

2021-2022学年秋冬学期组合优化期末回忆卷

1. (20') 给定有向图 (V, E) , 任意 i 属于 V , 有净出货量 a_i (等于出货量-入货量), 任意 j 属于 E , 有运量上限 b_j 和运费单价 c_j 。求在净出货量确定的情况下, 运费最少的运送方案。请写出求解该问题的数学规划。
2. (30') 现有A, B两座数据接受站, A接收到的数据可以选择直接传输给B, 也可以选择压缩成原来的 p 倍($0 < p < 1$)后传输给B, 压缩费用为数据原先的大小。现有若干条数据需要传送, 若传送数据大小之和不超过 S , 求解压缩费用最小值。
 - (1) 判断该问题是P的还是NP难的, 给出证明。
 - (2) 给出求解该问题的一个动态规划。
3. (30') 某火车购票网站推出了VIP会员卡, 购卡费用 P 元, 有效期 T 天, 可在任意时刻购买。购卡后在期限内买价格 p 的车票价格为 βp 。未来的行程与时间未知。
 - (1) 甲的算法是永远不买会员卡。乙的算法是当买票金额即将达到 $\frac{P}{1-\beta}$ 时买会员卡。二者谁的下界更低。
 - (2) 给出该问题的一个下界。
 - (3) 现有有向图 (V, E) , $V = \{u, w, v_1, v_2, \dots, v_n\}$, n 是共购买车票张数。请给出该有向图, 使得图中从 u 到 w 的最短路代表火车购票离线问题的最优算法。
4. (20'+20') 度量TSP问题是指在度量空间上的TSP问题。 $c(l, k)$ 代表图中相邻两点的距离。在度量TSP问题中, l, k 是两个顶点, 令该问题最优环游的权值和为1, $O(l, k)$ 代表最优环游中从 l 到 k 的距离。

$$d(x, y) = \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\}$$

令 $S(u, v, k, l) = \{(x, y) \mid d(x, O(u, k)) + d(y, O(v, l)) < c(k, l)\}, (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$.

- (1) 一个根据定义简单的计算, 可能是 $S(u, u, v, v)$, 记不大清楚了。
若对一组环游 $1, 2, 3, \dots, k, k+1, \dots, l, l+1, \dots, n$, 对于任意的 k 和 l , 将点 k 连到点 l , 后逆方向连到点 $k+1$, 点 $k+1$ 再连到点 $l+1$, 即环游 $1, 2, 3, \dots, k, l, l+1, \dots, k+1, l+1, \dots, n$ 都不比原来的环游更优, 则称其为2-opt环游。

(2) 证明：对于2-opt环游中的点 u, v, k, l (k, l 在图中相邻)，总有 $S(u, v, k, k+1)$ 与 $S(u, v, l, l+1)$ 不相交。

(3) 2-opt环游中， k, l 相邻，证明： $S(u_1, v_1, k, l)$ 与 $S(u_2, v_2, k, l)$ 面积相等。

这里有一大段话，当时基本没看，应该是定义2-opt算法，即2-opt算法是将某一环游反复用更小的 $k \rightarrow l$ 与 $k+1 \rightarrow l+1$ 替代 $k \rightarrow k+1$ 与 $l \rightarrow l+1$ ，直到其变成2-opt环游。

(4) 证明2-opt算法的近似比上界为 $\sqrt{\frac{n}{2}}$ 。