

DM de Méthodes Numériques : guide d'ondes diélectrique

Ce travail est à réaliser en binôme et vient en complément du BE d'électromagnétisme sur les aspects numériques.

Le rapport et les programmes seront à rendre le jour du DS de méthodes numériques.

La recopie même partielle du rapport ou des codes d'un autre groupe est interdite et est considérée comme une tentative de fraude appelée plagiat.

Copier l'embryon de projet développé sous MatLab, se trouvant sous /users/commun/respg/phelma2/DM_WGmodes2017, dans votre répertoire de travail.

Noter que le sous-répertoire **src** contient les fonctions Matlab à compléter.

Le sous-répertoire **pcode** contient une version fonctionnelle mais non lisible de ce projet.

Les fonctions Matlab sont en version compilée et portent le suffixe **.p**

Si vous n'arrivez pas à développer une fonction Matlab, copier sa version compilée .p dans votre répertoire **src** pour continuer le développement du projet. **Elle est appelée en priorité par Matlab**. Supprimez-la ensuite de votre répertoire **src** pour tester votre propre fonction.

Les guides d'ondes optiques sous la forme de rubans, de canaux optiques intégrés dans du silicium prennent une place de plus en plus importante dans les dispositifs optiques passifs et actifs comme les séparateurs optiques ou les routeurs optiques.

Le but du projet est de développer un solveur de modes en différences finies / volumes finis et de caractériser par la simulation, les modes de propagation guidée dans un guide d'ondes diélectrique. On mettra en oeuvre les techniques décrites dans l'article de Stern (1995).

1 Hypothèses

Dans ce projet, on suppose que la géométrie du guide est invariante selon Oz, direction de propagation de l'onde, que les matériaux diélectriques le constituant sont isotropes et que leurs propriétés respectent elles aussi cette invariance par translation. Les champs électriques et magnétiques complexes s'expriment alors selon la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(x, y, z, t) &= (E_x, E_y, E_z) \exp(j(\omega t - \beta z)) \\ \mathbf{H}(x, y, z, t) &= (H_x, H_y, H_z) \exp(j(\omega t - \beta z)) \end{cases} \quad (1)$$

et sont reliés au champ de déplacement et à l'induction magnétique par $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ et $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, dans l'approximation des milieux linéaires.

En se limitant aux milieux diélectriques qui nous intéressent dans ce projet, on a $\epsilon(x, y) = n(x, y)^2 \epsilon_0$ et $\mu(x, y) = \mu_0$.

2 Equations de Maxwell

En l'absence de sources de courant et de charges libres, les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} sont gouvernés par les équations de Maxwell suivantes :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 & , & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -j\omega \mu_0 \mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = +\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = +j\omega n(x, y)^2 \epsilon_0 \mathbf{E} \end{cases} \quad (2)$$

Ces équations permettent de traiter des milieux diélectriques non magnétiques où l'indice varie spatialement dans le plan (x, y) selon une fonction connue.

3 Equations de Helmholtz dans un guide diélectrique

3.1 Dans un milieu homogène

On étudie dans un premier temps, la propagation d'une onde dans un guide constitué d'un seul matériau **homogène d'indice** n . Montrer en utilisant les équations de Maxwell et les hypothèses énoncées précédemment, que les champs sont gouvernés par les équations de Helmholtz suivantes :

$$\Delta_T \mathbf{E} + n^2 k_0^2 \mathbf{E} = \beta^2 \mathbf{E} \quad (3)$$

et

$$\Delta_T \mathbf{H} + n^2 k_0^2 \mathbf{H} = \beta^2 \mathbf{H} \quad (4)$$

où $\Delta_T = \partial_x^2 + \partial_y^2$ et $k_0 = 2\pi/\lambda$.

3.2 Dans un milieu à sauts d'indice

On montre que ces équations restent valides pour des guides comportant des sauts d'indice dans le plan de coupe (x, y) . Il est toutefois nécessaires de tenir compte des relations de continuité des composantes normales de \mathbf{D} et tangentielles de \mathbf{E} à l'interface entre deux milieux d'indices différents.

4 Modes scalaires dans un guide d'onde diélectrique

A l'interface de deux milieux diélectriques, les composantes normale de \mathbf{D} (notée D_n) et tangentielle de \mathbf{E} (notée E_t) sont continues.

Dans le cas d'une onde électrique longitudinale où seule la composante E_z est non nulle, dans un guide de section et de propriétés invariantes selon Oz, identifier au niveau d'une interface quelconque, D_n et E_t . Montrer que pour ce type d'onde, les relations de continuité sont automatiquement vérifiées à l'interface entre deux milieux et que par conséquent le champ E_z ainsi que ses dérivées dans le plan (x, y) sont continues.

Dans la suite du sujet, on notera simplement E la composante du champ électrique selon Oz.

Les modes scalaires de propagation $E(x, y)$ sont solutions de l'équation (3) que l'on réécrit en multipliant chacun de ses membres par $\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2$.

$$\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 (\partial_x^2 E + \partial_y^2 E) + n^2 E = n_{eff}^2 E \quad (5)$$

où $n_{eff}^2 = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \beta^2$.

En multipliant chaque membre de (5) par E puis en intégrant sur tout l'espace, retrouver la forme intégrale suivante, **en précisant les conditions aux limites** :

$$n_{eff}^2 \iint dx dy (E)^2 = \iint dx dy n^2 (E)^2 - \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \iint dx dy ((\partial_x E)^2 + (\partial_y E)^2) \quad (6)$$

On remarquera que $\partial_x^2 E + \partial_y^2 E = \Delta_T E = \text{div}_T (\nabla_T E)$.

En déduire qu'elle mène à l'inégalité :

$$n_{eff} < \max\{n\} \quad (7)$$

On admettra que les modes de propagation guidés respectent la contrainte $n_{eff} \in]0, \max\{n\}]$.

4.1 Partie analytique

On veut modéliser la propagation guidée d'une onde dans une couche mince diélectrique d'indice n et d'épaisseur $2a$, placée dans l'air.

1. Ecrire la forme simplifiée de l'équation (5) dans chaque milieu, en notant x la direction normale à la couche.
2. Déterminer de manière analytique les modes de propagation respectant les conditions aux limites à l'infini.
3. Retrouver la relation de dispersion suivante, déjà vue en cours :

$$\tan\left(\frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{n^2 - n_{eff}^2}\right) = \sqrt{\frac{n_{eff}^2 - 1}{n^2 - n_{eff}^2}} \quad (8)$$

On recherche des n_{eff} réels. En déduire l'intervalle dans lequel n_{eff} prend ses valeurs.

4. En prenant $a = \lambda = 1\mu m$ et $n = 3.5$, résoudre avec Matlab la relation de dispersion graphiquement puis numériquement en utilisant la fonction Matlab `fzero`. Elle résoud l'équation non-linéaire par la méthode de la tangente, au voisinage d'une valeur intuitive proche d'une racine. Pour chaque valeur de n_{eff} , tracer le mode guidé associé.
5. Donner l'expression du champ dans la structure en utilisant les résultats du TD.
6. Tracer les distributions de champ correspondant à chaque mode.

4.2 Modélisation numérique d'une multi-couche

4.2.1 En 1D

Le domaine de calcul de longueur finie L_x est discrétisé en volumes finis réguliers (Fig. 1), c'est-à-dire en un ensemble de segments jointifs de même longueur Δx . Les noeuds d'échantillonnage des champs et de l'indice se trouvent sur un réseau régulier comme en différences finies. Chaque noeud est par contre, localisé au centre d'un segment. La grille comporte N_x noeuds selon Ox.

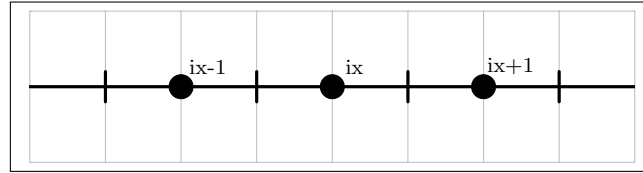


FIGURE 1 – Discrétisation en volumes finis 1D

L'intérêt principal de placer ainsi les noeuds d'échantillonnage, est de permettre de traiter un système composé de plusieurs couches avec des constantes diélectriques différentes.

1. Dans le cas particulier de volumes finis réguliers, on peut utiliser l'expression discrète en différences finies, de l'opérateur laplacien vue en cours. Rappeler son expression en l'appliquant à $E(x)$ en un noeud x du réseau.
2. Montrer que l'on peut écrire l'équation (5) après discrétisation, sous la forme matricielle :

$$\sum_j A_{i,j} E_j^m = n_{eff,m}^2 E_i^m \quad (9)$$

avec $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Préciser la forme générale de la matrice A sans se soucier des bords.

3. On tient maintenant compte de l'annulation du champ \mathbf{E} sur les noeuds du bord. En fixant $N_x = 4$, donner précisément le remplissage de A avec l'expression des termes non-nuls.
4. Développer une fonction `solve` permettant de calculer un sous-ensemble de valeurs propres (réelles) voisines de $\max\{n\}^2$ ainsi que les modes propres associés. On utilisera la fonction Matlab `spdiags` pour générer la matrice dont on veut calculer

les valeurs propres et les modes associés. Pour ce faire, mettre en oeuvre la fonction `eigs` fournie par Matlab.

5. Retrouver les modes de propagation et les valeurs de l'indice effectif n_{eff} obtenus analytiquement avec l'équation (8), pour une couche mince diélectrique. On prendra un domaine de calcul de taille bien plus grande que l'épaisseur de la couche. Expliquez pourquoi. Procéder à une étude de taille finie, autrement dit faites varier sa taille pour voir son influence sur les modes.
6. Etudier l'influence du pas de réseau sur les résultats de simulation.

4.2.2 En 2D

Le domaine de calcul est maintenant un rectangle de taille finie de longueurs L_x et L_y selon les axes principaux (Fig. 2). Les noeuds d'échantillonnage des champs se trouvent sur une grille régulière, chaque noeud se trouvant au centre d'une maille rectangulaire de côté Δx et Δy , coïncidant avec les pas de la grille. La grille comporte N_x noeuds selon Ox et N_y noeuds selon Oy.

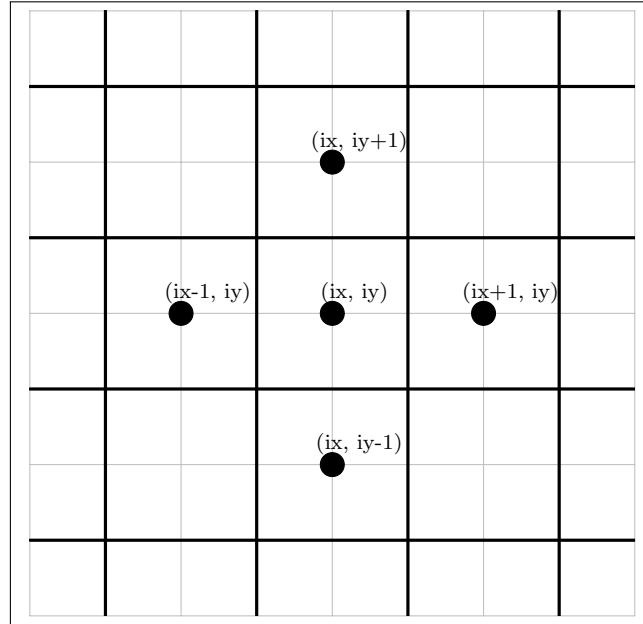


FIGURE 2 – Discretisation en volumes finis 2D

1. On numérote de manière unique les noeuds dans $\llbracket 1, N_x \cdot N_y \rrbracket$. Montrer qu'un choix de numérotation possible est donné par la relation $\text{ind}(ix, iy) = (iy - 1) * N_x + ix$ où $(ix, iy) \in \llbracket 1, N_x \rrbracket \times \llbracket 1, N_y \rrbracket$. Comment parcourt-on la grille? Quelles sont les coordonnées réelles (x, y) d'un noeud de coordonnées entières (ix, iy) en plaçant, pour simplifier, l'origine des coordonnées en bas et à gauche.

- Donner l'expression discrète en différences finies, de l'opérateur laplacien appliqué à $E(x, y)$ en un point **intérieur** (x, y) de la grille rectangulaire, forme généralisé de celui unidimensionnel vu en cours et du traitement 1D vu précédemment.

Indication : faire un développement de Taylor de $E(x, y)$ à partir des premiers voisins. On utilisera le développement limité suivant, pour une fonction à deux variables :

$$E(x+dx, y+dy) = E(x, y) + dx \partial_x E + dy \partial_y E + \frac{1}{2}(dx \partial_x + dy \partial_y)^2 E + \vartheta(dx, dy)^3 \quad (10)$$

où (dx, dy) sont des éléments infinitésimaux. Les dérivées partielles étant évaluées en (x, y) .

- Montrer que l'on peut écrire l'équation (5) après discrétisation, sous la forme matricielle :

$$\sum_j A_{i,j} E_j^m = n_{eff,m}^2 E_i^m \quad (11)$$

Préciser la forme générale de la matrice A sans se soucier des bords.

- On tient maintenant compte de l'annulation du champ \mathbf{E} sur les noeuds du bord. Dans le cas d'une grille 4×4 de pas de maille Δx et Δy , donner précisément le remplissage de A avec l'expression des termes non-nuls. Dans la suite, on verra comment éliminer les degrés de liberté liés aux noeuds de dirichlet. On admet que pour tout noeud i du bord, on laisse vide la ligne i dans la matrice A . Utiliser le patron de la matrice vide fournie en annexe.

4.3 Modes propres avec conditions de dirichlet

On présente ici une méthode générale pour calculer les modes propres en imposant une condition d'annulation du champ sur le bord.

En notant N_d le nombre de noeuds où la condition de dirichlet est imposée, le nombre de degrés de liberté se réduit alors à $N_{dof} = N - N_d$.

4.4 Algorithme

L'algorithme consiste à former une liste l_d où apparaissent de manière unique les numéros des noeuds fixes du bord.

On forme ensuite une matrice de projection P permettant de passer de l'espace des solutions à N degrés de liberté (étude précédente) à celui restreint à N_{dof} degrés de liberté. Les dimensions de P sont $N_{dof} \times N$ (nombre de lignes \times nombre de colonnes).

On initialise la matrice P avec la matrice identité $\text{Id}(N)$ puis on supprime toutes les lignes correspondant aux noeuds de dirichlet. Cette technique est bien adaptée à Matlab : si ld est la liste des noeuds de dirichlet sans doublon alors on peut implémenter les instructions Matlab suivantes :

$$P = \text{speye}(N, N); P(ld, :) = [];$$

$$P = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

FIGURE 3 – exemple de matrice P avec $ld = [1, 3]$

On construit ensuite A_p qui est la matrice projetée de A dans l'espace solution à N_{dof} degrés de liberté : $A_p = PAP^t$.

On résoud l'équation aux valeurs propres : $PAP^t E_p = \lambda_p E_p$.

On obtient alors les valeurs propres λ_p associées aux vecteurs propres E_p .

On reconstruit la solution dans l'espace à N noeuds en appliquant $E = P^t E_p$. Elle vérifie automatiquement, $E(i) = 0$ pour tout noeud i de dirichlet.

4.5 Développement logiciel pour l'approche 2D

Le répertoire `src_gen` contient les fichiers Matlab `WGgen.m` et `inpoly.m`. La fonction `WGgen` permet de discrétiser un guide d'ondes en différences finies. Dans l'exemple fourni, on définit d'abord une boîte d'air de forme rectangulaire $[-5\mu m, 5\mu m] \times [-3\mu m, 3\mu m]$ grâce à la fonction `uniform_grid` qui retourne une structure de données `g`. Les pas de la grille sont stockés dans `g.dx` et `g.dy`. Chaque noeud de la discrétisation est repéré par le couple d'indices entiers (ix, iy) et ses coordonnées réelles sont données par `g.x(ix, iy)` et `g.y(ix, iy)`. L'indice optique dans la maille volume fini associée à (ix, iy) est donné par `g.indice(ix, iy)`.

En supposant que le guide d'onde puisse être décrit par un polygone, on définit d'abord les coordonnées de ses sommets que l'on place dans un tableau noté `region` dans l'exemple. On l'insère ensuite dans la grille, grâce à la fonction `insert` en précisant en plus son indice de réfraction.

Listing 1 – programme de discrétisation d'un guide d'onde

```
% WGgen : generateur d'une grille reguliere de type
% differences/volumes finis
% Auteurs JC Toussaint & L Bastard - BE EM

5 % dependance : fonction inpoly
% Auteur : Darren Engwirda
%
% Bibliographie :
% Stern Progress in Electromagnetics Research (1995),
10 % PIER 10, 123-186
% Finite Difference Analysis of Planar Optical Waveguides
%
```

```

function g=WGgen
15  clc
    clear all
    close all

    h=0.1;
20  g=uniform_grid(-5.0, 5.0, -3.0, 3.0, h, h);
    g.lambda=1.;

    % coordonnees des sommets du polygone
    % decrivant une portion du guide
25  region = [
        -2  -1;
        +2  -1;
        +1  +1;
        -1  +1
30      ];

    indice=3.5;
    g=insert(g, region, indice);
end

35  function g=uniform_grid(xmin, xmax, ymin, ymax, hx, hy)
    % generation d'un reseau orthorhombique de noeuds
    % chacun place au centre d'une maille rectangulaire
    % de cote g.dx=hx et g.dy=hy
40  % g.Nx noeuds selon Ox
    % g.Ny noeuds selon Oy
    % g.indice(ix, iy) indice de refraction au noeud
    % de coordonnees entieres (ix, iy) initialise a 1

45  lx=xmin+hx/2:hx:xmax-hx/2;
    ly=ymin+hy/2:hy:ymax-hy/2;

    [g.x,g.y] = meshgrid(lx, ly);
    g.x=transpose(g.x);
50  g.y=transpose(g.y);

    g.p      = [g.x(:),g.y(:)];
    [g.Nx, g.Ny]=size(g.x);

55  g.reg =zeros(g.Nx, g.Ny);
    g.indice =ones(g.Nx, g.Ny);
    size(g.indice)

```



```

g.N=g.Nx*g.Ny;
60 g.nrg=0;
g.dx=hx;
g.dy=hy;
figure(1)
plot(g.p(:, 1), g.p(:, 2), 'ro');
65 hold on
end

function g=insert(g, node, indice)
% insertion d'un polygone decrivant une portion
70 % de guide en 2D.
% node : tableau 2D des coordonnees des sommets du polygone
% indice : valeur de l'indice de refraction du materiau
% associe au polygone.

75 figure(1)
tic, [in,bnd] = inpoly(g.p,node); t1 = toc;
if find(bnd==1)
    warning('nodes on boundaries detected')
end;
80 g.nrg=g.nrg+1;
lst_in=find(in==1);
g.reg(lst_in)=g.nrg;
g.indice(lst_in)=indice;
plot(g.p(in,1),g.p(in,2),'bo',g.p(bnd,1),g.p(bnd,2),'go')
85 hold on
title('Inside (blue), outside (red) & boundary (green)')

% Plot geometry
nn = size(node,1);
90 cnect = [(1:nn-1)', (2:nn)'; nn,1];
patch('faces',cnect,'vertices',node,'facecolor','none',...
    'edgecolor','k'), axis equal
drawnow()
end

```

1. Exécuter le générateur de guide WGgen.
2. Montrer qu'il est possible de générer des guides de forme complexe constitués de plusieurs rubans et canaux.

4.6 Solveur de modes scalaires

Développer votre solveur de modes scalaires, solutions de l'équation aux valeurs propres (5).

1. Développer une fonction `dirichlet(g)` permettant de construire la liste `ld` des noeuds du bord où sont appliquées la conditions de dirichlet. Elle retourne la structure de données `g` contenant en plus la liste `ld` comme donnée membre.
On rappelle que l'instruction `ld = [ld e]` permet d'insérer l'élément `e` dans la liste `ld`. N'oubliez pas d'appliquer la fonction `ld=unique(ld)` pour enlever tout doublon avant de retourner la liste.
2. Développer une fonction `build_A` permettant de remplir la matrice `A` pour une grille de taille $N_x \times N_y$. On rappelle que toute ligne `n` de `A` correspondant à un noeud de dirichlet n'est pas remplie.
On utilisera la fonction d'appartenance Matlab `any(n==g.ld)` pour savoir si le noeud `n` se trouve dans la liste `g.ld` des noeuds de dirichlet.
3. Développer une fonction `solve` permettant de calculer un sous-ensemble de valeurs propres (réelles) voisines de $\max\{n\}^2$ ainsi que les modes propres associés. On utilisera la fonction Matlab `eigs`.
4. Test sur un guide métallique. On suppose que la longueur d'onde $\lambda = 1\mu m$. Pour un système rectangulaire de taille $L_x = 2\mu m$ et $L_y = 1\mu m$, déterminer les 4 premiers modes et comparer à la solution analytique de l'équation d'Helmholtz (3).
Indication : chercher des solutions de la forme $\sin(k_x x) \cdot \sin(k_y y)$ en prenant l'origine des coordonnées en bas à gauche. Reporter les valeurs propres et les contours des modes associés dans votre rapport.

5 Modes quasi-TE dans un guide d'onde

Les modes quasi-TE (Transverse Electrique) sont définis par :

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = (E_x, 0, E_z) \exp(j(\omega t - \beta z)) \quad (12)$$

Ils sont solutions de :

$$\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \Delta_T E_x + n^2 E_x = n_{eff}^2 E_x \quad (13)$$

où $n_{eff}^2 = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \beta^2$.

La conservation du flux du champ de déplacement impose que les champs E_x et E_z sont interdépendantes. Par conséquent, montrer qu'en tout point où l'indice est constant :

$$E_z = -\frac{j}{\beta} \frac{\partial E_x}{\partial x} = -\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right) \frac{j}{n_{eff}} \frac{\partial E_x}{\partial x} \quad (14)$$

Montrer que, dans ce mode, la composante du vecteur de Poynting selon Oz s'écrit :

$$S_z(x, y) = \frac{n_{eff} \epsilon_0}{2} c \left(E_x E_x^* - \left(\frac{\lambda}{2\pi n_{eff}}\right)^2 E_x \partial_x^2 E_x^* \right) \quad (15)$$

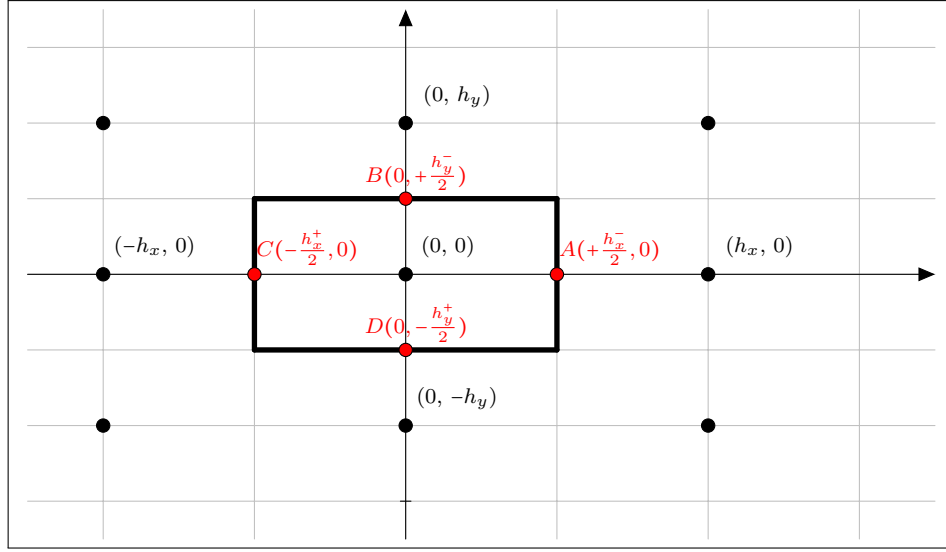


FIGURE 4 – Volume de controle (rectangle en lignes épaisses pour un maillage 2D)

où E_x^* est le complexe conjugué de E_x .

Dans le cas de modes quasi-transverses, les relations de continuité de D_n et E_t ne sont plus automatiquement vérifiées lors d'un saut d'indice au niveau d'une interface entre deux milieux. Il est alors nécessaire de mettre en oeuvre une méthode de résolution de l'équation de Helmholtz appelée méthode des volumes finis.

Elle impose d'abord de définir un ensemble de volumes de controle jointifs (cellules rectangulaires dans le cas des volumes finis réguliers), centrés en chaque noeud d'échantillonnage (Fig. 4).

On remplace ensuite l'équation locale estimée en chaque noeud par son intégrale sur le volume de controle associé. Celle sur le laplacien est remplacée par une intégrale de flux sur les bords du volume de controle (Théorème de Green) :

$$\iint_{V_c} dx dy \Delta_T E_x(x, y) = \oint_{\partial V_c} dl \mathbf{n} \cdot \nabla_T E_x \quad (16)$$

On admettra que les intégrales peuvent être estimées numériquement avec précision en utilisant un seul point d'intégration localisé au centre du volume V_c . Ainsi pour celui centré en $(0, 0)$, on a :

$$\iint_{V_c} dx dy \Delta_T E_x(x, y) \approx h_x h_y \Delta_T E_x(0, 0) \quad (17)$$

1. En utilisant la même approximation pour les intégrales linéiques, montrer que l'on

a :

$$h_x h_y \Delta_T E_x(0,0) = \oint_{\partial V_c} dl \mathbf{n} \cdot \nabla_T E_x \approx h_y \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} \left(+\frac{h_x^-}{2}, 0 \right) - \frac{\partial E_x}{\partial x} \left(-\frac{h_x^+}{2}, 0 \right) \right] + h_x \left[\frac{\partial E_x}{\partial y} \left(0, +\frac{h_y^-}{2} \right) - \frac{\partial E_x}{\partial y} \left(0, -\frac{h_y^+}{2} \right) \right] \quad (18)$$

2. Approximez $\frac{\partial E_x}{\partial x} \left(\frac{h_x^-}{2}, 0 \right)$ par sa dérivée décentrée faisant intervenir les champs échantillonnés au centre du volume et au point A sur le bord droit (Fig. 4), en négligeant les termes d'ordre 1 en h_x . Faites de même avec les autres dérivées.
3. Placez-vous ensuite dans la cellule de droite, faites un D.L. du champ en $(h_x, 0)$ en fonction de celui estimé en $\left(\frac{h_x^+}{2}, 0 \right)$ à l'ordre 2 exclu. Utilisez les relations de continuité pour donner une estimation de $\frac{\partial E_x}{\partial x} \left(\frac{h_x^-}{2}, 0 \right)$ sous la forme d'un accroissement. Faites de même avec les autres cellules premières voisines.
4. Montrer que $\partial_x E_x \left(\frac{h_x^-}{2}, 0 \right) = \partial_x E_x \left(\frac{h_x^+}{2}, 0 \right)$ et $\partial_y E_x \left(0, \frac{h_y^-}{2} \right) = \partial_y E_x \left(0, \frac{h_y^+}{2} \right)$.
5. Retrouvez l'expression discrète de $\Delta_T E_x(0,0)$ présentée dans le papier de Stern page 135. Elle s'écrit comme une combinaison linéaire des champs E_x échantillonnés en $(0,0)$ et aux quatre points cardinaux premiers voisins, pondérée par des coefficients dépendant de l'indice local.
6. Implémenter une fonction calculant la composante du vecteur de Poynting échantillonné aux noeuds de la grille. On tiendra naturellement compte des remarques précédentes sur le calcul du laplacien.

5.1 Solveur de modes TE

Dupliquer votre solveur de modes scalaires pour implémenter cette nouvelle version permettant de calculer les modes TE.

6 Modes quasi-TM dans un guide d'onde

Les modes quasi-TM (Transverse Magnétique) sont définis par :

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = (0, E_y, E_z) \exp(j(\omega t - \beta z)) \quad (19)$$

Refaire la même analyse théorique que précédemment. Développer finalement un solveur de modes TM.

7 Mise en application

Appliquez vos codes de résolution de modes quasi-TE et quasi-TM pour caractériser des guides d'ondes semi-conducteurs proposés par Stern, de type ruban (Fig. 5) et de type

intégré (Fig. 6). Pour chaque type de guides, fixez un jeu de paramètres et comparez avec les résultats obtenus par Stern.

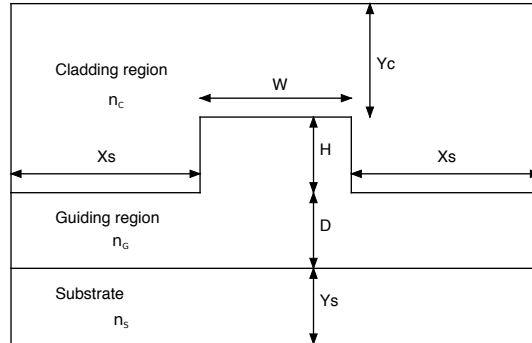


FIGURE 5 – guide d'onde de type ruban

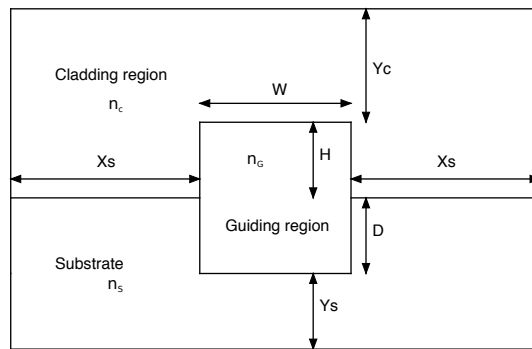


FIGURE 6 – guide d'onde de type intégré

8 Références

M. S. Stern, “Finite difference analysis of planar optical waveguides,” Prog. Electromagn. Res., vol. 10, pp. 123–186, 1995.

M. S. Stern, “Semivectorial polarized finite difference method for optical waveguides with arbitrary index profiles,” Proc. Inst. Elect. Eng., J, vol. 135, no. 1, pp. 56–63, 1988.

8.1 Annexe : structure de la matrice associée à l'équation aux valeurs propres

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10	11	12	13	14	15	16
1																
2																
3																
4																
5																
6																
7																
8																
9																
10																
11																
12																
13																
14																
15																
16																

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10	11	12	13	14	15	16
1																
2																
3																
4																
5																
6																
7																
8																
9																
10																
11																
12																
13																
14																
15																
16																

8.2 Annexe : formules utiles sur les opérateurs différentiels

On note ci-après $f(\mathbf{r})$ et $g(\mathbf{r})$ deux fonctions scalaires, $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ et $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ deux fonctions vectorielles, définies en tout point \mathbf{r} de l'espace.

$$\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f \quad (20)$$

$$\nabla \cdot (f \mathbf{u}) = f \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla f \quad (21)$$

$$\nabla \times (f \mathbf{u}) = f \nabla \times \mathbf{u} + (\nabla f) \times \mathbf{u} \quad (22)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (23)$$

$$\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (24)$$

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (25)$$