Tietorakenteiden ja algoritmien harjoitustyön määrittelydokumentti

Risto Tuomainen

31. elokuuta 2014

Työn aihe

Harjoitustyönäni on ohjelma matriisilaskutoimituksia varten. Ohjelmalla voi suorittaa peruslaskutoimitukset sekä determinantin ja lisäksi tehdä $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ -dekomponoinnin. Tärkeimmät ohjelmassa toteutetut algoritmit ovat Guass-Jordan-eliminointi, Strassen algoritmi ja LU-dekomposition laskeminen, sekä harvan matriisin ja tiheän vektorin (tai matriisin) kertominen.

Harva (sparse) matriisi tarkoittaa matriisia, jonka arvoista suuri osa on nollia. Näiden käsittelyä varten on ohjelmassa toteutettu Yale-matriisi-tietorakenne. Yale-matriisi on ilmeisesti käytännössäkin melko suosittu, ja lisäksi sen perusajatus selostettiin hyvin Wikipediassa.

Oli vaikeahkoa löytää mitään esitystä Yale-matriiseihin (tai mihin tahansa harvoihin matriiseihin) liittyvistä algoritmeistai, kun taas taulukkomuodossa esitettyjä matriiseja varten kehitetyt algoritmit ovat hyvin tunnettuja. Niinpä olen työssä keskittynyt taulukkoesitykseen liittyviin algoritmeihin ja jättänyt harvoihin matriiseihin liittyvät operaatiot vähemmälle huomiolle (so. niitä ei ole toteutettu lainkaan lukuun ottamatta yllä mainittua erikoistapausta).

Strassen algoritmi neliömatriisien kertomista varten on aikavaativuudeltaan $O(n^{ln7})$ [1, s. 31], mikä tekee siitä hieman naiivia menetelmää, jonka aikavaativuus on $O(n^3)$, paremman. Strassen algoritmin ajatuksena on osittaa kerrottavat matriisit neljään osaan, ja ilmaista tulo näiden osamatriisien tuloina ja summina. Tässä vaiheessa on mahdollista korvata yksi kertolasku yhteenlaskuilla, mikä säästää aikaa yhteenlaskun ollessa $O(n^2)$-operaatio. Strassen algoritmi ei ole läheskään nopein tunnettu menetelmä neliömatriisien kertomiseen, mutta se on monimutkaisuudeltaan hallittavissa ja soveltuu siten harjoitustyössä käytettäväksi.

Gauss-Jordan eliminointi on menetelmä lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemiseen. Se soveltuu myös suoraviivaisesti matriisin käänteisalkion laskemiseen, mihin sitä harjoitustyössäkin käytetään. Sekään ei ole nopein saatavilla oleva menetelmä tarkoitukseensa, mutta paremmat menetelmät eivät nekään ole kovinkaan paljoa tehokkaampia.

Matriisin dekomponointi, jonka avulla harjoitustyössä lasketaan determinantti, on aikavaativuudeltaan $O(n^3)$ ja siten merkittävästi $O(n!)$ ajassa suoritettavaa naiivia menetelmää parempi. Tässä kohdin ilmaus naiivi on sikäli harhaanjohtava, että determinantin laskeminen näin olisi paljon hankalampi toteuttaa kuin dekomponoinnnin avulla suoritettava.

Viitteet

[1] Gene H. Golub and Charles F Van Loan. *Matrix Computations.* John Hopkins University Press, 2013.