

2020-2021 学年秋冬学期组合优化回忆卷

整理人：CC98 用户 magisco22

1. (20 分) 设图 $G = (V, E)$, 图的最小顶点着色问题是将每个顶点染上一种颜色, 使得有边关联的顶点不着同一种颜色, 且所用的颜色最少, 写出该问题的数学规划。

2. (25 分) 某滑雪场提供 m 套滑雪服, 尺寸为 l_1, \dots, l_m , 现有 $n(n \leq m)$ 位顾客来租赁滑雪服, 他们的身高分别为 h_1, \dots, h_n , 现求一种合适的分配策略, 使顾客分配到的滑雪服和他们身高之差的绝对值之和最小。

(1) 证明: 存在一个最优解, 使得身高最高的顾客分配到的滑雪服是所有被分配的滑雪服中尺寸最大的。

(2) 写出求解该问题的动态规划, 并估计其时间复杂度。

3. (30 分) 某车从 A 地到 B 地需行驶 t 天, 要求其在 $T(T \geq t)$ 天内到达, 每天天气为晴天或雨天, 晴天行驶消耗资源 a , 雨天行驶消耗资源 b , $b > 2a$, 每天该车辆可以选择休整或行驶, 休整消耗资源为该天行驶的 $1/2$, 每天早上车队可以知道今天的天气, 从而选择该天休整或者行驶。现希望从 A 地到 B 地所消耗资源最少。

(1) 令 $T = 2, t = 1$, 求该问题的下界。

(2) 若某算法策略为无论天气如何, 该天都选择行驶, 求该算法的竞争比。

4. (25+20 分) 设有书店 s_1, \dots, s_m 共 m 家, 书 b_1, \dots, b_n 共 n 种, $e_{ij} = 1 \Leftrightarrow$ 第 i 家书店买第 j 种书, w_{ij} 为第 i 家书店中第 j 种书的售价 (若 $e_{ij} = 0$, 则令 $w_{ij} = \infty$), 令 $p_j = \min\{w_{ij} | e_{ij} = 1\}$, 各书店都推出满减活动, 在书店 s_i 购买达到 t_i 可优惠 d_i , 现要求给出一种购书方案, 使得购书总金额最小。

(1) 给出反例, 说明即使每种书都选择售价最低的书店购买, 也不一定得到最优解。

(2) 证明: 当 $m = 2$ 时, 该问题仍然为 \mathcal{NP} -难问题。

下面两小问中, 假设 $\sum_{j=1}^n e_{ij} \leq 2, \forall i$, 通过该问题构造图 $G = (V, E)$ 如下:

$V = \{s_1, \dots, s_m, b_1, \dots, b_n\}$, s_i, b_j 之间有边相连, 若 $e_{ij} = 1, w_{ij} \geq t_i$, 该边权为 $p_j - (w_{ij} - d_i)$ 。 b_k, b_j 之间有边相连, 若 $\exists s_i, e_{ik} = e_{ij} = 1$ 且 $w_{ik} + w_{ij} \geq t_i$, 该边权为

$$\max_i \{p_k + p_j - (w_{ik} + w_{ij}) + d_i \mid e_{ik} = e_{ij} = 1, w_{ik} + w_{ij} \geq t_i\}$$

(3) 对于 $m = n = 5, t_i = 10, d_i = 3, \forall i$ 的情况, 画出对应图。(数据记不得了, 反正这题无脑, 但是比较耗时间)

(4)(附加题, 20 分) 证明: 图 $G = (V, E)$ 中存在权之和大于等于 W 的匹配, 当且仅当能给出一种购书方案, 使得购书费用不超过 $\sum_{j=1}^n p_j - W$, 并给出该问题的多项式时间算法。