23-24-2 学期期末练习卷

一．选择题

1. 曲面 $x^2+y^2=9z^2$ 是(　　　).

（A）球面

（B） xOz 平面上曲线 $x^2=9z^2$ 绕 x 轴旋转而成的

（C） xOz 平面上曲线 $x^2=9z^2$ 绕 y 轴旋转而成的

（D） yOz 平面上曲线 $y=3z$ 绕 z 轴旋转而成的

2. 空间中的直线 $x=y=z$ 与平面 $x-2y+z=0$ 的位置关系为（　　　）.

（A）垂直相交　　（B）相交但不垂直

（C）不相交　　（D）平面通过直线

3. 关于 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 的说法中**错误**的是（　　　）.

（A）在原点可导　　（B）在原点极限存在

（C）在原点连续　　（D）在原点可微

4. 设 $I_1=\iint\limits_{D_1}e^{-x^2-y^2}dxdy\,,I_2=\iint\limits_{D_2}e^{-x^2-y^2}dxdy\,,I_3=\iint\limits_{D_3}e^{-x^2-y^2}dxdy$. 其中

$D_1=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，$D_2=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 1\}$，

$D_3=\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 1,-1\le y\le 1\}$，则它们满足大小关系（　　　）

（A） $I_1<I_2<I_3$　（B） $I_3<I_2<I_1$　（C） $I_2<I_1<I_3$　（D） $I_3<I_1<I_2$

5. 设 $A=f_{xx}$，$B=f_{xy}$，$C=f_{yy}$，下列哪个二元函数满足在原点处 $AC-B^2=0$ 且取得极小值？（　　　）.

（A） $z=x^2-2xy+y^2+y^4$　（B） $z=x^4-x^2+2xy-y^2$

（C） $z=x^2+y^2+x^4$　　（D） $z=x^2+2xy+y^2+x^3$

6.

7.

8.

9. 在空间直角坐标系中，$x^2+y^2-\dfrac{z^2}{2}=1$ 的图形是（　　）.

(A) xOz 面上的双曲线 $x^2-\dfrac{z^2}{2}=1$ 绕 x 轴旋转一周而成的

(B) xOz 面上的双曲线 $x^2-\dfrac{z^2}{2}=1$ 绕 z 轴旋转一周而成的

（C） yOz 面上的双曲线 $y^2-\dfrac{z^2}{2}=1$ 绕 y 轴旋转一周而成的

（D）椭球面

10. 空间螺线 $x=a\cos\theta,\ y=a\sin\theta,\ z=k\theta(k>0)$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 处的切向量为( ).

(A) $(-\frac{1}{2}a,\frac{\sqrt{3}}{2}a,k)$ （B） $(\frac{1}{2}a,-\frac{\sqrt{3}}{2}a,k)$

(C) $(-\frac{1}{2}a,\frac{\sqrt{3}}{2}a,1)$ (D) $(-\frac{1}{2}a,\frac{\sqrt{3}}{2}a,0)$

11. 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 不可微，那么下列命题中一定不成立的是（ ）.

(A) $f(x,y)$ 在点 P 不连续； (B) $f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0)$ 都存在且连续；

(C) $f(x,y)$ 在点 P 连续； (D) $f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0)$ 都不存在.

12. 设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $z^3+3xyz=a^3$ 确定，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$（ ）.

(A) $\dfrac{yz}{xy-z^2}$ (B) $\dfrac{yz}{z^2-xy}$ (C) $\dfrac{-yz}{z^2+xy}$ (D) $\dfrac{yz}{z^2+xy}$

13. 已知 Ω 是由曲面 $9z^2=25(x^2+y^2)$ 及平面 $z=5$ 所围成的闭区域，

将 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$ 在柱坐标下化成三次积分为（ ）.

（A） $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^3 r^3dr\int_0^5 dz$ （B） $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^9 r^3dr\int_0^5 dz$

（C） $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^9 r^3dr\int_{\frac{5}{3}r}^5 dz$ （D） $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^3 r^3dr\int_{\frac{5}{3}r}^5 dz$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的（ ）.

（A）充分条件，但非必要条件 （B）必要条件，但非充分条件
（C）既非充分条件，也非必要条件（D）充分必要条件

15.

16.

17. 下列方程中表示旋转双曲面的是(　　　).

（A） $x^2+y^2=4$　　（B） $x^2+y^2+z^2=1$

（C） $x^2-y^2-z^2=1$　　（D） $x^2-y^2-z^2=0$

18. 平面$\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$与平面$\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$不相交的充分必要条件为（　　　）.

（A） $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$　　（B） $A_1/A_2=B_1/B_2=C_1/C_2$

（C） $A_1/A_2=B_1/B_2=C_1/C_2=\mathrm{D}_1/D_2$　　（D） $A_1/A_2=B_1/B_2=C_1/C_2\neq \mathrm{D}_1/D_2$

19. 关于 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 的说法中正确的是（　　　）.

（A）在原点可导　　（B）在原点极限存在

（C）在原点连续　　（D）在原点可微

20. 设 $I_1=\iint\limits_D \sin(x^2+y^2)dxdy$, $I_2=\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, $I_3=\iint\limits_D \tan(x^2+y^2)dxdy$. 其中$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，则它们满足大小关系（　　　）

（A） $I_1<I_2<I_3$　（B） $I_3<I_2<I_1$　（C） $I_2<I_1<I_3$　（D） $I_3<I_1<I_2$

21. $f(x,y)$在原点处是驻点且二阶连续可导，设$A=f_{xx}(0,0)$， $B=f_{xy}(0,0)$，$C=f_{yy}(0,0)$. 下列选项中可得出$f(x,y)$必定在原点取得极小值的是(　　　).

（A） $B^2-AC<0, A<0$　　（B） $B^2-AC>0, A<0$

（C） $B^2-AC<0, A>0$　　（D） $B^2-AC>0, A>0$

22. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛是$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$的（　　）.

（A）充分必要条件　　（B）充分非必要条件

（C）必要非充分条件　　（D）既非充分也非必要条件

二. 填空题:

1. 已知$|\vec{a}|=\sqrt{2}, |\vec{b}|=2$，且$\vec{a}\bullet\vec{b}=2$，则 $|\vec{a}\times\vec{b}|=$_______ .

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)e^{x^2y^2}}=$ ____________ .

3. 已知原点到平面$2x-y+kz=6$的距离等于 2 ，则$k=$_____ .

4. $\int_L (x+y)^2 ds=$____________，其中$L: x^2+y^2=1$.

5. Σ 为上半球面$x^2+y^2+z^2=4(z\geq 0)$被圆柱面$x^2+y^2=1$所截得的有界部分，则$\iint_\Sigma zdS=$ ________________.

6. 函数$u=z^4-3xz+x^2+y^2$在点$(1,1,1)$的全微分为__________________ .

7. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p}$条件收敛，则 $p\in$______________(填最大范围).

8. 已知$\left|\vec{a}\right|=1,\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}$, 且$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角是$\dfrac{\pi}{4}$，则$2\vec{a}\bullet\vec{b}=$__________.

9. 点$(1,1,1)$到平面$x+y+z=1$的距离为____________.

10. 函数$z=\ln(y-x^2)+\sqrt{1-x^2-y^2}$的定义域是_____________.

11. 设平面曲线L为下半圆周$y=-\sqrt{1-x^2}$，则$\int_L\left(x^2+y^2\right)ds=$__________ .

12. 已知$z=x^4+y^4-x^2y^2$，则 z 在$(1,1)$处的全微分是_________.

13. 改变积分顺序$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy=$ _____________.

14. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n^2+1}$收敛情况是__________(填绝对收敛或条件收敛)

15. 三维向量空间中的向量$\vec{a}$的三个方向角分别记为α,β,γ. 已知$\alpha=\dfrac{\pi}{4},\beta=\dfrac{\pi}{3}$,那么$\cos\gamma=$_______ .

16. 曲线Γ: $\begin{cases} x=e^{-t}\\ y=\sin t\\ z=t\end{cases}$ 在$t=0$的法平面方程为 ______________ .

17. 直线$2x=-y=z$与平面$x+y+2z=0$的夹角为________________.

18. $\oint_L (x+1)ds=$____________，其中$L: x^2+y^2=1$.

19. 平面$x+y+z=1$在第一卦限的面积$S=$ ________________.

20. 已知函数$z=x^2+2^y$，那么全微分$dz\big|_{(1,1)}=$________________ .

21. 利用级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，可得出 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=$ ________.

三．试解下列各题

1. 将 $f(x)=\frac{1}{2x+1}$ 展开为 x 的幂级数并写出其收敛域.

2. 计算 $\iint_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是直线 $y=x,\ y=0,\ x=\pi$ 所围成的闭区域.

3. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\sin(z+x)=y-z+1$ 所确定，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

4. 求 $\iiint\limits_{\Omega} e^{x^2+y^2}dxdydz$，其中 Ω 是由抛物面 $x^2+y^2+z=1$ 及 xoy 平面所围成的有界闭区域.

5. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n}$ 的收敛域.

6. 求曲线积分 $\int_L e^x\sin y dx+(e^x\cos y-x)dy$ 的值，其中 L 是从 $A(2,0)$ 到 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=2x(y\geq 0)$.

7. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin n}{2^n}$ 是否是收敛的，如果它是收敛的，指出它是绝对收敛还是条件收敛，并说明理由.

8. 计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{9+x^2+y^2}-3}{\sin(x^2+y^2)}$.

9. 设 $z=u\ln v, u=x+y, v=xy$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

10. 计算二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 是由 x 轴及上半圆周 $y=\sqrt{1-x^2}$ 所围成的区域.

11. 求 $\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}v$,其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与上半球面 $x^2+y^2+z^2=2\ \ (z\geq 0)$ 所围成的立体.

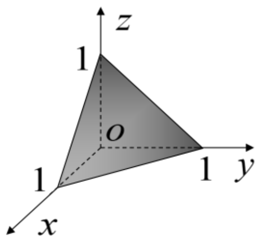
12. 证明曲线积分 $\int_{(0,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)\mathrm{d}x+(x^2-4xy^3)\mathrm{d}y$ 在整个 xoy 面内与路径无关,并计算积分值.

13. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{nx^{n+1}}$ 的收敛半径与收敛域.

14. 计算 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$

15. 设函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $e^z=x+yz$ 所确定，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$

16. 求 $\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz$，其中 $\boldsymbol{\Omega}$ 是由平面 $\boldsymbol{x+y+z=1}$ 及三个坐标平面所围成的有界闭区域.

i. 

17. 计算 $\iint_D \dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是 $y=x,\ y=x^2$ 所围成的有界闭区域.

18. 验证曲线积分 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} e^x\sin ydx+e^x\cos ydy$ 的值与积分路径无关并计算该积分值.

19. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2\cos n}{3^n}$ 是否是收敛的，如果它是收敛的，指出它是绝对收敛还是条件收敛，并说明理由.

20. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛域(考虑区间端点).

四、应用题

1. 求空间曲线 Γ: $\begin{cases} x=2\cos^2\theta, \\ y=2\cos\theta\sin\theta,\ (0\le\theta\le\pi) \\ z=2\sin\theta, \end{cases}$ 在点 $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right)$ 处的切线和法平面方程.

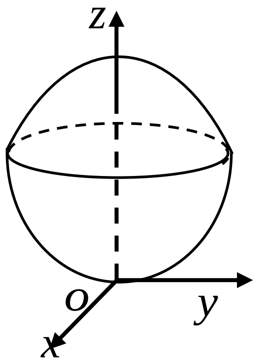
2. 求三元函数 $f(x,y,z)=xy^2z^3$ 在条件 $x,y,z>0,x+y+z=6$ 下的最大值.

3. 求曲面 $\boldsymbol{x^2+y^2+2z^2=7}$ 在点 $\boldsymbol{(1,2,-1)}$ 处的切平面方程和法线方程.

4. 求由抛物面 $z=2-x^2-y^2$ 与平面 $z=0$ 所围立体的**表面积**.

5. 求三元函数 $f(x,y,z)=x+2y+4z$ 在条件 $x,y,z>0, xyz=1$ 下的最小值.

6. 求由抛物面 $x^2+y^2+z=2$ 和 $x^2+y^2=z$ 所围成的有界闭区域的体积.



五、证明题

1. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 条件收敛.

2. 证明：若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{u_n}{n}$ 绝对收敛.

3. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛. 此外对任意的正整数 n，

   $u_n=\max\{a_n,0\}, v_n=\min\{a_n,0\}$. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是发散的.