

24-25 秋冬组合优化期末回忆

整理: polytetra

1. 数学规划与计算复杂性 (30 分)

某用户有 $1, 2, \dots, m$ 台电器设备, 第 j 台设备在 1 小时内的用电量是 α_j 度。电器设备可以用太阳能来源供电, 当太阳能用电量超过当前时间段的限度时, 则用电网供电。要求: 每台设备启动时间均为 1 小时, 且开启时间只能取 $1, 2, \dots, n$ 中的值。

已知第 i 小时, 太阳能供电和电网供电 1 度电的价格分别为 λ_i 和 μ_i , 太阳能供电的度数上限为 c_i 。现要求合理安排电器启动时间, 使得两种供电方式的电费总额最小。

1. 请写出求解该问题的数学规划
2. 证明该问题是强 NP 难的。

2. 最优算法和近似算法 (25 分)

欧式平面内有 n 台机器人, 机器人处于休眠或启动状态, 休眠状态下的机器人不得行动, 启动状态的机器人可以行走到指定位置并唤醒处在该位置的机器人, 所有机器人的行走速率相同。已知开始时有 1 台机器人处于启动状态, 其余机器人均处于休眠状态。现要求在尽可能短的时间内, 唤醒所有的机器人。

1. 试给出最优解的一些性质, 并给出该问题的一个下界
2. 试给出下界不超过 $2\lceil \log_2 n \rceil$ 的近似算法

3. 排序问题和在线问题（20 分）

现考虑可加速加工的 2 台同型平行机排序问题，工件 i 的加工时间为 p_i 。工件可以选择是否加速加工处理，加速加工处理时间为 1，处理后，加工时间为 $u_i, 0 \leq u_i \leq p_i$ 。加速加工处理的工件必须在同台机器上立即继续完成加工。目标是使得工件的最大完工时间最小 (即 C_{\max})。考虑该问题的在线形式，开始时仅知道工件的直接加工时间，工件将依次给出，当前工件给出后，必须决定是否处理，决定后才知道 u_i ，随后按照决策对该工件进行直接加工或处理，并给出下一工件。对该在线问题的下界进行分析，对前 2 个工件， $p_1 = p_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ，请按以下步骤证明问题下界至少为 2

1. 对两个加工均加速加工处理的算法，竞争比不小于 2
2. 对一个工件处理，另一个工件不处理的算法，竞争比不小于 2
3. 均不处理的算法，竞争比不小于 2

4. 动态规划和近似算法（25+20 分）

有 m 种面值为整数的硬币， $1 = C_1 < C_2 < C_3 < \dots < C_m$ ，现用该 m 种硬币完成支付，支付金额为 N ，要求硬币总面值恰为 N ，且所用硬币数尽可能少。

1. 写出求解该问题的动态规划
2. 一种面值分布为规范的，若如下贪婪算法总能给出最优解：总是尽可能用面值较大的硬币完成支付。试给出一种规范的面值分布

在 (3) (4) (5) 中， $m = 3$

3. 设 $C_3 = qC_2 + r$ ，其中 $0 \leq r < C_2$ ， $r, q \in \mathbb{Z}$ ， $q > 0$ 。若 $0 < r < C_2 - q$ ，证明该面值分布不是规范的
4. (附加) 设 N_{\min} 为使得该贪婪算法的解不是最优解的最小支付金额，试证明 $C_3 + 1 < N_{\min} < C_3 + C_2$
5. (附加) 已知某面值分布不是规范的，试证明 $0 < r < C_2 - q$