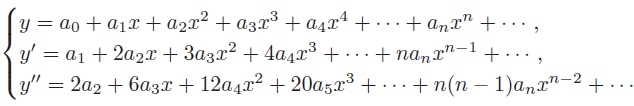
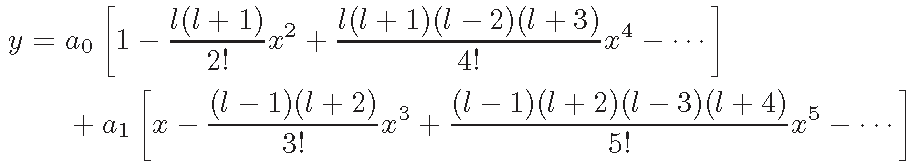
勒让德微分方程

级数解



勒让德多项



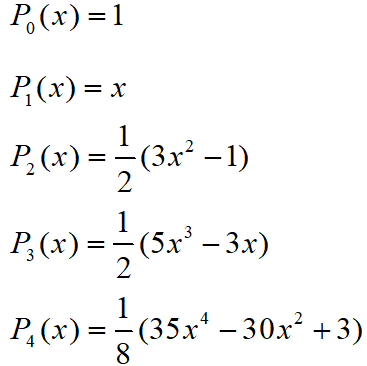
𝑙=0时： 级数发散，

时： 级数在发散，级数

对于任意整数，一个级数终止有一个多项式解，另一个级数在处发散

勒让德方程在时发散，可以证明在上是无界的。在实际问题中，又常常要求勒让德方程在闭区间上有界。考虑将无穷级数和断，使其变成多项

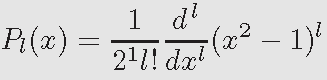
式0～4阶Legendre多项式为



勒让德方程的本征值问题

方程中的参数称为本征值，方程的解y(x)称为本征函数．求解勒让德方程的本征值问题可以归结为求解本征值.

罗德里格公式



勒让德多项式的微分表示。从罗德里格公式可得出勒让德公式：

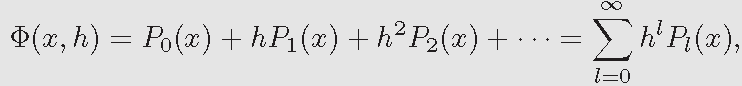
练习：

从罗德里格公式求

勒让德多项式的生成函数，也称母函数：

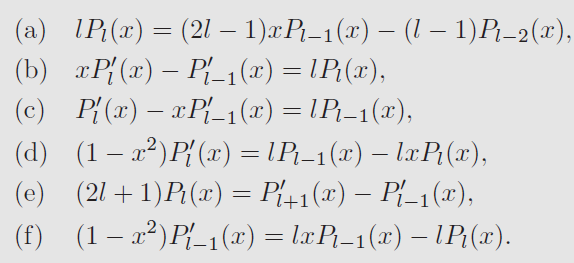


可证明



其中函数为勒让德多项式

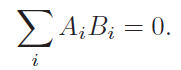
生成函数存在递推关系



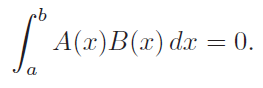
正交函数的完备集

正交函数

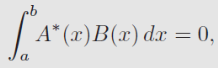
两个向量A和B正交，(垂直)如果它们的标量积为零，



两个函数A(x)和B(x)正交：

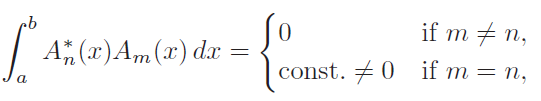


如果函数A(x)和B(x)是复数，正交定义为



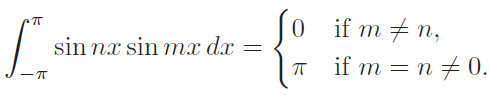
A\*(x)是A(x)复共轭

如果有一组函数其中n = 1 2 3···

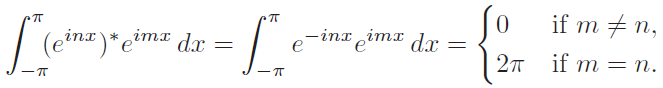


函数称为正交函数集

傅里叶级数是交函数集



复变函数集是正交函数集



完备集

三维欧几里得空间

三维欧氏空间中e1,e2,e3构成一个完备系，是指不存在任何矢量与e1,e2,e3都正交；三维空间的任一矢量A均可用 {ek} (k=1,2,3)展开为

二维空间中el与e2构一个完备系，是指在二维空间中不存在任何矢量与 el , e2都正交．因而二维空间的任一矢量B均可用{ek} (k=1,2)展开为

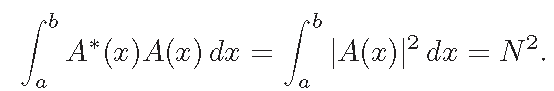
B

三角函数系 也构成一个完备系．

可以看作函数空间的“基矢”，满足一定条件的函数f(x)可以用这个函数系作为基来展开，函数系完备性．

标准正交函数

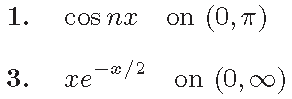
自身的标量积，A，得到向量长度(或范数)的平方。如果用A除以它的长度，得到一个单位向量。函数范数



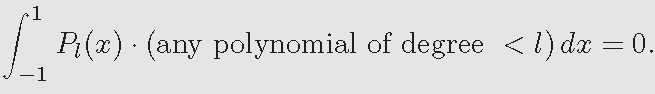
练习：

证明：如果

在给定的区间内求函数范数

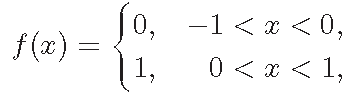


勒让德多项式是在(−1,1)上正交函数组。可把任意n阶多项式写成n阶勒让德多项式的线性组合

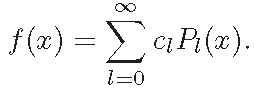


勒让德多项式在(1,1)是完备正交集，可以展开勒让德级数中的函数，就像展开傅里叶级数中的函数一样

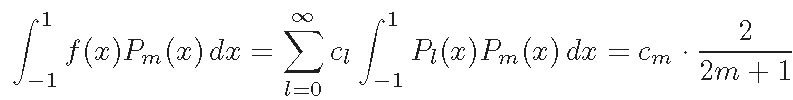
练习：展开



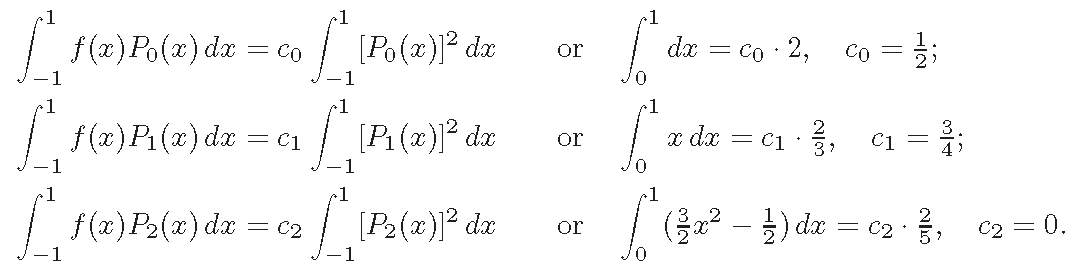
解：设



两边乘Pm(x)，（-1，1）积分



勒让德多项式是正交的，积分除外均为0





若函数 *f*(*x*)在[-1,1]上有连续的一阶导数和分段连续的二阶导数，则*f*(*x*)在[-1,1]上可以展开为绝对且一致收敛的级数



称为广义傅里叶级数。

练习：展开为广义傅里叶级数

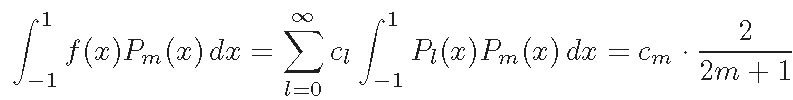
解：

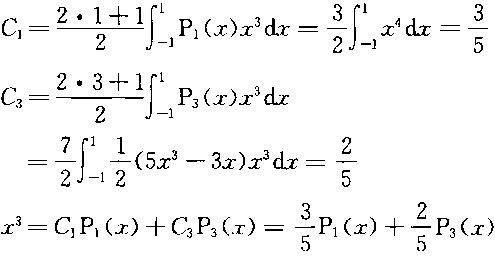
+

比较同次幂即得到

练习：按勒让德多项式形式展开

解 由于*Pl*(*x*)是*l* 次多项式， *f*(*x*)*=x3*是奇函数，最高次幂为三次，故 *f*(*x*)可按*P1*(*x*)及*P3*(*x*)展开为广义傅里叶级数。





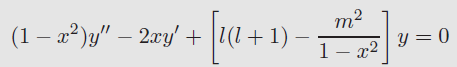
解:由于P是l次多项式，故f(x)至多用表示即可，去除奇次幂

=

解：令

设

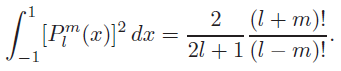
关联勒让德方程





阶l次关联勒让德函数

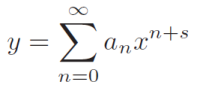
关联勒让德函数也具正交性



二阶线性常微分方程

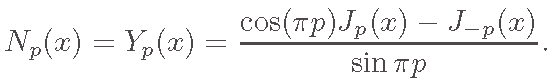
称为p阶Bessel方程。

级数解



如果p不是整数，和线性无关。其线性组合是方程的通解。如果p是整数， 和线性相关。

当p不是整数，线性组合诺伊曼Neumann函数或韦伯Weber函数,用Np或Yp表示:

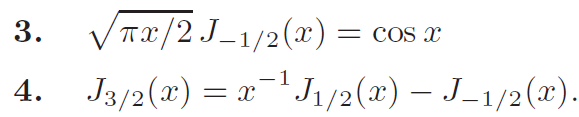


是的通解

对于整数p，此式、不定式0/0。然而，对于任何，当p趋于整数值时，都有极限，为第二个解。上式适合任何p。Np或Yp称为第二类贝塞尔函数。则贝塞尔方程的通解可写成

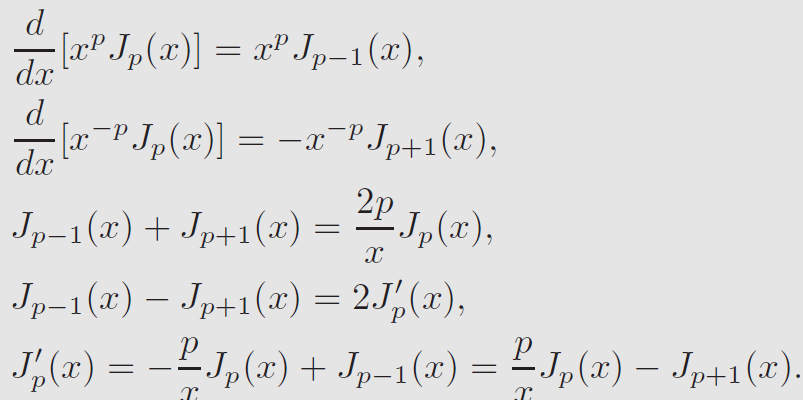
练习：

证明：

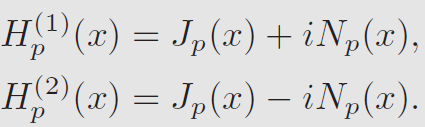


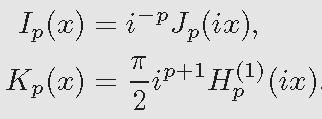
贝塞尔函数及其导数之间存在递推关系：



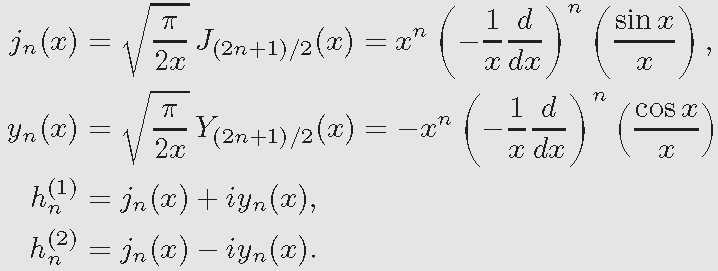
汉克尔(Hankel)函数，第三类贝塞尔函数



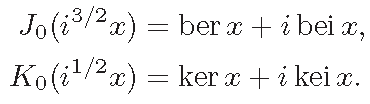
修正或双曲贝塞尔函数



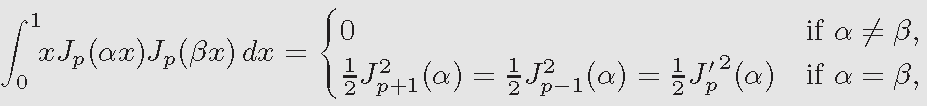
球贝塞尔函数



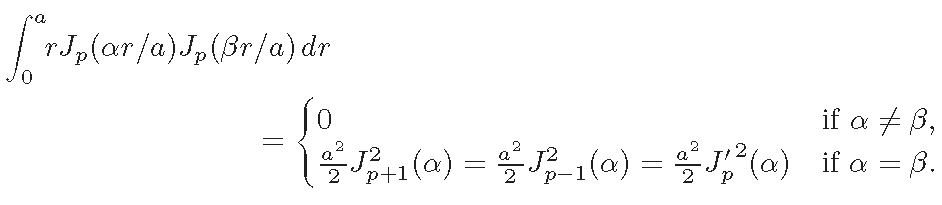
开尔文函数



贝塞尔函数的正交性



对区间，设



试证



证明：

同理

物理规律用偏微分方程表达出来，数学物理方程

物理规律反映的是某个物理量在邻近地点和邻近时刻之间的联系

数学物理方程的导出步骤如下:确定研究哪一个物理量u.从所研究的系统中划出一个小部分，根据物理规律分析邻近部分和这个小部分的相互作用(抓住主要的作用，略去不那么重要的因素)，这种相互作用在一个短时间段里怎样影响物理量u.把这种影响用算式表达出来，经简化整理就是数学物理方程.

某个物理量(电场强度、电势、磁感应强度、声压、杂质浓度)在空间的某个区域中的分布情况，以及它怎样随着时间而变化。解决这些问题，须掌握所研究的物理量在空间中的分布规律和在时间中的变化规律。须考虑到研究对象处在怎样的特定“环境”中，边界所处的物理状况，即边界条件。须考虑到研究对象的特定“历史”，即它在早先某个所谓“初始”时刻的状态，即初始条件。边界条件和初始条件反映了具体问题的特定环境和历史。在数学上，边界条件和初始条件合称为定解条件.

常见的一些数学物理方程.分别属于三种类型，即波动方程、 输运方程、稳定场方程。这大致对应于数学上的分类，即双曲型、抛物型和椭圆型偏微分方程.

拉普拉斯方程

泊松方程

函数u表示包含质量、电荷或热或流体源区域，适用拉普拉斯方程的各种情况的物理量。

函数叫做源密度，在电学与电荷体密度成正比。

扩散或热传导方程

u是无热源区域非稳态温度，温度随时间变化。或是物质浓度扩散，如化学物质扩散，或中子粒子扩散。常数，常称扩散系数

波动方程

函数u可表示振动弦或膜的位移。在声学上振动介质，如气体、液体或固体的位移。在电力中，u是电路电流或电势。在电磁波中，如光、无线电波中，u是电场强度E或磁感应强度的组成部分。v是波速，如对真空中的光，光速c。声波，是声音在介质中传播的速度。

亥姆霍兹方程

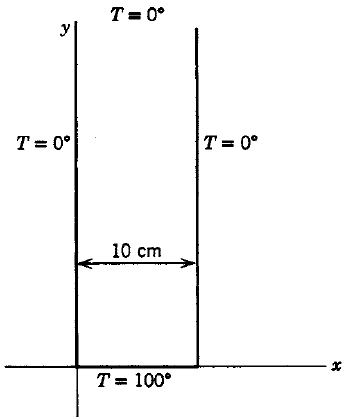
函数F表示扩散方程或波动方程解的空间部分，即与时间无关的部分。

练习：

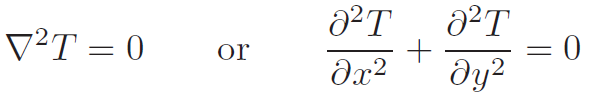
证明：描述正弦波的方程，满足波动方程。

练习：长方形金属板有两个长边，远端为0，底部为100（图2.1）。板的宽度是10厘米。在板内求稳态温度分布。

解：为简化问题，首先假设板长度比宽度长得多，在y方向上延伸近似于无穷远处。称为半无限。



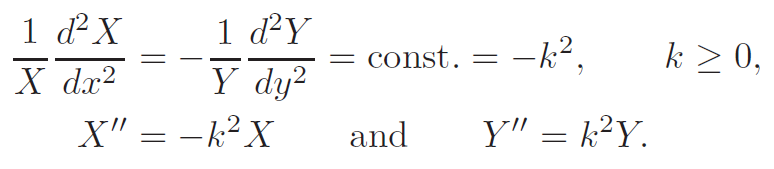
在没有热源的平板内部，温度T满足拉普拉斯方程

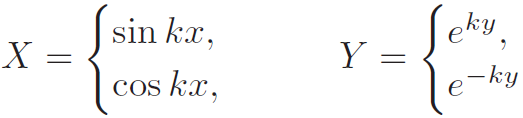


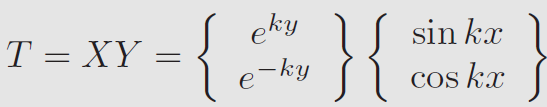
代入上式

除以XY

分离变量



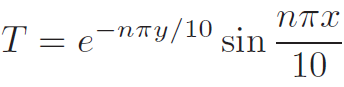




因，舍去。因x=0时T=0，舍去含有的解。剩下

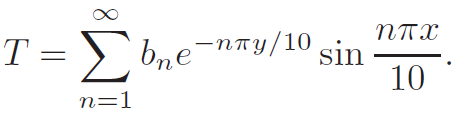
当x=10时，T=0

k=nΠ/10 n=1,2,……



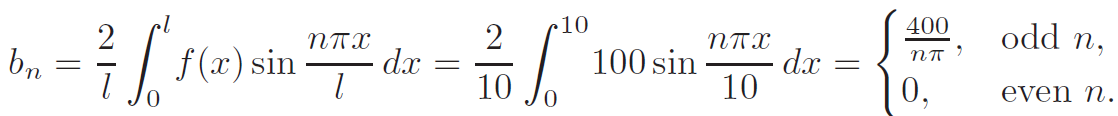
在T = 0的三条边满足给定的边界条件

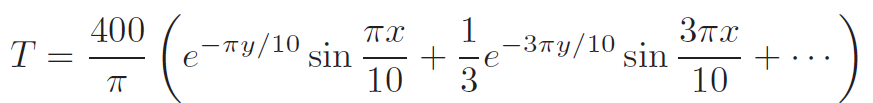
在当y=0时，有T=100。对于任何n，上式线性组合。



y=0时，满足T=100的线性组合。

傅里叶级数。系数

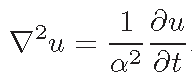




练习：考虑板高30厘米，顶端，其他条件相同的情况。

假设一个解为独立变量的函数的乘积。把偏微分方程分解成几个常微分方程。常微分方程解可能是指数函数，三角函数，幂函数（正或负），贝塞尔函数，勒让德多项式等等，这些解的任何线性组合，任何分离常数的值，都是偏微分方程的解。问题是确定分离常数的值，及满足给定边界或初始条件的线性组合。

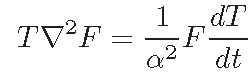
扩散或热流方程



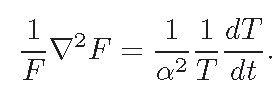
u是温度，是热量流动的物质的常数特性。首先将（3.1）部分分离到一个空间方程和一个时间方程。空间方程分离成x和y的常微分方程，或者x，y，z，或r，等等。设解为：

*u* = *F*(*x, y, z*)*T* (*t*)*.*

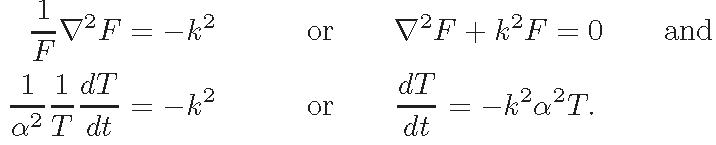
*代入*



两边除以TF



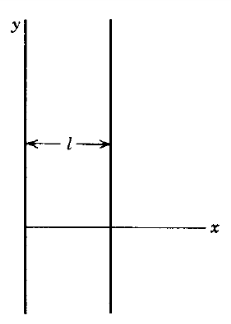
左边是一个只有空间变量x，y，z的函数，右边是一个只有时间的函数。因此两边都是相同的常数



时间方程积分，得

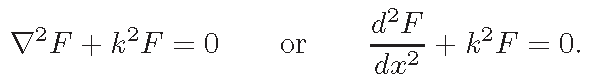


例：平板表面足够大，可忽略其他影响，热量只在x方向流动。假设平板的初始状态是稳定的温度分布，x=0为，x=L。从t=0开始，在x=L（以及x=0）保持。求任何时间点任何x的温度

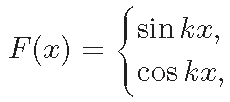


解：初始稳态温度满足拉普拉斯方程，一维情况下是。这个方程的解是，其中a和b是常数。因，x=0 ,，及x=L,u0=100，

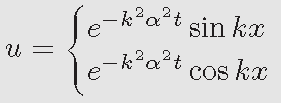
从t=0开始，u满足热流方程



解为：



*u* = *F*(*x, y, z*)*T* (*t*)*.的解为*

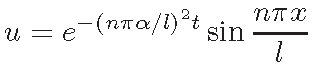


因为在x=0，u=0，消去cos kx

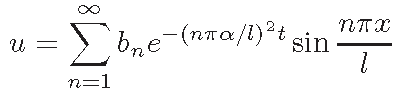
在，则

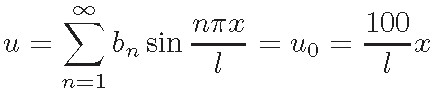
sinkl=0

基函数

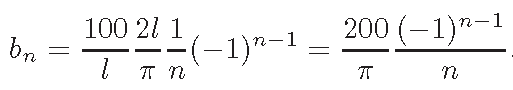


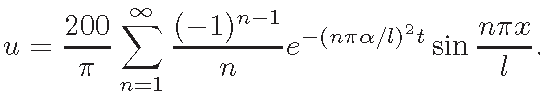
级数解为





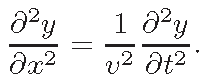
在(0,L)求(100/L)x的傅里叶正弦级数



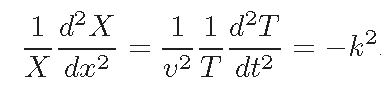


波动方程

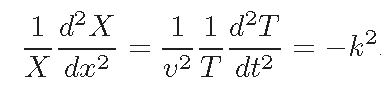
弦拉紧固定在x = 0到x = l两端。弦振动时,离平衡位置的垂直位移y，取决于t及x轴方向的x。假y很小,导数∂y /∂x在任何时候在任何点很小，弦不远离平衡位置。弦长不限。在这些假设下，位移y(x, t)满足一维波动方程

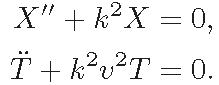


常数，取决于弦的张力和线性密度，是弦上一点扰动沿弦方向传播的速度。为分离变量，上式代入

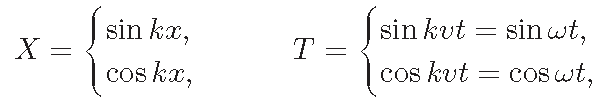


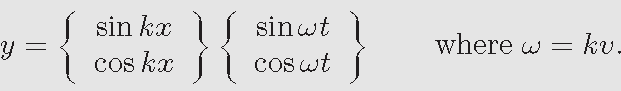
常数，取决于弦的张力和线性密度，是弦上一点扰动沿弦方向传播的速度。为分离变量，代入



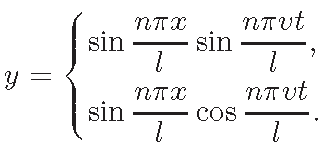


解为





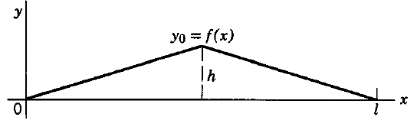
弦固定在x = 0，x = l两端,y=0，意味着上式(4.5)只有sinkx因子。选择k，以便sinkl = 0，即k = nπ/ l，解是



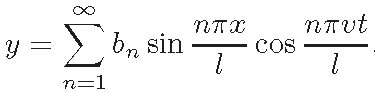
给定问题的特定解组合取决于初始条件。

计算一 拔弦

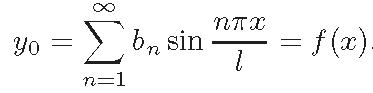
如假设弦开始振动是通过拔弦h，t=0时弦的状态如图*.t=0时，∂y/∂t=0。*



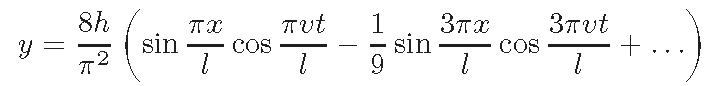
因t = 0时，时间导数不为零，消去sin (nπvt /l)项。基函数，解的形式为



，系数确定

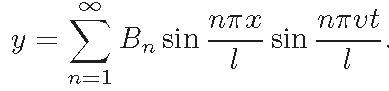


求出f(x)的傅里叶正弦级数系数并代入

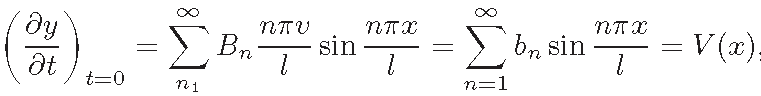


计算二 击打。

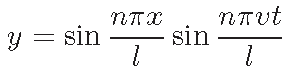
初始条件:在t=0,*y* = 0 及*∂y/∂t=0。*消去(4.6)中的项,因在t = 0时， *∂y/∂t*不为零。基函数是



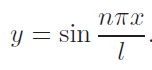
系数由以下方程确定



初速度V (x)须用傅里叶正弦级数展开



对于任何t ，的最大值1,弦的形状



考虑弦上的点x，是确定数，比如A，这个点在t时刻位移是



计算三

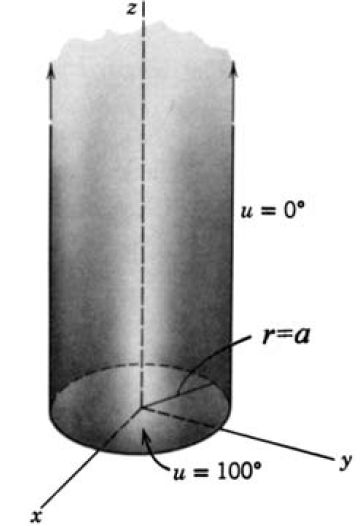
如果弦固定在x = l，要使*coskl= 0，*则。当x=0端自由，x=l端固定，初始弦速度为0，基函数是



圆柱体稳态温度

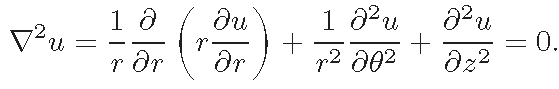
计算：

在一个半径为的半无限固体圆柱中，基座温度保持100◦，曲面侧温度0◦，求稳态温度分布。



与半无限平板的温度分布问题相近。但不便于在直角坐标系中求解。边界条件是 ,而不是x或y的值。变量是圆柱坐标。圆柱体内温度满足拉普拉斯方程，因为没有热源

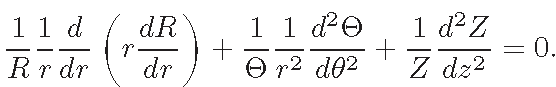
在柱坐标下的拉普拉斯方程是



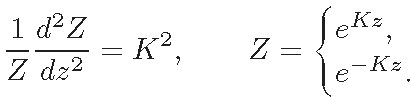
为分离变量，假设解的形式为



代入并除以

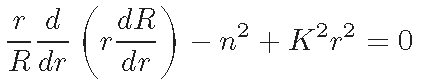


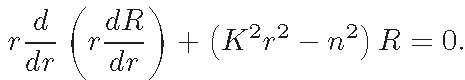
最后一项是只有z的函数，而另外两项不包含z，所以最后一项是常数，前两项的和是减去相同的常数。前两项都不是常数因为都包含r。第三项是一个只有一个变量Z的函数，Z没有出现在方程的其他地方。因此



当用极坐标来定位点时，可以选择角度，或者,m为任意整数。不管m的值是多少，都有一个点和一个温度。这个点的温度的数学方程必须在相等，温度必须是周期为的周期函数。因负分离常数，Θ解是正弦和余弦函数，因此常数n是整数，以得到周期。n = 0 时的解是θ和常数。θ不是周期函数,当n = 0时只能用常数解，且符合

r方程是





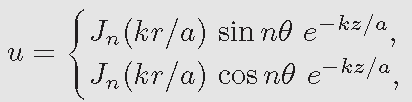
这是贝塞尔方程，有解。由于圆柱体的底部包含原点，所以只能用，而不是解，因为在原点处变得无限大。因此有



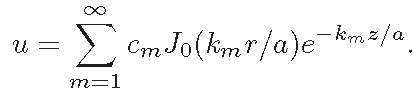
圆柱体曲面温度为0，可利用此条件求K的可能值。当对所有*θ*和z，r=a时，或当r=a,R(r)=0时，u=0。可知，也就是说，Ka的可能值是的零点。如果定义，或者，那么



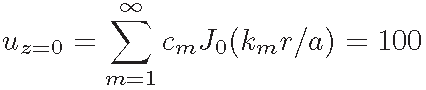
u的解是



对于该问题，圆柱体基座保持恒定温度。如果我们把圆柱旋转到任何角度，边界条件不会改变。因此，解不依赖于角度。这意味着在（5.10）中使用。k的可能值是的零点，称因此可得基函数，以基函数为项的解为：



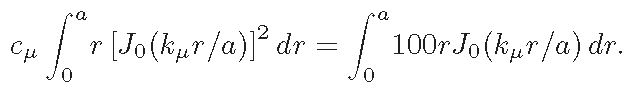
当z=0，u=100，即



在贝塞尔函数级数中展开100，而不是正弦或余弦函数的级数。我们已经证明了对权函数r，函数正交于（0，a）。

同样的方法在傅里叶正弦或余弦级数中求出（5.12）系数。

乘以从的积分，因为正交性，除了，级数所有项都消去，



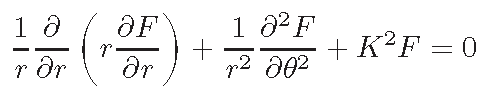
圆膜振动

在圆膜平面建立（x，y）坐标，以圆膜中心为原点。设z(x，y，t)是圆膜离（x，y）面的位移。z满足波动方程

分离成一个空间方程（亥姆霍兹）和一个时间方程，得

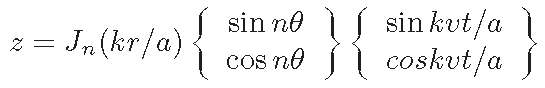


因为膜是圆形，在极坐标下表示，F方程为





为求K的可能值，由圆膜固定在r =a的刚性范围的边界条件，对所有，必有r=a时，z=0。因此，的可能值是的零点。设，，那么每个的可能值k是，的零点。解z为



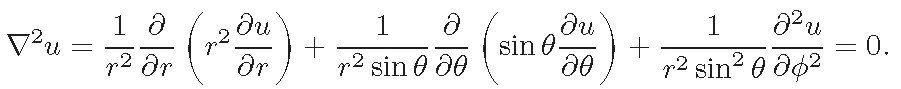
弦的频率是;所有频率都是基频的整数倍。对于圆形膜，频率是

k 的可能值是贝塞尔函数的零点。的每个值都给出频率 ， 得到双特性频和相应的简正振动模式。所有不是基频的整数倍，而弦振动是整数倍。这就是鼓的音乐性不如小提琴的原因。

球体稳态温度

求半径a的球体内稳态温度，上半部球面保持，下半部分球面保持。

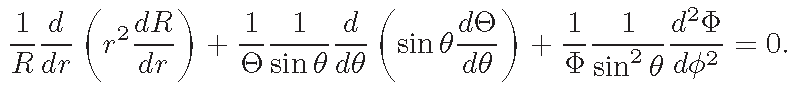
解：在球体内部温度u满足拉普拉斯方程。球坐标拉普拉斯方程



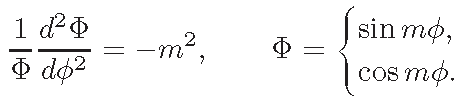
按一般过程方程分离。设



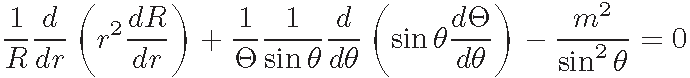
代入方程，两边乘以



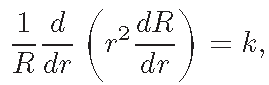
两边乘以，最后一项就成了只有的函数，而其他项不包含，可得方程及其解：

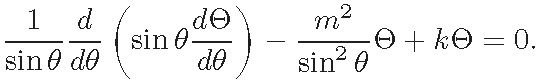


分离常数须是负的，为的周期函数，m须为整数



第一项是r的函数，后两项是的函数，可得两个方程



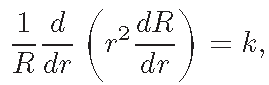


的关联勒让德函数

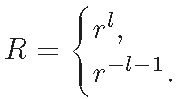
须是整数，以使勒让德方程的解有限，这时，即*θ= 0*或者*π。*对于关联勒让德函数的方程也一样。 代替k

上式的解是关联勒让德函数为：



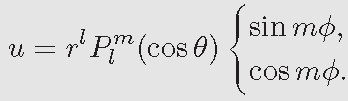


设*k* = *l*(*l* +1)，解为

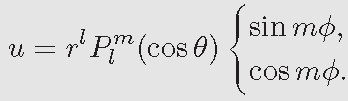


由于只求球体内部温度，舍去的解，因为在原点处变得无限大。如果讨论水流量或静电势的相关问题，保留的解，舍去，因为在无穷远处变得无穷大。

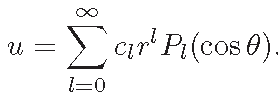
解的基函数



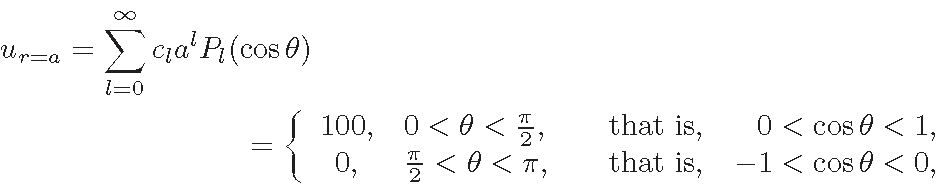
函数 和 称为球函数，通常表示为



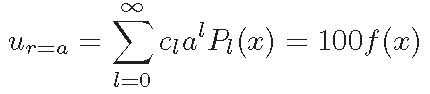
如果在时，表面温度是的函数，得到对l和m双求和级数。由于表面温度给定，高半球100，低半球0，温度独立于，在（7.10）中，须m=0，。解减少到因此 ，解为以下基函数的级数



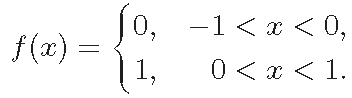
当时，用给定温度确定系数，即



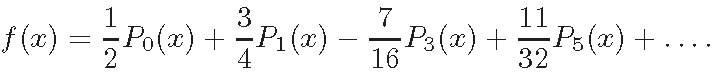
设*x* = cos*θ，*上式成为



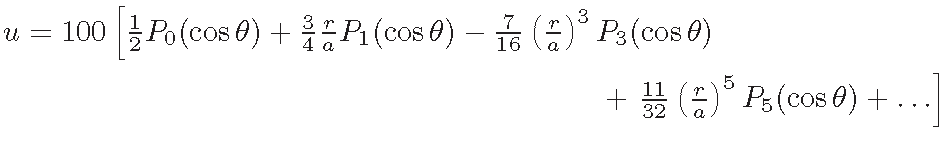
其中



勒让德多项式展开为：



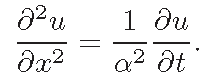
为f(x)系数乘以



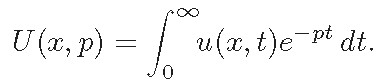
常微分方程通过拉普拉斯变换转换成代数方程。对偏微分方程的拉普拉斯变换，将自变量的数目减少1，从而将双变量偏微分方程转化为常微分方程。

例1 的半无限平板，绝热边，初始温度u=0。t=0时，x=0边升到u=100，并保持。求平板的x、t温度分布函数。

解：微分方程满足



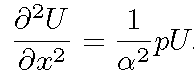
对t进行拉普拉斯变换，变量x只是这个过程中的一个参数。U为u的拉普拉斯变换，即



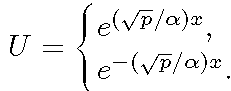


因t=0时u=0

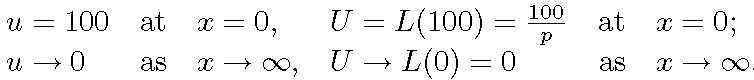




如果p当常数，x作为变量，这是常微分方程，U为x的函数，它的解是

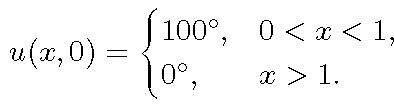


为找到这些解的组合以满足问题，需要对u的边界条件进行拉普拉斯变换



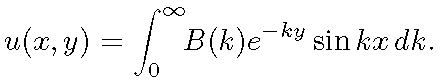
傅立叶变换解法

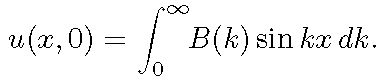
例2，第一象限无限的金属板（图9.1），y轴边缘温度保持0，沿x轴边缘温度保持



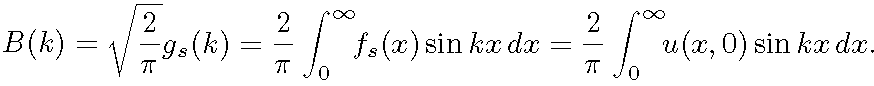
求以x、y为自变量的函数的稳态温度分布

假设，只使用项。因为当x=0时u=0，只使用正弦解。我们想要的基函数是。但对k的确定，相比第2节，没有特别要求。求出包含k的积分解的形式。相对应级数里面的，须确定函数。k=0，当须趋向于0

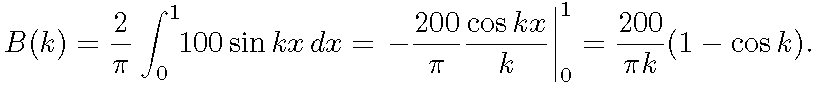


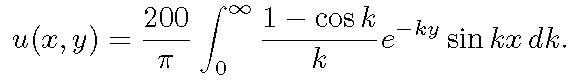


用α表示k，用表示u(x,0)，用。因此，x轴上的给定温度是期望系数函数的傅里叶正弦变换，所以B(k)可以视为逆变换



已知*u*(*x,0*)





的拉普拉斯变换，x是参数，y对应于p，k对应于t，

