

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 & , & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -j\omega \mu_0 \mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = +\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = +j\omega n(x,y)^2 \epsilon_0 \mathbf{E} \end{cases} \quad (2)$$

Ces équations permettent de traiter des milieux diélectriques non magnétiques où l'indice varie spatialement dans le plan (x, y) selon une fonction connue.

3 Equations de Helmholtz dans un guide diélectrique

3.1 Equations locales

On se place dans un premier temps dans un matériau homogène d'indice optique n . Montrer, en utilisant les équations de Maxwell et les hypothèses énoncées précédemment, que les champs sont gouvernés par les équations de Helmholtz suivantes :

$$\partial_x^2 \mathbf{E} + n^2 k_0^2 \mathbf{E} = \beta^2 \mathbf{E} \quad (3)$$

et

$$\partial_x^2 \mathbf{H} + n^2 k_0^2 \mathbf{H} = \beta^2 \mathbf{H} \quad (4)$$

où $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda$.

3.2 Dans un milieu à sauts d'indice

Les équations locales restent valides pour des guides comportant des sauts d'indice selon Ox. Il faut toutefois en plus tenir compte des relations de continuité des composantes normales de \mathbf{D} et de \mathbf{B} et des composantes tangentielles de \mathbf{E} et de \mathbf{H} à l'interface entre deux milieux d'indices différents.

4 Modes quasi-TE

Les modes quasi-TE (Transverse Electrique) sont définis par :

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = (0, E_y(x), E_z(x)) \exp(j(\omega t - \beta z)) \quad (5)$$

Montrer que pour ces modes, \mathbf{E} et \mathbf{H} sont continus, et que par conséquent le champ E_y ainsi que sa dérivée selon Ox sont continus.

Dans la suite du sujet, on notera simplement E la composante du champ électrique selon Oy.

Les modes scalaires de propagation $E(x)$ sont solutions de l'équation (3) que l'on réécrit en multipliant chacun de ses membres par $\frac{1}{k_0^2} = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2$.

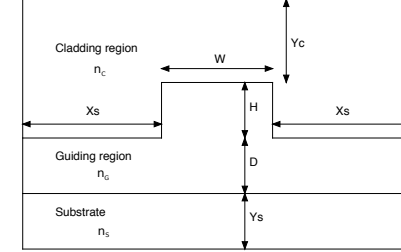


FIGURE 2 – guide d'onde de type ruban

9 Référence

- [1] M. S. Stern, "Finite difference analysis of planar optical waveguides," Prog. Electromagn. Res., vol. 10, pp. 123–186, 1995.

En prenant $a=300$ nm, $\lambda = 1\mu m$ et $n = 3.5$, résoudre avec Matlab la relation de dispersion graphiquement puis numériquement en utilisant la fonction Matlab `fzero`. Elle résout l'équation non-linéaire par la méthode de la tangente, au voisinage d'une valeur intuitive proche d'une racine. Pour chaque valeur de n_{eff} , tracer le mode guidé associé.

3. Tracer les distributions de champ correspondant aux deux modes d'indice effectif le plus élevé.

4.2 Modélisation numérique d'une multi-couche

Le domaine de calcul de longueur finie L_x est discrétisé en volumes finis réguliers (Fig. 1), c'est-à-dire en un ensemble de segments jointifs de même longueur Δx . Les noeuds d'échantillonnage des champs et de l'indice se trouvent sur un réseau régulier comme en différences finies. Chaque noeud est par contre, localisé au centre d'un segment. La grille comporte N_x noeuds selon Ox. Les interfaces sont situées dans le plan médian entre deux noeuds.

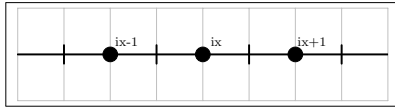


FIGURE 1 – Discrétisation en volumes finis 1D

1. Quel est l'intérêt physique de placer ainsi les noeuds d'échantillonnage? Que faut-il faire pour traiter un système composé de couches avec des constantes diélectriques différentes?
2. On numérote de manière unique les noeuds dans $\llbracket 1, N_x \rrbracket$. Quelle est l'abscisse réelle d'un noeud de coordonnée entière $ix \in \mathbb{N}$ en plaçant, pour simplifier, l'origine des coordonnées à gauche.
3. Donner l'expression discrète en différences finies, de l'opérateur laplacien appliqué à $E(x)$ en un point **intérieur** (x) de la grille régulière.

Indication : faire un développement de Taylor de $E(x)$ à partir des premiers voisins. On utilisera le développement limité suivant, pour une fonction à une variable :

$$E(x + dx) = E(x) + dx \partial_x E + \frac{1}{2}(dx \partial_x)^2 E + o(dx)^3 \quad (11)$$

où dx sont des éléments infinitésimaux. Les dérivées partielles étant évaluées en x .

4. Montrer que l'on peut écrire l'équation (6) après discrétisation, sous la forme matricielle :

$$\sum_j A_{i,j} E_j^m = n_{eff,m}^2 E_i^m \quad (12)$$

avec $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Préciser la forme générale de la matrice A sans se soucier des bords.

```
% generation d'un reseau orthorhombique de noeuds
% chacun place au centre d'une maille rectangulaire
% de cote g.dx=hx et g.dy=hy
40 % g.Nx noeuds selon Ox
% g.Ny noeuds selon Oy
% g.indice(ix, iy) indice de refraction au noeud
% de coordonnees entieres (ix, iy) initialise a 1

lx=xmin+hx/2:hx:xmax-hx/2;
ly=ymin+hy/2:hy:ymax-hy/2;

[g.x,g.y] = meshgrid(lx, ly);
g.x=transpose(g.x);
50 g.y=transpose(g.y);

g.p      = [g.x(:),g.y(:)];
[g.Nx, g.Ny]=size(g.x);

55 g.reg=zeros(g.Nx, g.Ny);
g.indice=ones(g.Nx, g.Ny);
size(g.indice)

g.N=g.Nx*g.Ny;
60 g.nrg=0;
g.dx=hx;
g.dy=hy;
figure(1)
plot(g.p(:, 1), g.p(:, 2), 'ro');
65 hold on
end

function g=insert(g, node, indice)
% insertion d'un polygone decrivant une portion
70 % de guide en 2D.
% node : tableau 2D des coordonnees des sommets du polygone
% indice : valeur de l'indice de refraction du materiau
% associe au polygone.

75 figure(1)
tic, [in,bnd] = inpoly(g.p,node); t1 = toc;
if find(bnd==1)
    warning('nodes on boundaries detected')
end;
80 g.nrg=g.nrg+1;
lst_in=find(in==1);
```

3. Tracer les premiers modes d'après leur expression analytique, échantillonnés sur les noeuds de la grille.

4.4 Solveur de modes quasi-TE

Développer votre solveur de modes scalaires, solutions de l'équation aux valeurs propres (6).

1. Développer une fonction `A=build_A(g)` permettant de remplir la matrice creuse A associée à l'équation aux valeurs propres pour une grille de taille N_x . On utilise la fonction Matlab `sparse` pour créer une matrice creuse.
2. Développer une fonction `g=solve(g, n)` permettant de calculer un sous-ensemble de n valeurs propres (réelles), les plus proches voisines de $\max\{n^2\}$ ainsi que les n modes propres associés. On utilisera la fonction Matlab `spdiags` pour générer la matrice dont on veut calculer les valeurs propres et les modes associés. Pour ce faire, mettre en oeuvre la fonction `eigs` fournie par Matlab.
3. Retrouver les modes de propagation et les valeurs de l'indice effectif n_{eff} obtenus analytiquement pour une couche mince diélectrique. On prendra un domaine de calcul de taille bien plus grande que l'épaisseur de la couche. Expliquez pourquoi. Procéder à une étude de taille finie, autrement dit faites varier la taille du domaine de calcul pour voir son influence sur les modes.
4. Etudier l'influence du pas de réseau sur les résultats de simulation.
5. Pourquoi peut-on appliquer ce code pour calculer les modes dans un guide métallique ? Rappeler les conditions aux limites pour les composantes tangentielle et normale du champ électrique dans ce cas.

On suppose que la longueur d'onde $\lambda = 1\mu m$. Pour un système de longueur $L_x = 2\mu m$, déterminer les 4 premiers modes et comparer à la solution analytique de l'équation d'Helmholtz (3). Reporter les valeurs propres et les contours des modes associés dans votre rapport.

5 Modes quasi-TM dans un guide d'onde unidimensionnel

Les modes quasi-TM (Transverse Magnétique) sont définis par :

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = (E_x, 0, E_z) \exp(j(\omega t - \beta z)) \quad (13)$$

Ils sont solutions de :

$$\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + n^2 E_x = n_{eff}^2 E_x \quad (14)$$

où $n_{eff}^2 = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \beta^2$.

La conservation du flux du champ de déplacement impose que les champs E_x et E_z sont interdépendantes. Par conséquent, montrer qu'en tout point où l'indice est constant :

$$E_z = -\frac{j}{\beta} \frac{\partial E_x}{\partial x} = -\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right) \frac{j}{n_{eff}} \frac{\partial E_x}{\partial x} \quad (15)$$

Peut-on appliquer cette relation à gauche et à droite d'une interface séparant deux milieux d'indices différents ? Argumenter.

Dans le cas de modes quasi-TM, les relations de continuité de D_n et E_t ne sont plus automatiquement vérifiées lors d'un saut d'indice au niveau d'une interface entre deux milieux. Il est alors nécessaire de mettre en oeuvre une méthode de résolution de l'équation de Helmholtz appelée méthode des volumes finis.

5.1 Solveur de modes TM

On vous fournit un solveur précompilé `TM_solve.p`. Développer un programme de calcul de modes quasi-TM l'utilisant.

6 Mise en application

Comparez les modes TM aux modes TE de la couche mince étudiée précédemment.

7 Modèle bidimensionnel d'un guide d'ondes

Dans ce projet, on suppose que la géométrie du guide est seulement invariante selon Oz , direction de propagation de l'onde, que les matériaux diélectriques le constituant sont isotropes et que leurs propriétés respectent elles aussi cette invariance par translation.

7.1 Modes guidés

Redonner la définition des modes quasi-TE et quasi-TM. Ecrire pour chacun des cas, l'équation aux valeurs propres en faisant intervenir l'indice effectif n_{eff} .

7.2 Générateur de guide bidimensionnel

On vous demande de télécharger depuis le serveur le projet :

`/users/commun/respg/phelma2/WG_modes2017`

Le sous-répertoire 2D contient les fichiers Matlab `WGgen.m` et `inpoly.m`. La fonction `WGgen` permet de discrétiser un guide d'ondes en différences finies. Dans l'exemple fourni, on définit d'abord une boîte d'air de forme rectangulaire $[-5\mu m, 5\mu m] \times [-3\mu m, 3\mu m]$ grâce à la fonction `grid` qui retourne une structure de données `g`. Les pas de la grille

sont stockés dans $g.dx$ et $g.dy$. Chaque noeud de la discrétisation est repéré par le couple d'indices entiers (ix, iy) et ses coordonnées réelles sont données par $g.x(ix, iy)$ et $g.y(ix, iy)$. L'indice optique dans la maille volume fini associée à (ix, iy) est donné par $g.indice(ix, iy)$.

En supposant que le guide d'onde puisse être décrit par un polygone, on définit d'abord les coordonnées de ses sommets que l'on place dans un tableau noté *region* dans l'exemple. On l'insère ensuite dans la grille, grâce à la fonction `insert` en précisant en plus son indice de réfraction.

Listing 2 – programme de discrétisation d'un guide d'onde

```

% WGgen : generateur d'une grille reguliere de type
% differences/volumes finis
% Auteurs JC Toussaint & L Bastard - BE EM

5 % dependance : fonction inpoly
% Auteur : Darren Engwirda
%
% Bibliographie :
% Stern Progress in Electromagnetics Research (1995),
10 % PIER 10, 123-186
% Finite Difference Analysis of Planar Optical Waveguides
%

function g=WGgen
15 clc
clear all
close all

h=0.1;
20 g=uniform_grid(-5.0, 5.0, -3.0, 3.0, h, h);
g.lambda=1.;

% coordonnees des sommets du polygone
% decrivant une portion du guide
25 region = [
    -2  -1;
    +2  -1;
    +1  +1;
    -1  +1
30 ];

indice=3.5;
g=insert(g, region, indice);
end
35 function g=uniform_grid(xmin, xmax, ymin, ymax, hx, hy)

```

- On tient maintenant compte de l'annulation du champ \mathbf{E} sur les noeuds du bord. En fixant $N_x = 4$, donner précisément le remplissage de A avec l'expression des termes non-nuls.

4.3 Développement logiciel

On vous demande de télécharger depuis le serveur le projet :

`/users/commun/respg/phelma2/WG_modes2017`

Le sous-répertoire 1D contient le fichier Matlab `WGgen.m`. La fonction `WGgen` permet de discrétiser un guide d'ondes en volumes finis 1D. Dans l'exemple fourni, on définit d'abord une boîte d'air s'étendant sur $[-5\mu m, 5\mu m]$ grâce à la fonction `grid` qui retourne une structure de données g . Le pas de la grille est stocké dans $g.dx$. Chaque noeud de la discrétisation est repéré par l'entier ix et son abscisse réelle (en μm) est donnée par $g.x(ix)$. L'indice optique dans la maille volume fini associée à ix est donné par $g.indice(ix)$.

En supposant que la couche mince puisse être décrite par un segment, on définit d'abord les abscisses de ses extrémités que l'on place dans un tableau noté *region* dans l'exemple. On l'insère ensuite dans la grille, grâce à la fonction `insert` en précisant en plus son indice de réfraction.

Listing 1 – programme de discrétisation d'un guide d'onde

```

% WGgen : generateur d'une grille reguliere de type
% differences/volumes finis
% Auteurs JC Toussaint & L Bastard - BE EM

5 function g=WGgen
clc
clear all
close all

10 h=0.1;
g=uniform_grid(-5.0, 5.0, h);
g.lambda=1.;

% abscisses des extremités
% decrivant le guide
15 region = [-1  +1];

indice=3.5;
g=insert(g, region, indice);
20 end

```

- Exécuter le générateur de guide `WGgen`.
- Montrer qu'il est possible de générer des multicouches d'indices différents.

```

g.reg(lst_in)=g.nrg;
g.indice(lst_in)=indice;
plot(g.p(in,1),g.p(in,2),'bo',g.p(bnd,1),g.p(bnd,2),'go')
85 hold on
title('Inside (blue), outside (red) & boundary (green)')

% Plot geometry
nn = size(node,1);
90 cnect = [(1:nn-1)',(2:nn)'; nn,1];
patch('faces',cnect,'vertices',node,'facecolor','none',...
      'edgecolor','k'), axis equal
drawnow()
end

```

1. Exécuter le générateur de guide WGgen.
2. Montrer qu'il est possible de générer des guides de forme complexe constitués de plusieurs rubans et couches.

8 Mise en application

On met à votre disposition deux solveurs de modes : quasi-TE et quasi-TM.

1. Appliquez-les tout d'abord pour caractériser des guides d'ondes semi-conducteurs proposés par Stern [1], de type ruban (Fig. 3)).
2. Dans un second temps, on étudie la fibre optique monomode SMF 28, dont la fiche technique a été fournie lors du TD électromagnétisme n°4. Pour toute l'étude de cette fibre optique, on se place à la longueur d'onde de $1,31 \mu m$. Générez la géométrie d'indice de la fibre dans une boîte de dimensions $20 \mu m \times 20 \mu m$.
3. Etudiez la convergence de votre simulateur en fonction de la taille de la boîte de calcul puis du pas de maillage. Donnez en conclusion les paramètres qui vous semblent optimaux.
4. Vérifiez la valeur de l'indice effectif calculée par le solveur de modes par rapport au résultat calculé en TD.
5. Vérifiez la taille du mode à $1/e^2$ en intensité (MFD) obtenue par rapport à celle calculée en TD et aux données constructeur. Pour cela, vous pourrez modifier la fonction cutline de manière à afficher le carré du champ électrique (proportionnel à l'intensité) et à normaliser ce dernier pour que le maximum vaille 1.
6. Évaluez la fréquence de coupure du second mode de la fibre optique. Précisez le protocole employé pour réaliser cette mesure puis comparez aux données constructeur et à la valeur calculée en TD.

$$\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 (\partial_x^2 E) + n^2 E = n_{eff}^2 E \quad (6)$$

où $n_{eff}^2 = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \beta^2$.

On admettra que les modes de propagation guidés respectent la contrainte $n_{eff} \in]\min\{n\}, \max\{n\}]$ (ce qui est vrai uniquement pour les guides diélectriques).

4.1 Partie analytique

On veut modéliser la propagation guidée d'une onde dans une couche mince diélectrique d'indice n et d'épaisseur $2a$, placée dans l'air.

1. Les solutions de l'équation (6) dans les différents milieux sont des fonctions exponentielles. Puisque l'on s'intéresse uniquement aux modes guidés au voisinage de la couche mince, on choisit pour décrire le mode les expressions suivantes :

$$\begin{cases} E(x) = C \exp(-k_1 x) & \text{pour } x > a \\ E(x) = A \exp(+jk_2 x) + A \exp(-jk_2 x) & \text{pour } |x| < a \\ E(x) = D \exp(+k_3 x) & \text{pour } x < -a \end{cases} \quad (7)$$

En utilisant l'équation (6), donner les expressions de k_1 , k_2 et k_3 .

2. D'après la symétrie du problème, on peut séparer l'ensemble des solutions en une famille de solutions paires et une famille de solutions impaires. Pour les solutions paires, $A=B$ et $C=D$ alors que pour les solutions impaires, $A=-B$ et $C=-D$. En appliquant les conditions de continuité des champs aux interfaces, on obtient les formes suivantes pour le champ électrique des solutions paires :

$$\begin{cases} E(x) = E_0 \cos(k_2 a) \exp(k_1 a) \exp(-k_1 x) & \text{pour } x > a \\ E(x) = E_0 \cos(k_2 x) & \text{pour } |x| < a \\ E(x) = E_0 \cos(k_2 a) \exp(k_1 a) \exp(+k_1 x) & \text{pour } x < -a \end{cases} \quad (8)$$

et pour les solutions impaires :

$$\begin{cases} E(x) = E_0 \sin(k_2 a) \exp(k_1 a) \exp(-k_1 x) & \text{pour } x > a \\ E(x) = E_0 \sin(k_2 x) & \text{pour } |x| < a \\ E(x) = E_0 \sin(k_2 a) \exp(k_1 a) \exp(+k_1 x) & \text{pour } x < -a \end{cases} \quad (9)$$

Par ailleurs, les conditions aux limites permettent également d'établir les équations de dispersion suivantes pour les solutions paires et impaires :

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{n^2 - n_{eff}^2}\right) &= \sqrt{\frac{n_{eff}^2 - 1}{n^2 - n_{eff}^2}} \\ -\cotan\left(\frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{n^2 - n_{eff}^2}\right) &= \sqrt{\frac{n_{eff}^2 - 1}{n^2 - n_{eff}^2}} \end{aligned} \quad (10)$$

B. E. d'électromagnétisme

Guide d'ondes diélectrique

Rendu : rapport et programmes fournis en annexe

La recopie même partielle du rapport ou des codes d'un autre groupe est interdite et est considérée comme une tentative de fraude appelée plagiat.

Les guides d'ondes optiques sous la forme de fibres, rubans, ou canaux optiques réalisés dans différents matériaux (silice, LiNbO₃, silicium...) prennent une place de plus en plus importante dans les dispositifs optiques passifs (transmission du signal, séparateurs, routeurs optiques...) et actifs (lasers, ...).

Le but du projet est de développer un solveur de modes en différences finies / volumes finis et de caractériser par la simulation, les modes de propagation guidée dans des guides d'ondes diélectriques. On mettra en oeuvre les techniques décrites dans l'article de Stern [1].

1 Modèle unidimensionnel d'un guide d'ondes

Dans ce projet, on suppose que la géométrie du guide est invariante selon Oy et Oz, que les matériaux diélectriques le constituant sont isotropes et que leurs propriétés respectent elles aussi ces invariances par translation. On suppose que la direction de propagation de l'onde est Oz. Les champs électriques et magnétiques complexes s'expriment alors selon la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(x, y, z, t) &= (E_x, E_y, E_z) \exp(j(\omega t - \beta z)) \\ \mathbf{H}(x, y, z, t) &= (H_x, H_y, H_z) \exp(j(\omega t - \beta z)) \end{cases} \quad (1)$$

et sont reliés au champ de déplacement et à l'induction magnétique par $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ et $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, dans l'approximation des milieux linéaires.

En se limitant aux milieux diélectriques qui nous intéressent dans ce projet, on a $\epsilon(x) = n(x)^2 \epsilon_0$ et $\mu(x) = \mu_0$.

2 Equations de Maxwell

En l'absence de sources de courant et de charges libres, les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} sont gouvernés par les équations de Maxwell suivantes :