24-25-1 学期高等数学 A1 期末练习卷参考答案

一．选择题:

1	2	3	4	5	6	7
C	B	A	D	C	C	A
8	9	10	11	12	13	14
D	B	B	A	C	A	A
15	16	17	18	19	20	21
C	D	B	D	C	A	D

二．填空题

1	2	3	4
$\frac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}dx$	$\frac{\ln x}{x}+c$	$\frac{\pi}{2}$	$\sqrt{\ln(1-x)}, x\le 0.$
5	6	7	8
$2x^2+e^{3x}+1$	12	$2e^{2x}$	$C_1+C_2x+(C_3+C_4x)e^x$
9	10	11	12
$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$	$2e-2$	$2x\sin x^4dx$	$2x\cos 2x-\sin 2x+C$
13	14	15	16
$y-\ln 2=2(x-\frac{\pi}{4})$	$\frac{x-\arctan x+C}{x^2}$	[-1,3]	1/2
17	18	19	20
$\frac{\pi}{2}$	$4f'(1)$	e^{x^2}	$\frac{1}{2}e^{x^2+1}+C$
21	22	23	24
e^2			

三．计算题

1. 解：等式两边求微分，得 $dx-2ydy+\cos(xy)(ydx+xdy)=0$

   解得 $dy=\dfrac{1+y\cos(xy)}{2y-x\cos(xy)}dx$

2. 解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sqrt{1+x^4}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+x^4}=\mathbf{1}$

3. 解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3a\sin^2 t\cos t}{3a(-\sin t)\cos^2 t}=-\tan t$

   $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{-\sec^2 t}{3a(-\sin t)\cos^2 t}=\frac{\sec^4 t}{3a\sin t}$$

4. $\displaystyle\int\frac{(1+\ln x)^{2021}}{x}dx=\int(1+\ln x)^{2021}d(1+\ln x)=\frac{(1+\ln x)^{2022}}{2022}+C$

5. 解：1）令 $x=\tan t$

   $$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec^2 t}{\tan^2 t\sec t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin^2 t}d(\sin t)=-\frac{1}{\sin t}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

   $$=\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

   2）令 $\boldsymbol{t=\dfrac{1}{x}}$，$\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$

   $$=-\int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt=-(1+t^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

6. 解：$\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx=-\frac{1}{a}e^{-ax}\Big|_0^{+\infty}=-\frac{1}{a}\lim_{t\to+\infty}e^{-ax}\Big|_0^{t}=-\frac{1}{a}\lim_{t\to+\infty}(e^{-at}-1)$

   当 $a>0$ 时反常积分收敛于 $\dfrac{1}{a}$；$a\le 0$，反常积分发散 .

7. 解：**令** $\dfrac{y}{x}=u$ **，** 则 $u+x\dfrac{du}{dx}=u+\dfrac{1}{u}$，即 $x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{u}$

   分离变量 $udu=\dfrac{dx}{x}$，两边积分得 $\dfrac{1}{2}u^2=\ln|x|+C$

   即 $u^2=\ln x^2+C$，代回变量得 $\left(\dfrac{y}{x}\right)^2=\ln x^2+C$

   故原方程的通解为 $y^2=x^2(\ln x^2+C)$，将 $y|_{x=1}=2$ 代入求得 $C=4$

所求特解为 $y^2 = x^2(\ln x^2 + 4)$

8. 解：等式两边同时对 x 求导数，得 $3x^2 + 3y^2 y' = e^{x+y}(1+y')$

解得 $$y' = -\frac{e^{x+y} - 3x^2}{e^{x+y} - 3y^2}$$

9. 解：原式 $= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(2-\cos x)}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}}$

10. 解：原式 $= \int(\cos^2 x - 1)d\cos x = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$

11. 解：原式 $= \frac{1}{2}\int_1^4 \ln x d(x^2) = \frac{1}{2}x^2 \ln x|_1^4 - \frac{1}{2}\int_1^4 x dx = 8\ln 4 - \frac{15}{4}$

12. 解：$f''(x) = (x^2 - 1)e^x$

若 $x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，$f''(x) > 0$，若 $x \in (-1,1)$，$f''(x) < 0$

所以凹区间 $(-\infty,-1),(1,+\infty)$ ，凸区间 $(-1,1)$，拐点 $(-1,10e^{-1}),(1,2e)$

13. 解：分离变量并取积分，$\int \frac{1}{y}dy = -\int \frac{1}{x^2+x}dx$

得到通解 $$y = C(1+\frac{1}{x})$$

代入初始条件得 $$y = 1 + \frac{1}{x}$$

14. 解：原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-x}{x\ln(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-x}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x}{(x+1)}}{2x} = -\frac{1}{2}$$

15. 解：方程两边对 x 求导，得 $y' = -e^y - xe^y y'$　　所以 $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{e^y}{1+xe^y}$

因为 $x = 0$ 时，$y = 1$；$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = -\left.\frac{e^y}{1+xe^y}\right|_{x=0} = -e$

16. 解：$f'(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x}$ ，$f''(x) = -4e^{-2x} + 4xe^{-2x}$

令 $f''(x) = 0$ 得 $x = 1$，当 $x < 1$ 时，$f''(x) < 0$，当 $x > 1$ 时，$f''(x) > 0$，

凸区间：$(-\infty, 1)$，凹区间：$(1,+\infty)$；　　拐点为 $(1, e^{-2})$

17. 解：原式$=\int xd\sin x=x\sin x-\int \sin xdx=x\sin x+\cos x+C$

18. 解：$\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{x}{1+x^2}dx+\int_{1}^{2}(e^x+1)dx=0+[e^x+x]_1^2=e^2-e+1$

19. 解：$P(x)=\frac{2}{x},Q(x)=\ln x$

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$$

$$=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left(\int e^{\int\frac{2}{x}dx}\ln xdx+C\right)=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x+Cx^{-2}$$

由 $y(1)=-\frac{1}{9}$，得$C=0$，所以满足初始条件的解为 $y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x$

四．应用题

1. 解：由 $\begin{cases} y=2x^2 \\ y-x=1 \end{cases}$ 得交点$(1,2)$，$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，（舍去）

选 x 为积分变量，$x\in[0,1]$，x 处的截面面积

$$A(x)=\pi[(x+1)^2-4x^4]$$

体积 $V=\pi\int_0^1[(x+1)^2-4x^4]dx=\pi[\frac{1}{3}(x+1)^3|_0^1-\frac{4}{5}x^5|_0^1]=(\frac{7}{3}-\frac{4}{5})\pi=\frac{23}{15}\pi$

2. 解：$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-1<0$

所以 $f(x)$ 的单调减区间为$(0,+\infty)$，

当$0<x<1$时，$\ln(1+\sqrt{2})-1<\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x<0$，

所以$\int_0^1[\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x]dx$ 的取值范围为$[\ln(1+\sqrt{2})-1,0]$。

3. 解：取积分变量 $\boldsymbol{y\in[-3,1]}$

面积微元 $\boldsymbol{dA=(-2y-y^2+3)dy}$

面积 $\boldsymbol{A=\int_{-3}^{1}(-2y-y^2+3)dy=\frac{32}{3}}$

4. 解：取积分变量 $\boldsymbol{x\in[0,1]}$，

截面面积 $\boldsymbol{A(x)=\pi(x-x^4)}$

所以旋转体体积 $\boldsymbol{V=\pi\int_0^1(x-x^4)dx=\frac{3}{10}\pi}$

5. 解：（1）易得两条曲线的交点为(0,0)，(1,1)，

$$S=\int_0^1(x-x^2)dx=(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3)|_0^1=\frac{1}{6}$$

所求体积 $V_x=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot1^2\cdot1-\pi\int_0^1(x^2)^2dx=\frac{\pi}{3}-\pi(\frac{1}{5}x^5)|_0^1=\frac{2}{15}\pi$

6. 解： $t=0$时$x=2$，$y=1$ $y'=\frac{1-\sin t}{1+\cos t}$，$y'|_{t=0}=\frac{1}{2}$

切线方程：$y-1=\frac{1}{2}(x-2)$ 即 $x-2y=0$

法线方程：$y-1=-2(x-2)$ 即 $2x+y-5=0$

五．证明题

1. 证明 令 $F(x)=(x^2+1)f(x)$，$F(x)$在$[0,1]$上连续，$(0,1)$内可导

$F(0)=f(0),F(1)=2f(1)$， $\therefore F(0)=F(1)$

由罗尔中值定理可知，$\exists\xi\in(0,1)$，使得$F'(\xi)=0$，

即$(\xi^2+1)f'(\xi)+2\xi f(\xi)=0$.

2. 证明： 令 $\boldsymbol{f(x)=\arcsin x+\arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}}$， $\boldsymbol{0<x\le1}$

因为 $\boldsymbol{f'(x)\equiv0}$， 故 $\boldsymbol{f(x)=C}$

代入 $\boldsymbol{x=1}$，得 $\boldsymbol{f(1)=\frac{\pi}{2}=C}$， 因此定理得证.

3. 证明： 构造辅助函数 $\varphi(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\dots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$

显然$\varphi(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,$\varphi(0)=\varphi(1)=0$.

即$\varphi(x)$满足罗尔定理的条件.

$\therefore$在$(0,1)$内至少存在一点ξ,使 $\varphi'(\xi)=a_0+a_1\xi+\dots+a_n\xi^n=0$.

即 多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ 在$(0,1)$内至少有一个零点.