

2021-2022学年秋冬学期组合优化期末回忆卷

1. (20') 给定有向图(V,E)，任意*i*属于V，有净出货量 a_i (等于出货量-入货量)，任意*j*属于E，有运量上限 b_j 和运费单价 c_j 。求在净出货量确定的情况下，运费最少的运送方案。请写出求解该问题的数学规划。
2. (30') 现有A, B两座数据接受站，A接收到的数据可以选择直接传输给B，也可以选择压缩成原来的p倍($0 < p < 1$)后传输给B，压缩费用为数据原先的大小。现有若干条数据需要传送，若传送数据大小之和不超过S，求解压缩费用最小值。
 - (1) 判断该问题是P的还是NP难的，给出证明。
 - (2) 给出求解该问题的一个动态规划。
3. (30') 某火车购票网站推出了VIP会员卡，购卡费用P元，有效期T天，可在任意时刻购买。购卡后在期限内买价格p的车票价格为 βp 。未来的行程与时间未知。
 - (1) 甲的算法是永远不买会员卡。乙的算法是当买票金额即将达到 $\frac{P}{1-\beta}$ 时买会员卡。二者谁的下界更低。
 - (2) 给出该问题的一个下界。
 - (3) 现有有向图(V,E)， $V = \{u, w, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，n是共购买车票张数。请给出该有向图，使得图中从u到w的最短路代表火车购票离线问题的最优算法。
4. (20'+20') 度量TSP问题是指在度量空间上的TSP问题。 $c(l, k)$ 代表图中相邻两点的距离。在度量TSP问题中， l, k 是两个顶点，令该问题最优环游的权值和为1， $O(l, k)$ 代表最优环游中从l到k的距离。

$$d(x, y) = \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\}$$

令 $S(u, v, k, l) = \{(x, y) \mid d(x, O(u, k)) + d(y, O(v, l)) < c(k, l)\}$, $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$.

(1) 一个根据定义简单的计算，可能是 $S(u, u, v, v)$ ，记不大清楚了。

若对一组环游 $1, 2, 3, \dots, k, k+1, \dots, l, l+1, \dots, n$ ，对于任意的k和l，将点k连到点l，后逆方向连到点k+1，点k+1再连到点l+1，即环游 $1, 2, 3, \dots, k, l, l-1, \dots, k+1, l+1, \dots, n$ 都不比原来的环游更优，则称其为2-opt环游。

(2) 证明：对于2-opt环游中的点 u, v, k, l (k, l 在图中相邻)，总有 $S(u, v, k, k+1)$ 与 $S(u, v, l, l+1)$ 不相交。

(3) 2-opt环游中， k, l 相邻，证明： $S(u_1, v_1, k, l)$ 与 $S(u_2, v_2, k, l)$ 面积相等。

这里有一大段话，当时基本没看，应该是定义2-opt算法，即2-opt算法是将某一环游反复用更小的 $k \rightarrow l$ 与 $k+1 \rightarrow l+1$ 替代 $k \rightarrow k+1$ 与 $l \rightarrow l+1$ ，直到其变成2-opt环游。

(4) 证明2-opt算法的近似比上界为 $\sqrt{\frac{n}{2}}$.