2022-2023秋冬学期组合优化回忆卷

整理人：CC98用户Malygos

一、

消防员问题：给定图 $G=(V,E)$，第 0 时段开始时某点 v_0 处发生火灾。此后每一个时段开始时，火灾会蔓延到已起火点的所有相邻点处。每个时段内消防员可以选择图上一点进行防火处理，经过防火处理的点不会被蔓延。现要求一防火方案，使得充分长时间后未过火的点数量最多。

（1）考虑如下性质：每一时段进行防火的点至少与一个当前时段开始时已起火的点相邻。甲同学认为最优方案必定具有该性质。乙同学认为具有该性质的方案的最坏情况比可能很差。试评价两位同学的说法。

（2）设

$$b_{vt}=\begin{cases}1 & t\text{ 时段开始时 }v\text{ 点已起火}\\ 0 & \text{elsewise}\end{cases}$$

$$d_{vt}=\begin{cases}1 & t\text{ 时段开始时 }v\text{ 点已防火}\\ 0 & \text{elsewise}\end{cases}$$

写出求解该问题的数学规划。

二、

3-server问题：实轴上在 $-1,0,1$ 处有三台服务器。现有三个需求需要满足，每台服务器只能满足一个需求。需求依次出现在实轴上任一点，需要派遣一台服务器。只有当满足当前需求后，下一需求才会出现。现要求给出算法，使得三次需求和对应的服务器之间的距离的最大值尽可能小。

（1）考虑如下算法：每次派遣所剩的服务器中离当前需求最近的服务器。试给出该算法的竞争比下界。

（2）试给出该问题的下界。

三、

砍竹子：一个竹林有 n 棵竹子。第 0 天开始时所有竹子高度均为 0，每天第 i 棵竹子生长固定的 h_i 高度。每天结束时工人选择一棵竹子砍掉，将其高度变为 0。现求一个方案，使得所有竹子高度的最大值尽可能小。记 $H=\sum_{i=1}^{n}h_i$。

（1）求证：最优解不小于 H。

（2）考虑实例 $h_i=\frac{1}{2^{k_i}}H$，其中 k_i 均为正整数。给出该实例的最优解和方案。

（3）（附加题）对于一般的实例，试给出最坏情况比不大于 2 的近似算法。

四、

找矿藏：n 处地点中有一处矿藏，已知矿藏在第 j 点的概率为 π_j，其中 $\sum_{j=1}^{n}\pi_j=1$。现有 $m\geq\frac{n}{2}$ 支考察队，每个考察队每天可探查一处地点，探查地点 j 的费用为 c_j。若考察队在第一天就找到矿藏，则第二天无需探查。现求一个探查方案，要求两天内找到矿藏，并使得找到时总成本尽可能小。

（1）用 $v(i,b,s)$ 表示当总成本恰为 b 时，派遣 s 支考察队在前 i 个地点中任意地点探查后，未找到矿藏的概率的最小值。写出 $v(i,b,s)$ 的递推式。

（2）写出求解该问题的动态规划的算法。

（3）（附加题）证明该问题是NP难的。

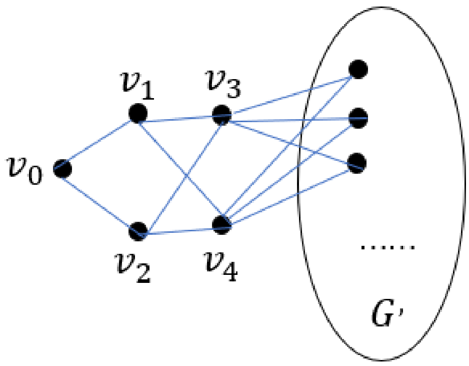
参考答案

一、

（1）

甲同学的说法错误，乙同学的说法正确。

考虑如下实例：



其中 G' 是包含 M 个点的子图，内部无边，且每点与 v_3, v_4 相连。

易见最优解是在第 0 时段和第 1 时段分别防火 v_3 和 v_4，此时共有 $M+2$ 个点不会起火。

若依据相邻点性质，第 0 时段防火 v_1 和 v_2 中任一点，则无法阻止火势蔓延到 G' 中，至多有 3 个点不会起火。

故具有该性质的算法的在该实例下的比至少为 $\frac{M+2}{3}$，无界。

（2）

设 $|V|=n$。

$$\max \sum_{i=0}^{n-1} d(v_i, n)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} b(v_0,0)=1,\ b(v_1,0)=\cdots=b(v_{n-1},0)=0 \\ d(v_i,0)=0, \forall i \end{cases}$$

$$\begin{cases} b(v_i,t)+d(v_i,t) \geq b(v_j,t-1),\ \text{若}v_j\text{与}v_i\text{相邻} \\ b(v_i,t) \leq \sum_{v_j\text{与}v_i\text{相邻}} b(v_j,t-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b(v_i,t)+d(v_i,t) \leq 1 \\ \sum_{i=0}^{n-1} d(v_i,t) = \min\{t, n-\sum_{i=0}^{n-1} b(v_i,t)\} \end{cases}$$

$$b(v_i,t), d(v_i,t) \in \{0,1\}$$

$$i,j=0,1,\ldots,n-1$$

$$t=0,1,\ldots,n$$

注：上式中第一个大括号内给出初始状态，第二个大括号内给出传火规则，第三个大括号内给出防火规则。

二、

（1）

该算法竞争比为 5。

考虑实例过程 $(-\frac{1}{2},-1)\to(\frac{1}{2},0)\to(-\frac{3}{2},1)$，其中每一个括号内前一个数代表需求位置，后一个数代表响应它的服务器位置。此时算法解 $C^A=\frac{5}{2}$，而离线最优解为由 $(-\frac{3}{2},-1),(-\frac{1}{2},0),(\frac{1}{2},1)$ 给出的 $C^*=\frac{1}{2}$。

下证该算法的竞争比不会超过 5。注意对于给定需求，它在算法和离线解中的距离之差最大 2。因此，若存在实例使该算法的竞争比大于 5，则离线最优解中所有需求与对应服务器的距离均小于 $\frac{1}{2}$。此时的需求位置被相对确定，容易证明此时算法解必然恰给出离线最优解，矛盾！

（2）

该问题的竞争比下界为 4。

我们分类讨论枚举所有情况，并给出的对应的实例。

不失一般性，设第一个需求位置为 $-\alpha$，其中 $1>\alpha>0$ 待定。

显然 $(-\alpha,1)$ 是不好的。下面枚举讨论：

$$(-\alpha,0)\to(1-\alpha,1)\to(2-\alpha,-1),\ \text{离线最优解为}(-\alpha,-1),(1-\alpha,0),(2-\alpha,1),\ r_A=\frac{3-\alpha}{1-\alpha}$$

$$(-\alpha,0)\to(1-\alpha,-1)\to(-1-\alpha,1),\ \text{离线最优解为}(-\alpha,0),(1-\alpha,1),(-1-\alpha,-1),\ r_A=\frac{2+\alpha}{\alpha}$$

$$(-\alpha,-1)\to(1-\alpha,0)\to(-1-\alpha,1),\ \text{离线最优解为}(-\alpha,0),(1-\alpha,1),(-1-\alpha,-1),\ r_A=\frac{2+\alpha}{\alpha}$$

$$(-\alpha,-1)\to(1-\alpha,1)\to(2-\alpha,0),\ \text{离线最优解为}(-\alpha,-1),(1-\alpha,0),(2-\alpha,1),\ r_A=\frac{2-\alpha}{1-\alpha}$$

综上，该问题的竞争比下界至少为 $\min\{\frac{2+\alpha}{\alpha},\frac{2-\alpha}{1-\alpha}\}=4$，此时 α 取为 $\frac{2}{3}$。

另一方面，该竞争比确实可以取到。上表事实上已经完全讨论了第二个需求与第一个需求异号的情况。若第二个需求与第一个需求同号，最佳取值为 $\alpha-1$，此时 $r_A=\frac{1-\alpha}{\alpha}$。因此，当 $\alpha\geq\frac{1}{5}$ 时该情况的竞争比不大于 4。若 $\alpha<\frac{1}{5}$，则注意到上表第一条情形中 $r_A=\frac{3-\alpha}{1-\alpha}<\frac{7}{2}<4$。综上，根据 α 的值进行选择，总能使竞争比不大于 4。

三、

（1）

反证法。考虑所有竹子的总高度 $T=\sum_{i=1}^n t_i$，总高度每天增长 H，每天减少某个 t_i。假设任意时刻 $\max t_i<H$，则 T 随天数严格单增，且增量有正的最小值，故 T 发散；但这与 $T=\sum_{i=1}^n t_i<n\max t_i<nH$ 矛盾！

（2）

最优解为 H。

容易知道这样的解可以取到。不妨设 $k_n=\max k_i$，并记 $A=|\{i\mid k_i=k_n\}|$，则以 $(k_n+1)A$ 为一个周期，各高度竹子按比例排列即可。

（3）

由（2）中启发，设 $\log_2\frac{H}{h_i}=k_i$，并以 $\lceil k_i\rceil$ 为比例，以（2）中同样方法设置方案，多余的天数不砍竹子（或任意砍）。此时每棵竹子至多额外生长一个周期，故 $t_i<2H$，从而最坏情况比小于等于 2。另一方面这样的情况确实存在：$n=2, h_1=1+\varepsilon, h_2=1-\varepsilon$，此时算法解的周期为 $121x121x$，其中 x 表示空余；而最优方案为 12121212。令 $x=1$，则算法的比为 $\frac{4-4\varepsilon}{2+2\varepsilon}$ 趋向于 2.

四、

（1）

$$v(i,b,s)=\begin{cases}v(i-1,b,s) & c_i>b\\ \min\{v(i-1,b,s),v(i-1,b-c_i,s-1)-\pi_i\} & c_i\le b\end{cases}$$

（2）

记 $\sum_{i=1}^n c_i=C$。

动态规划

1. For $b=0$ to C

   For $s=0$ to m

   $v(0,b,s)=1.$

2. For $i=0$ to n

   For $s=0$ to m

   $v(i,0,s)=1.$

3. For $i=0$ to n

   For $b=0$ to C

   $v(i,b,0)=1.$

4. For $i=1$ to n

   For $b=0$ to C

   For $s=1$ to m

   If $c_i>b$, then $v(i,b,s)=v(i-1,b,s)$;

   Else $v(i,b,s)=\min\{v(i-1,b,s),v(i-1,b-c_i,s-1)-\pi_i\}$.

5. 输出 $\min_{b,s}\Big(v(n,b,s)C+b\Big)$.

（3）

我们证明“划分问题 $\le_{\mathrm{p}}$找矿藏问题”。

给定划分问题 $S=\{a_1,\dots,a_n\}$，记 $A=\sum_{i=1}^n a_i$。我们构造找矿藏问题 $m=n, c_i=\pi_i=\frac{a_i}{A}$，上界 $M=3/4$。

设第一天探查的地点为 $S_1\subset S$，则找矿藏问题要求最小化
$\sum_{S_1}\pi_i\sum_{S_1}c_i+(1-\sum_{S_1}\pi_i)C=C-\sum_{S_1}\pi_i\sum_{S\setminus S_1}c_i$，即求 $\sum_{S_1}\pi_i\sum_{S\setminus S_1}c_i$ 的最大值。而现有 $c_i=\pi_i=\frac{a_i}{A}$，故等于求 $\sum_{S_1}\frac{a_i}{A}(1-\sum_{S_1}\frac{a_i}{A})$ 的最大值。易知该式取得最大值 $1/4$ 当且仅当 $\sum_{S_1}\frac{a_i}{A}=\frac{1}{2}$，即划分问题的答案为“是”。

由于划分问题是NP难的，从而找矿藏问题也是NP难的。