

# 浙江大学组合优化往年试卷

1. 设图  $G = (V, E)$  为无向简单图,  $V' \subseteq V$  为顶点子集。若  $G(V')$  是一个完全图, 则称  $V'$  是  $G$  的团 (clique)。求给定图的顶点数最多的团的问题称为 **图的最大团**。
  - (a) 证明:  $V' \subseteq V$  是  $G$  的团当且仅当  $V' \setminus V$  是  $G'$  的顶点覆盖, 这里  $G' = (V', E')$ , 对任意的  $u, v \in V$ ,  $uv \in E'$  当且仅当  $uv \notin E$ ;
  - (b) 证明: 图的最大团是  $\mathcal{NP}$  – 难 问题;
  - (c) 求给定图的顶点数最少的顶点覆盖的问题称为 **图的最小顶点覆盖**。试利用图的最大基数匹配问题的算法设计图的最小顶点覆盖问题的多项式时间近似算法, 并证明其最坏情况界不超过 2;
  - (d) 基于(a)给出的图的顶点覆盖与团的关系, 是否可由类似于 (c) 的思路给出图的最大团问题最坏情况界为 2 的多项式时间近似算法, 为什么?
2. 某航空公司计划在全国选择若干个机场组建基地。设在机场  $j$  组建基地所需费用为  $c_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ 。若该公司在机场  $i$  和机场  $j$  的基地组建完成, 则可开通往返两地的航班并获得票款收益  $r_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ 。该航空公司基地组建费用上限为  $B$ , 应选择在哪些机场组建基地才能使获得的票数收益最大。试写出该问题的数学规划。
3. 某购书网站推出“满 100 送礼券”活动, 凡单张订单购书金额达到或超过 100 元可获指定面额礼券一张, 现就购买一批图书, 计划分拆若干张订单以使获得的礼券数最多。
  - (a) 试指出该问题与何经典问题有密切联系, 又与之有哪些区别;
  - (b) 若按任一顺序选择购买图书, 当当前订单累计金额达到或超过 100 元后, 立即新启一张订单, 试给出该方案的最坏情况界。

4. 给定正整数集  $S = s_1, s_2, \dots, s_n$ ,  $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n$ , 记  $l(S')$  为  $S$  的子集  $S'$  中所含元素之和,

$$\sigma(S) = \min \left\{ \frac{l(S_1)}{l(S_2)} \mid S_1 \subseteq S, S_2 \subseteq S, S_1 \cap S_2 = \emptyset, l(S_1) \geq l(S_2) \right\}$$

- (a) 若  $S$  为 **超增集**, 即对任意  $1 \leq j \leq n-1$ ,  $s_{j+1} > \sum_{i=1}^j s_i$ , 则最相近子集问题是多项式时间可解的。试给出多项式时间算法并证明其最优性;
- (b) 设对任意  $1 \leq j \leq n-1$ ,  $s_{j+1} \geq \alpha s_j$ , 这里  $\alpha \approx 1.324$  为方程  $x^3 - x - 1 = 0$  的正根。但存在  $j, 1 \leq j \leq n-1$ , 使得  $s_{j+1} \leq \sum_{i=1}^j s_i$ , 记  $k$  为满足

$$\sum_{i=k+1}^j s_i < s_{j+1} \leq \sum_{i=k}^j s_i$$

的整数。令

$$T_1 = \{s_{j+1}\}, T_2 = \{s_{k+1}, \dots, s_j\}, T_3 = \{s_k, s_{k+1}, \dots, s_j\},$$

$$\text{证明 } \min \left\{ \frac{l(T_1)}{l(T_2)}, \frac{l(T_3)}{l(T_4)} \right\} \leq \alpha;$$

- (c) 试设计最相近子集最坏情况界为  $\alpha$  的近似算法并予以证明;
- (d) (附加题) 现有六堆硬币, 每堆 24 枚, 硬币有真伪两种, 真币每枚重 100 克, 伪币每枚重 95 克。同一堆硬币要么全是真币, 要么全是伪币。现需用可显示重量的电子秤称重一次判断出每堆硬币的真假, 试给出称量方案并说明该问题与最相近子集之间的联系(注: 已知对  $S = \{11, 17, 20, 22, 23, 24\}$ ,  $\sigma(S) > 1$ )。如何将上述方案推广到银币堆数更多的情况?