第九章 重积分

习题 9.1 二重积分的概念与性质

(A)

1．用二重积分表示下列立体的体积．

(1) 上半球体：$\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge 0\right\}$；

(2) 由抛物面 $z=2-x^2-y^2$，柱面 $x^2+y^2=1$ 及 xOy 平面所围成的空间立体．

解：(1)所求的体积 $V=\iint\limits_{\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2\}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；(2) 所求的体积 $V=\iint\limits_{\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}}\left(2-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$．

2．试用二重积分表示极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\mathrm{e}^{\frac{i^2+j^2}{n^2}}$ ．

解：根据二重积分的定义可得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\mathrm{e}^{\frac{i^2+j^2}{n^2}}=\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]}\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$．

3. 根据二重积分的几何意义，求积分 $\iint\limits_D(b-\sqrt{x^2+y^2})d\sigma$ 的值，其中 D= $\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le a^2\right\}$，两个实常数 a 和 b 满足 b>a>0.

解：该积分 I 的几何意义为一几何形体的体积，其下半部分为高 b-a 的圆柱体，上半部分为高 a 的圆锥体，两部分交线为 $\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ z=b-a\end{cases}$，所以 I=$\pi a^2(b-a)+\dfrac{1}{3}\pi a^3=\dfrac{\pi a^3}{3}(3b-2a)$.

3. 利用二重积分的性质比较下列积分的大小.

（1）$\iint\limits_D(x+y)^2d\sigma$ 和 $\iint\limits_D(x+y)^3d\sigma$，其中 D 是 x 轴与 y 轴与直线 $x+y=1$ 所围成的闭区域；

（2）$\iint\limits_D\sin^2(x+y)d\sigma$ 和 $\iint\limits_D(x+y)^2d\sigma$，其中 D 是任一平面有界闭区域；

（3）$\iint\limits_D e^{xy}d\sigma$ 和 $\iint\limits_D e^{2xy}d\sigma$，其中 D=$\left\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 0, 0\le y\le 1\right\}$.

解：（1）在 D 中，$0 \le x+y \le 1$, 所以 $(x+y)^2 \ge (x+y)^3$　所以　“>”

（2）因为 $|\sin(x+y)| < |x+y|$　所以　$\sin^2(x+y) < (x+y)^2$　所以　“<”

（3）在 D 中，$-1 \le xy \le 0$　所以　$xy > 2xy$　所以　$e^{xy} > e^{2xy}$　所以　“>”

4. 利用二重积分的性质估计下列二重积分的值.

（1）　$\iint\limits_D xy(x+y)d\sigma$，其中 D=$\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$；

（2）　$\iint\limits_D (x^2+y^2+9)d\sigma$，其中 D=$\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 4\}$；

（3）　$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}d\sigma$，其中 D=$\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$；

（4）$\iint\limits_D \frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}d\sigma$，其中 D=$\{(x,y) \mid |x|+|y| \le 10\}$.

解：（1）在 D 中，$xy(x+y) \in [0,2]$, 而 D 的面积 $\sigma = 1$，所以 $\iint\limits_D xy(x+y)d\sigma \in [0,2]$；

（2）在 D 中，$x^2+y^2 \in [0,4]$，所以　$x^2+y^2+9 \in [9,13]$，而 $\sigma = 4\pi$；

所以 $\iint\limits_D (x^2+y^2+9)d\sigma \in [9\sigma, 13\sigma] = [36\pi, 52\pi]$.

（3）在 D 中，$x+y \in [0,3]$　所以 $\sqrt{x^2+y^2+2xy+16} = \sqrt{(x+y)^2+16} \in [4,5]$；

而 $\sigma = 2$，所以　$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}d\sigma \in [\frac{2}{5}, \frac{2}{4}] = [0.4, 0.5]$.

(4) 在 D 中，$100+\cos^2 x+\cos^2 y \in [100,102]$　，而 $\sigma = (10\sqrt{2})^2 = 200$；

所以 $\iint\limits_D \frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y} d\sigma \in [\frac{\sigma}{102}, \frac{\sigma}{100}] = [\frac{100}{51}, 2]$.

5. 利用二重积分的性质计算 $\iint\limits_D (3-x^2 \sin xy) d\sigma$，其中 D=$\left\{(x,y) \mid |x|+|y| \le 10\right\}$.

解： $I=\iint\limits_D 3d\sigma - \iint\limits_D x^2 \sin xy d\sigma$，由于 D 关于 X,Y 轴对称，且 $x^2 \sin xy$ 是关于 x,y 的奇函数

所以 $\iint\limits_D x^2 \sin xy d\sigma = 0$，从而 $I=\iint\limits_D 3d\sigma = 3\sigma = 600$.

6. 利用二重积分的性质判定 $\iint\limits_D \ln(x^2+y^2) d\sigma$ 的符号，其中 D=$\left\{(x,y) \mid r \le |x|+|y| \le 1\right\}$.

解：D 被包含在单位圆中，所以 $x^2+y^2<1$，所以 $\ln(x^2+y^2)<0$，所以为负.

(B)

1．设 $f(x,y)$ 为连续函数，求极限 $\lim\limits_{r\to 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{\left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le r^2\right\}} f(x,y) \mathrm{d}\sigma$.

解：根据积分中值定理，存在一点 (ξ,η) 满足：

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{\left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le r^2\right\}} f(x,y) \mathrm{d}\sigma = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\pi r^2} f(\xi,\eta) \cdot \pi r^2 = \lim_{r\to 0^+} f(\xi,\eta);$$

显然当 $r \to 0_+$ 时，有 $(\xi,\eta) \to (0,0)$. 因此，$\lim\limits_{r\to 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{\left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le r^2\right\}} f(x,y) \mathrm{d}\sigma = f(0,0)$.

2．把二重积分 $\iint\limits_D xy \mathrm{d}\sigma$ 化为积分和的极限，并计算这个积分值，其中 $D=[0,1]\times[0,1]$，用直线网 $x=\frac{i}{n}, y=\frac{j}{n}$，$(i,j=1,2,\cdots,n-1)$ 分割这个正方形为许多小正方形，每个小正方形取其右上顶点作为其节点.

解：$\iint\limits_D xy \mathrm{d}\sigma = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4} \sum\limits_{i=1}^{n} i \cdot \sum\limits_{j=1}^{n} j = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \frac{1}{4}$.

3．若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上非负连续函数，且在 D 上 $f(x,y)$ 不恒为 0，则 $\iint\limits_D f(x,y) \mathrm{d}\sigma > 0$.

证明：由函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上非负连续函数，且在 D 上 $f(x,y)$ 不恒为 0 知，存在点 $P_0(x_0,y_0)\in D$，使得 $f(P_0)>0$.再次根据函数的连续性和极限的局部保号性得：$\exists\delta>0$，对 $\forall P\in D_1=U(P_0,\delta)\cap D$，有 $f(P)\geq\frac{1}{2}f(P_0)>0$.设 S_{D_1} 表示区域 D_1 的面积.由 $f(x,y)$ 的非负性和积分区域的可分性有

$$\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D-D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma\geq\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma\geq\frac{1}{2}f(P_0)S_{D_1}>0 .$$

4．若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，且在 D 内任一子区域 D' 上有 $\iint\limits_{D'}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0$，则在 D 上 $f(x,y)=0$.

证明：假设存在点 $P_0(x_0,y_0)\in D$，使得 $f(P_0)\neq0$.不妨设 $f(P_0)>0$. 根据函数的连续性和极限的局部保号性，$\exists\delta>0$，对 $\forall P\in D_1=U(P_0,\delta)\cap D$，有 $f(P)\geq\frac{1}{2}f(P_0)>0$. 根据上题的证明知存在区域 D_1 使得 $\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma>0$，这个与题目的已知条件在 D 内任一子区域 D' 上有 $\iint\limits_{D'}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0$ 矛盾.

习题 9.2　二重积分的计算

(A)

1．设 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续，试将二重积分 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 化为直角坐标系下的二次积分（两种顺序都要），其中 D 由

（1）$x=\sqrt{R^2-y^2}$ 与 y 轴所围成的区域；（2）不等式 $x^2+y^2\leq1, x+y\geq1$ 所围成的区域；

（3）不等式 $y\leq x, y\geq0, x^2+y^2\leq1$ 所围成的区域；（4）$x+y=1$、$x=1$ 及 $y=1$ 所围成的区域.

解：（1）$I=\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^R \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-R}^R \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$；

（2）$I=\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$；

（3）$I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$；

（4）$I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{1-x}^1 f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{1-y}^1 f(x,y)\mathrm{d}x$.

2．交换下列积分顺序.

（1）$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$；　　（2）$\int_0^3 \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$；

（3）$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{\arctan x}^{\frac{\pi}{4}} f(x,y)\mathrm{d}y$；　　（4）$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^3 \mathrm{d}y\int_0^{3-y} f(x,y)\mathrm{d}x$；

（5）$\int_0^2 \mathrm{d}y\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x$；　　（6）$\int_1^e \mathrm{d}x\int_0^{\ln x} f(x,y)\mathrm{d}y$.

解：（1）$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$；

（2）$\int_0^3 \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-3}^3 \mathrm{d}y\int_0^{-\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$；

（3）$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{\arctan x}^{\frac{\pi}{4}} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}y\int_0^{\tan y} f(x,y)\mathrm{d}x$；

（4）$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^3 \mathrm{d}y\int_0^{3-y} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x,y)\mathrm{d}y$；

（5）$\int_0^2 \mathrm{d}y\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^4 \mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y$；

（6）$\int_1^e \mathrm{d}x\int_0^{\ln x} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}} f(x,y)\mathrm{d}x$.

3. 选择适当的坐标系，计算下列二重积分。

（1）$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}d\sigma$，其中 D 由 $x=2, y=x, xy=1$ 所围成；

（2）$\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma$，其中 D 由 $y=x, y=x+a, y=a, y=3a$ 所围成；

（3）$\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$，其中 D=$\left\{(x,y)\,|\,\pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2\right\}$；

（4）$\iint\limits_D (x+y)d\sigma$，其中 D=$\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \le x+y\right\}$；

（5）$\iint\limits_D f^{'}(x^2+y^2)d\sigma$，其中 D=$\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \le R^2\right\}$；

（6）$\iint\limits_D (x^2+y^2-y)d\sigma$，其中 D 由直线 $y=x, y=\frac{x}{2}, x=2$ 所围成；

（7）$\iint\limits_D \sqrt{x}d\sigma$，其中 D=$\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \le x\right\}$；

（8）$\iint\limits_D x^3y^2d\sigma$，其中 D=$\left\{(x,y)\,|\,0 \le x \le 1, -x \le y \le x\right\}$ ；

（9）$\iint\limits_D \frac{4y}{x^2+1}d\sigma$，其中 D=$\left\{(x,y)\,|\,1 \le x \le 2, 0 \le y \le 2x\right\}$ 。

（10）$\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}d\sigma$，其中 D=$\left\{(x,y)\,|\,1 \le y \le 2, y \le x \le y^3\right\}$ 。

（11）$\iint\limits_D e^{y^2}d\sigma$，其中 D=$\left\{(x,y)\,|\,0 \le y \le 1, 0 \le x \le y\right\}$ 。

（12）$\iint\limits_D (2x-y)d\sigma$，其中 D 由以原点为中心 2 位半径的圆周所围成。

（13）$\iint\limits_D 2xyd\sigma$，其中 D 是由 $(0,0),(1,2),(0,3)$ 为顶点的三角形。

（14）$\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma$，其中 D=$\left\{(x,y)\,|\,|x| \le 1, |y| \le 1\right\}$。

（15）$\iint\limits_D x\cos(x+y)d\sigma$，其中 D 是由 $(0,0),(\pi,0),(\pi,\pi)$ 为顶点的三角形。

（16）$\iint\limits_D x^2y^4d\sigma$，其中 D=$\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \le 1\right\}$。

（17）$\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)d\sigma$，其中 D 由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的第一象限内的区域。

（18）$\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}d\sigma$，其中 D 由圆周 $x^2+y^2=4$， $x^2+y^2=1$ 及直线 $y=0, y=x$ 所围成的第一象限内的区域。

（19）$\iint\limits_D \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}d\sigma$，其中 D 由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的第一象限内的区域。

（20）$\iint\limits_D x\sqrt{y}d\sigma$，其中 D 由抛物线 $y=x^2, y=\sqrt{x}$ 所围成的区域。

（21）$\iint\limits_D xy^2 d\sigma$，其中 D 由圆周 $x^2+y^2=4$ 及 Y 轴所围成的右半区域。

（22）$\iint\limits_D e^{x+y}d\sigma$，其中 D 是由 $|x|+|y|\le 1$ 所围成的区域。

解：（1） $I=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\dfrac{x^2}{y^2}dy=\int_1^2 x^2(x-\dfrac{1}{x})dx=\dfrac{9}{4}.$

（2）$I=\int_a^{3a}dy\int_{y-a}^{y}(x^2+y^2)dx=\int_a^{3a}(2ay^2-a^2y+\dfrac{a^3}{3})dy=14a^3.$

（注： 该积分若按照先 x 后 y 顺序则需要分成三块，非常繁琐）

（3）用极坐标： 设$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ 则 D=$\left\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le 2\pi,\pi\le r\le 2\pi\right\}$

所以 $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_\pi^{2\pi}\sin r\bullet rdr=-2\pi\int_\pi^{2\pi}rd\cos r=-2\pi r\cos r\big|_\pi^{2\pi}+2\pi\int_\pi^{2\pi}\cos rdr=-6\pi^2.$

（4）D 转化为：$\left\{(x,y)\,|\,(x-\dfrac{1}{2})^2+(y-\dfrac{1}{2})^2\le\dfrac{1}{2}\right\}$，画图，求交点

$$I=\int_{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}dx\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{2}-(x-\frac{1}{2})^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}-(x-\frac{1}{2})^2}}(x+y)dy=\ldots\quad\text{（非常繁琐）}$$

用极坐标： 设$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ 则 D=$\left\{(r,\theta)\,|\,-\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{3}{4}\pi,0\le r\le\sin\theta+\cos\theta\right\}$（关键!）

则 $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_{0.}^{\sin\theta+\cos\theta}r(\sin\theta+\cos\theta)\bullet rdr=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\dfrac{1}{3}(\sin\theta+\cos\theta)^4d\theta=\dfrac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin^4(\theta+\dfrac{\pi}{4})d\theta$

$=\dfrac{4}{3}\int_0^\pi\sin^4\alpha d\alpha=\dfrac{4}{3}\dfrac{3\pi}{8}=\dfrac{\pi}{2}$

（5）用极坐标，设$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ 则 D=$\left\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le 2\pi,0\le r\le R\right\}$

所以 $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R f'(r^2)\bullet rdr=\pi\int_0^R f'(r^2)d(r^2)$ 令 $t=r^2$

则 $I=\pi\int_0^{R^2}f'(t)dt=\pi f(t)\big|_0^{R^2}=\pi[f(R^2)-f(0)].$

（6）$I=\int_0^2 dx\int_{\frac{x}{2}}^{x}(x^2+y^2-y)dx=\int_0^2(\frac{x^3}{2}+\frac{1}{3}\frac{7}{8}x^3-\frac{1}{2}\frac{3}{4}x^2)dx=\int_0^2(\frac{19x^3}{24}-\frac{3}{8}x^2)dx=\frac{13}{6}$

（7） 设$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ 则 D=$\left\{(r,\theta)\mid-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le r\le\cos\theta\right\}$

则 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{0.}^{\cos\theta}\sqrt{r\cos\theta}\bullet rdr=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{\cos\theta}\frac{2}{5}r^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{\cos\theta})d\theta=\frac{2}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta$

$=\frac{4}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)d\sin\theta=\frac{8}{15}$

（8） $I=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x}x^3y^2dy=\int_0^1\frac{2}{3}x^6dx=\frac{2}{21}$

（9）$I=\int_1^2 dx\int_0^{2x}\frac{4y}{x^2+1}dy=\int_1^2\frac{8x^2}{x^2+1}dx=8\int_1^2(1-\frac{1}{x^2+1})dx=8+2\pi-8\arctan 2$

（10）$I=\int_1^2 dy\int_y^{y^3}e^{\frac{x}{y}}dx=\int_1^2(ye^{y^2}-ey)dy=-\frac{3e}{2}+\frac{1}{2}\int_1^2 e^{y^2}d(y^2)=\frac{1}{2}e^4-2e$

（11）$I=\int_0^1 dy\int_0^y e^{y^2}dx=\int_0^1 ye^{y^2}dy=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{y^2}d(y^2)=\frac{1}{2}(e-1)$

(注：这两题若积分顺序互换则无法计算)

（12）$I=\iint\limits_D 2xd\sigma-\iint\limits_D yd\sigma=I_1-I_2$

因为 D 关于 Y 轴对称，且$2x$是奇函数，所以 $I_1=0$，

因为 D 关于 X 轴对称，且y是奇函数，所以 $I_2=0$， 所以 $I=0$。

（13）$I=\int_0^1 dx\int_0^{2x}2xydy+\int_1^3 dx\int_0^{3-x}2xydy=\int_0^1 4x^3dx+\int_1^3(9x-6x^2+x^3)dx=5$

或$I=\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{3-y}2xydx=\frac{1}{4}\int_0^2(36y-24y^2+3y^3)dy=5$

（14）$I=\int_{-1}^1 dx\int_{-1}^1(x^2+y^2)dy=\int_{-1}^1(2x^2+\frac{2}{3})dx=\frac{8}{3}$

（15）$I=\int_0^{\pi}dx\int_0^x x\cos(x+y)dy=\int_0^{\pi}x(\sin 2x-\sin x)dx$

$\int x\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\int xd\cos 2x=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{2}\int\cos 2xdx=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 4x+C$

$\int x\sin xdx=-\int xd\cos x=-x\cos x+\sin x+C$

所以　$I=-\frac{\pi}{2}-\pi=-\frac{3\pi}{2}$

（16）设$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$　则 D=$\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le 2\pi,0\le r\le 1\}$

所以　$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cos^2\theta r^4\sin^4\theta\bullet rdr=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^4\theta d\theta\int_0^1 r^3dr$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1-\sin^2\theta)\sin^4\theta d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^4\theta d\theta-\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^6\theta d\theta=\frac{\pi}{64}$$

（17）设$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$　则 D=$\left\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le r\le 1\right\}$

所以　$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\ln(1+r^2)\bullet rdr=\frac{\pi}{4}\int_0^1\ln(1+r^2)d(1+r^2)$

$$=\frac{\pi}{4}(1+r^2)\ln(1+r^2)\,|_0^1-\frac{\pi}{4}\int_0^1 2rdr=\frac{\pi}{4}(2\ln 2-1)$$

（18）设$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$　则 D=$\left\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le\frac{\pi}{4},1\le r\le 2\right\}$

所以　$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_1^2\theta\bullet rdr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta d\theta\int_1^2 rdr=\frac{\pi^2}{32}\times\frac{3}{2}=\frac{3\pi^2}{64}$

(19) 设$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$　则 D=$\left\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le r\le 1\right\}$

所以　$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\bullet rdr=\frac{\pi}{4}\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}dr^2=\frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{\sqrt{1-r^4}}{1+r^2}dr^2$

令　$r^2=\sin\alpha$　则　$I=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}d\alpha=\frac{\pi}{4}\int_0^1(1-\sin\alpha)d\alpha=\frac{\pi(\pi-2)}{8}$

(20) $I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}x\sqrt{y}dy=\frac{2}{3}\int_0^1(x^{\frac{7}{4}}-x^4)dx=\frac{6}{55}$

(21)设$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$　则 D=$\left\{(r,\theta)\,|\,-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le r\le 2\right\}$

所以　$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^2 r\cos\theta\bullet r^2\sin^2\theta\bullet rdr=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^2\theta d\theta\int_0^2 r^4dr$

$$=\frac{32}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\sin\theta=\frac{64}{15}$$

(22) $I=\int_{-1}^{0}dx\int_{-x-1}^{x+1}e^{x+y}dy+\int_{0}^{1}dx\int_{x-1}^{1-x}e^{x+y}dy=\int_{-1}^{0}(e^{2x+1}-e^{-1})dx+\int_{0}^{1}(e^{2x+1}-e^{-1})dx=e-e^{-1}$

4．求下列积分。

（1）$\int_0^1 dx\int_{3x}^{3}e^{y^2}dy$；　（2）$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{1}\sqrt{x^3+1}dx$；　（3）$\int_0^3 dy\int_{y^2}^{9}y\cos(x^2)dx$；

（4）$\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}dx$；　（5）$\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}dy$；

（6）$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x}xydy+\int_1^{\sqrt{2}}dx\int_0^x xydy+\int_{\sqrt{2}}^{2}dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}}xydy$；　（7）$\int_{-a}^{a}dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}(x^2+y^2)dx$.

解：(1)无法直接计算，换序

$$I=\int_0^3 dy\int_0^{\frac{y}{3}}e^{y^2}dx=\int_0^3\frac{y}{3}e^{y^2}dy=\frac{1}{6}\int_0^3 e^{y^2}d(y^2)=\frac{1}{6}(e^9-1)$$

(2) $I=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^3+1}dy=\int_0^1\sqrt{x^3+1}\bullet x^2dx=\frac{1}{3}\int_0^1\sqrt{x^3+1}d(x^3+1)=\frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1)$

(3) $I=\int_0^9 dx\int_0^{\sqrt{x}}y\cos(x^2)dy=\frac{1}{2}\int_0^9 x\cos(x^2)dx=\frac{1}{4}\int_0^9\cos(x^2)d(x^2)=\frac{1}{4}\sin(x^2)|_0^9=\frac{1}{4}\sin 81$

(4) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\sin x}\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\sin xdx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}d\cos x$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}d(1+\cos^2 x)=-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

(5) $I=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}dx=\int_0^1\frac{\sin y}{y}(y-y^2)dy=\int_0^1(\sin y-y\sin y)dy$

$$=-\cos y|_0^1+\int_0^1 yd\cos y=1-\cos 1+y\sin y|_0^1-\int_0^1\cos ydy=1-\sin 1$$

(6) 该积分可化为三个二重积分的和　$I=\iint\limits_{D_1+D_2+D_3}xyd\sigma$，

其中 $D=D_1+D_2+D_3$ 为扇形圆环，可用极坐标计算

设$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$　则 D=$\left\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le\frac{\pi}{4},1\le r\le 2\right\}$

所以　$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_1^2 r^2\cos\theta\sin\theta\bullet rdr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_1^2 r^3dr=\frac{1}{4}\times\frac{15}{4}=\frac{15}{16}$

(7)设$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$　则 D=$\left\{(r,\theta)\,|-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le r\le a\right\}$

所以　$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a r^2\bullet rdr=\pi\int_0^a r^3dr=\frac{\pi a^4}{4}$

5.求下列给定区域的体积。

（1）由 xoy 平面与 $z=2-x^2-y^2$ 所围成的有界区域;

（2）由抛物面 $x^2+y^2=az$ 和锥面 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体;

（3）半球面 $z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}$ 与旋转抛物面 $x^2+y^2=2az$ （$a>0$）所围成的有界区域。

解：(1) 曲面与 xoy 平面相交于 $\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$,设 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2\right\}$,则

$V=\iint\limits_D(2-x^2-y^2)d\sigma$. 设 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$,则 D=$\left\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le\sqrt{2}\right\}$,

所以 $V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2-r^2)\bullet rdr=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}(2r-r^3)dr=2\pi$.

(2) 两曲面相交于 $\begin{cases} z=a \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases}$,设 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le a^2\right\}$

则 $V=\iint\limits_D(z_2-z_1)d\sigma=\iint\limits_D(2a-\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{x^2+y^2}{a})d\sigma$.

设 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$,则 D=$\left\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le a\right\}$,

所以 $V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a(2a-r-\dfrac{1}{a}r^2)\bullet rdr=2\pi\int_0^a(2ar-r^2-\dfrac{r^3}{a})dr=\dfrac{5\pi a^3}{6}$.

(3) 两曲面相交于 $\begin{cases} z=a \\ x^2+y^2=2a^2 \end{cases}$,设 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2a^2\right\}$,

则 $V=\iint\limits_D(z_2-z_1)d\sigma=\iint\limits_D(\sqrt{3a^2-x^2-y^2}-\dfrac{x^2+y^2}{2a})d\sigma$.

设 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$, 则 D=$\left\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le\sqrt{2}a\right\}$,

所以 $V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}a}(\sqrt{3a^2-r^2}-\dfrac{1}{2a}r^2)\bullet rdr=(2\sqrt{3}-\dfrac{5}{3})\pi a^3$

(B)

1．将下列积分化为极坐标系下的先对 r 后对 θ 的二次积分.

（1）$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中$D$为由不等式$4 \le x^2+y^2 \le 9, y \ge 0$所围成的区域；

（2）$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中$D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2 \le y, x \ge 0\right\}$；

（3）$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x^2+y^2)\mathrm{d}x$；　　　（4）$\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{3}x} f(x,y)\mathrm{d}y$.

解：（1）积分区域在极坐标下可表示为：$2 \le r \le 3, 0 \le \theta \le \pi$,因此有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_0^{\pi} d\theta \int_2^3 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

（2）积分区域在极坐标下可表示为：$0 \le r \le \sin\theta, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$，因此有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

（3）积分区域在极坐标下可表示为：$1 \le r \le \csc\theta, \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 和 $1 \le r \le \sqrt{2}\csc(\theta+\frac{\pi}{4}), 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$，因此有

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x^2+y^2)\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_1^{\csc\theta} f(r^2) r dr + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_1^{\sqrt{2}\csc(\theta+\frac{\pi}{4})} f(r^2) r dr$$

（4）积分区域在极坐标下可表示为：$0 \le r \le 2\sec\theta, \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$，因此有

$$\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{3}x} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\sec\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

2．设$D=[0,1]\times[0,1]$，求$I=\iint\limits_D \frac{y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

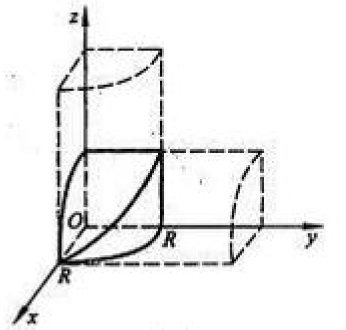
解:$I=\iint\limits_D \frac{y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\left(1+x^2+y^2\right)}{\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} \times \int_0^1 -2(1+x^2+y^2)^{-1/2} |_0^1 \, dx$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2+x^2}} dx = In(x+\sqrt{1+x^2})|_0^1 - In(x+\sqrt{2+x^2})|_0^1$$
$$= In(2+\sqrt{2}) - In(1+\sqrt{3})$$

3．求两个底圆半径都等于R的直交圆柱面所围成的立体的体积.

解：设这两个圆柱的柱面方程分别为$x^2+y^2=R^2$和$x^2+z^2=R^2$.

根据对称性只要计算出它在第一卦限部分的体积V_1，然后的再乘以 8 就可以得到此几何体的体积。此几何体在第一卦限的图形图 1 所示.



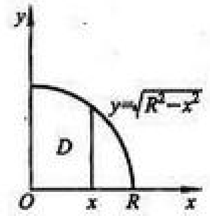


图 1　　　　　　　　　　图 2

所求几何体在第一卦限的部分可以看做一个曲顶柱体，它的底为

$$D=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le\sqrt{R^2-x^2},0\le x\le R\right\}$$

如图 2 所示. 它的顶是$z=\sqrt{R^2-x^2}$，根据上面的描述，则

$$V_1=\iint_D\sqrt{R^2-x^2}d\sigma=\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}dy=\int_0^R(R^2-x^2)dx=\frac{2}{3}R^3.$$

故此几何体的体积$V=8V_1=8\times\frac{2}{3}R^3=\frac{16}{3}R^3$

4．求$\lim\limits_{x\to 0}\int_0^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}t\int_{\frac{x}{2}}^{t}\dfrac{\mathrm{e}^{-(t-u)^2}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}}\mathrm{d}u$.

解：(1) 原式

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{x^2}{4}}\int_0^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}t\int_{\frac{x}{2}}^{t}\mathrm{e}^{-(t-u)}\mathrm{d}u\overset{s=t-u}{=}\lim_{x\to0}\frac{4}{x^2}\int_0^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}t\int_0^{t-\frac{x}{2}}\mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s=4\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(t\int_0^{t-\frac{x}{2}}\mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s\Big|_0^{\frac{x}{2}}-\int_0^{\frac{x}{2}}t\mathrm{e}^{-(t-\frac{s}{2})^2}\mathrm{d}t\right)$$

$$=-4\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{\frac{x}{2}}t\mathrm{e}^{-(t-\frac{s}{2})^2}\mathrm{d}t}{x^2}\overset{u=t-\frac{x}{2}}{=}4\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{-\frac{x}{2}}(u+\frac{x}{2})\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u}{x^2}=4\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{-\frac{x}{2}}u\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u+\frac{x}{2}\int_0^{-\frac{x}{2}}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u}{x^2}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\int_0^{-\frac{x}{2}}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u+\frac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}}\left(-\frac{1}{2}\right)}{x}\text{（利用洛必达法则）}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{-\frac{x}{2}}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u}{x}=\lim_{x\to0}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}\left(-\frac{1}{2}\right)\text{（利用洛必达法则）}=-\frac{1}{2}.$$

区域$D:0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi$.根据二重积分的

5．求下列二重积分.

（1）$\iint\limits_D(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D=\left\{(x,y)\middle|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$；

（2）$\iint\limits_D\cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D=\left\{(x,y)\middle|x\ge 0,y\ge 0,x+y\le 1\right\}$.

解：(1) 做坐标变换$x=ar\cos\theta,\ y=br\sin\theta$, 区域$D:0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi$.根据二重 积分的坐标变换公式有$\iint\limits_D(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^1 r^2abrdr=2\pi ab\int\limits_0^1 r^3dr=\frac{\pi}{2}ab$.

（2）令$u=x-y,\ v=x+y$，则$x=\frac{u+v}{2},\ y=\frac{v-u}{2}$. 在此变换下，D 的边界

$x=0,\ y=0,\ x+y=1$, 依次与$u+v=0,\ v-u=0,\ v=1$对应. 后者构成uov平面上与D对应的区域$D^{'}=\left\{(u,v)\mid -v\le u\le v,0\le v\le 1\right\}$. 因为

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$$

因此有，$\iint\limits_D\cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D^{'}}\cos\frac{u}{v}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{dudv}$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dv\int\limits_{-v}^{v}\cos\frac{u}{v}dv=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 v\sin\frac{u}{v}\Big|_{-v}^{v}\ dv=\sin 1\int\limits_0^1 vdv=\frac{1}{2}\sin 1.$$

6．设$f(x)$在$[a,b]$上连续，利用二重积分证明不等式$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2\le(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$成立，其中等号当且仅当$f(x)$为常量函数时成立.

证明：设积分区域 D 为：$a\le x\le b,a\le y\le b$. 则有

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b f(y)\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(x)f(y)d\sigma.$$

根据平均值不等式有$f(x)f(y)\le\frac{1}{2}\left[f^2(x)+f^2(y)\right]$.

根据二重积分的不等式性有$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b f(y)\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(x)f(y)d\sigma$

$$\le \frac{1}{2}\iint_D \left[f^2(x)+f^2(y)\right]d\sigma=\iint_D f^2(x)d\sigma=(b-a)\int_a^b f^2\left(x\right)\mathrm{d}x$$

等号成立当且仅当对 $\forall(x,y)\in D$, 有 $f(x)=f(y)$，即 $f(x)$ 为常数.

习题 9.3　三重积分

(A)

1．计算下列积分.

（1）$\iiint\limits_\Omega \left(xy+z^2\right)\mathrm{d}v$，其中 $\Omega=[-2,5]\times[-3,3]\times[0,1]$；

（2）$\iiint\limits_\Omega \frac{1}{\left(1+x+y+z\right)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所围成的区域.

解：(1) $\iiint\limits_\Omega \left(xy+z^2\right)\mathrm{d}v=\int_{-2}^5 dx\int_{-3}^3 dy\int_0^1(xy+z^2)dz=\int_{-2}^5 dx\int_{-3}^3(xy+\frac{1}{3})dy=2\int_{-2}^5 dx=14.$

(2) $\Omega=\{(x,y,z)\big|0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x, 0\le z\le 1-x-y\}$, 则

$$\iiint\limits_\Omega \frac{1}{\left(1+x+y+z\right)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}dz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}d\,(1+x+y+z)=-\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(\frac{1}{4}-\frac{1}{(1+x+y)^2})dy$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}x-\frac{1}{1+x})dx=-\frac{1}{2}[\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}x^2-\ln(1+x)]\Big|_0^1=\frac{1}{2}(\ln 2-\frac{5}{8}).$$

2．将三重积分 $I=\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 化为直角坐标系下的三次积分（写出一种即可），其中 Ω 由曲面 $z=x^2+2y^2$ 与 $z=2-x^2$ 所围成的闭区域.

解：　$\Omega=\{(x,y,z)\big|-1\le x\le 1,\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}, x^2+2y^2\le z\le 2-x^2\}$, 则

$$I=\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2}f(x,y,z)dz.$$

3．将三重积分 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v$ 化为柱面坐标系下的三次积分（写出一种即可），其中 Ω 由：

（1）圆柱面 $x^2-2x+y^2=0$ 与平面 $z=0$，$z=2$ 所围成的区域；

（2）圆柱面 $x^2+y^2-2y=0$ 与平面 $z=0$，$z=2$ 所围成的区域；

（3）椭球面 $z = x^2 + 2y^2$ 与抛物柱面 $z = 2 - x^2$ 所围成的区域；

（4）旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 - 2$ 与平面 $z = 0$ 所围成的区域.

解：(1) 在柱面坐标系下， $\Omega = \{(\rho,\theta,z)\big|0 \le \rho \le 2\cos\theta,\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le z \le 2\}$, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho d\rho \int_0^2 f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)dz.$$

(2) 在柱面坐标系下， $\Omega = \{(\rho,\theta,z)\big|0 \le \rho \le 2\sin\theta,\ 0 \le \theta \le \pi, 0 \le z \le 2\}$, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} \rho d\rho \int_0^2 f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)dz.$$

(3) 由 $\begin{cases} z = x^2 + 2y^2 \\ z = 2 - x^2 \end{cases}$ 消去 z 得投影柱面方程为 $x^2 + y^2 = 1$, 由此可得 Ω 在 xoy 平面上的投影区域为 $D = \{(x,y)\big|x^2 + y^2 \le 1\}$. 从而在柱面坐标系下，

$\Omega = \{(\rho,\theta,z)\big|0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi, \rho^2(1+\sin^2\theta) \le z \le 2 - \rho^2\cos^2\theta\}$, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2(1+\sin^2\theta)}^{2-\rho^2\cos^2\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)dz.$$

(4) 由 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 - 2 \\ z = 0 \end{cases}$ 消去 z 得投影柱面方程为 $x^2 + y^2 = 2$, 由此可得 Ω 在 xoy 平面上的投影区域为 $D = \{(x,y)\big|x^2 + y^2 \le 2\}$. 从而在柱面坐标系下，

$\Omega = \{(\rho,\theta,z)\big|0 \le \rho \le \sqrt{2},\ 0 \le \theta \le 2\pi, \rho^2 - 2 \le z \le 0\}$, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho \int_{\rho^2-2}^{0} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)dz.$$

4．将三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$ 化为球面坐标系下的三次积分（写出一种即可），其中 Ω 由：

（1） $R_1^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le R_2^2$ 所围成的区域，这里 R_1 和 R_2 均大于零；

（2） $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = \sqrt{12 - x^2 - y^2}$ 所围成的区域；

（3） $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ 与 $z \ge \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ 所围成的区域.

解：（1） 在球面坐标系下， $\Omega = \{(r,\theta,\varphi)\big|R_1 \le r \le R_2,\ 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le \pi\}$, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_{R_1}^{R_2}f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2dr.$$

(2) 由 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=\sqrt{12-x^2-y^2} \end{cases}$ 消去 z 得投影柱面方程为 $x^2+y^2=6$, 由此可得 Ω 在 xoy 平面上的投影区域为 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 6\}$. 从而在球面坐标系下，

$\Omega=\{(r,\theta,\varphi)\big|0\le r\le 2\sqrt{3},\ 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}\}$, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2\sqrt{3}}f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2dr.$$

(3) 由 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \end{cases}$ 消去 z 得投影柱面方程为 $x^2+y^2=\dfrac{1}{4}$, 由此可得 Ω 在 xoy 平面上的投影区域为 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le\dfrac{1}{4}\}$. 从而在球面坐标系下，

$\Omega=\{(r,\theta,\varphi)\big|0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{3}\}$, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{1}f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2dr.$$

5．将三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 分别化为“先二后一”和“先一后二”的形式（均只写一种即可），其中 Ω 由曲面 $z=1-x^2-y^2$ 与 $z=0$ 所围成的闭区域.

解：（1）“先二后一”：将 Ω 投影到 z 轴上，则 $0\le z\le 1$; $\forall z\in(0,1)$, 平面 $z=z$ 与曲面 $z=1-x^2-y^2$ 的截面为 $D_z: x^2+y^2\le 1-z\quad(z=z)$. 则

$$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1dz\iint\limits_{D_z}f(x,y,z)dxdy.$$

（2）“先一后二”：将 Ω 向 xoy 平面投影，则 $0\le z\le 1-x^2-y^2$, 且投影区域为 $D_{xy}=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$. 则 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int_0^{1-x^2-y^2}f(x,y,z)dz$.

6．计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω 由 $z=x^2+y^2$ 与 $z=h\left(>0\right)$ 所围成的闭区域.

解： 由$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = h \end{cases}$ 消去 z 得投影柱面方程为 $x^2 + y^2 = h,$ 由此可得 Ω 在 xoy 平面上的投影区域为 $D = \{(x, y) \big| x^2 + y^2 \le h\}$．从而在柱面坐标系下

$\Omega = \{(\rho, \theta, z) \big| 0 \le \rho \le \sqrt{h},\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ \rho^2 \le z \le h\}$, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2) \mathrm{d}v = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{h}} \rho^3 d\rho \int_{\rho^2}^{h} dz = 2\pi \int_0^{\sqrt{h}} \rho^3 (h - \rho^2) d\rho = 2\pi (\frac{h}{4}\rho^4 - \frac{1}{6}\rho^6) \Big|_0^{\sqrt{h}} = \frac{1}{6}\pi h^3.$$

7．计算 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所围成的闭区域.

解： 由$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$ 消去 z 得投影柱面方程为 $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2},$ 由此可得 Ω 在 xoy 平面上的投影区域为 $D = \{(x, y) \big| x^2 + y^2 \le \dfrac{1}{2}\}$．从而在球面坐标系下，

$\Omega = \{(r, \theta, \varphi) \big| 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}\}$, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi d\varphi \int_0^1 r\cos\varphi \cdot e^{-r^2} r^2 dr = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi \int_0^1 e^{-r^2} r^2 d(r^2)$$

$$= (\frac{1}{2} - \frac{1}{e}) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi = 2\pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{e}) \cdot \frac{1}{2}\sin^2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi(e-2)}{4e}.$$

或者也可以利用柱面坐标求解：

在柱面坐标系下 $\Omega = \{(\rho, \theta, z) \Big| 0 \le \rho \le \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0 \le \theta \le 2\pi, \rho \le z \le \sqrt{1 - \rho^2}\}$, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rho d\rho \int_{\rho}^{\sqrt{1-\rho^2}} z e^{-(\rho^2+z^2)} dz = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rho d\rho \int_{\rho}^{\sqrt{1-\rho^2}} e^{-(\rho^2+z^2)} d(-(\rho^2+z^2))$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rho (e^{-1} - e^{-2\rho^2}) d\rho = -\pi[\frac{1}{2e}\rho^2 \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-2\rho^2} d(-2\rho^2)] = -\pi[\frac{1}{4e} + \frac{1}{4} e^{-2\rho^2} \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}]$$

$$= \frac{\pi(e-2)}{4e}.$$

(B)

1．求半径为 R 的球面与半顶角 α 为的内接锥面所围成的立体的体积.

解： 在直角坐标下，设球面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 锥面方程为 $z^2 = \cot^2\alpha(x^2 + y^2)$.

记上半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$与上锥面$z=\cot\alpha\sqrt{x^2+y^2}$所围立体区域为$\Omega$，利用对称性可得，所求立体体积$V=2\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

由$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ z^2=\cot^2\alpha(x^2+y^2). \end{cases}$消去$z$得投影柱面方程为$x^2+y^2=(R\sin\alpha)^2$, 由此可得$\Omega$在$xoy$平面上的投影区域为$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le(R\sin\alpha)^2,\}$. 从而在柱面坐标系下，

$\Omega=\{(\rho,\theta,z)\big|0\le\rho\le R\sin\alpha,\ 0\le\theta\le 2\pi,\rho\cot\alpha\le z\le\sqrt{R^2-\rho^2}\}$, 则

$$V=2\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{R\sin\alpha}\rho d\rho\int_{\rho\cot\alpha}^{\sqrt{R^2-\rho^2}}dz=4\pi\int_0^{R\sin\alpha}\rho(\sqrt{R^2-\rho^2}-\rho\cot\alpha)d\rho$$

$$=4\pi[-\frac{1}{2}\int_0^{R\sin\alpha}\sqrt{R^2-\rho^2}d(R^2-\rho^2)-\cot\alpha\int_0^{R\sin\alpha}\rho^2d\rho]=-\frac{4\pi}{3}[(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}+\cot\alpha\cdot\rho^3]\Big|_0^{R\sin\alpha}$$

$$=\frac{4\pi}{3}R^3(1-\cos\alpha).$$

或者也可以利用球面坐标求解：

在球面坐标系下，$\Omega=\{(r,\theta,\varphi)\big|0\le r\le R,\ 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\alpha\}$, 则

$$V=2\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\alpha}\sin\varphi d\varphi\int_0^R r^2\,dr=-\frac{4\pi}{3}R^3\cos\varphi\Big|_0^{\alpha}=\frac{4\pi}{3}R^3(1-\cos\alpha)$$

2．将$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$化为三种不同坐标系下的三次积分（每种坐标系仅需写出一种即可），并计算积分值，其中Ω由锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与旋转抛物面$z=x^2+y^2$所围成的闭区域.

解：将Ω向xoy平面投影，则$x^2+y^2\le z\le\sqrt{x^2+y^2}$, 且由$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$消去$z$得投影柱面方程为$x^2+y^2=1$, 则$\Omega$在$xoy$平面上的投影区域$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$.

（1）直角坐标系：$\Omega=\{(x,y,z)\big|-1\le x\le 1,\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}, x^2+y^2\le z\le\sqrt{x^2+y^2}\}$,

则 $$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_{-1}^1dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2)dz.$$

（2）柱面坐标系：$\Omega=\{(\rho,\theta,z)\big|0\le\rho\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\rho^2\le z\le\rho\}$, 则

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^3d\rho\int_{\rho^2}^{\rho}dz=2\pi\int_0^1\rho^3(\rho-\rho^2)d\rho=2\pi(\frac{\rho^5}{5}-\frac{\rho^6}{6})\Big|_0^1=\frac{\pi}{15}$$

（3）球面坐标系：$\Omega=\{(r,\theta,\varphi)\Big|0\le r\le\dfrac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi},\ 0\le\theta\le2\pi,\dfrac{\pi}{4}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\}$,则

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}r^4dr.$$

3．设$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\sqrt{2}$，积分区域为$\Omega=\left\{(x,y,z)\big|0\le x\le1,x\le y\le1,x\le z\le y\right\}$，计算$\iiint\limits_{\Omega}f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}v$.

解：记$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{dt}$, 由题意知$F(1)=\sqrt{2},\quad F(0)=0.$

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}v=\int_0^1dx\int_x^1dy\int_x^y f(x)f(y)f(z)dz,$$

对上式先交换积分变量x与y的积分次序，再交换积分变量x与z的积分次序，得

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}v=\int_0^1dy\int_0^y dx\int_x^y f(x)f(y)f(z)dz=\int_0^1dy\int_0^y dz\int_0^z f(x)f(y)f(z)dx$$

$$=\int_0^1 f(y)dy\int_0^y f(z)dz\int_0^z f(x)dx=\int_0^1 f(y)dy\int_0^y F(z)f(z)dz=\int_0^1 f(y)dy\int_0^y F(z)dF(z)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 F^2(y)f(y)dy=\frac{1}{2}\int_0^1F^2(y)dF(y)=\frac{1}{6}F^3(y)\Big|_0^1=\frac{1}{6}F^3(1)=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

4．设球体$x^2+y^2+z^2\le2x$上各点的密度等于该点到坐标原点的距离，求这球体的质量.

解：在球面坐标系下，球体$\Omega:x^2+y^2+z^2\le2x$可表示为

$\Omega=\{(r,\theta,\varphi)\big|0\le r\le2\cos\varphi,\ 0\le\theta\le2\pi,0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\}$,则该球体的质量

$$M=\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^3dr$$

$$=8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^4\varphi d\varphi=-\frac{8\pi}{5}\cos^5\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8\pi}{5}.$$

习题 9.4　重积分的应用

(A)

1. 求曲面$az=xy$包含在圆柱$x^2+y^2=a^2\,(a>0)$内那部分的面积.

解：由题意知曲面方程为：$z=\frac{1}{a}xy$, 其包含在圆柱 $x^2+y^2=a^2\left(a>0\right)$ 内的那部分曲面在 xoy 平面上的投影区域 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le a^2\}$.

又因为 $\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}=\sqrt{1+(\frac{y}{a})^2+(\frac{x}{a})^2}=\frac{\sqrt{a^2+x^2+y^2}}{a}$, 故所求曲面面积

$$S=\frac{1}{a}\iint_D\sqrt{a^2+x^2+y^2}dxdy=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\rho\sqrt{a^2+\rho^2}d\rho=\frac{\pi}{a}\int_0^a\sqrt{a^2+\rho^2}d\,(a^2+\rho^2\,)$$

$$=\frac{2\pi}{3a}(a^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a=\frac{2}{3}\pi a^2(2\sqrt{2}-1).$$

2. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所截部分的曲面面积.

解：由 $\begin{cases} z^2=2x \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$ 消去 z 得投影柱面方程为 $(x-1)^2+y^2=1$, 则锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所截部分的曲面在 xoy 平面上的投影区域为 $D=\{(x,y)\big|(x-1)^2+y^2\le 1\}$.

又因为 $\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}=\sqrt{1+(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})^2+(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})^2}=\sqrt{2}$, 故所求曲面面积

$$S=\iint_D\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\iint_D dxdy=\sqrt{2}\cdot\pi\cdot 1^2=\sqrt{2}\pi.$$

3. 求下列均匀密度平面薄板的质心.

(1) 半椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1, y\ge 0$；

解：设质心为 $(\overline{x},\overline{y})$, $D=\{(x,y)\Big|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1, y\ge 0\}$.

由于 D 关于 y 轴对称，则 $\overline{x}=0$, 且 $A=\iint_D dxdy=\frac{1}{2}\pi ab$. 故

$$\overline{y}=\frac{1}{A}\iint_D ydxdy=\frac{2}{\pi ab}\int_{-a}^a dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}ydy=\frac{2b}{\pi a^3}\int_0^a(a^2-x^2)dx=\frac{2b}{\pi a^3}(a^2x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^a=\frac{4b}{3\pi}.$$

所以质心为 $(0,\frac{4b}{3\pi})$.

(2) 高为 h，底分别为 a 和 b 的等腰梯形；

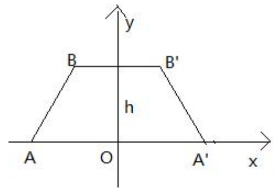
解：如图建立直角坐标系， 直线 $A'B'$ 的方程为 $x=\dfrac{b-a}{2h}y+\dfrac{a}{2}$,

直线 BB' 的方程为 $y=h$, 直线 AB 的方程为 $x=\dfrac{a-b}{2h}y-\dfrac{a}{2}$.

设质心为 $(\overline{x},\overline{y})$, 由于区域 D 关于 y 轴对称，则 $\overline{x}=0$, 且 $A=\iint\limits_D dxdy=\dfrac{1}{2}(a+b)h$. 故

$$\overline{y}=\frac{1}{A}\iint\limits_D ydxdy=\frac{2}{(a+b)h}\int_0^h ydy\int_{\frac{a-b}{2h}y-\frac{a}{2}}^{\frac{b-a}{2h}y+\frac{a}{2}}dx=\frac{2}{(a+b)h}\int_0^h(\frac{b-a}{h}y+a)ydy$$
$$=\frac{2}{(a+b)h}(\frac{b-a}{3h}y^3+\frac{a}{2}y^2)\Big|_0^h=\frac{(2b+a)}{3(a+b)}h.$$

所以质心为 $(0,\dfrac{(2b+a)}{3(a+b)}h)$.



(3) $ay=x^2, x+y=2a(a>0)$ 所界的薄板；

解：由 $\begin{cases}ay=x^2\\x+y=2a\end{cases}$ 求得交点 $(-2a,4a)$, (a,a).

$$A=\iint\limits_D dxdy=\int_{-2a}^{a}dx\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}dy=\int_{-2a}^{a}(2a-x-\frac{x^2}{a})dx=(2ax-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3a})\Big|_{-2a}^{a}=\frac{9a^2}{2}.\text{故}$$

$$\overline{x}=\frac{1}{A}\iint\limits_D xdxdy=\frac{2}{9a^2}\int_{-2a}^{a}xdx\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}dy=\frac{2}{9a^2}\int_{-2a}^{a}(2a-x-\frac{x^2}{a})xdx$$
$$=\frac{2}{9a^2}(ax^2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4a})\Big|_{-2a}^{a}=-\frac{a}{2}.$$

$$\overline{y}=\frac{1}{A}\iint\limits_D ydxdy=\frac{2}{9a^2}\int_{-2a}^{a}dx\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}ydy=\frac{1}{9a^2}\int_{-2a}^{a}[(2a-x)^2-\frac{x^4}{a^2})]dx$$
$$=\frac{1}{9a^2}[\frac{-(2a-x)^3}{3}-\frac{x^5}{5a^2})]\Big|_{-2a}^{a}=\frac{13a}{15}.$$

所以质心为 $(-\dfrac{a}{2},\dfrac{13a}{15})$.

(4) $r=a(1+\cos\theta)(0\le\theta\le\pi)$ 所界的薄板.

解：设质心为$(\overline{x},\overline{y})$,

$$A=\iint_D dxdy=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}rdr=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2d\theta=\frac{a^2}{2}(\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{\sin 2\theta}{4})\Big|_0^{\pi}=\frac{3}{4}\pi a^2.$$

$$\overline{x}=\frac{1}{A}\iint_D xdxdy=\frac{4}{3\pi a^2}\int_0^{\pi}\cos\theta d\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}r^2dr=\frac{4a}{9\pi}\int_0^{\pi}\cos\theta(1+\cos\theta)^3d\theta$$

$$=\frac{4a}{9\pi}(\frac{15}{8}\theta+4\sin\theta+\sin 2\theta-\sin^3\theta+\frac{1}{32}\sin 4\theta)\Big|_0^{\pi}=\frac{5}{6}a.$$

$$\overline{y}=\frac{1}{A}\iint_D ydxdy=\frac{4}{3\pi a^2}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}r^2dr=\frac{4a}{9\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta(1+\cos\theta)^3d\theta$$

$$=\frac{-4a}{9\pi}(\cos\theta+\frac{3}{2}\cos^2\theta+\cos^3\theta+\frac{1}{4}\cos^4\theta)\Big|_0^{\pi}=\frac{16a}{9\pi}.$$

所以质心为$(\frac{5}{6}a,\frac{16a}{9\pi})$.

4．求下列均匀密度物体的质心：

(1) $z\le 1-x^2-y^2,z\ge 0$；　　(2) 由坐标面及平面$x+2y-z=1$所围成的四面体；

(3) $z=x^2+y^2,x+y=a,x=0,y=0,z=0$围成的立体；

(4) $z^2=x^2+y^2(z\ge 0)$和平面$z=h\left(>0\right)$围成的立体；

(5) 半球壳$a^2\le x^2+y^2+z^2\le b^2,z\ge 0$，其中常数$a,b>0$.

解：（1）设质心为$(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$, 由于区域$\Omega$关于$z$轴对称，质心应在$z$轴上，则$\overline{x}=\overline{y}=0,$且在柱面坐标系下，$\Omega=\{(\rho,\theta,z)\big|0\le\rho\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,0\le z\le 1-\rho^2\}$, 则

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_0^{1-\rho^2}dz=2\pi\int_0^1\rho(1-\rho^2)d\rho=\pi(\rho^2-\frac{1}{2}\rho^4)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$$

$$\overline{z}=\frac{1}{V}\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_0^{1-\rho^2}zdz=2\int_0^1\rho(1-\rho^2)^2d\rho=-\frac{1}{3}(1-\rho^2)^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

所以质心为$(0,0,\frac{1}{3})$.

（2）设质心为$(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$, $\Omega=\{(x,y,z)\big|0\le x\le 1,\ 0\le y\le\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x,x+2y-1\le z\le 0\}$, 则

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}.$$

$$\overline{x}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\int_0^1 xdx\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x}dy\int_0^{x+2y-1}dz=4\int_0^1 xdx\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x}(x+2y-1)dy$$

$$=\int_0^1(-x^3+2x^2-x)dx=(-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2)\Big|_0^1=-\frac{1}{12}.$$

$$\overline{y}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x}ydy\int_0^{x+2y-1}dz=4\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x}y(x+2y-1)dy$$

$$=4\int_0^1[\frac{x-1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x)^2+\frac{2}{3}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x)^3]dx=(\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{6}x)\Big|_0^1=-\frac{1}{24}.$$

$$\overline{z}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x}dy\int_0^{x+2y-1}zdz=2\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x}(x+2y-1)^2dy$$

$$=\int_0^1(\frac{-1}{3}x^3+x^2-x+\frac{1}{3})dx=(\frac{-1}{12}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x)\Big|_0^1=\frac{1}{12}.$$

所以质心为$(-\frac{1}{12},-\frac{1}{24},\frac{1}{12})$.

（3）设质心为$(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$, $\Omega=\{(x,y,z)\big|0\le x\le a,\ 0\le y\le a-x, 0\le z\le x^2+y^2\}$, 则

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^a dx\int_0^{a-x}dy\int_0^{x^2+y^2}dz=\int_0^a dx\int_0^{a-x}(x^2+y^2)dy$$

$$=\int_0^a[x^2(a-x)+\frac{1}{3}(a-x)^3]dx=(\frac{a}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{12}(a-x)^4)\Big|_0^a=\frac{1}{6}a^4.$$

$$\overline{z}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{6}{a^4}\int_0^a dx\int_0^{a-x}dy\int_0^{x^2+y^2}zdz=\frac{3}{a^4}\int_0^a dx\int_0^{a-x}(x^4+2x^2y^2+y^4)dy$$

$$=\frac{3}{a^4}\int_0^a[x^4(a-x)+\frac{2}{3}x^2(a-x)^3+\frac{1}{5}(a-x)^5]dx=\frac{7}{30}a^2.$$

$$\overline{x}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{6}{a^4}\int_0^a xdx\int_0^{a-x}dy\int_0^{x^2+y^2}dz=\frac{6}{a^4}\int_0^a xdx\int_0^{a-x}(x^2+y^2)dy$$

$$=\frac{6}{a^4}\int_0^a x[x^2(a-x)+\frac{1}{3}(a-x)^3]dx=\frac{2}{5}a.$$

由于立体Ω匀质且关于平面$y=x$对称，则有$\overline{y}=\overline{x}=\frac{2}{5}a$. 所以质心为$(-\frac{1}{12},-\frac{1}{24},\frac{1}{12})$.

（4）设质心为$(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$, 由于区域$\Omega$是一个顶点在原点的圆锥体，关于$z$轴对称且匀质，所以其质心应在$z$轴上，即$\overline{x}=\overline{y}=0$, 且$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{3}\pi h^3$.

在柱面坐标系下，$\Omega=\{(\rho,\theta,z)\big|0\le\rho\le h,\ 0\le\theta\le 2\pi, \sqrt{x^2+y^2}\le z\le h\}$, 则

$$\overline{z}=\frac{1}{V}\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{3}{\pi h^3}\iint_{x^2+y^2\le h^2} dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h} zdz=\frac{3}{2\pi h^3}\iint_{x^2+y^2\le h^2}(h^2-x^2-y^2)dxdy$$

$$=\frac{3}{2\pi h^3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h(h^2-\rho^2)\rho d\rho=\frac{3}{h^3}(\frac{h^2}{2}\rho^2-\frac{\rho^4}{4})\Big|_0^h=\frac{3}{4}h.$$

所以质心为$(0,0,\frac{3}{4}h)$.

（5）设质心为$(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$, 由于区域$\Omega$是一个半球壳，关于$z$轴对称且匀质，所以其质心应在$z$轴上，即$\overline{x}=\overline{y}=0$, 且$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{2}{3}\pi(b^3-a^3)$.

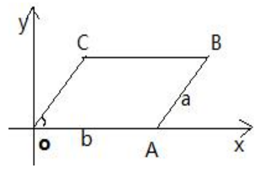
在球面坐标系下，$\Omega=\{(r,\theta,\varphi)\big|a\le r\le b,\ 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\}$, 则

$$\overline{z}=\frac{1}{V}\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{3}{2\pi(b^3-a^3)}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\int_a^b r^3\,dr$$

$$=\frac{3}{2\pi(b^3-a^3)}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{b^4-a^4}{4}=\frac{3(b^4-a^4)}{8(b^3-a^3)}=\frac{3(b+a)(b^2+a^2)}{8(b^2+ba+a^2)}.$$

所以质心为$(0,0,\frac{3(b+a)(b^2+a^2)}{8(b^2+ba+a^2)})$.

5．求边长为a和b且夹角为φ的平行四边形的均匀密度平面薄板关于底边b的转动惯量.



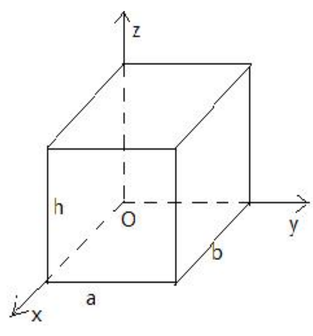
解：如图建立直角坐标系， 直线OC的方程为$y=\tan\varphi\cdot x$,

直线AB的方程为$y=\tan\varphi(x-b)$. 直线BC的方程为$y=a\sin\varphi$.

设平面薄板的密度为ρ, 则其关于底边b的转动惯量为

$$I_x=\rho\iint_D y^2dxdy=\rho\int_0^{a\sin\varphi}y^2dy\int_{\frac{y}{\tan\varphi}}^{\frac{y}{\tan\varphi}+b}dx=\rho b\int_0^{a\sin\varphi}y^2dy=\frac{1}{3}\rho a^3b\sin^3\varphi.$$

6．求由下列曲面所界的均匀物体的转动惯量.



(1) $z=x^2+y^2, x+y=\pm1, x-y=\pm1, z=0$ 关于z轴的转动惯量；

(2) 长方体关于它的一棱的转动惯量；

(3) 圆筒$a^2\le x^2+y^2\le b^2$，$-h\le z\le h$关于x轴和z轴的转动惯量.

解：（1）设该物体的均匀密度为ρ, 则其关于z轴的转动惯量为

$$I_z=\rho\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\rho\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x^2+y^2}(x^2+y^2)dz$$

$$=4\rho\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x^2+y^2)^2dy=4\rho[\int_0^1(\frac{2}{3}x^2-2x^3+3x^4-\frac{5x^5}{3})dx+\frac{1}{5}\int_0^1(1-x)^5dx]$$

$$=4\rho[(\frac{2}{9}x^3-\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{5}x^5-\frac{5x^6}{18})\Big|_0^1-\frac{1}{30}(1-x)^6\Big|_0^1]=\frac{14}{45}\rho.$$

（2）如图建立直角坐标系， 设长方体的底边长为 a，宽为 b，

高为 h，均匀密度为 ρ，则其关于 z 轴上的那条棱的转动惯量为

$$I_z=\rho\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\rho\int_0^a dx\int_0^b dy\int_0^h(x^2+y^2)dz$$

$$=\rho h\int_0^a dx\int_0^b(x^2+y^2)dy=\rho h\int_0^a(bx^2+\frac{1}{3}b^3)dx$$

$$=\rho h(\frac{b}{3}x^3+\frac{1}{3}b^3x)\Big|_0^a=\frac{1}{3}\rho h(a^3b+ab^3).$$

（3）设该物体的均匀密度为 ρ，则其关于 x 轴的转动惯量为

$$I_x=\rho\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\rho\iiint\limits_{\Omega}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\rho\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\rho\iiint\limits_{\Omega}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\rho[\int_a^b y^2dy\iint\limits_{D_{xz}}dxdz+\int_0^a y^2dy\iint\limits_{D'_{xz}}dxdz]$$

$$=2\rho[4h\int_a^b y^2\sqrt{b^2-y^2}dy+4h\int_0^a y^2(\sqrt{b^2-y^2}-\sqrt{a^2-y^2})dy]$$

$$=8\rho h[\int_0^b y^2\sqrt{b^2-y^2}dy-\int_0^a y^2\sqrt{a^2-y^2})dy]\quad\text{(三角代换求积分)}$$

$$=8\rho h[\frac{\pi b^4}{16}-\frac{\pi a^4}{16}]=\frac{\rho\pi h}{2}(b^4-a^4).$$

$$\rho\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_a^b rdr\int_{-h}^h z^2dz=\frac{4\rho\pi h^3}{3}\int_a^b rdr=\frac{2\rho\pi h^3}{3}(b^2-a^2).$$

所以 $I_x=\frac{\rho\pi h}{2}(b^4-a^4)+\frac{2\rho\pi h^3}{3}(b^2-a^2)=\rho\pi h[\frac{b^4-a^4}{2}+\frac{2(b^2-a^2)h^2}{3}]$

该物体关于 z 轴的转动惯量为

$$I_z=\rho\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_a^b r^3dr\int_{-h}^h dz=\rho\pi hr^4\Big|_a^b=\rho\pi h(b^4-a^4).$$

7．设球体 $x^2+y^2+z^2\le 2x$ 上各点的密度等于该点到坐标原点的距离，求这球的质量．

解：在球面坐标系下，球体 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 2x$ 可表示为

$\Omega=\{(r,\theta,\varphi)\big|0\le r\le 2\cos\varphi,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\}$，则该球的质量

$$M=\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\, d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^3dr$$

$$=8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^4\varphi d\varphi=-\frac{8\pi}{5}\cos^5\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8\pi}{5}.$$

8．求均匀柱体 $x^2+y^2\le a^2, 0\le z\le h$ 对于 $(0,0,c)$ $(c>h)$ 处的单位质点的引力.

解：设该柱体的均匀密度为 ρ, 引力为 $\vec{F}=(F_x,F_y,F_z)$.

由柱体的对称性和质量分布的均匀性知，$F_x=F_y=0.$

$$F_z=G\rho\iiint\limits_{\Omega}\frac{z-c}{[x^2+y^2+(z-c)^2]^{3/2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=G\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a rdr\int_0^h\frac{z-c}{[r^2+(z-c)^2]^{3/2}}dz$$

$$=2\pi G\rho\int_0^a\left[\frac{r}{\sqrt{r^2+c^2}}-\frac{r}{\sqrt{r^2+(h-c)^2}}\right]dr=2\pi G\rho\left[\sqrt{r^2+c^2}-\sqrt{r^2+(h-c)^2}\right]\Big|_0^a$$

$$=2\pi G\rho(\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+(h-c)^2}-h).$$

所以 $\vec{F}=(0,0,2\pi G\rho(\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+(h-c)^2}-h)).$

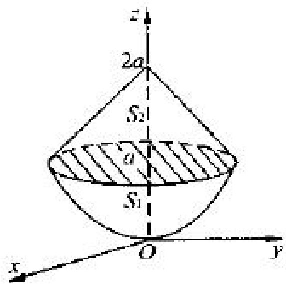
(B)

1．求下列曲面的面积.

(1) 抛物面 $x^2+y^2=az$ 和锥面 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}\,(a>0)$ 所界部分的表面；

(2) 曲面 $z=\sqrt{2xy}$ 被平面 $x+y=1, x=1$ 及 $y=1$ 所截下的部分.

解：(1) 如右图所示，所求表面面积 $S=S_1+S_2$，其中 S_1 代表抛物面



$x^2+y^2=az$ 部分的面积，S_2 代表锥面 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ 部分的面积.

由 $\begin{cases}x^2+y^2=az\\ z=2a-\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$ 解得 $z=a$, 即得交线 $\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ z=a\end{cases}$，　由此

得到曲面在 xoy 平面上的投影区域为 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le a^2\}$. 则

$$S_1=\iint\limits_D\sqrt{1+(\frac{2x}{a})^2+(\frac{2y}{a})^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\rho\sqrt{1+\frac{4\rho^2}{a^2}}d\rho=\frac{2\pi}{a}\int_0^a\rho\sqrt{a^2+4\rho^2}d\rho$$

$$=\frac{\pi}{4a}\int_0^a\sqrt{a^2+4\rho^2}d(a^2+4\rho^2)=\frac{\pi}{4a}(a^2+4\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a=\frac{1}{6}\pi a^2(5\sqrt{5}-1).$$

$$S_2=\iint\limits_D\sqrt{1+(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}})^2+(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}})^2}dxdy=\sqrt{2}\iint\limits_D dxdy=\sqrt{2}\pi a^2.$$

所以$S=S_1+S_2=\frac{1}{6}\pi a^2(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1)$.

（2）由题意知曲面$z=\sqrt{2xy}$被平面$x+y=1,x=1$及$y=1$所截下的部分在xoy平面上的投影区域为$D=\{(x,y)\big|0\le x\le 1,1-x\le y\le 1\}$.

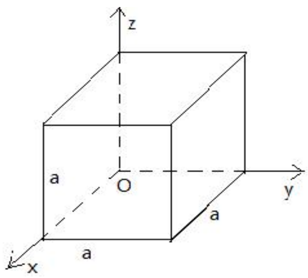
又因为$\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}=\sqrt{1+(\sqrt{\frac{y}{2x}})^2+(\sqrt{\frac{x}{2y}})^2}=\frac{x+y}{\sqrt{2xy}}$, 故所求曲面面积

$$S=\iint\limits_D\sqrt{1+(\sqrt{\frac{y}{2x}})^2+(\sqrt{\frac{x}{2y}})^2}dxdy=\iint\limits_D\frac{x+y}{\sqrt{2xy}}dxdy=\int_0^1dx\int_{1-x}^1\frac{x+y}{\sqrt{2xy}}d\rho$$

$$=\int_0^1[(\sqrt{2xy}+\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{x}}y^{\frac{3}{2}})\big|_{1-x}^1]dx=\int_0^1\{\sqrt{2x}(1-\sqrt{1-x})+\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{x}}[1-(1-x)^{\frac{3}{2}}]\}dx$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

2．求边长为a密度均匀的立方体关于其任一棱边的转动惯量.



解：如图建立直角坐标系， 设立方体的均匀密度为ρ,

则其关于z轴上的那条棱边的转动惯量为

$$I_z=\rho\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\rho\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a(x^2+y^2)dz$$

$$=\rho a\int_0^a dx\int_0^a(x^2+y^2)dy=\rho a\int_0^a(ax^2+\frac{1}{3}a^3)dx$$

$$=\rho a(\frac{a}{3}x^3+\frac{1}{3}a^3x)\big|_0^a=\frac{2}{3}\rho a^5.$$

3．求曲面$\begin{cases}x=\left(b+a\cos\psi\right)\cos\varphi,\\ y=\left(b+a\cos\psi\right)\sin\varphi,\\ z=a\sin\psi\end{cases}$的面积，其中$0\le\psi,\varphi\le 2\pi$，常数$a,b$满足$0\le a\le b$.

解：利用参数方程的曲面面积计算公式$A=\iint\limits_{D_{\varphi\psi}}\sqrt{EG-F^2}\,d\varphi d\psi$,

其中$E=x_\varphi^2+y_\varphi^2+z_\varphi^2, G=x_\psi^2+y_\psi^2+z_\psi^2, F=x_\varphi x_\psi+y_\varphi y_\psi+z_\varphi z_\psi$.

$$x_\varphi=-\sin\varphi(b+a\cos\psi), y_\varphi=\cos\varphi(b+a\cos\psi), z_\varphi=0.$$

$$x_\psi=-a\sin\psi\cos\varphi, y_\psi=-a\sin\psi\sin\varphi, z_\psi=a\cos\psi.$$

得到$E=(b+a\cos\psi)^2$， $G=a^2$， $F=0$. 代入公式得曲面面积为

$$A=\iint\limits_{D_{\varphi\psi}}\sqrt{a^2(b+a\cos\psi)^2}\,d\varphi d\psi=\iint\limits_{D_{\varphi\psi}}a(b+a\cos\psi)\,d\varphi d\psi$$

$$=a\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}(b+a\cos\psi)\,d\psi=2\pi a(b\psi+a\sin\psi)\Big|_0^{2\pi}=4ab\pi^2.$$

4．设有一颗地球同步轨道通讯卫星, 距地面的高度为 h=36000km, 运行的角速度与地球自转的角速度相同，计算该通讯卫星的覆盖面积与地球表面积的比值(地球半径 R=6400km).

解：设地球中心到卫星的连线与卫星切点半径的夹角为 θ, 其余弦 $\cos\theta=\dfrac{R}{R+h}$.

切线截取球缺高度：$H=R-R\cos\theta$，无底球缺表面积 $S=2\pi RH$，地球表面积为 $4\pi R^2$，

所以该通讯卫星的覆盖面积与地球表面积的比值为

$$\frac{2\pi R(R-R\cos\theta)}{4\pi R^2}=\frac{1-\cos\theta}{2}=\frac{1}{2}(1-\frac{R}{R+h})=\frac{h}{2(R+h)}=\frac{45}{106}.$$

总习题九

（A）

1．不直接计算，利用积分性质比较下列积分值的大小关系.

（1）$I_1=\iint\limits_{\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}}|xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_2=\iint\limits_{\{(x,y)||x|+|y|\le 1\}}|xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_3=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}|xy|\,\mathrm{d}y$；

（2）$I_1=\iint\limits_D yx^3\mathrm{d}\sigma,\ I_2=\iint\limits_D y^2x^3\mathrm{d}\sigma,\ I_3=\iint\limits_D y^{\frac{1}{2}}x^3\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是第二象限的一有界闭区域且 $0<y<1$.

解：（1）将 I_1,I_2,I_3 中的积分区域分别记为

$D_1=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\},\ D_2=\{(x,y)\big||x|+|y|\le 1\},\ D_3=\{(x,y)\big|-1\le x\le 1,-1\le y\le 1\}$.

由于被积函数 $z=|xy|\ge 0$, 利用二重积分的几何意义，可把 I_1,I_2,I_3 分别看成以曲面 $z=|xy|$ 为顶，D_1,D_2,D_3 为底,母线平行于 z 轴的曲顶柱体的体积.

显然 $D_2\subset D_1\subset D_3$, 故 $I_2<I_1<I_3$.

（2）由题意可知，积分区域 $D=\{(x,y)\big|x\le 0,0<y<1\}$.

$\because 0<y<1$, 则 $y^2<y<y^{\frac{1}{2}}$，而 $x\le 0$，$\therefore y^2x^3\ge yx^3\ge y^{\frac{1}{2}}x^3$，利用重积分的保序性得

$$I_3<I_1<I_2.$$

2．证明：$1\le\iint\limits_D(\sin x^2+\cos y^2)\mathrm{d}\sigma\le\sqrt{2}$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}$.

证明：由于积分区域 D 关于直线 $y=x$ 对称，即关于积分变量具有对称性，

所以 $\iint\limits_D\cos y^2\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D\cos x^2\mathrm{d}\sigma.$

从而 $\iint\limits_D(\sin x^2+\cos y^2)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D(\sin x^2+\cos x^2)\mathrm{d}\sigma.$

因为 $\sin x^2+\cos x^2=\sqrt{2}\sin(x^2+\frac{\pi}{4})$, 且由 $0\le x\le 1$ 可得 $\frac{\pi}{4}\le x^2+\frac{\pi}{4}\le 1+\frac{\pi}{4}$,

所以 $1\le\sqrt{2}\sin(x^2+\frac{\pi}{4})\le\sqrt{2}.$

同时积分区域 D 的面积为 1，所以由二重积分的估值不等式可得

$1\le\iint\limits_D(\sin x^2+\cos x^2)\mathrm{d}\sigma\le\sqrt{2},$ 即 $1\le\iint\limits_D(\sin x^2+\cos y^2)\mathrm{d}\sigma\le\sqrt{2}.$ 证毕.

3．计算下列二重积分.

（1）$\iint\limits_D sign(y-x^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|-1\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}$；

（2）$\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2-2xy}+2)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 为圆域 $x^2+y^2\le 1$ 在第一象限的部分；

（3）$\iint\limits_D(x+y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由 $y^2=2x$, $x+y=4$, $x+y=12$ 所围成的闭区域；

（4）$\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由圆周 $x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=4y$ 及直线 $x-\sqrt{3}y=0$, $y-\sqrt{3}x=0$ 所围成的平面闭区域.

解：（1）记 $f(x,y)=sign(y-x^2)=\begin{cases}1, & y>x^2\\ 0, & y=x^2\\ -1, & y<x^2\end{cases}$

以曲线 $y=x^2$ 把积分区域 D 分割成三部分，即 $D=D_1\cup D_2\cup D_3$, 其中

$D_1=\{(x,y)\big|-1\le x\le 1,x^2<y\le 1\}$, $D_2=\{(x,y)\big|-1\le x\le 1,0\le y<x^2\}$,

$D_3=\{(x,y)\big|-1\le x\le 1,y=x^2\}$.

则 $f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D_1\\ 0, & (x,y)\in D_3\\ -1, & (x,y)\in D_2\end{cases}.$

所以

$$\iint_D sign(y-x^2)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1}1\,\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}(-1)\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}dy-\int_{-1}^{1}dx\int_0^{x^2}dy=\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx-\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3}.$$

（2）记 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-2xy}+2=|x-y|+2,$

以曲线 $y=x$ 把积分区域 D 分割成两部分,即 $D=D_1\bigcup D_2$,其中

$$D_1=\{(x,y)\Big|0\le x\le\frac{1}{\sqrt{2}},x<y\le\sqrt{1-x^2}\},\ D_2=\{(x,y)\Big|0\le y\le\frac{1}{\sqrt{2}},y\le x\le\sqrt{1-y^2}\}.$$

则 $f(x,y)=\begin{cases}x-y+2, & (x,y)\in D_2\\ y-x+2, & (x,y)\in D_1\end{cases}.$

在极坐标系下，$D_1=\{(\rho,\theta)\Big|0\le\rho\le 1,\frac{\pi}{4}<\theta\le\frac{\pi}{2}\},\ D_2=\{(\rho,\theta)\Big|0\le\rho\le1,0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\}$. 所以

$$\iint_D(\sqrt{x^2+y^2-2xy}+2)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1}(y-x+2)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}(x-y+2)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1[\rho(\cos\theta-\sin\theta)+2]\rho d\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1[\rho(\sin\theta-\cos\theta)+2]\rho d\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\{[\frac{1}{3}(\cos\theta-\sin\theta)\rho^3+\rho^2]\Big|_0^1\}\,d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\{[\frac{1}{3}(\sin\theta-\cos\theta)\rho^3+\rho^2]\Big|_0^1\}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\frac{1}{3}(\cos\theta-\sin\theta)+1]d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}[\frac{1}{3}(\sin\theta-\cos\theta)+1]d\theta$$

$$=[\frac{1}{3}(\sin\theta+\cos\theta)+\theta]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+[\frac{1}{3}(-\cos\theta-\sin\theta)+\theta]\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2\sqrt{2}-2}{3}+\frac{\pi}{2}.$$

或者利用直角坐标计算亦可：

$$\iint_D(\sqrt{x^2+y^2-2xy}+2)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1}(y-x+2)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}(x-y+2)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}}(y-x+2)dy+\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}(x-y+2)dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\{[(2-x)y+\frac{1}{2}y^2]\Big|_x^{\sqrt{1-x^2}}\}dx+\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\{[(2-y)x+\frac{1}{2}x^2]\Big|_y^{\sqrt{1-y^2}}\}dy$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(2\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-x^2}-2x+\frac{1}{2})dx$$

$$=2[\frac{1}{2}x-x^2+\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\frac{\pi}{2}=\frac{2\sqrt{2}-2}{3}+\frac{\pi}{2}.$$

（3）由$\begin{cases} y^2=2x \\ x+y=4 \end{cases}$求得两曲线交点为$(8,-4),(2,2)$, 由$\begin{cases} y^2=2x \\ x+y=12 \end{cases}$求得两曲线交点为

$(18,-6),(8,4)$. 以曲线$y=-4$和$y=2$把积分区域D分割成三部分，即$D=D_1\bigcup D_2\bigcup D_3$, 其

中$D_1=\{(x,y)\left|\frac{y^2}{2}\le x\le 12-y, 2\le y\le 4\right.\}$，$D_2=\{(x,y)\left|4-y\le x\le 12-y, -4\le y\le 2\right.\}$,

$D_3=\{(x,y)\left|\frac{y^2}{2}\le x\le 12-y, -6\le y\le -4\right.\}$. 则

$$\iint_D (x+y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1}(x+y)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}(x+y)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_3}(x+y)\mathrm{d}\sigma$$
$$=\int_2^4 dy\int_{\frac{y^2}{2}}^{12-y}(x+y)dx+\int_{-4}^2 dy\int_{4-y}^{12-y}(x+y)dx+\int_{-6}^{-4}dy\int_{\frac{y^2}{2}}^{12-y}(x+y)dx$$
$$=\int_2^4[72-\frac{1}{8}(y^2+2y)^2]dy+64\int_{-4}^2 dy+\int_{-6}^{-4}[72-\frac{1}{8}(y^2+2y)^2]dy$$
$$=[72y-\frac{1}{8}(\frac{y^5}{5}+y^4+\frac{4y^3}{3})]\Big|_2^4+64y\Big|_{-4}^2+[72y-\frac{1}{8}(\frac{y^5}{5}+y^4+\frac{4y^3}{3})]\Big|_{-6}^{-4}=543\frac{11}{15}.$$

（4）在极坐标系下，积分区域$D=\{(\rho,\theta)\left|2\sin\theta\le\rho\le 4\sin\theta, \frac{\pi}{6}<\theta\le\frac{\pi}{3}\right.\}$, 则

$$\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}\rho^3 d\rho=\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}[(4\sin\theta)^4-(2\sin\theta)^4]d\theta=60\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^4\theta d\theta$$
$$=60\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{(1-\cos 2\theta)^2}{4}d\theta=15(\frac{3}{2}\theta-\sin 2\theta+\frac{1}{8}\sin 4\theta)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=15(\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{3}}{8}).$$

4．计算二重积分$\iint_D\left(x^2+xy\mathrm{e}^{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$由

（1）圆域$x^2+y^2\le 1$ ；　　　（2）直线$y=x$, $y=-1$, $x=1$所围成的闭区域.

解：（1）在极坐标系下，积分区域$D=\{(\rho,\theta)\left|0\le\rho\le 1, 0<\theta\le 2\pi\right.\}$, 则

$$\iint_D (x^2+xye^{x^2+y^2})dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin\theta\cos\theta\cdot e^{\rho^2})d\rho$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(\rho^3\cos^2\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\cdot\rho^3 e^{\rho^2})d\rho=\int_0^{2\pi}[\frac{1}{4}\cos^2\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\int_0^1\rho^2 e^{\rho^2}d(\rho^2)]d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}(\frac{1}{4}\cos^2\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\int_0^1 ue^u du)d\theta=\int_0^{2\pi}[\frac{1}{4}\cos^2\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta(ue^u\Big|_0^1-\int_0^1 e^u du)]d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}(\frac{1}{4}\cos^2\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta)d\theta=\frac{1}{8}(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta-\cos 2\theta)\Big|_0^{2\pi}=\frac{\pi}{4}.$$

（2）在直角坐标系下，积分区域$D=\{(x,y)\left|-1\le x\le 1, -1\le y\le x\right.\}$, 则

$$\iint_D (x^2+xye^{x^2+y^2})dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{x}(x^2+xye^{x^2+y^2})dy=\int_{-1}^{1}[(x^2y+\frac{1}{2}xe^{x^2+y^2})\Big|_{-1}^{x}]dx$$

$$=\int_{-1}^{1}[(x^2(x+1)+\frac{1}{2}x(e^{2x^2}-e^{x^2+1})]dx=\int_{-1}^{1}x^2dx+\int_{-1}^{1}x^3dx+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x(e^{2x^2}-e^{x^2+1})dx,$$

由于$[-1,1]$关于原点对称，且被积函数x^3和$x(e^{2x^2}-e^{x^2+1})$均为奇函数，所以利用定积分的"偶倍奇零"性质可得，$\int_{-1}^{1}x^3dx$和$\int_{-1}^{1}x(e^{2x^2}-e^{x^2+1})dx$均等于零.从而

$$\iint_D (x^2+xye^{x^2+y^2})dxdy=\int_{-1}^{1}x^2dx=2\int_0^1 x^2dx=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{2}{3}.$$

5．交换二次积分$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}f(x,y)\mathrm{d}y$的积分顺序.

解：由题意可知,在直角坐标系下,用X型区域来描述积分区域D时，应该把D分割成两部分,即$D=D_1\bigcup D_2$,其中

$D_1=\{(x,y)\big|0\le x\le\pi,0\le y\le\sin x\}$，$D_2=\{(x,y)\big|\pi\le x\le 2\pi,\sin x\le y\le 0\}$. 则有

$$\int_0^{2\pi}dx\int_0^{\sin x}f(x,y)dy=\int_0^{\pi}dx\int_0^{\sin x}f(x,y)dy-\int_{\pi}^{2\pi}dx\int_{\sin x}^{0}f(x,y)dy=\iint_{D_1}f(x,y)dxdy-\iint_{D_2}f(x,y)dxdy.$$

要交换积分次序，应该用Y型区域来描述积分区域D，即有

$D_1=\{(x,y)\big|\arcsin y\le x\le\pi-\arcsin y,0\le y\le 1\}$,

$D_2=\{(x,y)\big|\pi-\arcsin y\le x\le 2\pi+\arcsin y,-1\le y\le 0\}$.

故交换积分次序得$\int_0^{2\pi}dx\int_0^{\sin x}f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)dx-\int_{-1}^{0}dy\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y}f(x,y)dx.$

6．设$f(x)$在$[0,a]$ $(a>0)$上连续，试证明:

$$\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{e}^{m(a-x)}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a(a-x)\mathrm{e}^{m(a-x)}f(x)\mathrm{d}x\ .$$

证明：由$\int_0^a dy\int_0^y e^{m(a-x)}f(x)dx$可知 Y 型积分区域$D=\{(x,y)\big|0\le x\le y,0\le y\le a\}$, 表示成 X 型时即为$D=\{(x,y)\big|0\le x\le a,x\le y\le a\}$. 则交换原积分的次序后得到

$$\int_0^a dy\int_0^y e^{m(a-x)}f(x)dx=\int_0^a dx\int_x^a e^{m(a-x)}f(x)dy=\int_0^a e^{m(a-x)}f(x)dx\int_x^a dy=\int_0^a(a-x)e^{m(a-x)}f(x)dx.$$

7．将$\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)dz$. 化成先对$x$再对$y$最后对$z$的三次积分.

解：由给定的三次积分可知是将积分区域Ω向xoy平面投影，即可记成

$\Omega=\{(x,y,z)\big|-1\le x\le 1,\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2},\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\}$,要将原积分化成先对$x$

再对 y 最后对 z 的三次积分，应该将 Ω 向 yoz 平面投影，即

$\Omega=\{(x,y,z)\big|-\sqrt{z^2-y^2}\le x\le\sqrt{z^2-y^2},\ -z\le y\le z, 0\le z\le 1\}$.

则交换原积分的次序后得到

$$\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)dz=\int_0^1 dz\int_{-z}^{z}dy\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}}f(x,y,z)dx.$$

8．计算下列三重积分.

（1）$\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}v$，其中 Ω 由 $x^2+y^2=4, z=0, y+z=2$ 所围成的闭区域；

（2）$\iiint\limits_{\Omega} z^2\ \mathrm{d}v$，其中 Ω 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}, z=1, z=2$ 所围成的闭区域；

（3）$\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}v$，其中 Ω 由柱面 $x^2+y^2=2x$ 及平面 $z=0,\ z=a\ (a>0),\ \ y=0$ 所围成半圆柱体；

（4）$\iiint\limits_{\Omega}\left(x+y+z\right)^2\mathrm{d}v$，其中 Ω 由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 所围成的闭区域；

解：（1）由题意可得 Ω 在 xoy 平面上的投影区域为 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 4\}$. 从而在柱面坐标系下 $\Omega=\{(\rho,\theta,z)\big|0\le\rho\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi, 0\le z\le 2-\rho\sin\theta\}$, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^2 d\rho\int_0^{2-\rho\sin\theta}zdz=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^2(2-\rho\sin\theta)^2 d\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}[(\frac{2}{3}\rho^3-\frac{1}{2}\rho^4\sin\theta+\frac{1}{10}\rho^5\sin^2\theta)\Big|_0^2]d\theta=\int_0^{2\pi}(\frac{16}{3}-8\sin\theta+\frac{16}{5}\sin^2\theta)d\theta$$

$$=(\frac{16}{3}\theta+8\cos\theta+\frac{8}{5}\theta-\frac{4}{5}\sin 2\theta)\Big|_0^{2\pi}=\frac{208}{15}\pi.$$

（2）方法一（投影法“先单后重”）：记 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=2$ 所围成的闭区域为 Ω_1, 又记 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 所围成的闭区域为 Ω_2, 易知 $\Omega_1=\Omega\bigcup\Omega_2$. 由于在柱面坐标系下，

$\Omega_1=\{(\rho,\theta,z)\big|0\le\rho\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi, \rho\le z\le 2\}, \Omega_2=\{(\rho,\theta,z)\big|0\le\rho\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi, \rho\le z\le 1\}$,

则 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega_1} z^2\mathrm{d}v-\iiint\limits_{\Omega_2} z^2\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho d\rho\int_\rho^2 z^2dz-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_\rho^1 z^2dz$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho(8-\rho^3)d\rho-\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho(1-\rho^3)d\rho$$

$$=\frac{2}{3}\pi(4\rho^2-\frac{1}{5}\rho^5)\Big|_0^2-\frac{2}{3}\pi(\frac{1}{2}\rho^2-\frac{1}{5}\rho^5)\Big|_0^2=\frac{31}{5}\pi.$$

方法二（截面法“先重后单”）：先将Ω向z轴投影，得$1\le z\le 2$. 再用过点$(0,0,z)$，平行于xoy面的平面截Ω得平面圆域$D_z=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le z^2\}$, 其面积为$\pi z^2$. 即$\Omega$可表示为

$\Omega=\{(x,y,z)\big|1\le z\le 2, x^2+y^2\le z^2\}$, 所以

$$\iiint_\Omega z^2\mathrm{d}v=\int_1^2 z^2dz\iint_{D_z}dxdy=\int_1^2 z^2\cdot\pi z^2dz=\frac{\pi}{5}z^5\Big|_1^2=\frac{31\pi}{5}.$$

（3）在柱面坐标系下，$\Omega=\{(\rho,\theta,z)\big|0\le\rho\le 2\cos\theta,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le z\le a\}$, 则

$$\iiint_\Omega z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}v=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2d\rho\int_0^a zdz=\frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2d\rho$$

$$=\frac{4}{3}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta=\frac{4}{3}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)d\sin\theta=\frac{4}{3}a^2(\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8}{9}a^2.$$

（4）在球面坐标系下，$\Omega=\{(r,\theta,\varphi)\big|0\le r\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}\}$, 则

$$\iiint_\Omega(x+y+z)^2dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^2 r^4dr=\frac{64\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi=-\frac{64\pi}{5}\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{32\pi}{5}(2-\sqrt{2})$$

9．设$f(u)$在R^+上连续，$f(0)=0,\ f'(0)$ 存在，

$F(t)=\iiint\limits_{\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le t^2\}}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，求$\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{\pi t^4}F(t)$.

解：利用球面坐标，将$F(t)$化成三次积分得，

$$F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^t r^2f(r)dr=2\pi(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi}\int_0^t r^2f(r)dr=4\pi\int_0^t r^2f(r)dr,$$

则$\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{\pi t^4}F(t)=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{4\pi\int_0^t r^2f(r)dr}{\pi t^4}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{4t^2f(t)}{4t^3}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(0).$

10．求半径为R的球的表面积.

解：（略）$4\pi R^2$.

11．求均匀球体对于过球心的一条轴L的转动惯量.

解：（略）$\frac{8}{15}\pi R^5\rho$.

12．求半径为R的均匀半圆薄片对其直径的转动惯量.

解：（略）$\frac{1}{8}\pi R^4\rho$.

13．求曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z\ (a>0)$ 所围成的立体体积.

解：由于曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z\ (a>0)$ 的图形不便画出，难以看图定积分限，只好借助曲面方程来定积分限。引入球面坐标，令 $x=r\sin\varphi\cos\theta,\ y=x=r\sin\varphi\sin\theta,\ z=r\cos\varphi,$

则曲面方程可化为 $r^4=a^3r\cos\varphi,$ 即 $r=a\sqrt[3]{\cos\varphi},$ 从而可得到 $0\le r\le a\sqrt[3]{\cos\varphi}.$

由 $\cos\varphi\ge 0$ 得到 $-\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2},$ 但球面坐标中对 φ 本身限定了 $0\le\varphi\le\pi,$ 所以应取 $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}.$

又因为 $r=a\sqrt[3]{\cos\varphi}$ 中 r 的变化范围与 θ 无关，故应取 $0\le\theta\le 2\pi.$

从而在球面坐标系中，曲面所围成的立体 Ω 可写成如下形式：

$\Omega=\{(r,\theta,\varphi)\big|0\le r\le a\sqrt[3]{\cos\varphi},\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\},$

所以 $V=\iiint\limits_{\Omega}dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{a\sqrt[3]{\cos\varphi}}r^2\,dr=\dfrac{2\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi$

$$=\frac{2\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\sin\varphi=\frac{\pi a^3}{3}\sin^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^3}{3}.$$

14．求曲面 $z=x^2+y^2+1$ 上点 $M_0(1,-1,3)$ 处的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围成立体的体积.

解：记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+1-z,$ 则曲面 $z=x^2+y^2+1$ 上过点 $M_0(1,-1,3)$ 的法向量

$\vec{n}\big|_{(1,-1,3)}=(F_x,F_y,F_z)\big|_{(1,-1,3)}=(2x,2y,-1)\big|_{(1,-1,3)}=(2,-2,-1),$ 所以在点 $M_0(1,-1,3)$ 处的切平面方程为 $2(x-1)-2(y+1)-(z-3)=0,$ 即 $2x-2y-z=1.$

记切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围成立体为 Ω，由 $\begin{cases}2x-2y-z=1\\ z=x^2+y^2\end{cases}$ 消去 z 得投影柱面方程为

$(x-1)^2+(y+1)^2=1,$ 即得 Ω 在 xoy 平面上的投影区域 $D=\{(x,y)\big|(x-1)^2+(y+1)^2\le 1\}$. 从而在直角坐标系下，

$\Omega=\{(x,y,z)\big|0\le x\le 2,\ -1-\sqrt{2x-x^2}\le y\le -1+\sqrt{2x-x^2},\ x^2+y^2\le z\le 2x-2y-1\},$ 则

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^2dx\int_{-1-\sqrt{2x-x^2}}^{-1+\sqrt{2x-x^2}}dy\int_{x^2+y^2}^{2x-2y-1}dz=\int_0^2dx\int_{-1-\sqrt{2x-x^2}}^{-1+\sqrt{2x-x^2}}(2x-2y-1-x^2-y^2)dy$$

$$=\int_0^2\{[(2x-x^2-1)y-y^2-\frac{1}{3}y^3]\Big|_{-1-\sqrt{2x-x^2}}^{-1+\sqrt{2x-x^2}}\}dx=\frac{4}{3}\int_0^2[1-(x-1)^2]^{\frac{3}{2}}dx,$$

令 $x-1=\sin t, t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 则

$$\frac{4}{3}\int_0^2[1-(x-1)^2]^{\frac{3}{2}}dx=\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\cos 2t)^2}{4}dt=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{3}{2}+2\cos 2t+\frac{1}{2}\cos 4t)dt$$

$$=\frac{2}{3}(\frac{3}{2}t+\sin 2t+\frac{1}{8}\sin 4t)\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}.$$

所以 $V=\frac{\pi}{2}$.

15．求由抛物柱面 $z=4-x^2$，平面 $y=6$ 及三个坐标面所围成的立体在第一卦限上的体积.

解：在直角坐标系下，$\Omega=\{(x,y,z)\big|0\le x\le 2,\ 0\le y\le 6, 0\le z\le 4-x^2\}$, 则

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{dxdydz}=\int_0^6 dy\int_0^2 dx\int_0^{4-x^2}dz=6\int_0^2(4-x^2)dx=6(4x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^2=32.$$

(B)

1．利用积分性质判断积分 $\iint\limits_{\{(x,y)|x^2+y^2\le 4\}}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的符号.

解：$\iint\limits_{D}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}dxdy+\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 3}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}dxdy+\iint\limits_{3\le x^2+y^2\le 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}dxdy$

$$\le\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt[3]{1-0}dxdy+\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 3}\sqrt[3]{1-1}dxdy+\iint\limits_{3\le x^2+y^2\le 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}dxdy=\pi+(-\sqrt[3]{2})(4\pi-3\pi)=\pi(1-\sqrt[3]{2})<0$$

2．计算下列二重积分.

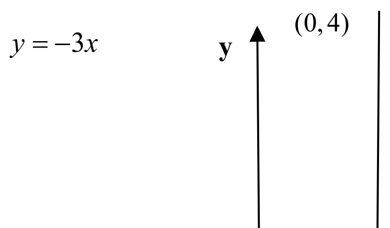
（1）$\iint\limits_D x\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由 $y=4-x^2$，$y=-3x, x=1$ 所围成的闭区域；

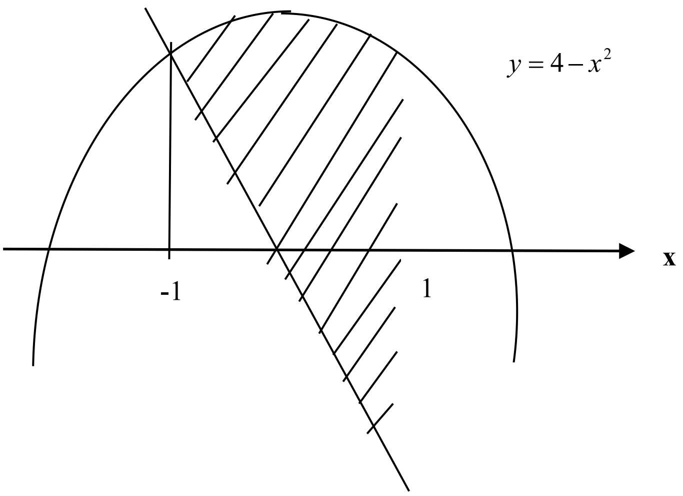
（2）$\iint\limits_D \max\left(xy,1\right)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\big|0\le x\le 2,0\le y\le 2\right\}$；

（3）$\iint\limits_D xy\left[1+x^2+y^2\right]\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\big|x^2+y^2\le\sqrt{2},x\ge 0,y\ge 0\right\}$，这里 $\left[1+x^2+y^2\right]$ 表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数；

（4）$\iint\limits_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\big|0\le x+y\le 1,x\ge 0,y\ge 0\right\}$.

解：（1）积分区域 D 如下图：





$$D=D_1\cup D_2,\ D_1:0\le y\le 4,\ -\frac{y}{3}\le x\le\frac{y}{3}\text{和}D_2:0\le x\le 1,\ -3x\le y\le 3x$$

$$\iint_D xIn(y+\sqrt{1+y^2})d\sigma$$
$$=\iint_{D_1} xIn(y+\sqrt{1+y^2})d\sigma+\iint_{D_2} xIn(y+\sqrt{1+y^2})d\sigma$$

由于 D_1 区域关于 y 轴对称，被积函数关于 x 是奇函数，有 $\iint_{D_1} xIn(y+\sqrt{1+y^2})d\sigma=0$，

由于 D_2 区域关于 x 轴对称，被积函数关于 y 是奇函数，有 $\iint_{D_2} xIn(y+\sqrt{1+y^2})d\sigma=0$，

因此， $\iint_D xIn(y+\sqrt{1+y^2})d\sigma=0$

（2） $D=D_1\cup D_2\cup D_3$，

$$D_1:0\le y\le\frac{1}{2},\ 0\le x\le 2,\ D_2:\frac{1}{2}\le y\le 2,\ 0\le x\le\frac{1}{y}\text{和}D_3:\frac{1}{2}\le y\le 2,\ \frac{1}{y}\le x\le 2$$

$$\iint_D \max(xy,1)d\sigma=\iint_{D_1}\max(xy,1)d\sigma+\iint_{D_2}\max(xy,1)d\sigma+\iint_{D_3}\max(xy,1)d\sigma$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_0^2 dx+\int_{\frac{1}{2}}^2 dy\int_0^{\frac{1}{y}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^2 dy\int_{\frac{1}{y}}^2 xydx=1+\int_{\frac{1}{2}}^2\frac{1}{y}dy+\int_{\frac{1}{2}}^2(2y-\frac{1}{2y})dy$$
$$=1+\int_{\frac{1}{2}}^2(2y+\frac{1}{2y})dy=1+(y^2+\frac{1}{2}Iny)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{19}{4}+In2.$$

（3） $D=D_1\cup D_2,\ D_1=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1,x\ge 0,y\ge 0\right\}$，

$D_2=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le\sqrt{2},x\ge 0,y\ge 0\right\}$

$$\iint_D xy\left[1+x^2+y^2\right]d\sigma=\iint_{D_1} xy\left[1+x^2+y^2\right]d\sigma+\iint_{D_2} xy\left[1+x^2+y^2\right]d\sigma$$

$$=\iint_{D_1} xyd\sigma+\iint_{D_2} 2xyd\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot rdr+\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^{\sqrt[4]{2}}2r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot rdr$$

$$=-\frac{1}{4}\cos 2\theta\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{4}r^4\Bigg|_0^1-\frac{1}{2}\cos 2\theta\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{4}r^4\Bigg|_1^{\sqrt[4]{2}}=\frac{3}{8}$$

（4）令$x+y=u,\ \dfrac{y}{x}=v$, 则$D'=\{(u,v)\,|\,0\le u\le 1,0\le v\le+\infty\}$, 因为

$$x=\frac{u}{1+v},y=\frac{uv}{1+v},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{1+v} & \dfrac{-u}{(1+v)^2}\\ \dfrac{v}{1+v} & \dfrac{u}{(1+v)^2}\end{vmatrix}=\frac{u}{(1+v)^2},\text{于是}$$

$$\text{原式}=\iint_D\frac{uIn(1+v)}{\sqrt{1-u}}\frac{u}{(1+v)^2}dudv=\int_0^1\frac{u^2}{\sqrt{1-u}}\int_0^{+\infty}\frac{In(1+v)}{(1+v)^2}dv=\frac{16}{15}$$

3．设积分区域$D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 2,0\le y\le 2\right\}$.

（1）计算二重积分$A=\iint\limits_D\left|xy-1\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

（2）若函数$f\left(x,y\right)$在D上连续且$\iint\limits_D f\left(x,y\right)\mathrm{d}\sigma=0$，$\iint\limits_D xyf\left(x,y\right)\mathrm{d}\sigma=1$，试证存在$\left(\xi,\eta\right)\in D$，使得$\left|f\left(\xi,\eta\right)\right|\ge\dfrac{1}{A}$.

解：(1) $\iint\limits_D|xy-1|d\sigma=\iint\limits_{D_1}|xy-1|d\sigma+\iint\limits_{D_2}|xy-1|d\sigma+\iint\limits_{D_3}|xy-1|d\sigma$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_0^2(1-xy)dx+\int_{\frac{1}{2}}^2dy\int_0^{\frac{1}{y}}(1-xy)dx+\int_{\frac{1}{2}}^2dy\int_{\frac{1}{y}}^2(xy-1)dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}(x-\frac{1}{2}x^2y)\Bigg|_0^2dy+\int_{\frac{1}{2}}^2(x-\frac{1}{2}x^2y)\Bigg|_0^{\frac{1}{y}}dy+\int_{\frac{1}{2}}^2(\frac{1}{2}x^2y-x)\Bigg|_{\frac{1}{y}}^2dy$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}(2-2y)dy+\int_{\frac{1}{2}}^2\frac{1}{2y}dy+\int_{\frac{1}{2}}^2(2y+\frac{1}{2y}-2)dy=\int_0^{\frac{1}{2}}(2-2y)dy+\int_{\frac{1}{2}}^2(2y+\frac{1}{y}-2)dy$$

$$=\frac{3}{4}+2\ln 2+\frac{3}{4}=\frac{3}{2}+2\ln 2$$

$D=D_1\cup D_2\cup D_3$，

$D_1=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le \frac{1}{2},0\le x\le 2\right\}, D_2=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{2}\le y\le 2,0\le x\le \frac{1}{y}\right\}$ 和 $D_3=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{2}\le y\le 2,\ \frac{1}{y}\le x\le 2\right\}$

（2）根据 $f(x,y)$ 在 D 上连续知，存在 $(\xi,\eta)\in D$，使得 $f(\xi,\eta)=\max_D f(x,y)$.

$$1=\iint_D f(x,y)(xy-1)d\sigma\le\iint_D |f(x,y)||(xy-1)|d\sigma\le|f(\xi,\eta)|\iint_D|(xy-1)|d\sigma$$

因此,$|f(\xi,\eta)|\ge\frac{1}{\mathrm{A}}$

4．设 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{|x^2+y^2-2|+2}}+\dfrac{1}{\pi}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$，且函数 $f(x,y)$ 在区域 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le\sqrt{2x-x^2}\right\}$ 上连续，计算二重积分 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$.

解：区域 D 的面积 $S_D=\frac{\pi}{2}$，在极坐标系下可表示为：$0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le r\le 2\cos\theta$

设 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$=A，对等式两边在区域 D 上积分

$f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{|x^2+y^2-2|+2}}+\dfrac{1}{\pi}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 有，

$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D\dfrac{1}{\sqrt{|x^2+y^2-2|+2}}d\sigma+\dfrac{1}{\pi}\iint_D f(x,y)d\sigma\cdot\dfrac{\pi}{2}$. 由上述等式有

$$A=\frac{2}{3}\iint_D\frac{1}{\sqrt{|x^2+y^2-2|+2}}d\sigma=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\frac{1}{\sqrt{|r^2-2|+2}}rdr$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\frac{1}{\sqrt{4-r^2}}rdr+\frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\frac{1}{\sqrt{r^2}}rdr=-\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{4-r^2}\Bigg|_0^{2\cos\theta}d\theta+\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin\theta)d\theta+\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta=\frac{1}{3}\times\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}\cos\theta\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{3}\sin\theta\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{12}$$

5. 将 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v$ 在 (1)直角坐标系; (2)柱面坐标系; (3)球面坐标系下化为三次积分.其中 Ω 由 $z=\sqrt{4-x^2-y^2},z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成的闭区域.

解：由题意知积分区域在 xoy 平面内的投影区域 D 为：$x^2+y^2\le 1$

（1）$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iint\limits_{D} dxdy\int\limits_{\sqrt{3(x^2+y^2)}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x,y,z)dz=\int\limits_{-1}^{1} dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\int\limits_{\sqrt{3(x^2+y^2)}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x,y,z)dz$；

(2) $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int\limits_{0}^{2\pi} d\theta\int\limits_{0}^{1} rdr\int\limits_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{4-r^2}} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)dz$；

(3) $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int\limits_{0}^{2\pi} d\theta\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sin\varphi d\varphi\int\limits_{0}^{2} f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2dr$

6．计算下列三重积分.

（1）$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}v$，其中$\Omega$由$z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2), z=1, z=4$所围成的闭区域；

（2）$\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是两个球 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 及$x^2+y^2+z^2\le 2Rz$ ($R>0$)的公共部分所围成的闭区域；

（3）$\iiint\limits_{\Omega}\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}v$，其中$\Omega$由$xOy$平面上曲线$y^2=2x$绕$x$轴旋转而成的曲面与平面$x=5$所围成的闭区域.

解：（1）$D_z=\left\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le\sqrt{2z}, -\pi\le\theta\le\pi\right\}$,由于积分区域$D_z$关于$\theta$对称，函数

$5r^4\cos\theta\sin^2\theta\sin r$关于$r$是奇函数，有$\iint\limits_{D_z} 5r^4\cos\theta\sin^2\theta\sin rdr=0$.

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})dv=\int\limits_{1}^{4} dz\iint\limits_{D_z}(r^2\cos\theta+5r^3\cos\theta\sin^2\theta\sin r)rdrd\theta$$

$$=\int\limits_{1}^{4} dz\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\theta\int\limits_{0}^{\sqrt{2z}}(r^3\cos^2\theta)dr=\int\limits_{1}^{4} dz\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{4}r^4\cos^2\theta\left|\begin{matrix}\sqrt{2z}\\0\end{matrix}\right. d\theta=\int\limits_{1}^{4} z^2dz\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2\theta d\theta$$

$$=21\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\frac{21}{2}(\theta+\frac{\sin 2\theta}{2})\left|\begin{matrix}\pi\\-\pi\end{matrix}\right.=21\pi$$

（2）$D_z=\left\{(x,y)\,|\,R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right\}$

$$\iiint_\Omega z^2 dv=\int_0^R dz\iint_{D_z} z^2 dxdy=\int_0^R z^2 dz\iint_{D_z} dxdy$$

当$0\le z\le \frac{R}{2},\iint_{D_z} dxdy=\pi(2Rz-z^2)$;当$\frac{R}{2}\le z\le R,\iint_{D_z} dxdy=\pi(R^2-z^2)$;

$$\iiint_\Omega z^2 dv=\int_0^R dz\iint_{D_z} z^2 dxdy=\int_0^R z^2 dz\iint_{D_z} dxdy=\pi\int_0^{\frac{R}{2}} z^2(2Rz-z^2)dz+\pi\int_{\frac{R}{2}}^{R} z^2(R^2-z^2)dz$$

$$=\pi(\frac{1}{2}Rz^4-\frac{1}{5}z^5)\Bigg|_0^{\frac{R}{2}}+\pi(\frac{1}{3}R^2z^3-\frac{1}{5}z^5)\Bigg|_{\frac{R}{2}}^{R}=\frac{59\pi R^5}{480}$$

（3）$D_x=\left\{(y,z)\,|\,0\le x\le 5, x^2+y^2\le 2x\right\}$

$$\iiint_\Omega (y^2+z^2)dv=\int_0^5 dx\iint_{D_z}(y^2+z^2)dydz=\int_0^5 dx\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2x}} r^2\cdot rdr$$

$$=\int_0^5 dx\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}r^4\Bigg|_0^{\sqrt{2x}}d\theta=2\pi\int_0^5 x^2dx=\frac{250\pi}{3}$$

7．设函数$f(x)$连续且恒大于零,$F(t)=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v}{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma}$，$G(t)=\dfrac{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)\mathrm{d}x}$，

其中$\Omega(t)=\{(x,y,z)\,\big|\,x^2+y^2+z^2\le t^2\}$，$D(t)=\{(x,y)\,\big|\,x^2+y^2\le t^2\}$．

(1) 讨论$F\left(t\right)$在区间$\left(0,+\infty\right)$内的单调性；　(2) 证明当$t>0$时,$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$．

(1)解：$$F(t)=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^t f(r^2)r^2\sin\varphi dr}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t f(r^2)rdr}=\frac{2\int_0^t f(r^2)r^2dr}{\int_0^t f(r^2)rdr}，$$

$F'(t)=\dfrac{2tf(t^2)\int_0^t f(r^2)r(t-r)dr}{\left[\int_0^t f(r^2)rdr\right]^2}$，显然在$(0,+\infty)$上$F'(t)>0$，所以$F(t)$在$(0,+\infty)$内增加.

(2) 证明：令$G(t)=\dfrac{\pi\int_0^t f(r^2)rdr}{\int_0^t f(r^2)dr}$，要证$t>0$时，$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$，只要证明当$t>0$时，

$F(t)-\dfrac{2}{\pi}G(t)>0$，即$\int_0^t f(r^2)r^2dr\int_0^t f(r^2)dr-(\int_0^t f(r^2)rdr)^2>0$

令$g(t)=\int_0^t f(r^2)r^2dr\int_0^t f(r^2)dr-(\int_0^t f(r^2)rdr)^2$

则$g'(t)=f(t^2)\int_0^t f(r^2)(t-r)^2dr>0,$ 故$g(t)$在$(0,+\infty)$内单调增加，又因为$g(t)$在$t=0$处连续，$\therefore t>0, g(t)>g(0)$，而$g(0)=0$，故当$t>0, g(t)>0$，因此结论得证.

8．求满足下列性质的曲线C，设$P_0\left(x_0,y_0\right)$为曲线$y=2x^2$上任一点，则由曲线$x=x_0$，$y=2x^2$，$y=x^2$所围成区域的面积A_1与曲线$y=y_0$，$y=2x^2$和C所围成区域的面积A_2相等.

解：根据题意可知有两种情况：

（1）当曲线 C 位于$y=2x^2$和$y=x^2$之间时，有

$$\int_0^{x_0}dx\int_{x^2}^{2x^2}dy=\int_0^{y_0}dy\int_{\frac{y}{\sqrt{2}}}^{x(y)}dx\Rightarrow\int_0^{y_0}x(y)dy=\frac{5\sqrt{2}}{12}y_0^{3/2}$$

上述等式两边关于y_0 求导数有，$x(y_0)=\dfrac{5\sqrt{2}}{8}y_0^{1/2}$，此时曲线 C 的方程为$y=\dfrac{32}{25}x^2$

（2）当曲线 C 位于$y=2x^2$上方时，

$$\int_0^{x_0}dx\int_{x^2}^{2x^2}dy=\int_0^{y_0}dy\int_{x(y)}^{\frac{y}{\sqrt{2}}}dx\Rightarrow\int_0^{y_0}x(y)dy=\frac{\sqrt{2}}{4}y_0^{3/2},$$

上述等式两边关于y_0 求导数有，$x(y_0)=\dfrac{3}{4\sqrt{2}}y_0^{1/2}$，此时曲线 C 的方程为$y=\dfrac{32}{9}x^2$.

综上所述曲线 C 的方程为$y=\dfrac{32}{25}x^2$或者$y=\dfrac{32}{9}x^2$.

(C)

1. 一个炼钢炉为旋转体形，剖面壁线的方程为$9x^2=z(3-z)^2, 0\le z<3$，若炉内储有高为h 的均质钢液，不计炉体的自重，求它的质心.

解：利用对称性可知质心在 z 轴上，故其坐标为

$$\bar{x}=\bar{y}=0,\ \bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz}{V}$$

采用柱坐标，则壁炉方程为$9r^2=z(3-z)^2$，因此

$$\iiint\limits_{\Omega} dxdydz=\int_0^h dz\iint\limits_{D_z} dxdy=\int_0^h \frac{\pi}{9}z(3-z)^2dz=\frac{\pi}{9}h^3(\frac{9}{2}-2h+\frac{1}{4}h^2)\text{，}\ \bar{z}=\frac{60-30h+4h^2}{90-40h+5h^2}$$

因此质心坐标为$(0,0,\dfrac{60-30h+4h^2}{90-40h+5h^2})$

2．设有一高度为$h(t)$（t为时间)的雪堆在融化过程中，其侧面满足方程$z=h(t)-\dfrac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$,设长度单位为厘米，时间单位为小时，已知体积减少的速率与侧面积成正比(比例系数 0.9)，问高度为 130 厘米的雪堆全部融化需要多少小时?

解：雪堆体积为 V，侧面积为 S，$D_z=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le\frac{1}{2}\left[h^2(t)-h(t)z\right]\right\}$， 则

$$V=\int_0^{h(t)}dz\iint\limits_{D_z}dxdy=\int_0^{h(t)}\frac{\pi}{2}\left[h^2(t)-h(t)z\right]dz\iint\limits_{D_z}dxdy=\frac{\pi}{4}h^3(t)\ .$$

记$D_0=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le\frac{1}{2}h^2(t)\right\}$,

$$S=\iint\limits_{D_0}\sqrt{1+(z_x^{'})^2+(z_y^{'})^2}dxdy=\iint\limits_{D_0}\sqrt{1+\frac{16(x^2+y^2)}{h^2(t)}}dxdy=\frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\sqrt{h^2(t)+16r^2}rdr=\frac{13\pi}{12}h^2(t).$$

由题意知，$\dfrac{dV}{dt}=-0.9S$ 带入 V 和 S 得，$\dfrac{dh}{dt}=-\dfrac{13}{10}$.根据$h(0)=130$，

$h(t)=-\dfrac{13}{10}t+130\to 0$,得$t=100$小时.

3. 在均匀的半径为R的圆形薄片的直径上，要接上一个一边与直径等长的同样材料的均匀矩形薄片，使整个薄片的重心恰好落在圆心上，问接上去的均匀矩形薄片的另一边长度应为多少?

解:设旁接矩形的宽度为 b, 以圆心为坐标原点建立直角坐标系，由于要求拼接的平面块形的重心在圆心，故平面块对 y 轴的静力矩应为 0，即有关系式$M_y=0$.

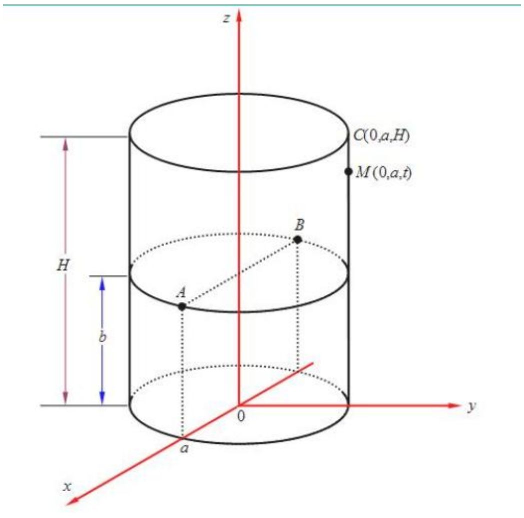
$$M_y=\iint_D xd\sigma=\iint_{D_1} xd\sigma+\iint_{D_2} xd\sigma=\int_{-b}^{0}dx\int_{-R}^{R}xdy+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^R r\cos\varphi rdr$$

$$=-2R(\frac{-b}{2})^2+\frac{R^3}{3}\sin\varphi|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=-Rb^2+\frac{2}{3}R^3$$

由此推出$b=\sqrt{\frac{2}{3}}R$.

4. 一个底半径为 1、高为 6 的开口圆柱形水桶，在距底为 2 处有两个小孔，两小孔的连线与水桶轴线相交，试问该水桶最多能盛多少水?

解：首先建立一个底半径为 a、高为 H 的开口圆柱形水桶，在距底为 b 处有两个小孔，两小孔的连线与水桶轴线相交的水桶最多能盛多少水的公式. 建立如下图所示的坐标系，两个



小孔的位置为$(a,0,b)$和$(-a,0,b)$,水桶侧面的方程为$x^2+y^2=a^2$ ，在桶壁上取一点$M(0,a,t)$，将水桶倾斜，使水面$\prod$过 A,B,M 三点，则桶中的盛水量$V(t)$就是由水面$\prod$、桶底$z=0$及桶壁$x^2+y^2=a^2$所围成的立体Ω的体积，而问题即求$t\in[b,H]$(由对称性，只需讨论$b\le t\le H$的情形),使$V(t)$取最大.由于$\prod$过 A,B,M 三点的平面$\prod$及立体Ω的方程分别为

$$\prod:\begin{vmatrix}x-a & y & z-b\\ -2a & 0 & 0\\ -a & a & t-b\end{vmatrix}=0,\ \text{即}\prod:z=a^{-1}[ab+y(t-b)],$$

$\Omega:0\le z\le a^{-1}[ab+y(t-b)],(x,y)\in D,$ 其中

（1）若$b\le t\le 2b,$ 则$D:x^2+y^2\le a^2$，故此时盛水量为

$$V(t)=\frac{1}{a}\iint_D[ab+y(t-b)]d\sigma=b\iint_D d\sigma=\pi a^2b;$$

（2）若 $2b\le t\le H$，则 $D:|x|\le\sqrt{a^2-y^2},-ab/(t-b)\le y\le a,$ 故此时盛水量为

$$V(t)=\frac{1}{a}\iint_D[ab+y(b-t)]d\sigma=\frac{1}{a}\int_{-ab/(t-b)}^{a}[ab+y(b-t)]dy\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}dx$$

$$=\frac{2}{a}\int_{-ab/(t-b)}^{a}[ab+y(b-t)]\sqrt{a^2-y^2}dy=2b\int_{-ab/(t-b)}^{a}\sqrt{a^2-y^2}dy+\frac{2(t-b)}{a}\int_{-ab/(t-b)}^{a}y\sqrt{a^2-y^2}dy$$

$$=b[y\sqrt{a^2-y^2}+a^2\arcsin(y/a)]\Big|_{-ab/(t-b)}^{a}-\frac{2(t-b)}{3a}(a^2-y^2)^{3/2}\Big|_{-ab/(t-b)}^{a}$$

$$=\frac{\pi}{2}a^2b+a^2b\arcsin(\frac{b}{t-b})+\frac{a^2(2t^2-4bt+3b^2)}{3(t-b)^2}\sqrt{t(t-2b)},$$

所以 $V(t)=\begin{cases}\pi a^2b & 若b\le t\le 2b;\\ \frac{\pi}{2}a^2b+a^2b\arcsin(\frac{b}{t-b})+\frac{a^2(2t^2-4bt+3b^2)}{3(t-b)^2} & 若2b\le t\le H\end{cases}$

$$\frac{dV}{dt}=\begin{cases}0 & 若b\le t\le 2b,\\ \frac{2a^2[b^4+b^2(t-b)^2+(t-b)^4]}{3(t-b)^3\sqrt{(t-b)^2-b^2}}>0 & 若2b\le t\le H\end{cases}$$

$$\max V(t)=V(H)=\frac{\pi}{2}a^2b+a^2b\arcsin(\frac{b}{H-b})+\frac{a^2(2H^2-4bH+3b^2)}{3(H-b)^2}\sqrt{H(H-2b)}.$$

代入 $a=1,H=6,b=2$ 得，$\max V(t)=\frac{4\pi}{3}+\frac{3}{2}\sqrt{3}$

5. 在高为 H、底半径为 R 且密度均匀（密度 ρ 为常数）的圆柱体中心轴上有一单位质点，它距圆柱体底面高度为 a，求圆柱体对质点的引力.

解：以圆柱底面为 xoy 平面，中心轴为 z 轴建立直角坐标系，设所求引力

$$\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k},$$

利用对称性知引力分量 $F_x=0,F_y=0.$ 分两种情况

（1）$0\le a<H$

$$F_z=\iiint\limits_{\Omega} G\rho\frac{z-a}{\left[x^2+y^2+(z-a)^2\right]^{3/2}}dv$$

$$=G\rho\int_0^H(z-a)dz\iint\limits_{D_z}\frac{z-a}{\left[x^2+y^2+(z-a)^2\right]^{3/2}}dxdy$$

$$=G\rho\int_0^H(z-a)dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\frac{z-a}{\left[r^2+(z-a)^2\right]^{3/2}}rdr$$

$$=2\pi G\rho\int_0^a(z-a)dz\int_0^R\frac{z-a}{\left[r^2+(z-a)^2\right]^{3/2}}rdr+2\pi G\rho\int_a^H(z-a)dz\int_0^R\frac{z-a}{\left[r^2+(z-a)^2\right]^{3/2}}rdr$$

$$=2\pi G\rho\int_0^a(z-a)\left[\frac{1}{a-z}-\frac{1}{\sqrt{R^2+(a-z)^2}}\right]dz+2\pi G\rho\int_a^H(z-a)\left[\frac{1}{z-a}-\frac{1}{\sqrt{R^2+(a-z)^2}}\right]dz$$

$$=2\pi G\rho\int_0^a\left[\frac{a-z}{\sqrt{R^2+(a-z)^2}}-1\right]dz+2\pi G\rho\int_a^H\left[1-\frac{z-a}{\sqrt{R^2+(a-z)^2}}\right]dz$$

$$=2\pi G\rho(\sqrt{R^2+a^2}-\sqrt{R^2+(H-a)^2}+H-2a)$$

（2） $H\geq a$

$$F_z=\iiint\limits_{\Omega} G\rho\frac{z-a}{\left[x^2+y^2+(z-a)^2\right]^{3/2}}dv=G\rho\int_0^H(z-a)dz\iint\limits_{D_z}\frac{z-a}{\left[x^2+y^2+(z-a)^2\right]^{3/2}}dxdy$$

$$=G\rho\int_0^H(z-a)dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\frac{z-a}{\left[r^2+(z-a)^2\right]^{3/2}}rdr=2\pi G\rho\int_0^H(z-a)dz\int_0^R\frac{z-a}{\left[r^2+(z-a)^2\right]^{3/2}}rdr$$

$$=2\pi G\rho\int_0^H(z-a)\left[\frac{1}{a-z}-\frac{1}{\sqrt{R^2+(a-z)^2}}\right]dz=2\pi G\rho\int_0^H\left[\frac{a-z}{\sqrt{R^2+(a-z)^2}}-1\right]dz$$

$$=2\pi G\rho(\sqrt{R^2+a^2}-\sqrt{R^2+(H-a)^2}-H)$$

6. 在某平地上向下挖一个半径为 R 的半球形澡塘，若某点泥土的密度为 $\rho=\mathrm{e}^{\frac{r^2}{R^2}}$ ，其中 r 为此点离球心的距离，试求挖此澡塘需做的功. (2005 年浙江省数学竞赛题)

解：根据题意，$dW=e^{(x^2+y^2+z^2)/R^2}dvgz\Rightarrow W=\iiint\limits_{\Omega}e^{(x^2+y^2+z^2)/R^2}gzdv$,

用球面坐标$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\y=r\sin\varphi\sin\theta\\z=r\cos\theta\end{cases}$，

$$W=\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)/R^2} gz dv=\iiint_{\Omega} e^{r^2/R^2} gr\cos\varphi r^2\sin\varphi dr d\varphi d\theta$$

$$=\frac{g}{2}\iiint_{\Omega} e^{r^2/R^2} r^3\sin 2\varphi dr d\varphi d\theta=\frac{g}{2}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi d\varphi\int_0^R e^{r^2/R^2} r^3 dr=\frac{\pi g R^4}{2}.$$