第四章 一元函数积分学

习 题 4.1 定积分的概念与性质

(A)

1. 试用定积分表示由曲线 $y=x^2$,直线 $x=1$, $x=2$ 及 x 轴所围平面图形的面积,并据定义求之.

解: 所求平面图形的面积 $A=\int_1^2 x^2\mathrm{d}x$。

因为 $f(x)=x^2$ 在区间[1,2]上连续，所以 $f(x)$在[1,2]上可积，定积分 $\int_1^2 x^2\mathrm{d}x$ 的值与区间[1,2]的分法及点 ξ_i 的取法无关，因此对区间[1,2]进行 n 等分，分点 $x_i=1+\frac{i}{n}, i=1,2,\cdots,n-1$, $\Delta x_i=\frac{1}{n}$，取每一个小区间的右端点为 ξ_i ，即 $\xi_i=1+\frac{i}{n}$，则

$$\int_1^2 x^2\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i =\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(1+\frac{i}{n})^2\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(1+\frac{2}{n}i+\frac{i^2}{n^2})\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2)=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6})=1+1+\frac{2}{6}=\frac{7}{3}。$$

2.设有一质量连续分布的金属细棒,它占据 Ox 轴上的闭区间 $[a,b]$,其在 x 处的线密度为 $\rho(x)$,试用定积分表示该细棒的质量 *M*.

解：$M=\int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x$ 。

3.利用定积分的几何意义,计算下列定积分:

(1) $\int_0^1 (x+1)\mathrm{d}x$; (2) $\int_{-1}^1 |x|\mathrm{d}x$; (3) $\int_{-2}^0 \sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$; (4) $\int_1^2 \sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x$.

解：(1) 因为 $\int_0^1 (x+1)\mathrm{d}x$ 表示由 $x=0, x=1, y=x+1$ 及 x 轴所围图形（直角梯形）的面积，故 $\int_0^1 (x+1)\mathrm{d}x=\frac{1+2}{2}\times 1=\frac{3}{2}$.

解：(2) 因为 $\int_{-1}^1 |x|\mathrm{d}x$ 表示由 $x=-1$, $x=1, y=|x|$ 及 x 轴所围图形的面积，故

$\int_{-1}^{1}|x|\mathrm{d}x=2\times\frac{1}{2}\times1\times1=1$.

(3) 因为$\int_{-2}^{0}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$表示由$x=-2, x=0, y=\sqrt{4-x^2}$及$x$轴所围图形（四分之一圆）的面积，故$\int_{-2}^{0}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\times4\pi=\pi$.

(4) 因为$\int_{1}^{2}\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x$表示由$x=1, x=2, y=\sqrt{2x-x^2}$及 x 轴所围图形（四分之一圆）的面积，故$\int_{-2}^{0}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\times\pi=\frac{\pi}{4}$.

4.利用定积分的几何意义,解释下列等式成立:

(1) $\int_{-1}^{1}x^3\mathrm{d}x=0$;　　(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x$

试从(1)(2)两个等式,得出一般的规律.

解：（1）因为积分区间关于原点对称，函数$f(x)=x^3$ 是奇函数，图形关于原点对称，又$\int_{-1}^{1}x^3\mathrm{d}x$ 表示由直线$x=-1, x=1, y=x^3$ 和x轴所围成图形面积的代数和，故$\int_{-1}^{1}x^3\mathrm{d}x=0$.

（2）因为积分区间关于原点对称，函数$\boldsymbol{f(x)=\cos x}$ 是偶函数，图形关于y轴对称，又$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x$ 表示由直线$x=-\frac{\pi}{2}, x=\frac{\pi}{2}, y=\cos x$和 x 轴所围成图形面积的代数和，故$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x$.

5.利用定积分的定义,证明:$\int_{a}^{b}1\cdot\mathrm{d}x=b-a$.

证：对区间 $[a,b]$ 任意分割为 n 个小区间$[x_{i-1},x_i], i=1,2,\cdots,n$， $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ ，任取$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ ，因为$f(x)\equiv1$ ，故$f(\xi_i)\equiv1$，又取$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$ ，则

$$\int_{a}^{b}1\cdot\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\lim_{\lambda\to0}(b-a)=b-a。$$

6.利用定积分性质,比较下列积分的大小:

(1) $\int_{0}^{1}x\mathrm{d}x$与$\int_{0}^{1}x^2\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\mathrm{d}x$与$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\mathrm{d}x$;

(3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x$与$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_{0}^{1}x\mathrm{d}x$与$\int_{0}^{1}\ln(1+x)\mathrm{d}x$.

解：(1) 因为在$[0,1]$ 上，有$x\ge x^2$ ，故由定积分的性质有$\int_{0}^{1}x\mathrm{d}x>\int_{0}^{1}x^2\mathrm{d}x$。

(2) 因为在$[0,\dfrac{\pi}{4}]$ 上，有$\sin x \le \cos x$ ，故由定积分的性质有$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\mathrm{d}x$。

(3) 因为在$[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上，有$x \ge \sin x$ ，故由定积分的性质有$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x$。

(4) 因为在$[0,1]$ 上，有$x \ge \ln(1+x)$ ，故由定积分的性质有$\int_0^1 x\mathrm{d}x > \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$。

7.估计下列积分的值:

(1)$\int_1^2 e^{-x^2}\mathrm{d}x$;　　　　　　　　　　(2)$\int_0^1 \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$.

解:（1）因为$f(x)=e^{-x^2}$ 在$[1,2]$上递减，于是有$f(2)\le f(x)\le f(1)$ ，即

$e^{-4} \le e^{-x^2} \le e^{-1}$， 由定积分的估值不等式得$\int_1^2 e^{-4}\mathrm{d}x \le \int_1^2 e^{x^2}\mathrm{d}x \le \int_1^2 e^{-1}\mathrm{d}x$ ，即$e^{-4} \le \int_1^2 e^{x^2}\mathrm{d}x \le e^{-1}$.

(2) 设$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$,故 *f(x)*在$[0,1]$上递增，于是有

$f(0)\le f(x)\le f(1)$ ，即$0 \le \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \le \ln(1+\sqrt{2})$.由定积分的估值不等式得

$$0 \le \int_0^1 \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x \le \int_0^1 \ln(1+\sqrt{2})\mathrm{d}x, \text{即} 0 \le \int_0^1 \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x \le \ln(1+\sqrt{2}).$$

8.证明:若$f(x), g(x)$在区间$[a,b]$上可积，且$f(x)\le g(x)$,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

证：原不等式等价于$\int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x \le 0$，将$[a,b]$任意分割为 n 个小区间$[x_{i-1},x_i], i=1,2,\cdots,n$，记$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ，任取$\xi_i \in [x_{i-1},x_i], \lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$，由定积分的定义$\int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^n (f(\xi_i)-g(\xi_i))\Delta x_i$. 因为在$[a,b]$上有 $f(x)\le g($ ，故

$f(\xi_i)-g(\xi_i)\le 0$，于是有$\sum\limits_{i=1}^n (f(\xi_i)-g(\xi_i))\Delta x_i \le 0$. 又 *f(x),g(x)*在$[a,b]$上可积，于是

$f(x)-g(x)$ 在$[a,b]$上可积，也即上述和式极限存在，由极限保号性得

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n (f(\xi_i)-g(\xi_i))\Delta x_i \le 0, \text{也即} \int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x \le 0,$$

所以$\int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x \le 0$.

(B)

1.试将下列极限表示为定积分:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}})$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+n})$.

解：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}})=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\sqrt{1+x}\mathrm{d}x$ (或 $=\int_1^2\sqrt{x}\mathrm{d}x$).

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+n})=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{2+x}\mathrm{d}x$ (或 $=\int_2^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x$).

2.利用积分中值定理，计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$.

解：因为 $f(x)=\frac{x^n}{1+x}$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上连续，由积分中值定理有 $\frac{x^n}{1+x}=\frac{\xi^n}{1+\xi}\cdot\frac{1}{2}$ ，其中 $\xi\in(0,\frac{1}{2})$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\xi^n}{1+\xi}=0$.

3.利用定积分几何意义,讨论 a,b 取什么值时,积分 $\int_a^b(3+2x-x^2)\mathrm{d}x$ ($a<b$)的值取得最大值？

解：设 $f(x)=3+2x-x^2=4-(x-1)^2=(3-x)(1+x)$.令 $f(x)=0$, 得 $x_1=-1,x_2=3$.根据定积分的几何意义 $\int_a^b(3+2x-x^2)\mathrm{d}x$ 表示由 $x=a, x=b, y=3+2x-x^2$ 及 x 轴所围成的平面图形的面积的代数和，结合曲线 $y=3+2x-x^2$ 的符号可知，当 $a=-1,b=3$ 时,原积分的值取得最大值.

4.设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负、连续,且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$,证明: $f(x)\equiv 0$.

证（反证法)：若 $f(x)\neq 0$ ，则存在 $x_0\in[a,b]$ ，使得 $f(x_0)>0$ ，不妨设 $x_0\in(a,b)$ ，又 $f(x)$ 在 x_0 处连续，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ ，所以必存在一个包含 x_0 的区间 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ ，当 $x\in[\alpha,\beta]$ 时，恒有 $f(x)\geq\frac{f(x_0)}{2}$,于是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^\alpha f(x)\mathrm{d}x+\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x+\int_\beta^b f(x)\mathrm{d}x\geq\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq\frac{1}{2}f(x_0)(\beta-\alpha)>0.$$

这与已知条件$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$矛盾.所以，$f(x)\equiv 0$.

当$x_0=a$ 或$x_0=b$时，只需将上述过程中$x\to x_0$ 分别修改为$x\to a^+$或$x\to b^-$即可。故必有$f(x)\equiv 0$.

5.证明(积分第一中值定理):若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,$g(x)$在$[a,b]$上连续且不变号,则在$[a,b]$上至少存在一点ξ,使得$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

证：因为$g(x)$在$[a,b]$ 上连续且不变号，不妨设$g(x)\ge 0$ ，则$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\ge 0$ ，若$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0$，则有$g(x)\equiv 0$ ，原命题成立.

下设$\int_a^b g(x)dx>0$.因为$f(x)$在$[a,b]$ 上连续，则必有最大值和最小值，即$m\le f(x)\le M$，于是有$mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$.由定积分估值不等式，得

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

于是有$m\le\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}\le M$.再由闭区间上连续函数的介值定理知，存在$\xi\in[a,b]$ ，使

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}=f(\xi),\text{即}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

习 题 4.2　微积分基本公式与不定积分

(A)

1.设$F(x)=\int_0^x \ln(t+\sqrt{t^2+1})\mathrm{d}t$,求$F'(0)$及$F'(1)$.

解：因为$F'(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，所以$F'(0)=\ln 1=0$ ，$F'(1)=\ln(1+\sqrt{2})$.

2.求下列函数的导数:

(1)$\int_0^{x^2}\cos t^2\mathrm{d}t$;　(2)$\int_0^x |t-1|\,\mathrm{d}t$;　(3)$\int_{x^2}^1 xf(t)\mathrm{d}t$;　(4)$\int_{\sqrt{x}}^{x^2}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t$.

解：(1)$\left(\int_0^{x^2}\cos t^2\mathrm{d}t\right)'=2x\cos x^4$.

(2) $\left(\int_0^x |t-1|\,\mathrm{d}t\right)' = |x-1|$.

(3) 因为$\int_{x^2}^1 xf(t)\mathrm{d}t = x\cdot\int_{x^2}^1 f(t)\mathrm{d}t$,所以

$$\left(x\cdot\int_{x^2}^1 f(t)\mathrm{d}t\right)' = \int_{x^2}^1 f(t)\mathrm{d}t + x\left(\int_{x^2}^1 f(t)\mathrm{d}t\right)' = \int_{x^2}^1 f(t)\mathrm{d}t - 2x^2 f(x^2)\text{。}$$

(4) $\left(\int_{\sqrt{x}}^{x^2} \ln(1+t^2)\mathrm{d}t\right)' = \ln(1+x^4)\cdot(x^2)' - \ln(1+x)\cdot(\sqrt{x})'$

$$= 2x\ln(1+x^4) - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(1+x).$$

3. 设$y = y(x)$由方程$\int_0^y e^{u^2}\mathrm{d}u - \int_0^{x^2} ue^u\mathrm{d}u = 0$所确定，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解： 在方程$\int_0^y e^{u^2}\mathrm{d}u - \int_0^{x^2} ue^u\mathrm{d}u = 0$的两边关于$x$求导，得

$$e^{y^2}\cdot y' - x^2e^{x^2}\cdot(x^2)' = 0$$

即$e^{y^2}\cdot y' - 2x^3e^{x^2} = 0$，故$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = 2x^3e^{x^2-y^2}$.

4.计算下列定积分:

(1) $\int_0^1 (x^2 + x\sqrt{x})\mathrm{d}x$;　　　(2) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$;

(3) $\int_0^2 |x-1|\mathrm{d}x$;　　　(4) $\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x) = \begin{cases} x, & x<1, \\ x^2, & x\ge 1. \end{cases}$

解：(1) $\int_0^1 (x^2 + x\sqrt{x})\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2 + x^{\frac{3}{2}})\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 + \frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}$.

(2) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}$.

(3) $\int_0^2 |x-1|\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 + \frac{1}{2}x^2\Big|_1^2 - 1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1 = 1$.

(4) $\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 x\mathrm{d}x + \int_1^2 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^1 + \frac{1}{3}x^3\Big|_1^2 = \frac{7}{3}$.

5.求下列极限:

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t}{\sin x}$;　　　　(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}(1-\cos\sqrt{t})\mathrm{d}t}{x^4}$;

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\int_1^{\cos x} e^{t^2}\mathrm{d}t}{x^2}$;　　　　(4) $\lim_{x\to +\infty}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}$.

解：(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{\cos x}=1$.

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}(1-\cos\sqrt{t})\mathrm{d}t}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos|x|)\cdot 2x}{4x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos|x|}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{4}$.

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\int_1^{\cos x} e^{t^2}\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos^2 x}\cdot(-\sin x)}{2x}=-\frac{1}{2}e$.

(4) $\lim_{x\to +\infty}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{(\arctan x)^2}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=\frac{\lim_{x\to +\infty}(\arctan x)^2}{\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=(\frac{\pi}{2})^2=\frac{\pi^2}{4}$.

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\le x\le 1\\ 1, & x<0 或 x>1\end{cases}$ 求函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式。

解：当 $x<0$ 时，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x \mathrm{d}t=x$；

当 $0\le x\le 1$ 时，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}x^3$；

当 $x>1$ 时，$F(x)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t+\int_1^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 t^2\mathrm{d}t+\int_1^x \mathrm{d}t=\frac{1}{3}+x-1=x-\frac{2}{3}$，所以

$$F(x)=\begin{cases}x, x<0,\\ \frac{1}{3}x^3, 0\le x\le 1,\\ x-\frac{2}{3}, x>1.\end{cases}$$

7.若 $\int f(x)\mathrm{d}x=\arctan\sqrt{x}+C$, 则 $f(x)=$ __________.

解：由 $\int f(x)dx=\arctan\sqrt{x}+C$ 得 $f(x)=(\arctan\sqrt{x})'=\frac{(\sqrt{x})'}{1+x}=\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$。

8.若 $f(x)$ 的一个原函数为 $\sin x$,则 $\int f'(x)\mathrm{d}x=$ __________.

解：因为 $f(x)$的一个原函数为 $\sin x$，故 $f(x)=(\sin x)'=\cos x$，

$\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C=\cos x+C$.

9.求下列不定积分:

(1) $\int(\cos x+2e^x)\mathrm{d}x$;　(2) $\int\sqrt[3]{x}(x+1)\mathrm{d}x$;　(3) $\int\frac{1}{2^x}\mathrm{d}x$;　(4) $\int\frac{(2+x)^2}{x}\mathrm{d}x$;

(5) $\int\frac{x\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;　(6) $\int(2^xe^x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})\mathrm{d}x$;　(7) $\int\frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$;　(8) $\int\frac{3x^3+3x+2}{x^2+1}\mathrm{d}x$;

(9) $\int\sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$;　(10) $\int\frac{1}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$.

解：(1) $\int(\cos x+2e^x)\mathrm{d}x=\int\cos x\mathrm{d}x+2\int e^x\mathrm{d}x=\sin x+2e^x+C$.

(2) $\int\sqrt[3]{x}(x+1)\mathrm{d}x=\int(x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{1}{3}})\mathrm{d}x=\int x^{\frac{4}{3}}dx+\int x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}}+C$.

(3) $\int\frac{1}{2^x}\mathrm{d}x=\int(\frac{1}{2})^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^x+C=-\frac{1}{2^x\ln 2}+C$.

(4) $\int\frac{(2+x)^2}{x}\mathrm{d}x=\int\frac{(2+x)^2}{x}\mathrm{d}x=\int\frac{4+4x+x^2}{x}\mathrm{d}x+\int(\frac{4}{x}+4+x)\mathrm{d}x$

$=4\ln|x|+4x+\frac{1}{2}x^2+C$.

(5) $\int\frac{x\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int x^{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\int x^{\frac{5}{6}}\mathrm{d}x=\frac{6}{11}x^{\frac{11}{6}}+C$.

(6) $\int(2^xe^x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})\mathrm{d}x=\int(2e)^x\mathrm{d}x+\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln(2e)}(2e)^x+\arcsin x+C$

$=\frac{2^x\cdot e^x}{\ln 2+1}+\arcsin x+C$.

(7) $\int\frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}-\arctan x+C$.

(8) $\int\frac{3x^3+3x+2}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\frac{3x(x^2+1)+2}{x^2+1}\mathrm{d}x=3\int x\mathrm{d}x+\int\frac{2}{x^2+1}\mathrm{d}x$

$=\frac{3}{2}x^2+2\arctan x+C$.

(9) $\int\sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\int\frac{1-\cos x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C$.

(10) $\int \frac{1}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{2\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \sec^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\tan x+C$.

10.一曲线经过点$(e^2,3)$,且其上任一点处的切线斜率为该点横坐标的倒数,求该曲线的方程.

解：设曲线方程为$y=f(x)$，由题意知，$y'=\frac{1}{x}$，故$y=\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$，由$y(e^2)=3$ 得，C=1，所求曲线方程为$y=\ln|x|+1$.

11.一质点以初速度 16 m/s 作匀加速运动,加速度为$-2\mathrm{m/s^2}$,求:

(1)质点在$t=2$秒时刻的速度;　　(2)经过多少时间质点的速度为零.

解：（1）设 t 时刻质点的速度为 $v(t)$，据题意有$v'(t)=-2, v(0)=16$ 故，$v(t)=-2t+C$，由$v(0)=16$ 得 C=16，于是，$v(t)=-2t+16$　$v(2)=-4+16=12$(m ；

（2）由$v(t)=-2t+16=0$得 t=8(s)，即经过 8 秒时间，质点速度为零.

(B)

1.设$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=\int_0^{2t}\tan u\mathrm{d}u,\\ y=\int_0^t \sin 2u\mathrm{d}u\end{cases}$所确定,求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解：由 $x=\int_0^{2t}\tan u\,\mathrm{d}u$ 得 $\mathrm{d}x=2\tan(2t)\mathrm{d}t$；　由 $y=\int_0^t \sin 2u\mathrm{d}u$ 得 $\mathrm{d}y=\sin(2t)\mathrm{d}t$，故$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sin(2t)}{2\tan(2t)}=\frac{1}{2}\cos(2t)$.

2.求函数$f(x)=\int_1^x (t-1)e^{-2t^2}\mathrm{d}t$的极值.

解：$f'(x)=(x-1)e^{-2x^2}$，令$f'(x)=0$ 得驻点$x=1$.所以，当$x<1$ 时，$f'(x)<0$；当$x>1$ 时，$f'(x)>0$.故$x=1$为$f(x)$ 的极小值点，极小值$f(1)=\int_1^1 (t-1)e^{-2t^2}\mathrm{d}t=0$.

3.计算定积分$\int_{-1}^2 \max\{x,x^2\}\mathrm{d}x$.

解：因为$\max\{x,x^2\}=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1\\ x^2, & -1\le x\le 0,\ 1<x<2\end{cases}$,所以

$$\int_{-1}^2 \max\{x,x^2\}\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 x^2\mathrm{d}x+\int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_1^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{2}x^2\Big|_{0}^{1}+\frac{1}{3}x^3\Big|_{1}^{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{7}{3}=\frac{19}{6}.$$

4.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x te^{2t^2}\mathrm{d}t}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x te^{2t^2}\mathrm{d}t}\overset{\frac{0}{0}\text{型}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\cdot e^{x^2}}{xe^{2x^2}}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}}{1}=2$.

5.求下列不定积分:

(1) $\int 3^{x+2}\mathrm{d}x$; (2) $\int\dfrac{x^4}{x^2+1}\mathrm{d}x$; (3) $\int\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x$; (4) $\int\tan x(\sec x-\tan x)\mathrm{d}x$.

解：(1) $\int 3^{x+2}\mathrm{d}x=9\int 3^x\mathrm{d}x=\dfrac{9}{\ln 3}3^x+C$.

(2) $\int\dfrac{x^4}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\dfrac{x^4-1+1}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int(x^2-1+\dfrac{1}{x^2+1})\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}x^3-x+\arctan x+C$.

(3) $\int\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}\mathrm{d}x$ \

$$=\int\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=-\cot x-\tan x+C.$$

(4) $\int\tan x(\sec x-\tan x)\mathrm{d}x=\int\tan x\sec x\mathrm{d}x-\int\tan^2 x\mathrm{d}x=\sec x-\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x$

$$=\sec x-\tan x+x+C$$

6.设 $\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ 为 $f(x)$ 的一个原函数,求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x$.

解:因为 $\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,所以 $f(x)=[\ln(x+\sqrt{x^2-1})]'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

7.若 $\int f'(x)\mathrm{d}x=2\sin x+e^x+C$, 且 $f(0)=2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

解：由 $\int f'(x)\mathrm{d}x=2\sin x+e^x+C$, 得 $f'(x)=(2\sin x+e^x)'$，故 $f(x)=2\sin x+e^x+C_1$.

由 $f(0)=2$, 得 $C_1=1$，所以， $f(x)=2\sin x+e^x+1$.

8.若 $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x^2+C$,求积分 $\int xf(2x)\mathrm{d}x$.

解：由条件知 $f(x)=(\dfrac{1}{2}x^2)'=x$ ， $\int xf(2x)\mathrm{d}x=\int x\cdot 2x\mathrm{d}x=2\int x^2\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}x^3+C$.

9.设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且单调增加，$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.证明: $F(x)$ 为 (a,b) 内单调增加函数.

证：$F'(x)=\left(\frac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{x-a}\right)'=\frac{f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{(x-a)^2}$.因为, $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，由积分中值定理有 $\exists\xi\in(a,x)$,使得 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(\xi)(x-a)$.故

$$F'(x)==\frac{(f(x)-f(\xi))(x-a)}{(x-a)^2}=\frac{f(x)-f(\xi)}{(x-a)},$$

又 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调增加，故 $f(x)>f(\xi)$ ，即当 $x\in(a,b)$ 时，有 $F'(x)>0$.所以，$F(x)$ 为 (a,b) 内单调增加函数.

习　题 4.3　不定积分与定积分的运算

(A)

1.填空题.

(1) $\mathrm{d}x=$ _____ $\mathrm{d}(4x+3)$;　(2) $x\mathrm{d}x=$ _____ $\mathrm{d}(3-x^2)$;　(3) $x^3\mathrm{d}x=$ _____ $\mathrm{d}(5x^4-1)$;

(4) $\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$ _____ $\mathrm{d}(\sqrt{x})$; (5) $\sin 2x\mathrm{d}x=$ _____ $\mathrm{d}(\cos 2x)$; (6) $e^{-3x}\mathrm{d}x=$ _____ $\mathrm{d}(e^{-3x})$.

解：(1)因为 $\mathrm{d}(4x+3)=4\mathrm{d}x$ ，所以 $\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\mathrm{d}(4x+3)$.

(2)因为 $\mathrm{d}(3-x^2)=-2x\mathrm{d}x$ ，所以 $x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{d}(3-x^2)$.

(3)因为 $\mathrm{d}5x^4-1)=20x^3\mathrm{d}x$ ，所以 $x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{20}\mathrm{d}(5x^4-1)$.

(4)因为 $\mathrm{d}\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ ，所以 $\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\mathrm{d}\sqrt{x}$.

(5)因为 $\mathrm{d}(\cos 2x)=-2\sin 2x\mathrm{d}x$ ，所以 $\sin(2x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{d}(\cos 2x)$.

(6)因为 $\mathrm{d}e^{-3x}=-3e^{-3x}\mathrm{d}x$ ，所以 $e^{-3x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\mathrm{d}(e^{-3x})$.

2.用换元法求下列不定积分:

(1) $\int(2x+1)^3\mathrm{d}x$; (2) $\int e^{2x+3}\mathrm{d}x$; (3) $\int\frac{1}{5x+4}\mathrm{d}x$; (4) $\int\sin(2x+\frac{\pi}{3})\mathrm{d}x$;

(5) $\int\sec^2(2x)\mathrm{d}x$; (6) $\int\tan(3x)\mathrm{d}x$; (7) $\int\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\mathrm{d}x$; (8) $\int\frac{1}{\sqrt[3]{4x-1}}\mathrm{d}x$;

(9) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$; (10) $\int\frac{\mathrm{d}x}{9x^2-4}$; (11) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}$; (12) $\int xe^{-x^2}\mathrm{d}x$;

(13) $\int\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$; (14) $\int x\sqrt{x^2+9}\mathrm{d}x$; (15) $\int\frac{x^2}{\sqrt{3x^3-4}}\mathrm{d}x$; (16) $\int\frac{1+x}{\sqrt{1-4x^2}}\mathrm{d}x$;

(17) $\int\frac{2^x}{1+4^x}\mathrm{d}x$; (18) $\int\cos x\sin^4 x\mathrm{d}x$; (19) $\int\sin^3 x\mathrm{d}x$; (20) $\int\sin^2 2x\mathrm{d}x$;

(21) $\int\sin^4\frac{x}{2}\mathrm{d}x$; (22) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}$; (23) $\int\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$; (24) $\int\frac{x\sin\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$;

(25) $\int\frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}\mathrm{d}x$; (26) $\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}x$; (27) $\int\frac{\ln x-\ln(x+1)}{x(x+1)}\mathrm{d}x$; (28) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$;

(29) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1-\cos 4x}$; (30) $\int\sin 3x\sin 5x\mathrm{d}x$; (31) $\int\cot^3 x\csc x\mathrm{d}x$; (32) $\int\frac{1}{1+\sqrt{2x}}\mathrm{d}x$;

(33) $\int x\sqrt{4x-1}\mathrm{d}x$; (34) $\int x^2(2x+1)^9\mathrm{d}x$; (35) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}$; (36) $\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$;

(37) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$; (38) $\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\mathrm{d}x$.

解：(1) $\int(2x+1)^3\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(2x+1)^3\mathrm{d}(2x+1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(2x+1)^4+C=\frac{1}{8}(2x+1)^4+C$.

(2) $\int e^{2x+3}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int e^{2x+3}\mathrm{d}(2x+3)=\frac{1}{2}e^{2x+3}+C$.

(3) $\int\frac{1}{5x+4}\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int\frac{1}{5x+4}\mathrm{d}(5x+4)=\frac{1}{5}\ln|5x+4|+C$.

(4) $\int\sin(2x+\frac{\pi}{3})\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\sin(2x+\frac{\pi}{3})\mathrm{d}(2x+\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}\cos(2x+\frac{\pi}{3})+C$.

(5) $\int\sec^2(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\sec^2(2x)\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}\tan(2x)+C$.

(6) $\int\tan(3x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\tan(3x)\mathrm{d}(3x)=-\frac{1}{3}\ln|\cos 3x|+C=\frac{1}{3}\ln|\sec 3x|+C$.

(7) $\int\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\frac{x}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}}=\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

(8) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{4x-1}}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int (4x-1)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}(4x-1) = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}(4x-1)^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{8}(4x-1)^{\frac{2}{3}} + C$.

(9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}(x+1) = \arctan(x+1) + C$.

(10) $\int \frac{\mathrm{d}x}{9x^2-4} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{(3x)^2-2^2}\mathrm{d}(3x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\ln\left|\frac{3x-2}{3x+2}\right| + C = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{3x-2}{3x+2}\right| + C$.

(11) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4-1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+1})\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| - \frac{1}{2}\arctan x + C$.

(12) $\int xe^{-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}\mathrm{d}(-x^2) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$ \.

(13) $\int \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\ln x}\mathrm{d}(\ln x) = \ln|\ln x| + C$.

(14) $\int x\sqrt{x^2+9}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2+9}\mathrm{d}(x^2+9) = \frac{1}{2}\int (x^2+9)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(x^2+9)$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x^2+9)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(x^2+9)^{\frac{3}{2}} + C$ \.

(15) $\int \frac{x^2}{\sqrt{3x^3-4}}\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\int (3x^3-4)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(3x^3-4) = \frac{2}{9}(3x^3-4)^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{9}\sqrt{3x^3-4} + C$.

(16) $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-4x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(2x)^2}} + \int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x^2}}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(2x)}{\sqrt{1-(2x)^2}} - \frac{1}{8}\int (1-4x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-4x^2)$

$= \frac{1}{2}\arcsin(2x) - \frac{1}{8}\cdot 2(1-4x^2)^{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{2}\arcsin(2x) - \frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C$.

(17) $\int \frac{2^x}{1+4^x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{\mathrm{d}(2^x)}{1+(2^x)^2} = \frac{1}{\ln 2}\arctan 2^x + C$.

(18) $\int \cos x\sin^4 x\mathrm{d}x = \int \sin^4 x\mathrm{d}\sin x = \frac{1}{5}\sin^5 x + C$.

(19) $\int \sin^3 x\mathrm{d}x = -\int \sin^2 x\mathrm{d}\cos x = -\int (1-\cos^2 x)\mathrm{d}\cos x = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$.

(20) $\int \sin^2 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1-\cos 4x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\int \cos 4x\mathrm{d}(4x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + C$.

(21) $\int \sin^4 \frac{x}{2}\mathrm{d}x = \int (\frac{1-\cos x}{2})^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int (1-2\cos x+\cos^2 x)\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{4}\int \cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\int \cos 2x\mathrm{d}(2x) = \frac{3}{8}x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{16}\sin 2x + C$.

(21) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\cos\sqrt{x}} = 2\int \frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}} = 2\int \sec\sqrt{x}\mathrm{d}\sqrt{x} = 2\ln|\sec\sqrt{x}+\tan\sqrt{x}|+C$.

(22) $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int (\arcsin x)^2 \mathrm{d}(\arcsin x) = \frac{1}{3}(\arcsin x)^{\frac{1}{3}} + C$.

(23) $\int \frac{x\sin\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \int \sin\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \int \sin\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}\sqrt{1+x^2}$

$= -\cos\sqrt{1+x^2} + C$.

(24) $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x\ln x)^2}\mathrm{d}(x\ln x) = -\frac{1}{x\ln x} + C$.

(25) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}x = \int (\sin x-\cos x)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}(\sin x-\cos x) = \frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{\frac{2}{3}} + C$.

(26) $\int \frac{\ln x-\ln(x+1)}{x(x+1)}\mathrm{d}x = \int (\ln x-\ln(x+1))\cdot(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1})\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}(\ln x-\ln(x+1))^2 + C = \frac{1}{2}\ln^2\frac{x}{x+1} + C$.

(27) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \int \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \int \sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}\frac{x}{2} = \tan\frac{x}{2} + C$.

(28) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\cos 4x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin^2 2x} = \frac{1}{4}\int \csc^2 2x\mathrm{d}(2x) = -\frac{1}{4}\cot 2x + C$.

(29) $\int \sin 3x\sin 5x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int (\cos 8x-\cos 2x)dx = -\frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

(30) $\int \cot^3 x\csc x\mathrm{d}x = \int \cot^2 x\cdot\csc x\cdot\cot x\mathrm{d}x = -\int (\csc^2 x-1)\mathrm{d}\csc x$

$= -\frac{1}{3}\csc^3 x + \csc x + C$.

(31)令 $t=\sqrt{2x}$，则 $x=\frac{t^2}{2}$, $\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t$，则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{2x}} = \int \frac{t}{1+t}\mathrm{d}t = \int (1-\frac{1}{1+t})\mathrm{d}t = t-\ln|1+t|+C = \sqrt{2x}-\ln(1+\sqrt{2x})+C.$$

(32)令 $t=\sqrt{4x-1}$，则 $x=\dfrac{t^2+1}{4}$, $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}t\,\mathrm{d}t$，则

$$\int x\sqrt{4x-1}\mathrm{d}x=\int\frac{t^2+1}{4}\cdot t\cdot\frac{1}{2}t\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\int(t^4+t^2)\mathrm{d}t=\frac{1}{40}t^5+\frac{1}{24}t^3+C$$

$$=\frac{1}{40}(4x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{24}(4x-1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

(33)令 $2x+1=t$，则 $x=\dfrac{t-1}{2}$, $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$，则

$$\int x^2(2x+1)^9\mathrm{d}x=\int\frac{1}{4}(t-1)^2\cdot t^9\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\int(t^{11}-2t^{10}+t^9)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{96}t^{12}-\frac{1}{44}t^{11}+\frac{1}{80}t^{10}+C=\frac{1}{96}(2x+1)^{12}-\frac{1}{44}(2x+1)^{11}+\frac{1}{80}(2x+1)^{10}.$$

(34)令 $t=\sqrt{1-x^2}$，则 $x^2=1-t^2$, $x\mathrm{d}x=-t\,\mathrm{d}t$，则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{-t\mathrm{d}t}{(1-t^2)t}\mathrm{d}t=\int\frac{1}{t^2-1}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}\right|+C=\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C.$$（本题也可令 $x=\sin t,\ t\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$）

(35)令 $x=2\sin t,\ t\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$, $\mathrm{d}x=2\cos t\mathrm{d}t$，则

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{4\sin^2t\cdot2\cos t\,\mathrm{d}t}{2\cos t}=4\int\sin^2t\,\mathrm{d}t=2\int(1-\cos2t)\,\mathrm{d}t$$

$$=2t-\sin2t+C=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C.$$

(36)令 $x=2\tan t,\ t\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$, $\mathrm{d}x=2\sec^2t\mathrm{d}t$，则

$$\int\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\mathrm{d}x=\int\frac{\sec^2t\mathrm{d}t}{\sec^3t}=\int\cos t\mathrm{d}t=\sin t+C=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C.$$

(37)令 $t=\sqrt{x^2-1}$，则 $x^2=t^2+1$, $x\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$，则

$$\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{x^2-1}\cdot x\mathrm{d}x}{x^2}=\int\frac{t\cdot t\mathrm{d}t}{t^2+1}=\int(1-\frac{1}{t^2+1})\mathrm{d}t$$

$$=t-\arctan t+C=\sqrt{x^2-1}-\arctan\sqrt{x^2-1}+C.$$

3.用换元法计算下列定积分:

(1) $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(3+2x)^3}$； (2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin(x+\frac{\pi}{3})\mathrm{d}x$； (3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\varphi\mathrm{d}\varphi$； (4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x$；

(5) $\int_0^2 te^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t$； (6) $\int_1^2\frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$； (7) $\int_{-1}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+10}$； (8) $\int_1^{e^2}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2+\ln x}}$；

(9) $\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^4}}$； (10) $\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos x}\mathrm{d}x$； (11) $\int_0^{\ln 3}\frac{\mathrm{d}x}{1+e^{-x}}$； (12) $\int_0^{\ln\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}$；

(13) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x}}$； (14) $\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

解：(1) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{(3+2x)^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}(3+2x)}{(3+2x)^3}=\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})(3+2x)^{-2}\big|_{-1}^{1}=\frac{6}{25}$.

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin(x+\frac{\pi}{3})\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin(x+\frac{\pi}{3})\mathrm{d}(x+\frac{\pi}{3})=-\cos(x+\frac{\pi}{3})\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=-\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}=1$.

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\varphi\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\varphi\mathrm{d}\sin\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin^2\varphi)\mathrm{d}(\sin\varphi)$

$=\sin\varphi\big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3}(\frac{1}{\sqrt{2}})^3=\frac{5}{12}\sqrt{2}$.

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cdot\cos^2 x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\sin 2x}{2})^2\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4x)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4x\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x\big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{16}$.

(5) $\int_0^2 t\cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t=-\int_0^2 e^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}(-\frac{1}{2}t^2)=-e^{-\frac{1}{2}t^2}\big|_0^2=1-e^{-2}$.

(6) $\int_1^2\frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{(1+x^2)^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\Big|_1^2=-\frac{1}{2}(\frac{1}{5}-\frac{1}{2})=\frac{3}{20}$.

(7) $\int_{-1}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+10}=\int_{-1}^{2}\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+9}=\frac{1}{3}\arctan\frac{x+1}{3}\big|_{-1}^{2}=\frac{1}{3}(\arctan 1-0)=\frac{\pi}{12}$.

(8)令 $t=\sqrt{2+\ln x}$，则 $x=e^{t^2-1}$， $\mathrm{d}x=2te^{t^2-1}\mathrm{d}t$,则

$$\int_1^{e^2}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2+\ln x}}=\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{2te^{t^2-2}\mathrm{d}t}{e^{t^2-2}\cdot t}=2\int_{\sqrt{2}}^{2}\mathrm{d}t=4-2\sqrt{2}.$$

$$(9)\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^4}}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}(x^2)}{\sqrt{2^2-(x^2)^2}}=\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{12}.$$

$$(10)\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}|\cos\frac{x}{2}|\mathrm{d}x\overset{t=\frac{x}{2}}{=}2\sqrt{2}\int_0^{\pi}|\cos t|\mathrm{d}t$$

$$=2\sqrt{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\mathrm{d}t-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos t\mathrm{d}t\right)=2\sqrt{2}\left(\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=4\sqrt{2}.$$

$$(11)\int_0^{\ln 3}\frac{\mathrm{d}x}{1+e^{-x}}=\int_0^{\ln 3}\frac{e^x}{e^x+1}\mathrm{d}x=\int_0^{\ln 3}\frac{\mathrm{d}(e^x+1)}{e^x+1}=\ln(e^x+1)\Big|_0^{\ln 3}=\ln 4-\ln 2=\ln 2.$$

$$(12)\int_0^{\ln\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}=\int_0^{\ln\sqrt{3}}\frac{e^x\mathrm{d}x}{1+e^{2x}}=\int_0^{\ln\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}(e^x)}{1+(e^x)^2}=\arctan e^x\Big|_0^{\ln\sqrt{3}}.$$

$$=\arctan\sqrt{3}-\arctan 1=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}.$$

$$(13)\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x}}\overset{t=\sqrt[3]{x}}{=}\int_0^1\frac{3t^2}{1+t}\mathrm{d}t=3\int_0^1\frac{t^2-1+1}{1+t}\mathrm{d}t=3\int_0^1(t-1+\frac{1}{t+1})\mathrm{d}t$$

$$=3(\frac{1}{2}t^2\Big|_0^1-1+\ln|t+1|\Big|_0^1)=3\ln 2-\frac{3}{2}.$$

$$(14)\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\overset{x=\sin t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cdot\cos t\cdot\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\mathrm{d}t=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{32}.$$

4.判断下列解法是否正确？并说明理由.

$$(1)\int_{-1}^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=-\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}(\frac{1}{x})}{1+(\frac{1}{x})^2}=-[\arctan\frac{1}{x}]\Big|_{-1}^1=-\frac{\pi}{2}\ ;$$

解：错误.　因为该解法相当于用了换元法，但变量代换$t=\dfrac{1}{x}$在$x=0$处无定义，故选取的代换函数在$[-1,1]$上不满足定积分换元法的条件.

(2)因为$\displaystyle\int_{-1}^1\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x\overset{t=\frac{1}{x}}{=}-\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}=-\int_{-1}^1\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$,所以$\displaystyle\int_{-1}^1\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=0$.

解：错误.　因为该解法相当于用了换元法，但变量代换$t=\dfrac{1}{x}$在$x=0$处无定义，故选取的代换函数在$[-1,1]$上不满足定积分换元法的条件.

(3) $\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \overset{x=\sin t}{=} \int_0^{\frac{5\pi}{6}}|\cos t|\cdot\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}}\cos^2 t\mathrm{d}t$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}$.

解：正确.

5.利用分部积分法求下列积分:

(1) $\int x\cos 3x\mathrm{d}x$； (2) $\int (x^2+1)e^{-x}\mathrm{d}x$； (3) $\int x\ln(x-1)\mathrm{d}x$； (4) $\int\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$；

(5) $\int\arccos x\mathrm{d}x$； (6) $\int\ln^2 x\mathrm{d}x$ ； (7) $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$； (8) $\int\arctan\sqrt{x}\mathrm{d}x$；

(9) $\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$； (10) $\int x\sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$； (11) $\int x^2\arctan x\mathrm{d}x$； (12) $\int e^{2x}\sin x\mathrm{d}x$；

(13) $\int_0^1\operatorname{arccot} x\mathrm{d}x$； (14) $\int_1^4\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$； (15) $\int_0^{\frac{1}{2}}e^{\sqrt{2x}}\mathrm{d}x$； (16) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$；

(17) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\mathrm{d}x$； (18) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos 2x\mathrm{d}x$.

解：(1) $\int x\cos 3x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int x\mathrm{d}(\sin 3x)=\frac{1}{3}(x\sin 3x-\int\sin 3x\mathrm{d}x)=\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x+C$.

(2) $\int(x^2+1)e^{-x}\mathrm{d}x=-\int(x^2+1)\mathrm{d}e^{-x}=-(x^2+1)e^{-x}+\int e^{-x}\mathrm{d}(x^2+1)$

$=-(x^2+1)e^{-x}+\int e^{-x}\cdot 2x\mathrm{d}x=-(x^2+1)e^{-x}-2\int x\mathrm{d}(e^{-x})$

$=-(x^2+1)e^{-x}-2(xe^{-x}-\int e^{-x}\mathrm{d}x)=-(x^2+1)e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+C$

$=-(x^2+2x+3)e^{-x}+C$.

(3) $\int x\ln(x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\ln(x-1)\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}x^2\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}\ln(x-1)$

$=\frac{1}{2}x^2\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int(x+1+\frac{1}{x-1})\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}x^2\ln(x-1)-\frac{1}{4}(x+1)^2-\frac{1}{2}\ln(x-1)+C$.

(4) $\int\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=-\int\ln x\mathrm{d}(\frac{1}{x})=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{1}{x}\mathrm{d}(\ln x)=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$.

(5) $\int\arccos x\mathrm{d}x=x\arccos x-\int x\mathrm{d}(\arccos x)=x\arccos x+\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$$= x\arccos x - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

(6) $\int \ln^2 x\mathrm{d}x = x\ln^2 x - \int x\mathrm{d}(\ln^2 x) = x\ln^2 x - 2\int x\cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$= x\ln^2 x - 2\int \ln x\mathrm{d}x = x\ln^2 x - 2(x\ln x - \int x\mathrm{d}\ln x)$

$= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2\int \mathrm{d}x = x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + C$.

(7) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x = -2\int \arcsin x\mathrm{d}\sqrt{1-x} = -2\sqrt{1-x}\cdot \arcsin x + 2\int \sqrt{1-x}\mathrm{d}(\arcsin x)$

$= -2\sqrt{1-x}\arcsin x + 2\int \sqrt{1-x}\cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -2\sqrt{1-x}\arcsin x + 2\int \frac{1}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$

$= -2\sqrt{1-x}\arcsin x + 4\sqrt{1+x} + C$.

(8) $\int \arctan\sqrt{x}\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt{x}}{=} 2\int t\arctan t\mathrm{d}t = \int \arctan t\mathrm{d}t^2 = t^2\arctan t - \int t^2\mathrm{d}(\arctan t)$

$= t^2\arctan t - \int \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t = t^2\arctan t - \int (1 - \frac{1}{1+t^2})\mathrm{d}t$

$= t^2\arctan t - t + \arctan t + C = (x+1)\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$.

(9) $\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})\mathrm{d}x = x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \int x\mathrm{d}\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

$= x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1} + C$.

(10) $\int x\sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x(1-\cos x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int x\cos x\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\int x\mathrm{d}\sin x = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x\sin x + \frac{1}{2}\int \sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x\sin x - \frac{1}{2}\cos x + C$.

(11) $\int x^2\arctan x\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \arctan x\mathrm{d}(x^3) = \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{3}\int x^3\mathrm{d}\arctan x$

$= \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{3}\int (x - \frac{x}{1+x^2})\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C$.

(12) $\int e^{2x}\sin x\mathrm{d}x = -\int e^{2x}\mathrm{d}\cos x = -e^{2x}\cos x + \int \cos x\mathrm{d}e^{2x}$

$= -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x\mathrm{d}x = -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\mathrm{d}\sin x$

$$=-e^{2x}\cos x+2e^{2x}\sin x-2\int\sin x\mathrm{d}e^{2x}=-e^{2x}\cos x+2e^{2x}\sin x-4\int e^{2x}\sin x\mathrm{d}x$$

故 $\int e^{2x}\sin x\mathrm{d}x=\dfrac{e^{2x}}{5}(2\sin x-\cos x)+C$.

(13) $\int_0^1 \operatorname{arccot}x\mathrm{d}x=x\operatorname{arccot}x\big|_0^1-\int_0^1 x\mathrm{d}\operatorname{arccot}x=x\operatorname{arccot}x\big|_0^1+\int_0^1\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\big|_0^1=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\ln 2$.

(14) $\int_1^4\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\overset{t=\sqrt{x}}{=}\int_1^2\dfrac{\ln t^2}{t}\cdot 2t\mathrm{d}t=4\int_1^2\ln t\mathrm{d}t=4(t\ln t\big|_1^2-\int_1^2 t\mathrm{d}\ln t)$

$=8\ln 2-4\int_1^2\mathrm{d}t=8\ln 2-4$.

(15) $\int_0^{\frac{1}{2}}e^{\sqrt{2x}}\mathrm{d}x\overset{t=\sqrt{2x}}{=}\int_0^1 e^t\cdot t\mathrm{d}t=\int_0^1 t\mathrm{d}e^t=te^t\big|_0^1-\int_0^1 e^t\mathrm{d}t=e-e^t\big|_0^1=1$.

(16) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\dfrac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}x\mathrm{d}\cot x=-x\cot x\big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\cot x\mathrm{d}x=\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}+\ln\sin x\big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=\pi$.

(17) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x\mathrm{d}x+\int_1^e\ln x\mathrm{d}x=-x\ln x\big|_{\frac{1}{e}}^{1}+\int_{\frac{1}{e}}^{1}x\mathrm{d}\ln x+x\ln x\big|_1^e-\int_1^e x\mathrm{d}\ln x$

$=-\dfrac{1}{e}+\int_{\frac{1}{e}}^{1}\mathrm{d}x+e-\int_1^e\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{e}+1-\dfrac{1}{e}-e+e-1+2-$

(18)因为 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos 2x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\mathrm{d}e^x=e^x\cos 2x\big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\mathrm{d}\cos 2x$

$=-e^{\frac{\pi}{2}}-1+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin 2x\mathrm{d}x=-e^{\frac{\pi}{2}}-1+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\mathrm{d}e^x$

$=-e^{\frac{\pi}{2}}-1+2e^x\sin 2x\big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\mathrm{d}\sin 2x=-e^{\frac{\pi}{2}}-1-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos 2x\mathrm{d}x$

所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos 2x\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{5}(e^{\frac{\pi}{2}}+1)$.

6.利用函数的奇偶性计算下列定积分:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}(|\sin x|+x^3\cos^2 x)\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\dfrac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_{-1}^{1}\ln(x+\sqrt{x^2+1})\mathrm{d}x$.

解：(1)因为 $|\sin x|$ 为偶函数， $x^3\cos^2 x$ 为奇函数，故

$$\int_{-\pi}^{\pi}(|\sin x|+x^3\cos^2 x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x+0=-2\cos x|_0^{\pi}=4.$$

(2)因为$\dfrac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$为偶函数，故

$$\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(\arcsin x)^2\mathrm{d}\arcsin x$$

$$=\frac{2}{3}(\arcsin x)^3|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{81}\pi^3.$$

(3)解：$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sqrt{\cos x}\mathrm{d}x$

$$=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\mathrm{d}\cos x=-2\times\frac{2}{3}(\cos x)^{\frac{3}{2}}|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}.$$

(4)记 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，则

$$f(x)+f(-x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln 1=0,$$

即 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数，故$\displaystyle\int_{-1}^{1}\ln(x+\sqrt{x^2+1})\mathrm{d}x=0$.

7.设 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续,证明: $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$.

证：令$u=a+b-x$，则

$\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(u)\mathrm{d}u=\int_a^b f(u)\mathrm{d}u=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,故原等式成立.

8.证明:$\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n(1-x)^m\mathrm{d}x$ $\quad(m,n$ 是自然数).

证：令$u=1-x$，则

$\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x=-\int_1^0(1-u)^m u^n\mathrm{d}u=\int_0^1(1-u)^m u^n\mathrm{d}u=\int_0^1 x^n(1-x)^m\mathrm{d}x$, 故原等式成立.

9.证明:

(1)若 $f(u)$ 是连续的偶函数, 则$\displaystyle\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$ 是奇函数;

(2)若 $f(u)$ 是连续的奇函数, 则$\displaystyle\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$ 是偶函数,进一步说明 $f(u)$ 的所有原函数都是偶函数.

证：令 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$ ，则 $F(-x)=\displaystyle\int_0^{-x} f(u)\mathrm{d}u\overset{t=-u}{=}-\int_0^x f(-t)\mathrm{d}t=-\int_0^x f(-u)\mathrm{d}u$,

(1)若 $f(u)$ 是连续的偶函数, 则 $f(-u)=f(u)$,

$F(-x)=-\int_0^x f(-u)\mathrm{d}u=-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=-F(x)$，故$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$是奇函数;

(2)若 $f(u)$ 是连续的奇函数, 则 $f(-u)=-f(u)$,

$F(-x)=-\int_0^x f(-u)\mathrm{d}u=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=F(x)$，故$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$是偶函数;

因为$F'(x)=f(x)$，所以$F(x)$为 $f(x)$ 的一个原函数，于是 $f(x)$ 的所有原函数可表示为$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+C$，又偶函数加常数仍为偶函数，故 $f(x)$ 的所有原函数都是偶函数, 即 $f(u)$ 的所有原函数都是偶函数.

10.试说明$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,$\int f(x)\mathrm{d}x$三者的区别与联系.

解：区别：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$表示定积分，当 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积的时，它表示一个数；$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$表示变上限的定积分，它是一个函数；$\int f(x)\mathrm{d}x$表示 $f(x)$ 的原函数全体，即 $f(x)$ 的不定积分.

联系：$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$是$\int f(x)\mathrm{d}x$中的一个原函数；$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$是函数$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$在$x=b$处的函数值，也是$\int f(x)\mathrm{d}x$中的任一函数在区间$[a,b]$上的增量.

(B)

1．求下列积分:

(1)$\int\frac{x+2}{\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x$; (2)$\int\frac{1}{x\ln x\ln\ln x}\mathrm{d}x$; (3)$\int\frac{3^x\cdot 5^x}{25^x+9^x}\mathrm{d}x$; (4)$\int\frac{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$;

(5)$\int x\tan^2 x\mathrm{d}x$; (6)$\int\frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$; (7)$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$; (8)$\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}$.

解：(1)$\int\frac{x+2}{\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\frac{(1+2x-x^2)'+3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x$

$=-\frac{1}{2}\int\frac{(1+2x-x^2)'}{\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x-\frac{3}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x$.

$=-\sqrt{1+2x-x^2}-\frac{3}{2}\int\frac{1}{\sqrt{2-(x-1)^2}}\mathrm{d}x=-\sqrt{1+2x-x^2}-\frac{3}{2}\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C$.

(2)$\int\frac{1}{x\ln x\ln\ln x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\ln x\ln\ln x}\mathrm{d}(\ln x)=\int\frac{1}{\ln\ln x}\mathrm{d}(\ln\ln x)=\ln|\ln\ln x|+C$.

(3) $\int \frac{3^x \cdot 5^x}{25^x + 9^x}\mathrm{d}x = \int \frac{(\frac{3}{5})^x}{1+(\frac{9}{25})^x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln\frac{3}{5}}\int \frac{1}{1+[(\frac{3}{5})^x]^2}\mathrm{d}(\frac{3}{5})^x = \frac{1}{\ln\frac{3}{5}}\mathrm{atctan}(\frac{3}{5})^x + C$.

(4) $\int \frac{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \int \ln(x+\sqrt{x^2-1})\mathrm{d}\ln(x+\sqrt{x^2-1}) = \frac{1}{2}\ln^2(x+\sqrt{x^2-1}) + \mathrm{C}$.

(5) $\int x\tan^2 x\mathrm{d}x = \int x(\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x = \int x\sec^2 x\mathrm{d}x - \int x\mathrm{d}x$

$= \int x\mathrm{d}\tan x - \frac{1}{2}x^2 = x\tan x - \int \tan x\mathrm{d}x - \frac{1}{2}x^2 = x\tan x + \ln|\cos x| - \frac{1}{2}x^2 + C$.

(6) $\int \frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}\tan\frac{x}{2} = x\tan\frac{x}{2} - \int \tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x = x\tan\frac{x}{2} + \ln|\cos\frac{x}{2}| + C$

(7) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt{1+x^2}}{=} \int \frac{t^2-1}{t}\cdot t\mathrm{d}t = \int (t^2-1)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^3 - t + C = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} - (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + C$.

(8)令 $u = \tan\frac{x}{2}$，则 $x = 2\arctan u$， $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$，则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x} = \int \frac{\frac{2}{1+u^2}}{2+\frac{2u}{1+u^2}}\mathrm{d}u = \int \frac{1}{u^2+u+1}\mathrm{d}u = \int \frac{1}{(u+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + C .$$

2.设 $f(x) = \arctan x$,求 $\int xf''(x)\mathrm{d}x$.

解：由 $f(x) = \arctan x$ 得 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$，则

$$\int xf''(x)\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}f'(x) = xf'(x) - \int f'(x)\mathrm{d}x = xf'(x) - \int \mathrm{d}f(x)$$

$$= xf'(x) - f(x) + C = \frac{x}{1+x^2} - \arctan x + C .$$

3．计算下列积分:

(1) $\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$； (3) $\int_1^e \sin(\ln x)\mathrm{d}x$； (4) $\int_0^{\pi} x\cos^{10}x\mathrm{d}x$.

解：(1)令 $t = \sqrt{1-e^{-2x}}$，则 $x = -\frac{1}{2}\ln(1-t^2)$.则

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} t\cdot\frac{t}{1-t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(-1+\frac{1}{1-t^2})\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right|=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\ln(2-\sqrt{3}).$$

(2)令 $t=\arcsin x$，则 $x=\sin t$，则

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{t}{\cos^3 t}\cdot\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}t\sec^2 t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}t\mathrm{d}\tan t$$

$$=t\tan t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}+\ln\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2.$$

(3)令 $t=\ln x$，则 $x=e^t$,则

$$\int_1^e\sin(\ln x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sin t\mathrm{d}e^t=e^t\sin t\Big|_0^1-\int_0^1 e^t\mathrm{d}\sin t=e\sin1-\int_0^1 e^t\cos t\mathrm{d}t$$

$$=e\sin1-\int_0^1\cos t\mathrm{d}e^t=e\sin1-e^t\cos t\Big|_0^1+\int_0^1 e^t\mathrm{d}\cos t=e\sin1-e\cos1+1-\int_0^1 e^t\sin t\mathrm{d}t$$

于是，$\int_1^e\sin(\ln x)\mathrm{d}x=\frac{e}{2}(\sin1-\cos1+1)$.

(4)令 $t=\pi-x$，则

$$\int_0^{\pi}x\cos^{10}x\mathrm{d}x=-\int_{\pi}^0(\pi-t)\cos^{10}t\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}(\pi-t)\cos^{10}t\mathrm{d}t$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\cos^{10}t\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}t\cos^{10}t\mathrm{d}t=\pi\int_0^{\pi}\cos^{10}x\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}x\cos^{10}x\mathrm{d}x$$

于是，$\int_0^{\pi}x\cos^{10}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi\int_0^{\pi}\cos^{10}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{10}x\mathrm{d}x$ (后一等式据 $\cos^{10}x$ 的周期为 π)

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{10}x\mathrm{d}x=\pi\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{63}{512}\pi^2.$$

4.计算 $\int_0^1(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\mathrm{d}x$ (m 为正整数).

解：令 $x=\sin t$，则

$$\int_0^1(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 t)^{\frac{m}{2}}\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+1}t\mathrm{d}t=I_{m+1}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{m}{m+1}\cdot\dfrac{m-2}{m-1}\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & m\text{为偶数},\\ \dfrac{m}{m+1}\cdot\dfrac{m-2}{m-1}\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}\cdots, & m\text{为奇数}.\end{cases}$$

5.计算 $\int_0^{n\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x$ (n 为正整数).

解：因为 $\sqrt{1-\sin 2x}$ 的周期为 π，所以

$$\int_0^{n\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x=n\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x=n\int_0^{\pi}|\sin x-\cos x|\,\mathrm{d}x$$

$$=n\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x+n\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)\,\mathrm{d}x$$

$$=n(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+n(-\cos x-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}=n(\sqrt{2}-1+1+\sqrt{2})=2n\sqrt{2}$$

习　题 4.4　反常积分

(A)

1.用定义判别下列反常积分的收敛性,如果收敛计算其值:

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3}$;　(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x+1}}$;　(3) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+2)}$;　(4) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+3}$;

(5) $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\mathrm{d}x\ \ (a>0)$;　(6) $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2+1}\mathrm{d}x$;　(7) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$;　(8) $\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x\mathrm{d}x$;

(9) $\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;　(10) $\int_0^3\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3+2x-x^2}}$;　(11) $\int_0^1\ln x\mathrm{d}x$;　(12) $\int_1^2\frac{x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$;

(13) $\int_0^2\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$;　(14) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$.

解: (1) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3}=\int_1^{+\infty}x^{-3}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}x^{-2}\Big|_1^{+\infty}=-\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to+\infty}x^{-2}-1\right)=\frac{1}{2}$, 故原反常积分收敛.

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x+1}}=\int_0^{+\infty}(x+1)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}(x+1)=\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{3}{2}\left[\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)^{\frac{2}{3}}-1\right]=+\infty$,

故原反常积分发散.

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+2)}=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2})\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\ln x-\ln(x+2)\right]\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{2}\ln\frac{x}{x+2}\Big|_1^{+\infty}$

$=\frac{1}{2}\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{x}{x+2}-\ln\frac{1}{3}\right]=\frac{\ln 3}{2}$,故原反常积分收敛.

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+3}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$,故原反常积分收敛.

(5) $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}e^{-ax}\Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{a}\left[\lim_{x\to+\infty} e^{-ax} - 1\right] = \frac{1}{a}$, 故原反常积分收敛.

(6) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \arctan x\,\mathrm{d}\arctan x = \frac{1}{2}(\arctan x)^2\Big|_1^{+\infty}$

$= \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to+\infty}(\arctan x)^2 - (\frac{\pi}{4})^2\right] = \frac{1}{2}(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{16}) = \frac{3}{32}\pi^2$，故原反常积分收敛.

(7) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \ln x \mathrm{d}\ln x = \frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to+\infty}\ln^2 x - 0\right] = +\infty$,故原反常积分发散.

(8) $\int e^{-x}\sin x\mathrm{d}x = \frac{-e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x) + c$, $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\mathrm{d}x = \frac{-e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x)\Big|_0^{+\infty}$

$= -\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to+\infty} e^{-x}(\sin x + \cos x) - 1\right] = \frac{1}{2}$,故原反常积分收敛.

(9) $x = 1$ 为被积函数的瑕点. 又 $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\sqrt{1-x^2}\,\Big|_0^{1^-} = -\lim_{x\to1^-}\sqrt{1-x^2} + 1 = 1$, 故原反常积分收敛.

(10) $x = 3$ 为被积函数的瑕点. 又 $\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3+2x-x^2}} = \int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-(x-1)^2}} = \arcsin\frac{x-1}{2}\Big|_0^{3^-}$

$= \lim_{x\to3^-}\arcsin\frac{x-1}{2} - \arcsin\frac{-1}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$，故原反常积分收敛.

(11) $x = 0$ 为 $\ln x$ 的瑕点. 又 $\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x = x\ln x\Big|_{0^+}^1 - \int_0^1 x\mathrm{d}\ln x = -\lim_{x\to0^+} x\ln x - \int_0^1 \mathrm{d}x = -1$,故原反常积分收敛.

(12) $x = 1$ 为被积函数的瑕点. 又

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt{x-1}}{=} \int_0^1 \frac{t^2+1}{t}\cdot 2t\mathrm{d}t = 2\int_0^1 (t^2+1)\mathrm{d}t = 2(\frac{1}{3}t^3\Big|_{0^+}^1 + 1) = \frac{8}{3}$$,故原反常积分收敛.

(13) $x = 1$ 为被积函数的瑕点. 又 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1}\Big|_0^{1^-} = -\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x-1} - 1 + \infty$, 故 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$ 发散，从而 $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$ 发散.

(14) $x = 0$ 为被积函数的瑕点. 又 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)} = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} = 2\arctan\sqrt{x}\Big|_{0^+}^1$

$= 2\arctan 1 - 2\lim_{x\to0^+}\arctan\sqrt{x} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$,故原反常积分收敛.

2.判断反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$敛散性时,下列解法是否正确？并说明理由.

(1) 因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\big|_{-t}^{t}=0$, 所以反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$收敛.

(2)因为被积函数$\frac{x}{1+x^2}$为奇函数,又积分区间关于原点对称,所以$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=0$,即反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$收敛.

(3) 因为$\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\big|_{0}^{+\infty}=+\infty$, 所以反常积分$\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$发散,进而得反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$发散.

解: (1)错误. 解法与定义不符.

(2)错误. 解法中滥用了定积分的对称性.

(3)正确.

3.判断反常积分$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x$敛散性时,下列解法是否正确？并说明理由.

(1)因为$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x=\int_{1}^{+\infty}(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x})\mathrm{d}x=\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$,又反常积分$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$发散,所以原反常积分发散.

(2) 因为 $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x=\int_{1}^{+\infty}(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x})\mathrm{d}x=\ln\frac{x}{x+1}\big|_{1}^{+\infty}=\ln 2$ ，所以反常积分 $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x$收敛.

解:(1) 错误. 错用了定积分的线性性质. 因为 $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$与$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$都是发散的，故

$$\int_{1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x\neq\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x.$$

事实上，$\int_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x=\ln\frac{x}{x+1}\bigg|_{1}^{\infty}=-\ln\frac{1}{2}=\ln 2$，故原反常积分是收敛的.

(2) 正确.

4.用$\Gamma-$函数表示下列积分,并计算其值(其中$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$).

(1) $\int_0^{+\infty} x^9 e^{-x} \mathrm{d}x$;　　　　　　　　　　(2) $\int_0^{+\infty} x^6 e^{-x^2} \mathrm{d}x$.

解: (1)因为 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x \quad (s>0)$，所以 $\int_0^{+\infty} x^9 e^{-x}\mathrm{d}x=\Gamma(10)$, 又$\Gamma(n+1)=n!$,
其中n为正整数. 故$\int_0^{+\infty} x^9 e^{-x}\mathrm{d}x=\Gamma(10)=9!$

(2) $\int_0^{+\infty} x^6 e^{-x^2}\mathrm{d}x \overset{t=x^2}{=} \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t}\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{\frac{5}{2}}e^{-t}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\Gamma\left(\dfrac{7}{2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{2}\Gamma\left(\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{5}{4}\times\dfrac{3}{2}\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{15}{8}\times\dfrac{1}{2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{15}{16}\sqrt{\pi}$,

或 $\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty} x^{2s-1}e^{-x^2}\mathrm{d}x$, 由$2s-1=6$得$s=\dfrac{7}{2}$,
故$\int_0^{+\infty} x^6 e^{-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\Gamma(\dfrac{7}{2})=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{2}\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{2}\Gamma(\dfrac{1}{2})=\dfrac{15}{16}\sqrt{\pi}$.

(B)

1. 求c的值,使$\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x+c}{x-c})^x=\int_{-\infty}^{c} te^{2t}\mathrm{d}t$.

解: 因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2c}{x-c}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2cx}{x-c}}=e^{2c}$，又

$$\int_{-\infty}^{c} te^{2t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{c} t\mathrm{d}e^{2t}=\frac{1}{2}te^{2t}\Big|_{-\infty}^{c}-\frac{1}{2}\Big|_{-\infty}^{c}e^{2t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}ce^{2c}-\frac{1}{4}e^{2t}\Big|_{-\infty}^{c}=\frac{1}{2}ce^{2c}-\frac{1}{4}e^{2c}=(\frac{1}{2}c-\frac{1}{4})e^{2c}$$

由条件知:$e^{2c}=(\dfrac{1}{2}c-\dfrac{1}{4})e^{2c}$得$\dfrac{1}{2}c-\dfrac{1}{4}=1$，即 $c=\dfrac{5}{2}$.

2.判断反常积分的$\int_2^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$敛散性,并求出$k$为何值时,此反常积分的值取得最小值.

解: 记 $I_k=\int_2^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$，则

$$I_k=\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\ln x}{(\ln x)^k}=\frac{1}{1-k}(\ln x)^{1-k}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{1-k}\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{1-k}-\frac{1}{1-k}(\ln 2)^{1-k}$$

因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$,故当$1-k<0$即$k>1$时,$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{1-k}=0$,此时

$$I_k=\frac{1}{k-1}(\ln 2)^{1-k},\quad I_k'=\frac{-\left[(k-1)\ln(\ln 2)+1\right](\ln 2)^{1-k}}{(k-1)^2}$$

令 $I_k{}'=0$ 得: $(k-1)\ln(\ln 2)=-1$,即 $k=1-\dfrac{1}{\ln(\ln 2)}$.

当 $k>1-\dfrac{1}{\ln(\ln 2)}$ 时, $I_k'>0$;当 $k<1-\dfrac{1}{\ln(\ln 2)}$ 时, $I_k'<0$, 故 $k=1-\dfrac{1}{\ln(\ln 2)}$ 为 I_k 的极小值且也是最小值.故原反常积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$ 在 $k=1-\dfrac{1}{\ln(\ln 2)}$ 时取得最小值.

总习题四

(A)

1.选择题:

(1)设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,则 $\mathrm{d}[\int f(x)\mathrm{d}x]$ 等于(　　).

(A) $f(x)$　　(B) $f(x)\mathrm{d}x$　　(C) $f(x)+C$　　(D) $f'(x)\mathrm{d}x$

解: 因为 $\mathrm{d}[\int f(x)\mathrm{d}x]=f(x)\mathrm{d}x$, 故选 B.

(2)若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$,则 $f(x)$ 的一个原函数为(　　).

(A) $1-\sin x$　　(B) $1+\sin x$　　(C) $1-\cos x$　　(D) $1+\cos x$

解: 由条件知道 $f'(x)=\sin x$, $f(x)=-\cos x+C_1$, $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(-\cos x+C_1)\mathrm{d}x$

$=-\sin x+C_1x+C_2$ 特别地取 $C_1=0,C_2=1$, 得 $f(x)$ 的原函数为 $1-\sin x$, 故选 A.

(3)设 $I_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x\mathrm{d}x, I_2=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)\mathrm{d}x,\ I_3=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)\mathrm{d}x$,则有(　　).

(A) $I_2<I_3<I_1$　　(B) $I_1<I_3<I_2$　　(C) $I_2<I_1<I_3$　　(D) $I_3<I_1<I_2$

解: 根据定积分的对称性及保号性有 $I_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x\mathrm{d}x=0$, $I_2=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x>0$,

$I_3=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x<0$,故有 $I_3<I_1<I_2$, 故选 D.

(4) 曲线 $y=x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴所围的图形的面积可表示为(　　).

(A) $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$　　　(B) $\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x-\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$

(C) $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x+\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$　　　(D) $\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$

解: 曲线 $y=x(x-1)(x-2)$ 与 x 轴的交点为 $x_1=0,x_2=1,x_3=2$,已知曲线与 x 轴所围图形的面积为 $\int_0^2 \left|x(x-1)(2-x)\right|\mathrm{d}x=-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x+\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$,故选 C.

(5)设 $\alpha(x)=\int_0^{2x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$, $\beta(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t$,则当 $x\to 0$ 时,α 是 β 的(　　).

(A)高阶无穷小　(B)低阶无穷小　(C) 等价无穷小　(D) 同阶但不等价

解: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{2x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t}{\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2}{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\cdot\cos x}=\frac{2}{e}$,故当 $x\to 0$ 时,α 是 β 的同阶但非等价无穷小,故选 D.

(6) 设 $f(x)$ 连续，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=$（　　）.

(A) $xf(x^2)$　　(B) $-xf(x^2)$　　(C) $2xf(x^2)$　　(D) $-2xf(x^2)$

解: $\int_o^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t\overset{u=x^2-t^2}{\underset{du=-2tdt}{=}}-\frac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u$,故 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t$

$=\frac{1}{2}f(x^2)\cdot 2x=xf(x^2)$，故选 A.

(7) 设 $I=\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t$，则 I (　　).

(A)为负数　　(B)为正数　　(C)恒为零　　(D)不是常数

解: 因为 $e^{\sin t}\sin t$ 是以 2π 为周期的函数，故 $\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}e^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t$,

$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$, $\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\left[e^{\sin t}\cdot\sin t+e^{-\sin t}\cdot(-\sin t)\right]\mathrm{d}t$

$=\int_0^{\pi}\sin t\left[e^{\sin t}-e^{-\sin t}\right]\mathrm{d}t>0$,故选 B.

2.填空题:

(1)函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的 __________条件,而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续是可积的______________条件;

解: 必要, 　充分.

(2) $\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})^2\mathrm{d}x=$ ________________;

解:$\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})^2\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(x^2+2x\sqrt{1-x^2}+1-x^2)\mathrm{d}x=2\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x=2$.

(3) $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}=$________________;

解: $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}=\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-(x-2)^2}}=\arcsin\frac{x-2}{2}\Big|_1^2=0-\arcsin\frac{-1}{2}=\frac{\pi}{6}$.

(4)函数$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$在$[0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$上的平均值为 ______________;

解: $\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\overset{x=\sin t}{=}\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 t}{\cos t}\cdot\cos t\mathrm{d}t=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 t\mathrm{d}t=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$

$=\sqrt{2}\cdot(\frac{\pi}{4}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}})=\sqrt{2}(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\times 1)=\frac{\sqrt{2}(\pi-2)}{8}$.

(5)设$f(x)$连续,且$f(x)=x+2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,则$f(x)=$__________;

解:设$a=\int_0^1 f(x)dx$,则$f(x)=x+2a$,于是$a=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(x+2a)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+2a$,得$a=-\frac{1}{2}$,故$f(x)=x-1$.

(6)设$f(x)$连续,且$\int_0^{x^3-2}f(t)\mathrm{d}t=x$,则$f(6)=$______________;

解:由$\int_0^{x^3-2}f(t)\mathrm{d}t=x$得$3x^2 f(x^3-2)=1$,即$f(x^3-2)=\frac{1}{3x^2}$,由$x^3-2=6$得$x=2$,于是$f(6)=\frac{1}{12}$.

(7)设$f(2)=1,\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2$,则$\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x=$_____________;

解: $\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^2-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2f(2)-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2\times 1-2=0$

(8) 设$\ln f(x)=\cos x$,则$\int\frac{xf'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=$ ____________________;

解:

$$\int\frac{xf'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\ln f(x)=x\ln f(x)-\int\ln f(x)\mathrm{d}x=x\cos x-\int\cos x\mathrm{d}x=x\cos x-\sin x+C.$$

(9)曲线$y=\int_0^x(t-1)(t-2)\mathrm{d}t$在$(0,0)$处的切线方程为 _________;

解: $y'=(x-1)(x-2)$,斜率$k=y'(0)=2$,曲线在(0,0)处切线方程$y=2x$.

(10)质点以速度$t\sin t^2$ (m/s) 作直线运动,则从时刻$t_1=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$到$t_2=\sqrt{\pi}$秒内质点所经过的路程为_____________米.

解: 由题意得$v(t)=t\sin t^2$, 所求的路程为,

$$s=\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}}v(t)\mathrm{d}t=\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}}t\sin t^2\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\cos t^2\Big|_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}}=-\frac{1}{2}(\cos\pi-\cos\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}$$

3.确定常数a的值,使 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x\sin t^2\mathrm{d}t, x\neq 0,\\ a, \qquad\qquad x=0,\end{cases}$ 在$x=0$处连续.

解: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\sin t^2\mathrm{d}t}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$,要使$f(x)$在$x=0$处连续,则

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=a.$ 故当$a=\dfrac{1}{3}$时, $f(x)$在$x=0$处连续.

4.设 $f(x)=\begin{cases}x^2, 0\le x<1,\\ 1-x, 1\le x\le 2,\end{cases}$ 求$F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$ ($0\le x\le 2$)的表达式并讨论其连续性.

解: 当$0\le x\le 1$时, $F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t=\int_1^x t^2\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}t^3\Big|_1^x=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{3}$,

当$1\le x\le 2$时, $F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t=\int_1^x(1-t)\mathrm{d}t=x-1-\dfrac{1}{2}t^2\Big|_1^x=-\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{1}{2}$,

故$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{3}, & 0\le x\le 1,\\ -\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{1}{2}, & 1\le x\le 2.\end{cases}$ 易判断 $f(x)$在[0,2]上连续.

5.求下列不定积分:

(1)$\displaystyle\int\frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x$; (2)$\displaystyle\int\frac{\ln x}{(1-x)^2}\mathrm{d}x$; (3)$\displaystyle\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

(4)$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$; (5)$\displaystyle\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x$; (6)$\displaystyle\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$;

(7)$\displaystyle\int\frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$; (8)$\displaystyle\int\frac{\arcsin e^x}{e^x}\mathrm{d}x$; (9)$\displaystyle\int e^{2x}(\tan x+1)^2\mathrm{d}x$;

(10) $\int \dfrac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}(ab\neq 0)$; (11) $\int \dfrac{5\sin x+3\cos x}{3\sin x-2\cos x}dx$; (12) $\int \dfrac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$.

解:(1) $\int \dfrac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}dx=\int \dfrac{\sin x}{\cos x\cdot\sqrt{\cos x}}dx=-\int(\cos x)^{-\frac{3}{2}}d\cos x=2(\cos x)^{-\frac{1}{2}}+C.$

(2) $\int \dfrac{\ln x}{(1-x)^2}dx=\int \ln x d\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{\ln x}{1-x}-\int \dfrac{1}{1-x}d\ln x=\dfrac{\ln x}{1-x}-\int \dfrac{1}{1-x}\cdot\dfrac{1}{x}dx$

$=\dfrac{\ln x}{1-x}-\int(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{x})dx=\dfrac{\ln x}{1-x}+\ln|x-1|-\ln|x|+C=\dfrac{\ln x}{1-x}+\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|+C$

(3) $\int \dfrac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx\overset{\sqrt{1-x^2}=u}{\underset{x^2=1-u^2}{=}}-\int \dfrac{(1-u^2)^2\cdot u du}{u}=-\int(u^4-2u^2+1)du\quad=-\dfrac{1}{5}u^5+\dfrac{2}{3}u^3-u+C$

$=-\dfrac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}+\dfrac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C$ (或令 $x=\sin t$, $t\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$).

(4)解一: 令 $\sqrt{x^2-1}=u, x^2=u^2+1, xdx=udu$, 则

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int \frac{xdx}{x^2\cdot\sqrt{x^2-1}}=\int \frac{udu}{(u^2+1)\cdot u}=\int \frac{1}{u^2+1}du=\arctan u+C=\arctan\sqrt{x^2-1}+C$$

解二: 当 $x>1$ 时,令 $u=\dfrac{1}{x}$,则 $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int \dfrac{dx}{x^2\cdot\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}=\int \dfrac{-d\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}}=-\int \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$

$=-\arcsin u+C=-\arcsin\dfrac{1}{x}+C$;

当 $x<-1$ 时, 令 $t=-x$, 则 $t>1$. 据上述结论, 则

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int \frac{-dt}{-t\sqrt{t^2-1}}=\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}=-\arcsin\frac{1}{t}+C=-\arcsin\frac{1}{(-x)}+C$$

故 $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=-\arcsin\dfrac{1}{|x|}+C$.

(5)令 $\sqrt{e^x-1}=u, x=\ln(u^2+1), dx=\dfrac{2u}{u^2+1}du$,则

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x=\int \frac{(u^2+1)\ln(u^2+1)}{u}\times\frac{2u}{u^2+1}\mathrm{d}u=2\int \ln(u^2+1)\mathrm{d}u$$

$$=2u\ln(u^2+1)-2\int u\mathrm{d}\ln(u^2+1)=2u\ln(u^2+1)-2\int \frac{2u^2}{u^2+1}\mathrm{d}u$$

$$=2u\ln(u^2+1)-4\int (1-\frac{1}{u^2+1})\mathrm{d}u=2u\ln(u^2+1)-4u+4\arctan u+C$$

$$=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C.$$

(6)令 $u=\arctan x, x=\tan u, \mathrm{d}x=\sec^2 u\mathrm{d}u$，则

$$\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int \frac{u}{\tan^2 u\cdot(1+\tan^2 u)}\cdot\sec^2 u\mathrm{d}u=\int u\cdot\cot^2 u\mathrm{d}u=\int u\cdot(\csc^2 u-1)\mathrm{d}u$$

$$=-\int u\mathrm{d}\cot u-\frac{1}{2}u^2=-u\cot u+\int \cot u\mathrm{d}u-\frac{1}{2}u^2=-u\cot u+\ln|\sin u|-\frac{1}{2}u^2+C$$

$$=-\frac{\arctan x}{x}+\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C.$$

(7) $\int \frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int \ln\sin x\cdot\csc^2 x\mathrm{d}x=-\int \ln\sin x\mathrm{d}\cot x=-\cot x\cdot\ln\sin x$

$$+\int \cot x\mathrm{d}\ln\sin x=-\cot x\cdot\ln\sin x+\int \cot x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x=-\cot x\cdot\ln\sin x+\int \cot^2 x\mathrm{d}x$$

$$=-\cot t\cdot\ln\sin x+\int (\csc^2 x-1)\mathrm{d}x=-\cot x\cdot\ln\sin x-\cot x-x+C$$

(8)解一: 令 $u=\arcsin e^x, x=\ln(\sin u), \mathrm{d}x=\frac{\cos u}{\sin u}\mathrm{d}u$,则

$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}\mathrm{d}x=\int \frac{u}{\sin u}\frac{\cos u}{\sin u}\mathrm{d}u=-\int u\mathrm{d}\frac{1}{\sin u}=-\frac{u}{\sin u}+\int \frac{1}{\sin u}\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{u}{\sin u}+\ln|\csc u-\cot u|+C=-e^{-x}\arcsin e^x+\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-e^{2x}}}{e^x}\right|+C$$

$$=-e^{-x}\arcsin e^x+\ln(1-\sqrt{1-e^{2x}})-x+C.$$

解二: $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}\mathrm{d}x=-\int \arcsin e^x\mathrm{d}e^{-x}=-e^{-x}\arcsin e^x+\int e^{-x}\mathrm{d}\arcsin e^x$

$$=-e^{-x}\arcsin e^x+\int \frac{e^{-x}\cdot e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\mathrm{d}x=-e^{-x}\arcsin e^x-\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-e^{2x}}},$$

令 $\sqrt{1-e^{2x}}=u,\ e^{2x}=1-u^2,\ x=\frac{1}{2}\ln(1-u^2)$, 则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-e^{2x}}}=\int \frac{-u}{u(1-u^2)}\mathrm{d}u=-\int \frac{1}{1-u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{\sqrt{1-e^{2x}}+1}\right|+C$$

故 $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}\mathrm{d}x = -e^{-x}\arcsin e^x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{\sqrt{1-e^{2x}}+1}\right| + C.$

(9) $\int e^{2x}(\tan x+1)^2\mathrm{d}x = \int e^{2x}(\tan^2 x + 2\tan x + 1)\ \mathrm{d}x$

$$= \int e^{2x}(\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x + 2\int e^{2x}\tan x\mathrm{d}x + \int e^{2x}\mathrm{d}x$$

$$= \int e^{2x}\mathrm{d}\tan x + 2\int e^{2x}\tan x\mathrm{d}x = e^{2x}\tan x - \int \tan x\mathrm{d}e^{2x} + 2\int e^{2x}\tan x\mathrm{d}x$$

$$= e^{2x}\tan x - 2\int e^{2x}\tan x\mathrm{d}x + 2\int e^{2x}\tan x\mathrm{d}x = e^{2x}\tan x + C$$

(10)令 $u=\tan x$，$x=\arctan u$，$\cos^2 x = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1+u^2}$，$\sin^2 x = \frac{u^2}{1+u^2}$，则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u}{\frac{a^2u^2}{1+u^2} + \frac{b^2}{1+u^2}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{a^2u^2+b^2} = \frac{1}{ab}\arctan\frac{au}{b} + C$$

$$= \frac{1}{ab}\arctan(\frac{a}{b}\tan x) + C$$

(11)设 $\frac{5\sin x + 3\cos x}{3\sin x - 2\cos x} = \frac{A(3\sin x - 2\cos x) + B(3\sin x - 2\cos x)'}{3\sin x - 2\cos x}$，即有

$5\sin x + 3\cos x = (3A+2B)\sin x + (3B-2A)\cos x$，于是有 $3A+2B=5,\ \ 3B-2A=3,$

解得 $A=\frac{9}{13}$，$B=\frac{19}{13}$，则

$$\int \frac{5\sin x + 3\cos x}{3\sin x - 2\cos x}\mathrm{d}x = \int\left(\frac{9}{13} + \frac{\frac{19}{13}(3\sin x - 2\cos x)'}{3\sin x - 2\cos x}\right)\mathrm{d}x = \frac{9}{13}x + \frac{19}{13}\ln|3\sin x - 2\cos x| + C$$

(注:本题用万能代换 $u=\tan\frac{x}{2}$，运算量大).

(12)令 $x=\sin t, t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，则 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos t\mathrm{d}t}{\sin t + \cos t}$，

令 $\frac{\cos t}{\sin t + \cos t} = \frac{A(\sin t + \cos t) + B(\sin t + \cos t)'}{\sin t + \cos t}$，解得 $A=B=\frac{1}{2}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int\left[1 + \frac{(\sin t + \cos t)'}{\sin t + \cos t}\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\ln|\sin t + \cos t| + C$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{1-x^2}| + C.$$

6.计算下列积分:

(1) $\int_0^1 x\arcsin x\mathrm{d}x$; (2) $\int_{-2}^{2}(|x|+x)e^{-|x|}\mathrm{d}x$; (3) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$; (4) $\int_{-3}^{2}\min\{2,x^2\}\mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$; (6) $\int_{\sqrt[4]{e}}^{\sqrt{e}}\frac{1}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}\mathrm{d}x$;

(7) $\int_0^{\pi}x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}\mathrm{d}x$; (8) $\int_0^{n\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x$ (n 为正整数).

解:(1) $\int_0^1 x\arcsin x\mathrm{d}x=\int_0^1\arcsin x\mathrm{d}(\frac{x^2}{2})=\frac{1}{2}x^2\arcsin x\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\cdot\mathrm{d}\arcsin x$

$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{\cos t}\cdot\cos t\mathrm{d}t\qquad(x=\sin t)$

$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{8}.$

(2)由定积分的对称性

$\int_{-2}^{2}(|x|+x)e^{-|x|}\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2}|x|e^{-|x|}\mathrm{d}x+\int_{-2}^{2}xe^{-|x|}\mathrm{d}x=2\int_0^2 xe^{-x}\mathrm{d}x+0=-2\int_0^2 x\mathrm{d}e^{-x}$

$=-2xe^{-x}\Big|_0^2+2\int_0^2 e^{-x}\mathrm{d}x=-4e^{-2}-2e^{-x}\Big|_0^2=-4e^{-2}-2e^{-2}+2=2(1-3e^{-2}).$

(3) $\int_1^2\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=-\int_1^2\frac{1}{x}\cdot\mathrm{d}e^{\frac{1}{x}}=-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\Big|_1^2+\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}\frac{1}{x}$

$=-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}+e+e^{\frac{1}{x}}\Big|_1^2=-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}+e+e^{\frac{1}{2}}-e=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}.$

(4) $\int_{-3}^{2}\min\{2,x^2\}\mathrm{d}x=\int_{-3}^{-\sqrt{2}}2\mathrm{d}x+2\int_0^{\sqrt{2}}x^2\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{2}}^{2}2\mathrm{d}x=2(3-\sqrt{2})+2\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\sqrt{2}}$

$+2(2-\sqrt{2})=6-2\sqrt{2}+\frac{4}{3}\sqrt{2}+4-2\sqrt{2}=10-\frac{8}{3}\sqrt{2}.$

(5)令 $u=\frac{\pi}{4}-x,x=\frac{\pi}{4}-u$,则 $1+\tan x=1+\tan(\frac{\pi}{4}-u)=1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u}=\frac{2}{1+\tan u}$,

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\ln\left[1+\tan(\frac{\pi}{4}-u)\right]\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{2}{1+\tan u}\mathrm{d}u$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2\mathrm{d}u-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan u)\mathrm{d}u=\frac{\pi}{4}\ln 2-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$,

故 $\int_o^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

(6) $\int_{\sqrt[4]{e}}^{\sqrt{e}} \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}\mathrm{d}x = \int_{\sqrt[4]{e}}^{\sqrt{e}} \dfrac{\mathrm{d}\ln x}{\sqrt{\frac{1}{4}-(\ln x-\frac{1}{2})^2}} = \arcsin(2\ln x-1)\Big|_{\sqrt[4]{e}}^{\sqrt{e}}$

$= \arcsin 0 - \arcsin(-\dfrac{1}{2}) = \dfrac{\pi}{6}$.

(7) $\int_0^{\pi} x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} x\sqrt{\cos^2 x(1-\cos^2 x)}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} x\sin x\cdot|\cos x|\,\mathrm{d}x$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\cos x\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\sin x\cdot(-\cos x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\mathrm{d}x - \dfrac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\sin 2x\mathrm{d}x$

$= -\dfrac{1}{4}x\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \dfrac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\mathrm{d}x + \dfrac{1}{4}x\cos 2x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \dfrac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos 2x\mathrm{d}x$

$= \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{1}{8}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{4}\times\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{8}\sin 2x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \dfrac{\pi}{2}$.

(8)因为$|\sin x|$以π为周期，又

$\int_0^{n\pi} x|\sin x|\mathrm{d}x \overset{u=n\pi-x}{=} -\int_{n\pi}^{0}(n\pi-u)|\sin(n\pi-u)|\,\mathrm{d}u$

$= \int_0^{n\pi}(n\pi-u)|\sin u|\,\mathrm{d}u = n\pi\int_0^{n\pi}|\sin u|\mathrm{d}u - \int_0^{n\pi} u|\sin u|\mathrm{d}u$

故$\int_0^{n\pi} x|\sin x|\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}n\pi\int_0^{n\pi}|\sin u|\mathrm{d}u \;= \dfrac{1}{2}n\pi\cdot n\int_0^{\pi}|\sin u|\mathrm{d}u = \dfrac{n^2}{2}\pi\cdot\int_0^{\pi}\sin u\mathrm{d}u = n^2\pi$.

7.计算下列反常积分:

(1) $\int_1^{e} \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$;　　(2) $\int_0^{1} \dfrac{x\mathrm{d}x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$;　　(3) $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}$;

(4) $\int_0^{+\infty} \dfrac{x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$;　　(5) $\int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{e^{x+1}+e^{3-x}}$;　　(6) $\int_0^{+\infty} te^{-kt}\mathrm{d}t$.

解:(1) $x=\mathrm{e}$为被积函数的瑕点,则

$$\int_1^{e}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \int_1^{e}\frac{\mathrm{d}\ln x}{\sqrt{1-\ln^2 x}} = \arcsin(\ln x)\Big|_1^{e} = \lim_{x\to e^-}\arcsin(\ln x) - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

(2) $x=1$为被积函数的瑕点,令$\sqrt{1-x^2}=u$，$x^2=1-\ u^2$，$x\mathrm{d}x=-u\mathrm{d}u$,则

$$\int_0^{1}\frac{x\mathrm{d}x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int_1^{0}\frac{-u\mathrm{d}u}{(1+u^2)\cdot u} = \int_0^{1}\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u = \arctan u\Big|_0^{1} = \frac{\pi}{4}.$$

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}=\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})\mathrm{d}x=\left[\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]\Big|_1^{+\infty}$

$=\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Big|_1^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\ln 2.$

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{(1+x^2)^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\Big|_0^{+\infty}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$

(5) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{e^{x+1}+e^{3-x}}=\int_1^{+\infty}\frac{e^{x-3}\mathrm{d}x}{1+e^{2x-2}}=e^{-2}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}e^{x-1}}{1+(e^{x-1})^2}=e^{-2}\arctan e^{x-1}\Big|_1^{+\infty}$

$=e^{-2}\left(\lim_{x\to+\infty}\arctan e^{x-1}-\arctan 1\right)=e^{-2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}e^{-2}.$

(6) $\int_0^{+\infty}te^{-kt}\mathrm{d}t=-\frac{1}{k}\int_0^{+\infty}t\mathrm{d}e^{-kt}=-\frac{1}{k}te^{-kt}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{k}\int_0^{+\infty}e^{-kt}\mathrm{d}t$

$=-\frac{1}{k}\lim_{t\to+\infty}te^{-kt}-\frac{1}{k^2}e^{-kt}\Big|_0^{+\infty}=0-\frac{1}{k^2}\lim_{t\to+\infty}e^{-kt}+\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k^2}.$

8.已知$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{k|x|}\mathrm{d}x=1$,求$k$的值.

解:因为$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{k|x|}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}e^{-kx}\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}e^{kx}\mathrm{d}x=-\frac{1}{k}e^{-kx}\Big|_{-\infty}^{0}+\frac{1}{k}e^{kx}\Big|_0^{+\infty}$

$=-\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\lim_{x\to-\infty}e^{-kx}+\frac{1}{k}\lim_{x\to+\infty}e^{kx}-\frac{1}{k}=-\frac{2}{k}.$ (由条件知$k<0$), 故$-\frac{2}{k}=1$, 得$k=-2.$

9.设$0<p<1$,证明$\frac{p}{p+1}<\int_0^1\frac{1}{1+x^p}\mathrm{d}x<1$.

证: 因为$x\in[0,1]$, 所以$(1-x^p)(1+x^p)<1$, 故有$1-x^p<\frac{1}{1+x^p}<1$, 进而有

$$\int_0^1(1-x^p)\mathrm{d}x<\int_0^1\frac{1}{1+x^p}\mathrm{d}x<\int_0^1\mathrm{d}x,\text{即}\ \frac{p}{p+1}<\int_0^1\frac{1}{1+x^p}\mathrm{d}x<1.$$

10.设$f(x)$ $[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且$3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(0)$,证明:在$(0,1)$内存在一点$\xi$,使$f'(\xi)=0$.

证: 因为$f(x)$在$[0,1]$上连续, 由积分中值定理知存在$x_0\in(2/3,1)$,使得

$\int_{2/3}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(x_0)(1-2/3)=\frac{f(x_0)}{3}$, 由条件有$f(0)=3\int_{2/3}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(x_0)$, 又$f(x)$在$[0,1]$内可导, 故$f(x)$在$[0,x_0]$上满足罗尔中值定理的条件,则存在$\xi\in(0,x_0)\subset(0,1)$,使得

$f'(\xi)=0$.

11.设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)>0$, $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t, x\in[a,b]$

证明:方程 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个实根.

证: 易知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,又 $f(x)>0$, $F(a)=\int_b^a \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t<0,\ F(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t>0$,

即 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足零点定理的条件,故存在 $x_0\in(a,b)$ 使得 $F(x_0)=0$, 又

$F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}\geq 2$, 即 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增, 于是 $F(x)$ 的零点唯一, 故 $F(x)=0$

在区间 (a,b) 内有且仅有一个零根.

12.设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)$ 的图形关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称,试证:

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

证: 因为 $f(x)$ 的图形关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称, 故有 $f(x)=f(a+b-x)$,又

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x$.令 $u=a+b-x$, 则

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_{\frac{a+b}{2}}^a f(a+b-u)\mathrm{d}u=\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(a+b-u)\mathrm{d}u=\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(u)\mathrm{d}u=\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x,$$

故 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

13.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且单调减少,试证:对任何 $\alpha\in(0,1)$,有

$\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x\geq\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

证一:令 $x=\alpha t$, $\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x=\alpha\int_0^1 f(\alpha t)\mathrm{d}t$, 因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上递减,又 $0<\alpha<1$,

$\alpha t<t$, 所以 $f(\alpha t)\geq f(t)$, 于是

$\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x=\alpha\int_0^1 f(\alpha t)\mathrm{d}t\geq\alpha\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, 即 $\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x\geq\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

证二: $\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x=\alpha\left[\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x+\int_\alpha^1 f(x)\mathrm{d}x\right]-\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x$

$$=(\alpha-1)\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x+\alpha\int_{\alpha}^{1} f(x)\mathrm{d}x.$$

因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由积分中值定理，存在 $\xi_1\in(0,\alpha)$，$\xi_2\in(\alpha,1)$，使得 $\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x=\alpha f(\xi_1)$，$\int_{\alpha}^{1} f(x)\mathrm{d}x=(1-\alpha)f(\xi_2)$，再由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上递减，有 $f(\xi_1)\geq f(\xi_2)$，又 $0<\alpha<1$, 于是

$$\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x=\alpha(\alpha-1)\left[f(\xi_1)-f(\xi_2)\right]\leq 0, \text{即} \int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x\geq\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

(B)

1.设 $f(x)$ 连续,且 $f(0)\neq 0$,求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}$.

解：因为 $\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t,$

$\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t\overset{u=x-t}{=}-\int_x^0 f(u)\mathrm{d}u=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u,$ 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}\overset{\text{积分中值定理}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f(\xi)x}{f(\xi)x+xf(x)}\qquad(\xi\text{ 介于 }0\text{ 与 }x\text{ 之间})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(\xi)}{f(\xi)+f(x)}=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{\ }{(0)}$$

2.设 $f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$,且 $f[\varphi(x)]=\ln x$,求 $\int\varphi(x)\mathrm{d}x$.

解:令 $x^2-1=u$，则 $f(u)=\ln\dfrac{u+1}{u-1}$， $f[\varphi(x)]=\ln\dfrac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=\ln x$， 于是有 $\dfrac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=x$，

得 $\varphi(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$， $\int\varphi(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{x+1}{x-1}\mathrm{d}x=\int\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x=x+2\ln|x-1|+C$.

3.求函数 $F(x)=\int_0^x (t^3-2t^2)\mathrm{d}t$ 在区间 $[-1,4]$ 上的最大值与最小值.

解：$F'(x)=x^3-2x^2$，令 $F'(x)=0$ 得到驻点 $x_{1,2}=0, x_3=2$. 又

$$F(x)=\int_0^x\left(t^3-2t^2\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3=x^3(\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}),\ F(0)=0,\ F(2)=-\frac{4}{3},$$

$F(-1)=\dfrac{11}{12},\ F(4)=\dfrac{64}{3}$, 故 $F(x)$ 在 $[-1,4]$ 上最大值为 $\dfrac{64}{3}$,最小值为 $-\dfrac{4}{3}$.

4.已知 $f(x)=3x^2-x\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,求 $f(x)$.

解: 设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=a,\ \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=b.$ 则 $f(x)=3x^2-bx+2a$, 对 $f(x)$ 分别在

$[0,1],[0,2]$ 上积分得

$$a=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(3x^2-bx+2a)\mathrm{d}x=1-\mathrm{b}/2+2a,$$

$$b=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2(3x^2-bx+2a)\mathrm{d}x=8-2\mathrm{b}+4a,$$

即 $\begin{cases}a-b/2+1=0\\4a-3b+8=0\end{cases}$, 解得 $a=1,b=4$, 故有 $f(x)=3x^2-4x+2.$

5.设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\le 0,\\ e^{2x}-1, & x>0.\end{cases}$ 求 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

解: 当 $x<0$ 时, $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C_1$, 当 $x>0$ 时, $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(e^{2x}-1)\mathrm{d}x$

$=\dfrac{1}{2}e^{2x}-x+C_2$.因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 故原函数在 $x=0$ 处必为一定值.于是

$\lim\limits_{x\to0^-}(-\cos x+C_1)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}-x+C_2\right)$, 得 $\mathrm{C}_2=C_1-3/2$.

$$\text{故}\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}-\cos x+C, & x\le 0\\ \dfrac{1}{2}e^{2x}-x+C-\dfrac{3}{2}, & x>0\end{cases}.$$

6.设 $I_n=\int\tan^n x\mathrm{d}x\ \ (n\ge 2,n\in N^+)$,求证: $I_n=\dfrac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}$.

证: $I_n=\int\tan^n x\mathrm{d}x\ =\int\tan^{n-2}x\tan^2 x\mathrm{d}x=\int\tan^{n-2}x(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x$

$$=\int\tan^{n-2}x\mathrm{d}\tan x-I_{n-2}=\tan^{n-1}x-\int\tan x\mathrm{d}\tan^{n-2}x-I_{n-2}$$
$$=\tan^{n-1}x-\int(n-2)\tan^{n-2}x\sec^2 x\mathrm{d}x-I_{n-2}=\tan^{n-1}x-(n-2)\int\tan^{n-2}x(1+\tan^2 x)\mathrm{d}x-I_{n-2}$$
$$=\tan^{n-1}x-(n-2)I_n-(n-2)I_{n-2}-I_{n-2},$$

即 $(n-1)I_n=-(n-1)I_{n-2}+\tan^{n-1}x$, 也即 $I_n=\dfrac{\tan^{n-1}x}{n-1}-I_{n-2}.$

7.设 $f(x)$ 连续,证明:$\int_0^x f(x)(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x[\int_o^t f(u)du]\mathrm{d}t$.

证:记 $F(t)=\int_0^t f(u)\mathrm{d}u$, 则 $F'(t)=f(t)$.

$$\int_0^x F(t)\mathrm{d}t=t\,F(t)\Big|_0^x-\int_0^x t\mathrm{d}F(t)=xF(x)-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\ =x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

$$=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t,\text{即}\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\int_0^t f(u)du\right)\mathrm{d}t\ .$$

8.设 $f(x)$ 在 $[0,a](a>0)$ 上有连续的导数、单调减少且 $f(0)=0$,证明:

$$|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x|\le\frac{Ma^2}{2},\quad\text{其中}\,M=\max_{x\in[0,a]}|f'(x)|.$$

证: 因为 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上有连续导数, 当 $x\in[0,a]$ 时, 在 $[0,x]$ 上使用拉格朗日中值定理,

存在 $\xi\in(0,x)$ 使得 $f(x)-f(0)=f'(\xi)x$, 即 $f(x)=f'(\xi)x$, 故

$$\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right|\le\int_0^a|f'(\xi)|\,x\mathrm{d}x\le M\int_0^a x\mathrm{d}x=\frac{Ma^2}{2}.$$

9.设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,证明:

$$(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x)^2\le\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\quad\text{(柯西—施瓦茨不等式)}.$$

证一. 因为对任意的 $t\in R$, 有 $[tf(x)-g(x)]^2\ge0$, 故 $\int_a^b[tf(x)-g(x)]^2\mathrm{d}x\ge0$, 即

$$t^2\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-2t\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\ge0.$$

当 $\int_a^b f^2(x)dx\ne0$ 时, 于是有

$$\Delta=B^2-4AC=4(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x)^2-4\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\le0,$$

即 $(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x)^2\le\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$.

当 $\int_a^b f^2(x)dx=0$ 时,则必有 $f(x)\equiv0$,原不等式显然成立.

证.令 $F(x)=(\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t)^2-\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t\cdot\int_a^x g^2(t)\mathrm{d}t$, 易知 $F(a)=0$.

$$F'(x)=2\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t\cdot f(x)g(x)-f^2(x)\int_a^x g^2(t)\mathrm{d}t-g^2(x)\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t$$

$$=-\int_a^x\left[f^2(x)g^2(t)-2f(x)g(x)f(t)g(t)+f^2(t)g^2(x)\right]\mathrm{d}t$$

$$=-\int_a^x\left[f(x)g(t)-f(t)g(x)\right]^2\mathrm{d}t\le0,$$

故 $F(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上递减. 所以 $F(b)\le F(a)$.即

$$(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x)^2 \le \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

10.设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(x)>0$,证明:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \ge (b-a)^2 .$$

证: 由柯西不等式($\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$,则

$$\left[\int_a^b\left(\sqrt{f(x)}\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right)\mathrm{d}x\right]^2 \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \text{ ,即 } \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \ge (b-a)^2 .$$

11.已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ 在点 $(0,0)$ 处切线相同,写出此切线的方程,并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nf(\frac{2}{n})$.

解: 由 $y=\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ 得 $y'=e^{-x^2}$, $y'(0)=1, y(0)=1$.又曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ 在(0,0)处相切.于是有 $f(0)=0, f'(0)=1$，故在(0,0)处切线方程为 $y=x$ ，且

$$\lim_{n\to\infty} nf(\frac{2}{n}) = 2\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}} = 2f'(0)=2 .$$

12.设函数 $S(x)=\int_0^x|\cos t|\,\mathrm{d}t$,当 n 为正整数且 $n\pi\le x<(n+1)\pi$ 时, 证明

(1): $2n\le S(x)\le 2(n+1)$; (2)求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}$.

解: (1) 当 $n\pi\le x<(n+1)\pi$ 时,因为 $|\cos t|\ge 0$,所以 $\int_0^{n\pi}|\cos t|\mathrm{d}t\le S(x)\le\int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|\mathrm{d}t$;又因为 $\cos t$ 的周期为 π ,所以 $\int_0^{n\pi}|\cos t|\mathrm{d}t=n\int_0^{\pi}|\cos t|\mathrm{d}t=2n$, $\int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|\mathrm{d}t=2(n+1)$.

故 $2n\le S(x)\le 2(n+1)$.

(2) 由已知以及(1)的结论，可得 $\frac{2n}{(n+1)\pi}\le\frac{S(x)}{x}\le\frac{2(n+1)}{\pi n}$ ，又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{(n+1)\pi}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{n\pi}=\frac{2}{\pi}$，由夹逼准则得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=\frac{2}{\pi}$.

13.设有一物体沿 t 轴作直线运动,在 $t=0$ 时位于原点,在时刻 t 的速度(单位:m/s)为

$$v(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{20}, & 0\le t\le 40,\\ 2, & 0\le t\le 40,\\ 5-\dfrac{t}{20}, & t>60.\end{cases}$$

问:(1)物体在时间段$[0,120]$内所经过的路程为多少？(2)该物体何时回到原点?

解: (1)物体在[0, 120]内所经过的路程为

$$S=\int_0^{120}|v(t)|\mathrm{d}t=\int_0^{40}\frac{t}{20}\mathrm{d}t+\int_{40}^{60}2\mathrm{d}t+\int_{60}^{120}\left|5-\frac{t}{20}\right|\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{40}t^2\Big|_0^{40}+40+\int_{60}^{100}(5-\frac{t}{20})\mathrm{d}t+\int_{100}^{120}(\frac{t}{20}-5)\mathrm{d}t$$

$$=40+40+200-\frac{1}{40}t^2\Big|_{60}^{100}+\frac{1}{40}t^2\Big|_{100}^{120}-100$$

$$=180-\frac{1}{40}\times(100^2-40^2)+\frac{1}{40}\times(120^2-100^2)=130(m).$$

(2)设物体经过t_0秒后回到原点,经分析$t_0>100$, 又$v(100)=0$,据题意有

$$\int_0^{100}v(t)\mathrm{d}t=\int_{100}^{t_0}|v(t)|\mathrm{d}t\,.$$

上述积分结合定积分的几何意义可得

$120=\dfrac{1}{2}(t_0-100)\times(\dfrac{t_0}{20}-5)$,即$(t_0-100)^2=4800$,解得$t_0=100+40\sqrt{3}$ (s) .