Véges automaták változatai és ezek ekvivalenciája

Balla Tamás Zsolt

2020 május

Abstract

Ebben az esszében megismerhetjük, hogy mik azok a determinisztikus és nemdeterminisztikus véges automaták, hogyan adhatjuk meg őket, és bebizonyítjuk, hogy ezeknek a felismerőképessége megegyezik.

1 Véges determinisztikus automaták

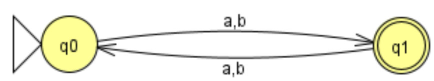
1.1 Bevezetés

Az $M = (Q, \Sigma, \delta, q0, F)$ rendszert determinisztikus automatának nevezzük, ahol:

- Q: egy nem üres halmaz, az állapotok halmaza
- Σ: egy ábécé, az input ábécé
- δ: $Q \times \Sigma \to Q$: egy leképezés, az átmenetfüggvény
- $q_0 \in Q$: a kezdőállapot
- $F \subseteq Q$: a végállapotok halmaza

Az automatákat általában irányított gráfként ábrázoljuk. Ennek a gráfnak a csúcsai lesznek az állapotok, a gráf élei pedig az átmenetek. Ha $\delta(q, a) = p$ egy átmenet, akkor ez azt jelenti, hogy a q állapotból egy a input szimbólum hatására a p állapotba jutunk. A kezdőállapotot egy, az állapotra mutató nyíllal jelöljük, a végállapotokat pedig dupla körvonallal. A kezdőállapot is lehet végállapot.

Figure 1: Egyszerű példa véges determinisztikus automatára



Az automatákat megadhatjuk táblázatos formában is, ilyenkor a kezdőállapotot a táblázat első sorába írjuk, a végállapotokat pedig megjelöljük. A táblázat oszlopaiban az input ábécé betűit adjuk meg, a táblázat belsejében pedig hogy a sorban lévő állapotból az oszlopban lévő input hatására melyik állapotba jutunk.

δ	a	b
$*q_0$	q_1	q_2
q_1	q_0	q_2
q_2	q_0	q_1

1.2 Felismert nyelv

Az M konfigurációinak halmaza: $C = Q \times \Sigma$. A $(q, a_1, a_2, ..., a_n)$ konfiguráció azt jelenti, hogy az M automata a q állapotban van, és az $a_1, a_2, ..., a_n$ szót kapja inputként.

Ha (q, w) és $(q', w') \in C$, akkor a $(q, w) \vdash_M (q', w')$ átmeneti reláció azt jelenti, hogy a q állapotban vagyunk, és ide egy w szó hatására jutottunk, és a w szó első betűjét "elfogyasztva" juthatunk egy lépésben a q' állapotba (tehát akkor $w = aw'$ valamely $a \in \Sigma$ -ra). Ezt több lépésre is értelmezhetjük, ennek a jelölései:

- $(q, w) \vdash_M (q', w')$, egy lépés
- $(q, w) \vdash_M (q', w'), n \geqslant 0$ lépés
- $(q, w) \vdash_M^+ (q', w')$, legalább egy lépés
- $(q, w) \vdash_M^* (q', w')$, valamennyi (akár 0) lépés

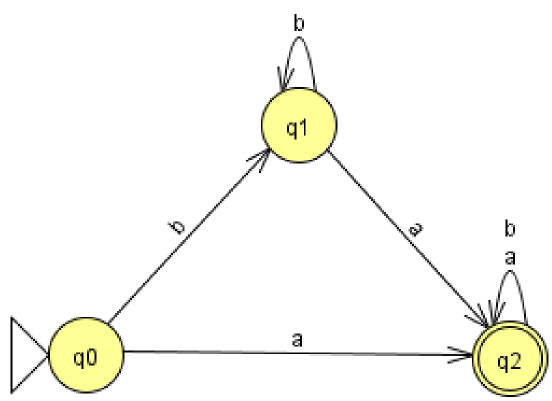
Az $M = (Q, \Sigma, \delta, q0, F)$ automata által felismert nyelven a

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w) \vdash_M^* (q, \epsilon) \text{ és } q \in F\}$$

nyelvet értjük, azaz q_0-ból valahány lépésben a w input szó hatására a q állapotba jutunk, és q végállapot.

Az alábbi automata azt a nyelvet ismeri fel, ahol a szavakban van legalább egy a betű.

Figure 2: Példa



2 Véges nemdeterminisztikus automaták

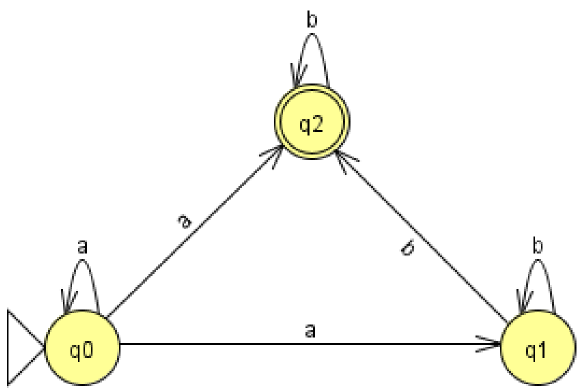
2.1 Bevezetés

A nemdeterminisztikus automák a determinisztikus automaták általánosításai. A $M = (Q, \Sigma, \delta, q0, F)$ rendszert nemdeterminisztikus automatának nevezzük, ahol

- Q: egy nem üres halmaz, az állapotok halmaza
- Σ: egy ábécé, az input ábécé
- δ: $Q \times \Sigma \rightarrow P(Q)$, egy leképezés, az átmenetfüggvény
- $q_0 \in Q$: a kezdőállapot
- $F \subseteq Q$: a végállapotok halmaza

Egy input szimbólum hatására az automata egy állapotból több állapotba is mehet, és nem is muszáj megadni minden input szimbólumra, hogy melyik állapotba kerüljön az automata a szimbólum hatására ($\delta(q, a) = \emptyset$). Az általánosítás nem növeli meg a felismerő kapacitást, ezt majd később látjuk.

Figure 3: Példa nemdeterminisztikus automatára



2.2 Felismert nyelv

Az átmeneti reláció és a felismert nyelv nemdeterminisztikus automatákra:

(q, w) és $(q', w') \in C$ esetén $(q, w) \vdash_M (q', w')$ azt jelenti, hogy q-ból q'-be jutunk valamilyen a input szimbólum hatására, ahol $q' \in \delta(q, a)$, tehát a q' eleme a q állapotból az a szimbólum hatására elérhető állapotok halmazának.

Az automata által felismert nyelven pedig a

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w) \vdash_M^* (q, \epsilon) \text{ valamely } q \in F\}\text{-re}$$

nyelvet értjük. Tehát q_0-ból w hatására elérhető legalább egy végállapot, de lehet, hogy emellett nem végállapotok is elérhetőek.

3 Nemdeterminisztikus ϵ-automata

3.1 Definíció

A nemdeterminisztikus automata ϵ-átmenettel, vagy röviden nemdeterminisztikus ϵ-automata a nemdeterminisztikus automaták általánosítása.

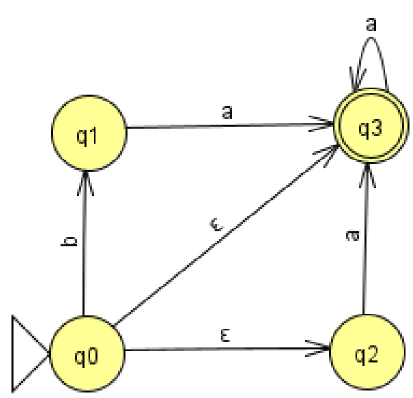
A $M = (Q, \Sigma, \delta, q0, F)$ rendszert nemdeterminisztikus ϵ-automatának nevezzük, ahol:

- Q: egy nem üres halmaz, az állapotok halmaza

- Σ: egy ábécé, az input ábécé
- δ: $Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \rightarrow P(Q)$, egy leképezés, az átmenetfüggvény
- $q_0 \in Q$: a kezdőállapot
- $F \subseteq Q$: a végállapotok halmaza

Az ϵ-átmenet azt jelenti, hogy az egyik állapotból a másikba tartó ilyen átmenet "nem fogyasztja" az inputot. Használata néha kényelmesebb lehet, de nem növeli meg a felismerő kapacitást.

Figure 4: Példa nemdeterminisztikus ϵ-automatára



3.2 Felismert nyelv

Az átmeneti reláció és a felismert nyelv nemdeterminisztikus automatákra:

(q, w) és $(q', w') \in C$ esetén $(q, w) \vdash_M (q', w')$ azt jelenti, hogy q-ból q'-be jutunk valamilyen $a \in (\Sigma \cup \{\epsilon\})$ input szimbólum hatására, ahol $q' \in \delta(q, a)$, tehát ugyanaz mint a nemdeterminisztikus esetben, csak megengedjük az ϵ átmeneteket is.

4 Ekvivalencia

4.1 A nemdeterminisztikus és a nemdeterminisztikus ϵ-átmenetes automaták ekvivalenciája

4.1.1 Tétel

Egy nyelv akkor és csak akkor ismerhető fel nemdeterminisztikus ϵ-automatával, ha felismerhető nemdeterminisztikus automatával.

4.1.2 Bizonyítás

- Ha egy nyelv felismerhető nemdeterminisztikus automatával, akkor felismerhető nemdeterminisztikus ϵ-automatával is.
- Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q0, F)$ egy nemdeterminisztikus ϵ-automata. Megadunk egy olyan $M' = (Q, \Sigma, \delta', q0, F')$ nemdeterminisztikus automatát, amelyre L(M) = L(M').

Az első állítás magától adódik, így a másodikat bizonyítjuk. M' megadásához ki kell számolni az állapotok ϵ-lezárását M-ben. Egy $q \in Q$ állapot epszilon lezárása azon állapotokból áll, amik elérhetőek q-ból ϵ átmenetekkel. A $\{q\}$ halmazból kiindulva hozzávesszük a halmazhoz azokat az állapotokat, amelyek elérhetőek q-ból egy ϵ-átmenettel, majd ezt addig folytatjuk, amíg a halmaz bővül. Tehát M' a q állapotból az a input hatására azon állapotokba megy át, amelyekbe valamennyi ϵ átmenettel, majd egy a átmenettel jutott. M' végállapotai pedig azok az állapotok lesznek, amelyekbe M valamennyi ϵ átmenettel egy F állapotba jut. A valamennyi mindkét esetben lehet nulla is.

Ezért $L(M') = L(M)$.

4.2 A determinisztikus és a nemdeterminisztikus automaták ekvivalenciája

4.2.1 Tétel

Egy nyelv akkor és csak akkor ismerhető fel nemdeterminisztikus automatával, ha felismerhető determinisztikus automatával.

4.2.2 Bizonyítás

- Ha egy nyelv felismerhető determinisztikus automatával, akkor felismerhető nemdeterminisztikus automatával is.
- Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q0, F)$ egy nemdeterminisztikus automata. Megadunk egy $M = (Q', \Sigma, \delta', q0', F')$ determinisztikus automatát, amelyre $L(M') = L(M)$.

Az első állítás most is könnyen látható, így megint a másodikat bizonyítjuk. Legyen $M = (Q', \Sigma, \delta', q0', F')$, ahol:

- $Q' : P(Q)(= \{S \| \, S \subseteq Q\})$, azaz Q részhalmazaiból képzünk állapotokat
- $q'_0 : \{q_0\}$, azaz az új kezdőállapot az eredeti kezdőállapotot tartalmazó egyelemű halmaz
- $F' : \{S \subseteq Q \| S \cap F \neq \emptyset\}$, azaz minden olyan részhalmaz, ami legalább egy eredeti végállapotot tartalmaz
- $\delta' : Q' \times \Sigma \to Q'$, az a leképezés, amelyre tetszőleges $S \in Q'$ és $a \in \Sigma$ esetén, S-ből a hatására elérhető halmazokat összeuniózzuk, és ez az új halmaz lesz az átmenet végpontja. Ez a hatványhalmaz konstrukció.

Az $L(M') = L(M)$ bizonyítása pedig, minden $w \in \Sigma^*$-ra és $S \subseteq Q$-ra a $(\{q_0\}, w)$ konfigurációból hatására úgy juthatunk el az (S, ϵ) konfigurációba, ha S az a halmaz, amiben azok az eredeti q állapotok vannak, amikbe az M a w szó hatására jutott. A felismert nyelv pedig ezek alapján mindenképpen ugyanaz lesz, mivel mindkét automata akkor ismeri fel w-t, ha S-ben van legalább egy végállapot.

Forrás: Előadásjegyzet