第三章　微分中值定理与导数的应用

习　题 3.1　微分中值定理与泰勒公式

(A)

1．下列函数在给定区间上是否满足罗尔定理条件？如果满足,求出定理中的ξ.

(1) $y=\ln\sin x$, $x\in[\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}]$;　　　(2) $y=|x|$, $x\in[-1,\ 1]$.

解：(1)因为$y=\ln\sin x$在$[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$连续,在$(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$内可导且有$y'=\cot x$；

又$y|_{x=\frac{\pi}{6}}=y|_{x=\frac{5\pi}{6}}=\ln\frac{1}{2}$，所以$y=\ln\sin x$在$[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$上满足 Rolle 定理.

故在$(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$内至少存在一点$\xi$，使得$y'(\xi)=0$，即$\cot\xi=0$，所以$\xi=\frac{\pi}{2}$.

（2）因为$y=|x|$在$x=0$处不可导，故在$[-1,1]$上不满足 Rolle 定理.

2．设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续,在 $(0,\pi)$ 内可导,证明：在 $(0,\pi)$ 内至少存在一点 ξ,使得 $f'(\xi)\sin\xi+f(\xi)\cos\xi=0$.

证：令$\varphi(x)=f(x)\sin x$，则$\varphi(x)$在$[0,\pi]$上连续，在$(0,\pi)$内可导，　且$\varphi(0)=\varphi(\pi)=0$.

根据 Rolle 定理，至少存在一点$\xi\in(0,\pi)$，使得$\varphi'(\xi)=0$. 又$\varphi'(x)=f'(x)\sin x+f(x)\cos x$，

即有$f'(\xi)\sin\xi+f(\xi)\cos\xi=0$.

3．证明方程$x^3-3x+1=0$在$(0,1)$内有且仅有一个实根.

证:令$f(x)=x^3-3x+1$,由于$f(x)$在$[0,1]$上连续,$f(0)=1$,　$f(1)=-1$,根据零点存在定理,存在$\xi\in(0,1)$,使得$f(\xi)=0$,即ξ是方程$f(x)=0$在$(0,1)$内的一个实根.

又$f'(x)=3x^2-3<0$　$(x\in(0,1))$,所以$f(x)$在$[0,1]$上单调减少，故$f(x)=0$在$(0,1)$内有且仅有一个实根.

4. 证明:对函数$y=px^2+qx+r$在任一区间上应用拉格朗日中值定理时所求得的点ξ总是位于该区间的中点.

证：设 $f(x)=y=px^2+qx+r$，由于 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,在开区间 (a,b) 内可导,根据 Lagrange 中值定理,在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

又 $f'(x)=2px+q$，所以 $2p\xi+q=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=p(b+a)+q,\quad \xi=\dfrac{a+b}{2}$.

5．证明下列不等式：

(1) $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}\quad (a>b>0)$；

(2) $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)\quad (n>1, a>b>0)$.

证：(1)设 $f(x)=\ln x$，则 $f(x)$ 在 $[b,a]$ 上满足 Lagrange 中值定理，从而在 (b,a) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$，即 $\dfrac{1}{\xi}=\dfrac{\ln a-\ln b}{a-b}$.

又因为 $0<b<\xi<a$，所以 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{\ln a-\ln b}{a-b}<\dfrac{1}{b}$，即 $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$.

(2)设 $f(x)=x^n$，则 $f(x)$ 在 $[b,a]$ 上满足 Lagrange 中值定理,所以在 (b,a) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$，即 $n\xi^{n-1}=\dfrac{a^n-b^n}{a-b}$.

又因为 $n>1,\quad a>\xi>b>0$，所以 $nb^{n-1}<\dfrac{a^n-b^n}{a-b}<na^{n-1}$，即

$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b).$$

6．证明下列不等式：

(1) $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$；　　(2) $|\arctan x-\arctan y|\le|x-y|$.

证：(1) 设 $f(z)=\sin z$，不妨令 $x<y$，则 $f(z)$ 在 $[x,y]$ 上满足 Lagrange 中值定理,在 (x,y) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(x)-f(y)=f'(\xi)(x-y)$，即有 $\sin x-\sin y=(x-y)\cos\xi$. 所以

$$|\sin x-\sin y|\le|x-y|.$$

(2) 设 $f(z)=\arctan z$，不妨令 $x<y$，则 $f(z)$ 在 $[x,y]$ 上满足 Lagrange 中值定理，在 (x,y) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(x)-f(y)=f'(\xi)(x-y)$，即 $\arctan x-\arctan y=\dfrac{x-y}{1+\xi^2}$.所以

$$\left|\arctan x-\arctan y\right|=\frac{|x-y|}{1+\xi^2}\le|x-y|.$$

7．证明下列恒等式：

(1) $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}\ (-1\le x\le 1)$；　　(2) $\arctan x+\operatorname{arc}\cot x=\dfrac{\pi}{2}\ (-\infty<x<+\infty)$.

证：(1)令 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0,$

所以 $f(x)=f(0)=\dfrac{\pi}{2}$,即 $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

(2) 令 $f(x)=\arctan x+\operatorname{arccot} x$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{1+x^2}=0$，所以 $f(x)=f(0)=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\arctan x+\operatorname{arccot} x=\dfrac{\pi}{2}$.

8．设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足关系式 $f'(x)=f(x)$,且 $f(0)=1$,证明：　$f(x)=e^x$.

证：令 $g(x)=f(x)e^{-x}$，则 $g'(x)=f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=(f'(x)-f(x))e^{-x}=0$. 所以 $g(x)=f(x)e^{-x}\equiv c$ （c 为常数)，即 $f(x)=ce^x$.

又因为 $f(0)=1$,所以 $f(0)=c=1$,故 $f(x)=e^x$.

9．求函数 $f(x)=xe^x$ 带皮亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式.

解：　因为 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}+o\left(x^{n-1}\right)$，所以

$$f(x)=xe^x=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+o(x^n).$$

10．求函数 $f(x)=\ln(2+x)$ 带皮亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式.

解：因为 $\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}x^n+o(x^n)$, 所以

$$\ln(2+x)=\ln[2(1+\frac{x}{2})]=\ln 2+\ln(1+\frac{x}{2})=\ln 2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2\cdot 2^2}+\frac{x^3}{3\cdot 2^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}+o(x^n).$$

11．求函数 $f(x)=e^x$ 在点 $x_0=1$ 处带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式.

解：因为 $f^{(n)}(x)=e^x$，$f^{(n)}(1)=e$, 所以 $f(x)$ 在 $x_0=1$ 处带 Lagrange 型余项的 n 阶 Taylor 公式为：

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}$$

$$=e+e(x-1)+\frac{e}{2!}(x-1)^2+\cdots+\frac{e}{n!}(x-1)^n+\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}(x-1)^{n+1},$$

其中ξ介于 1，x 之间.

12．求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在点 $x_0=3$ 处带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式.

解：因为 $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)$, 所以

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3+x-3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-3}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{x-3}{3}+\frac{(x-3)^2}{3^2}+\cdots+(-1)^n\left(\frac{x-3}{3}\right)^n+o((x-3)^n)\right)$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{x-3}{3^2}+\frac{(x-3)^2}{3^3}+\cdots+(-1)^n\frac{(x-3)^n}{3^{n+1}}+o((x-3)^n).$$

13．利用泰勒公式计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$；　　　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x^2-e^{-x^2}}{x^2\sin^2 2x}$.

解：(1) 因为 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3!}-o(x^4)}{x^3}=\frac{1}{6}$.

(2) 因为 $e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}+o(x^4)$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x^2-e^{-x^2}}{x^2\sin^2 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{2!}-o(x^4)}{x^2\cdot(2x)^2}=\frac{-1}{8}$.

(B)

1．设 $f(x)$ 在区间 I 上有二阶导数,在 I 内有三个零点,证明：

(1) $f'(x)$ 在 I 内有至少有两个零点;　　　(2) $f''(x)$ 在 I 内有至少有一个零点.

证：设 $f(x)$ 在区间 I 上的三个零点分别为 a,b,c $(a<b<c)$.

(1)因为 $f(x)$ 在 I 上有二阶导数，易得 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 和 $[b,c]$ 上分别满足 Rolle 定理.故在 (a,b) 内至少存在一点 ξ_1,在 (b,c) 内至少存在一点 ξ_2,使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$,即 $f'(x)$ 在 I 内有

至少有两个零点.

(2) 因为 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上满足 Rolle 定理,所以在 (ξ_1,ξ_2) 内至少存在一点 ξ 使得 $f''(\xi)=0$.

2.设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导,且 $f''(x)\neq 0$,证明: $f(x)$ 在 (a,b) 内至多有一个点 ξ,使得 $f'(\xi)=0$.

证:(反证法)假设 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少有两个点 ξ_1,ξ_2, 使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$.

因为 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导, 所以易知 $f(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上满足 Rolle 定理，故在 (ξ_1,ξ_2) 内至少存在一点 ξ 使得 $f''(\xi)=0$, 与题设矛盾,所以假设不成立,即原命题成立.

3．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导且不恒为常数,又 $f(a)=f(b)$,证明：在 (a,b) 至少有一点 ξ,使得 $f'(\xi)>0$.

证：因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f(a)=f(b)$,又 $f(x)$ 不恒为常数,所以在 (a,b) 内至少存在一点 ξ_0,使得 $f(\xi_0)\neq f(a)$.

若 $f(\xi_0)>f(a)$, 由 Lagrange 中值定理知,在 (a,ξ_0) 内至少存在一点 ξ_1, 使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(\xi_0)-f(a)}{\xi_0-a}>0.$$

若 $f(\xi_0)<f(a)=f(b)$, 由 Lagrange 中值定理知,在 (ξ_0,b) 内至少存在一点 ξ_2,使得

$$f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(\xi_2)}{b-\xi_2}>0.$$

故在 (a,b) 至少有一点 ξ,使得 $f'(\xi)>0$.

4．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $b>a>0$,证明：在 (a,b) 至少有一点 ξ,使得 $2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$.

证：先将要证的等式变形,得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}$. 令 $g(x)=x^2$, 则 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Cauchy 中值定理条件，所以在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}，\text{即}\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}.$$

故原式成立.

5．证明：当$0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$时,$\frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1}$.

证：要证明的原不等式可变形为$\frac{\tan x_2}{x_2}>\frac{\tan x_1}{x_1}$.令$f(x)=\frac{\tan x}{x}$,则$f(x)$在$\left[x_1,x_2\right]$上满足Lagrange定理条件，且有$f'(x)=\frac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}=\frac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}=\frac{2x-\sin 2x}{2x^2\cos^2 x}$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),\text{即}\frac{\tan x_2}{x_2}-\frac{\tan x_1}{x_1}=\frac{2\xi-\sin 2\xi}{2\xi^2\cos^2\xi}(x_2-x_1),$$

其中$0<x_1<\xi<x_2<\frac{\pi}{2}$.

又$\frac{2\xi-\sin 2\xi}{2\xi^2\cos^2\xi}>0$，所以$\frac{\tan x_2}{x_2}>\frac{\tan x_1}{x_1}$，即有$\frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1}$.

6．求函数$f(x)=\ln x$在点$x_0=3$处带皮亚诺余项的n阶泰勒公式.

解：$\ln x=\ln(3+x-3)=\ln 3+\ln(1+\frac{x-3}{3})$

$$=\ln 3+\frac{x-3}{3}-\frac{(x-3)^2}{2\cdot 3^2}+\frac{(x-3)^3}{3\cdot 3^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}+o[(x-3)^n].$$

7．求函数$f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$带皮亚诺余项的n阶麦克劳林公式.

解：$f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+2)(x+1)}=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}$

$$=1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)-\frac{1}{2}\cdot(1-\frac{x}{2}+(\frac{x}{2})^2+\cdots+(-1)^n(\frac{x}{2})^n+o(x^n))$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{2^2-1}{2^2}x+\frac{2^3-1}{2^3}x^2+\cdots+(-1)^n\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}x^n+o(x^n).$$

习　题 3.2　洛必达法则

(A)

1．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\tan x}$； (2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$； (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}$； (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{\sin x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{\ln^3(1+x)}$； (6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}+\sin x-1}{\arcsin x}$； (7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1+\ln x}{e^x-e}$； (8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\tan x-x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 3x}{\ln\tan 2x}$； (10) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln\ln x}{x}$．

解：(1) $\dfrac{0}{0}$ 型．原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+e^{-x}\right)=2.$

(2) $\dfrac{0}{0}$ 型．原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x}=1.$

(3) $\dfrac{0}{0}$ 型．原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}.$

(4) $\dfrac{0}{0}$ 型．原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+\sin x\right)=1.$

(5) $\dfrac{0}{0}$ 型．原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{3x^2\left(1+x^2\right)}=\dfrac{1}{3}.$

(6) $\dfrac{0}{0}$ 型．原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}+\sin x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(-2e^{-2x}+\cos x\right)=-1.$

(7) $\dfrac{0}{0}$ 型．原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+\dfrac{1}{x}}{e^x}=\dfrac{4}{e}.$

(8) $\dfrac{0}{0}$ 型．原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sec^2 x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}.$

(9) $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型．原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{3\sec^2 3x}{\tan 3x}}{\dfrac{2\sec^2 2x}{\tan 2x}}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan 2x}{\tan 3x}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x}{3x}=1.$

(10) $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型．原式 $=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x\ln x}=0.$

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x})$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1})$； (3) $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$； (4) $\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$．

解：(1) $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x})=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln x}{x\ln x+x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x+1}{\ln x+2}=\dfrac{1}{2}.$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}.$

(3) $\lim\limits_{x\to0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^{-2}}}{x^{-2}}\overset{t=x^{-2}}{=}\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{t\to+\infty}e^t=+\infty.$

~~3.~~(4) $\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\dfrac{1}{x}=1.$

带格式的：项目符号和编号

3.求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$； (2) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}$； (3) $\lim\limits_{x\to0^+}(\ln\dfrac{1}{x})^x$.

解： (1) $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\sin x-\ln x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cot x-\frac{1}{x}}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\tan x}{2x^2\tan x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\tan x}{2x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sec^2 x}{6x^2}}=e^{-\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^2 x}{6x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\sin x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-1}}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}e^{-\lim\limits_{x\to0^+}x}=e^0=1.$

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to0^+}e^{x\ln\ln\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln\ln\frac{1}{x}}\overset{t=x^{-1}}{=}e^{\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln\ln t}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{t\ln t}}=e^0=1.$

4. 验证极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{2x+\cos x}$ 存在,但不能用洛必达法则求.

证：因为 $|\sin x|\le1,\ \ |\cos x|\le1$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{2x+\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{\sin x}{x}}{2+\frac{\cos x}{x}}=\dfrac{1}{2}.$

显然 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{2x+\cos x}$ 为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型,且极限式的分子分母可导,但是 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-\sin x)'}{(2x+\cos x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{2-\sin x}$ 极限不存在也不为无穷大，即不满足洛必达法则第三个条件,所以本题不能用洛必达法则求.

(B)

1．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2})$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$； (3) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\tan\frac{1}{n}}$； (4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$.

解：(1) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^2-\sin^2 2x}{4x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2x+\sin 2x)(2x-\sin 2x)}{4x^4}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2x+\sin 2x}{x}\cdot\frac{2x-\sin 2x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos 2x)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{1}{2}(2x)^2}{3x^2}=\frac{4}{3}$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{2t(1+t)}=\frac{1}{2}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\tan\frac{1}{n}}\overset{x=\frac{1}{n}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{1}{x})^{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\tan x\ln\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln\frac{1}{x}}\overset{t=\frac{1}{x}}{=}e^{\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{t}}=e^0=1$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e-e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e(1-e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1})}{x}=e\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\frac{1}{x}\ln(1+x))}{x}$

$$=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x(1+x)}=\frac{e}{2}.$$

2．证明函数 $f(x)=\begin{cases}[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}]^{\frac{1}{x}}, x>0\\ e^{-\frac{1}{2}}, \quad x\le 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续.

证：因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}\ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-x}{2x(1+x)}}=e^{-\frac{1}{2}}=f(0),\quad \lim_{x\to 0^-}f(x)=e^{-\frac{1}{2}}=f(0).$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，故 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续。

习　题 3.3　函数形态的研究

(A)

1．判定函数 $f(x)=x-\ln(1+x^2)$ 的单调性.

解：因为 $f'(x)=1-\frac{2x}{1+x^2}=\frac{(x-1)^2}{1+x^2}\geq 0,$ 且 $f'(x)=0$ 仅在 $x=1$ 时成立，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.

2．确定下列函数的单调区间：

(1) $y=x^3-3x^2-9x+1$； (2) $y=2x^2-\ln x$； (3) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；(4) $y=x^2e^{-x^2}$.

解：(1) 因为 $y'=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1).$ 当 $x\in(-\infty,-1)$ 或 $(3,+\infty)$ 时，$y'>0$；当 $x\in(-1,3)$ 时，$y'<0$.所以函数在 $(-\infty,-1],[3,+\infty)$ 上单调增加；函数在 $[-1,3]$ 上单调减少.

(2) 因为 $y'=4x-\frac{1}{x}=\frac{4x^2-1}{x}=\frac{4}{x}(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2}).$ 当 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 时，$y'<0$；当 $x\in(\frac{1}{2},+\infty)$ 时，$y'>0$.所以函数在 $(0,\frac{1}{2}]$ 上单调减少；函数在 $[\frac{1}{2},+\infty)$ 上单调增加.

(3) 因为 $y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}})=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$,因此函数在 $\boldsymbol{(-\infty,+\infty)}$ 上单调增加.

(4) 因为 $y'=2xe^{-x^2}-2x^3e^{-x^2}=2e^{-x^2}x(1-x)(1+x)$.当 $x\in(-\infty,-1)$ 或 $(0,1)$ 时，$y'>0$；当 $x\in(-1,0)$ 或 $(1,+\infty)$ 时，$y'<0$.故函数在 $(-\infty,-1],[0,1]$ 上单调增加;函数在 $[-1,0],[1,+\infty)$ 上单调减少.

3．证明下列不等式：

(1) $2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}\ (x>1)$； (2) $\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}\ (x>0)$；

(3) $\tan x>x+\frac{1}{3}x^3\ (0<x<\frac{\pi}{2})$； (4) $2^x>x^2\ (x>4)$.

证：(1) 令 $f(x)=2\sqrt{x}+\frac{1}{x}-3,(x\geq 1)$，则 $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}=\frac{x\sqrt{x}-1}{x^2}>0,\quad (x>1).$ 所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调增加.

故当 $x>1$ 时, $f(x)>f(1)$，即 $2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}\quad(x>1).$

(2)令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x,\ (x>0)$，则

$$f'(x)=\ln(1+x)+1-\frac{1}{1+x^2}=\ln(1+x)+\frac{x^2}{1+x^2}>0,\quad x>0.$$

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加.故当 $x>0$ 时, $f(x)>f(0)$. 即 $\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}\quad (x>0)$.

(3)令 $f(x)=\tan x-x-\dfrac{1}{3}x^3,\quad x\in[0,\dfrac{\pi}{2})$. 则

$$f'(x)=\sec^2 x-1-x^2=\tan^2 x-x^2=(\tan x+x)(\tan x-x).$$

当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\tan x+x>0$，$\tan x-x>0$，所以 $f'(x)>0,\quad x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$. 从而 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2})$ 上单调增加.

因此,当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时,有 $f(x)>f(0)$,即 $\tan x>x+\dfrac{1}{3}x^3\quad(0<x<\dfrac{\pi}{2})$.

(4)原不等式等价于 $x\ln 2>2\ln x,(x>4)$，即 $\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{\ln 2}{2},(x>4)$.

令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$,所以当 $x>4$ 时, $f'(x)<0$，从而 $f(x)$ 在 $[4,+\infty)$ 上单调减少，即当 $x>4$ 时, $f(x)<f(4)$.

故当 $x>4$ 时，有 $\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{\ln 4}{4}=\dfrac{\ln 2}{2}$，即原不等式成立.

4．证明方程 $\sin x=x$ 有且仅有一个实根.

证：令 $f(x)=\sin x-x$, 则 $f'(x)=\cos x-1\le 0$,且仅当 $x=2k\pi$ 时, $f'(x)=0$.所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调减少,又 $f(0)=0$.所以 $x=0$ 是方程 $\sin x=x$ 惟一的实根.

5．求下列曲线的凹凸区间和拐点:

(1) $y=x^4-2x^3$;　(2) $y=xe^{-x}$;　(3) $y=\ln(x^2+1)$;　(4) $y=e^{\arctan x}$.

解：(1)因为 $y'=4x^3-6x^2$, $y''=12x^2-12x=12x(x-1)$,令 $y''=0$ 得 $x_1=0,x_2=1$.所以,当 $-\infty<x<0$ 或 $1<x<+\infty$ 时, $y''>0$;当 $0<x<1$ 时, $y''<0$.

因此曲线在 $(-\infty,0]$, $[1,+\infty)$ 上是凹的,在 $[0,1]$ 上是凸的;曲线有 2 个拐点分别为 $(0,0),(1,-1)$.

(2)因为 $y'=(1-x)e^{-x}$, $y''=(x-2)e^{-x}$,令 $y''=0$ 得 $x=2$. 所以,当 $-\infty<x<2$ 时, $y''<0$;当 $2<x<+\infty$ 时, $y''>0$.

因此曲线在 $(-\infty,2]$ 上是凸的,在 $[2,+\infty)$ 上是凹的;曲线有 1 个拐点 $(2,\dfrac{2}{e^2})$.

(3)因为 $y'=\dfrac{2x}{x^2+1}$, $y''=\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$,令 $y''=0$ 得 $x_1=1,x_2=-1$ 所以,当 $-\infty<x<-1$ 或 $1<x<+\infty$ 时, $y''<0$；当 $-1<x<1$ 时, $y''>0$.

因此曲线在$(-\infty,-1]$,$[1,+\infty)$上是凸的,在$[-1,1]$上是凹的；曲线有 2 个拐点，分别为$(-1,\ln 2),(1,\ln 2)$.

(4)因为$y'=\dfrac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$，$y''=\dfrac{2e^{\arctan x}(\frac{1}{2}-x)}{(1+x^2)^2}$，令$y''=0$得$x=\dfrac{1}{2}$.所以当$-\infty<x<\dfrac{1}{2}$时，$y''>0$;当$\dfrac{1}{2}<x<+\infty$时，$y''<0$.

因此曲线在$(-\infty,\dfrac{1}{2}]$上是凹的,在$[\dfrac{1}{2},+\infty)$上是凸的；点$(\dfrac{1}{2},e^{\arctan\frac{1}{2}})$为曲线的拐点.

6．利用函数图形的凹凸性,证明下列不等式：

(1)$\dfrac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}\quad(x\neq y)$；　(2)$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}\quad(x>0,y>0,\ x\neq y)$.

证:(1)令$f(t)=e^t,t\in(-\infty,+\infty)$,则$f''(t)=e^t>0,t\in(-\infty,+\infty)$,因此$f(t)$在$(-\infty,+\infty)$内图形是凹的.由凹凸的定义知，$\forall x,y\in(-\infty,+\infty),\ x\neq y$,恒有$\dfrac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f(\dfrac{x+y}{2})$,即

$$\frac{1}{2}(e^x+e^y)>e^{\frac{x+y}{2}}\quad(x\neq y).$$

(2)令$f(t)=t\ln t,t\in(0,+\infty)$,则$f'(t)=\ln t+1,\ f''(t)=\dfrac{1}{t}>0,t\in(0,+\infty)$,因此$f(t)$在$(0,+\infty)$内图形是凹的.由凹凸的定义知，$\forall x,y\in(0,+\infty),\ x\neq y$,恒有

$$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f(\frac{x+y}{2}),\text{即 }x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}\quad(x\neq y).$$

7．当a,b取何值时,点$(1,3)$为曲线$y=ax^3+bx^2$的拐点？

解：因为曲线过点$(1,3)$,所以$a+b=3$;又因为点$(1,3)$是曲线的拐点,所以

$$y''\big|_{x=1}=(6ax+2b)\big|_{x=1}=6a+2b=0.$$

解得$a=-\dfrac{3}{2},b=\dfrac{9}{2}$.

8．求下列函数的极值：

(1)$y=x-\ln(1+x)$；　(2)$y=x+\sqrt{1-x}$；　(3)$y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$；　(4)$y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$.

解：(1)因为$y'=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x},y''=\dfrac{1}{(1+x)^2}\quad(x>-1)$.令$y'=0$得驻点$x=0$.由

$y''\big|_{x=0}=1>0$,知 $y\big|_{x=0}=0$ 为极小值.

(2)因为 $y'=1-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}=\dfrac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}}$, $y''=-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{(1-x)^{3/2}}$. 令 $y'=0$ 得驻点 $x=\dfrac{3}{4}$.由

$y''\Big|_{x=\frac{3}{4}}=-2<0$,知 $y\Big|_{x=\frac{3}{4}}=\dfrac{5}{4}$ 为极大值.

(3)因为 $y'=\dfrac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$, $y''=\dfrac{2-6\ln x+2\ln^2 x}{x^3}\quad(x>0)$. 令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=1, x_2=e^2$.

由 $y''\big|_{x=1}=2>0$ 知 $y\big|_{x=1}=0$ 为极小值；由 $y''\big|_{x=e^2}=-\dfrac{2}{e^6}<0$,知 $y\big|_{x=e^2}=\dfrac{4}{e^2}$ 为极大值.

(4)因为 $y'=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}(5x-2)$, $y''=\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}(5x+1)$,令 $y'=0$ 得驻点 $x=\dfrac{2}{5}$,且 $x=0$ 为不可导的点.

由 $y''\Big|_{x=\frac{2}{5}}=\dfrac{5\sqrt[3]{5}}{3\sqrt[3]{2}}>0$,知 $y\Big|_{x=\frac{2}{5}}=-\dfrac{3}{5}\cdot(\dfrac{2}{5})^{\frac{2}{3}}=-\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{\dfrac{4}{25}}$ 为极小值；又因为当 $-\infty<x<0$ 时，

$y'>0$; 当 $0<x<\dfrac{2}{5}$ 时， $y'<0$; 从而 $y\big|_{x=0}=0$ 为极大值.

9．确定 a 、 b 的值,使函数 $f(x)=a\ln x+bx^2+x$ 在 $x=1$ 及 $x=2$ 处有极值,并求出极值.

解：因为 $f'(x)=\dfrac{a}{x}+2bx+1$，由题意知

$$f'(1)=a+2b+1=0,\ f'(2)=\frac{a}{2}+4b+1=0,$$

解得 $a=-\dfrac{2}{3}, b=-\dfrac{1}{6}$,所以 $f(x)=-\dfrac{2}{3}\ln x-\dfrac{1}{6}x^2+x$.

又 $f''(x)=\dfrac{1}{3}(\dfrac{2}{x^2}-1)$， $f''(1)=\dfrac{1}{3}>0$, $f''(2)=-\dfrac{1}{6}<0$， 故 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处取到极小值 $f(1)=\dfrac{5}{6}$，在点 $x=2$ 处取到极大值 $f(2)=\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{3}\ln 2$.

10．求下列函数在给定区间上的最大值和最小值：

(1) $y=x^4-2x^2+3, [-2,2]$； (2) $y=x+\sqrt{1-x}, [-5,1]$； (3) $y=\dfrac{x-1}{x+1}, [0,4]$.

解：(1)因为 $y'=4x(x-1)(x+1)$,令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=-1, x_2=0, x_3=1.$

比较以下这些函数值的大小: $y\big|_{x=\pm2}=11, y\big|_{x=0}=3, y\big|_{x=\pm1}=2,$ 得函数的最大值为

$y\big|_{x=\pm2}=11,$ 最小值为 $y\big|_{x=\pm1}=2.$

(2) 因为 $y'=1-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$,令 $y'=0$ 得驻点 $x=\dfrac{3}{4}.$

比较以下这些函数值的大小: $y\big|_{x=-5}=\sqrt{6}-5,\ y\Big|_{x=\frac{3}{4}}=\dfrac{5}{4},\ y\big|_{x=1}=1,$ 得函数的最大值为 $y\Big|_{x=\frac{3}{4}}=\dfrac{5}{4},$ 最小值为 $y\big|_{x=-5}=\sqrt{6}-5.$

(3)因为 $y'=\dfrac{2}{(x+1)^2}>0,$ 则函数在 $[0,4]$ 上单调增加，故函数的最大值为 $y\big|_{x=4}=\dfrac{3}{5},$ 最小值为 $y\big|_{x=0}=-1.$

11．某车间靠墙壁要盖一间长方形小屋,现有存砖只够砌 20 米长的墙壁．问应围成怎样的长方形,才能使这间小屋的面积最大?

解：设这间小屋的宽为 $x,$ 长为 $y,$ 则小屋的面积为 $S=xy.$ 已知 $2x+y=20,$ 即 $y=20-2x,$ 则 $S=x(20-x)=20x-2x^2,\quad x\in(0,10).\ S'=20-4x,\ S''=-4.$ 令 $S'=0,$ 得驻点 $x=5.$

由 $S''(5)<0$ 知 $x=5$ 为极大点,又驻点唯一,故极大值点就是最大值点,即当宽为 5 米,长为 10 米时这间小屋的面积最大.

12．要作一个容积为 $9\ m^3$ 的带盖长方形的水箱,其,要求底边长为 $2:1$ 的关系.问水箱的长、宽、高各等于多少时,水箱的表面积最小?

解：设水箱底面的宽为 $x,$ 长为 $y,$ 高为 $z,$ 则水箱的表面积为 $S=2(xy+yz+xz).$ 已知 $y=2x,xyz=9,$ 即 $z=\dfrac{9}{xy}=\dfrac{9}{2x^2},$ 则

$$S=2(x\cdot 2x+2x\cdot\frac{9}{2x^2}+x\cdot\frac{9}{2x^2})=4x^2+\frac{27}{x},\quad x\in(0,+\infty),\ S'=8x-\frac{27}{x^2},\ S''=8+\frac{54}{x^3}.$$

令 $S'=0,$ 得驻点 $x=\dfrac{3}{2}.$ 由 $S''(\dfrac{3}{2})>0$ 知 $x=\dfrac{3}{2}$ 为极小值点，又驻点唯一，故极小值点就是最小值点，即当宽、长、高分别为 $\dfrac{3}{2}$ 米、3 米、2 米时，水箱的表面积最小.

13．平面上过点 $M(1,4)$ 引一条直线,使它在两坐标轴上的截距都为正,且截距的和为最小,求此直线的方程.

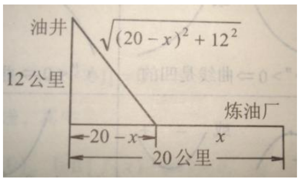
解：设直线方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1,$ 由题意知 $a>0,b>0,$ 且点 $M(1,4)$ 在直线上，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}=1,$ 从而得到 $a=\dfrac{b}{b-4}.$

设截距和为$s=a+b=\dfrac{b}{b-4}+b$,则$s'=1-\dfrac{4}{(b-4)^2}$, $s''=\dfrac{8}{(b-4)^3}$.

令$s'=0$,得驻点$b_1=6, b_2=2$.当$b=6$时,$a=3$符合题意;当$b=2$时,$a=-1$不符合题意，所以$b=2$舍去.

由$s''(6)=1>0$知$b=6$为极小点，又驻点唯一，故极小点就是最小点，即当$a=3, b=6$时，截距和最小，此时直线方程为$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{6}=1$.

14. 用输油管道把离岸12公里的海上油井和沿岸下游20公里处的炼油厂连接起来(如下图). 如果水下油管的铺设成本为每公里5万元,陆地油管的铺设成本为每公里3万元,问该如何选择铺设输油管道使得铺设费用最少？



解：如图,设水陆管道连接点应选在炼油厂上游x公里处，则陆地油管长为x公里,水下油管长为$\sqrt{(20-x)^2+12^2}$公里.设铺设费用为$m(x)=3x+5\sqrt{(20-x)^2+12^2}$，$x\in(0,20)$,则

$$m'=3-\frac{5(20-x)}{\sqrt{(20-x)^2+12^2}},\quad m''=\frac{720}{(\sqrt{(20-x)^2+12^2})^3}.$$

令$m'=0$,得驻点$x_1=11, x_2=29$（舍去）.

由$m''(11)>0$知$x=11$为极小点,又驻点唯一,故极小值点就是最小值点,即当$x=11$时,铺设费用最少.

(B)

1．证明下列不等式：:

(1)当$x>1$时,$\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}$;　　(2) 当$x>0$时,$(x^2-1)\ln x\ge(x-1)^2$.

证：(1)令$f(x)=\ln x-2+\dfrac{4}{x+1}$,则$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$,因此函数$f(x)$在区间$[1,+\infty)$上单调增加.

故当$x>1$时,$f(x)>f(1)$,即$f(x)=\ln x-2+\dfrac{4}{x+1}>0$,从而$\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}$.原结论得证.

(2)令$f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$,则

$$f'(x)=2x\ln x-x-\frac{1}{x}+2,\quad f''(x)=2\ln x+\frac{1}{x^2}+1,\quad f'''(x)=\frac{2}{x}-\frac{2}{x^3}=\frac{2(x^2-1)}{x^3},$$

所以,当$0<x<1$时, $f'''(x)<0$;当$x>1$时, $f'''(x)>0$.所以, $x=1$是$f''(x)$的最小值点,即当$0<x<+\infty$时, $f''(x)\geq f''(1)=2>0$.所以, $f'(x)$在$(0,+\infty)$内单调增加.

所以,当$0<x<1$时, $f'(x)<f'(1)=0$;当$x>1$时, $f'(x)>f'(1)=0$.因此$f(1)=0$是$f(x)$在$(0,+\infty)$内的最小值.

故当$x>0$时,有$f(x)\geq f(1)=0$,即有$(x^2-1)\ln x\geq(x-1)^2$.

2．方程$\ln x=ax\ (a>0)$有几个实根?

解：令$f(x)=\ln x-ax$, 则$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a=\dfrac{1-ax}{x}$, 则

当$0<x<\dfrac{1}{a}$时, $f'(x)>0$;当$x>\dfrac{1}{a}$时, $f'(x)<0$, 因此$f(x)$在$(0,\dfrac{1}{a}]$上单调递增,在$[\dfrac{1}{a},+\infty)$上单调递减.从而$f(\dfrac{1}{a})=\ln\dfrac{1}{a}-1=-\ln a-1$是$f(x)$在$(0,+\infty)$内的最大值.所以

(1)当$f(\dfrac{1}{a})=-\ln a-1<0$，即$a>\dfrac{1}{e}$时，方程没有实根.

(2)当$f(\dfrac{1}{a})=-\ln a-1=0$, 即$a=\dfrac{1}{e}$时，方程只有一个实根$x=e$.

(3)当$f(\dfrac{1}{a})=-\ln a-1>0$, 即$a<\dfrac{1}{e}$时，因为$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, 此时方程有 2 个实根.

3．设曲线$y=k(x^2-3)^2$的拐点处的法线通过原点,求k的值.

解：$y'=2k(x^2-3)\cdot 2x=4kx(x^2-3)$, $y''=4k(x^2-3)+4kx\cdot 2x=12k(x-1)(x+1)$.令$y''=0$得$x_1=-1,\quad x_2=1$.所以当$-\infty<x<-1$或$1<x<+\infty$时, $y''>0$;当$-1<x<1$时, $y''<0$.

故曲线在$(-\infty,-1],[1,+\infty)$上是凹的,在$[-1,1]$上是凸的,从而$(-1,4k)$, $(1,4k)$为曲线的拐点.

由$y'\big|_{x=-1}=8k$知过点$(-1,4k)$的法线方程为$Y-4k=-\dfrac{1}{8k}(X+1)$.要使该法线过原点,将$X=0,Y=0$代入上述法线方程，得$k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

由$y'\big|_{x=1}=-8k$知过点$(1,4k)$的法线方程为$Y-4k=\dfrac{1}{8k}(X-1)$.要使该法线过原点，将$X=0,Y=0$代入上述法线方程，得$k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

综上所述，当 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ 时，该曲线的拐点处的法线通过原点.

4．设 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=1$，证明： $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值.

证：因为 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=1>0$，由极限的保号性可知，$\exists\delta>0$，使得当 $x\in\overset{o}{U}(x_0,\delta)$ 时，有

$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}>0$，而 $(x-x_0)^2>0$，则 $f(x)-f(x_0)>0$，即 $f(x)>f(x_0)$.

所以由极值的定义知， $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值.

5．设在 $[0,+\infty)$ 上 $f''(x)<0$，$f(0)=0$，证明：对任意的正数 x_1,x_2，恒有

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2).$$

证:由于 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导,且 $f''(x)<0$，则 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减.

$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，不妨设 $x_1<x_2$. 易知 $f(x)$ 在 $[0,x_1]$ 和 $[x_2,x_1+x_2]$ 上满足拉格朗日中值定理，即有

$$f(x_1)-f(0)=f'(\xi)x_1,\quad \xi\in(0,x_1);\quad f(x_1+x_2)-f(x_2)=f'(\eta)x_1,\quad \eta\in(x_2,x_1+x_2).$$

由于 $\xi<\eta$ 且 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f'(\xi)>f'(\eta)$；又由于 $f(0)=0$，从而可得

$$f(x_1+x_2)-f(x_2)<f(x_1),\text{即 } f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2).$$

6．对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，证明: $x^4+(1-x)^4\ge\dfrac{1}{8}$.

证:设 $f(x)=x^4+(1-x)^4$，则 $f'(x)=4x^3-4(1-x)^3=4(2x-1)[(x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}]$，令 $f'(x)=0$，得到唯一驻点 $x=\dfrac{1}{2}$，且当 $-\infty<x<\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)<0$； 当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $x=\dfrac{1}{2}$ 为最小值点，即 $f(x)\ge f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{8}$，故原结论得证.

习　题 3.4　平面曲线的曲率

(A)

1．求抛物线 $y=x^2+3x+2$ 在点 $(1,6)$ 处的曲率和曲率半径.

解：$y'=2x+3,\quad y''=2,$ 则有 $y'\big|_{(1,6)}=5,\ y''\big|_{(1,6)}=2.$ 所以抛物线在点 $(1,6)$ 处的曲率为

$$K\big|_{(1,6)}=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\Big|_{(1,6)}=\frac{|2|}{(1+5^2)^{3/2}}=\frac{1}{13\sqrt{26}},$$ 曲率半径 $\rho\big|_{(1,6)}=13\sqrt{26}.$

2．求星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ 当 $t=t_0$ 时相应点处的曲率.

解：因为 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\left(a\sin^3 t\right)'}{\left(a\cos^3 t\right)'}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-\tan t,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\left(\tan t\right)'}{\left(a\cos^3 t\right)'}=\frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t}=\frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}.$$

所以，曲线在 $\boldsymbol{t=t_0}$ 处的曲率为 $$K\big|_{t=t_0}=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\Big|_{t=t_0}=\frac{\left|\frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}\right|}{[1+(-\tan t)^2]^{3/2}}=\frac{2}{|3a\sin 2t_0|}.$$

3．求摆线 $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 当 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 时相应点处的曲率.

解：因为 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\sin t}{1-\cos t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin t\cdot\sin t}{(1-\cos t)^2}}{1-\cos t}=\frac{-1}{(1-\cos t)^2}.$$

所以, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=1,\ \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=\dfrac{-1}{(1-\cos t)^2}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=-1.$ 故曲线在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处的曲率为

$$K\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{|-1|}{(1+1)^{3/2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

4．对数曲线 $y=\ln x$ 上哪一点的曲率半径最小？求出该点的曲率半径.

解：$y'=\dfrac{1}{x},\quad y''=-\dfrac{1}{x^2}$，曲线的曲率半径 $$\rho=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}=\frac{[1+(\frac{1}{x})^2]^{3/2}}{\left|-\frac{1}{x^2}\right|}=\frac{(1+x^2)^{3/2}}{x}.$$

$\rho'=\dfrac{(1+x^2)^{1/2}(2x^2-1)}{x^2}$，令 $\rho'=0$ 得驻点 $x_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ x_2=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$（舍去）.

当$0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$\rho'<0$;当$\frac{\sqrt{2}}{2}<x<+\infty$时，$\rho'>0$.因此在$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$处$\rho$取得极小值，由驻点的唯一性可知$\rho$的极小值就是最小值，因此最小的曲率半径为$\rho\Big|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{(1+\frac{1}{2})^{3/2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

5．求曲线$y=\tan x$在点$(\frac{\pi}{4},1)$处的曲率圆方程.

解：$y'=\sec^2 x,\ \ y''=2\sec^2 x\tan x$, 故$y'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=2,\ \ y''\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=4$. 设曲线在点$(\frac{\pi}{4},1)$处的曲率中心坐标为$(\alpha,\beta)$, 则

$$\alpha=\left[x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\right]_{(\frac{\pi}{4},1)}=\frac{\pi}{4}-\frac{2(1+4)}{4}=\frac{\pi-10}{4},\quad \beta=\left[y+\frac{1+y'^2}{y''}\right]_{(\frac{\pi}{4},1)}=1+\frac{1+4}{4}=\frac{9}{4}$$

因此, 曲率半径$\rho=\frac{1}{K}\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{5^{3/2}}{4}$, 所求的曲率圆方程为

$$\left(\xi-\frac{\pi-10}{4}\right)^2+\left(\eta-\frac{9}{4}\right)^2=\frac{125}{16}.$$

(B)

1．设曲线$y=ax^2+bx+c$与$y=e^x$在点$(0,1)$处有相同的切线与曲率半径,求a,b,c的值.

解：由题意，有$y|_{x=0}=(ax^2+bx+c)|_{x=0}=c=1,$，

$$y'|_{x=0}=(ax^2+bx+c)'|_{x=0}=(2ax+b)|_{x=0}=b=(e^x)'|_{x=0}=1,$$

$$y''|_{x=0}=(ax^2+bx+c)''|_{x=0}=2a=\pm(e^x)''|_{x=0}=\pm1,$$

解得 $a=\pm\frac{1}{2},b=1,c=1.$

2．设曲线的极坐标方程为$\rho=\rho(\theta)$,证明;曲线在点(ρ,θ)处的曲率为

$$K=\frac{|\rho^2+2\rho'-\rho\rho''|}{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

证：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}[\rho(\theta)\sin\theta]}{\mathrm{d}[\rho(\theta)\cos\theta]}=\frac{\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta}$,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta}\right)}{\mathrm{d}[\rho(\theta)\cos\theta]}=\frac{\rho^2+2\rho'-\rho\rho''}{(\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta)^3}.$$

所以,曲线在点(ρ,θ)处的曲率

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\left|\frac{\rho^2+2\rho'-\rho\rho''}{(\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta)^3}\right|\Bigg/\left(1+\left[\frac{\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta}\right]^2\right)^{3/2}$$

$$=\left|\frac{\rho^2+2\rho'-\rho\rho''}{(\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta)^3}\right|\Bigg/\frac{(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}}{(\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta)^3}=\frac{|\rho^2+2\rho'-\rho\rho''|}{(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}}.$$

总习题三

(A)

1．选择题

(1)函数 $f(x)=(x-1)\sqrt{4-x}$ 在$[1,4]$上满足罗尔定理结论中的ξ为(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

解：根据 Rolle 定理，$f'(\xi)=0$. 又 $f'(x)=\dfrac{3(3-x)}{2\sqrt{4-x}}$，$\therefore \xi=3$. 故选(C)

(2) 下列极限不能使用洛必达法则计算的是(　　).

(A)$\lim\limits_{x\to0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$　(B)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$　(C)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{\tan^3 x}$　(D)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$

解：(A)$\lim\limits_{x\to0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^{-2}}}{x^{-2}}\overset{y=x^{-2}}{=}\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{e^y}{y}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{e^y}{1}=+\infty.$

(B) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}=1.$

(C) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{\tan^3 x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3\sin^2 x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{6\sin x\cos x}=\dfrac{1}{6}.$

(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ 极限不存在，不满足洛必达法则条件，故选(D).

(3) 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数,且 $f'(x)>0, f''(x)>0$, Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量, Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分,若 $\Delta x>0$,则(　　).

(A) $0<\mathrm{d}y<\Delta y$　　(B) $0<\Delta y<\mathrm{d}y$　　(C) $\Delta y<\mathrm{d}y<0$　　(D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$

解： $\Delta y-dy=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-f'(x_0)\Delta x=[f'(\xi)-f'(x_0)]\Delta x$ ，其中 $x_0<\xi<x_0+\Delta x$.

因为 $f''(x)>0$ ，所以 $f'(x)$ 单调增加,从而 $f'(\xi)-f'(x_0)>0$ ，又 $\Delta x>0$ ，因此， $\Delta y-dy>0$ ，又 $dy=f'(x_0)\Delta x>0$ ，故选(A).

(4) $f'(x_0)=0$ 、 $f''(x_0)<0$ 是函数在点 x_0 取得极大值的(　　).

(A)无关条件　　(B)充要条件　　(C)充分条件　　(D)必要条件

解：“$\Rightarrow$”由极值第二判别法易得.

“$\Leftarrow$”不能得到：若函数在 x_0 取得极大值， x_0 可能为不可导点.例如 $y=-|x|$ 在 $x=0$ 处不可导但是取得极大值.综上选(C).

(5)设 $f(x)=|x(x-1)|$ ，则(　　).

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

解： $f(x)=|x(x-1)|\geq 0$ ，在 $x=0$ 和 $x=1$ 处取得极小值 0.又 $f'(0^-)=-1,\quad f'(0^+)=1$ ，　故 $(0,0)$ 是曲线的拐点，故选(C)

(6)已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续,且 $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$,则在点 $x=0$ 处 $f(x)$ (　　).

(A)不可导　　(B)可导且 $f'(0)\neq 0$　　(C)取得极大值　　(D)取得极小值

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2>0$ ，由保号性定理可知，存在点 $x=0$ 的某个去心邻域 $\overset{o}{U}(0,\delta)$ ，当 $x\in\overset{o}{U}(0,\delta)$ 时，有 $\dfrac{f(x)}{1-\cos x}>0$;又 $1-\cos x>0$.所以，当 $x\in\overset{o}{U}(0,\delta)$ 时，有 $f(x)>0=f(0)$ ，

故 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处取到极小值，应选 D。

(7)当 a 取(　　)的值时,函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$ 恰好有二个不同的零点.

(A)2　　　　(B) 4　　　　　(C)6　　　　　(D)8

解：由函数的图形可知，当 $f(x)$ 有两个异号的极值时, $f(x)$ 有三个零点；当 $f(x)$ 有两个同号的极值时，$f(x)$ 有一个零点；当 $f(x)$ 有一个极值为零时，$f(x)$ 有两个零点．又 $f'(x)=6(x-1)(x-2)$，经判定知，$x=1$，$x=2$ 都是 $f(x)$ 的极值点，且 $f(1)=5-a$，$f(2)=4-a$，所以，应选(B).

(8)设 $f(x)$ 在 $(1-\delta,1+\delta)$ 内有二阶导数, $f'(x)$ 单调减少,且 $f(1)=f'(1)=1$,则(　　).

(A)在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)<x$

(B)在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)>x$

(C)在 $(1-\delta,1)$ 内 $f(x)<x$,在 $(1,1+\delta)$ 内 $f(x)>x$

(D)在 $(1-\delta,1)$ 内 $f(x)>x$,在 $(1,1+\delta)$ 内 $f(x)<x$

解：根据题意在 $(1-\delta,1+\delta)$ 内 $f''(x)<0.$　令 $g(x)=x-f(x)$，则 $g(1)=0$．又 $g'(x)=1-f'(x), g'(1)=0$．又 $g''(x)=-f''(x)>0$，所以定义在 $(1-\delta,1+\delta)$ 内的 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，即 $g(x)>0, x\in(1-\delta,1)\bigcup(1,1+\delta)$，故选（A）.

(9)设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内连续,且 $f(a)$ 为其极大值,则存在 $\delta>0$,当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时,必有(　　).

(A) $(x-a)[f(x)-f(a)]\geq 0$　　　　(B) $(x-a)[f(x)-f(a)]\leq 0$

(C) $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\geq 0(x\neq a)$　　　　(D) $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\leq 0(x\neq a)$

解：因为 $f(a)$ 为极大值，所以，$\exists\delta>0,\ \ f(x)-f(a)\leq 0\ \ (x\in(a-\delta,a+\delta)).$ 所以 $(x-a)[f(x)-f(a)]\begin{cases}\leq 0, & x\geq a\\ \geq 0, & x<a\end{cases}$，故(A)(B)不对。

当 $x\neq a$ 时,因为 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内连续，且 $f(a)$ 为极大值，所以

$$\lim_{t\to a}\left(f(t)-f(x)\right)=\lim_{t\to a}\left(f(t)-f(a)+f(a)-f(x)\right)=\lim_{t\to a}\left(f(a)-f(x)\right)\geq 0,$$

从而$\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{\left(t-x\right)^2}\geq 0\quad\left(x\neq a\right)$.故选(C).

2．填空题

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2[\ln\arctan(n+1)-\ln\arctan n]=$ ____..

解：$\lim\limits_{n\to\infty}n^2[\ln\arctan(n+1)-\ln\arctan n]=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x]$, 易知函数 $\ln\arctan x$ 在区间 $[x,x+1]$ 上满足拉格朗日定理，且 $(\ln\arctan x)'=\dfrac{1}{(1+x^2)\arctan x}$, 则 $\exists\xi\in(x,x+1)$, 使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{(1+\xi^2)\arctan\xi}=\dfrac{2}{\pi}$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2[\ln\arctan(n+1)-\ln\arctan n]=\dfrac{2}{\pi}$.

(2)设 $f(x)$ 可导,且 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e$, $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+c}{x-c})^x=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$,则 $\boldsymbol{c=}$ ____.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{c}{x}\right)^x\bigg/\left(1-\dfrac{c}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{c}{x}\right)^x\bigg/\left(1-\dfrac{c}{x}\right)^x$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{c}{x}\right)^{\frac{x}{c}\cdot c}\bigg/\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{c}{x}\right)^{\frac{x}{-c}\cdot(-c)}=\frac{e^c}{e^{-c}}=e^{2c}.$$

由拉格朗日定理得，$\exists\xi\in(x-1,x)$, 使得 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim\limits_{x\to\infty}f'(\xi)=\lim\limits_{\xi\to\infty}f'(\xi)=e$. 所以由 $e^{2c}=e$ 可得 $c=\dfrac{1}{2}$.

(3)设 $f(x)=x^2\ln(1+x)$,则 $f^{(n)}(0)=$ ______

解：根据麦克劳林公式

$$f(x)=x^2\ln(1+x)=x^2[x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n-2}x^{n-2}+o(x^{n-2})]$$

$$=x^3-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^5-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n-2}x^n+o(x^n),$$

由麦克劳林展开式的唯一性知，上述展开式中 x^n 的系数 $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$， 从而，有

$\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n-2}$，故有 $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}\dfrac{n!}{n-2}\,(n\geq 3)$.

(4)设 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k\ (k>0)$,则 $f(x)$ 有______个零点.

解： $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e}=\dfrac{e-x}{xe}$, 令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x=e$. 所以当 $0<x<e$ 时， $f'(x)>0$；当 $e<x<+\infty$ 时， $f'(x)<0$.故函数 $f(x)$ 在 $(0,e]$ 单调增加,在 $[e,+\infty)$ 单调减少. 从而 $x=e$ 为函数 $f(x)$ 的最大值点，最大值 $f(e)=k>0$. 又 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, 故曲线 $y=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 与 x 轴有 2 个交点，因此函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 有 2 个零点.

(5) 设 $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=3$,则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=$ ____ .

解：根据麦克劳林公式，有 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)=x+\dfrac{3}{2}x^2+o(x^2)$. 所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=\dfrac{3}{2}$.

(6)设 $\alpha>1$, $f(t)=\alpha^t-\alpha t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的驻点 $t(\alpha)=$_____, 当 $\alpha=$ ____ 时 $t(\alpha)$ 最小,其最小值为____.

解： $f'(t)=\alpha^t\ln\alpha-\alpha$, 令 $\boldsymbol{f'(t)=0}$ 得到驻点 $t(\alpha)=1-\dfrac{\ln\ln\alpha}{\ln\alpha}$.

令 $t'(\alpha)=\dfrac{\ln\ln\alpha-1}{a(\ln\alpha)^2}=0$ 得唯一驻点 $\alpha=e^e$. 当 $\alpha>e^e$ 时， $t'(\alpha)>0$;当 $\alpha<e^e$ 时， $t'(\alpha)<0$.

所以 $\alpha=e^e$ 为极小点也是最小点，最小值为 $t(e^e)=1-\dfrac{1}{e}$. 答案分别为 $1-\dfrac{\ln\ln\alpha}{\ln\alpha}$ ， e^e ， $1-\dfrac{1}{e}$.

(7)设 $f(x)$ 有连续的导数,且 $f(0)=f'(0)=1$.则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}=$ ____.

解：由洛必达法则可得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos xf'(\sin x)}{\frac{f'(x)}{f(x)}}=\dfrac{f'(\sin 0)}{\frac{f'(0)}{f(0)}}=1$.

(8)方程 $|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=0$ 有 ____ 个实根.

解：令 $f(x)=|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x$ ，则 $f(x)$ 为偶函数，故只需讨论 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内的零点个数\.此时, $f(x)=x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{2}}-\cos x$, $f'(x)=\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\sin x$.

所以,当 $0<x<\pi$ 时, $f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调增加,又 $f(0)=-1<0$ ， $f(\pi)>0$ ，

故 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有唯一零点，又当 $x>\pi$ 时，恒有 $f(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(\pi,+\infty)$ 上无零点.

故由偶函数的对称性知，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有两个零点，即原方程有 2 个实根.

3．设 $a_0+\frac{1}{2}a_1+\cdots+\frac{1}{n+1}a_n=0$,证明：方程 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

证：令 $f(x)=a_0x+\frac{1}{2}a_1x^2+\frac{1}{3}a_2x^3+\cdots+\frac{1}{n+1}a_nx^{n+1}$，则 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上满足罗尔定理条件，从而在 $(0,1)$ 内至少有一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$,即方程 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

4．设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续,在 $(1,2)$ 内有二阶导数,又 $f(1)=f(2)=0$, $F(x)=(x-1)^2f(x)$. 证明：在 $(1,2)$ 内至少有一点 ξ,使得 $F''(\xi)=0$.

证：因为 $F(x)$ 在闭区间 $[1,2]$ 上满足罗尔定理条件，从而在 $(1,2)$ 内至少有一点 c_0，使得 $F'(c_0)=0$;又 $F'(x)=2(x-1)f(x)+(x-1)^2f'(x)$，从而有 $F'(1)=0$，所以 $F'(x)$ 在 $[1,c_0]$ 上亦满足罗尔定理条件，故在 $(1,2)$ 内至少有一点 ξ,使得 $F''(\xi)=0$.

5．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f(a)>f(b)$,证明: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)<0$.

证：因为 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上满足拉格朗日定理条件，从而在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$; 又 $f(b)-f(a)<0$，$b-a>0$，从而有 $f'(\xi)<0$.

6．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}$;　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^x$;　(3) $\lim\limits_{x\to0^+}x(\ln x)^n$ (n 为正整数).

解：(1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x^{x-1}}{1-x+\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1-e^{(x-1)\ln x}}{1-x+\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(1-x)\ln x}{1-x+\ln x}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-\ln x+\frac{1-x}{x}}{-1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{-x\ln x+1-x}{1-x}=\lim_{x\to1}(\ln x+2)=2.$$

(2) $\lim_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^x=\lim_{x\to\infty}[1+(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}}]^{x(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)}=e$.

(3) $\lim_{x\to 0^+}x(\ln x)^n=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)^n}{x^{-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{n(\ln x)^{n-1}}{(-1)x^{-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{n(n-1)(\ln x)^{n-2}}{(-1)^2x^{-1}}$

$$=\cdots=\lim_{x\to 0^+}\frac{n!}{(-1)^n x^{-1}}=0$$

7．证明下列不等式：

(1) $2x\arctan x\geq\ln(1+x^2)$；　　(2) 当 $e<a<b<e^2$ 时, $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

证：(1)令 $f(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$，则 $f'(x)=2\arctan x$.

所以当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>0$ 时 $f'(x)>0$，故 $f(0)=0$ 是 $f(x)$ 的最小值，从而有 $f(x)\geq 0$，即有 $2x\arctan x\geq\ln(1+x^2)$.

(2) 令 $f(x)=\ln^2 x$，则 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上满足拉格朗日定理条件，从而有 $\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}=\frac{2\ln\xi}{\xi}$，其中 $\xi\in(a,b)$. 故只需证：当 $\xi\in(a,b)$ 时，有 $\frac{\ln\xi}{\xi}>\frac{2}{e^2}$.

令 $\varphi(\xi)=\frac{\ln\xi}{\xi}$，则 $\varphi'(\xi)=\frac{1-\ln\xi}{\xi^2}$，当 $e<a<\xi<b<e^2$ 时，有 $\varphi'(\xi)=\frac{1-\ln\xi}{\xi^2}<0$，所以 $\varphi(\xi)=\frac{\ln\xi}{\xi}$ 在闭区间 $[e,e^2]$ 上单调减少.

故当 $a<\xi<b$ 时，有 $\varphi(\xi)=\frac{\ln\xi}{\xi}>\varphi(e^2)=\frac{2}{e^2}$，从而，当 $e<a<b<e^2$ 时，有 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

8. 利用 $Taylor$ 公式,求 $f(x)=x^2\sin x$ 在 $x=0$ 处的99阶导数值.

解：　$f(x)=x^2\sin x$ 的麦克劳林公式为：

$$f(x)=x^2\sin x=x^2[x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+o(x^{2n})]$$

$$=x^3-\frac{1}{3!}x^5+\frac{1}{5!}x^7-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+2}).$$

由麦克劳林展开式的惟一性知，上述展开式中 x^{2n+1} 的系数 $a_{2n+1}=\dfrac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}$，即有 $\dfrac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}=(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n-1)!}$， 取 $n=49$，得 $f^{(99)}(0)=98\cdot 99$.

9. 已知 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在 $x=1$ 处有极值 -2,试确定 a 、 b 的值,并求 $f(x)$ 的极值及曲线的凹向与拐点.

解：由题意，有 $f(1)=1+a+b=-2$， $f'(1)=3+2a+b=0$，解得 $a=0$， $b=-3$.从而 $f(x)=x^3-3x$， $f'(x)=3x^2-3$， $f''(x)=6x$，又 $f'(\pm 1)=0$， $f''(\pm 1)=\pm 6$，所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(1)=-2$，极大值为 $f(-1)=2$.

又当 $x<0$ 时， $f''(x)<0$；当 $x>0$ 时， $f''(x)>0$，所以曲线 $y=f(x)$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上是凸的，在 $[0,+\infty)$ 上是凹的，点 $(0,0)$ 是其拐点.

10. 设在 $[0,+\infty)$ 上 $f''(x)<0$，$f(0)=0$，证明：对任意的正数 x_1,x_2，恒有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

证：不妨设 $0<x_1\le x_2$，则 $f(x)$ 在闭区间 $[0,x_1]$ 及 $[x_2,x_1+x_2]$ 上满足拉格朗日定理条件，则

$$f(x_1)-f(0)=f'(\xi_1)\cdot x_1，其中 \xi_1\in(0,x_1)，$$

$$f(x_1+x_2)-f(x_2)=f'(\xi_2)\cdot x_1，其中 \xi_2\in(x_2,x_1+x_2)$$

上述两式相减，并注意到 $f(0)=0$，则有 $f(x_1+x_2)-f(x_2)-f(x_1)=[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)]\cdot x_1$，又在 $[0,+\infty)$ 上 $f''(x)<0$，所以 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少.

故 $[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)]<0$，从而有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

11. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有二阶导数,且 $f(a)>0$， $f'(a)<0$,又当 $x>a$ 时, $f''(x)<0$.证明： $f(x)$ 在区间 $(a,a-\dfrac{f(a)}{f'(a)})$ 内有且仅有一个零点.

证：当 $x>a$ 时， $f''(x)<0$，所以 $f'(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调减少.从而当 $x>a$ 时，有

$f'(x) < f'(a) < 0$，故 $f(x)$ 亦在 $[a,+\infty)$ 上单调减少.又 $f(x)$ 在闭区间 $[a, a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}]$ 上满足拉格朗日定理条件，所以有

$$f\left(a-\frac{f(a)}{f'(a)}\right) = f(a) - f'(\xi)\frac{f(a)}{f'(a)} = \frac{f(a)[f'(a)-f'(\xi)]}{f'(a)}，\text{其中}\ \xi \in (a, a-\frac{f(a)}{f'(a)})，$$

因为 $f'(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调减少，所以 $f'(a) - f'(\xi) > 0$，又 $f(a) > 0$，$f'(a) < 0$，所以 $f\left(a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}\right) < 0$.由零点存在定理，$f(x)$ 在区间 $(a, a-\dfrac{f(a)}{f'(a)})$ 内至少有一个零点; 又 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调减少，从而零点惟一.

(B)

1. 若 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin 3x}{x^3} - \dfrac{f(x)}{x^2}) = 0$,其中 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某个邻域内有连续的二阶导数,求 $f(0)$、$f'(0)$、$f''(0)$;并求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{3}{x^2} - \dfrac{f(x)}{x^2})$.

解：由麦克劳林公式，$xf(x) = f(0)x + f'(0)x^2 + \dfrac{1}{2}f''(0)x^3 + o(x^3)$，

$$\sin 3x = 3x - \frac{1}{3!}(3x)^3 + o(x^4) = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^4)$$

从而 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin 3x}{x^3} - \dfrac{f(x)}{x^2}) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x - xf(x)}{x^3}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{[3-f(0)]x - f'(0)x^2 - \frac{1}{2}[9+f''(0)]x^3 - o(x^3) + o(x^4)}{x^3} = 0，$$

故有 $f(0) = 3$，$f'(0) = 0$，$f''(0) = -9$.

从而 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{3}{x^2} - \dfrac{f(x)}{x^2}) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-f(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-f(0)-f'(0)x-\frac{1}{2}f''(0)x^2 - o(x^2)}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{9}{2}x^2 - o(x^2)}{x^2} = \frac{9}{2}。$$

2.设 $f(x)$ 有 n 阶导数,且 $f^{(k)}(0) = 0\ (k = 0,1,2\cdots n-1)$,又当 $x>0$ 时, $f^{(n)}(x) > 0$.证明：当 $x>0$ 时,有 $f(x) > 0$.

证：由当 $x>0$ 时，$f^{(n)}(x) > 0$ 知，$f^{(n-1)}(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加，则当 $x>0$ 时，有

$f^{(n-1)}(x) > f^{(n-1)}(0) = 0$，故 $f^{(n-2)}(x)$ 亦在 $[0,+\infty)$ 上单调增加，

从而当 $x>0$ 时，有 $f^{(n-2)}(x) > f^{(n-2)}(0) = 0$，依次类推，可得 $f^{(n-3)}(x)$，$f^{(n-4)}(x)$，……，$f'(x)$，$f(x)$ 均在 $[0,+\infty)$ 上单调增加. 因此，当 $x>0$ 时,有 $f(x) > f(0) = 0$.

3. 证明下列不等式：

(1)当 $x \neq 0$ 时, $0 < \dfrac{1}{x}(\arctan e^x - \dfrac{\pi}{4}) < \dfrac{1}{2}$;

(2)设 $0<a<b$,证明：$\dfrac{2a}{a^2+b^2} < \dfrac{\ln b - \ln a}{b-a} < \dfrac{1}{\sqrt{ab}}$;

(3)当 $0<a<b<\pi$ 时, $b\sin b + 2\cos b + \pi b > a\sin a + 2\cos a + \pi a$.

证：(1)令 $f(x) = \arctan e^x$，则 $f(x)$ 在以 0 和 x 为端点的闭区间上满足拉格朗日定理条件，所以有 $\dfrac{1}{x}(\arctan e^x - \arctan e^0) = \dfrac{1}{x}(\arctan e^x - \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{e^\xi}{1+e^{2\xi}}$，其中 ξ 介于 0，x 之间，又 $0 < \dfrac{e^\xi}{1+e^{2\xi}} < \dfrac{1}{2}$，故当 $x \neq 0$ 时，有 $0 < \dfrac{1}{x}(\arctan e^x - \dfrac{\pi}{4}) < \dfrac{1}{2}$.

(2)令 $f(x) = \ln x$，则 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上满足拉格朗日定理条件，从而，存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $\dfrac{\ln b - \ln a}{b-a} = \dfrac{1}{\xi} > \dfrac{1}{b} > \dfrac{2a}{a^2+b^2}$.令 $g(x) = \sqrt{x} - \dfrac{a}{\sqrt{x}} - \sqrt{a}(\ln x - \ln a)$，则

$$g'(x) = \frac{x + a - 2\sqrt{x}\sqrt{a}}{2x\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{2x\sqrt{x}} > 0,\quad a<x<b.$$

故 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，则当 $a<x<b$ 时，有 $g(b) > g(a) = 0$，即有 $\dfrac{\ln b - \ln a}{b-a} < \dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.

综上所述，当 $0<a<b$ 时，$\dfrac{2a}{a^2+b^2} < \dfrac{\ln b - \ln a}{b-a} < \dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.

(3) 令 $f(x) = x\sin x + 2\cos x + \pi x$，则 $f'(x) = x\cos x - \sin x + \pi$，$f''(x) = -x\sin x$，当 $0<x<\pi$ 时，$f''(x) = -x\sin x < 0$，所以 $f'(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调减少.从而当 $0<x<\pi$ 时，$f'(x) > f'(\pi) = 0$，故 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调增加.

所以，当 $0<a<b<\pi$ 时，有 $f(b) > f(a)$，即 $b\sin b + 2\cos b + \pi b > a\sin a + 2\cos a + \pi a$.

4. 设 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=k$,其中 n 为正整数, $k\neq 0$.对 n 讨论 $f(x_0)$ 是否为 $f(x)$ 的极值.

解：因为 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=k\neq 0$，由保号性定理，存在点 x_0 的某个去心邻域 $\overset{o}{U}(x_0,\delta)$，使得当 $x\in\overset{o}{U}(x_0,\delta)$ 时，$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}$ 与 k 同号.

若 n 为奇数，则 $f(x)-f(x_0)$ 在 $\overset{o}{U}(x_0,\delta)$ 内点 x_0 的两侧异号，故 $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值;

若 n 为偶数，则 $f(x)-f(x_0)$ 在 $\overset{o}{U}(x_0,\delta)$ 内点 x_0 的两侧同号，从而 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极值，且若 $k>0$，则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值；若 $k<0$，则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

5. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,又 $f(0)=0$， $f(1)=1$. 证明：在 $(0,1)$ 内至少有一点 c ,使得 $f'(c)=\dfrac{f(c)}{1-c}$.

证：令 $\varphi(x)=(x-1)f(x)$，则 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上满足罗尔定理条件，故在 $(0,1)$ 内至少有一点 c，使得 $\varphi'(c)=0$. 又 $\varphi'(x)=(x-1)f'(x)+f(x)$，由 $\varphi'(c)=0$ 得， $f'(c)=\dfrac{f(c)}{1-c}$.

6. 设 $f(x)=nx(1-x)^n$ (n 为正整数),试求:

(1) $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值 $M(n)$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}M(n)$.

解：(1) 因为 $f'(x)=n(1-x)^n-n^2x(1-x)^{n-1}=n(1-x)^{n-1}(1-x-nx)$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有惟一可能极值点 $x=\dfrac{1}{n+1}$；又 $f(1)=f(0)=0$，从而 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值 $M(n)=f(\dfrac{1}{n+1})=(\dfrac{n}{n+1})^{n+1}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}M(n)=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n}{n+1})^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{n+1})^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}[(1-\dfrac{1}{n+1})^{-(n+1)}]^{-1}=e^{-1}$.

7. 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导,且 $g'(x)\neq 0$,证明：在 (a,b) 内至少有一点 ξ ,使得 $\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

证：令 $\varphi(x)=[f(a)-f(x)][g(x)-g(b)]$，则 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上满足罗尔定理条件，故

在 (a,b) 内存在 ξ，使得 $\varphi'(\xi)=0$；又 $\varphi'(x)=g'(x)[f(a)-f(x)]-f'(x)[g(x)-g(b)]$，由 $\varphi'(\xi)=0$，得 $\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内有二阶导数,且 $f(a)=f(b)=0$, $f(c)>0(a<c<b)$. 证明：在 (a,b) 内至少有一点 ξ,使得 $f''(\xi)<0$.

证：因为 $f(x)$ 在闭区间 $[a,c]$ 及 $[c,b]$ 上满足拉格朗日定理条件，故存在 $\xi_1\in(a,c)$ 及 $\xi_2\in(c,b)$，使得 $f'(\xi_1)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}=\dfrac{f(c)}{c-a}$， $f'(\xi_2)=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}=-\dfrac{f(c)}{b-c}$；又 $f'(x)$ 在闭区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上亦满足拉格朗日定理条件，故存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得

$$\backslash\ f''(\xi)=\frac{f'(\xi_1)-f'(\xi_2)}{\xi_1-\xi_2}=\frac{1}{\xi_1-\xi_2}[\frac{f(c)}{c-a}+\frac{f(c)}{b-c}]=\frac{f(c)}{\xi_1-\xi_2}\cdot\frac{b-a}{(c-a)(b-c)}$$

由 $a<\xi_1<c<\xi_2<b$ 及 $f(c)>0$，得 $f''(\xi)<0$.

9. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f'(x)\neq 0$.证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$,使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$.

证：因为 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上满足拉格朗日定理条件，故存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

令 $g(x)=e^x$，则 $f(x)$， $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上满足柯西定理条件，故存在 $\eta\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\text{，即 } f'(\eta)=\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}\cdot e^{\eta}$$

因此， $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$.

10. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=f(1)=0$, $f(\frac{1}{2})=1$. 证明：

(1)存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$,使得 $f(\eta)=\eta$;

(2)对任一实数 λ,必存在 $\xi\in(0,\eta)$,使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

证：(1) 令 $\varphi(x)=f(x)-x$，则 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[\frac{1}{2},1]$ 上连续，且 $\varphi(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$，$\varphi(1)=f(1)-1=-1<0$.

由零点存在定理，存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$,使得 $\varphi(\eta)=f(\eta)-\eta=0$，即有 $f(\eta)=\eta$.。

(2) 令 $F(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$，则 $F(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上满足罗尔定理条件，故在 $(0,\eta)$ 内存在 ξ，使得 $F'(\xi)=0$；又 $F'(x)=e^{-\lambda x}\{[f'(x)-1]-\lambda[f(x)-x]\}$，由 $F'(\xi)=0$，得

$$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1.$$

11. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 证明：

(1)存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f(\xi)=1-\xi$；

(2)存在两个不同的点 $c_1,c_2\in(0,1)$,使得 $f'(c_1)f'(c_2)=1$.

证：(1) 令 $\varphi(x)=f(x)+x-1$，则 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，且 $\varphi(0)=f(0)-1=-1<0$，$\varphi(1)=f(1)=1>0$. 由零点存在定理，存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $\varphi(\xi)=0$，即有 $f(\xi)=1-\xi$.

(2) 因为 $f(x)$ 在 $[0,\xi]$ 及 $[\xi,1]$ 上满足拉格朗日定理条件，故在 $(0,\xi)$ 及 $(\xi,1)$ 内分别存在两点 c_1 , c_2 使得 $f'(c_1)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi}=\frac{1-\xi}{\xi}$，$f'(c_2)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{\xi}{1-\xi}$,从而,有 $f'(c_1)f'(c_2)=1$。

(C)

1. 证明(1)周长一定的矩形中,正方形面积最大;　(2)面积一定的矩形中,正方形周长最小.

证： (1) 设矩形的长为 x，宽为 y，其面积 $A=xy$. 由题意，设 $x+y=a$，所以 $A=x(a-x)$.

令 $\frac{dA}{dx}=a-2x=0$，得唯一可能极值点 $x=\frac{a}{2}$，又 $\frac{d^2A}{dx^2}=-2<0$，所以 $x=\frac{a}{2}$ 是函数 $A(x)$ 的最大值点，此时有 $x=y=\frac{a}{2}$. 从而，周长一定的矩形中，正方形面积最大.

(2) 设矩形的长为 x，宽为 y，其周长 $l=2(x+y)$. 由题意，设 $xy=a$，所以 $l=2(x+\frac{a}{x})$.

令 $\frac{dl}{dx}=2(1-\frac{a}{x^2})=0$，得唯一可能极值点 $x=\sqrt{a}$，又 $\frac{d^2l}{dx^2}=\frac{4a}{x^3}>0$，所以 $x=\sqrt{a}$ 是函数 $l(x)$

的最小值点，此时有 $x=y=\sqrt{a}$. 从而，面积一定的矩形中,正方形周长最小.

2. 设有底为等边三角形的直柱体,体积为V,要使其表面积最小,问底边的长应为多少？

解:设直柱体底面等边三角形的边长为x,高为$\frac{\sqrt{3}}{2}x$,又设直柱体的高为h,则有$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2h=V$，

即$h=\frac{4V}{\sqrt{3}x^2}$.又设直柱体表面积为$A(x)$，则

$$A(x)=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+3x\cdot\frac{4V}{\sqrt{3}x^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{4\sqrt{3}V}{x}.\ A'(x)=\sqrt{3}x-\frac{4\sqrt{3}V}{x^2}=\sqrt{3}\cdot\frac{x^3-4V}{x^2}.$$

令 $A'(x)=0$ 得惟一驻点 $x=\sqrt[3]{4V}$. 因此，当底边长为$\sqrt[3]{4V}$ 时，直柱体的表面积最小.

3. 试求内接于半径为R的球的体积最大的圆柱体的高.

解：设圆柱体的高为h，底半径为r，则有$r^2=R^2-(\frac{h}{2})^2$，$(0<h<2R)$.由题意，圆柱体的

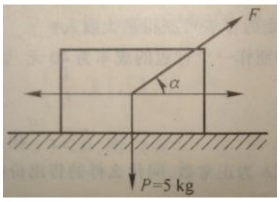
体积$V(h)=\pi r^2h=\pi h(R^2-\frac{h^2}{4})=\pi hR^2-\frac{\pi h^3}{4}$.

令$V'(h)=\pi R^2-\frac{3\pi h^2}{4}=0$，得惟一驻点$h=\frac{2R}{\sqrt{3}}$. 因此，当圆柱体的高为$\frac{2R}{\sqrt{2}}$时，内接于半径

为R的球的圆柱体体积最大.

4. 如图,一质量为5kg 的物体，置于水平地面上,受力$\boldsymbol{F}$ 的作用而移动．设摩擦系数

$\mu=0.25$,问力$\boldsymbol{F}$与水平线的夹角α为多少时最省力?



解：由题意，$F\cos\alpha=\mu(P-F\sin\alpha)$，所以

$$F=\frac{\mu P}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}，(0\le\alpha<\frac{\pi}{2}).$$

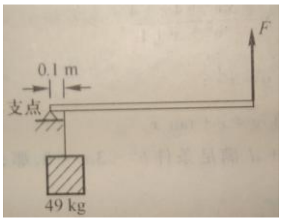
由于上式分子为常数，要求F 的最小值， 只需求分母$u=\cos\alpha+\mu\sin\alpha$的最大值.

令 $u'=-\sin\alpha+\mu\cos\alpha=0$，解得惟一驻点 $\tan\alpha=\mu$， $\alpha=\arctan\mu$；又$\mu=0.25$，所以，

当 $\alpha=\arctan 0.25$时最省力.

5.如图，一线密度为$5kg/m$杠杆，支点在它的一端。在距支点$0.1m$处挂有一质量为$49\,\text{kg}$

的物体. 加力于杠杆的另一端使杠杆保持水平. 问杆长为多少时最省力?



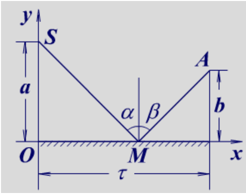
解：设杠杆的长为 x 米，则杆重为 $5x$ 公斤.由力偶矩原理得，

$xF = 49\times\frac{1}{10}+5x\times\frac{x}{2}=\frac{49}{10}+\frac{5}{2}x^2$，$(x>0)$.

则 $F=\frac{49}{10x}+\frac{5}{2}x$，令 $F'=-\frac{49}{10x^2}+\frac{5}{2}=0$，得惟一驻点 $x=\frac{7}{5}$.

所以，要使杠杆保持水平，杆长为1.4米最省力.

6.如图，位于点 S 的光源射到平面镜 Ox 上哪一点再反射到 点 A，光线所走的路径最短?



解：建立如图坐标系，设入射点为 M，令 $|OM|=x$，

光线从点 S 到点 A 的路径为

$s=|SM|+|MA| =\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(\tau-x)^2}$，$(0<x<\tau)$.

令 $\frac{ds}{dx}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{\tau-x}{\sqrt{b^2+(\tau-x)^2}}=0$，解得惟一驻点

$x=\frac{a\tau}{a+b}$. 即入射点 M 坐标取 $\frac{a\tau}{a+b}$ 时，光线所走的路径最短.

此时, $\tan\alpha=\frac{x}{a}$，$\tan\beta=\frac{\tau-x}{b}=\frac{\tau}{a+b}=\frac{x}{a}$，即有 $\tan\alpha=\tan\beta$，即入射角 α 等于反射角 β.