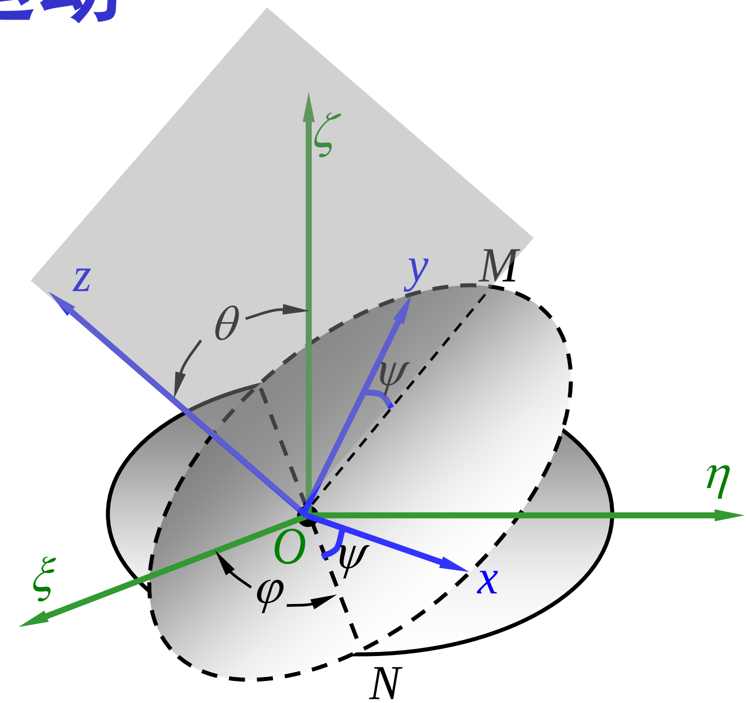
虚线圆面表示O-xy平面，两平面

相交于ON线，Oz轴, $O\zeta$轴以及

OM轴共面；Oy轴, OM线, Ox轴

ON线共面，都位于虚线圆面内，

且有OM垂直于ON



θ角是$O\zeta$轴与Oz轴间的夹角

φ角是$O\xi$轴与ON线间的夹角

Ψ角是O-xy面绕Oz轴旋转的角度

$\theta(t)$， $\varphi(t)$ ， $\Psi(t)$
叫 做 欧 拉 角

因此，只要给定$\theta(t)$， $\varphi(t)$ ，$\Psi(t)$角就能确定刚体的位置。

§5.1 刚体的运动

角速度的欧拉角表示

如图，建立固定坐标系$O\text{-}\xi\eta\zeta$

和固着在转动的刚体的坐标系

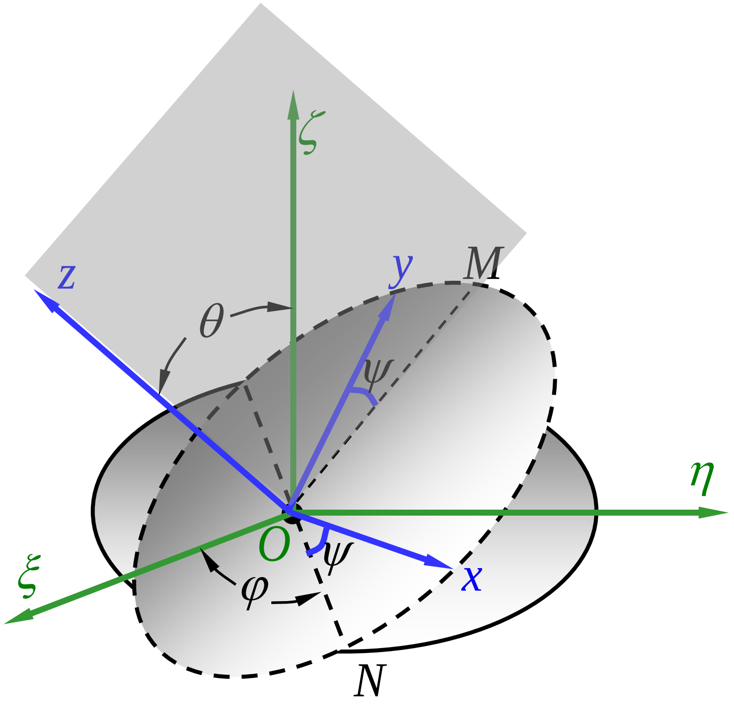
$O\text{-}xyz$，Oz是瞬时转动轴

ON叫做节线，φ叫进动角

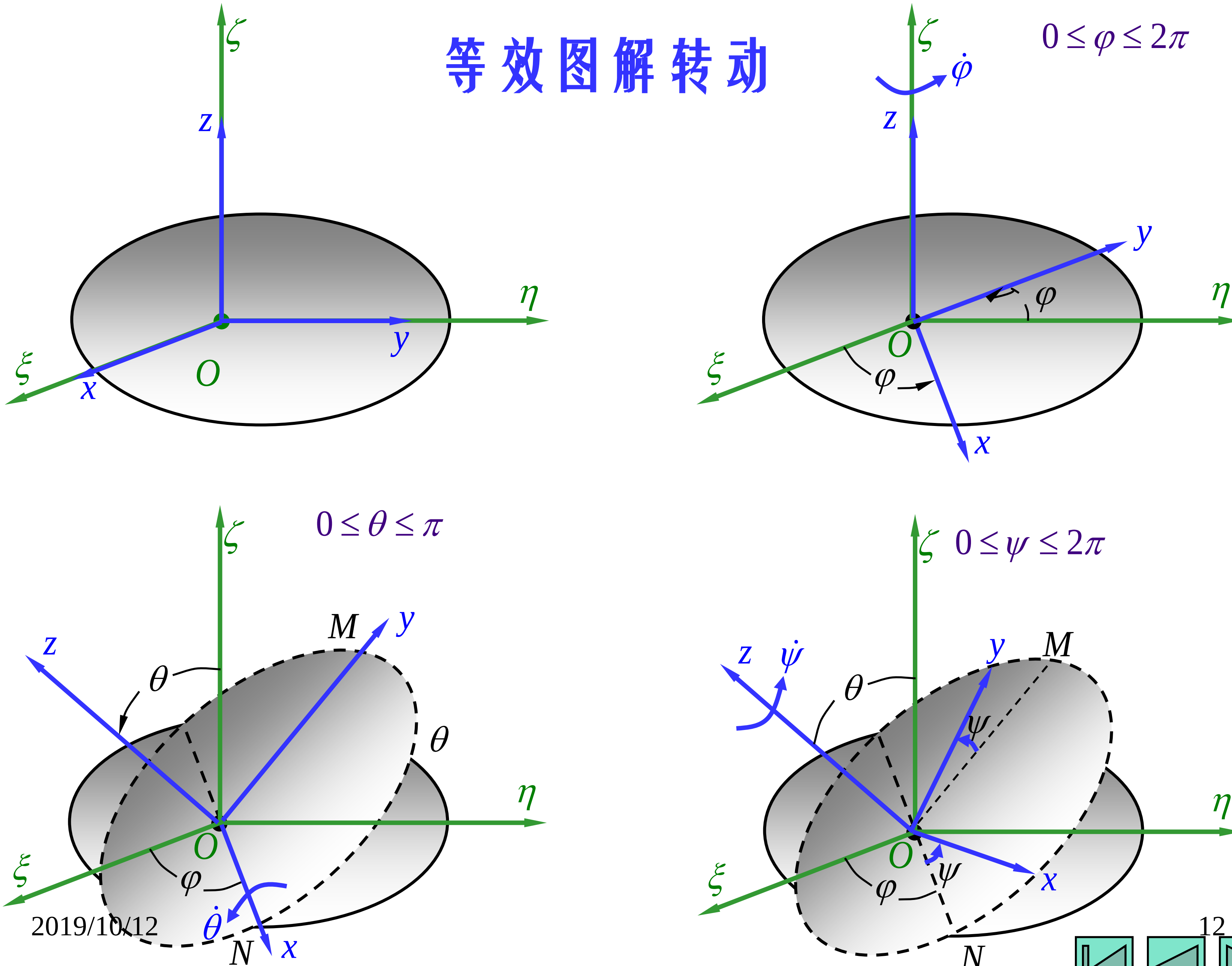
ψ叫自转角，θ叫章动角

θ ,φ确定Oz瞬时转动轴的空间取向。

三个欧拉角的叫法从陀螺转动中得来。



等效图解转动


ζ
z
η
y
ξ
x
O
$\dot{\varphi}$
$0 \le \varphi \le 2\pi$
φ
$0 \le \theta \le \pi$
θ
M
N
$\dot{\theta}$
$0 \le \psi \le 2\pi$
$\dot{\psi}$
ψ

§5.1 刚体的运动

如果刚体绕着通过定点O的某一轴线以角速度ω转动，

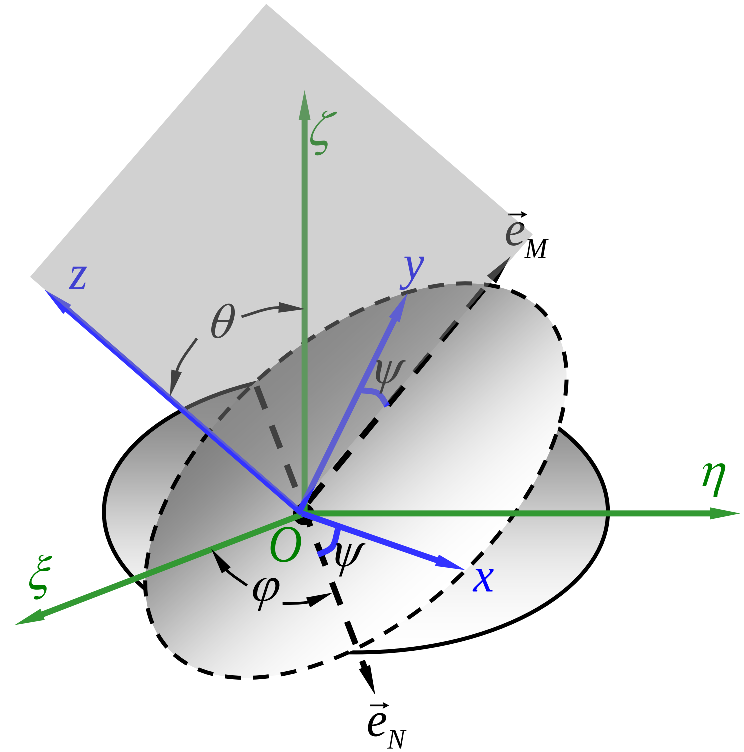
那么ω在活动坐标系$O\text{-}xyz$上的投影是ω_x，ω_y，ω_z，则

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

据前面等效图解转动知：

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{e}_N + \dot{\varphi}\vec{e}_\zeta + \dot{\psi}\vec{e}_z$$

如图，易得：



$$\vec{e}_N = \cos\psi \vec{i} - \sin\psi \vec{j}$$

$$\vec{e}_M = \sin\psi \vec{i} + \cos\psi \vec{j}$$

$$\vec{e}_\zeta = \sin\theta \vec{e}_M + \cos\theta \vec{k} = \sin\theta(\sin\psi \vec{i} + \cos\psi \vec{j}) + \cos\theta \vec{k}$$

§5.1 刚体的运动

代入角速度的表达式可得：

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{e}_N + \dot{\varphi}\vec{e}_\zeta + \dot{\psi}\vec{e}_z$$

$$= \dot{\theta}(\cos\psi\vec{i} - \sin\psi\vec{j}) + \dot{\varphi}[\sin\theta(\sin\psi\vec{i} + \cos\psi\vec{j}) + \cos\theta\vec{k}] + \dot{\psi}\vec{k}$$

$$= (\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi)\vec{i} + (\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi)\vec{j} + (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\vec{k}$$

所以在活动坐标系***O-xyz***中，角速度各分量为：

$$\omega_x = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi$$

$$\omega_y = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi$$

$$\omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}$$

欧拉运动学方程

§5.1 刚体的运动

特例

圆锥体放在水平面上滚动，圆锥体绕对称轴的自转速度是

$$\omega_{自} = \dot{\psi} e_z$$

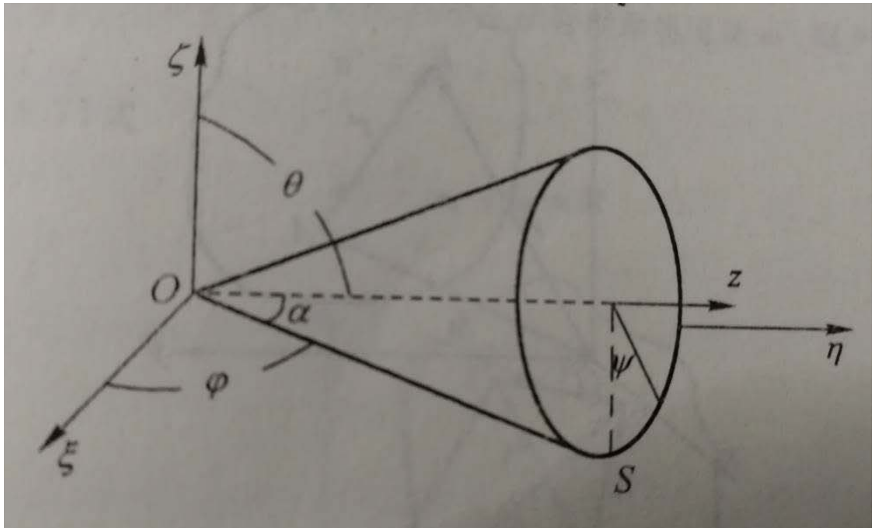


图 5.5′

刚体除自转外对称轴还绕直轴 ς 轴转动，这种转动通常称为进动，φ 则称进动角。圆锥体的进动角速度为

$$\omega_{进} = \dot{\varphi} e_{\varsigma}$$

§5.1 刚体的运动

特例

这里 θ 角是恒定不变的，$\dot{\theta}=0$。圆锥体绕定点 O 转动的角速度是自转角速度和进动角速度的合成：

$$\omega=\dot{\psi}e_z+\dot{\varphi}e_\varsigma=\dot{\psi}\sin\theta e_S+(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})e_\varsigma$$

母线 OS 与地接触，其上各点的速度都是零，它必是瞬时转轴。可见锥体绕定点 O 转动的角速度 ω 必沿 e_S 方向。因此可得自转角速度速度和进动角速度的量值间存在关系：

$$\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}=0;\qquad \dot{\varphi}=-\frac{1}{\dot{\psi}\cos\theta}$$

§5.1 刚体的运动

特例

最后得用固定坐标系 $O\xi\eta\varsigma$ 表示的角速度矢量:

$$\omega = \dot{\psi}\sin\theta e_S = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi e_\xi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi e_\eta$$

在活动坐标系 $O'xyz$ 中表示的角速度矢量为:

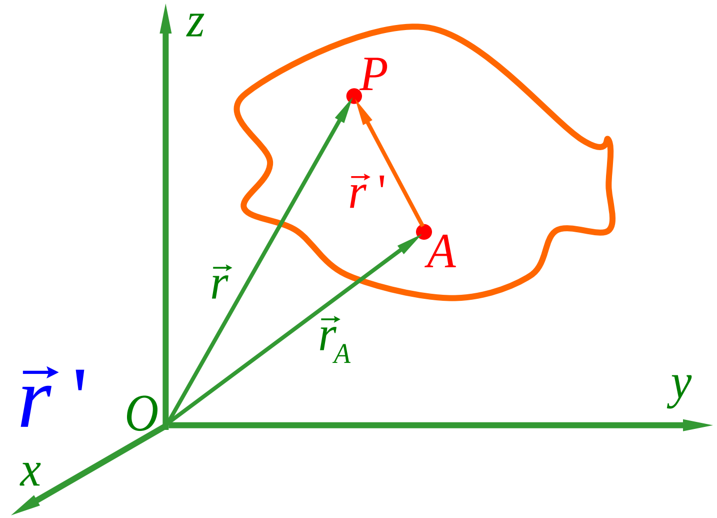
$$\omega = \dot{\psi} e_z + \dot{\varphi} e_\varsigma = \dot{\psi} k + \dot{\varphi}(-\sin\theta i + \cos\theta k)$$
$$= -\dot{\varphi}\sin\theta i + (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})k$$

§5.1 刚体的运动

五、刚体内任意点的速度和加速度

在刚体内任取一点P，它的位置矢量是r，在刚体上再任取一点A作为基点，则P点的位置矢量如下图所示，可表达为：

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{r}\,'$$



P点速度为

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'$$

刚体上任意点的速度=刚体随基点的平动速度+绕基点的转动速度

据加速度的定义有*P*点的加速度为：

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{r}\,')$$

$$= \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')$$

$$= \vec{a}_A + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}\,'}{dt}$$

$$= \vec{a}_A + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')$$

$$= \vec{a}_A + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}(\vec{\omega}\cdot\vec{r}\,') - \omega^2\vec{r}\,'$$

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')$$

$$= \vec{\omega}\times\vec{v}\,'$$

$$= -\omega\rho^2$$

称为向轴加速度

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\,'$$

称为转动加速度

§5.1 刚体的运动

五、刚体内任意点的速度和加速度

2、刚体内任意点的加速度

（1）平动:

$$\vec{\omega}=0,\quad \vec{v}=\vec{v}_A,\quad a=\vec{a}_A$$

（2）定轴转动：取点A位于转轴上，e_z 为转轴方向的单位矢量 。

$$\vec{\omega}=\omega\vec{e}_z,\quad \vec{v}_A=0,\quad \vec{a}_A=0,\quad \vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r},\quad \vec{a}=\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

§5.1 刚体的运动

五、刚体内任意点的速度和加速度

2、刚体内任意点的加速度

（3）平面平行运动:

$$\vec{v}=\vec{v}_A+\vec{\omega}\times\vec{r}\,,\quad \vec{a}=\vec{a}_A+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

（4）定点运动：以定点为基点，并取作坐标原点，有

$$\vec{r}_A=0,\quad \vec{v}_A=0,\quad \vec{a}_A=0$$

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}\,,\quad \vec{a}=\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

例1

曲柄OA绕轴O转动，其转动方程为$\varphi=4t^2$（rad），杆BC绕轴C转动，且杆OA与杆BC平行等长，OA=BC=0.5m，试求当t=1s时，直角杆ABD上点D的速度和加速度。

§5.1 刚体的运动

六、瞬时转动中心

假设，任一瞬时刚体速度为零的点位于r_s处，基点为A，则有

$$0 = v_A + \omega \times (r_s - r_A)$$

对上式两边矢乘 ω得

$$0 = \omega \times v_A + \omega \times \omega \times (r_s - r_A)$$

§5.1 刚体的运动

计算瞬时转动中心

假设速度为0的点位于r_S处，基点为A，由速度公式知：

$$0=\vec{v}_A+\vec{\omega}\times(\vec{r}_S-\vec{r}_A)$$

等式两边左叉乘ω有：

$$\begin{aligned}0&=\vec{\omega}\times\vec{v}_A+\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times(\vec{r}_S-\vec{r}_A)]\\&=\vec{\omega}\times\vec{v}_A+\vec{\omega}[\vec{\omega}\cdot(\vec{r}_S-\vec{r}_A)]-\omega^2(\vec{r}_S-\vec{r}_A)\end{aligned}$$

在平面平行运动中，角速度垂直于运动平面(r)

$$0=\vec{\omega}\times\vec{v}_A-\omega^2(\vec{r}_S-\vec{r}_A)$$

§5.1 刚体的运动

所以速度为0的点的位矢为： $\vec{r}_S = \vec{r}_A + \dfrac{\vec{\omega}\times\vec{v}_A}{\omega^2}$

因 $\vec{r}_S = x_S\vec{i} + y_S\vec{j}$

$$\vec{r}_A = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$$

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k}$$

代入并比较等式两边，各分量应相等：

$$x_S = x_A - \frac{v_{Ay}}{\omega}$$

$$y_S = y_A + \frac{v_{Ax}}{\omega}$$

在平面平行运动中，刚体上速度为零的点，被称为瞬时转动中心，简称**瞬心**。刚体在任一瞬时的运动是绕瞬心的转动；若取瞬心为基点，刚体在这瞬时只是绕瞬心的转动。

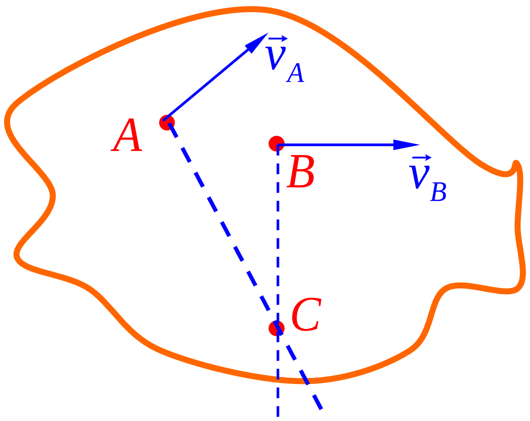
§5.1 刚体的运动

瞬心的几何求法

若刚体上有两点的速度方向已知，则分别通过这两点作该处速度的垂线，它们的交点就是瞬心。

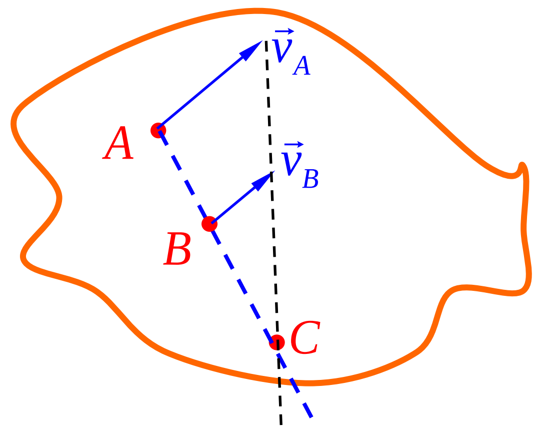
几何法确定瞬时转动中心

瞬时中心，指刚体瞬时速度为0，由 $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}\,'$ 知$V\perp r$



v_A与v_B相交

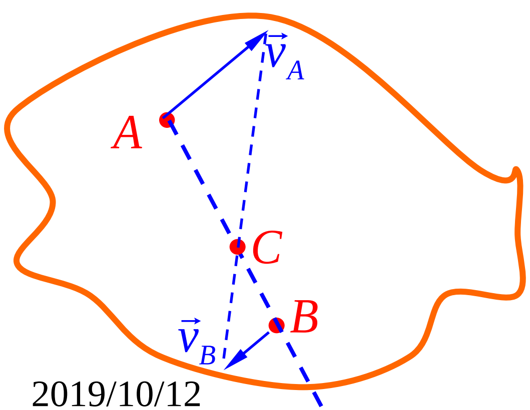
垂线交点C



v_A与v_B平行

$v_A \neq v_B$

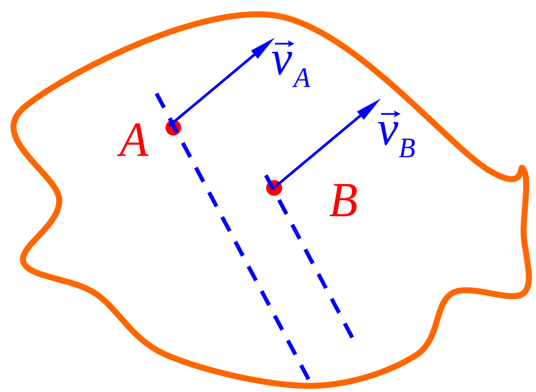
比例点C



v_A与v_B平行

$v_A \neq v_B$

比例点C



v_A与v_B平行

$v_A = v_B$

C在∞

由刚体内任意点的速度公式 $\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$ 可知：

◆若$V_A \neq 0$，A点的选择原则上是使计算最简，称为**基点法**

◆若$V_A = 0$，A点为瞬心，不能任意选择，称为**瞬心法**

◆把速度公式投影在r'方向上，由于$\omega \times r'$与r'垂直，从而有 $\vec{v}_{r'} = \vec{v}_{Ar'}$ ，称为速度投影法。

速度投影法常用于一些多杆相连的转动中，杆两端点的速度在杆上的投影相等

◆在刚体中，某点的速度为：$\vec{v}=\vec{v}_A+\vec{\omega}\times\vec{r}\,'$与非惯性系中质点的速度合成原理 $\vec{v}=\vec{v}\,'+\vec{v}_t+\vec{\omega}\times\vec{r}\,'=\vec{v}\,'+\vec{v}_e$比较知，区别在于，刚体中，任意两点距离不变，所以$v'=0$

在刚体中是以基点为参考点，没有画出坐标系而已。

若把动系相对静系的牵连运动看作是动系代表的刚体运动，则刚体的绝对运动就是两个刚体运动的合成。

刚体的绝对运动由基点的运动和绕基点的定点运动合成。

而基点的运动可通过质点的速度和加速度合成原理求得。

绕基点的定点运动可通过刚体的角速度合成原理和角加速度合成原理求得。

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}' \qquad \text{(角速度合成原理)}$$

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_e + \vec{\alpha}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r \qquad \text{(角加速度合成原理)}$$

式中 $\vec{\omega}_e, \vec{\alpha}_e$ 表示刚体的牵连角速度和牵连角加速度

$\vec{\omega}', \vec{\alpha}'$表示刚体的相对角速度和相对角加速度

若刚体相对动系作定轴转动，动系又相对定系作定轴转动时，且两转轴平行，则简化为：

$$\omega = \omega_e + \omega' \qquad \alpha = \alpha_e + \alpha_r$$

[例5.0]

如图所示的平面机构中，曲柄OA长为100mm，以角速度ω=2rad/s转动，连杆AB带动摇杆CD，并拖动轮E沿水平面纯滚动；OA与轮E的半径相等，CD=3CB。若图示位置时A,B,E三点恰在一水平线上，且$CD \perp ED$

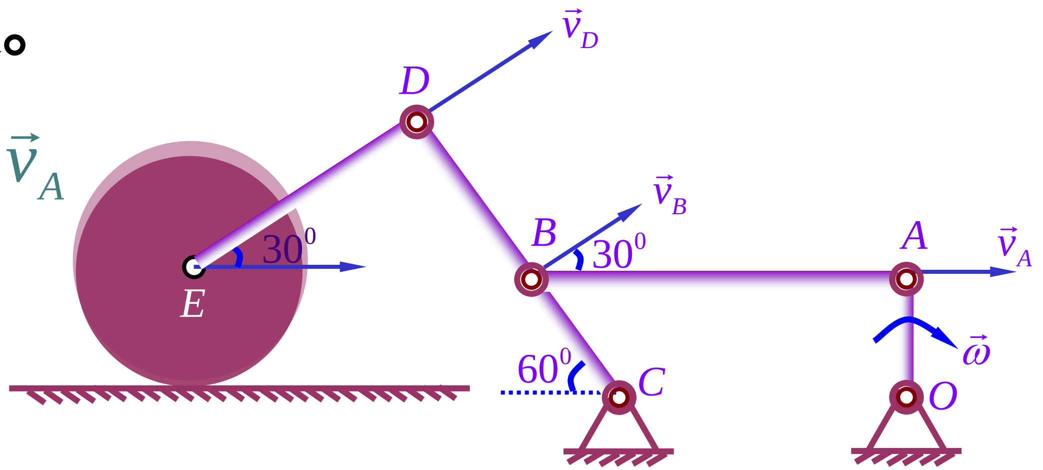
ED与水平线成30度角，CD与水平线成60度角。

求：此瞬时点E的速度。

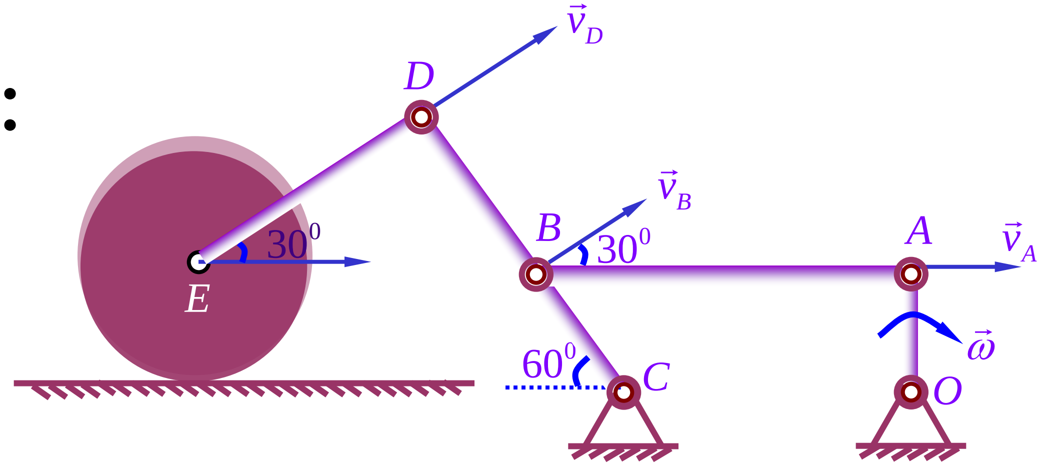
说明：$\vec{v}_E \leftarrow \vec{v}_D \leftarrow \vec{v}_B \leftarrow \vec{v}_A$

此题是基点法、瞬心法

速度投影法的综合应用



解： 对*OA*杆，瞬心法：



$$\vec{v}_A=\vec{\omega}\times\vec{r}_{OA}=\omega r_{OA}\vec{e}_{v_A}$$

对*AB*杆，速度投影法：

$$\vec{v}_B\cos 30^0=\vec{v}_A$$

即 $$v_B=\frac{\omega r_{OA}}{\cos 30^\circ}=0.2309m/s$$

对*CD*杆，瞬心法：

$$\vec{v}_B=\vec{\omega}_{CD}\times\vec{r}_{CB}=\omega_{CD}r_{CB}\vec{e}_{v_{cB}}$$

$$\vec{v}_D=\vec{\omega}_{CD}\times\vec{r}_{CD}=\omega_{CD}r_{CD}\vec{e}_{v_{cB}}$$

则有：$$\frac{v_B}{v_D}=\frac{\omega_{CD}r_{CB}\vec{e}_{v_{cB}}}{\omega_{CD}r_{CD}\vec{e}_{v_{cB}}}=\frac{r_{CB}}{r_{CD}}=\frac{1}{3}$$

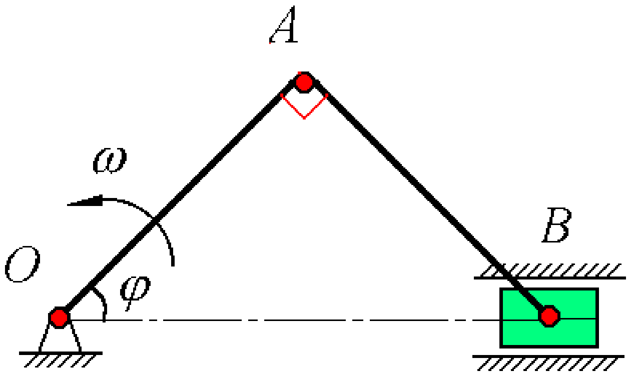
即 $$v_D=3v_B$$

对*DE*杆，速度投影法：

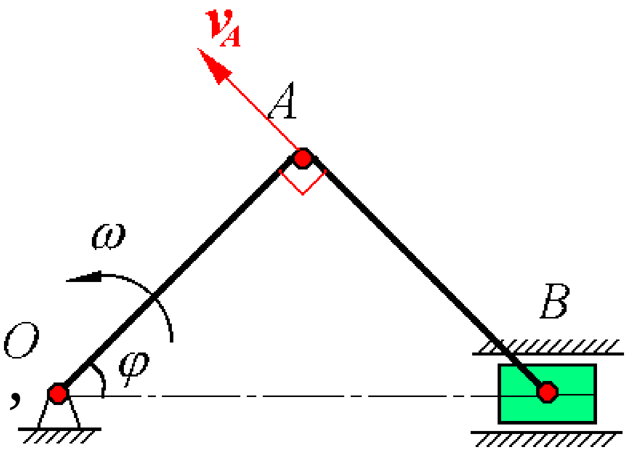
$$\vec{v}_E\cos 30^0=\vec{v}_D$$

即 $$v_E=\frac{v_D}{\cos 30^0}=0.8m/s$$

曲柄连杆机构$OA=AB=l$，取柄OA以匀ω转动。 求：
当$\varphi=45^{o}$时，滑块B的速度及AB杆的角速度。



解：机构中,OA作定轴转动,AB作平面运动,滑块B作平动。

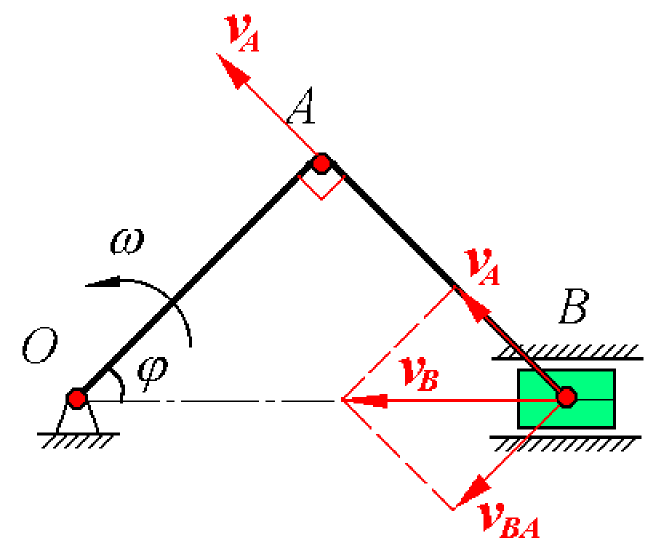


★基点法（合成法）

研究 AB，以 A为基点，　且 $v_A = l\omega$，方向如图示。

根据 $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$,

在 B 点做 速度平行四边形，如图示。



$$v_B = v_A / \cos\varphi$$

$$= l\omega / \cos 45^\circ = \sqrt{2} l\omega \ (\leftarrow)$$

$$v_{BA} = v_A \operatorname{tg}\varphi = l\omega \cdot \operatorname{tg}45^\circ = l\omega$$

$$\therefore \omega_{AB} = v_{BA} / AB = l\omega / l = \omega \quad (\curvearrowright)$$

[例5.1]

椭圆规尺AB的两端点分别沿相互垂直的直线槽Ox及Oy滑动，已知B端以匀速u运动，如图所示。求：

(i)随圆规尺上M点的速度v_M及加速度a_M

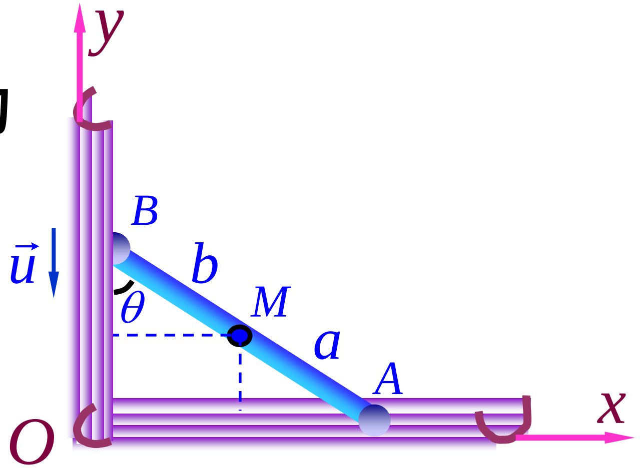
(ii)规尺的瞬时中心S点的位置。

已知M点离A、B点的距离分别为a 和 b

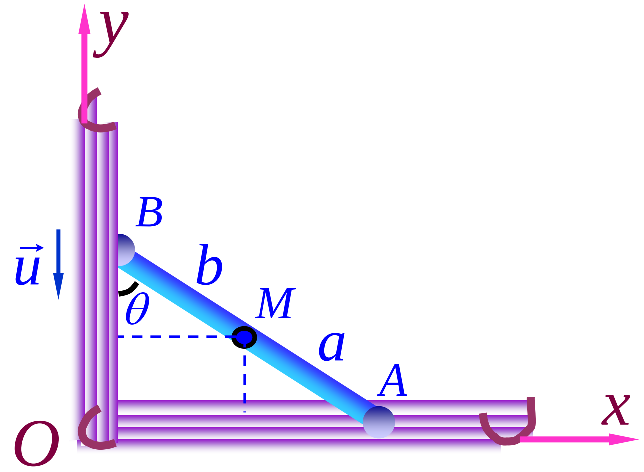
解：(i) 椭圆规尺作平面平行运动

以B点为基点，则

$$\vec{v}_M = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BM}$$



如图，几何关系有：



$$\vec{r}_{BM} = b\sin\theta\vec{i} - b\cos\theta\vec{j}$$

$$\vec{v}_B = -u\vec{j} \qquad \vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k}$$

所以*M*点的速度为：

$$\vec{v}_M = \vec{v}_B + \vec{\omega}\times\vec{r}_{BM} = -u\vec{j} + \dot{\theta}\vec{k}\times(b\sin\theta\vec{i} - b\cos\theta\vec{j})$$

$$= \dot{\theta}b\cos\theta\vec{i} + (\dot{\theta}b\sin\theta - u)\vec{j}$$

又 $\vec{v}_B = -u\vec{j} = \dfrac{d\vec{r}_{OB}}{dt} = \dfrac{d}{dt}[(a+b)\cos\theta\,\vec{j}] = -(a+b)\dot{\theta}\sin\theta\vec{j}$

于是有 $\dot{\theta} = \dfrac{u}{(a+b)\sin\theta}$ ，所以 $\vec{v}_M = \dfrac{u}{a+b}(bctg\theta\vec{i} - a\vec{j})$

M点的加速度为：

$$\vec{a}_M=\frac{d\vec{v}_M}{dt}=\frac{d}{dt}[\frac{u}{a+b}(bctg\theta\vec{i}-a\vec{j})]$$

$$=-\frac{ub}{a+b}\dot{\theta}\csc^2\theta\vec{i}=-\frac{ub}{a+b}\frac{u}{(a+b)\sin\theta}\csc^2\theta\vec{i}$$

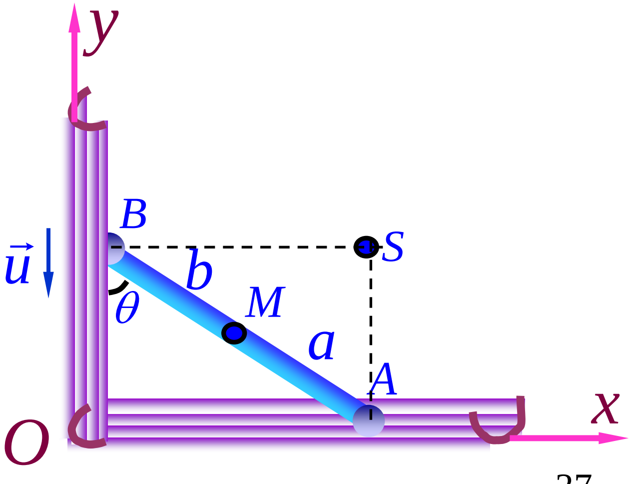
$$=-\frac{u^2b}{(a+b)^2\sin^3\theta}\vec{i}$$

(ii) 如图，因规尺作平面平行运动

规尺上A点和B点的速度方向已知，

作垂线相交于S，S就为瞬心的位置

定量计算瞬心，看书。



§5.2 刚体的动量、角动量和动能

刚体的动量定义

$$\vec{P} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = m\vec{v}_C = \vec{P}_C$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

质点组对一固定点（坐标原点）的角动量是

$$L = \sum_i r_i \times m_i v_i$$

刚体绕固定点以角速度 ω 转动时，刚体上任意点的速度为

$$v_i = \omega \times r_i$$

将上式代入角动量表达式可得

$$L = \sum_i m_i r_i \times (\omega \times r_i) = \sum_i m_i [r_i^2 \omega - r_i (r_i \cdot \omega)]$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

将 $r_i = x_i i + y_i j + z_i k; \qquad \omega = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k$

代入并作矢量运算，可得

$$L = L_x i + L_y j + L_z k$$

其中

$$\begin{cases} L_x = \omega_x \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i \\ L_y = -\omega_x \sum_i m_i y_i x_i + \omega_y \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2) - \omega_z \sum_i m_i y_i z_i \\ L_z = -\omega_x \sum_i m_i z_i x_i - \omega_y \sum_i m_i z_i y_i + \omega_z \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{cases}$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

角动量与角速度之间的关系是较为复杂，但关系式中各角速度分量的系数，都只与刚体的质量分布有关而与刚体的运动状况无关。分别将这些系数相应地以下列符号表示:

$$\begin{cases} J_{xx} = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) = \int (y^2 + z^2)dm \\ J_{yy} = \sum_i m_i(z_i^2 + x_i^2) = \int (z^2 + x^2)dm \\ J_{zz} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) = \int (x^2 + y^2)dm \end{cases} \qquad \begin{cases} J_{yz} = J_{zy} = \sum_i m_i y_i z_i = \int yzdm \\ J_{zx} = J_{xz} = \sum_i m_i z_i x_i = \int zxdm \\ J_{xy} = J_{yx} = \sum_i m_i x_i y_i = \int xydm \end{cases}$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

角动量的表达式可写为

$$L = (J_{xx}\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z)i +$$
$$(-J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y - J_{yz}\omega_z)j +$$
$$(-J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z)k$$

写成矩阵形式为

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \vec{\vec{J}} \cdot \vec{\omega}$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

$$\overset{\rightrightarrows}{J}=\begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}$$

由上式表示的J诸分量构成一个二阶张量，称为刚体的惯量张量。这个张量的矩阵称为惯量矩阵。矩阵中非对角元素称为惯量积。

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

1. 惯量主轴

刚体绕通过定点沿一些特殊方向的主轴转动时，L 与 ω 的方向一致，这些特殊方向的轴称为惯量主轴，简称主轴。

与惯量主轴相关的惯量积等于零，利用此特性，可轻易找出具有对称性均匀刚体的惯量主轴。

（1）对称轴

（2）对称面的法线

从数学上易证：惯量积为0，是L与ω平行的充分必要条件

这也就很容易有如下结论：

◆匀质刚体的对称轴是轴上各点的惯量主轴

◆与匀质刚体的对称面垂直的轴, 是轴与对称面交点的惯量主轴

◆若坐标系的两个轴是惯量主轴, 则第三轴也是惯量主轴

◆匀质刚体若有旋转对称轴, 则以旋转对称轴为轴的坐标系是主轴坐标系(此时不必固连坐标系于刚体)

如：对称重陀螺的定点运动。

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

2. 转动惯量

刚体绕定点转动时的惯性是以张量J来量度，刚体定轴转动的惯量则以转动惯量J来表示。前者是二阶张量，后者是标量。

刚体是由大量质点构成的，故跟质点情形一样，刚体对某一轴线*l*的角动量，其大小是刚体对轴上一点的角动量在该轴线方向上的分量:

$$L_l = \vec{e}_l \cdot \vec{L} = J\omega$$

其中， e_l 是沿轴 l 方向的单位矢量； J 即是刚体对该转轴的转动惯量。

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

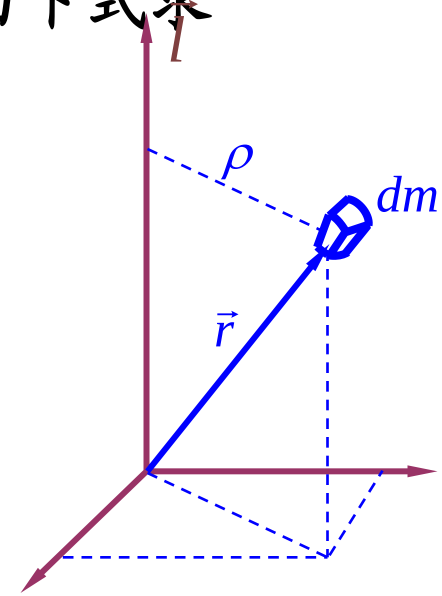
一、刚体的角动量和惯量张量

2.转动惯量

对于质点不连续分布的刚体，转动惯量可由下式求出：

$$J = \sum_i m_i \rho_i^2$$

ρ_i 是 i 质点至转轴的垂直距离。



对于质量连续分布的刚体，

$$J = \int_V \rho^2 dm = \int_V \rho^2 \sigma dV$$

dm 是元体积 dV 内的质量，σ 为刚体的密度，ρ 是 dV 至转轴的垂直距离。

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

2. 转动惯量

转动惯量也可由对定点 O 的惯量矩阵求得。设转轴的方向余弦是 α、β 和 γ ，则轴线方向的单位矢量为:

$$\vec{e}_l = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$$

既为定轴转动，角速度 ω 沿轴线方向，有

$$\vec{\omega} = \omega\vec{e}_l = (\alpha i + \beta j + \gamma k)\omega$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

2.转动惯量

刚体绕此轴转动的角动量为

$$\vec{L}_l = L_l \vec{e}_l$$

其中

$$L_l = \vec{e}_l \cdot \vec{L} = \vec{e}_l \cdot \vec{J} \cdot \vec{\omega} = (\vec{e}_l \cdot \vec{J} \cdot \vec{e}_l)\omega$$

$$= (\alpha \quad \beta \quad \gamma)\begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}\omega$$

$$= J\omega$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

2. 转动惯量

刚体关于定点的惯量张量 $\vec{J}$ ，与关于通过此定点的轴线的转动惯量 J 之间存在如下关系：

$$J = \vec{e}_l \cdot \vec{J} \cdot \vec{e}_l$$

$$= (\alpha \quad \beta \quad \gamma)\begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$= J_{xx}\alpha^2 + J_{yy}\beta^2 + J_{zz}\gamma^2 - 2J_{yz}\beta\gamma - 2J_{zx}\gamma\alpha - 2J_{xy}\alpha\beta$$

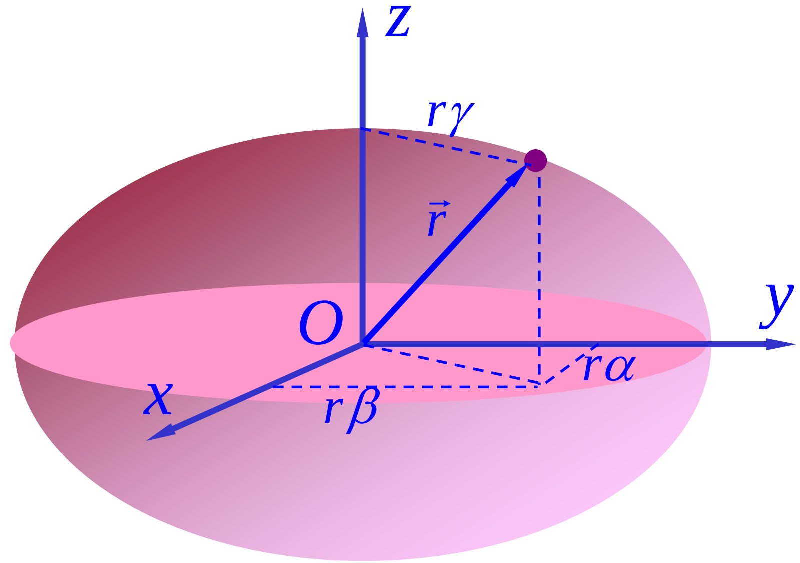
大家熟知 $J_{xx}x^2+J_{yy}y^2+J_{zz}z^2-2J_{xy}xy-2J_{xz}xz-2J_{yz}yz=1$

中，因 $J_{xx},J_{yy},J_{zz},J_{xy},J_{xz},J_{yz}$ 为正常数，故它是一个椭球面

若 $\vec{r}$ 表示从原点到椭球面的矢量

α，β，γ为其方向余弦

则有：$x=r\alpha,y=r\beta,z=r\gamma$



代入可得：

$$r^2(J_{xx}\alpha^2+J_{yy}\beta^2+J_{zz}\gamma^2-2J_{xy}\alpha\beta-2J_{xz}\alpha\gamma-2J_{yz}\beta\gamma)=r^2J_l=1$$

因此，只要让 $r=\dfrac{1}{\sqrt{J_l}}$ ，就形成了惯量椭球。$\vec{e}_r=\vec{e}_l$

对于匀质刚体，据方程画出椭球，求出r，知绕r方向的转动惯量

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

2.转动惯量

由上式可知，知道了刚体对某点惯量张量 J 后，便可利用它的诸分量 J_{ij} ，求出对通过该点的任意 e_l 方向轴线的转动惯量 J 。

刚体对惯量主轴的转动惯量，称为主转动惯量。以惯量主轴为坐标轴时，各惯量积为零，惯量矩阵是对角化的，三个对角元素就是分别对三个惯量主轴的主转动惯量。

刚体对通过质心的轴线的转动惯量 J_c ，跟对与之相距为 d 的平行轴的转动惯量 J 间，有如下关系

$$J = J_c + md^2$$

平行轴定理：如果刚体对通过质心的轴的转动惯量为J_C，那么对与此轴平行的任意轴的转动惯量可以表示为 $J = J_C + md^2$

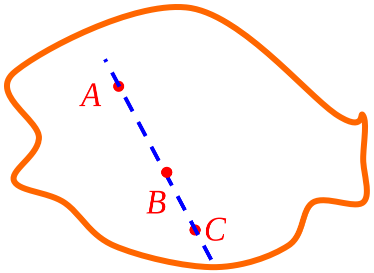
证：

$$J_{zz} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i[(x_i' + x_c)^2 + (y_i' + y_c)^2]$$

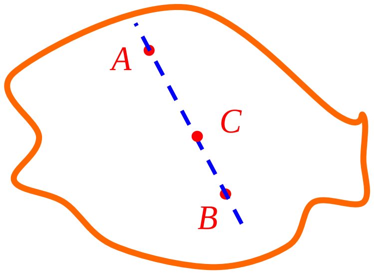
$$J_{zz} = \sum_i m_i(x_i'^2 + y_i'^2) + 2x_c\sum_i m_i x_i' + 2y_c\sum_i m_i y_i' + (x_c^2 + y_c^2)\sum_i m_i$$

$$J_{zz} = \sum_i m_i(x_i'^2 + y_i'^2) + (x_c^2 + y_c^2)\sum_i m_i = J_c + md^2$$

推论： 若过刚体上任意两点A、B的轴均与过质心轴平行，那么两轴的转动惯量为 $J_A = J_B + m(r_{AC} + r_{BC})(r_{AC} - r_{BC})$



$$J_A = J_B + mr_{AB}(r_{AC} + r_{BC})$$



$$J_A = J_B + mr_{AB}(r_{AC} - r_{BC})$$

垂直轴定理：如果刚体对于直角坐标系x轴，y轴，z轴，原点O的转动惯量分别为J_x，J_y，J_z，J_O，那么有：$J_x + J_y + J_z = 2J_O$

证：由于 $J_x = \int (y^2 + z^2) dm \quad J_y = \int (x^2 + z^2) dm \quad J_z = \int (x^2 + y^2) dm$

所以 $J_x + J_y + J_z = 2\int (x^2 + y^2 + z^2) dm = 2J_O$

当z→0时，$J_x = \int y^2 dm \quad J_y = \int x^2 dm \quad J_z = \int (x^2 + y^2) dm$

推论 如果刚体是薄板(二维情形)，建立三维直角坐标系O-xyz z轴垂直于薄板，x轴和y轴位于薄板内，则 $J_x + J_y = J_z$

我们现在简化角动量的表达式

$$\vec{L}=\begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}=\vec{\vec{J}}\cdot\vec{\omega}$$

从角动量的表达式知，关键在于惯量张量的化简

由线性代数知识可知，只需要把惯量张量化为对角矩阵

此时惯量积为0，惯量张量对角化为：

$$\vec{\vec{J}}=\begin{pmatrix} J_{xx}' & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy}' & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz}' \end{pmatrix}$$

刚体对定点的角动量简化为：

$$\vec{L} = \vec{\vec{J}} \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx}' & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy}' & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

即 $\vec{L} = J_{xx}'\omega_x\vec{i} + J_{yy}'\omega_y\vec{j} + J_{zz}'\omega_z\vec{k}$

从线性代数知识可知，矩阵对角化就是求本征值和本征向量

对 n 阶满秩方阵 A，总能找到可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$

为对角阵。方法是：$|A - \lambda E| = 0$ 求得特征根λ

代入特征根λ从 $(A - \lambda E)x = 0$ 反解特征向量x

为了书写，略掉对角化的惯量矩阵中惯量系数的撇’，则

$$\vec{L} = \vec{\vec{J}} \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \vec{\vec{J}} \to A \\ \vec{\omega} \to x \end{matrix}$$

主轴坐标系的每一个轴称为该固定点的惯量主轴

显然，若角速度沿某一主轴方向，则角动量必沿此方向

即有 $\vec{L} = \lambda\vec{\omega}$ 其中λ为正的比例系数

于是有主轴的另一定义：

若刚体绕过定点某轴以角速度ω转动，而刚体对该点

L与ω方向相同，则此轴就是该点的惯量主轴

从数学上易证：惯量积为0，是L与ω平行的充分必要条件

这也就很容易有如下结论：

◆匀质刚体的对称轴是轴上各点的惯量主轴

◆与匀质刚体的对称面垂直的轴, 是轴与对称面交点的惯量主轴

◆若坐标系的两个轴是惯量主轴, 则第三轴也是惯量主轴

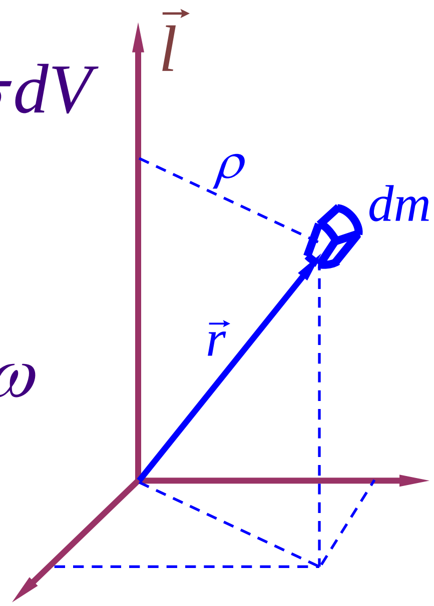
◆匀质刚体若有旋转对称轴, 则以旋转对称轴为轴的坐标系是主轴坐标系(此时不必固连坐标系于刚体)
如：对称重陀螺的定点运动。

由于过定点有无数多条轴线，需求某轴线*l*的转动惯量：

刚体是特殊的质点组，因而满足： $\vec{L}_l = \vec{L}\cdot\vec{e}_l = J_l\omega$

式中 $J_l = \sum_i m_i\rho_i^2$ J_l为刚体对*l*轴的转动惯量，ρ_i轴距

质点连续均匀分布的刚体 $J_l = \int_V \rho^2 dm = \int_V \rho^2\sigma dV$



又 $\vec{L} = \vec{\vec{J}}\cdot\vec{\omega}$

故 $\vec{L}_l = J_l\omega = \vec{L}\cdot\vec{e}_l = \vec{e}_l\cdot\vec{L} = \vec{e}_l\cdot\vec{\vec{J}}\cdot\vec{\omega} = \vec{e}_l\cdot\vec{\vec{J}}\cdot\vec{e}_l\omega$

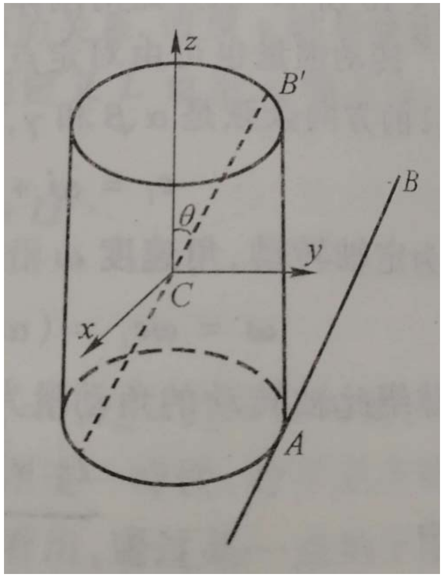
比较可知：$J_l = \vec{e}_l\cdot\vec{\vec{J}}\cdot\vec{e}_l$

反映了刚体定点与过定点的某轴线的转动惯量之间的关系

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

例5.3 一半径为 r_0 ，高为 $2r_0$ 的均质正圆柱体，如下图所示绕AB轴以角速度 ω 转动。轴线AB与圆柱轴共面，并成 30° 角，A点是柱体底面边界上的固定点。求（1）柱体对于轴线AB的转动惯量；（2）柱体对A点的角动量。



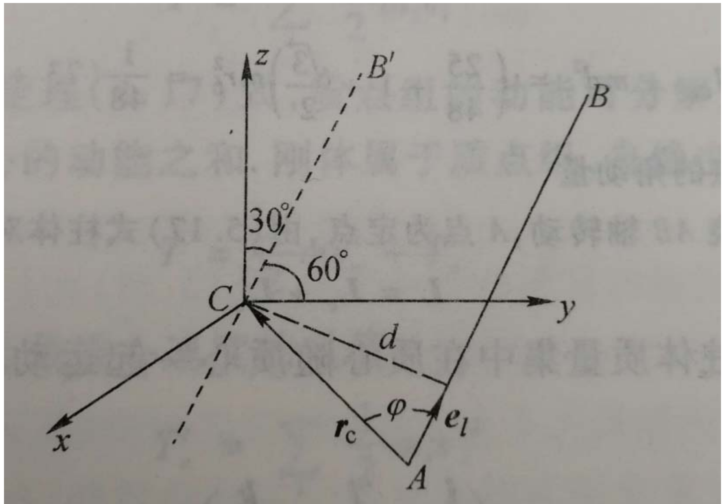


图 L5.3

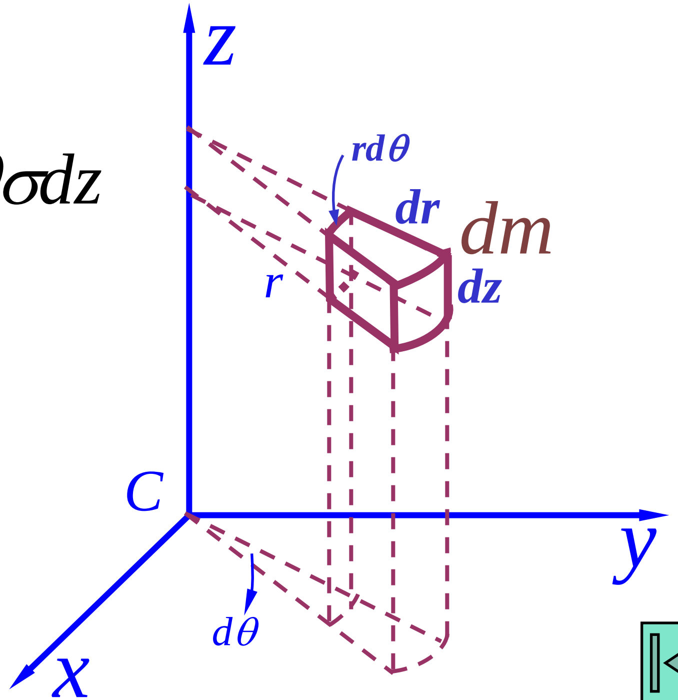
§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

[解]取质心C为坐标原点，建立直角坐标系C-xyz，AB位于yz平面内。由于柱体是均匀的，质心位于几何中心，显然x、y和z轴都是对称轴，它们都是惯量主轴。对圆柱轴的转动惯量J_z，即是惯量矩阵的对角元素J_{zz}，按公式可求出

$$J_{zz}=J_z=\int_{-a}^{a}\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} r^2 r\,dr\,d\theta\,\sigma\,dz$$

$$=\sigma\pi r_0^5=\frac{1}{2}mr_0^2$$

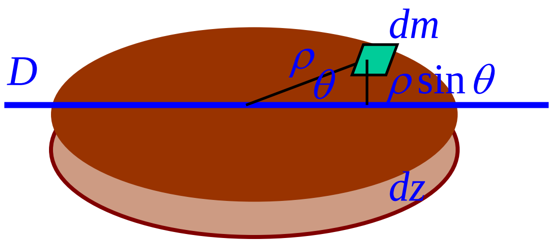


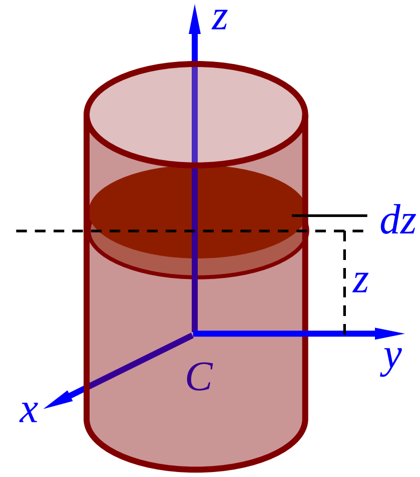
$$J_{xx} = J_x = J_{yy} = J_y = \int_{-a}^{a} \sigma (y^2 + z^2) dxdydz$$

$$= \int_{-r_0}^{r_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \sigma (r^2 \sin^2 \theta + z^2) r d\theta dr dz = \frac{7}{6} \sigma \pi r_0^5 = \frac{7}{12} m r_0^2$$

由于对称性，圆柱对x轴，y轴的转动惯量相等，即 $J_{xx}=J_{yy}$

如图，薄板对直径的转动惯量为：





$$dJ_D=\int r_D{}^2 dm$$
$$=\int(\rho\sin\theta)^2 dm$$
$$=\int(\rho\sin\theta)^2\sigma dV=\int(\rho\sin\theta)^2\sigma dSdz$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^r(\rho\sin\theta)^2\sigma\rho d\theta d\rho dz$$
$$=\frac{1}{4}\pi r^4\sigma dz$$

如图，据平行轴定理有 $J_{xx}=\int(dJ_D+z^2 dm)=\int_{-r}^{r}(\frac{1}{4}\pi r^4\sigma+z^2\pi r^2\sigma)dz$

化简有： $J_{xx}=J_{yy}=\frac{7}{6}\pi\sigma r^5=\frac{7}{12}mr^2$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

[解]现在坐标轴都是惯量主轴，非对角元素均为0，对质心C的惯量矩阵是一对角矩阵，柱体对CB’轴的转动惯量是

$$J_{CB'}=(\alpha \quad \beta \quad \gamma)\begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}=J_{xx}\alpha^2+J_{yy}\beta^2+J_{zz}\gamma^2$$

$$\alpha=\cos(\frac{\pi}{2})=0, \beta=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}, \gamma=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$J_{CB'}=\frac{1}{4}(J_{yy}+3J_{zz})=\frac{25}{48}mr_0^2$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

[解]再由平行轴定理，要求得柱体对AB轴的转动惯量，先求出AB与CB’ 间的垂直距离d。柱体质心相对于A点的位矢 $r_c = -r_0 j + r_0 k$；AB方向的单位矢量 $e_l = \frac{1}{2} j + \frac{\sqrt{3}}{2} k$，设 e_l 与 r_c 之间的夹角为 φ ，则

$$d = \left| r_c \sin\varphi \right| = \left| e_l \times r_c \right| = \frac{1+\sqrt{3}}{2} r_0 , d^2 = (1+\frac{\sqrt{3}}{2}) r_0^2$$

$$J_{AB} = J_{CB'} + md^2 = (\frac{25}{48} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}) mr_0^2 = \frac{1}{48}(73 + 24\sqrt{3}) mr_0^2$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

[解]柱体以角速度 ω 绕AB轴转动，A点为定点，柱体对A点的角动量:

$$L = L_c + L_c'$$

$$v_c = \omega \times r_c = \omega \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -r_0 & r_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})\omega r_0 i$$

$$L_c = m r_c \times v_c = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})\omega r_0^2 (j+k)$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

[解]柱体以角速度 ω 绕质心转动的角动量:

$$L_c' = J_c \cdot \omega = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \omega$$

$$= \frac{\omega}{2}(J_{yy} j + \sqrt{3} J_{zz} k) = \frac{m\omega}{24} r_0^2 (7j + 6\sqrt{3}k)$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

[解]柱体对A点的角动量:

$$L = L_c + L_c' = \frac{m\omega}{24} r_0^2 \left[(19 + 12\sqrt{3}) j + (12 + 18\sqrt{3}) k \right]$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

二、刚体的动能

刚体的动能是刚体中各质点的动能之和:

$$T=\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

质点组的动能可分解为随质心运动（平动）的动能和相对于质心的动能之和。刚体属于质点组，也满足如下关系:

$$T=\frac{1}{2}mv_c^2+T_c'$$

其中

$$T_c'=\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i'^2$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

二、刚体的动能

由刚体的特点知，刚体中质点与质心间的距离不变，刚体相对于质心的运动只可能是围绕质心的转动

柯尼希定理：刚体的动能等于刚体随质心运动的平动动能 T_c 及绕质心转动的转动动能 T_c' 之和。

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

二、刚体的动能

取定点 O 为坐标原点。当刚体以角速度 ω 绕固定点 O 转动时，位矢 r 处质点的速度为

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

则有

$$v^2 = (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \vec{v} = \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{v})$$

刚体绕定点 O 转动的动能为

$$T_o = \Sigma \frac{1}{2} m \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \Sigma m \vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

二、刚体的动能

利用 L 与惯量矩阵 J 、角速度 ω 的关系，T_0 可写成

$$T_0 = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{J}\cdot\vec{\omega} = \frac{1}{2}J_\omega\omega^2$$

其中

$$J_\omega = \vec{\omega}\cdot\vec{J}\cdot\vec{\omega}$$

是刚体对通过定点的瞬时转轴的转动惯量。

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

二、刚体的动能

如果所取的坐标轴是关于定点（坐标原点）的惯量主轴，则惯量矩阵 J 是对角化；三个对角元素分别为刚体对三个主转动惯量：J_x、J_y 和 J_z 。这时转动动能可写为

$$T_0 = \frac{1}{2}(J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2)$$

刚体对于质心的转动动能表达式也可写为

$$T_c' = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{J}\cdot\vec{\omega}$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

二、刚体的动能

刚体一般运动时的动能表达式可写为

$$T = T_c + T_c' = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{J}_c \cdot \vec{\omega}$$

（1）平动：$\omega = 0$即刚体无转动，不存在转动动能，故

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 = \frac{1}{2} m v^2$$

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

二、刚体的动能

（2）定轴转动：设转轴为z轴，在转轴上适当取坐标原点 O ，则定轴转动可看成角速度方向沿转轴不变的定点运动，$\omega = \omega k$ ，可得

$$T = \frac{1}{2} L_z \omega = \frac{1}{2} J_{zz} \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2$$

其中

$$J_{zz} = J = \int (x^2 + y^2) dm$$

是刚体对于转轴的转动惯量。

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

二、刚体的动能

（3）平面平行运动：取与刚体运动平面垂直的方向为z轴，$\vec{\omega}=\omega\vec{k}$，则

$$T=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}J_c\omega^2$$

J_c 是刚体对通过质心的转轴的转动惯量。

§5.2 刚体的动量、角动量和动能

一、刚体的角动量和惯量张量

例5.4 边长为a质量为m的均质立方体，绕对角线以角速度 ω 转动，求出此立方体的动能。

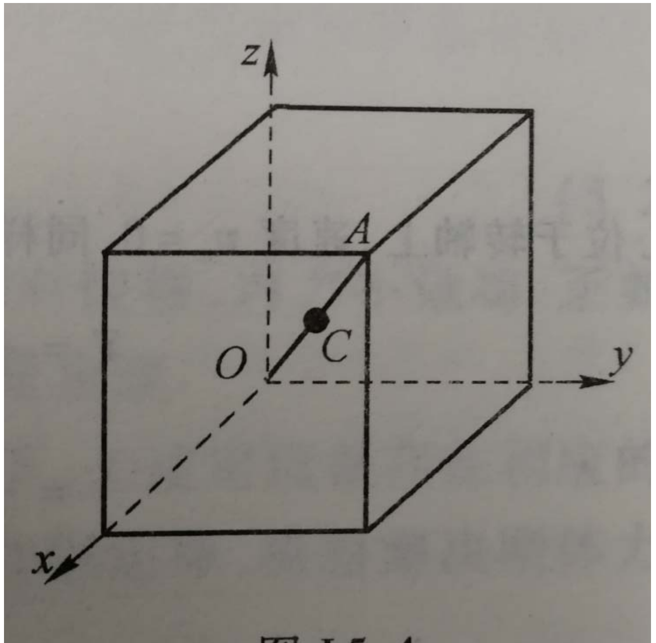
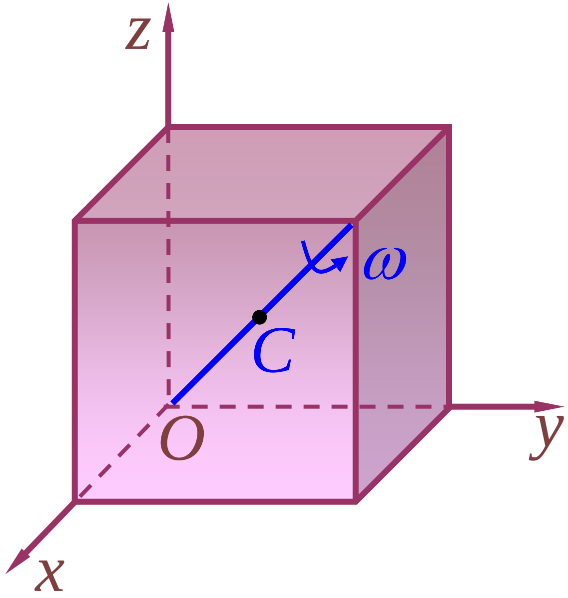


图 L5.4

解1：如图，取棱交点为原点，建立直角坐标系 $O-xyz$

由图中几何关系知转轴的方向余弦为：$\vec{e}_\omega = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

$$\vec{\omega} = \omega\vec{e}_\omega = \frac{1}{\sqrt{3}}\omega\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$



由立方体的对称性知：

$$J_x = J_y = J_z = \int_0^a\int_0^a\int_0^a (x^2 + y^2)\sigma dxdydz$$

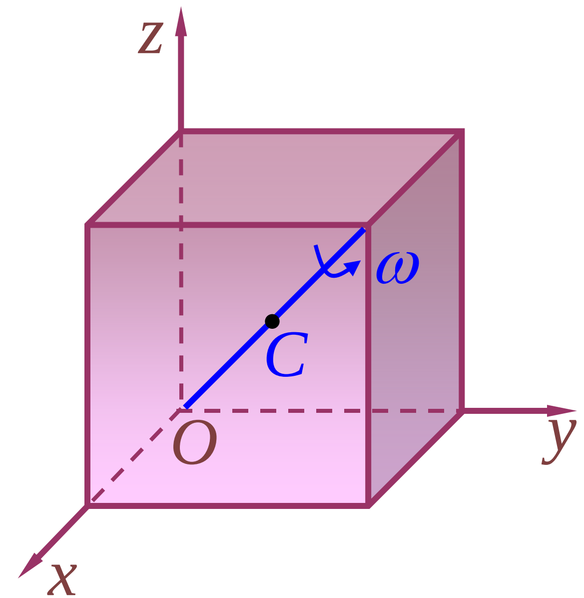
$$= \frac{2}{3}a^5\sigma = \frac{2}{3}ma^2$$

$$J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = \int_0^a\int_0^a\int_0^a xy\sigma dxdydz$$

$$= \frac{1}{4}a^5\sigma = \frac{1}{4}ma^2$$

立方体对O点的惯量张量为：

$$\vec{\vec{J}}_O = ma^2\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$



所以立方体的转动能为：

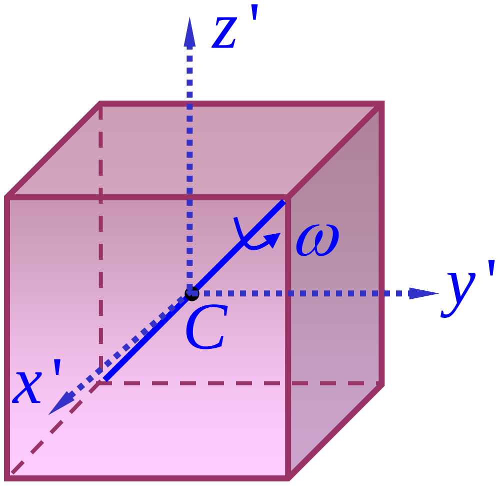
$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{\vec{J}}_O\cdot\vec{\omega} = \frac{1}{6}m\omega^2a^2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}m\omega^2a^2$$

解2：如图，取质心C为原点，建立直角坐标系 $C-x'y'z'$

由于立方体的对称性，坐标轴为惯量主轴，于是有：

$$J_{x'}=J_{y'}=J_{z'}=\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}(x'^2+y'^2)\sigma dxdydz$$

$$=\frac{1}{6}a^5\sigma=\frac{1}{6}ma^2$$



那么，立方体对质心的惯量张量为：

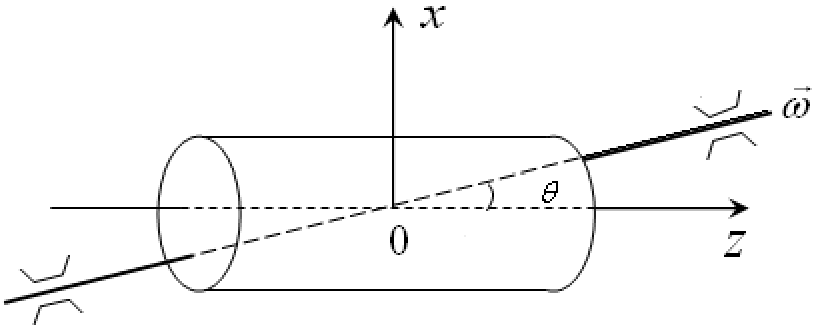
$$\vec{\vec{J}}_C=\frac{1}{6}ma^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

又因立方体的质心位于转轴上，因此 $\vec{v}_C=0$

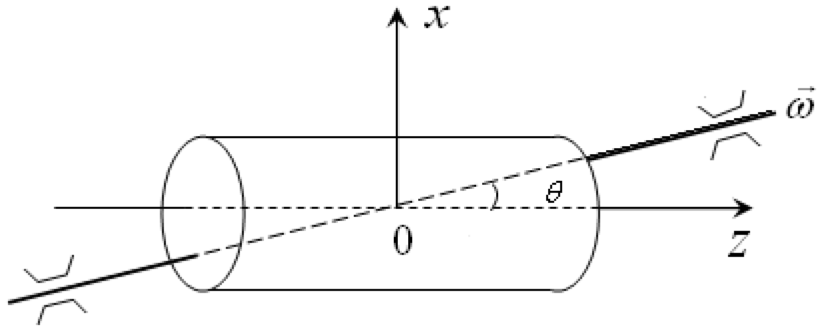
所以立方体的转动能为：

$$T=T_C+T_C'=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{\vec{J}}_C\cdot\vec{\omega}=\frac{1}{12}m\omega^2a^2$$

例：一个质量为m，半径为R，高为h的均匀圆柱体，它绕着过质心、偏离其对称轴角度为θ的定轴以角速度ω转动。求圆柱体转动的动能。



例：一个质量为m，半径为R，高为h的均匀圆柱体，它绕着过质心、偏离其对称轴角度为θ的定轴以角速度ω转动。求圆柱体转动的动能。



解：圆柱体的动能

$$T=\frac{1}{2}J\omega^2$$

求绕定轴的J，建立主轴坐标系0 – xyz,三个坐标轴即对称轴。

轴转动惯量：
$$J_1=J_2=\frac{1}{12}m(h^2+3R^2)$$

$$J_3=\frac{1}{2}mR^2$$

$$J=J_1\alpha^2+J_2\beta^2+J_3\gamma^2$$

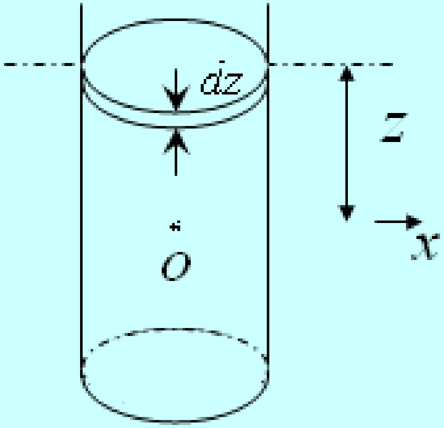
而 $\alpha=\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$ ， $\beta=\cos\frac{\pi}{2}=0$ ， $\gamma=\cos\theta$

$$\therefore J=\frac{1}{12}m(h^2+3R^2)\sin^2\theta+\frac{1}{2}mR^2\cos^2\theta$$

$$\therefore T=\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{1}{4}m\omega^2[\frac{1}{6}(h^2+3R^2)\sin^2\theta+R^2\cos^2\theta]$$

备注：如何计算J_1，J_2?

先算厚dz的薄片对直径轴的转动惯量



$$dI=\int_0^{2\pi}\int_0^R\lambda(\rho\sin\theta)^2\rho d\rho d\theta dz$$

$$=\frac{1}{4}\pi R^4\lambda dz$$

再由平行轴定理可计算位于z处圆盘对x轴的转动惯量，再对z积分。

§5.3 刚体的动力学方程

1、动量定理或质心定理

动量定理

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

质心定理

$$m\frac{d^2\vec{r}_c}{dt} = \vec{F}$$

冲量定理

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \vec{I}$$

§5.3 刚体的动力学方程

2、角动量定理

对固定点的角动量定理

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}$$

相对于质心的角动量定理

$$\frac{d\vec{L}_c'}{dt}=\vec{M}_c'$$

冲量矩定理

$$\vec{L}_2-\vec{L}_1=\int_{t_1}^{t_2}\vec{L}dt=\vec{K}$$

§5.3 刚体的动力学方程

3、动能定理

$$dT = dW$$

1、动量守恒定律

刚体不受外力作用，或作用的外力之和 $\vec{F} = 0$，动量守恒

$$\vec{p} = \vec{p}_0 = \text{常矢量}$$

在某一方向力的分量 $\vec{F}_i = 0$，则在该方向的动量分量守恒。

§5.3 刚体的动力学方程

3、动能定理

2、角动量守恒定律

刚体不受外力矩作用，或作用的外力矩之和$\vec{M}=0$，角动量守恒

$$\vec{L}=\vec{L}_0=\text{常矢量}$$

在某一方向力矩的分量 $\vec{M}_i=0$，则在该方向的角动量分量守恒。

§5.3 刚体的动力学方程

3、动能定理

3、机械能守恒定律

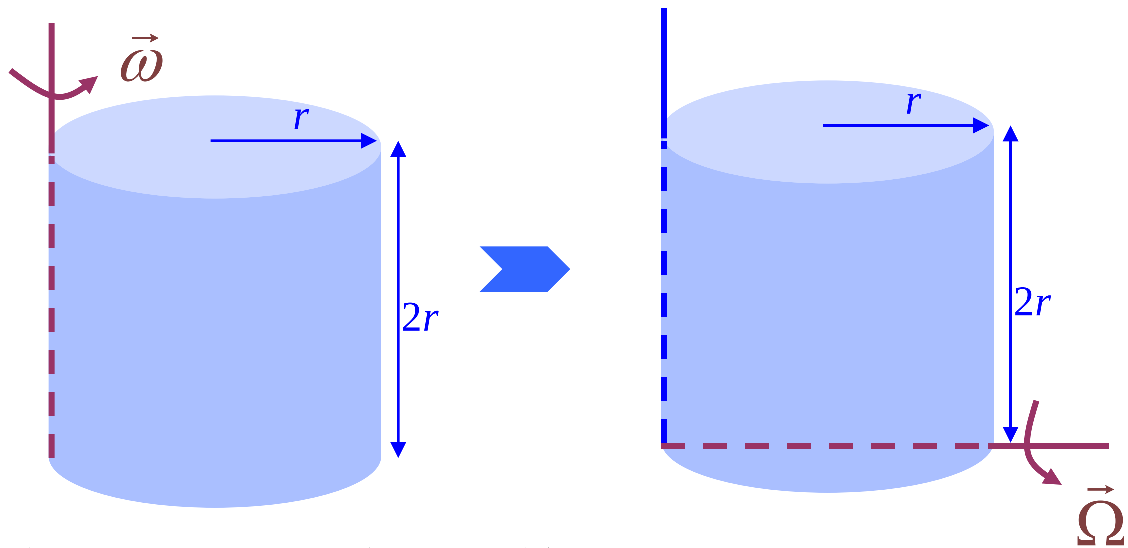
作用于刚体的外力为保守力时，机械能守恒，则

$$T+V=E=\text{常量}$$

[例5.5] 一匀质正圆柱体，半径为r，高为$2r$，以角速度ω绕圆柱侧面的母线转动。今若圆柱体突然改为绕一通过与原转轴相交的底面直径转动，试求出其角速度。

分析：

由于圆柱具有轴对称性，能找到一条惯量主轴，沿对称面法线方向



又圆柱在转动轴的切换过程中，受到轴的冲击力很大，但冲击力对此轴的力矩等于零，即转换前后，对此轴角动量守恒

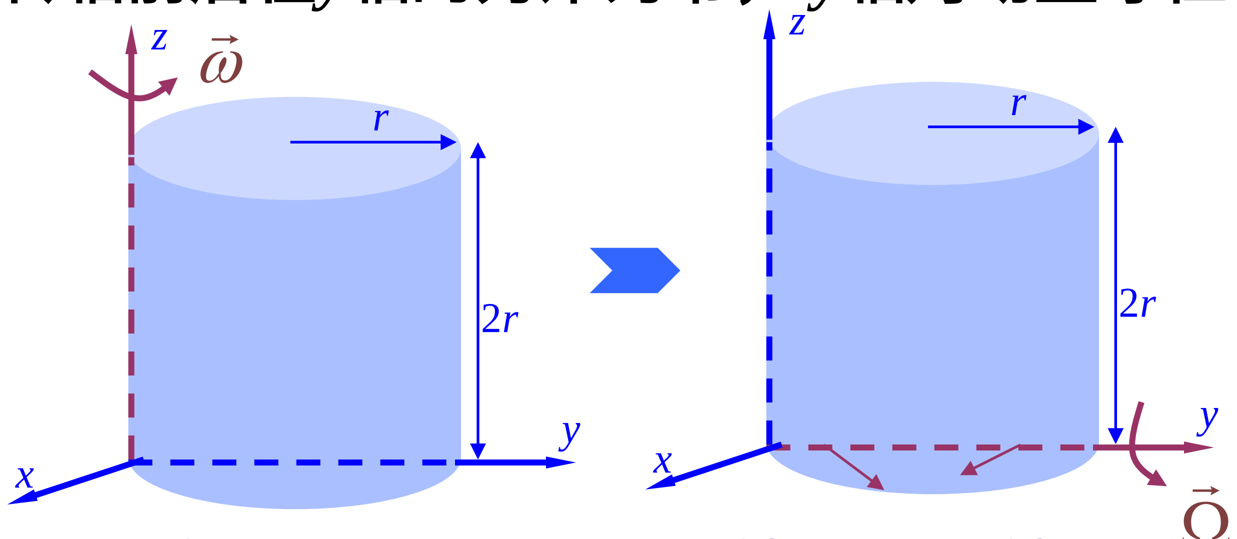
又绕y轴旋转时 $\vec{\Omega}=\Omega\vec{j}$ ，所以对O点的角动量：

$$\vec{L}_{yO}=\vec{\vec{J}}_O\cdot\vec{\Omega}=\begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & -J_{yz} \\ 0 & -J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{pmatrix}=\Omega(J_{yy}\vec{j}-J_{yz}\vec{k})$$

由于圆柱体在切换转轴前后在y轴的力矩为零， y轴角动量守恒

$$\vec{L}_{zO}\cdot\vec{j}=\vec{L}_{yO}\cdot\vec{j}$$

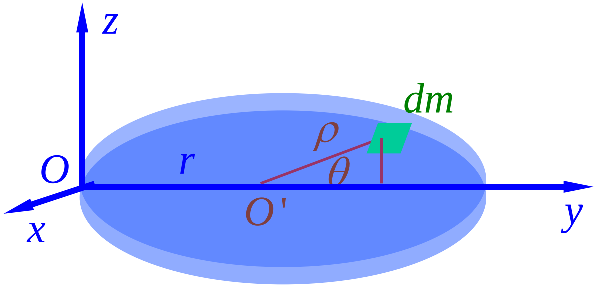
即 $-\omega J_{yz}=\Omega J_{yy}$



由前面结论知

$$J_{yy}=\int(dJ_D+z^2dm)=\int_0^{2r}(\frac{1}{4}\pi r^4\sigma+z^2\pi r^2\sigma)dz=\frac{19}{6}\sigma\pi r^5=\frac{19}{12}mr^2$$

如图，在极坐标中 $y = r + \rho\cos\theta$



所以有：

$$J_{yz} = \int yzdm = \int yz\sigma dV = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{2r} (r + \rho\cos\theta) z\sigma\rho d\rho d\theta dz$$

$$= \sigma r \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{2r} z\rho d\rho d\theta dz + \sigma \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{2r} z\rho^2 \cos\theta d\rho d\theta dz$$

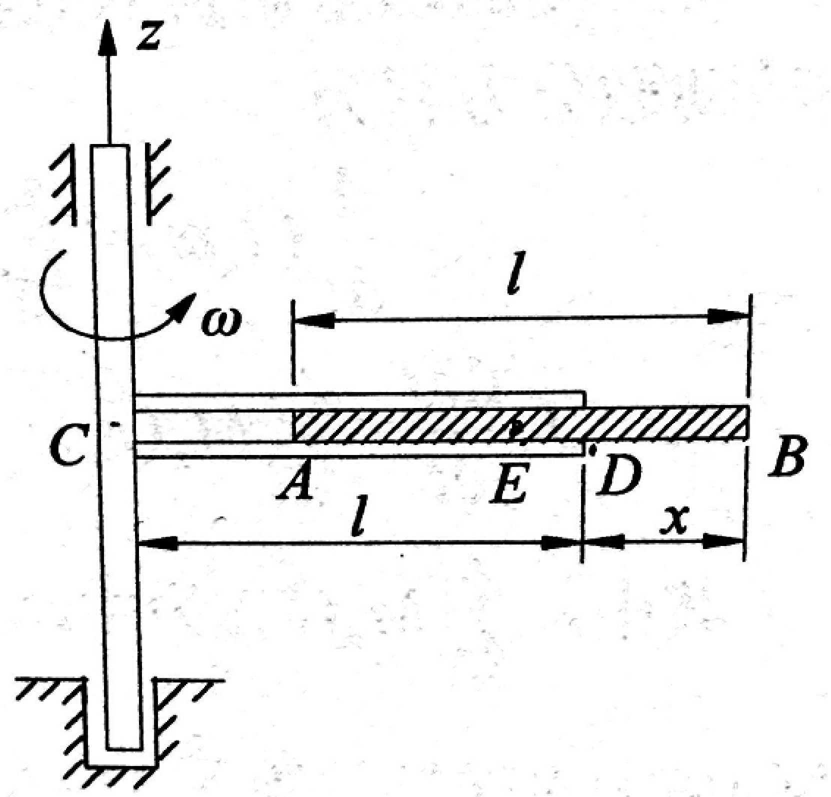
$$= \sigma r \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{2r} z\rho d\rho d\theta dz$$

$$= 2\pi\sigma r^5 = (\sigma \cdot \pi r^2 \cdot 2r) \cdot r^2 = mr^2$$

把 J_{yy}, J_{yz} 的值代入 $-\omega J_{yz} = \Omega J_{yy}$ 可得

$$\vec{\Omega} = \Omega\vec{j} = -\frac{J_{yz}}{J_{yy}}\omega\vec{j} = -\frac{mr^2}{\frac{19}{12}mr^2}\omega\vec{j} = -\frac{12}{19}\omega\vec{j}$$

质量为m的杆AB可在质量为M的管CD内任意地滑动，$AB=CD=l$，CD管绕铅直轴z转动，当运动初始时，杆AB与管CD重合，角速度为ω_0，各处摩擦不计。试求杆AB伸出一半时此装置的角速度。



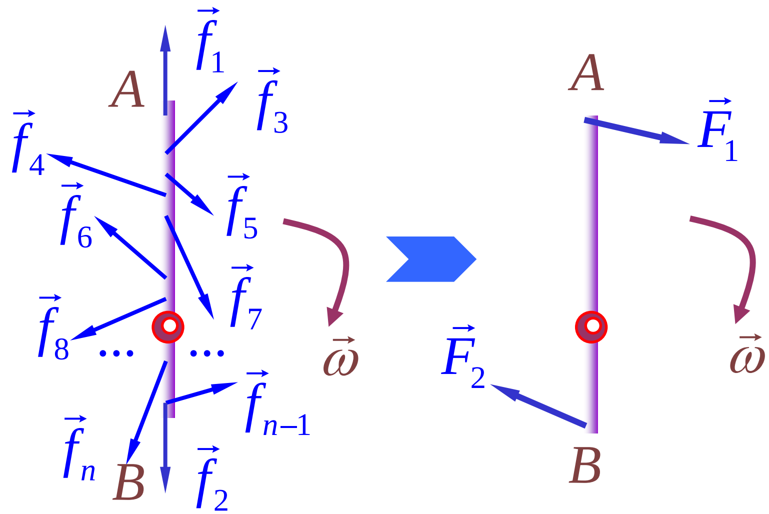
§5.4 刚体的定轴转动

如图，杆AB上受到了各个方向的n个力，使其以ω顺时针方向旋转，在杆AB运动效果上可以用两个力来等效，一个力F_1与杆垂直，另一个力F_2与杆成一定的空间取向。

力系简化了，效果却一样，

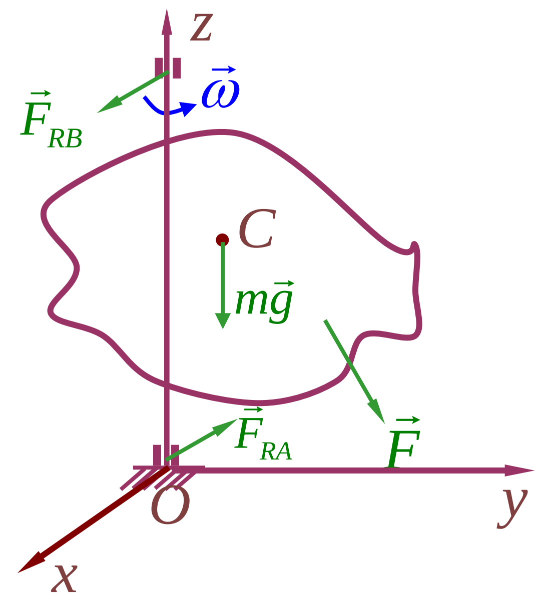
简化力系后的杆AB仍然以角速度ω顺时针方向旋转

原则上把 $\vec{F}_2$ 取在原点上更简便



§5.4 刚体的定轴转动

如图，刚体上A、B两点被约束(如被两轴承约束)固定不动，刚体作定轴转动，刚体除了受到主动力F和重力作用外还受到轴承的约束力，约束力很可能分布于整个AB轴上，但我们总可以从力的效果上等效成两个力 $\vec{F}_{RA},\vec{F}_{RB}$ 作用



其中 $\vec{F}_{RA}$ 与轴成一定的空间取向

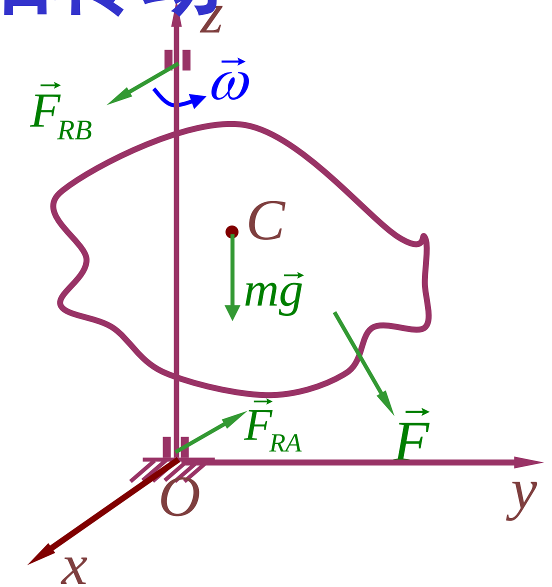
$$\vec{F}_{RA}=F_{RAx}\vec{i}+F_{RAy}\vec{j}+F_{RAz}\vec{k}$$

$\vec{F}_{RB}$ 与轴垂直，$\vec{F}_{RB}=F_{RBx}\vec{i}+F_{RBy}\vec{j}$

$\vec{F}_{RA},\vec{F}_{RB}$ 是从力的效果上取的，因而取法具有相对性

§5.4 刚体的定轴转动

建立如图所示的直角坐标系$O\text{-}xyz$



若刚体绕z轴转动的角度变量是φ,

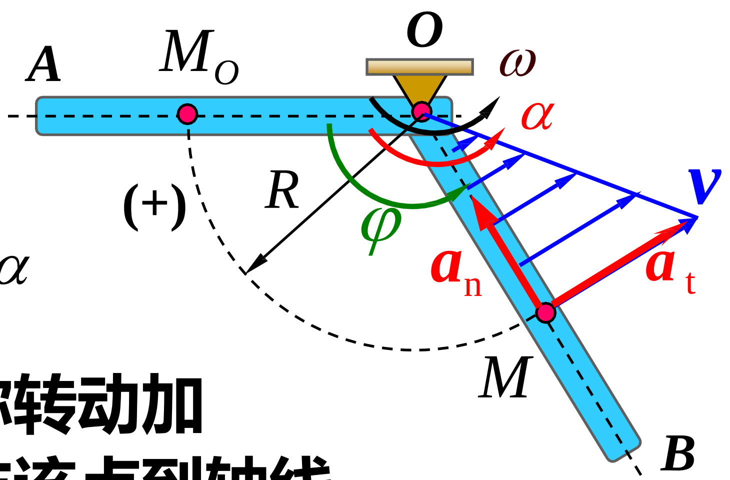
则角速度为：$\vec{\omega}=\omega\vec{k}=\dot{\varphi}\vec{k}$

刚体对原点O的角动量为：

$$\vec{L}_O=\vec{\vec{J}}_O\cdot\vec{\omega}=\begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}=\omega(J_{zz}\vec{k}-J_{xz}\vec{i}-J_{yz}\vec{j})$$

刚体对原点O的动能为：$T_O=\dfrac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L}_O=\dfrac{1}{2}\omega\vec{k}\cdot\vec{L}_O=\dfrac{1}{2}J_{zz}\omega^2$

刚体质心运动定理：$m\dfrac{d^2\vec{r}_c}{dt^2}=\vec{F}^{(e)}=\vec{F}+m\vec{g}+\vec{F}_{RA}+\vec{F}_{RB}$



切向加速度 $a_t=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d}{dt}(R\omega)=R\dfrac{d\omega}{dt}=R\alpha$

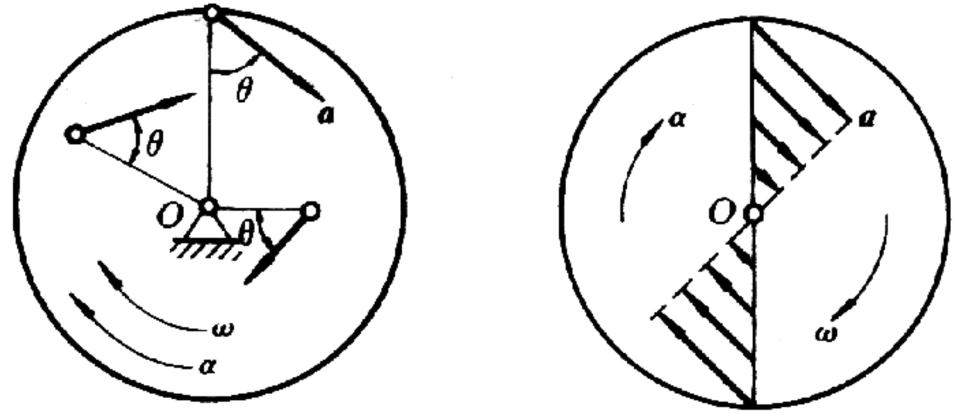
转动刚体内任一点的切向加速度(又称转动加速度)的大小，等于刚体的角加速度与该点到轴线垂直距离的乘积，它的方向由角加速度的符号决定，当α是正值时，它沿圆周的切线，指向角φ的正向； 否则相反。

法向加速度: $a_n=\dfrac{v^2}{\rho}=\dfrac{(R\omega)^2}{R}=R\omega^2$

即：转动刚体内任一点的法向加速度(又称向心加速度) 的大小，等于刚体角速度的平方与该点到轴线的垂直距 离的乘积，它的方向与速度垂直并指向轴线。

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=R\sqrt{\alpha^2+\omega^4}$$

$$\tan\theta=\frac{a_t}{a_n}=\frac{\alpha}{\omega^2}$$



(a) (b)

(1) 在每一瞬时，转动刚体内所有各点的速度和加速度的大小，分别与这些点到轴线的垂直距离成正比。

(2) 在每一瞬时，刚体内所有各点的加速度a与半径间的夹角θ都有相同的值。

§5.4 刚体的定轴转动

1. 定义

刚体上(或其扩展部分)两点保持不动，则这种运动称为刚体绕定轴转动，简称刚体的转动。

设刚体绕转轴转动的角度变量是 φ，则角速度是

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k} = \dot{\varphi}\vec{k}$$

对原点求刚体的角动量和惯量矩阵，则有

$$\vec{L} = \vec{J}\cdot\vec{\omega} = -\overrightarrow{J_{xz}}\omega\vec{i} - \overrightarrow{J_{yz}}\omega\vec{j} + \overrightarrow{J_{zz}}\omega\vec{k}$$

刚体动能为

$$T = \frac{1}{2}J\omega^2$$

§5.4 刚体的定轴转动

1. 定义

刚体定轴转动的基本方程为

质心定理

$$m\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2}=\overrightarrow{F^{(e)}}=\vec{F}+\vec{F}_A+\vec{F}_B$$

这里 F 是作用在刚体上的各种主动力之和。

角动量定理
$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}+\vec{M}_A+\vec{M}_B$$

这里M是作用在刚体上的各种主动力矩之和。

角动量方程的z分量方程为
$$J\frac{d\omega}{dt}=J\frac{d^2\varphi}{dt^2}=M_z$$

例1

已知：刚体绕定轴转动，已知转轴通过坐标原点O,角速度矢为 $\vec{\omega}=5\sin\frac{\pi t}{2}\vec{i}+5\cos\frac{t}{2}\vec{j}+5\sqrt{3}\vec{k}$ 。

求：t =1 s时，刚体上点M（0，2，3）的速度矢及加速度矢。

解:

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5\sin\frac{\pi t}{2} & 5\cos\frac{\pi t}{2} & 5\sqrt{3}\\ 0 & 2 & 3\end{vmatrix}$$

$$=-10\sqrt{3}\vec{i}-15\vec{j}+10\vec{k}$$

$$\vec{a}=\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\bar{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}$$

$$=\left(-\frac{15}{2}\pi 75\quad 3\sqrt{\quad}\right)\vec{i}\,200\quad\vec{j}\,75\quad\vec{k}$$

例2

已知：某定轴转动刚体转轴通过点M_0（2，1，3），其角速度矢$\vec{\omega}$的方向余弦为(0.6，0.48，0.64)，角速度 的大小ω=25rad/s 。

求：刚体上点M（10，7，11）的速度矢。

解：角速度矢量

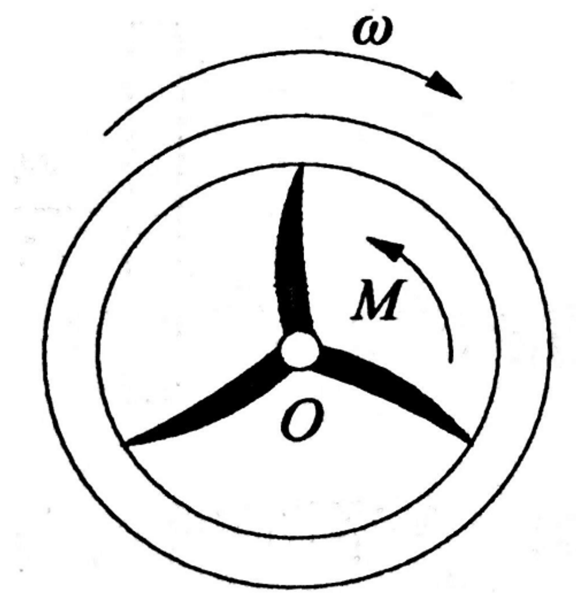
$$\vec{\omega} = \omega\vec{n} \qquad \text{其中} \quad \vec{n} = (0.6,0.48,0.64)$$

M点相对于转轴上一点M_0的矢径

$$\vec{r} = \vec{r}_M - \vec{r}_{M_0} = (10,7,11) - (2,1,3) = (8,6,8)$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega(\vec{n} \times \vec{r}) = \omega \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.6 & 0.48 & 0.64 \\ 8 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 8\vec{j} - 6\vec{k}$$

飞轮以角速度ω_0绕轴O转动，飞轮对轴O的转动惯量为J_0，当制动时其摩擦阻力矩为$M=-k\omega$，其中，k为比例系数，试求飞轮经过多少时间后角速度减少为初角速度的一半，以及在此时间内转过的转数。



§5.5 刚体的平面平行运动

1. 定义

刚体内任一直线在运动过程中始终平行于初始位置，这种运动称为平行移动，简称平移。

刚体平面运动可以分解为随基点的平移和相对基点转动的两部分。

一般取质心为基点，这两部分运动分别由质心运动定理和相对质心的动量矩定理来确定

§5.5 刚体的平面平行运动

质心定理

$$m\frac{d^2\overrightarrow{r_c}}{dt^2}=\overrightarrow{F} \quad 或 \quad \begin{cases} m\overrightarrow{\ddot{x}_c}=\overrightarrow{F_x} \\ m\overrightarrow{\ddot{y}_c}=\overrightarrow{F_y} \end{cases}$$

这里 F 是作用在刚体上的所有外力之和。

角动量定理 $\overrightarrow{L}=L_x\vec{i}+L_y\vec{j}+L_z\vec{k}$

角动量定理的z分量方程为

$$\frac{d\overrightarrow{L_z}}{dt}=\vec{J}\frac{d\omega}{dt}=\vec{J}\ddot{\varphi}=\overrightarrow{M_z}$$

§5.5 刚体的平面平行运动

机械能守恒方程

$$T+V=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}J\omega^2+V=E$$

几种常见力做的功

1、重力的功

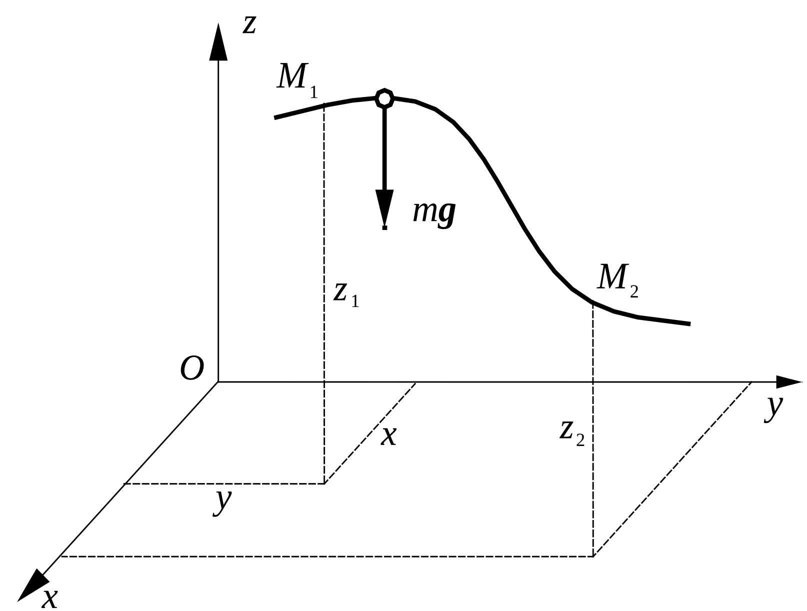
$$F_x = F_y = 0 \qquad F_y = -mg$$

$$W_{12} = \int_{z_1}^{z_2} -mg\mathrm{d}z = mg(z_1 - z_2)$$

质点系： $$\sum W_{12} = m_i g(z_{i1} - z_{i2})$$

由 $$mz_C = \sum m_i z_i$$

得 $$\sum W_{12} = mg(z_{C1} - z_{C2})$$



重力的功只与始、末位置有关，与路径无关。

2、弹性力的功

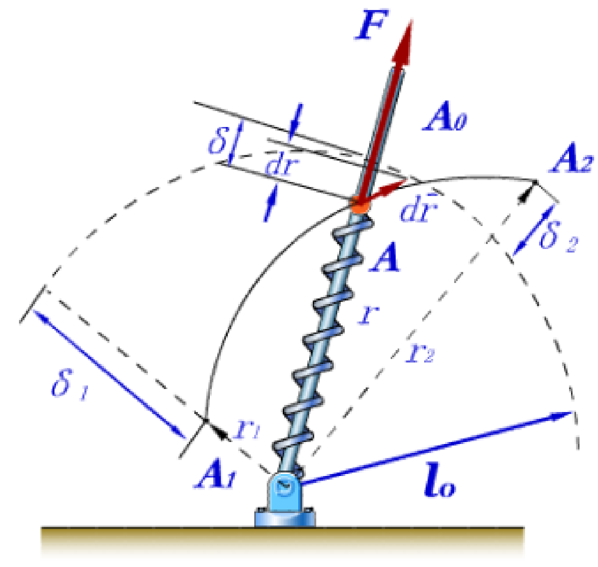
弹簧刚度系数:k (N/m)

弹性力: $\vec{F} = -k(r - l_0)\vec{e}_r$

弹性力的功:

$$W_{12} = \int_{A_1}^{A_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_{A_1}^{A_2} -k(r - l_0)\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$



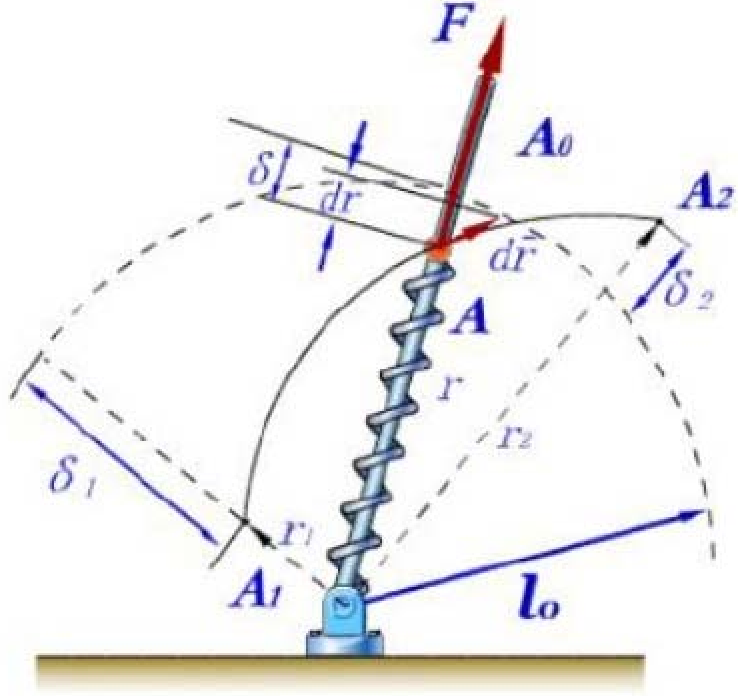
$$\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{1}{2r}\mathrm{d}(\vec{r} \cdot \vec{r}) = \frac{1}{2r}\mathrm{d}(r^2) = \mathrm{d}r$$

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} -k(r - l_0)\mathrm{d}r$$

$$W_{12} = \frac{k}{2}(\delta_1{}^2 - \delta_2{}^2)$$

式中 $\delta_1 = r_1 - l_0, \delta_2 = r_2 - l_0$

弹性力的功也与路径无关



力矩功—（做定轴转动刚体上作用力的功）

$$\delta W=\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=F_t \mathrm{d}s=F_t R\mathrm{d}\varphi$$

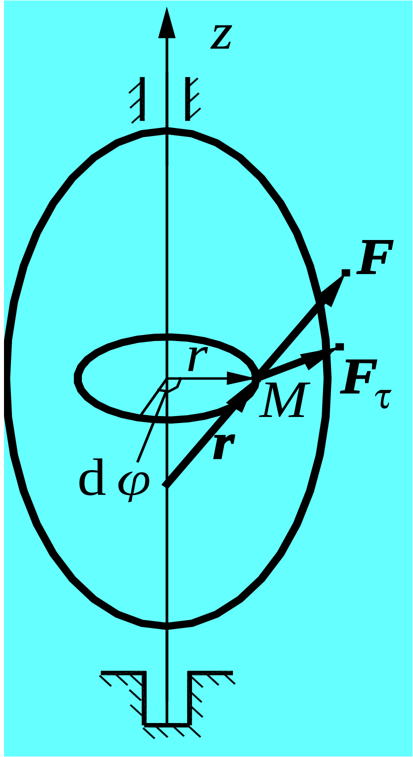
由 $M_z=F_t R$

$$\delta W=M_z \mathrm{d}\varphi$$

从角 φ_1 转动到角 φ_2 过程中力 $\vec{F}$ 的功为

$$W_{12}=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z \mathrm{d}\varphi$$

若 M_z =常量： 则 $W_{12}=M_z(\varphi_2-\varphi_1)$



平面运动刚体上力系的功

由 $\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_{iC}$ 两端乘d t, 有 $\mathrm{d}\vec{r}_i = \mathrm{d}\vec{r}_C + \mathrm{d}\vec{r}_{iC}$

作用在M_i 点的力 $\vec{F}_i$的元功为

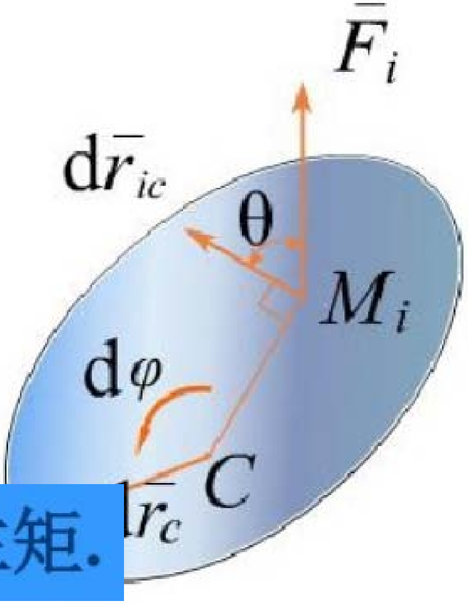
$$\delta W_i = \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}_i = \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}_C + \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{iC}$$

其中 $\vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{iC} = F_i \cos\theta \cdot MC \cdot \mathrm{d}\varphi = M_C(\vec{F}_i)\mathrm{d}\varphi$

$$\delta W = \sum \delta W_i$$

$$= \sum \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}_C + \sum M_C(\vec{F}_i)\mathrm{d}\varphi$$

$$= \vec{F}'_R \cdot \mathrm{d}\vec{r}_C + M_C \mathrm{d}\varphi$$



其中:$\vec{F}'_R$为力系主失, M_C为力系对质心的主矩.

当质心由 $C_1 \sim C_2$，转角由 $\varphi_1 \sim \varphi_2$ 时，力系的功为

$$W_{12} = \int_{C_1}^{C_2} \vec{F}_R' \cdot \mathrm{d}\vec{r}_C + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_C \mathrm{d}\varphi$$

即：平面运动刚体上力系的功，等于刚体上所受各力做功的代数和，也等于力系向质心简化所得的力和力偶作功之和

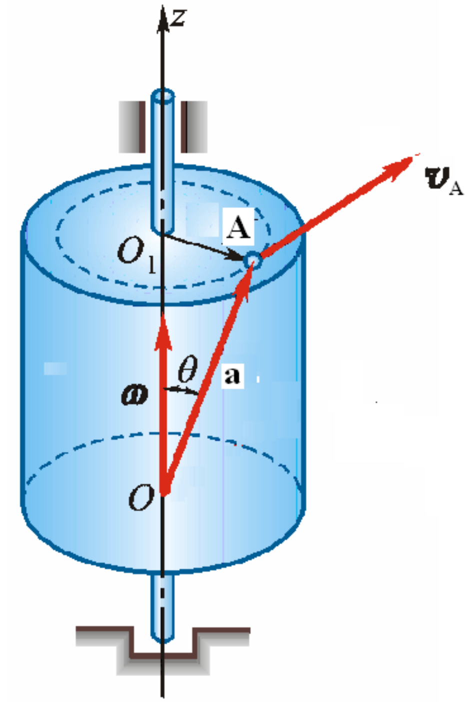
例3

一矢量绕z轴以角速度ω转动，若 $|\boldsymbol{a}|$=常量

求：$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$

解： 将矢量的端点A看成是绕z轴作定轴转动刚体上的一点

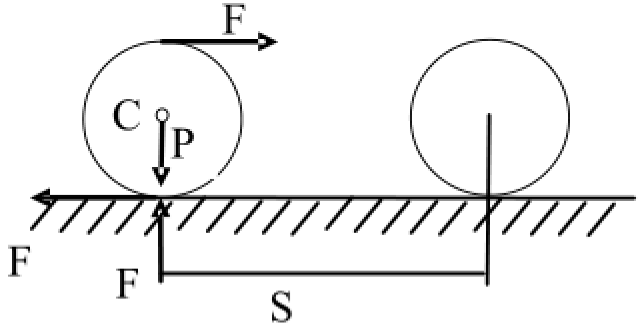
$$\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{a}$$



从而

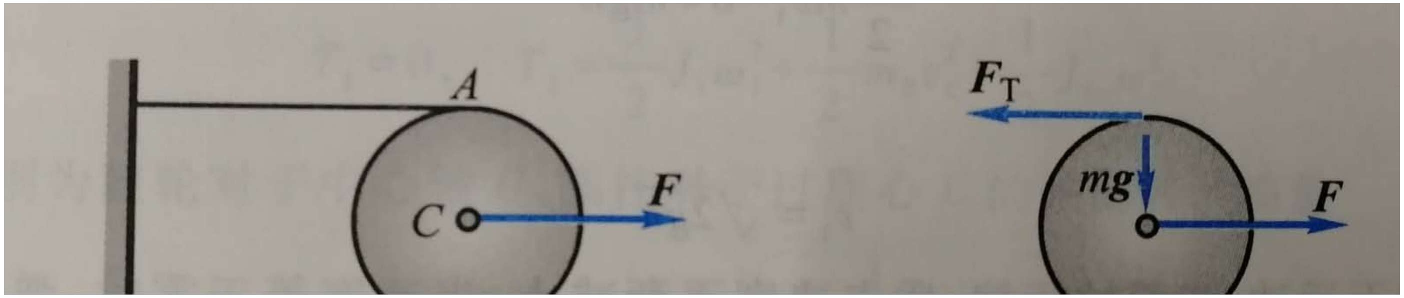
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}$$

如图均质圆盘质量为m，半径为R，其外缘缠绕很多圈无重细绳，绳头上用常力F作用使圆盘沿水平直线纯滚动。求当盘心C走过路程S时圆盘所受力系的功。



例4

均质圆盘半径为R，质量为m，外缘上缠绕无重细绳，绳头水平地固定在墙上，如下图所示。盘心作用一较大的水平力F，使盘心C向右加速运动。圆盘与水平地面间动摩擦因数为f，力F为常量，初始静止。求盘心走过路程s时，圆盘的角速度、角加速度及盘心C的加速度。



例4

解：由于绳长不可伸长，因此圆盘的运动如同沿水平绳索作纯滚动。点A为速度瞬心，有

$$v_c = \omega R \qquad T_1 = 0$$

$$T_2 = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{mR^2}{2}\cdot\omega^2 = \frac{3}{4}mv_c^2$$

圆盘受力如上图所示，由于绳拉力Ft作用在速度瞬心，故不做功，mg与FN也不作功。当盘心走过路程s时，力F做的功为Fs。动摩擦力Fd在空间的位移是s，但圆盘上受力作用点的位移不是s，而是2s，它做负功，其中Fd=mgf。因此

$$\sum W = Fs - 2mgfs = \frac{3}{4}mv_c^2$$

例4

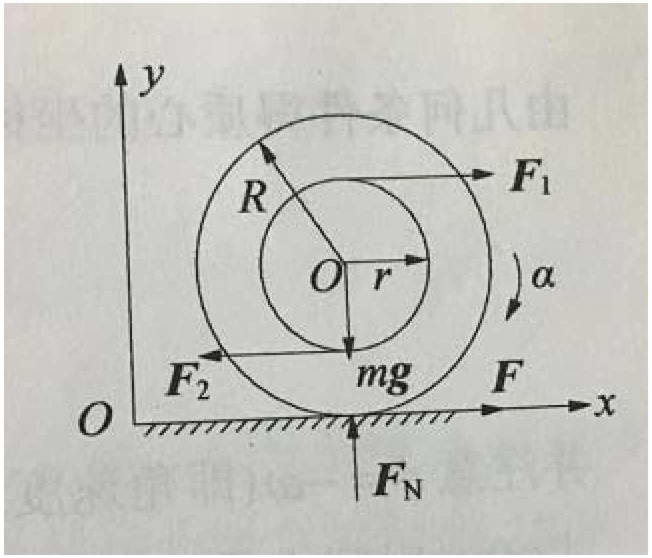
解得

$$v_c = 2\sqrt{\frac{s}{3m}(F - 2mgf)}$$

$$\omega = \frac{v_c}{R} = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{s}{3m}(F - 2mgf)}$$

$$\alpha = \frac{a_c}{R} = \frac{2}{3mR}(F - 2mgf)$$

均质的鼓轮，半径为R，质量为m，在半径为r处沿水平方向作用有力F_1和F_2，使鼓轮沿平直的轨道向右做无滑动滚动，试求轮心点O的加速度以及使鼓轮无滑动滚动时的摩擦力。



【要点分析与总结】

1 刚体的运动

（1）刚体内的任一点的速度、加速度（A 为基点）

$$\vec{v}=\vec{v}_A+\vec{\omega}\times\vec{r}'$$

$$\vec{a}=\vec{a}_A+\frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r}')}{dt}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

（2）刚体内的瞬心 S： $\vec{r}_s=\vec{r}_A+\frac{1}{\omega^2}(\vec{\omega}\times\vec{v}_A)$

〈析〉 $\vec{\omega}$ 为基点转动的矢量和， $\vec{\omega}=\vec{\omega}_1+\vec{\omega}_2+\cdots$

$$\vec{r}=\vec{r}_A+\vec{r}'$$

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$=\frac{d\vec{r}_A}{dt}+\frac{d\vec{r}'}{dt}=\vec{v}_A+\frac{d^*\vec{r}'}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{r}'=\vec{v}_A+\vec{\omega}\times\vec{r}'$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{v}_A}{dt}+\frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r}')}{dt}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

值得注意的是：有转动时 $\vec{r}'$ 与 $\vec{\omega}\times\vec{r}'$ 的微分，引入了 $\vec{\omega}\times\vec{r}'$ 与 $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$ 项。

2 刚体的动量，角动量，动能

（1）动量：$\vec{P} = m\vec{v}_c$

（2）角动量：

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \vec{\vec{J}}\,\vec{\omega} = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

式中：

$$\text{转动惯量}\begin{cases} J_{xx} = \int \left(y^2 + z^2\right) dm \\ J_{yy} = \int \left(z^2 + x^2\right) dm \\ J_{zz} = \int \left(x^2 + y^2\right) dm \end{cases}$$

$$\text{惯量积}\begin{cases} J_{xy} = \int xydm \\ J_{yz} = \int yzdm \\ J_{zx} = \int zxdm \end{cases}$$

且 $\vec{L} = \vec{r}_c \times m\vec{v}_c + \vec{L}'_c$

* $\vec{e}_l$方向（以l为轴）的转动惯量：

$$J=\vec{e}_l\,\vec{\vec{J}}\,\vec{e}_l=(\alpha,\beta,\gamma)\vec{\vec{J}}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$$

$$=J_{xx}\alpha^2+J_{yy}\beta^2+J_{zz}\gamma^2-2J_{yz}\beta\gamma-2J_{zx}\gamma\alpha-2J_{xy}\alpha\beta$$

（α,β,γ分别为$\vec{e}_l$与x,y,z轴夹角的余弦）

* 惯量主轴

惯量主轴可以是对称轴或对称面的法线

若 X 轴为惯量主轴，则含 X 的惯量积为 0，即：$J_{xy}=J_{xz}=0$

若x,y,z轴均为惯量主轴，则：$\vec{L}=J_{xx}\vec{i}+J_{yy}\vec{j}+J_{zz}\vec{k}$

〈析〉建立的坐标轴轴应尽可能的是惯量主轴，这样会降低解题繁度。

(3) 动能：$T=\frac{1}{2}m\upsilon_c^2+\sum_i\frac{1}{2}m_i\upsilon_i'^2=\frac{1}{2}m\upsilon_c^2+\frac{1}{2}\vec{\omega}\,\vec{\vec{J}}_c\,\vec{\omega}$

* 定轴转动时:　$T=\frac{1}{2}J\omega^2$

* 平面平行运动:　$T=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}J_c\omega^2$

3 刚体的动力学方程

与质点动力学方程相同。

〈析〉求角动量$\vec{L}$时，须注意:

$$\vec{L}=\dot{\vec{J}}\,\vec{\omega}$$

$$=\dot{\vec{J}}\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}$$

$$=\left(J_{xx}\omega_x-J_{xy}\omega_y-J_{xz}\omega_z\right)\vec{i}$$

$$+\left(-J_{yx}\omega_x+J_{yy}\omega_y-J_{yz}\omega_z\right)\vec{j}$$

$$+\left(-J_{zx}\omega_x-J_{zy}\omega_y+J_{zz}\omega_z\right)\vec{k}$$

4 刚体的定轴转动:

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z$$

$$\vec{L} = \dot{\vec{J}}\,\vec{\omega} = -J_{zx}\,\omega\,\vec{i} - J_{yz}\,\omega\,\vec{j} + J_{zz}\,\omega\,\vec{k}$$

$$T = \frac{1}{2} J\omega^2$$

质心定理: $m\dfrac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = \vec{F}^{(e)}$

角动量定理: $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(e)}$

〈析〉须注意外力与外力矩包括轴对物体作用

5 刚体的平面平行运动 $T = \dfrac{1}{2} m\upsilon_c^{\,2} + \dfrac{1}{2} J\omega^2$

$$m\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt} = \vec{F}$$

$$\frac{dL_z}{dt} = J\ddot{\varphi} = M_z$$