第八章 多元微分学及其应用

习题 8.1 多元函数的极限与连续

（A）

1.略

2．求下列函数的定义域:

⑴ z=$\sqrt{x-\sqrt{y}}$,　　⑵ $z=\sqrt{x\sin y}$, ⑶ $u=e^{x}+\ln(x^{2}+y^{2}-1)$,

⑷ $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}$, ⑸ $z=\ln(y-x^{2})+\sqrt{1-x^{2}-y^{2}}$.

解⑴: 由$\begin{cases} y\geq 0, \\ x-\sqrt{y}\geq 0 \end{cases}$得$\begin{cases} y\geq 0,x\geq 0, \\ x^{2}\geq y. \end{cases}$

　故所求定义域为 D=$\{(x,y)|x\geq 0,x^2\geq y\geq 0\}$.

⑵: 由 $x\sin y\geq 0$ 得所求定义域为

$$D=\left\{(x,y)\middle|x\geq 0,\ 2k\pi\leq y\leq(2k+1)\pi\right\}\cup\{(x,y)|x<0,\ (2k+1)\pi<y<2(k+1)\pi\}$$

⑶: 由 $x^{2}+y^{2}-1>0$ 得所求定义域为 $\{(x,y)|x^{2}+y^{2}>1\}$

⑷: 由$\begin{cases} x^{2}+y^{2}\neq 0, \\ \left|\dfrac{z}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}\right|\leq 1 \end{cases}$得$\begin{cases} (x,y)\neq(0,0), \\ z^{2}\leq x^{2}+y^{2}. \end{cases}$故所求定义域为

$$D=\{(x,y,z)|z^{2}\leq x^{2}+y^{2},(x,y)\neq(0,0)\}$$

解⑸: 由 $y-x^{2}>0,\ 1-x^{2}-y^{2}\geq 0$ 得所求定义域为 $D=\{(x,y)|y>x^{2},x^{2}+y^{2}\leq 1\}$

3.计算题

⑴ 设 $f\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}{x},x>0$, 求 $f(x)$, ⑵设 $f\left(xy,\dfrac{y^{2}}{x}\right)=x^{2}+y^{2}$, 求 $f(\dfrac{y^{2}}{x}xy)$.

解⑴　由 $f\left(\dfrac{y}{x}\right)=\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^{2}}$, 得 $f(x)=\sqrt{1+x^{2}}$

⑵ 令 $u=xy,\ v=\dfrac{y^{2}}{x}$ 解得 $x=\sqrt[3]{\dfrac{u^{2}}{v}},\ y=\sqrt[3]{uv}$,则有

$$f(u,v)=\left(\frac{u^{2}}{v}\right)^{\frac{2}{3}}+(uv)^{\frac{2}{3}},\text{即}\quad f(v,u)=\left(\frac{v^{2}}{u}\right)^{\frac{2}{3}}+(uv)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{y}{x}\right)^{2}+y^{2},$$

故 $f(\dfrac{y^{2}}{x}xy)=\left(\dfrac{y}{x}\right)^{2}+y^{2}$

4.求下列极限:

⑴ $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty+\infty)}\dfrac{x+y}{x^{2}+y^{2}}$, ⑵ $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,a)}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^{2}}{x+y}}$, ⑶ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{4+x^{2}+y^{2}}-2}{\sin(x^{2}+y^{2})}$

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{\ln(x^2+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$， (5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\tan(xy^2)}{y}$， (6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2\cdot y^2}$.

解(1) 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta(r>0)$，则有

原式$=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}=\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{1}{r}(\sin\theta+\cos\theta)=0$

(2) 原式$=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{x}{x+y}}=e^1=e$.

(3) 令 $t=x^2+y^2$，得， 原式$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sqrt{4+t}-2}{\sin t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{\sin t(\sqrt{4+t}+2)}=\dfrac{1}{4}$

(4) 原式$==\dfrac{\ln e}{1}=1$

(5) 原式$=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\tan(xy^2)}{y}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\tan(xy^2)}{xy^2}xy=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\tan(xy^2)}{xy^2}\cdot\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}xy=0$

(6) 原式$=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left[(x^2+y^2)^{(x^2+y^2)}\right]^{\frac{x^2\cdot y^2}{x^2+y^2}}$，而

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{(x^2+y^2)}=\lim\limits_{t\to0^+}t^t=1$， $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2\cdot y^2}{x^2+y^2}=0$,故 原式$=1^0=1$

5.证明下列极限不存在:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x}{|x|+|y|}$， (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$， (3) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$，

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$.

证(1) 令 $y=kx$ 则有，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x}{|x|+|y|}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{(1+|k|)|x|}$ 极限不存在.

(2) 设动点 $P(x,y)$沿 $y=kx\,(k\neq\mathbf{1})$ 趋于点 $P_0(0,0)$,则

原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{k^2x^4}{k^2x^4+x^2(1-k)^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{k^2x^2}{k^2x^2+(1-k)^2}=0\quad(k\neq\mathbf{1})$;

但当 k=1 时,即沿直线 $y=x$ 的路线让 $P\to P_0$时,又有原式$=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^4}{x^4+0}=1\neq0$，

所以原极限不存在.

(3) 令 $y=kx^{\mathbf{2}}$ 则有

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{kx^4}{x^4+k^2x^4}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{k}{1+k^2}$ 与 k 取值有关，故极限不存在.

(4) 令 $y=x$ 则有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}=\lim\limits_{x\to0}(1+x^2)^{\frac{1}{2x}}=e^0=1$，而

当 $y=x^{\mathbf{2}}-x$ 则有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}=\lim\limits_{x\to0}(1+x^3-x^2)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3-x^2}{x^2}}=\dfrac{1}{e}$

所以原极限不存在.

6. 讨论下列函数的连续性

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, (2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0,\\ 0, \quad x^2+y^2=0\end{cases}$

(3) $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{y}, y\neq 0,\\ 0, \quad y=0\end{cases}$, (4) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

解(1) 显然，当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时函数连续，而当 $(x,y)=(0,0)$ 时，函数无定义，即函数在点 $(0,0)$ 间断。

(2) 显然，当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时函数连续，而当 $(x,y)=(0,0)$ 时，由

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{y=kx\to 0}\dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$ 与 k 取值有关，极限不存在可得函数在点 $(0,0)$ 间断。

(3) 由定义, $f(0,0)=0$,而当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, x 是无穷小, $\sin\dfrac{1}{y}$ 是有界变量,

从而, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x\sin\dfrac{1}{y}=0$,

所以, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)$, 即函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续.

又当 $x=a\neq\mathbf{0},\ y=\mathbf{0}$ 时， $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to 0}}x\sin\dfrac{1}{y}$ 不存在,

所以，函数在点 $(a,0)(a\neq 0)$ 间断.

(4) 显然，当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时函数连续，而当 $(x,y)=(0,0)$ 时，由

$$0\le\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right|\le\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left|\frac{x^2y^2}{2xy}\right|=\frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}|xy|=0=f(0,0)$$

得 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)$, 即函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 也连续。即函数处处连续。

(B)

1. 函数 $z=\left(\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}\right)^{xy}$ 是经过什么样的两个函数关系复合而成的?

解：函数 $z=\left(\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}\right)^{xy}$ 是由函数 $z=e^u, u=xy\ln(\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2})$ 复合而成.

2. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2+xy), x^2+y^2\neq 0,\\ 0, \quad x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点的连续性.

解:由于 $0\le|(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2+xy)|\le|(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2+\dfrac{x^2+y^2}{2})|$,

又由换元$t=x^2+y^2$,可得$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2+\frac{x^2+y^2}{2})=\lim\limits_{t\to 0}t\ln(\frac{3t}{2})=0$.

再由夹逼准则知$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2+xy)=0=f(0,0)$,

故函数在(0,0)处连续.

3. 证明：P_0点为点集D的聚点当且仅当存在点列$P_n\in D$且$P_n\neq P_0$使得$P_n\to P_0$.

解: ($\Rightarrow$)由P_0点为点集D的聚点，$\forall\delta>0,\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)\cap D\neq\phi$.

特别地，当$\delta_1=1$时，取$P_1\in\overset{\circ}{U}(P_0,\delta_1)\cap D$，

当$\delta_2=\min\{\frac{1}{2},d(P_1,P_0)\}$时，取$P_2\in\overset{\circ}{U}(P_0,\delta_2)\cap D,\cdots$，

当$\delta_n=\min\{\frac{1}{n},d(P_{n-1},P_0)\}$时，取$P_n\in\overset{\circ}{U}(P_0,\delta_n)\cap D,\cdots$.

则上述给出的点列$\{P_n\}$中的各项互异，且有$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$.

($\Leftarrow$)$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0,\forall\delta>0,\exists N,n>N,|P_n-P_0|<\delta$,即$P_n\in\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)\cap D$ 得证.

习　题 8.2　多元函数的导数与微分

(A)

1. 求下列函数的偏导数:

(1) $z=x^3y+xy^3$;　　(2) $z=x^2\sin(y+x)$;

(3) $z=\ln(x^2+e^{2y})$;　　(4) $u=\rho e^{t\varphi}+e^{-\varphi}+t$ （ρ,φ,t均为变量）;

(5) $z=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{y}{x}}$;　　(6) $z=xy\sin e^{\pi xy}$.

解：(1) $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y+y^3;\frac{\partial z}{\partial y}=x^3+3xy^2$

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin\left(y+x\right)+x^2\cos\left(y+x\right);\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cos\left(y+x\right)$

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x^2+e^{2y}}.2x=\frac{2x}{x^2+e^{2y}};\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x^2+e^{2y}}.2e^{2y}=\frac{2e^{2y}}{x^2+e^{2y}}$

(4) $\frac{\partial u}{\partial p}=e^{t\varphi};\frac{\partial u}{\partial t}=p\varphi e^{t\varphi}+1;\frac{\partial u}{\partial\varphi}=tpe^{t\varphi}-e^{-\varphi}$

(5) 由$z=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{y}{x}}=\left(3\right)^{\frac{y}{x}}$,则:$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(3\right)^{\frac{y}{x}}\cdot\ln 3\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{\left(3\right)^{\frac{y}{x}}y\ln 3}{x^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(3\right)^{\frac{y}{x}}\ln 3\cdot\frac{1}{x}=\frac{\left(3\right)^{\frac{y}{x}}\ln 3}{x}$$

(6) $\frac{\partial z}{\partial x}=y\sin e^{\pi xy}+xy\cos e^{\pi xy}\cdot e^{\pi xy}\cdot\pi y=y\left(\sin e^{\pi xy}+\pi xye^{\pi xy}\cos e^{\pi xy}\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\left(\sin e^{\pi xy}+y\cos e^{\pi xy}\cdot e^{\pi xy}\cdot\pi x\right)=x\left(\sin e^{\pi xy}+\pi xye^{\pi xy}\cos e^{\pi xy}\right)$$

2. 设$z=e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}$,求证$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2z.$

证明:$\because\ \frac{\partial z}{\partial x}=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\cdot-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)};\frac{\partial z}{\partial y}=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\cdot-\left(-\frac{1}{y^2}\right)=\frac{1}{y^2}e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$

$\therefore x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}+e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=2z$

3. 设$f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$, 求$f_x(x,1)$.

解:$\because\ f\left(x,1\right)=x;\therefore f_x\left(x,1\right)=1$

4. 求下列函数的$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$:

(1) $z=x^3y^2-3xy^3-xy+1$;　(2) $z=\arcsin(xy)$;　(3) $z=x^{2y}$;

(4) $z=e^x(\cos y+x\sin y)$;　(5) $z=x^3\sin y+y^3\sin x$.

解:(1) $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2-3y^3-y;\frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y-9xy^2-x$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial\left(3x^2y^2-3y^3-y\right)}{\partial x}=6xy^2;\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial\left(2x^3y-9xy^2-x\right)}{\partial y}=2x^3-18xy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\left(3x^2y^2-3y^3-y\right)}{\partial y}=6x^{2y}-9y^2-1$$

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{\sqrt{1-(xy)^2}};\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{\sqrt{1-(xy)^2}},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial\left(\frac{y}{\sqrt{1-(xy)^2}}\right)}{\partial x}=y\cdot\frac{-\frac{-2(xy)\cdot y}{2\left(\sqrt{1-(xy)^2}\right)}}{\left(\sqrt{1-(xy)^2}\right)^2}=\frac{xy^3}{\left(1-x^2y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial\left(\frac{x}{\sqrt{1-(xy)^2}}\right)}{\partial y}=x\frac{-\frac{-2(xy)\cdot x}{2\left(\sqrt{1-(xy)^2}\right)}}{\left(\sqrt{1-(xy)^2}\right)^2}=\frac{x^3y}{\left(1-x^2y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{y}{\sqrt{1-(xy)^2}}\right)}{\partial y}=\frac{\sqrt{1-(xy)^2}-y\cdot\frac{-2(xy)\cdot x}{2\left(\sqrt{1-(xy)^2}\right)}}{\left(\sqrt{1-(xy)^2}\right)^2}=\frac{1-(xy)^2+(xy)^2}{\left(1-(xy)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\left(1-x^2y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=2yx^{2y-1};\frac{\partial z}{\partial y}=2x^{2y}\ln x$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial\left(2yx^{2y-1}\right)}{\partial x}=2y(2y-1)x^{2y-2};\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4x^{2y}(\ln x)^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\left(2yx^{2y-1}\right)}{\partial y}=2x^{2y-1}+4yx^{2y-1}\ln x=2x^{2y-1}\left(1+2y\ln x\right)$$

(4) $\frac{\partial z}{\partial x}=e^x(\cos y+x\sin y)+e^x\sin y=e^x\left(\cos y+(x+1)\sin y\right);\frac{\partial z}{\partial y}=e^x\left(-\sin y+x\cos y\right)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^x\left(\cos y+(x+1)\sin y\right)+e^x\sin y=e^x\left(2\sin y+\cos y+x\sin y\right);\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-e^x\left(\cos y+x\sin y\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^x\left(-\sin y+x\cos y\right)+e^x\cos y=e^x(\cos y-\sin y+x\cos y)$$

(5) $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2\sin y+y^3\cos x;\frac{\partial z}{\partial y}=x^3\cos y+3y^2\sin x$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x\sin y-y^3\sin x;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-x^3\sin y+6y\sin x;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3x^2\cos y+3y^2\cos x$$

5. 设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$, 求 $f_{xx}(0,0,1), f_{xz}(1,0,2)$.

解：$\because f_x(x,y,z)=y^2+2zx;f_{xx}(x,y,z)=2z;f_{xz}(x,y,z)=2x$

$\therefore f_{xx}(0,0,1)=2;f_{xz}(1,0,2)=2$

6. 求全微分

(1) $z=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$, 求 dz.　　(2) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$, 求 $dz|_{(x,y)=(1,1)}$;

(3) $z=x\sin(x+y)+e^{x-y}$, 求 $dz|_{(x,y)=(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})}$;　　(4) $z=e^{\frac{1}{x}}\sin(xy)$, 求 dz;

(5) $u = x^y y^z z^x$，求 du.

解：(1) $z = \dfrac{x^2 - y^2 + 2y^2}{x^2 - y^2} = 1 + \dfrac{2y^2}{x^2 - y^2}$

$$dz = \frac{-2y^2 \cdot 2x}{\left(x^2 - y^2\right)^2}dx + \frac{4y\left(x^2 - y^2\right) - 2y^2 \cdot (-2y)}{\left(x^2 - y^2\right)^2}dy = \frac{4xy}{\left(x^2 - y^2\right)^2}(xdy - ydx)$$

(2) $dz = \left(4x^3 - 8xy^2\right)dx + \left(4y^3 - 8x^{2y}\right)dy; dz\big|_{(1,1)} = -4dx - 4dy = -4(dx + dy)$

(3) $dz = \left[\sin(x+y) + x\cos(x+y) + e^{x-y}\right]dx + \left[x\cos(x+y) - e^{x-y}\right]dy,\ dz\Big|_{\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)} = 2dx - dy.$

(4) $dz = \left[e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) \cdot \sin(xy) + ye^{\frac{1}{x}}\cos(xy)\right]dx + \left[xe^{\frac{1}{x}}\cos(xy)\right]dy$

$$= e^{\frac{1}{x}}\left[y\cos(xy) - \frac{1}{x^2}\sin(xy)\right]dx + \left[xe^{\frac{1}{x}}\cos(xy)\right]dy$$

(5) $du = \left(yx^{y-1}y^z z^x + x^y y^z z^x \ln z\right)dx + \left(x^y \ln x \cdot y^z z^x + x^y y^{z-1} z^{x+1} \ln z\right)dy +$

$\left(x^y y^z \cdot \ln y \cdot z^x + x^{y+1} y^z z^{x-1}\right)dz$

$$= x^y y^z z^x\left[\left(\frac{y}{x} + \ln z\right)dx + \left(\frac{z}{y} + \ln x\right)dy + \left(\frac{x}{z} + \ln y\right)dz\right]$$

7.计算函数 $u(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$ 在点 $P(2,1)$, $\Delta x = 0.01, \Delta y = 0.03$ 的全微分,并计算 $u(2.01,1.03)$ 的近似值.

解：Q $du = \dfrac{y \cdot \left(x^2 - y^2\right) - xy \cdot 2x}{\left(x^2 - y^2\right)^2}dx + \dfrac{x \cdot \left(x^2 - y^2\right) - xy \cdot 2y}{\left(x^2 - y^2\right)^2}dy = \dfrac{x^2 + y^2}{\left(x^2 - y^2\right)^2}(xdy - ydx)$

$\therefore$ 当 $x_0 = 2, y_0 = 1, \Delta x = 0.01, \Delta y = 0.03$ 时：

$$du\big|_{(x_0,y_0)} = \frac{x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2}}{\left(x_0^{\ 2} - y_0^{\ 2}\right)^2}(x_0 dy - y_0 dx) = 0.03; u(2,1) = \frac{2}{3} = 0.67$$

由：$\Delta u = u(2.01,1.03) - u(2,1)$，得：$u(2.01,1.03) \approx du + u(2,1) = 0.03 + 0.67 = 0.70$

8. 证明 $f_x'(x,y_0) = \dfrac{d}{dx}[f(x,y_0)]$，并利用此结论，当 $f(x,y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ 时，求 $f_x'(x,1)$.

证明：Q $f_x(x,y_0) = f_x(x,y)\big|_{y=y_0} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}\Bigg|_{y=y_0}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y_o) - f(x_0, y_o)}{\Delta x} = \frac{d\left[f(x,y_o)\right]}{dx}, \quad \therefore f_x(x,1) = x' = 1$$

9. 已知 $z = \ln\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$，求 $z''_{xx} + z''_{yy}$.

解：$\because\ z=\dfrac{1}{2}\ln\left[\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2\right]$,

$$\therefore z_x=\frac{1}{2}\frac{1}{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}\cdot 2\left(x-x_0\right)=\frac{\left(x-x_0\right)}{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}$$

$$z_{xx}=\frac{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2-2\left(x-x_0\right)^2}{\left(\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2\right)^2}=\frac{\left(y-y_0\right)^2-\left(x-x_0\right)^2}{\left(\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2\right)^2}$$

同理：$z_{yy}=\dfrac{\left(x-x_0\right)^2-\left(y-y_0\right)^2}{\left(\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2\right)^2}$，　　$\therefore z_{xx}+z_{yy}=0$

10. 举例说明多元函数连续、偏导数存在、可微、偏导数连续之间的关系.

（1）函数在某点连续与在该点的偏导不能互相推出

例如：

函数$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$在点$\left(0,0\right)$处的偏导$f_x\left(0,0\right)$、$f_y\left(0,0\right)$存在，

但在其点不连续。而函数z=$\sqrt{x^2+y^2}$在点$\left(0,0\right)$处连续，但在其点偏导不存在。

（2）函数在某点可微可以推出该函数在其点连续、且偏导存在，但反之不成立。

例如：

函数$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$在点$\left(0,0\right)$处的偏导$f_x\left(0,0\right)$、$f_y\left(0,0\right)$存在，

但在点$\left(0,0\right)$处不可微。

（3）函数在某点的偏导连续可推出函数在该点可微，但反之不成立。例如：

函数$f\left(x,y\right)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$在点$\left(0,0\right)$处连续且可微，

但其偏导$f_x\left(0,0\right)$、$f_y\left(0,0\right)$存在却不连续。

(B)

1. 设在 R^2 内有 $f_x=0$ 及 $f_y=0$,证明 f 在 R^2 上为常函数.

证:由 $f_x=0$ 及 $f_y=0$ 可知, 函数存在连续的偏导数, 故函数 f 可微.

由微分的定义 $df(x,y)=f_x dx+f_y dy=0$,即 $f(x,y)=C$.

2. 证明函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

证：$f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$,即极限不存在,

同理, $f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta y|}{\Delta y}$,极限也不存在,

从而函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点偏导数不存在，故函数在 $(0,0)$ 不可微.

3. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0, \\ 0, \qquad\qquad x^2+y^2=0. \end{cases}$ 证明 $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$.

解: 易求在(0,0)点处, $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0}{\Delta x}=0$,

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0.$$

而当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时, $f_x(x,y)=\dfrac{x^4y-y^5+4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, f_y(x,y)=\dfrac{x^5-xy^4-4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

从而 $f_{xy}(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f_x(0,\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{-\Delta y}{\Delta y}=-1$,

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_y(\Delta x,0)-f_y(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

故 $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$.

4. 已知 $\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}x+4y\mathrm{d}y}{(x+2y)^2}$ 为某函数 $u(x,y)$ 的全微分,求 a.

解: $\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}x+4y\mathrm{d}y}{(x+2y)^2}$ 为某函数 $u(x,y)$ 的全微分,

则 $\mathrm{d}u=\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}x}{(x+2y)^2}+\dfrac{4y\mathrm{d}y}{(x+2y)^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x+ay}{(x+2y)^2},\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{4y}{(x+2y)^2}$,

且以上这两个偏导数又都具有连续的偏导数, 于是 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$,

即 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{(x+2y)[(a-4)x-2ay]}{(x+2y)^4}=\dfrac{-8y(x+2y)}{(x+2y)^4}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$,

故 $a=4$.

习　题 8.3　多元函数的导数

(A)

1. 求下列复合函数的偏导数:

(1) $z=e^{3x+2y},x=\cos t,y=t^2$, 求$\dfrac{dz}{dt}$; (2) $z=uv+\sin t,u=e^t,v=\cos t$, 求$\dfrac{dz}{dt}$;

(3) $z=e^u\sin v,u=xy,v=x+y$, 求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$; (4) $z=x^2\ln y,x=\dfrac{u}{v},y=3u-v$, 求$\dfrac{\partial z}{\partial u},\dfrac{\partial z}{\partial v}$;

(5) $u=e^{x^2+y+z^2},z=x^2\sin y$, 求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$;

(6)求 $z=f(x,2x+y,xy)$（其中 f 具有二阶连续偏导数）的二阶偏导数$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

(7) 设 $z=f(u)$ 是可微函数，其中 $u=xy+\dfrac{y}{x}$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(8)设 $z=\dfrac{y}{f(y^2-x^2)}$，其中 $f(u)$ 是可导函数，试求 $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：（1） $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}=3e^{3x+2y}\cdot(-\sin t)+2e^{3x+2y}\cdot 2t=e^{3x+2y}\left(4t-3\sin t\right)$

（2） $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial t}=v\cdot e^t+u\cdot(-\sin t)+\cos t=e^t\left(\cos t-\sin t\right)+\cos t$

（3） $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=e^u\sin v\cdot y+e^u\cos v\cdot 1=e^{xy}\left[y\sin(x+y)+\cos(x+y)\right]$

同理:$\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{xy}\left[x\sin(x+y)+\cos(x+y)\right]$

（4） $\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}=2x\ln y\cdot\dfrac{1}{v}+x^2\dfrac{1}{y}\cdot 3=2\dfrac{u}{v}\ln(3u-v)\cdot\dfrac{1}{v}+\left(\dfrac{u}{v}\right)^2\dfrac{1}{3u-v}\cdot 3$

$=\dfrac{1}{v^2}\left(2u\ln(3u-v)+\dfrac{3u^2}{3u-v}\right)$, 同理:$\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}=\dfrac{1}{v^3}\left(-2u^2\ln(3u-v)+\dfrac{u^2v}{3u-v}\right)$

（5） $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xe^{x^2+y+z^2}+2ze^{x^2+y+z^2}\cdot 2x\sin y=2x\left(1+2z\sin y\right)e^{x^2+y+z^2}$

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=e^{x^2+y+z^2}+2ze^{x^2+y+z^2}\cdot x^2\cos y=\left(1+2zx^2\cos y\right)e^{x^2+y+z^2}$

由z=$x^2\sin y$得：

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x\left[1+2\left(x^2\sin y\right)\sin y\right]e^{x^2+y+\left(x^2\sin y\right)^2}$=2x $\left(1+2x^2\sin^2 y\right)e^{x^2+y+x^4\sin^2 y}$

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\left(1+x^4\sin 2y\right)e^{x^2+y+x^4\sin^2 y}$

(6) 设$u=x, v=2x+y, w=xy$, 则$z=f\left(u,v,w\right)$,

引入记号$f_1'=f_u\left(u,v,w\right), f_{12}''=f_{uv}\left(u,v,w\right)$, 同理有$f_1', f_3', f_{11}'', \cdots$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'u_x+f_2'v_x+f_3'w_x=f_1'+2f_2'+yf_3', \quad \frac{\partial z}{\partial y}f_1'u_y+f_2'v_y+f_3'w_y=f_1'\cdot 0+f_2'+xf_3'=f_2'+xf_3'$$

则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial\left(f_1'+2f_2'+yf_3'\right)}{\partial x}=\dfrac{\partial f_1'}{\partial x}+2\dfrac{\partial f_2'}{\partial x}+\dfrac{\partial\left(yf_3'\right)}{\partial x}$

其中：$\dfrac{\partial f_1'}{\partial x}=f_{11}''+2f_{12}''+yf_{13}''$；$\dfrac{\partial f_2'}{\partial x}=f_{21}''+2f_{22}''+yf_{23}''$；$\dfrac{\partial f_3'}{\partial x}=f_{31}''+2f_{32}''+yf_{33}''$；

且由f具有二阶连续的偏导数，得$f_{12}''=f_{21}''$；$f_{13}''=f_{31}''$；$f_{23}''=f_{32}''$

则：$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{11}''+4f_{22}''+y^2f_{33}''+4f_{12}''+2yf_{13}''+2\left(y+1\right)f_{23}''$

同理：$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial\left(f_1'+2f_2'+yf_3'\right)}{\partial y}=\dfrac{\partial f_1'}{\partial y}+2\dfrac{\partial f_2'}{\partial y}+f_3'+y\dfrac{\partial\left(f_3'\right)}{\partial y}$

$$=f_{12}''+xf_{13}''+2\left(f_{22}''+xf_{23}''\right)+f_3'+y\left(f_{32}''+xf_{33}''\right)=f_{12}''+xf_{13}''+2f_{22}''+xyf_{33}''+\left(2x+y\right)f_{32}''+f'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial\left(f_2'+xf_3'\right)}{\partial y}=\frac{\partial f_2'}{\partial y}+\frac{\partial\left(xf_3'\right)}{\partial y}=f_{22}''+xf_{23}''+x\left(f_{32}''+xf_{33}''\right)=f_{22}''+2xf_{23}''+x^2f_{33}''$$

(7) 由$\dfrac{\partial u}{\partial x}=y-\dfrac{y}{x^2}, \dfrac{\partial u}{\partial y}=x+\dfrac{1}{x}$可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}=f'(u)\left(y-\frac{y}{x^2}\right); \quad \frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}=f'(u)\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

(8) 由$\dfrac{\partial f}{\partial x}=f'(y^2-x^2)(-2x), \ \dfrac{\partial f}{\partial y}=f'(y^2-x^2)(2y)$ 可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{f^2(y^2-x^2)}\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{y}{f^2(y^2-x^2)}f'(y^2-x^2)(-2x)=2xy\frac{f'(y^2-x^2)}{f^2(y^2-x^2)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f(y^2-x^2)-y\dfrac{\partial f}{\partial y}}{f^2(y^2-x^2)}=\frac{f(y^2-x^2)-yf'(y^2-x^2)(2y)}{f^2(y^2-x^2)}=\frac{f(y^2-x^2)-2y^2f'(y^2-x^2)}{f^2(y^2-x^2)}$$

所以 $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x}\left[\dfrac{2xyf'}{f^2(x^2-y^2)}\right]+\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{f(x^2-y^2)-yf'\cdot(2y)}{f^2(x^2-y^2)}=\dfrac{1}{yf^2(y^2-x^2)}$

2. 求下列隐函数所确定的函数的(偏)导数.

(1) 设函数$z=z(x,y)$由方程$x+y^2+z^3-xy=2z$所确定，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(2)设函数$y=y(x,z)$由方程$e^x+e^y+e^z=3xyz$所确定，求$\dfrac{\partial y}{\partial x},\dfrac{\partial y}{\partial z}$.

(3)设函数$z=z(x,y)$由方程$z=1+\ln(x+y)-e^z$所确定，求$z_x(1,0)$, $z_y(1,0)$.

(4) 设函数$z=z(x,y)$由方程$e^z-xyz=0$, 求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：(1) 令 $F(x,y,z)=x+y^2+z^3-xy-2z$, 则有$F_x=1-y$, $F_y=2y-x$, $F_z=3z^2-2$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{\mathbf{1}-y}{\mathbf{3}z^{\mathbf{2}}-\mathbf{2}}=\frac{y-\mathbf{1}}{\mathbf{3}z^{\mathbf{2}}-\mathbf{2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{\mathbf{2}y-x}{\mathbf{3}z^{\mathbf{2}}-\mathbf{2}}=\frac{x-\mathbf{2}y}{\mathbf{3}z^{\mathbf{2}}-\mathbf{2}}{}_y$$

⑵ 令 $F(x,y,z)=e^x+e^y+e^z-\mathbf{3}xyz$,则有 $F_x=e^x-\mathbf{3}yz$，$F_y=e^y-\mathbf{3}xz$，$F_z=e^z-\mathbf{3}xy$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{e^x-\mathbf{3}yz}{e^y-\mathbf{3}xz}=\frac{\mathbf{3}yz-e^x}{e^y-\mathbf{3}xz},\quad \frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{F_z}{F_y}=-\frac{e^z-\mathbf{3}xy}{e^y-\mathbf{3}xz}=\frac{\mathbf{3}xy-e^z}{e^y-\mathbf{3}xz}$$

⑶ 令 $F(x,y,z)=\mathbf{1}+\ln(x+y)-e^z-z$,则有 $F_x=\dfrac{\mathbf{1}}{x+y}$，$F_y=\dfrac{\mathbf{1}}{x+y}$，$F_z=-e^z-\mathbf{1}$

$$z_x=z_y=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{\mathbf{1}}{(x+y)(e^z+\mathbf{1})}=\frac{y-\mathbf{1}}{\mathbf{3}z^{\mathbf{2}}-\mathbf{2}}$$

又 把 $x=\mathbf{1}$，$y=\mathbf{0}$ 代入方程解得 $z=\mathbf{0}$， 所以 $z_x(\mathbf{1},\mathbf{0})=z_y(\mathbf{1},\mathbf{0})=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$.

⑷ 令 $F(x,y,z)=e^z-xyz$， 则∵ $F_x=-yz$，$F_y=-xz$，$F_z=e^z-xyz$，

$$\therefore z_x=-\frac{-yz}{e^z-xy}=\frac{yz}{e^z-xy}=\frac{yz}{xyz-xy}=\frac{z}{x(z-1)}$$

$$z_y=-\frac{-xz}{e^z-xy}=\frac{xz}{e^z-xy}=\frac{xz}{xyz-xy}=\frac{z}{y(z-1)}$$

故 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{z_x x(z-1)-z[(z-1)+xz_x]}{x^2(z-1)^2}=\frac{z-z^2+z-z^2/(z-1)}{x^2(z-1)^2}=\frac{z(2z-z^2-2)}{x^2(z-1)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{z_y x(z-1)-zxz_y}{x^2(z-1)^2}=\frac{z(1-2z)}{xy(z-1)^3}$$

3. 求下列方程所确定的函数的导数或微分.

⑴ 设 $\begin{cases}z=x^2+y^2\\ x+y+z=1,\end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}$， ⑵ 设 $\begin{cases}xu-yv=0,\\ yu+xv=1,\end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

⑶ 设 $\begin{cases}x=u+v,\\ y=uv+e^v,\end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

⑷ 曲线 $\begin{cases}z=z(x),\\ y=y(x)\end{cases}$ 由方程组 $\begin{cases}x+y+z=0,\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{dz}{dx},\dfrac{dy}{dx}$.

解：⑴ 变量 y,z 为 x 的函数，将每个方程两边对 x 求导：

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=2x+2y\dfrac{dy}{dx},\\ 1+\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=0,\end{cases}\quad 解得\ \frac{dy}{dx}=-\frac{1+2x}{1+2y},\ \frac{dz}{dx}=\frac{2(x-y)}{1+2y}.$$

⑵ 变量 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 为 x,y 的二元函数，

先将每个方程两边对 x 求偏导： $\begin{cases}u+x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\ y\dfrac{\partial u}{\partial x}+v+x\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\end{cases}$

解得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{xu+yv}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{yu-xv}{x^2+y^2}$;

再将每个方程两边对 y 求偏导: $\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial y}-v-y\dfrac{\partial v}{\partial x}=0, \\ u+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+x\dfrac{\partial v}{\partial y}=0, \end{cases}$

解得 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{xv-+yu}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{xu+yv}{x^2+y^2}$.

(3) 变量 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 为 x,y 的二元函数,

将每个方程两边对 y 求偏导: $\begin{cases} 0=\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ 1=v\dfrac{\partial u}{\partial y}+u\dfrac{\partial v}{\partial y}+e^v\dfrac{\partial v}{\partial y}, \end{cases}$

解得 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{u-v+e^v}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{1}{u-v+e^v}$.

(4) 变量 y,z 为 x 的函数,将每个方程两边对 x 求导:

$\begin{cases} 1+\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=0, \\ 2x+2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0, \end{cases}$ 解得 $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{y-x}{z-y}$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-z}{z-y}$.

(B)

1. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z+x=\int_0^{xy}e^{-t}dt$ 确定,求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解:原方程两边对 x 求偏导得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+1=ye^{-(xy)}$,则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=ye^{-(xy)}-1$.

同理,原方程两边对 y 求偏导可得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=xe^{-(xy)}$.

2. 设 $u=\sin(x+y)$, 其中 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+y=x+\sin x$ 确定,求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解: 方程 $u=\sin(x+y)$ 两边对 x 求导可得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\cos(x+y)(1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})$, (1)

方程 $e^y+y=x+\sin x$ 两边对 x 求导可得 $e^y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+\cos x$,

即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1+\cos x}{e^y+1}$,将其代回(1)式可得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\cos(x+y)(1+\frac{1+\cos x}{e^y+1})=\frac{2+e^y+\cos x}{e^y+1}\cos(x+y).$$

3. 设 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，且 $f(x,x^2)=1, f_x(x,x^2)=x$, 求 $f_y(x,x^2)$.

解: 方程 $f(x,x^2)=1$ 两边对 x 求导可得 $f_x(x,x^2)+2xf_y(x,x^2)=0$，

即 $x+2xf_y(x,x^2)=0$，故 $f_y(x,x^2)=-\dfrac{1}{2}$.

4. 设 $z=f[x\varphi(y),x-y]$, 求 z_y, z_{yx}.

解: 方程两边先对 y 求导可得 $z_y=xf_1'\varphi'(y)-f_2'$，

上式两边再对 x 求导可得 $z_{yx}=f_1'\varphi'(y)+x\varphi'(y)[f_{11}''\varphi(y)+f_{12}'']-[f_{21}''\varphi(y)+f_{22}'']$，

即 $z_{yx}=-f_{22}''+[x\varphi'(y)-\varphi(y)]f_{12}''+x\varphi'(y)\varphi(y)f_{11}''+\varphi'(y)f_1'$.

习题 8.4　多元函数微分学的应用

(A)

1.　求下列曲线的切线与法平面.

⑴ 求螺旋线 $x=a\cos\theta,\ y=a\sin\theta,\ z=k\theta(k>0)$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线与法平面方程.

⑵ 求曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=45,\\ x^2+2y^2=z\end{cases}$ 在点 $P_0(-2,1,6)$ 处的切线和法平面方程.

解：⑴　当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时，螺旋线上对应的点为 $(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}a,\ \dfrac{k}{4}\pi)$，又

$x'(\theta)=-a\sin\theta,\ y'(\theta)=a\cos\theta,\ z'(\theta)=k$ ，

故曲线在 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方向向量为 $(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}a,\ k)$

方程为 $\dfrac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}a}{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\dfrac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\dfrac{z-\frac{k}{4}\pi}{k}$.

曲线在 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 处的法平面方程为 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}a(y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a)+k(z-\dfrac{k}{4}\pi)=0$ ，

即 $ax-ay-\sqrt{2}kz+\dfrac{\sqrt{2}k^2}{4}\pi=0$.

⑵ 把 y,z 看成是 x 的函数,方程两边对 x 求导, 得 $\begin{cases}4x+2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0,\\ 2x+4y\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dz}{dx}\end{cases}$

将点 $P_0(-2,1,6)$ 坐标代入, 得

$$\begin{cases} -8+2\dfrac{dy}{dx}+12\dfrac{dz}{dx}=0, \\ -4+4\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dz}{dx} \end{cases}$$ 解得 $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{28}{25}, \\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{12}{25}. \end{cases}$$ 即切向量为 $\vec{T}=\{25,28,12\}$，

故切线方程为 $\dfrac{x+2}{25}=\dfrac{y-1}{28}=\dfrac{z-6}{12}$；

法面平面方程为 $25(x+2)+28(y-1)+12(z-6)=0$,即 $25x+28y+12z-50=0$.

2．求下列曲面在给定点的切平面和法线方程.

⑴ 求圆锥曲面 $x^2+y^2-2z^2=0$ 在点 $(1,-1,1)$ 处的切平面及法线方程.

⑵ 求曲面 $e^2-z+xy=3$ 在点(2,1,0)处的切平面及法线方程.

解：⑴ 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2-2z^2$,

因为 $\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)\big|_{(1,-1,1)}=(2x,2y,-4z)\big|_{(1,-1,1)}=2(1,-1,-2).$

故所求切平面方程分为 $(x-1)-(y+1)-2(z-1)=0$, 即 $x-y-2z=0;$

法线方程分别为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{-2}.$

⑵ 令 $F(x,y,z)=e^2-x+xy-3,$ 因为 $\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)\big|_{(2,1,0)}=(y,x,e^x-1)\big|_{(2,1,0)}=(1,2,0)$

故所求切平面与法线方程分别为:

$(x-2)+2(y-1)=0,$ 即 $x+2y-4=0;$ $\qquad \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{0}.$

3．求函数 $u=xyz$ 在点 $P(1,2,-2)$ 处增加最快的方向及其变化率.

解：函数 $u=xyz$ 在点 $P(1,2,-2)$ 处增加最快的方向就是函数在该点的梯度，即 $gradu\big|_{(1,-2,2)}=(u_x,u_yu_z)_{(1,-2,2)}=(yz,xz,xy)_{(1,-2,2)}=(-4,2,-2)$，

其变化率为梯度的模，即 $\left|gradu\big|_{(1,-2,2)}\right|=2\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}=2\sqrt{6}.$

4．求表面积 a^2 为而体积为最大的长方体的体积.

解：设长方体的三条棱长分别为 x,y,z，则问题及时在条件

$\varphi(x,y,z)=2xy+2yz+2xz-a^2=0$ 下，求函数 $V=xyz \quad (x>0,\ y>0,\ z>0)$ 的最大值.

构造辅助函数 $F(x,y,z)=xyz+\lambda(2xy+2yz+2xz-a^2)$，求其偏导数，并令之为零，得到

方程组 $$\begin{cases} yz+2\lambda(y+z)=0, \\ xz+2\lambda(x+z)=0, \\ xy+2\lambda(x+y)=0, \\ 2xy+2yz+2xz-a^2=0. \end{cases}$$ 解得 $x=y=z=\dfrac{\sqrt{6}}{6}a.$

故表面积 a^2 为而体积为最大的长方体为正方体，其体积为 $V=\dfrac{\sqrt{6}}{36}a^3.$

5．抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆,求原点到这椭圆的最长与最短距离.

解：设 $M(x,y,z)$ 是椭圆上任一点,则它同时满足题设抛物线与平面的方程,于是得:

$z=x^2+y^2, x+y+z=1$.又原点到点 M 的距离 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,即 $d^2=x^2+y^2+z^2$.

构造拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(z-x^2-y^2)+\mu(x+y+z-1)$

令 $\begin{cases} L_x = 2x - 2\lambda x + \mu = 0, \\ L_y = 2y - 2\lambda y + \mu = 0, \\ L_z = 2z + \lambda + \mu = 0, \\ L_\lambda = z - x^2 - y^2 = 0, \\ L_\mu = x + y + z - 1 = 0. \end{cases}$,将方程组前两个式子相减得 $x = y$,代入后两个式子,有

$z = 2x^2, z = 1 - 2x, 2x^2 + 2x - 1 = 0, \quad x = y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, z = 2 \pm \sqrt{3}$.

得两个驻点 $\left(\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, 2 \mp \sqrt{3} \right)$.

又知最大最小距离都存在,所以最大与最小距离必分别在此两点取得,而

$d^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 2\left(\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \right)^2 + (2 \mp \sqrt{3})^2 = 9 \mp 5\sqrt{3},$

可见,最大距离为 $\sqrt{9 + 5\sqrt{3}}$, 最小距离为 $\sqrt{9 - 5\sqrt{3}}$.

6. 求螺旋面 $x = u\cos v, y = u\sin v, z = v \ (u \ge 0, v \in R)$ 在点 $(u, 0, 0)$ 处的切平面与法线方程.

解：将螺旋面 $x = u\cos v, y = u\sin v, z = v \ (u \ge 0, v \in R)$ 消去参数 u, v ，化为 $x\tan z - y = 0$ ，记 $F(x, y, z) = x\tan z - y$ ，则曲面在点 $(u, 0, 0)$ 处的法向量为 $\overset{\perp}{T} = \{F_x, F_y, F_z\} = \{0, -1, u\}$ ，

故所求的法线方程为 $\dfrac{x - u}{0} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{u}$ 或 $\begin{cases} x = u, \\ uy + z = 0. \end{cases}$

切平面方程为 $0(x - u) - y + zu = 0$, 即 $-y + uz = 0$.

(B)

1. 证明曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}, a > 0,$ 上任何点处的切平面在各个坐标轴上的截距之和等于 a.

证: 令 $F(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{a}$,则 $F_x = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, F_y = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}, F_z = \dfrac{1}{2\sqrt{z}}$.

于是曲面上任意点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面方程为

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z - z_0) = 0 ,$$

即 $\dfrac{x}{\sqrt{ax_0}} + \dfrac{y}{\sqrt{ay_0}} + \dfrac{z}{\sqrt{az_0}} = 1$, 故截距之和为 $\sqrt{ax_0} + \sqrt{ay_0} + \sqrt{az_0} = \sqrt{a}\sqrt{a} = a$.

2. 证明曲面 $xyz = c^3$ 上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之积为常数.

证: 令 $F(x, y, z) = xyz - c^3$, 则 $F_x = yz, F_y = xz, F_z = xy$.

于是曲面上任意点(x_0,y_0,z_0)处的切平面方程为

$$y_0z_0(x-x_0)+x_0z_0(y-y_0)+x_0y_0(z-z_0)=0,$$

即$\dfrac{x}{3x_0}+\dfrac{y}{3y_0}+\dfrac{z}{3z_0}=1$，故截距之积为$27x_0y_0z_0=27c^3$.

3. 设一个礼堂的顶部是一个半椭球面，其方程为$z=4\sqrt{1-\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{36}}$,求下雨时过房顶上一点$P(1,3,\sqrt{11})$处的雨水流下的路线方程(不计磨擦).

解: 梯度方向是函数值变化最快的方向, 故雨水沿着z的梯度$gradz=z_x\vec{i}+z_y\vec{j}$的反方向下流, 雨水从椭球面上流下的路线在$xoy$面上的投影曲线上任一点处的切线应与梯度平行.

设投影曲线方程为$f(x,y)=0$, 则它上面任一点的切向量为$\{1,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\}$, 而梯度方向为

$$gradz=z_x\vec{i}+z_y\vec{j}=\frac{\frac{-x}{4}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{36}}}\vec{i}+\frac{\frac{-y}{9}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{36}}}\vec{j},$$

则$\dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\dfrac{z_x}{z_y}=\dfrac{9x}{4y}$, 即$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4y}{9x}$. 解此方程的通解为$y=cx^{\frac{4}{9}}$,且雨水流下的路线经过$P(1,3,\sqrt{11})$点, 代入方程的通解得$c=3$, 故雨水流下的路线方程为$y=3x^{\frac{4}{9}}$.

4. 设光滑曲面Σ由$F(x,y,z)=0$确定，$P(x_0,y_0,z_0)$是Σ外一点. 证明:若$Q(x_1,y_1,z_1)$为Σ上离$P(x_0,y_0,z_0)$最近的一点，那么，$\overrightarrow{PQ}$与Σ上$Q(x_1,y_1,z_1)$点的切平面垂直.

解: 由题意可知曲面上任一点到 P 点的距离为$d^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$, 而 Q 点为离 P 点最近的点, 即求使得距离d最小的(x,y,z)的值, 构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+\lambda F(x,y,z)$$

由拉格朗日乘数法

$$\begin{cases} L_x(x,y,z,\lambda)=2(x-x_0)+\lambda F_x(x,y,z)=0 \\ L_y(x,y,z,\lambda)=2(y-y_0)+\lambda F_y(x,y,z)=0 \\ L_z(x,y,z,\lambda)=2(z-z_0)+\lambda F_z(x,y,z)=0 \\ L_\lambda(x,y,z,\lambda)=F(x,y,z)=0 \end{cases}$$,解得 Q 点坐标为 $$\begin{cases} x=-\dfrac{\lambda}{2}F_x+x_0 \\ y=-\dfrac{\lambda}{2}F_y+y_0 \\ z=-\dfrac{\lambda}{2}F_z+z_0 \\ F(x,y,z)=0 \end{cases} \quad (1)$$

而 $\overrightarrow{PQ}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$,由(1)式可知

$$\frac{x-x_0}{F_x}=\frac{y-y_0}{F_y}=\frac{z-z_0}{F_z}=-\frac{\lambda}{2},$$

则向量 $\overrightarrow{PQ}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$ 与切平面法向量 $\vec{n}=\{F_x,F_y,F_z\}$ 平行,

所以 $\overrightarrow{PQ}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$ 与 Q 点处的切平面垂直.

总习题八

（A）

1. 选择题

(1) 设函数 $f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 的两个偏导 $f_x(x_0,y_0)$， $f_y(x_0,y_0)$ 都存在，则(　　).

(A) $f(x,y)$ 在 P 连续　　　　(B) $f(x,y)$ 在 P 可微

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0)$ 及 $\lim\limits_{y\to y_0}f(x_0,y)$ 都存在　　　　(D) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 存在

解：答案 C

反例，函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},x^2+y^2\neq 0\\ 0,x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 满足条件，但是显然在点 $(0,0)$ 不连续，故排除（A）；偏导数存在是可微的必要条件，而不是充分条件，例如反例中的函数 $f_x(0,0)=0$， $f_y(0,0)=0$， $f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-(f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y)$ 不是 $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 的高阶无穷小，故函数在 $(0,0)$ 不可微，从而排除（B）；根据偏导数定义，易得（C）正确；反例函数中，当 (x,y) 沿 x 轴和 y 轴趋于 $(0,0)$ 时， $f(x,y)$ 的极限都是 0；但当它沿直线 $y=mx$ 趋于 $(0,0)$ 时， $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\dfrac{m}{1+m^2}$,对于不同的 m 有不同的取值，从而在原点函数极限不存在。

(2) 若 $z=y^{\ln x}$，则 dz 等于（　　　）.

$(A)\ \dfrac{y^{\ln x}\ln y}{x}+\dfrac{y^{\ln x}\ln y}{y}$ $(B)\ \dfrac{y^{\ln x}\ln y}{x}$

$(C)\ y^{\ln x}\ln y dx+\dfrac{y^{\ln x}\ln y}{x}dy$ $(D)\ \dfrac{y^{\ln x}\ln y}{x}dx+\dfrac{y^{\ln x}\ln x}{y}dy$

解：答案 D

易得 $z_x=\dfrac{y^{\ln x}\ln y}{x}$， $z_y=\dfrac{y^{\ln x}\ln x}{y}$，由于 $dz=z_x dx+z_y dy$，故选 D.

(3) 曲线 $\begin{cases}x-y+z=2\\ z=x^2+y^2\end{cases}$ 在点 $(1,1,2)$ 处的一个切线方向向量为（　　）.

(A) $(-1,3,4)$ (B) $(3,1-,4)$ (C) $(-1,0,3)$ (D) $(3,0,-1)$

解：答案 A

方程两边对 x 求导 $\begin{cases}1-\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=0\\ \dfrac{dz}{dx}=2x+2y\dfrac{dy}{dx}\end{cases}$，易得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+1}{1-2y}$， $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2x+2y}{1-2y}$，由于在点

（1, 1, 2）处，$\dfrac{dy}{dx}=$-3，$\dfrac{dz}{dx}=$-4，故在该点处的切线方向向量为（1,-3,-4），从而可选 A.

(4) 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面 4 条性质：

① $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续； ② $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续；

③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微； ④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在.

则下列成立的是（　　）.

(A) ②$\Rightarrow$③$\Rightarrow$①； (B) ③$\Rightarrow$②$\Rightarrow$①；

(C) ③$\Rightarrow$④$\Rightarrow$①； (D) ③$\Rightarrow$①$\Rightarrow$④.

解：答案 A

若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续，根据微分中值定理及连续的定义，易得.

$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$，即

$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，从而②$\Rightarrow$③；由可微的定义有③$\Rightarrow$①.

(5) 函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 点(　　).

(A) 不连续 (B) 偏导数存在 (C) 偏导数连续 (D) 连续

解：答案 D

根据函数连续定义，易得 D.

(6）方程 $x^2+y=\sin(xy)$ 在点 $(0,0)$ 的邻域内(　　　).

(A) 不能确定隐函数 $x=\varphi(y)$　(B) 能确定隐函数 $x=\varphi(y)$

(C) 能确定隐函数 $y=f(x)$　　(D) 不能确定隐函数 $y=f(x)$

解：答案 C

令 $f(x,y)=x^2+y-\sin(xy)$，则 $f_x(x,y)=2x-y\cos(xy)$， $f_y(x,y)=1-x\cos(xy)$，$f_x(x,y)$， $f_y(x,y)$ 连续且 $f_y(0,0)=1\neq 0$，故在 $(0,0)$ 的领域内可确定隐函数 $y=f(x)$.

(7)“$f(x,y)$ 在 $(x_{0,}y_0)$ 存在偏导数 $f_x(x,y),f_y(x,y)$”是“$f(x,y)$ 在 $(x_{0,}y_0)$ 可微”的（　　　）.

(A) 必要但非充分条件　　(B) 充分但非必要条件

(C) 充分必要条件　　　　(D) 既非充分也非必要条件

解：答案 A

由定理 2.2 易得.

（8）　设 $x=f(u),\ u=u(y,z)$ 都是可微函数，则下列等式中错误的是（　　）.

$(A)\ dx=f^{'}(u)du$　　　　$(B)\ dx=f^{'}(u)(dy+dz)$

$(C)\ dx=f^{'}(u)(\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz)$　　$(D)\ dx=\frac{\partial x}{\partial y}dy+\frac{\partial x}{\partial z}dz$

解：答案 B

由 $x=f(u)$,有 $dx=f^{'}(u)du$，故 A 正确；由 $u=u(y,z)$，有 $du=\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$，故 C 正确；由题意知 x 是关于 y 和 z 的函数，故 D 正确.

(9) 方程组 $x^2+y^2-\frac{1}{2}z^2=0,x+y+z=2$ 在下述点的邻域内存在隐函数

$x=x(z),y=y(z)$.（　　）

(A) (1,1,2)　　(B) (0,0,2)　　(C) (1,−1,2)　　(D) （0,1,0）

解：答案 C

方程两边关于 z 求导 $2x\frac{dx}{dz}+2y\frac{dy}{dz}-z=0$， $\frac{dx}{dz}+\frac{dy}{dz}+1=0$，从而 $\frac{dx}{dz}=\frac{2y+z}{2x-2y}$，

$\frac{dy}{dz}=\frac{-2x-z}{2x-2y}$，由隐函数存在定理 3.4，只有 C 符合.

(10) 函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点偏导数存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的 (　　).

(A) 充分条件，但不是必要条件　　(B)必要条件，但不是充分条件

(C) 充分必要条件　　　　　　　　(D) 既不是充分条件，也不是必要条件

解：答案 D

从充分性考虑，例如函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},x^2+y^2\neq 0\\ 0,x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点偏导数存在，但是在改点并不连续；反过来，函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续，由于连续不一定可导，故不满足必要性.

(11) 已知函数的全微分 $df(x,y)=(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy$, 则 $f(x,y)=(\quad)$.

(A) $\frac{1}{3}x^3-x^2y+xy^2-\frac{1}{3}y^3$　　(B) $\frac{1}{3}x^3-x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3$

(C) $\frac{1}{3}x^3+x^2y+xy^2-\frac{1}{3}y^3$　　(D) $\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3+C$

解：答案 D

由题意知 $\begin{cases}f_x=x^2+2xy-y^2\\ f_y=x^2-2xy-y^2\end{cases}$，根据 f_x 可推出 $f=\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2+g\left(y\right)$，其中 $g\left(y\right)$ 为关于 y 的函数，由此 $f_y=x^2-2xy+g'\left(y\right)$，所以 $g'\left(y\right)=-y^2$，故 $g\left(y\right)=-\frac{1}{3}y^3+C$，从而 $f(x,y)$ 为 $\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3+C$.

(12) 函数 $u=u(x,y,z)$ 在 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内可微分，则函数 u 在 (x,y,z) 处的梯度 $grad\,u=(\quad)$.

(A) $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}$　　(B) $\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$

(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\boldsymbol{i}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\boldsymbol{j}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\boldsymbol{k}$　　(D) $\sqrt{(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2+(\frac{\partial u}{\partial z})^2}$

解：答案 B

由梯度定义直接可得.

(13) $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 取得极大值，那么，在 (x_0,y_0) 处有(　).

（A） $f_x=f_y=0$　　(B) $f_{xx}f_{yy}-f^2{}_{xy}>0$, 且 $f_{xx}<0$

(C) $f(x_0,y)$ 在 y_0 取得极大值　　(D)前面的结论可能都不对

解：答案 C

$z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 取得极大值，由极大值定义，对于 (x_0,y_0) 的某邻域内异于 (x_0,y_0) 的点 (x,y) 都有 $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$，故 C 正确.

(14)若曲面 $F(x,y,z)=0$ 在 (x_0,y_0,z_0) 的切平面经过坐标原点，那么，在 (x_0,y_0,z_0) 点(　).

（A） $x_0F'_x+y_0F'_y+z_0F'_z=0$　　(B) $\frac{F'_x}{x_0}=\frac{F'_y}{y_0}=\frac{F'_z}{z_0}$

（C） $\frac{F'_x}{x_0}+\frac{F'_y}{y_0}+\frac{F'_z}{z_0}=1$　　(D) $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$

解：答案 A

$F(x,y,z)=0$ 在 (x_0,y_0,z_0) 的切平面方程为

$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$ ，由于该切平面过原点，易得 $x_0F'_x+y_0F'_y+z_0F'_z=0$.

(15)空间曲线 $\begin{cases} x=a\sin^2 t, \\ y=b\sin t\cos t, \\ z=c\cos^2 t \end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处的法平面（　）.

(A)平行于 Oz 轴　(B)平行于 Oy 轴　(C)平行于 xOy 平面　(D)垂直于 yOz 平面

解：答案 B

关于 t 求导得 $\begin{cases} x'(t)=a\sin 2t, \\ y'(t)=b\cos^2 t-b\sin^2 t, \\ z'(t)=-c\sin 2t, \end{cases}$ 当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时，曲线对应的切向量 $(a,0,-c)$ 垂直于 Oy 轴，故法平面平行于 Oy 轴.

(16)记 $f_{xx}(x_0,y_0)=A, f_{xy}(x_0,y_0)=B, f_{yy}(x_0,y_0)=C,$ 那么当 $f(x,y)$ 在驻点 (x_0,y_0) 处满足（　）时，$f(x,y)$ 在该点取到极大值.

(A) $B^2-AC>0, A>0$　　(B) $B^2-AC>0, A<0$

(C) $B^2-AC<0, A>0$　　(B) $B^2-AC<0, A<0$

解：答案 D

根据定理 4.2 易得.

2. 填空题

(1)函数 $f(x,y)=x+y+\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(3,4)$ 处的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}=$____________.

解：易得 $\frac{\partial f}{\partial x}=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ，故在点 $(3,4)$ 处有 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{8}{5}$.

(2)设 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$,则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$____________.

解：易得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

(3)函数 $z=e^{xy}$ 在点 $(1,2)$ 处的全微分为__________________.

解：易得,$z_x=ye^{xy}$,$z_y=xe^{xy}$,从而 $z_x\big|_{(1,2)}=2e^2$,$z_y\big|_{(1,2)}=e^2$,故有函数 z 在点 $(1,2)$ 处的全微分

为 $\underline{dz=2e^2dx+e^2dy}$

(4) 当函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微时，$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的梯度方向是 $f(x,y)$ 的函数值增长

的方向.

解：由梯度的性质可知，梯度方向是 $f(x,y)$ 函数值增长最快的方向.

(5) 曲面 $3x^2+4y^2+5z^2=1$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面方程为________________.

解：令 $F\left(x,y,z\right)=3x^2+4y^2+5z^2-1=0$，则 $F_x=6x$,$F_y=8y$,$F_z=10z$,从而可得在

点 $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 处的切平面方程为 $\underline{3x_0x+4y_0y+5z_0z=1}$.

(6)函数 $u=xyz$ 在点 $(1,2,4)$ 沿方向角为 $\alpha=\dfrac{\pi}{3},\beta=\dfrac{\pi}{4},\gamma=\dfrac{\pi}{4}$ 的方向的方向导数是______.

解：易得 $\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1.2,4)}=yz=8$,$\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1.2,4)}=xz=4$,$\dfrac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(1.2,4)}=xy=2$,从而函数 u 在点 $\left(1,2,4\right)$

沿方向角的方向的方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(1.2,4)}=8\cos\alpha+4\cos\beta+2\cos\gamma=\underline{4+3\sqrt{2}}$.

(7)函数 $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$ 的极大值为_____________.

解：易得 $f_x=4-2x,f_y=-4-2y$，令 $\begin{cases}f_x=4-2x=0\\ f_y=-4-2y=0\end{cases}$，则 $\begin{cases}x=2\\ y=-2\end{cases}$

又 $A=f_{xx}=-2,B=f_{xy}=0,C=f_{yy}=-2$,在（2，-2）处，$AC-B^2=4>0$ 且 $A<0$

故 f 在（2，-2）处取得极大值 $\underline{f(2,-2)=8}$.

(8）函数 $f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在点 $(1,2)$ 处的全微分是__________.

解：易得 $f_x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$，$f_y=\dfrac{-xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$ 故 $f_x\big|_{(1,2)}=\dfrac{4\sqrt{5}}{25}$，

$f_y\big|_{(1,2)}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{25}$，从而函数 $f(x,y)$ 在点 $(1,2)$ 处的全微分是 $\underline{df=\dfrac{4\sqrt{5}}{25}dx-\dfrac{2\sqrt{5}}{25}dy}$.

(9) 设 $u=f(s,t),s=\dfrac{x}{y},t=\dfrac{y}{z}$. 则 $\dfrac{\partial u}{\partial z}=$ __________.

解：易得 $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{\partial f}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial z}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial z}=\underline{(-\dfrac{y}{z^2})\dfrac{\partial f}{\partial t}}$.

(10) 设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微，且 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的稳定点，则当 Hesse 矩阵 $H_f(x_0,y_0)$ 正定时，$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点取得________________.

解：由 $H_f(x_0,y_0)$ 正定，得 $f_{xx}(x_0,y_0)>0, f_{xx}f_{yy}-{f_{xy}}^2\big|_{(x_0,y_0)}>0$，因此，$AC-B^2>0$，$\mathrm{A}>0$，由定理 4.2 可知，在 $f(x,y)$ 点 (x_0,y_0) 取得<u>极小值</u>。

(11) 曲面 $\Sigma:F(x,y,z)=0$, 则坐标原点到曲面上 $P(x_0,y_0,z_0)$ 点的切平面距离为________________________.

解：曲面 $\Sigma:F(x,y,z)=0$ 在 $P(x_0,y_0,z_0)$ 点处的切平面方程为：

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0\ ,$$

根据点到平面的距离公式可得坐标原点到曲面 $\Sigma:F(x,y,z)=0$ 上 $P(x_0,y_0,z_0)$ 点的切平面距离为 $\underline{\dfrac{|x_0F_x+y_0F_y+z_0F_z|}{\sqrt{{F_x}^2+{F_y}^2+{F_z}^2}}}$.

(12) 曲线 $l:\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t),\end{cases}$ $P_0(x_0,y_0,z_0)=(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$，则坐标原点到曲线 l 在点 P_0 切线的距离公式为___________________________.

解：曲线 l 在点 P_0 的切线方程为 $\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$，根据点到直线的距离公式可得坐标原点到曲线 l 在点 P_0 切线的距离公式为 $\underline{\dfrac{|\overrightarrow{OP_0}\cdot\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\}|}{\sqrt{x'(t_0)^2+y'(t_0)^2+z'(t_0)^2}}}$

(13) 若曲面 $\Sigma:F(x,y,z)=0$ 上 Q 点的法线经过曲面外一点 $P(a,b,c)$, 则 $Q(x,y,z)$ 必满

足________________________.

解：$\Sigma: F(x,y,z)=0$ 上 Q 点的法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$，

由该法线过 $P(a,b,c)$ 可得：$\dfrac{a-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{b-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{c-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$,故 $Q(x,y,z)$ 必满足 $\underline{\dfrac{a-x}{F_x}=\dfrac{b-y}{F_y}=\dfrac{c-z}{F_z}}$

(14) $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上的点，则坐标原点到该点切平面的距离为________________________.

解：令 $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$，则 $F_x=\dfrac{2x}{a^2},F_y=\dfrac{2y}{b^2},F_z=\dfrac{2z}{c^2}$,由此可得 P_0 处的切平面方程为 $\dfrac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\dfrac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\dfrac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0$，即 $\dfrac{x_0}{a^2}x+\dfrac{y_0}{b^2}y+\dfrac{z_0}{c^2}z=1$，

根据点到平面的距离公式可得坐标原点到该点切平面的距离为 $\underline{\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x_0^{\,2}}{a^4}+\dfrac{y_0^{\,2}}{b^4}+\dfrac{z_0^{\,2}}{c^4}}}}$.

(15) 平面上到 n 个点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ 的距离平方之和最小的点的坐标为____________________.

解：根据题意，即要确定 a,b，使得 $f(a,b)=\sum\limits_{i=1}^{n}((a-x_i)^2+(b-y_i)^2)$ 取得最小值.

从而由 $\begin{cases} f_a=2\sum\limits_{i=1}^{n}(a-x_i)=0 \\ f_b=2\sum\limits_{i=1}^{n}(b-y_i)=0 \end{cases}$，可得：$\begin{cases} a=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i \\ b=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i \end{cases}$,因为 $A=f_{aa}=2n$, $B=f_{ab}=0$，

$C=f_{bb}=2n$,故 $AC-B^2=4n^2>0, A=2n>0$，因此，f 在 $(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i,\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i)$ 处取得极小值，即满足题意的坐标为 $\underline{(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i,\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i)}$。

3. 计算题

(1) 已知函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$, 试求 $f(tx,ty)$.

(2) 求函数 $z=x^2y^2+\sqrt{\ln\frac{4}{x^2+y^2}}+\arcsin\frac{1}{x^2+y^2}$ 的定义域.

(3) 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$,　　(4) 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x^2y^2\ln(x^2+y^2)$.

(5) $u=\int_{xz}^{yz}e^{t^2}dt$ 的一阶偏导数,　　(6) 函数 $u=x^ay^bz^c$, 求 $\frac{\partial^6 u}{\partial x\partial y^2\partial z^3}$, u_{xyz}.

(7) $u=xyze^{x+y+z}$，求 $\frac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}$.　　(8) $u=\frac{\sqrt[x]{y}}{\sqrt[y]{x}}$, 求 u_y .

(9)求由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(z,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分 dz.

(10)设 $u=\ln(x^xy^yz^z)$，求 du.　　(11)设 $u=(y/x)^{\frac{1}{z}}$，求 $du|_{(1,1,1)}$.

(12) 设 $z=(x^2+y^2)e^{-\arctan(y/x)}$, 求 dz.

(13) 曲线 $y^2=2mx, z^2=m-x$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切线及法平面方程.

解：(1) $f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2-(tx)(ty)\arctan\frac{tx}{ty}=t^2f(x,y)$.

(2)为使函数有意义，则 $\begin{cases}\ln\frac{4}{x^2+y^2}\geq 0\\ x^2+y^2\neq 0\\ -1\leq\frac{1}{x^2+y^2}\leq 1\end{cases}$，易得函数定义域 D：$1\leq x^2+y^2\leq 4$.

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)e^{x^2y^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\frac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)e^{x^2y^2}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin x^2}{2x}=0$

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x^2y^2\ln\left(x^2+y^2\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}x^2y^2\ln\left(x^2+y^2\right)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(0\ln x^2\right)=0$.

(5) $u_x=-ze^{x^2z^2}, u_y=ze^{y^2z^2}, u_z=ye^{y^2z^2}-xe^{x^2z^2}$.

(6) $\frac{\partial u}{\partial x}=ax^{a-1}y^bz^c, \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=abx^{a-1}y^{b-1}z^c$,从而 $u_{xyz}=\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=abcx^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}$,

易得 $\frac{\partial^6 u}{\partial x\partial y^2\partial z^3}=ab(b-1)c(c-1)(c-2)x^{a-1}y^{b-2}z^{c-3}$.

(7)由于 $\frac{\partial^k}{\partial z^k}e^{x+y+z}=e^{x+y+z}$，$k=1,2,3,\cdots$,

关于 x 利用 Leibniz 公式，得 $\dfrac{\partial^p u}{\partial x^p}=xyze^{x+y+z}+C_p^1\left(yz\right)e^{x+y+z}=\left(xyz+pyz\right)e^{x+y+z}$ ，

关于 y 利用 Leibniz 公式，得

$$\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\partial y^q}=\left(xyz+pyz\right)e^{x+y+z}+C_q^1\left(xz+pz\right)e^{x+y+z}=\left(xyz+pyz+qxz+qpz\right)e^{x+y+z},$$

关于 z 利用 Leibniz 公式，得

$$\frac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}=\left(xyz+pyz+qxz+qpz\right)e^{x+y+z}+C_r^1\left(xy+py+qx+pq\right)e^{x+y+z}$$
$$=\left(x+p\right)\left(y+q\right)\left(z+r\right)e^{x+y+z}.$$

(8) $u=\dfrac{\sqrt[x]{y}}{\sqrt[y]{x}}=\dfrac{y^{\frac{1}{x}}}{x^{\frac{1}{y}}}$，从而 $u_y=\dfrac{\frac{1}{x}y^{\frac{1}{x}-1}x^{\frac{1}{y}}+y^{\frac{1}{x}}x^{\frac{1}{y}}\ln x\dfrac{1}{y^2}}{x^{\frac{2}{y}}}=\dfrac{\sqrt[x]{y^{1-x}}}{\sqrt[y]{x}}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{y}\right).$

(9)令 $F\left(x,y,z\right)=xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}-\sqrt{2}=0$,则有 $F_x=yz+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ，

$F_y=xz+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ， $F_z=xy+\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ，由定理 3.5 知 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}$ ， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}$,

从而在点 $\left(1,0,-1\right)$ 处有 $z_x=1$， $z_y=-\sqrt{2}$ ，故有 z 在点 $\left(1,0,-1\right)$ 处的全微分 $dz=dx-\sqrt{2}dy$.

(10) $u=\ln\left(x^x y^y z^z\right)=x\ln x+y\ln y+z\ln z$,故 $u_x=1+\ln x$， $u_y=1+\ln y$， $u_z=1+\ln z$ ，

从而有 $du=\left(1+\ln x\right)dx+\left(1+\ln y\right)dy+\left(1+\ln z\right)dz$.

(11)易得 $u_x=-\dfrac{1}{xz}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{z}}, u_y=\dfrac{1}{xz}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{z}-1}, u_z=-\dfrac{1}{z^2}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{z}}\ln\dfrac{y}{x}$,

由于 $du\Big|_{(1,1,1)}=u_x\Big|_{(1,1,1)}dx+u_y\Big|_{(1,1,1)}dy+u_z\Big|_{(1,1,1)}dz=-dx+dy$.

(12)易得 $z_x=2xe^{-\arctan\frac{y}{x}}+\left(x^2+y^2\right)e^{-\arctan\frac{y}{x}}\left(\dfrac{y/x^2}{1+y^2/x^2}\right)=\left(2x+y\right)e^{-\arctan\frac{y}{x}}$,

$$z_y=2ye^{-\arctan\frac{y}{x}}+\left(x^2+y^2\right)e^{-\arctan\frac{y}{x}}\left(\frac{-1/x}{1+y^2/x^2}\right)=\left(2y-x\right)e^{-\arctan\frac{y}{x}},$$

从而 $dz=\left(2x+y\right)e^{-\arctan\frac{y}{x}}dx+\left(2y-x\right)e^{-\arctan\frac{y}{x}}dy$.

(13)对方程两边关于 x 求导得 $\begin{cases} 2y\dfrac{dy}{dx}=2m \\ 2z\dfrac{dz}{dx}=-1 \end{cases}$，故 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{m}{y} \\ \dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{1}{2z} \end{cases}$,从而在点 $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 处有

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{m}{y_0}$，$\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{1}{2z_0}$，由此可得在点 $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 处的切向量为 $\left(1,\dfrac{m}{y_0},-\dfrac{1}{2z_0}\right)$，法平面方程：

$x-x_0+\dfrac{m}{y_0}\left(y-y_0\right)-\dfrac{1}{2z_0}\left(z-z_0\right)=0$.

(B)

1. 函数 $z=1-(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2})$ 在点 $(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}})$ 处沿曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在这点的内法线方向的方向导数.

解: 椭圆曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在任意点处的切线斜率为 $y'\big|_{(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})}=\left.\dfrac{b^2(-\dfrac{2x}{a^2})}{2y}\right|_{(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})}=-\dfrac{b}{a}$,

则法线斜率为 $\dfrac{a}{b}$,内法线同向的单位向量向量为 $\{-\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},-\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\}$.

另一方面, $\dfrac{\partial z}{\partial x}\big|_{(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})}=-\dfrac{2x}{a^2}\big|_{(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})}=-\dfrac{\sqrt{2}}{a}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}\big|_{(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})}=-\dfrac{2y}{b^2}\big|_{(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})}=-\dfrac{\sqrt{2}}{b}$,

函数 z 在 $(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}})$ 处的方向导数为

$$\frac{\partial z}{\partial l}\big|_{(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})}=-\frac{\sqrt{2}}{a}\times(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})+(-\frac{\sqrt{2}}{b})\times(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})=\frac{\sqrt{2}}{ab}\sqrt{a^2+b^2}.$$

2. 由曲线 $\begin{cases} 3x^2+2y^2=12, \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所得的旋转曲面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量.

解: 曲线绕 y 轴旋转一周所得的旋转椭球面的方程为 $3x^2+3z^2+2y^2=12$,

则 $F_x\,|_{(0,\sqrt{3},\sqrt{2})}=0, F_y\,|_{(0,\sqrt{3},\sqrt{2})}=4\sqrt{3}, F_z\,|_{(0,\sqrt{3},\sqrt{2})}=6\sqrt{2}$,

故曲线在 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的法向量为 $\{0,4\sqrt{3},6\sqrt{2}\}$，单位向量为

$$\frac{1}{\sqrt{120}}\{0,4\sqrt{3},6\sqrt{2}\}=\{0,\frac{\sqrt{10}}{5},\frac{\sqrt{15}}{5}\}.$$

3. 面是正交的指它们在交线上任意一点处的两个法向量相互垂直.证明:曲面 $z^2=x^2+y^2$ 与曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 正交.

解: 曲面 $z^2=x^2+y^2$ 在交线上任一点 (x_0,y_0,z_0) 处的法向量为 $\{2x_0,2y_0,-2z_0\}$,

曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在交线上任一点 (x_0,y_0,z_0) 处的法向量为 $\{2x_0,2y_0,2z_0\}$,

其中 (x_0,y_0,z_0) 满足 $\begin{cases} z_0^2=x_0^2+y_0^2 \\ z_0^2+x_0^2+y_0^2=1 \end{cases}$.

而两向量数量积 $\{2x_0,2y_0,-2z_0\}\cdot\{2x_0,2y_0,2z_0\}=4x_0^2+4y_0^2-4z_0^2=0$,

则这两个法向量垂直, 即曲面 $z^2=x^2+y^2$ 与曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 正交.

4. $u=\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$, 问 u 在点 (a,b,c) 处沿哪个方向增大最快?沿哪个方向减小最快?沿哪个方向变化率为零.

解: 因为函数的方向导数反映的就是函数在该点沿指定方向的变化率, 即变化快慢, 而方向导数在梯度方向取得最大值, 而

$$gradu\,|_{(a,b,c)}=\{-\frac{2}{a},-\frac{2}{b},\frac{2}{c}\}=2\{-\frac{1}{a},-\frac{1}{b},\frac{1}{c}\}.$$

故沿 $\{-\frac{1}{a},-\frac{1}{b},\frac{1}{c}\}$ 方向函数增长最快，沿 $\{\frac{1}{a},\frac{1}{b},-\frac{1}{c}\}$ 方向函数减小最快，在与 $\{-\frac{1}{a},-\frac{1}{b},\frac{1}{c}\}$ 方向垂直的方向上函数的变化率为 0.

5. 求二元函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在直线 $x+y=6$, x 轴和 y 轴所围的闭区域 D 上的极值、极大值与极小值.

解: 先求驻点，令 $\frac{\partial z}{\partial x}=8xy-3x^2y-2xy^2=0$,(1) $\frac{\partial z}{\partial y}=4x^2-x^3-2x^2y=0$, (2) 即

$\begin{cases} xy(8-3x-2y)=0 \\ x^2(4-x-2y)=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$ (舍去)以及 y 轴上的所有的点(舍去),由于这些点都是边界点不可能是极值点，故可能的极值点只剩下唯一的点 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$, $f(2,1)=4$。

而(1)式两边再对 x 求导可得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=8y-6xy-2y^2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=8x-3x^2-4xy, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2x^2$ ，

故在 $(2,1)$ 处，$AC-B^2=32>0, A=-6<0$，由极值的充分条件知，函数在 $(2,1)$ 处取得极大值为 4.

6. 平面 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ 和柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线上与 xOy 平面距离最近的点.

解：设交线上一点 (x,y,z)，该点到 xoy 面的最短距离为 z^2，构造函数

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}-1)+\mu(x^2+y^2-1)$$

令 $\begin{cases} L_x(x,y,z,\lambda,\mu)=\frac{\lambda}{3}+2\mu x=0 \\ L_y(x,y,z,\lambda,\mu)=\frac{\lambda}{4}+2\mu y=0 \\ L_z(x,y,z,\lambda,\mu)=\frac{\lambda}{5}+2z=0 \\ L_\lambda(x,y,z,\lambda,\mu)=\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}-1=0 \\ L_\mu(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2-1=0 \end{cases}$ 解得唯一驻点 $\begin{cases} x=\frac{4}{5} \\ y=\frac{3}{5} \\ z=\frac{35}{12} \end{cases}$

故到 xoy 面距离最近的点的坐标为 $(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{35}{12})$.

7. 求由方程 $x^2+2y^2+3z^2-2xy-2yz-2=0$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的极值.

解: 方程两边对 x 求偏导数可得

$$2x+6z\frac{\partial z}{\partial x}-2y-2y\frac{\partial z}{\partial x}=0 \text{ (1)}, \text{ 即 } \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y-x}{3z-y},$$

方程两边对 y 求偏导可得

$$4y+6z\frac{\partial z}{\partial y}-2x-2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}=0 \text{ (2)}, \text{ 即 } \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x+z-2y}{3z-y},$$

令 $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases}$ 可得 $x=y=z$,将其代回原方程可得驻点为 $(1,1,1),(-1,-1,-1)$.

(1)式两边再对 x 求偏导数有

$$2+6(\frac{\partial z}{\partial x})^2+6z(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2})-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

注意到$\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,1)}=0,\frac{\partial z}{\partial y}|_{(1,1)}=0$，易求得$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}|_{(1,1)}=-\frac{1}{2}$.

同理可求得$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}|_{(1,1)}=\frac{1}{2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}|_{(1,1)}=-1$.

则在点$(1,1,1)$处，$AC-B^2=\frac{1}{4}>0, A=-\frac{1}{2}<0$，由极值的充分条件，函数在$(1,1,1)$处取得极大值 0; 同理可得函数在$(-1,-1,-1)$处取得极小值 0.

(C)

1. 设生产某种产品必须投入两种要素，x_1和x_2分别为两种要素的投入量，Q为产出量，若生产函数为$Q=2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$，其中$\alpha,\beta$为正常数，且$\alpha+\beta=1$. 假设两种要素的价格分别为$p_1$和$p_2$，试问：当产出量为$12$时，两要素各投入多少可以使得投入总费用最小?

解: 设x_1,x_2为两要素的投入量，则总费用$R(x_1,x_2)=p_1x_1+p_2x_2$.

构造函数$L(x_1,x_2,\lambda)=p_1x_1+p_2x_2+\lambda(2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}-12)$，

令$\begin{cases} L_{x_1}(x_1,x_2,\lambda)=p_1+2\alpha\lambda x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}=0 \\ L_{x_2}(x_1,x_2,\lambda)=p_2+2\beta\lambda x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}=0 \\ L_{\lambda}(x_1,x_2,\lambda)=2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}-12=0 \end{cases}$，解得唯一驻点为$\begin{cases} x_1=6(\frac{p_2\alpha}{p_1\beta})^{\beta} \\ x_2=6(\frac{p_1\beta}{p_2\alpha})^{\alpha} \end{cases}$.

故当投入量为$6(\frac{p_2\alpha}{p_1\beta})^{\beta}$及$6(\frac{p_1\beta}{p_2\alpha})^{\alpha}$时总费用最少.

2. 有一圆柱体，它的底半径以$0.1\text{cm}/\text{s}$的速度在增加，而高以$0.2\text{cm}/\text{s}$的速度在减少，试求底半径为100cm，高为120cm时，(1)圆柱体积的变化率；（2）圆柱体表面积的变化率.

解: 设圆柱体的底面半径为r，高为h. 它们都是时间t的函数.

(1) 体积$V=\pi r^2 h$，方程两边对t求导可得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=2\pi rh\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+\pi r^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t},$$

代入已知条件可得$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=2\pi 100\times 120\times 0.1-\pi 100^2\times 0.2=400\pi(cm^3/s)$.

(2) 表面积$S=2\pi rh+2\pi r^2$，方程两边对t求导可得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=(2\pi h+4\pi r)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+2\pi r\frac{\mathrm{dh}}{\mathrm{dt}}$$

代入已知条件可得 $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=(2\pi 120+4\pi 100)0.1-2\pi 100\times 0.2=24\pi(cm^2/s)$.

3. 已知一组数据 $(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$ ，假定经验公式是 $y=ax^2+bx+c$,按最小二乘法建立 a,b,c 应满足的三元一次方程组.

解: 要使公式 $y=ax^2+bx+c$ 能尽可能的拟合数据 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots(x_n,y_n)$, 必须估计值 $a{x_i}^2+bx_i+c$ 与精确值 y_i 之差的平方和应尽可能的小.

设 $S=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(a{x_i}^2+bx_i+c)]^2$, 即求 a,b,c 的取值, 使 S 最小.

令 $\begin{cases}\frac{\partial S}{\partial a}=\sum_{i=1}^{n}2[y_i-(a{x_i}^2+bx_i+c)](-x_i^2)=0\\ \frac{\partial S}{\partial b}=\sum_{i=1}^{n}2[y_i-(a{x_i}^2+bx_i+c)](-x_i)=0\\ \frac{\partial S}{\partial c}=\sum_{i=1}^{n}2[y_i-(a{x_i}^2+bx_i+c)](-1)=0\end{cases}$,

即 a,b,c 应该满足方程组

$$\begin{cases}-\sum_{i=1}^{n}2[y_i-(a{x_i}^2+bx_i+c)]x_i^2=0\\ -\sum_{i=1}^{n}2[y_i-(a{x_i}^2+bx_i+c)]x_i=0\\ -\sum_{i=1}^{n}2[y_i-(a{x_i}^2+bx_i+c)]=0\end{cases}$$

4. 设方程 $F(x,y)=0$ 满足隐函数定理的条件, 并由此确定了隐函数 $y=f(x)$, 又设 $F(x,y)$ 具有连续的两阶偏导数.

(1) 求 $f''(x)$;

(2) 若 $F(x_0,y_0)=0$, $y_0=f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极值. 试证明: 当 $F_y(x_0,y_0)F_{xx}(x_0,y_0)<0$ 时, $f(x_0)$ 为极小值; 当 $F_y(x_0,y_0)\ F_{xx}(x_0,y_0)>0$ 时, $f(x_0)$ 为极大值.

解: (1) 方程 $F(x,y)=0$ 两边对 x 求偏导可得

$$F_x + F_y \frac{dy}{dx} = 0,\ 即\ f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x}{F_y} \qquad (*),$$

方程(*)两边再对 x 求偏导可得

$$F_{xx} + F_{xy}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (F_{yx} + F_{yy}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + F_y \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 0,$$

将 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x}{F_y}$ 代回上式可得

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{2F_x F_y F_{xy} - F_{xx}F_y^2 - F_{yy}F_x^2}{F_y^3} \qquad (**).$$

(2) 由 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处取得极值，由极值的必要条件可知

$f'(x_0) = 0, F_x(x_0, y_0) = 0$,将其代回(**)可得 $f''(x_0) = \frac{-F_{xx}(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$.

由极值的第二充分条件可得:

当 $F_y(x_0, y_0)F_{xx}(x_0, y_0) < 0$ 时，$f''(x_0) > 0$,函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处取得极小值；

当 $F_y(x_0, y_0)\ F_{xx}(x_0, y_0) > 0$ 时，$f''(x_0) < 0$，函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.