总结

一、可分离变量的微分方程

1 分离变量法

如果一阶微分方程 $F(x, y, y') = 0$

易于化为形式 $\boxed{g(y)dy} = \boxed{f(x)dx}$

可分离变量的方程

*特点*等式的每一边仅是一个变量的函数与这个变量的微分之积.

例如 $\dfrac{dy}{dx} = 2x^2 y^{\frac{4}{5}} \Rightarrow y^{-\frac{4}{5}} dy = 2x^2 dx,$

解法 两端积分可得通解.

可分离变量的方程求通解的步骤是:

1. 分离变量, 把方程化为 $\boxed{g(y)\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x}$ 的形式;

2. 将上式两边积分 $\boxed{\int g(y)\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x}$;

设函数 $G(y)$ 和 $F(x)$ 是依次为 $g(y)$ 和 $f(x)$ 的原函数, $G(y) = F(x) + C$ 为微分方程的通解.

(隐式通解).

这种解方程的方法称为**分离变量法**.

二、齐次方程

(1) 定义　形如 $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$ 的微分方程称为齐次方程.

(2) 解法　作变量代换 $u = \frac{y}{x}$, 即 $y = xu$,

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} \quad (\text{或} dy = xdu + udx)$$

代入原式，得　$u + x\frac{du}{dx} = f(u)$,　$x\frac{du}{dx} = f(u) - u$

即　$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$.

$\boxed{\text{可分离变量的方程}}$

利用分离变量发求出上述方程的解后，再将 $u = \frac{y}{x}$,代回，便得到原方程的解

三、一阶线性微分方程

一阶线性微分方程的标准形式

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

当$Q(x)\equiv 0$，上方程称为**齐次的**.

当$Q(x)\not\equiv 0$，上方程称为**非齐次的**.

一阶线性微分方程的**解法**

(1) 线性齐次方程 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=0.$

(使用分离变量法)

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx,\quad \int\frac{dy}{y}=-\int P(x)dx,$$

$$\ln y=-\int P(x)dx+\ln C,$$

齐次方程的通解为 $y=Ce^{-\int P(x)dx}.$

线性非齐次方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x).$

常数变易法

把齐次方程通解中的常数变易为待定函数的方法.

作变换 $y=\underline{C(x)e}^{-\int P(x)dx}$

$$y'=C'(x)e^{-\int P(x)dx}+C(x)[-P(x)]e^{-\int P(x)dx},$$

将y和y'代入原方程得

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x),\qquad C'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

积分得 $C(x)=\int Q(x)\,e^{\int P(x)dx}dx+C,$

一阶线性非齐次微分方程的通解为

$$y = [\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C]e^{-\int P(x)dx}$$

$$= \underbrace{Ce^{-\int P(x)dx}}_{\text{对应齐次方程通解}} + \underbrace{e^{-\int P(x)dx}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx}_{\text{非齐次方程特解}}$$

四、伯努利方程

伯努利(Bernoulli)方程的标准形式

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \quad (n\neq 0,1)$$

当$n=0,1$时，方程为线性微分方程.

当$n\neq 0,1$时，方程为非线性微分方程.

解法 需经过变量代换化为线性微分方程.

两端除以y^n，得 $y^{-n}\dfrac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$,

令$z=y^{1-n}$, 则 $\dfrac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$,

代入上式 $\dfrac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$,

求出通解后，将 $z=y^{1-n}$ 代入即得

$$\therefore y^{1-n}=z$$

$$=e^{-\int(1-n)P(x)dx}\left(\int Q(x)(1-n)e^{\int(1-n)P(x)dx}dx+C\right).$$

二阶常系数齐次微分方程求通解的一般步骤

（1）写出相应的特征方程;

（2）求出特征根;

（3）根据特征根的不同情况,得到相应的通解.

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad r^2 + pr + q = 0$$

特征根的情况	通解的表达式
实根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
实根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_2 x}$
复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

2 n阶常系数齐次线性方程解法

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1} y' + P_n y = 0$$

特征方程为 $r^n + P_1 r^{n-1} + \cdots + P_{n-1} r + P_n = 0$

特征方程的根	通解中的对应项
若是k重根r	$(C_0 + C_1 x + \cdots + C_{k-1} x^{k-1}) e^{rx}$
若是k重共轭复根$\alpha \pm i\beta$	$[(C_0 + C_1 x + \cdots + C_{k-1} x^{k-1}) \cos \beta x$ $+ (D_0 + D_1 x + \cdots + D_{k-1} x^{k-1}) \sin \beta x] e^{\alpha x}$

常系数非齐次线性微分方程

(待定系数法)

(1) $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$, (λ可以是复数)

$$\bar{y}=x^k e^{\lambda x}Q_m(x);$$

(2) $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$,

$$\bar{y}=x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x];$$

可降阶 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

特点 右端仅含有自变量x.

解法 只要把$y^{(n-1)}$作为新的未知函数.

两边积分,就得到一个$n-1$阶的微分方程,

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1.$$

同理可得 $$y^{(n-2)} = \int[\int f(x)dx + C_1]dx + C_2.$$

将连续积分n次, 可得通解.

$y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

特点 右端不显含未知函数数 y.

解法 设 $y' = p(x)$ 则 $y'' = \dfrac{dy'}{dx} = \dfrac{dp}{dx} = p'(x)$,

代入原方程得到新微分方程 $p' = f(x, p)$.

求得其解为 $\dfrac{dy}{dx} = p = \varphi(x, C_1)$,

原方程通解为 $y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2$.

$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

特点 右端不显含自变量 x.

解法 设 $y' = p(y)$ 则 $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$,

代入原方程得到新微分方程 $p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$.

设它的通解为 $\frac{dy}{dx} = p = \varphi(y, C_1)$,

原方程通解为 $\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$,