23-24-2 学期期末练习卷

参考答案

一. 选择题

1	2	3	4	5	6	7	8
D	D	D	C	A			
9	10	11	12	13	14	15	16
B	A	B	C	D	B		
17	18	19	20	21	22	23	24
C	D	A	A	C	B		

二. 填空题

1.	2.	3.
2	0	± 2
4.	5.	6.
2π	2π	$-dx+2dy+dz$
7.	8.	9.
$(0,1]$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
10.	11.	12.
$\underline{\{(x,y)\mid y>x^2,x^2+y^2\le 1\}}$	π	$2dx+2dy$
13.	14.	15.
$\int_0^1 dy\int_{y^2}^1 f(x,y)dx$	条件收敛	$\pm\frac{1}{2}$
16.	17.	18.
$-(x-1)+y+z=0$	$\frac{\pi}{6}$	2π
19.	20.	21.
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$2dx+2\ln 2dy$	$\frac{\pi^2}{8}$

三.试解下列各题

1. **解**：因为 $\frac{1}{x+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$， $x\in(-1,1)$，

所以 $f(x)=\frac{1}{2x+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n$， $x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

2. **解**：取 D 为 X-型域（先对 y 积分）: $D:\begin{cases}0\le y\le x\\0\le x\le\pi\end{cases}$

$$\therefore\ \iint_D\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\int_0^{x}\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}=2$$

3. **解**：方程两边对 y 求导得 $\cos(z+x)gz_y=1-z_y$，

$$\text{即 } z_y=\frac{1}{1+\cos(z+x)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{-\sin(z+x)}{\left[1+\cos(z+x)\right]^2}gz_y=\frac{\sin(z+x)}{\left[1+\cos(z+x)\right]^3}$$

4. **解一**：将三重积分转化为柱面坐标系下的积分.由题意知

$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 1-x^2-y^2\}=\{(r,\theta,z)\,|\,0\le z\le 1-r^2,0\le r\le 1,0\le\theta<2\pi\}$.

故 $\iiint\limits_{\Omega}e^{x^2+y^2}dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}e^{r^2}rdrd\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 re^{r^2}dr\int_0^{1-r^2}dz$，

$=2\pi\int_0^1 r(1-r^2)e^{r^2}dr=\pi(2-t)e^t\,|_0^1=(e-2)\pi$.

解二：由 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 1-x^2-y^2\}$，

它在 xOy 平面上的投影 $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$

先对变量 z 积分,再对变量 x,y 进行二重积分可得

$$\iiint\limits_{\Omega}e^{x^2+y^2}dxdydz=\iint\limits_{D_{xy}}e^{x^2+y^2}dxdy\int_0^{1-x^2-y^2}dz=\iint\limits_{D_{xy}}e^{x^2+y^2}(1-x^2-y^2)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r(1-r^2)e^{r^2}dr=\pi(2-t)e^t\,|_0^1=(e-2)\pi$$

5. **解**：由题意可知 $a_n=\frac{1}{n}$，故 $\rho=\lim|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim\frac{n}{n+1}=1$，从而

该幂级数的收敛半径 $R=1/\rho=1$，从而其收敛区间为(1,3)

当 $x=1$ 时，级数 $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛

当 $x=3$ 时，级数 $\sum\frac{1}{n}$ 发散

故该幂级数的收敛域为[1,3)

6. **解**：$P(x,y)=e^x\sin y,\quad Q(x,y)=e^x\cos y-x$,两者在整个 xoy 面内具有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-1-e^x\cos y=-1$，

设区域 $D=\{(x,y):x^2+y^2\le 2x, y\ge 0\}$

则区域 D 的正向边界为 $L\cup\overline{OA}$

由格林公式可得

$$\int_L Pdx+Qdy+\int_{\overline{OA}}Pdx+Qdy=\iint_D Q_x-P_y dxdy=-\iint_D dxdy=-\frac{\pi}{2}$$

又 $\int_{\overline{OA}}Pdx+Qdy=\int_0^2 0dx=0$，

故所求曲线积分为 $-\frac{\pi}{2}$

7. **解**：该级数是收敛的，且为绝对收敛。

首先考虑正项级数 $\sum\frac{n}{2^n}$ 的敛散性。由 $\rho=\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\frac{(n+1)2^n}{n2^{n+1}}=\frac{1}{2}<1$

可得该级数是收敛的

又因为 $|\frac{n\sin n}{2^n}|\le\frac{n}{2^n}$，故由比较判别法可知级数 $\sum|\frac{n\sin n}{2^n}|$ 收敛，

故原级数绝对收敛。

8. **解**：令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，

原式= $\lim\limits_{r\to 0}\frac{\sqrt{9+r^2}-3}{\sin r^2}=\lim\limits_{r\to 0}\frac{r^2}{r^2(\sqrt{9+r^2}+3)}=\frac{1}{6}$

9. **解**：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}==\ln v+\frac{u}{v}y=\ln(xy)+\frac{x+y}{xy}y$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\ln v+\frac{u}{v}x=\ln(xy)+\frac{x+y}{xy}x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{u}{v}+(\frac{1}{v}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{u}{v^2}\frac{\partial v}{\partial y})y=\frac{1}{y}+\frac{1}{x}$$

10. **解**：$D=\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le\pi, 0\le r\le 1\}$，

$$I = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r^2 dr = \frac{\pi}{3}$$

11. **解：积分区域** $\Omega = \{(r,\theta,z) \mid 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi, r \le z \le \sqrt{2-r^2}\}$

$$I = \iiint_\Omega z dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_r^{\sqrt{2-r^2}} z dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r(1-r^2) dr = 2\pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

12. **解：** $P = 2xy - y^4 + 3, Q = x^2 - 4xy^3$

因为 $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 4y^3 = \frac{\partial Q}{\partial x}$，所以曲线积分与路径无关.

取积分路径：$\boldsymbol{L_1 + L_2}$，L_1：$y = 0$，$x: 0 \to 2$. L_2：$x = 2$，y：$0 \to 1$.

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3)dx + (x^2 - 4xy^3)dy = \int_0^2 3dx + \int_0^1 (4 - 8y^3)dy = 8$$

13. **解：** 收敛半径 $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n-1}{n} \right| = 1.$

另外，易知当 $x = \pm 1$ 时，原级数均发散。故收敛域为 （-1，1）

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n+1} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = x^2 \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x^2}{(1-x)^2}$$

14. **解：令** $t = \sqrt{x^2 + y^2}$，可得 $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1-\cos t}{t^2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{1}{2}t^2}{t^2} = \frac{1}{2}$

15. **解一：** 方程两边对 x 求导得 $e^z z_x = 1 + y z_x$，即 $z_x = \frac{1}{e^z - y}$

方程两边对 y 求导得 $e^z z_y = z + y z_y$，即 $z_y = \frac{z}{e^z - y}$

解二：设 $F(x,y,z) = e^z - x - yz$，则 $F_x = -1,\ F_x = -z,\ F_z = e^z - y,$

故 $z_x = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{1}{e^z - y}$，$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{z}{e^z - y}$，

16. **解：** 由 $\Omega = \{(x,y,z) \mid x,y,z \ge 0, x+y+z \le 1\}$，
当 $0 \le z \le 1$ 时,它在 xOy 平面上的投影 $D_z = \{(x,y) \mid x,y \ge 0, x+y \le 1-z\}$
先对变量 x,y 二重积分,再对变量 z 进行积分可得

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2 dxdydz = \int_0^1 \iint\limits_{D_z} z^2 dxdydz = \int_0^1 z^2 dz \iint\limits_{D_z} dxdy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}(1-z)^2 z^2 dz = \frac{1}{2}\int_0^1 (z^2 - 2z^3 + z^4) dz = \frac{1}{60}$$

17. **解**：取 D 为 X-型域（先对 y 积分): $D:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le x \end{cases}$

$$\therefore \iint_D \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} \mathrm{d}y = \int_0^1 (1-x)\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[-\sin x - (1-x)\cos x\right]_0^1 = 1 - \sin 1$$

18. **解**：$P(x,y) = e^x \sin y$，$Q(x,y) = e^x \cos y$，两者在整个 xoy 面内具有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y - e^x \cos y = 0$，

故该曲线积分与路径无关

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} e^x \sin y dx + e^x \cos y dy = \int_{(0,0)}^{(1,1)} d(e^x \sin y) = e^x \sin y\Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = e\sin 1$$

19. **解**：该级数是收敛的，且为绝对收敛。

首先考虑正项级数 $\sum \frac{n^2}{3^n}$ 的敛散性。由 $\rho = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{(n+1)^2 3^n}{n^2 3^{n+1}} = \frac{1}{3} < 1$

可得该级数是收敛的。

又因为 $|\frac{n^2 cosn}{3^n}| \le \frac{n^2}{3^n}$，故由比较判别法可知级数 $\sum |\frac{nsinn}{2^n}|$ 收敛，

故原级数绝对收敛。

20. **解**：由题意可知 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$，故 $\rho = \lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1$，从而该幂级数的收敛半径 $R = {}^1\!/_{\rho} = 1$，从而其收敛区间为 $(-2,0)$

当 $x = -2$ 时，级数 $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 条件收敛;当 $x = 0$ 时，级数 $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散

故该幂级数的收敛域为 $[-2,0)$

四．应用题

1. **解**：由题意得点 $(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1)$ 对应的 $\theta = \frac{\pi}{6}$，

故该点处的切向量 $\vec{T} = (-2\sin 2\theta, 2\cos 2\theta, 2\cos\theta)\big|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = (-\sqrt{3},1,\sqrt{3})$,.

故在该点处曲线的切线为 $\frac{x-\frac{3}{2}}{-\sqrt{3}} = \frac{y-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{z-1}{\sqrt{3}}$，

法平面为$-\sqrt{3}(x-\frac{3}{2})+(y-\frac{\sqrt{3}}{2})+\sqrt{3}(z-1)=0$.

2.　解一：根据 Lagrange 乘数法，设$L(x,y,z,\lambda)=xy^2z^3+\lambda(x+y+z-6)$.

$$则\begin{cases} L_x=y^2z^3+\lambda=0 & ① \\ L_y=2xyz^3+\lambda=0 & ② \\ L_z=3xy^2z^2+\lambda=0 & ③ \\ L_\lambda=x+y+z-6=0 & ④ \end{cases}$$

由前三个方程可知$y=2x,z=3x$，代入至④中可得$x=1,y=2,z=3$.

由该问题的实际意义可知该三元函数在此约束条件下的最大值为

$f(1,2,3)=1\times4\times27=108$.

解二: $f(x,y,z)=108x(\frac{y}{2})^2(\frac{z}{3})^3$.

利用算数平均值大于等于几何平均值可得

$$\sqrt[6]{x(\frac{y}{2})^2(\frac{z}{3})^3}\le\frac{x+2\times\frac{y}{2}+3\times\frac{z}{3}}{6}=\frac{x+y+z}{6}=1.$$

故在该约束条件下$f(x,y,z)\le108$.

由算术平均和几何平均相等的充分必要条件可知当$x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$时，即$x=1,y=2,z=3$时,函数可以取得 108. 故在该约束条件下函数的最大值为 108.

3.　解：令$F(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2-7$.

则过曲面上任意点$M(x,y,z)$处的切平面的法向量

$\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(2x,2y,4z)$

故所求曲面在点$(1,2,-1)$ 处的法向量为$\boldsymbol{n}=(2,4,-4)$

切平面方程为　$2(x-1)+4(y-2)-4(z+1)=0$，i.e.,　$x+2y-2z-7=0.$

以及法线方程为:　$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-2}.$$

4. 解： 曲面 $\sum_1=\{(x,y,z)|z=1-x^2-y^2(z>0)\}$ 的面积为

$$S_1=\iint_{\sum_1} dS=\iint_{\{(x,y)|x^2+y^2\le 2\}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy=$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\sqrt{1+4r^2}dr = \frac{\pi}{6}(3\sqrt{3}-1)$$

平面 z=0 部分的面积是 $S_2=2\pi$

故所求立方体的表面积为 $S=S_1+S_2=\frac{\pi}{6}(3\sqrt{3}-1)+2\pi$.

5. 解一： 根据 Lagrange 乘数法，设 $L(x,y,z,\lambda)=x+2y+4z+\lambda(xyz-1)$.

$$\text{则}\begin{cases}L_x=1+\lambda yz=0 \text{①}\\ L_y=2+\lambda xz=0\text{②}\\ L_z=4+\lambda xy=0\text{③}\\ L_\lambda=xyz-1=0\text{④}\end{cases}$$

由前三个方程可知 $x=2y=4z=-\lambda xyz$，代入至④中可得 $x=2,y=1,z=\frac{1}{2}$.

由该问题的实际意义可知该三元函数在此约束条件下的最小值为

$f(2,1,\frac{1}{2})=2+2\times1+4\times\frac{1}{2}=6$.

解二： 利用算数平均值大于等于几何平均值可得

$f(x,y,z)\ge 3(x\times 2y\times 4z)^{\frac{1}{3}}=6(xyz)^{\frac{1}{3}}=6$.

故在该约束条件下 $f(x,y,z)\ge 6$.

由算术平均和几何平均相等的充分必要条件可知当 $x=2y=4z$ 时,

即 $x=2,y=1,z=\frac{1}{2}$ 时,函数可以取得 6.

故在该约束条件下函数的最小值为 6.

6. 解一： 由题意知 $f_2(x,y)=2-x^2-y^2$， $f_1(x,y)=x^2+y^2$

$$D=\{(x,y)|0\le x^2+y^2\le 1\}=\{(r,\theta)|0\le r\le 1,0\le\theta<2\pi\}$$

故 $V=\iint_D f_2(x,y)-f_1(x,y)dxdy=\iint_D 2-2(x^2+y^2)dxdy$,

$=2\pi-2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2rdr=2\pi-4\pi\frac{1}{4}=\pi$.

解二： 由题意知

$$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le 2-x^2-y^2\}=\{(r,\theta,z)\,|\,r^2\le z\le 2-r^2,0\le r\le 1,0\le\theta<2\pi\}$$

故$V=\iiint\limits_{\Omega}1dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}rdrd\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^{2-r^2}dz$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r-r^3dr=4\pi(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})=\pi\quad.$$

五．证明题

1. **证明：**由$\sum b_n$绝对收敛可得$\sum b_n$收敛，又因$\sum a_n$收敛，所以级数$\sum(a_n+b_n)$收敛

反设$\sum(a_n+b_n)$绝对收敛，即$\sum|a_n+b_n|$收敛，则由$\sum b_n$绝对收敛知$\sum|b_n|$收敛，于是$\sum(|a_n+b_n|+|b_n|)$收敛。

又$|a_n|=|a_n+b_n-b_n|\le|a_n+b_n|+|b_n|$

由比较判别法可知级数$\sum a_n$绝对收敛，矛盾。故假设错误，即$\sum|a_n+b_n|$必定发散。再根据级数$\sum(a_n+b_n)$收敛可知该级数条件收敛。

2. **证明：** **因为** $|(-1)^{n+1}\dfrac{u_n}{n}|\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n^2}+u_n^2\right)$,

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$和 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 均收敛, 所以由比较判别法知

$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n+1}\frac{u_n}{n}|$ 收敛，因此绝对收敛.

3. **证明：**由$u_n=\max\{a_n,0\}=\begin{cases}a_n, & a_n\ge 0\\ 0, & a_n<0\end{cases}$, $v_n=\min\{a_n,0\}=\begin{cases}0, & a_n\ge 0\\ a_n, & a_n<0\end{cases}$

可得 $u_n+v_n=a_n, u_n-v_n=|a_n|$.

因此，$u_n=\dfrac{a_n+|a_n|}{2}, v_n=\dfrac{a_n-|a_n|}{2}$.

反证法：设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，由$|a_n|=2u_n-a_n$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛可得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛.

这与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛矛盾.

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，同理$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散.