第十章 曲线积分和曲面积分

习 题 10.1 曲线积分

(A)

1.设曲线段 L 的质量密度分布为 e^{x+y}，则 L 的质量可表示为什么？又若 L 为 $y=x\ (0\le x\le 1)$，则其质量又等于多少？

解：L 的质量 $\boldsymbol{M}=\int_L \boldsymbol{e}^{x+y}\mathrm{d}s$， 若 L: $y=x\ \ (0\le x\le 1)$，

则 $ds=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\sqrt{2}\mathrm{d}x,\ M=\sqrt{2}\int_0^1 e^{2x}\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(e^2-1)$ 。

2.计算下列曲线积分：

（1）$\oint_L (x^2+y^2)^n ds$，其中 L 为圆周 $x=a\cos t, y=a\sin t, 0\le t\le 2\pi, a>0$，其中 $n\in \mathbf{N}^+$；

（2）$\oint_L (x+y)\mathrm{d}s$，其中 L 为以 $(0,0), (1,0), (0,1)$ 顶点的三角形的边界；

（3）$\oint_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2,\ a>0$，直线 $y=x$ 以及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界；

（4）$\int_\Gamma z\mathrm{d}s$，其中 Γ 为圆锥螺线 $x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=t,\ t\in[0,2\pi]$；

（5）$\int_\Gamma x^2yz\mathrm{d}s$，其中 Γ 为折线 $ABCD$，这里 A,B,C,D 依次为点 $(0,0,0),(0,0,2),(1,0,2),$ $(1,3,2)$；

（6）$\int_L (x^2-y^2)\mathrm{d}x$，其中 L 为抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(2,4)$ 的一段弧；

（7）$\int_L y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$，其中 L 为圆周 $x=a\cos t, y=a\sin t\ \ (a>0)$ 上对应 t 从 $\dfrac{\pi}{2}$ 到 0 的一段弧；

（8）$\oint_L \dfrac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$,其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2\ \ (a>0)$（按逆时针方向绕行）；

（9）$\int_\Gamma x^2\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z$，其中 Γ 为曲线 $x=k\theta, y=a\cos\theta, z=a\sin\theta$ 上对应 θ 从 0 到 π 的一段弧；

（10）$\int_\Gamma x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+(x+y-1)\mathrm{d}z$，其中 Γ 为从点 $(1,1,1)$ 到点 $(2,3,4)$ 的一段直线.

解：（1）$\oint_L (x^2+y^2)^n ds=a^{2n}\int_L ds=2\pi a^{2n+1}$ 。

（2）$\int_L (x+y)\ \mathrm{d}s = \int_{L_1}(x+y)\ \mathrm{d}s + \int_{L_2}(x+y)\ \mathrm{d}s + \int_{L_3}(x+y)\ \mathrm{d}s$

$L_1: y=0, 0\le x\le 1$，　　$\int_{L_1}(x+y)\mathrm{d}s = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$

$L_2: y=1-x,\ 0\le x\le 1,$　$\int_{L_2}(x+y)\ \mathrm{d}s = \int_0^1 \sqrt{2}\mathrm{d}x = \sqrt{2}$

$L_3: x=0, 0\le y\le 1$，　　$\int_{L_3}(x+y)\ \mathrm{d}s = \int_0^1 y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}$，

故$\int_L (x+y)\ \mathrm{d}s = \frac{1}{2}+\sqrt{2}+\frac{1}{2} = \sqrt{2}+1$。

（3）$\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s = \int_{L_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s + \int_{L_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s + \int_{L_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$

$L_1: y=0, 0\le x\le a,$　$\int_{L_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s = \int_0^a e^x\mathrm{d}x = e^a-1$

$L_2: x=a\cos t, y=a\sin t, 0\le t\le \frac{\pi}{4}, \mathrm{d}s = a\mathrm{d}t$，　$\int_{L_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a a\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}ae^a$

$L_3: y=x, 0\le x\le \frac{\sqrt{2}}{2}a$，　$\int_{L_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} e^{\sqrt{2}x}\cdot\sqrt{2}\mathrm{d}x = e^a-1$

故$\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s = e^a-1+\frac{\pi}{4}ae^a+e^a-1 = e^a(\frac{\pi}{4}a+2)-2$。

（4）$ds=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2} = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2+(\sin t + t\cos t)^2+1}\mathrm{d}t = \sqrt{t^2+2}\mathrm{d}t$

$\int_\Gamma z\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} t\cdot\sqrt{t^2+2}\mathrm{d}t = \frac{1}{3}[(4\pi^2+2)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{2}]$。

（5）$\int_\Gamma x^2yz\mathrm{d}s = \int_{AB}x^2yz\mathrm{d}s + \int_{BC}x^2yz\mathrm{d}s + \int_{CD}x^2yz\mathrm{d}s$，

在线段$AB, BC,$上，有　$x^2yz=0$，于是有　$\int_{AB}x^2yz\mathrm{d}s = \int_{BC}x^2yz\mathrm{d}s = 0$，

CD:　$x=1$，$z=2$，$y=y$，$0\le y\le 3$，$\int_{CD}x^2yz\mathrm{d}s = \int_0^3 2y\mathrm{d}y = 9$，故$\int_\Gamma x^2yzds = 0+0+9=9$。

（6）$\int_L (x^2-y^2)\mathrm{d}x = \int_0^2 (x^2-x^4)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\mid_0^2 - \frac{1}{5}x^5\mid_0^2 = \frac{8}{3}-\frac{32}{5} = -\frac{56}{15}$。

（7）$\mathrm{d}x = -a\sin t\mathrm{d}t, \mathrm{d}y = a\cos t\mathrm{d}t, t: \frac{\pi}{2}\to 0$，

$\int_L y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 [a\sin t\cdot(-a\sin t)+a\cos t\cdot a\cos t)\mathrm{d}t = a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos 2t\mathrm{d}t = 0$。

（8）$x=a\cos t, y=a\sin t, t: 0\to 2\pi$

$$\oint_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2} = \frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}[(a\cos t+a\sin t)\cdot(-a\sin t)-(a\cos t - a\sin t)\cdot a\cos t]dt$$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=-2\pi \text{ 。}$$

（9）$\int_\Gamma x^2\mathrm{d}z+z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z=\int_0^{\pi}[k^2\theta^2\cdot k+a\sin\theta\cdot(-a\sin\theta)-a\cos\theta\cdot a\cos\theta)]\mathrm{d}\theta$

$$=\int_0^{\pi}(k^3\theta^2-a^2)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}k^3\pi^3-\pi a^2 \text{ 。}$$

（10）$x=t+1, y=2t+1, z=3t+1,\quad t:0\to1$

$$\int_\Gamma x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+(x+y-1)\mathrm{d}z=\int_0^1[t+1+2(2t+1)+3(t+1+2t+1-1)]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1(14t+6)\mathrm{d}t=7+6=13 \text{ 。}$$

3.求空间曲线 $x=3t,\ y=3t^2,\ z=2t^3$ 从 $O(0,0,0)$ 至 $A(3,3,2)$ 的弧长.

解：$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}=\sqrt{3^2+(6t)^2+(6t^2)^2}\mathrm{d}t=3(1+2t^2)\mathrm{d}t$ ，

弧长 $s=\int_\Gamma \mathrm{d}s=3\int_0^1(1+2t^2)\mathrm{d}t=3+2=5$ 。

4.计算 $\int_L(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$ ，其中 L 是：

（1）从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的直线段；　（2）抛物线 $y^2=x$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的一段弧；

（3）先沿直线从点 $(1,1)$ 到点 $(1,2)$ ，然后再沿直线到点 $(4,2)$ 的折线；

（4）曲线 $x=2t^2+t+1, y=t^2+1$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的一段弧.

解：（1）$L:x=3y-2\quad y:1\to2$ ，

$$\int_L(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_1^2[3(3y-2+y)+(y-3y+2)]\mathrm{d}y=\int_1^2(10y-4)\mathrm{d}y=11 \text{ 。}$$

（2）$L:x=y^2\quad y:1\to2$ ，

$$\int_L(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_1^2[(y^2+y)\cdot2y+(y-y^2)]\mathrm{d}y=\int_1^2(2y^3+y^2+y)\mathrm{d}y=\frac{34}{3} \text{ 。}$$

（3）$\int_L(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_{L_1}(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y+\int_{L_2}(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$

其中 $L_1:x=1\quad y:1\to2;\quad L_2$：$y=2\quad x:1\to4$ ，

$$\int_L(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_1^2(y-1)\mathrm{d}y+\int_1^4(x+2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{27}{2}=14 \text{ 。}$$

（4）$\int_L(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_0^1[(2t^2+t+1+t^2+1)\cdot(4t+1)+(t^2+1-2t^2-t-1)\cdot2t]\mathrm{d}t$

$$=\int_0^1(10t^3+5t^2+9t+2)dt=\frac{5}{2}+\frac{5}{3}+\frac{9}{2}+2=\frac{32}{3} \text{ 。}$$

5.把对坐标的曲线积分$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 化为对弧长的曲线积分,其中积分曲线L是沿上半圆周$x^2+y^2=2x$从点$O(0,\ 0)$到点$A(1,\ 1)$的弧段.

解：$L: y=\sqrt{2x-x^2}$，$y'=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$，切向量$\vec{T}=(1,\ \dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}})$，

单位切向量$\overrightarrow{T^0}=(\sqrt{2x-x^2},\ 1-x)=(y,\ 1-x)$，

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L[yP(x,y)+(1-x)Q(x,y)]\mathrm{d}s$$ 。

6. 求曲线$x=a,\ y=at,\ z=\dfrac{1}{2}at^2(0\le t\le 1, a>0)$的质量，设其线密度为$\rho=\sqrt{\dfrac{2z}{a}}$。

解：$x=a,\ y=at,\ z=\dfrac{1}{2}at^2(t=0\to 1)$, 则

$$m=\int_\Gamma \rho\mathrm{d}s=\int_0^1\rho(t)\sqrt{0+a^2+a^2t^2}\mathrm{d}t=\int_0^1 at\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{a}{3}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\big|_0^1=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}a$$ 。

7. 设Z轴与重力的方向一致，求质量为m的质点从位置$P_1(x_1,y_1,\ z_1)$沿直线移动到$P_2(x_2,y_2,\ z_2)$时重力所做的功。

解：直线P_1P_2方程为$x=x_1+(x_2-x_1)t,\ y=y_1+(y_2-y_1)t,\ z=z_1+(z_2-z_1)t,(t=0\to 1),$

$$\vec{F}=mg\vec{k},\vec{S}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

则 $W=\int_\Gamma \vec{F}d\vec{S}=\int_0^1 mg(z_2-z_1)dt=mg(z_2-z_1)$ 。

(B)

1.计算下列曲线积分：

（1）$\oint_L |y|\mathrm{d}s$，其中L是双纽线$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(a>0)$的一周；

（2）$\int_\Gamma x^2\mathrm{d}s$，其中$\Gamma$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$与平面$x+y+z=0$的交线；

（3）$\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}y$,其中L为曲线$y=|x|$上从点$(-1,1)$到点$(2,2)$的一段；

（4）$\int_\Gamma (y^2-z^2)\mathrm{d}x+2yz\mathrm{d}y-x^2\mathrm{d}z$，其中$\Gamma$是曲线$x=t, y=t^2, z=t^2$沿参数$t$增加的方向$(0\le t\le 1)$上的一段弧；

（5）$\oint_\Gamma \mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z$，其中$\Gamma$为有向闭折线$ABCA$，这里的点$A,B,C$依次为点$(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$.

解：（1）记 L_1 为 L 位于第一象限部分，双纽线的极坐标方程为

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\theta},\quad \mathrm{d}s = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\mathrm{d}\theta = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta$$

由对称性，得 $\int_L |y|\,\mathrm{d}s = 4\int_{L_1} y\mathrm{d}s = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta$

$$= 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\mathrm{d}\theta = 4a^2(1-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2a^2(2-\sqrt{2})\text{ 。}$$

（2）曲线 Γ 是球面与过球心的平面的交线，是个半径为 a 的圆，由对称性，得

$$\int_\Gamma x^2\mathrm{d}s = \int_\Gamma y^2\mathrm{d}s = \int_\Gamma z^2\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s = \frac{1}{3}a^2\int_\Gamma \mathrm{d}s = \frac{1}{3}a^2\cdot 2\pi a = \frac{2\pi}{3}a^3\text{ 。}$$

（3）$L = L_1 + L_2$，　$L_1: y=-x,\ x:-1\to 0$；　$L_2: y=x,\ x:0\to 2$

$$\int_L (x^2+y^2)\ \mathrm{d}x + (x^2-y)\mathrm{d}y = \int_{L_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x + (x^2-y)\mathrm{d}y + \int_{L_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x + (x^2-y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-1}^0 [(2x^2-(x^2+x)]\mathrm{d}x + \int_0^2 [(2x^2+(x^2-x)]\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 (x^2-x)\mathrm{d}x + \int_0^2 (3x^2-x)\mathrm{d}x = \frac{41}{6}\text{ 。}$$

（4）$\int_\Gamma (y^2-z)\mathrm{d}x + 2yz\mathrm{d}y - x^2\mathrm{d}z = \int_0^1 (t^4 - t^4 + 2t^2\cdot t^2\cdot 2t - t^2\cdot 2t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (4t^5-2t^3)\mathrm{d}t = \frac{1}{6}$ 。

（5）$\Gamma = AB + BC + CA$，$AB: y=1-x,\ z=0,\ x:1\to 0$；$BC: z=1-y,\ x=0,\ y:1\to 0$；

$CA: z=1-x,\ y=0,\ x:0\to 1$

$$\int_L \mathrm{d}x - \mathrm{d}y + y\mathrm{d}z = \int_{AB}\mathrm{d}x - \mathrm{d}y + y\mathrm{d}z + \int_{BC}\mathrm{d}x - \mathrm{d}y + y\mathrm{d}z + \int_{CA}\mathrm{d}x - \mathrm{d}y + y\mathrm{d}z$$

$$= \int_1^0 (1+1)\mathrm{d}x + \int_1^0 (-1-y)\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}x = -2 + \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{2}\text{ 。}$$

3. 设 Γ 为曲线 $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$ 上对应于 t 从 0 到 1 的曲线弧.把对坐标的曲线积分 $\int_\Gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ 化为对弧长的曲线积分.

解：切向量 $\overrightarrow{T} = (1, 2t, 3t^2)$，单位切向量

$$\overrightarrow{T^0} = (\frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}, \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}, \frac{3t^2}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}})$$

$$= (\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}, \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}, \frac{3y}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}})$$

$$\int_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_{\Gamma}\frac{P+2xQ+3yR}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}\mathrm{d}s$$ 。

4. 设曲线$L:y=\sin x,\ x\in[0,\pi]$，证明不等式：$\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi^2\le\int_L x\mathrm{d}s\le\frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2$.

证明：$\int_L x\mathrm{d}s=\int_0^{\pi}x\sqrt{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x\le\sqrt{2}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2$，

又$\int_L x\mathrm{d}s=\int_0^{\pi}x\sqrt{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi/2}\sqrt{2-\sin^2 x}\mathrm{d}x$

$$=\sqrt{2}\pi\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}\mathrm{d}x\ge\sqrt{2}\pi\int_0^{\pi/2}(1-\frac{1}{2}\sin^2 x)\mathrm{d}x=\sqrt{2}\pi\int_0^{\pi/2}(1-\frac{1}{4}(1-\cos 2x))\mathrm{d}x$$

$$=\sqrt{2}\pi\int_0^{\pi/2}(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 2x)\mathrm{d}x=\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi^2$$

故有　$\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi^2\le\int_L x\mathrm{d}s\le\frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2$ 。

5. 试证曲线积分的估值公式：$\left|\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|\le Ml$，其中$l$是光滑曲线$L$的长度，$M=\max\limits_{(x,y)\in L}\{\sqrt{P^2+Q^2}\}$，$P$与$Q$在$L$上任意点处连续.

证明：记曲线L在点(x,y)处的单位切向量为($\cos\alpha,\cos\beta$)，据第二型曲线积分与第一型曲线积分的联系，得

$$|\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y|=|\int_L[P\cos\alpha+Q\cos\beta]\mathrm{d}s|\le\int_L|[P\cos\alpha+Q\cos\beta]|\mathrm{d}s$$

$$\le\int_L\sqrt{P^2+Q^2}\cdot\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta}\,\mathrm{d}s\le M\int_L\mathrm{d}s\le ML$$ 。

习　题 10.2　格林公式及其应用

(A)

1. 设函数$f(x)$具有连续的导数，问当$f(x)$满足什么条件时，曲线积分$\int_L[1+\frac{1}{x}f(x)]y\mathrm{d}x-f(x)\mathrm{d}y$与路径无关？又若$f(1)=\frac{1}{2}$，则此时$f(x)$等于多少？.

解：记$P=[1+\frac{1}{x}f(x)]y,\quad Q=-f(x)$，则$P_y=1+\frac{1}{x}f(x),\quad Q_x=-f'(x)$

当 $Q_x = P_y$，即 $f'(x)+\dfrac{1}{x}f(x)=-1$ 时，曲线积分与路径无关，

由通解公式，得 $f(x)=e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}(-\int e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)=\dfrac{1}{x}(-\int x\mathrm{d}x+C)=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{C}{x}$

又 $f(1)=\dfrac{1}{2}$，得 $C=1$，故 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{x}$。

2.利用曲线积分，求下列曲线所围成的图形的面积：

(1)椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$；　　　(2)圆 $x^2+y^2=2ax$.

解：（1）椭圆的参数方程为：$x=a\cos t,\ y=b\sin t$，所求的面积为

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos t\cdot b\cos t+b\sin t\cdot a\sin t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=\pi ab$$ 。

（2）圆的参数方程为 $x=a(1+\cos t),\ y=a\sin t$，所求的面积为

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a(1+\cos t)\cdot a\cos t+a\sin t\cdot a\sin t]\mathrm{d}t=\frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}(\cos t+1)\mathrm{d}t=\pi a^2$$

3.利用格林公式，计算下列曲线积分：

(1) $\oint_L(2xy-x^2)\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y$，其中 L 是由抛物线 $y=x^2$ 和 $y^2=x$ 所围成的区域的边界正向；

(2) $\oint_L\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}$，其中 L 为任一不经过原点的简单光滑封闭曲线（按逆时针方向绕行）；

(3) $\int_L(x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y$ 其中 L 是在圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧.

解：（1）记 $P=2xy-x^2$，$Q=x+y^2$，则 $P_y=2x,\ Q_x=1$，记 L 所围的区域为 D，

由 Green 公式，得

$$\oint_L(2xy-x^2)\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y=\iint_D(Q_x-P_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(1-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(1-2x)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1(1-2x)(\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2-2x^{\frac{3}{2}}+2x^3)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{4}{5}+\frac{1}{2}=\frac{1}{30}$$ 。

（2）记 L 所围的区域为 D，$P=\dfrac{-y}{x^2+4y^2}$，$Q=\dfrac{x}{x^2+4y^2}$，

当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，有 $P_y=Q_x=\dfrac{4y^2-x^2}{(x^2+4y^2)^2}$， （i）当 $(0,0)\notin D$ 时，由 Green 公式，得 $\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2} = \iint\limits_D (Q_x - P_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$

（ii）当 $(0,0)\in D$ 时，此时 Green 公式的条件不满足，在 D 内作椭圆 l: $x^2+4y^2=r^2$，取逆时针方向，并记 L 与 l 之间的部分区域为 D_1，由 Green 公式，得

$$\oint_{L+l^-} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2} = \oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2} - \oint_l \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2} = \iint\limits_{D_1} (Q_x - P_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

于是 $\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2} = \oint_l \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2} = \frac{1}{r^2}\oint_l \ x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x \overset{Green公式}{=} \frac{1}{r^2}\iint\limits_{D_2} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi$，其中 D_2 为椭圆 l 所围的区域。

（3）记 $P = x^2 - y,\quad Q = -x - \sin^2 y$，则 $P_y = Q_x = -1$

添辅助线段 $L_1: x=1,\ y:1\to 0$； $L_2: y=0,\ x:1\to 0$，记 $L+L_1+L_2$ 所围的区域为 D，

由 Green 公式，得 $\int_{L+L_1+L_2} (x^2-y)\mathrm{d}x - (x+\sin^2 y)\mathrm{d}y = -\iint\limits_D (Q_x - P_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$

故 $\int_L (x^2-y)\mathrm{d}x - (x+\sin^2 y)\mathrm{d}y = -\int_{L_1+L_2} (x^2-y)\mathrm{d}x - (x+\sin^2 y)\mathrm{d}y$

$$= -\int_1^0 -(1+\sin^2 y)\mathrm{d}y - \int_1^0 x^2\mathrm{d}x = -1 + \int_1^0 \frac{1-\cos 2y}{2}\mathrm{d}y + \frac{1}{3} = -\frac{7}{6} + \frac{1}{4}\sin 2$$ 。

4.证明曲线积分 $\int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3)\mathrm{d}x + (x^2 - 4xy^3)\mathrm{d}y$ 与路径无关，并计算积分的值.

解：记 $P = 2xy - y^4 + 3,\quad Q = x^2 - 4xy^3$，则 $P_y = Q_x = 2x^2 - 4y^3$

故曲线积分与路径无关，选积分取路径为折线 $A(1,0)\to B(2,0)\to C(2,1)$

$$\int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3)\mathrm{d}x + (x^2 - 4xy^3)\mathrm{d}y = \int_{AB+BC} \ (2xy - y^4 + 3)\mathrm{d}x + (x^2 - 4xy^3)\mathrm{d}y$$

$$= \int_1^2 3\mathrm{d}x + \int_0^1 (4 - 8y^3)\mathrm{d}y = 3 + 4 - 2 = 5$$ 。

5.验证 $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ 在整个 xOy 平面内是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分,并求函数 $u(x,y)$：

（1）$(x+2y)\mathrm{d}x + (2x+y)\mathrm{d}y$； (2) $(2x\cos y + y^2\cos x)\mathrm{d}x + (2y\sin x - x^2\sin y)\mathrm{d}y$.

解：（1）记 $P = x+2y,\quad Q = 2x+y$，则 $P_y = Q_x = 2$，所以 $(x+2y)\mathrm{d}x + (2x+y)\mathrm{d}y$ 在整个 xOy 平面内是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分，

$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x+2y)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$，选积分取路径为折线：$(0,0)\to(x,0)\to(x,y)$

故$u(x,y)=\int_0^x x\mathrm{d}x+\int_0^y(2x+y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}x^2+2xy+\frac{1}{2}y^2$。

（2）记$P=2x\cos y+y^2\cos x,\quad Q=2y\sin x-x^2\sin y$，则$P_y=\ Q_x=-2x\sin y+2y\cos x$，

所以$(x+2y)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$在整个$xOy$平面内是某个二元函数$u(x,y)$的全微分，

$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2x\cos y+y^2\cos x)\mathrm{d}x+(2y\sin x-x^2\sin y)\mathrm{d}y$，

选积分取路径为折线：$(0,0)\to(x,0)\to(x,y)$

$u(x,y)=\int_0^x 2x\mathrm{d}x+\int_0^y(2y\sin x-x^2\sin y)\mathrm{d}y=x^2+y^2\sin x+x^2\cos y-x^2=y^2\sin x+x^2\cos y$

6.已知$\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$为某二元函数的全微分，求实常数$a$的值.

解：记$P=\dfrac{x+ay}{(x+y)^2},\quad Q=\dfrac{y}{(x+y)^2}$，则$P_y=\dfrac{(a-2)x-ay}{(x+y)^3},\ Q_x=\dfrac{-2y}{(x+y)^3}$，

据题意，有$P_y=Q_x$ 于是有$(a-2)x-ay=-2y$，得$a=2$

7.若曲线积分$\int_L xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$的值与路径无关，并且$\varphi(0)=0$，试计算积分$\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$的值.

解：记$P=xy^2,\quad Q=y\varphi(x)$，则$P_y=2xy,\ Q_x=y\varphi'(x)$，据题意，有$P_y=Q_x$

即 $y\varphi'(x)=2xy,$ 得$\varphi'(x)=2x,\quad \varphi(x)=x^2+C$，又$\varphi(0)=0$，得$C=0$，故$\varphi(x)=x^2$

选取积分路径：$y=x,\ x:0\to1$

$\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+yx^2\mathrm{d}y=\int_0^1 2x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$。

8. 求下列全微分方程的通解。

（1）$(3x^2+2xe^{-y})dx+(3y^2-x^2e^{-y})dy=0$；

（2）$\left[\sin(xy)+xy\cos(xy)\right]dx+x^2\cos(xy)dy=0$.

解：$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-2xe^{-y}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，　故积分与路径无关，可取折线 O (0,0)—$A(0,y)$—$B(x,y)$积分

$$u(x,y)=\int_0^B(3x^2+2xe^{-y})dx+(3y^2-x^2e^{-y})dy$$

$$=\int_0^A (3x^2+2xe^{-y})dx+(3y^2-x^2e^{-y})dy+\int_A^B (3x^2+2xe^{-y})dx+(3y^2-x^2e^{-y})dy$$

$$=\int_0^y 3y^2dy+\int_0^x (3x^2+2xe^{-y})dx = x^3+y^3+x^2e^{-y}$$

所以方程的通解为 $x^3+y^3+x^2e^{-y}=c$ 。

（2）$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x\cos(xy)-x^2y\sin(xy)=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ ，故积分与路径无关，

可取折线 O(0,0)—A(x,0)—B(x,y)积分

$$u(x,y)=\int_0^B \left[\sin(xy)+xy\cos(xy)\right]dx+x^2\cos(xy)dy$$

$$=\int_0^A \left[\sin(xy)+xy\cos(xy)\right]dx+x^2\cos(xy)dy+\int_A^B \left[\sin(xy)+xy\cos(xy)\right]dx+x^2\cos(xy)dy$$

$$=0+\int_0^y x^2\cos(xy)dy=x\sin(xy)$$

所以方程的通解为 $x\sin(xy)=c$ 。

(B)

1.计算曲线积分 $\int_L \mathrm{e}^x(1-\cos y)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x(\sin y-y)\mathrm{d}y$ 其中 L 为由 $A(\pi,0)$ 点沿曲线 $y=\sin x$ 到原点 $O(0,0)$ 的一段弧.

解：记 $P=\mathrm{e}^x(1-\cos y),\quad Q=\mathrm{e}^x(\sin y-y)$，则 $P_y=e^x\sin y,\ Q_x=\mathrm{e}^x(\sin y-y)$，

添辅助线段 $OA: y=0,\ x:0\to\pi$， $L+OA$ 所围的区域为 D，由 Green 公式，得

$$\int_{L+OA} e^x(1-\cos y)\mathrm{d}x+e^x(y-\sin y)\mathrm{d}y=\iint_D (Q_x-P_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D ye^x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^\pi \mathrm{e}^x\mathrm{d}x\int_0^{\sin x} y\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\int_0^\pi \mathrm{e}^x\sin^2 x\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\int_0^\pi \mathrm{e}^x(1-\cos 2x)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{4}\mathrm{e}^x\Big|_0^\pi+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\mathrm{e}^x(\cos 2x+2\sin 2x)\Big|_0^\pi=-\frac{1}{4}(\mathrm{e}^\pi-1)+\frac{1}{20}(e^\pi-1)=-\frac{1}{5}(e^\pi-1)$$ 。

2.计算曲线积分 $\oint_L \dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}$,其中 L 为圆周 $(x-1)^2+y^2=2$，取逆时针方向.

解：记 $P=\dfrac{y}{2(x^2+y^2)},\quad Q=\dfrac{-x}{2(x^2+y^2)}$，当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，有 $P_y=Q_x=\dfrac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)^2}$

记 L 所围的区域为 D，因为 $(0,0)\in D$，此时 Green 公式的条件不满足，在 D 内作圆 l: $x^2+y^2=r^2$，取逆时针方向，并记 L 与 l 之间的部分区域为 D_1，由 Green 公式，得

$$\oint_{L+l^-}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}=\oint_L\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}-\oint_l\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}=\iint_{D_1}(Q_x-P_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

于是

$$\oint_L\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}=\oint_l\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}=\frac{1}{2r^2}\oint_l y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y\overset{Green公式}{=}\frac{1}{2r^2}\iint_{D_2}-2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{1}{r^2}\iint_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi,$$

其中 D_2 为圆 l 所围的区域。

3.选取实常数 a,b 使 $\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}x+by\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$ 为某一函数的全微分，并求该函数 $u(x,y)$ 以及 $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(3,2)}\frac{(x+ay)\mathrm{d}x+by\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$ $(x+y>0)$ 的值.

解：记 $P=\dfrac{x+ay}{(x+y)^2}$， $Q=\dfrac{by}{(x+y)^2}$，则 $P_y=\dfrac{(a-2)x-ay}{(x+y)^3}$，$Q_x=\dfrac{-2by}{(x+y)^3}$，

据题意，有 $P_y=Q_x$ 于是有 $(a-2)x-ay=-2by$，得 $a=2,b=1$

$u(x,y)=\displaystyle\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{(x+2y)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$，选积分取路径为折线：$(1,0)\to(x,0)\to(x,y)$

故 $u(x,y)=\displaystyle\int_1^x\frac{x}{x^2}\mathrm{d}x+\int_0^y\frac{y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}\mathrm{d}y=\int_1^x\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_0^y\frac{(y+x)-x}{(x+y)^2})\mathrm{d}y$

$$=\ln x|_1^x+\int_0^y\frac{1}{x+y}\mathrm{d}y-\int_0^y\frac{x}{(x+y)^2}\mathrm{d}y=\ln x|_1^x+\ln(x+y)|_0^y+\frac{x}{x+y}|_0^y$$

$$=\ln x+\ln(x+y)-\ln x+\frac{x}{x+y}-1=\ln(x+y)+\frac{x}{x+y}-1,$$

故 $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(3,2)}\frac{(x+ay)\mathrm{d}x+by\mathrm{d}y}{(x+y)^2}=[\ln(x+y)+\frac{x}{x+y}-1]_{(1,1)}^{(3,2)}=\ln\frac{5}{2}+\frac{1}{10}$。

4.利用格林公式计算 $\displaystyle\oint_L\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$，其中 $u(x,y)=x^2+y^2$，L 为圆周 $x^2+y^2=6x$，取逆时针方向，$\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 是 u 沿 L 的外法线方向导数。

解：设 D 为圆盘 $x^2+y^2\le 6x$，则 L 为 D 的边界曲线

设 L 的切向量方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta)$，则法向量 $n=(\cos\beta,-\cos\alpha)$

所以 $\dfrac{\partial u}{\partial n}=2x\cos\beta-2y\cos\alpha$

则 $\oint_L \dfrac{\partial u}{\partial n}\mathrm{ds}=\oint_L (2x\cos\beta-2y\cos\alpha)\mathrm{ds}$

$=\oint_L (-2y)\mathrm{dx}+2\mathrm{xdy}$ （根据两类曲线积分之间的关系）

$=\iint_D (2+2)dxdy=\iint_D 4dxdy$ （ 根据格林公式）$=4S=4\cdot 9\pi=36\pi$

5.设函数 u 和 v 在闭区域上具有一阶连续偏导数，证明：$\iint_D v\dfrac{\partial u}{\partial x}dxdy=\int_L uvdy-\iint_D u\dfrac{\partial v}{\partial x}dxdy$，

其中 L 是 D 的光滑的、取正向的边界曲线。

证明：根据格林公式，有 $\int_L uvdy=\iint_D \dfrac{\partial(uv)}{\partial x}dxdy=\iint_D (u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial x})dxdy$

$$=\iint_D u\frac{\partial v}{\partial x}dxdy+\iint_D v\frac{\partial u}{\partial x}dxdy,$$

移项即得 $\iint_D v\dfrac{\partial u}{\partial x}dxdy=\int_L uvdy-\iint_D u\dfrac{\partial v}{\partial x}dxdy$ 。

习　题 10.3　　曲面积分

(A)

1.当 Σ 为 xOy 平面上的一个闭区域时，曲面积分 $\iint_\Sigma R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与二重积分有什么关系.

解：当 Σ 为 xOy 平面上的一个闭区域时 $\iint_\Sigma R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_\Sigma R(x,y,0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ·

2.计算下列曲面积分 ：

（1）$\iint_\Sigma (2-4x-y-z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为 xOy 平面上适合 $4x+y\le 2, x\ge 0, y\ge 0$ 的部分；

（2）$\iint_\Sigma (x+y+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上 $z\ge h$ $(0<h<a)$ 的部分；

（3）$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$及平面$z=1$所围成的区域的整个边界曲面；

（4）$\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2ax$所截得的部分；

（5）$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dxdy$，其中$\Sigma$为圆$x^2+y^2\le R^2, z=0$的下侧；

（6）$\iint\limits_{\Sigma}xzdxdy+xydydz+yzdzdx$，其中$\Sigma$为平面$x=0,y=0,z=0,x+y+z=1$所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧；

（7）$\oiint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dxdy+[2f(x,y,z)+y]dydz+[f(x,y,z)+z]dzdx$，其中函数$f(x,y,z)$为连续函数，$\Sigma$是平面$x-y+z=1$在第四卦限部分的上侧。

解：（1）$\Sigma:\ z=0,\ \mathrm{d}S=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$ 在xoy面上的投影为D：$4x+y\le 2,\ x\ge 0\ \ y\ge 0$

$$\iint\limits_{\Sigma}(2-4x-y)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}(2-4x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D}(4x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2-\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{2-4x}(4x+y)\mathrm{d}y=1-\int_0^{\frac{1}{2}}[4x(2-4x)+\frac{1}{2}(2-4x)^2]\mathrm{d}x$$

$$=1-\int_0^{\frac{1}{2}}(2-8x^2)\mathrm{d}x=1-1+\frac{8}{3}x^3\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\text{。}$$

（2）$\Sigma:z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, z_x=\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, z_y=\dfrac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \mathrm{d}S=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

Σ 在xoy面上的投影为D：$x^2+y^2\le a^2-h^2$,

$$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}(x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2})\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由对称性，得$\iint\limits_{D}\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\dfrac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$

故$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a(a^2-h^2)$。

（3）$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_1$，其中，$\Sigma_1:z=1,\ x^2+y^2\le 1,\ \mathrm{d}S=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

$\Sigma_2:z=\sqrt{x^2+y^2},\ 0\le z\le 1,\ \mathrm{d}S=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma_1$、$\Sigma_1$在$xoy$面的投影皆为$D$：$x^2+y^2\le 1$,

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\sqrt{2}\iint_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=(\sqrt{2}+1)\iint_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(\sqrt{2}+1)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{2}+1}{2}\pi\text{ 。}$$

（4）因为Σ关于zox面对称，又$xy+yz=y(x+z)$关于y为奇函数，由对称性，得

$\iint_{\Sigma}(xy+yz)\mathrm{d}S=0$，于是有 $\iint_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}zx\mathrm{d}S$

$\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$, $\mathrm{d}S=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$ 在xoy面上的投影为D：$(x-a)^2+y^2\le a^2$,

故$\iint_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}zx\mathrm{d}S=\sqrt{2}\iint_{D}x\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{2a\cos\theta}r\cos\theta\cdot r\cdot r\mathrm{d}r$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^3\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot(2a\cos\theta)^4\mathrm{d}\,\theta=4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\mathrm{d}\,\theta=\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4$$

（5）$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)dxdy=-\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy$ （极坐标变换）$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^R r^2\cdot r\mathrm{d}r=-\frac{\pi}{2}R^4$ 。

（6）Σ可分解成$\Sigma_{xy}+\Sigma_{yz}+\Sigma_{zx}+\Sigma_1$，其中非坐标平面$\Sigma_1$方程为$x+y+z=1$，

把$z=0$带入原积分可得$\iint_{\Sigma_{xy}}xzdxdy+xydydz+yzdzdx=0$，

同理 $\iint_{\Sigma_{yz}}xzdxdy+xydydz+yzdzdx=\iint_{\Sigma_{zx}}xzdxdy+xydydz+yzdzdx=0$ 。

而 $\iint_{\Sigma_1}xzdxdy=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}x(1-x-y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^1(x-2x^2+x^3)\mathrm{d}x=\frac{1}{24}$,

同理 $\iint_{\Sigma_1}xydydz=\iint_{\Sigma_1}yzdzdx=\frac{1}{24}$,

所以 $\iint_{\Sigma}xzdxdy+xydydz+yzdzdx=0+\iint_{\Sigma_1}xzdxdy+xydydz+yzdzdx=\frac{1}{8}$ 。

（7）Σ 投影到 xoy 平面：D_{xy} 由 $x=0,y=0,x-y=1$ 所围成的直角三角形区域，由 $z=1-x+y$ 可得 $z_x=-1,z_y=1$，通过把原积分化为第一类曲面积分再计算可得：

$$\oiint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dxdy+[2f(x,y,z)+y]dydz+[f(x,y,z)+z]dzdx$$

$$=\iint_{D_{xy}}([f(x,y,z)+x]-[2f(x,y,z)+y]+[f(x,y,z)+z])dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}(x-y+z)dxdy=\iint_{D_{xy}}1dxdy=\frac{1}{2}\ 。$$

3.把对坐标的曲面积分

$$\iint_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

化成对面积的曲面积分，其中Σ分别为：

(1)平面$3x+2y+2\sqrt{3}z=6$在第一卦限的部分的上侧；

(2)抛物面$z=8-(x^2+y^2)$在xOy平面上方的部分的上侧.

解: (1)由于$\sum: 3x+2y+2\sqrt{3}z=6$取上侧，故$\sum$在任意一点处的单位法向量为

$$\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{\sqrt{3^2+2^2+(2\sqrt{3})^2}}(3,2,2\sqrt{3})=\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{2\sqrt{3}}{5}\right),$$

于是$\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$

$$=\iint_{\Sigma}\left(\frac{3}{5}P+\frac{2}{5}Q+\frac{2\sqrt{3}}{5}R\right)\mathrm{d}S\ .$$

(2) 由于$\sum: z=8-(x^2+y^2)$取上侧，故$\sum$在任意一点处的单位法向量为

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x,-z_y,1)=\frac{1}{\sqrt{1+(-2x)^2+(-2y)^2}}(2x_x,2y,1),$$

于是$\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$

$$=\iint_{\Sigma}\frac{2xP+2yQ+R}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\mathrm{d}S.$$

(B)

1.计算曲面积分$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为抛物面$2z=x^2+y^2$被平面$z=2$所截得的有限部分.

解：$\Sigma: z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$, $z_x=x$, $z_y=y$, $\mathrm{d}S=\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

Σ 在 xoy 面上的投影为 D： $x^2+y^2\le 4$,

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}[x^2+y^2+\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2]\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(r^2+\frac{1}{4}r^4)\sqrt{1+r^2}\cdot r\mathrm{d}r\quad(t=\sqrt{1+r^2})$$

$$=2\pi[\int_1^{\sqrt{5}}[t^2-1+\frac{1}{4}(t^2-1)^2]\cdot t\cdot t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\pi[\int_1^{\sqrt{5}}(t^6+2t^4-3t^2)\mathrm{d}t$$

$$=(\frac{80\sqrt{5}}{7}+\frac{8}{35})\pi=\frac{8}{35}\pi(50\sqrt{5}+1)\ .$$

2. 求面密度为 μ_0 的均匀半球壳 $x^2+y^2+z^2=a^2\ \ (a>0,z\ge 0)$ 对于 z 轴的转动惯量.

解： $I_z=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mu_0\mathrm{d}S=\mu_0\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}(x^2+y^2)\sqrt{1+\dfrac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\mu_0\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}(x^2+y^2)\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\underline{\underline{\text{极坐标}}}\ \mu_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{a\rho^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho\ \ \underline{\underline{\rho=a\sin t}}\ \ 2\pi a\mu_0\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^3\sin^3 t}{a\cos t}a\cos t\mathrm{d}t$$

$$=2\pi a^4\mu_0\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\mathrm{d}t=\frac{4}{3}\pi a^4\mu_0.$$

3. 综合应用计算公式（10.24）计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中 Σ 是旋转抛物面 $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间的部分的下侧.

解：先计算 $-\iint\limits_{\Sigma}zdxdy$，将曲面投影到 xoy 面，下侧取负，投影区域为：

$$x^2+y^2\le 4-\iint\limits_{\Sigma}zdxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}r^2rdrd\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3dr=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^2=4\pi.$$

再算 $\iint\left(z^2+x\right)dydz$，将曲面以 yoz 面为分界线，分为两部分，前部分叫 $\sum_1$，后一部分叫 $\sum_2$.

先计算 $\sum_1$ 上积分，前侧取正，曲面方程为： $x=\sqrt{2z-y^2}$ ，积分区域由 $z=\dfrac{1}{2}y^2$ 与 $z=2$ 所围.

$$\iint\limits_{\Sigma_1}\left(z^2+x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma_1}\left(z^2+\sqrt{2z-y^2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-2}^2dy\int_{\frac{1}{2}y^2}^2\left(z^2+\sqrt{2z-y^2}\right)dz$$

$$=\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\left(2z-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}y^2}^{2}dy=\int_{-2}^{2}\left(-\frac{1}{24}y^6+\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\left(4-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)dy=\frac{64}{7}+2\pi.$$

再计算$\sum_2$上积分，后侧取负，曲面方程为：$x=-\sqrt{2z-y^2}$，积分区域由$z=\dfrac{1}{2}y^2$与$z=2$所围.

$$\iint_{\Sigma_2}\left(z^2+x\right)dydz=\iint_{\Sigma_2}\left(z^2-\sqrt{2z-y^2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-2}^{2}dy\int_{\frac{1}{2}y^2}^{2}\left(z^2-\sqrt{2z-y^2}\right)dz=-\frac{64}{7}+2\pi,$$

综上可得 $4\pi+\dfrac{64}{7}+2\pi+\left(-\dfrac{64}{7}+2\pi\right)=8\pi.$

4. 设$u(x,y,z),v(x,y,z)$是定义在闭区域Ω上的具有二阶连续偏导数的两个函数，$\dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}$表示$v(x,y,z)$沿$\Sigma$的外法线方向的方向导数. 证明

$$\iiint_{\Omega}u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S-\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中Σ是空间闭区域Ω的整个边界曲面.这个公式叫做格林第一公式.

证明：因为方向导数$\dfrac{\partial v}{\partial \vec{n}}=\dfrac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma$, 其中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$是$\Sigma$在点$(x,y,z)$处的外法向量的方向余弦. 于是曲面积分

$$\iint_{\Sigma}u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}\left[\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos\alpha+\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cos\beta+\left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S,$$

利用高斯公式得$\displaystyle\iint_{\Sigma}u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]dxdydz$

$$=\iiint_{\Omega}u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)dxdydz+\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right)dxdydz,$$

将上式右端第二个积分移至左侧便得到所要证明的等式.

5. 设$u(x,y,z),v(x,y,z)$是两个定义在闭区域Ω上的具有二阶连续偏导数的函数，$\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}},\dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}$依次表示$u(x,y,z),v(x,y,z)$沿$\Sigma$的外法线方向的方向导数.证明

$$\iiint_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}-v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S,$$

其中Σ是空间闭区域Ω的整个边界曲面.这个公式叫做格林第二公式.

证明: 记$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$,由上一题的格林第一公式知:

$$\iiint_{\Omega} u\Delta v dxdydz=\iint_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S-\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dxdydz,$$

在上式中将函数u和v交换位置，得

$$\iiint_{\Omega} v\Delta u dxdydz=\iint_{\Sigma} v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S-\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dxdydz,$$

将上面两个式子相减即得 $\iiint_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)dxdydz=\iint_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S.$

习题 10. 4　高斯公式和斯托克斯公式

1. 利用高斯公式，计算下列曲线积分：

（1）$\oiint_{\Sigma} x^2\mathrm{dydz}+y^2\mathrm{dzdx}+z^2\mathrm{dxdy}$，其中$\Sigma$为平面$x=0,y=0,z=0,x=a,y=a,\ z=a$所围成的立体的表面的外侧；

（2）$\oiint_{\Sigma} xz^2\mathrm{dydz}+(x^2y-z^3)\mathrm{dzdx}+(2xy+y^2z)\mathrm{dxdy}$，其中$\Sigma$为上半球体$x^2+y^2\le a^2$，$0\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的表面外侧；

（3）$\oiint_{\Sigma}(-2x-2y)\mathrm{dxdy}+(y-z)x\mathrm{dydz}$，其中$\Sigma$为柱面$x^2+y^2=1$及平面$z=0$，$z=3$所围成的空间闭区域$\Omega$的整个边界曲面的外侧.

解:（1）$\oiint_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$

$$=2\iiint_{\Omega}(x+y+z)dv\ \underline{\underline{\text{对称性}}}\ 6\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}v=6\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a zdz=3a^4.$$

（2）$\oiint_{\Sigma} xz^2dydz+(x^2y-z^2)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$

$$=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv\ \underline{\underline{\text{球面坐标}}}\ \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{2}{5}\pi a^5.$$

（3）$\oiint_{\Sigma}(y-z)xdydz+(-2x-2y)dxdy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$

$$=\iiint_{\Omega}(y-z)dv\ \underline{\underline{\text{柱面坐标}}}\ \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^3(r\sin\varphi-z)\cdot r\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r=-\frac{9}{2}\pi.$$

2. 利用斯托克斯公式，计算下列曲线积分：

（1）$\oint_{\Gamma} x^2y^3\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z$,其中Γ为圆周$x^2+y^2=a^2$, $z=0$,从 z 轴正向看去方向是逆时针；

（2）$\oint_{\Gamma} z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z$, Γ 是以$(1,0,0),(0,1,0)(0,0,1)$为顶点的三角形的边界曲线,它的正向与这个三角形上侧的法向量之间符合右手法则；

（3）$\int_{\Gamma}(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$,其中Γ是曲线$x^2+y^2=1,\ x-y+z=2$,从z轴正向看去方向是顺时针.

解：（1）记$\sum$：$z=0,=x^2+y^2\le a^2$，取上侧，$\sum$在xoy 面上的投影为D，由$stokes$公式得

$$\text{原式}=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2y^3 & 1 & z\end{vmatrix}=-3\iint_{\Sigma}x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-3\iint_{D}x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-3\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^a r^5\mathrm{d}r=-\frac{1}{8}a^6\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta\mathrm{d}\theta=-\frac{1}{8}\pi a^6\text{。}$$

（2）取$\sum$:以已知三点为顶点的三角形，取上侧，单位法向量为$\vec{n}=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$，

$\sum$在xoy面上的投影为D，由$stokes$公式得

$$\text{原式}=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z & x & y\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\sqrt{3}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\sqrt{3}\iint_{D}\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\times\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{3}{2}\text{。}$$

（3）取$\sum$:平面$x-y+z=2$含在柱面$x^2+y^2=1$内的部分，取下侧，

$\sum$在xoy 面上的投影为D，由$stokes$公式得

$$\text{原式}=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z-y & x-z & x-y\end{vmatrix}=2\iint_{\Sigma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi\text{。}$$

3. 下列各式是否为全微分？若是，试求出其原函数$u(x,y,z)$.

（1）$ye^{xy}\mathrm{d}x+(xe^{xy}-\cos z)\mathrm{d}y+y\sin z\mathrm{d}z$；

（2）$(yz-3x^2)\mathrm{d}x+(zx-3y^2)\mathrm{d}y+(xy+3z^2)\mathrm{d}z$；

（3）$(1+\mathrm{e}^x\cos y)z\mathrm{d}x-z\mathrm{e}^x\sin y\mathrm{d}y+\mathrm{e}^x\cos y\mathrm{d}z$.

解：（1）因为 $ye^{xy}\mathrm{d}x+(xe^{xy}-\cos z)\mathrm{d}y+y\sin z\mathrm{d}z=(ye^{xy}\mathrm{d}x+xe^{xy}\mathrm{d}y)-(\cos z\mathrm{d}y-y\sin z\mathrm{d}z)$

$$=\mathrm{d}e^{xy}-\mathrm{d}(y\cos z)=\mathrm{d}(e^{xy}-y\cos z)$$

所以原式是全微分，可取原函数 $u(x,y)=e^{xy}-y\cos z$ 。

（2）因为 $(yz-3x^2)\mathrm{d}x+(zx-3y^2)\mathrm{d}y+(xy+3z^2)\mathrm{d}z$

$$=(yz\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z)-(3x^2\mathrm{d}x+3y^2\mathrm{d}y-3z^2\mathrm{d}z)$$

$$=\mathrm{d}(xyz)-\mathrm{d}(x^3+y^3-z^3)=\mathrm{d}(xyz-x^3-y^3+z^3)$$

所以原式是全微分，可取原函数 $u(x,y)=xyz-x^3-y^3+z^3$ 。

（3）记 $P=(1+e^x\cos y)z,\quad R=e^x\cos y$，则 $P_z=1+e^x\cos y,\quad R_x=e^x\cos y$ ，

因为 $P_z\neq R_x$，所以原式不是全微分。

4. 利用高斯公式计算 $\iint\limits_{\Sigma}2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中 Σ 为曲线 $x=e^y\ (0\le y\le a)$ 绕 x 轴旋转而成的旋转曲面的外侧.

解：添辅助平面 $\sum_1: x=e^a, y^2+z^2\le a^2$ ，取右侧，$\sum$ 与 $\sum_1$ 所围的闭区域为 Ω，

$\sum_1$ 在 yoz 面上的投影为 D，由 $Gauss$ 公式得

$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$ ，于是

原式 $=-\iint\limits_{\Sigma_1}2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D}2(1-e^{2a})\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=-2(1-e^{2a})\cdot\pi a^2=2\pi a^2(e^{2a}-1)$$ 。

习题 10.5　场的初步知识

1. 求下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度、旋度以及穿过指定曲面 Σ 流向指定侧的流量 Φ：

（1） $\boldsymbol{A}=yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$ ，其中 Σ 为圆柱 $x^2+y^2\le a^2\ (0\le z\le h)$ 的全表面，流向外侧；

（2） $\boldsymbol{A}=(2x+3z)\boldsymbol{i}-(xz+y)\boldsymbol{j}+(y^2+2z)\boldsymbol{k}$ ，其中 Σ 为以点 $(3,-1,2)$ 为球心，半径 $R=3$ 的球面，流向外侧.

解：（1） $P=yz,\ Q=xz,\ R=xy$ ，因此散度 $\operatorname{div}\vec{A}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$ ，

$$\operatorname{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=0\text{，}\quad \text{流量}\ \ \Phi=\iiint_{\Omega}\operatorname{div}\vec{A}dv=0\text{。}$$

（2）$P=2x+3z,\ Q=-xz-y,\ R=y^2+2z$，因此

散度 $\operatorname{div}\vec{A}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=2-1+2=3$，

旋度 $\operatorname{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=(2y+x)\vec{i}+3\vec{j}-z\vec{k}$，

流量 $\Phi=\iiint_{\Omega}\operatorname{div}\vec{A}dv=3\iiint_{\Omega}dv=4\pi\cdot 3^3=108\pi$。

2. 设向量场 $\boldsymbol{A}=y^2\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$，利用斯托克斯公式把曲面积分 $\iint_{\Sigma}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ 化为曲线积分，并计算积分值，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧，$\boldsymbol{n}$ 是 Σ 的单位法向量.1.（1）

解：Γ 是 Σ 的边界曲线，取正向（即由曲面的侧引出的正向），故从 z 轴看，它是逆时针方向的。它的向量方程为 $\vec{r}=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}$，$d\vec{r}=(-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j})dt$，根据（10.39）得

$\iint_{\Sigma}\operatorname{rot}\vec{A}\cdot\vec{n}dS=\int_{\Gamma}\vec{A}\cdot d\vec{r}$。于是在曲线 Γ 上，$\vec{A}=\sin^2 t\vec{i}+\cos t\sin t\vec{j}$，则

$$\iint_{\Sigma}\operatorname{rot}\vec{A}\cdot\vec{n}dS=\int_{\Gamma}\vec{A}\cdot d\vec{r}=\int_0^{2\pi}(-\sin^3 t+\cos^2 t\sin t)dt=0\text{。}$$

$$\iint_{\Sigma}\operatorname{rot}\vec{A}\cdot\vec{n}dS=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\cdot(dS\iiint_{\Omega}\operatorname{div}\vec{A}dv=3\iiint_{\Omega}dv=4\pi\cdot 3^3=108\pi\text{。}$$

总习题十

1.选择题：

（1）设 L 是曲线 $y=x^3$ 与直线 $y=x$ 所围成区域的整个边界曲线，$f(x,y)$ 是连续函数，则曲线积分 $I=\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=$（　　　）.

(A) $\int_0^1 f(x,x^3)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x,x)\mathrm{d}x$；　　(B) $\int_{-1}^1\left(\sqrt{1+9x^4}\cdot f(x,x^3)+\sqrt{2}f(x,x)\right)\mathrm{d}x$；

(C) $\int_0^1 f(x,x^3)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x,x)\sqrt{2}\mathrm{d}x$；　　(D) $\int_0^1 f(x,x^3)\sqrt{1+9x^4}\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x,x)\sqrt{2}\mathrm{d}x$.

解：由作图可知 $L=L_1+L_2$,其中 $L_1: y=x^3,-1\le x\le 1$，$L_2: y=x,-1\le x\le 1$，再由可加性带

入公式易得，正确答案（B）。

（2）$I=\oint_L \frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$，因$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$，所以（　　　　）.

(A)对任意闭曲线L, $I=0$；　(B)当L为不过原点的闭曲线时$I=0$；

(C)对任意闭曲线L, $I\neq 0$；　(D)当L内不含原点时$I=0$,含原点时$I\neq 0$；

解: 例如$I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$,当 L 为一条光滑且不经过原点的连续闭曲线时为 0，为 C 的反例。当 L 所围区域包含原点时为2π，为 A 和 B 的反例。正确答案(D)。

(3)已知曲线积分$\int_L f(x,y)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$与积分路径无关, $f(x,y)$在xOy平面上具有一阶连续的偏导数,则$f(x,y)$必须满足条件（　　　）;

(A) $xf_x=yf_y$；　(B) $xf_y+yf_x=0$；　(C) $xf_y=yf_x$；　(D) $xf_x+yf_y=0$；

解:由曲线积分与路径无关的条件知有$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，即$\frac{\partial(xf(x,y))}{\partial x}=\frac{\partial(yf(x,y))}{\partial y}$，故有$xf_x=yf_y$，正确答案(A)

（4）设Σ是平面$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$在第一卦限的有限部分，则曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)\mathrm{d}S=$（　　）;

(A) $2\sqrt{61}$；　(B) $3\sqrt{61}$；　(C) $4\sqrt{61}$；　(D) $5\sqrt{61}$；

解: $\iint\limits_{\Sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)dS$中的 x，y，z 满足曲面方程，故$\iint\limits_{\Sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)dS=\iint\limits_{\Sigma}4dS=4A$，A 是平面在第一卦限中的三角形区域面积，利用海伦公式可得结果，或者

$\iint\limits_{\Sigma}4dS=4\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}dxdy=4\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+(-2)^2+(-\frac{2}{3})^2}dxdy=4\sqrt{61}$，正确答案 C。

（5）设Σ为由$z=\frac{x^2+y^2}{2}$与$z=z_0(z_0>0)$所围立体之表面的内侧，则$\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（　　　）;

(A) $\pi z_0{}^2$；　(B) $3\pi z_0{}^2$；　(C) $-\pi z_0{}^2$；　(D) $-3\pi z_0{}^2$；

解：记$\sum$所围的闭区域为Ω，由$Gauss$公式得

$$\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{\sqrt{2z_0}} r\mathrm{d}r\int_{\frac{1}{2}r^2}^{z_0}\mathrm{d}z$$

$$= -2\pi\int_0^{\sqrt{2z_0}}(z_0-\frac{1}{2}r^2)r\mathrm{d}r = -2\pi\int_0^{\sqrt{2z_0}}(z_0 r-\frac{1}{2}r^3)\mathrm{d}r = -\pi {z_0}^2$$ 。正确答案（C）。

（6）微分形式$\left(2x\cos y-y^2\sin x\right)\mathrm{d}x+\left(2y\cos x-x^2\sin y\right)\mathrm{d}y$ 的原函数是（　　　）;

(A) $\left(x^2+y^2\right)\left(\cos x+\cos y\right)+C$ ；　　(B) x^2+y^2+C ；

(C) $x^2\cos y+y^2\cos x+C$ ；　　　　(D) $\left(\cos x+\cos y\right)\mathrm{e}^x+C$.

解:由于$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，故$\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy$

$=\int_0^x(2x)dx+\int_0^y(2y\cos x-x^2\sin y)dy \ = x^2\cos y+y^2\cos x+C$，正确答案(C)。

（7)由分片光滑的封闭曲面Σ所围成立体的体积$V=$（　　　　）;

(A) $\frac{1}{3}\oiint\limits_{S} y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ；　　(B) $\frac{1}{3}\oiint\limits_{S} z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ；

(C) $\frac{1}{3}\oiint\limits_{S} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ；　　(D) $\frac{1}{3}\oiint\limits_{S} -x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解：记$\sum$所围的闭区域为Ω，由$Gauss$公式得

$\frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$ ，

$\frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$ ，$\frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ，

$\frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma} -x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ，　故正确答案（C）

2.填空题：

（1）设$L:x^2+y^2=1$，则$\oint_L(3y+x^2+y^2)ds$ ___________;

（2）设L是在圆周$x^2+y^2=9$的正向，则$\oint_L(2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy=$_________,

$\oint_L\dfrac{xdy-ydx}{\sqrt{x^2+y^2}}=$____________________;

（3）当两实常数$a=$_____和$b=$_____时，$(ax^2y-y^2)\mathrm{d}x+(x^3+bxy)\mathrm{d}y$ 恰为函数$u(x,y)=$

的全微分；

（4）设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=$ ____________；

（5）设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$，取外侧，则

$\iint\limits_{\Sigma}x(x^2+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(y^2+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z(z^2+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ____________________；

（6）设向量场 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, $|\boldsymbol{r}|$ 为 $\boldsymbol{r}$ 的模，则在 $|\boldsymbol{r}|\neq 0$ 处有 $\mathrm{rot}\ (\mathrm{grad}\,\frac{1}{|\boldsymbol{r}|})=$ __________；

（7）向量场 $\boldsymbol{A}=xy\boldsymbol{i}+\cos(xy)\boldsymbol{j}+\cos(xz)\boldsymbol{k}$ 在点 $(\frac{\pi}{2},1,1)$ 处的散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}\big|_{(\frac{\pi}{2},\,1,\,1)}=$ _______.

解:（1）代入参数方程 $\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$

$$\oint_L(3y+x^2+y^2)ds=\int_0^{2\pi}(3\sin\theta+1)\sqrt{(-\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2}\,d\theta=2\pi$$

（2）首先使用格林公式 $I=\oint_L(2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy=\iint\limits_{D_{xy}}-2dxdy=-2\times 9\pi=-18\pi,$

第二问中由于不满足偏导数连续的性质，所以需要添加辅助线 $l:x^2+y^2=R^2$，方向为逆时针方向，则

$$\oint_{L_1}\frac{xdy-ydx}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_L\frac{xdy-ydx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\int_{l^-}\frac{xdy-ydx}{\sqrt{x^2+y^2}},\text{而}$$

$$\oint_{L_1}\frac{xdy-ydx}{\sqrt{x^2+y^2}}=\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_R^3\frac{1}{r}rdr=6\pi-2\pi R,$$

$$\oint_l\frac{xdy-ydx}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{R}\int_l xdy-ydx=\frac{1}{R}2A=\frac{1}{R}2\pi R^2=2\pi R,$$

故 $\oint_L\frac{xdy-ydx}{\sqrt{x^2+y^2}}=6\pi-2\pi R-(-2\pi R)=6\pi$ 。

（3）答案 3,2，　利用 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 易得。

（4）$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=R^2\iint\limits_{\Sigma}1dS=R^2\times 4\pi R^2=4\pi R^4$ 。

（5）记 $\sum$ 所围的闭区域为 Ω，由 $Gauss$ 公式得

$$\iint_{\Sigma} x(x^2+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y(y^2+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z(z^2+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= 3\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 3\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r + 3\times\frac{4}{3}\pi = \frac{12}{5}\pi + 4\pi = \frac{32}{5}\pi$$

（6） $\mathrm{grad}\dfrac{1}{|\vec{r}|} = \mathrm{grad}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \dfrac{-1}{|\vec{r}|^3}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$ ，

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{-x}{|\vec{r}|^3} & \dfrac{-y}{|\vec{r}|^3} & \dfrac{-z}{|\vec{r}|^3} \end{vmatrix} = 0\text{。}$$

（7） $\mathrm{div}\,\vec{A} = y\vec{i} - x\sin(xy)\vec{j} - x\sin(xz)\vec{k}$ ， $\mathrm{div}\boldsymbol{A}\big|_{(\frac{\pi}{2},1,1)} = = 1-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2} = 1-\pi$ 。

3．计算下列曲线积分：

（1） $\int_{\Gamma} z\mathrm{d}s$,其中 Γ 为曲线 $x=t\cos t, y=t\sin t, z=t\left(0\le t\le t_0\right)$；

（2） $\oint_l \sqrt{x^2+y^2}ds$,其中 L 为圆周 $x^2+y^2=ax$, $a>0$；

（3） $\int_L y\mathrm{d}x$,其中 L 是以 $A\left(1,0\right), B\left(0,1\right), C\left(2,2\right)$ 为顶点的 ΔABC 边界曲线的正向；

（4） $\int_L\left(\mathrm{e}^x\sin y-2y\right)\mathrm{d}x+\left(\mathrm{e}^x\cos y-2\right)\mathrm{d}y$,其中 L 为上半圆周 $\left(x-a\right)^2+y^2=a^2, y\ge 0$ 沿逆时针方向 $(a>0)$；

（5） $\int_L\left(x\mathrm{e}^x+3x^2y\right)\mathrm{d}x+\left(x^3+\sin y\right)\mathrm{d}y$,其中 L 均为自 $A\left(-1,0\right)$ 沿 $y=x^2-1$ 至 $B\left(2,3\right)$ 的一段曲线弧；

（6） $\oint_{\Gamma} xyz\mathrm{d}z$ ，其中 Γ 是用平面 $y=z$ 截球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所得的截痕，从 z 轴正向看去，沿逆时针方向.

解:（1） $\int_{\Gamma} zds = \int_0^{t_0} t\sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}dt = \int_0^{t_0} t\sqrt{2+t^2}dt = \dfrac{(2+t_0^2)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}}{3}$

（2） L 的极坐标方程为 $\rho = a\cos\theta, -\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$，故 $\begin{cases} x = a\cos\theta\cos\theta \\ y = a\cos\theta\sin\theta \end{cases}$ 代入积分可得

$$\oint_l \sqrt{x^2+y^2}ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta\sqrt{(a\cos\theta)^2 + (-a\sin\theta)^2}d\theta = 2a^2$$

（3） $L=\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3$ 其中

$\Gamma_1: y=-x+1, 0\le x\le 1$， $\Gamma_2: y=2x-2, 1\le x\le 2$， $\Gamma_3: y=\dfrac{1}{2}x+1, x$ 从 2 到 0 变化

$$\int_L ydx=\int_0^1(-x+1)dx+\int_1^2(2x-2)dx+\int_2^0(\frac{1}{2}x+1)dx=-\frac{3}{2}$$

或者直接用格林公式 $\int_L ydx=\iint\limits_D -dxdy=-A=-\dfrac{3}{2}$,A 为此等腰三角形面积为 $\dfrac{3}{2}$.

(4) 添加辅助线 $l: y=0, 0\le x\le 2a$ 形成闭合曲线 L_1,使用格林公式得到

$$\int_{L_1} Pdx+Qdy=\iint\limits_D 2dxdy=2\times\frac{\pi a^2}{2}=\pi a^2$$,则有

$$\int_L Pdx+Qdy=\pi a^2-\int_l Pdx+Qdy=\pi a^2-0=\pi a^2$$

(5) 由 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=3x^2, \dfrac{\partial P}{\partial y}=3x^2$ 可知,曲线积分与路径无关,选取折线路径可得

$$\int_L (xe^x+3x^2y)dx+(x^3+\sin y)dy=\int_{-1}^2 xe^x dx+\int_0^3(8+\sin y)dy=e^2+2e^{-1}+25-\cos 3$$

（6）平面与球面的截线的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta \\ z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta \end{cases}$,代入曲线积分可得

$$\oint_{\Gamma} xyzdz=\int_0^{2\pi}(\cos\theta\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta)d\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta\sin^2\theta)d\theta=\frac{\sqrt{2}\pi}{16}$$

4.计算下列曲面积分：

（1） $\iint\limits_{\Sigma}|yz|\,\mathrm{d}S$，其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=1$ 割下的有限部分；

（2） $\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}S$,其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$；

（3） $\iint\limits_{\Sigma}(y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$(0\le z\le h)$ 的外侧；

（4） $I=\oiint\limits_{\Sigma}y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y^2+xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中 Σ 是正方体 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\le x\le a, 0\le y\le a, 0\le z\le a\}$ 的整个边界曲面的外侧；

（5）$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$，其中$\Sigma$为上半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\ (a>0)$的上侧.

解:（1）曲面投影到 xoy 面为圆形区域: $x^2+y^2\le 1$

$$\iint\limits_{\Sigma}|yz|dS=\iint\limits_{D_{xy}}|y\sqrt{x^2+y^2}|\sqrt{1+(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})^2+(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})^2}dxdy$$

由对称性可知 $=2\sqrt{2}\iint\limits_{D_1}y\sqrt{x^2+y^2}dxdy=2\sqrt{2}\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1(r\sin\theta\times r\times r)dr=\sqrt{2}$

（2）由球面方程可知$x=\pm\sqrt{a^2-z^2-y^2}$,且$\dfrac{\partial x}{\partial y}=\dfrac{-y}{\sqrt{a^2-z^2-y^2}},\dfrac{\partial x}{\partial z}=\dfrac{-z}{\sqrt{a^2-z^2-y^2}}$

则$\iint\limits_{\Sigma}x^2dS=2\iint\limits_{\Sigma_1}x^2dS=2\iint\limits_{D_{yz}}(a^2-z^2-y^2)\sqrt{1+\dfrac{y^2}{a^2-z^2-y^2}+\dfrac{z^2}{a^2-z^2-y^2}}dydz$

$$=2a\iint\limits_{D_{yz}}(\sqrt{a^2-z^2-y^2})dydz=2a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}rdr=\frac{4}{3}\pi a^4$$

或者使用对称性： $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=a^2\iint\limits_{\Sigma}dS=4\pi a^4,$

则有$\iint\limits_{\Sigma}x^2dS=\iint\limits_{\Sigma}y^2dS=\iint\limits_{\Sigma}z^2dS=\dfrac{4}{3}\pi a^4$

(3) 设圆盘$\Lambda:x^2+y^2\le h^2,\ z=h$方向向上，设$\Sigma,\ \Lambda$所围的体为$\Omega$。则根据高斯公式

$$\iint\limits_{\Sigma}(y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}0dxdydz-\iint\limits_{\Lambda}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy$$

$=-\iint\limits_{\Lambda}(x^2-y)dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}(x^2-y)dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}x^2dxdy$（由对称性）

$=-\dfrac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy=-\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h r^2rdr=-\dfrac{\pi}{4}h^4$。

(4) 根据高斯公式：$I=\iiint\limits_{\Omega}(y+x)dxdydz=2\iiint\limits_{\Omega}xdxdydz$（利用对称性）。

$I=2\int_0^a xdx\int_0^a dy\int_0^a dz=a^2a^2=a^4$。

（5）设圆盘 $\Lambda: x^2+y^2\le a^2,\ z=0$ 方向向上，设 $\Sigma,\ \Lambda$ 所围的体为 Ω。则根据高斯公式

$$\iint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}=\frac{1}{a^3}\iint_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=\frac{1}{a^3}\iint_{\Sigma+\Lambda}xdydz+ydzdx+zdxdy-\frac{1}{a^3}\iint_{\Lambda}xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=\frac{1}{a^3}\iiint_{\Omega}3dxdydz-0=\frac{2\pi a^3}{a^3}=2\pi$$.(使用了球体的体积公式)。

5．证明：$\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 在整个 xOy 平面除去 y 的负半轴及原点的开区域 G 内是某个二元函数的全微分，并求出一个这样的二元函数.

证明:由定义可知,G 是单连通区域且

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$,由定理 2.2 可知 $Pdx+Qdy$ 在 G 内是某二元函数的全微分

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{x}{(x^2+y^2)}dx+\frac{y}{(x^2+y^2)}dy=\int_1^x\frac{dx}{x}+\int_0^y\frac{y}{(x^2+y^2)}dy$$

$$=\ln|x|+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)|_0^y=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

6.设 $f(x)$ 具有一阶连续导数，积分 $\int_L f(x)(y\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$ 在右半平面 $x>0$ 内与路径无关，试求满足条件 $f(0)=1$ 的函数 $f(x)$.

解:曲线积分与路径无关，故 $f'(x)=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=f(x)$,解此微分方程可得

$f(x)=Ce^x$,而由 $f(0)=1$ 可知 $f(x)=e^x$

(B)

1. 设 $\overset{\frown}{AB}$ 为连接点 $A(1,2)$ 到 $B(2,3)$ 的一段曲线,又直线段 AB 与 $\overset{\frown}{AB}$ 所围的图形面积等于 k，试计算曲线积分 $\int_{AB}\dfrac{y}{x^2}\mathrm{d}x+\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}y$.

解：如果 AB 在 $\overset{\frown}{AB}$ 下方，直线段 AB 的参数化为：$x=1+t,\ y=2+t$，$0\le t\le 1$，则

$$I=\int_{AB}\frac{y}{x^2}dx+(x-\frac{1}{x})dy=\int_0^1(\frac{2+t}{(1+t)^2}+(1+t-\frac{1}{1+t}))dt\ =(-\frac{1}{1+t}+t+\frac{t^2}{2})\Big|_0^1=2$$ 。故

$$J=\int_{\widehat{AB}}\frac{y}{x^2}dx+(x-\frac{1}{x})dy=\int_{\widehat{AB}BA}\frac{y}{x^2}dx+(x-\frac{1}{x})dy-\int_{BA}\frac{y}{x^2}dx+(x-\frac{1}{x})dy$$

$$=-\iint_D(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2})dxdy+I=2-k$$ 。（其中 D 是 AB 与 $\widehat{AB}$ 所围的图形区域）。

如果 AB 在 $\widehat{AB}$ 上方，则同理可得 $J=2+k$ 。

如果 AB 与 $\widehat{AB}$ 不形成一条简单曲线，则无法使用上述办法解。

2. 计算曲线积分 $\oint_\Gamma(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中 Γ 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从 z 轴正向看去，Γ 为逆时针方向.

解：取 $\sum$ 是平面 $x+y+z=2$ 的上侧被 Γ 所围的部分，它的单位法向量为 $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$，即

$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$，所以根据 Stocks 公式，

$$\oint_\Gamma(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$$

$$=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & 2z^2-x^2 & 3x^2-y^2\end{vmatrix}dS=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma(-2y-4z-(6x+2z)+(-2x-2y))dS$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma(4x+2y+3z)dS$$ （设 D_{xy} 是由 $|x|+|y|=1$ 在 xoy 面所围区域）

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{D_{xy}}(4x+2y+3(2-x-y))\sqrt{3}dxdy=-2\iint_{D_{xy}}(x-y+6)dxdy$$

$$=-2[\int_{-1}^0dx\int_{-1-x}^{x+1}(x-y+6)dy+\int_0^1dx\int_{x-1}^{1-x}(x-y+6)dy]$$

$$=-2[\int_{-1}^0dx\int_{-1-x}^{x+1}(x-y+6)dy+\int_0^1dx\int_{x-1}^{1-x}(x-y+6)dy]=-24$$ 。

3. 计 算 曲 面 积 分 $\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x}{a}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y}{b}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z}{c}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其 中 Σ 为 平 面 $x=0,y=0,z=0$ 及 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 所围成四面体 Ω 的边界的外侧 $(a>0,b>0,c>0)$.

解：根据高斯公式 $\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x}{a}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y}{b}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z}{c}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})dxdydz=(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=\frac{abc}{6}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$$ 。

4. 计算曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}+\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y}+\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}$,其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$（不包含 y 轴和 z 轴上的点）的外侧.

解：$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}+\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y}+\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}=-\iiint\limits_{\Omega}(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2})dxdydz=-3\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{x^2}dxdydz$

$$=-3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1\frac{1}{\rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi}\rho^2\sin\varphi d\rho$$

$$=-3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1\frac{1}{\cos^2\theta\sin\varphi}d\rho=2\pi$$ 。

5.设 $f(u)$ 连续，L 为 xOy 平面上分段光滑的闭区域，证明：$\oint_L f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=0$.

解：$P=xf(x^2+y^2),\ Q=yf(x^2+y^2)$，因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=xf'(x^2+y^2)\cdot 2y,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=yf'(x^2+y^2)\cdot 2x$，故两者相等，即积分与路径无关，因此 $\oint_L f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=0$ 。

6.设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数，L 是上半平面 $y>0$ 内的有向分段光滑曲线，其起点为 (a,b)，终点为 (c,d)，记

$$I=\int_L\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y$$ ，

(1)证明曲线积分 I 与路径无关；(2)当 $ab=cd$ 时，求 I 的值.

（1）证明：因 $\frac{\partial}{\partial y}[\frac{1}{y}(1+y^2f(xy)]=f(xy)-\frac{1}{y^2}+xyf'(xy)=\frac{\partial}{\partial x}[\frac{x}{y^2}(y^2f(xy)-1)]$，在上半平面恒成立，所以积分与路径无关。

（2）解：根据（1），选择从(a,b)到(c,b)再到(c,d)的折线路径。得

$$I=\int_a^c \frac{1}{b}(1+b^2 f(bx)]dx+\int_b^d \frac{c}{y^2}(y^2 f(cy)-1)dy$$

$$=\frac{c-a}{b}+\int_a^c bf(bx)dx+\int_b^d cf(cy)dy+\frac{c}{d}-\frac{c}{b}$$

$$=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{bc} f(t)dt+\int_{bc}^{cd} f(t)dt=\frac{bc-ad}{bd}+\int_{ab}^{cd} f(t)dt,$$

所以，当$ab=cd$时，$I=\dfrac{bc-ad}{bd}$。

7*.设空间区域Ω由曲面$z=a^2-x^2-y^2$与平面$z=0$围成，其中a为正常数，记Ω表面的外侧为Σ，Ω的体积为V，证明：

$$\oiint_{\Sigma} x^2yz^2dydz-xy^2z^2dzdx+(z+xyz)dxdy=\iiint_{\Omega} xydxdydz=V.$$

证明：要证$\oiint_{\Sigma} x^2yz^2dydz-xy^2z^2dzdx+(z+xyz)dxdy=V$。直接计算，容易得知正确。

(C)

1.在变力$\boldsymbol{F}=yz\boldsymbol{i}+zx\boldsymbol{j}+zy\boldsymbol{k}$的作用下,一质点由原点沿直线运动到椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$上第一卦限的点$M\left(\xi,\eta,\varsigma\right)$,问当$\xi,\eta,\varsigma$取何值时,力$\boldsymbol{F}$所做的功$W$最大？并求出$W$的最大值.

解：参数化质点运动的路径：$x=\xi t,\ y=\eta t,\ z=\varsigma t,\ 0\le t\le 1$，则、

$$W=\int_L yzdx+xzdy+xydz=\int_0^1 3\xi\eta\varsigma dt=3\xi\eta\varsigma。$$

由拉格朗日乘数法，构造函数 $F(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1)$，

$F'_x=yz+\dfrac{2x}{a^2}\lambda,\ F'_y=xz+\dfrac{2y}{b^2}\lambda,\ F'_z=xy+\dfrac{2z}{c^2}\lambda$，$F'_\lambda=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1$，令它们为零，

解得唯一的解$x=\dfrac{a}{\sqrt{3}},\ y=\dfrac{b}{\sqrt{3}},\ z=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$，这样当$\xi=\dfrac{a}{\sqrt{3}},\ \eta=\dfrac{b}{\sqrt{3}},\ \varsigma=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$时,力$\boldsymbol{F}$所做的$W$最大，并且$W$的最大值为$\dfrac{abc}{\sqrt{3}}$.

2.求均匀曲面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的质心的坐标.

解：记该曲面为$\sum$，它在 xoy 面上的投影区域记为D_{xy}，则根据对称性有$\overline{x}=\overline{y}=0$，

$$\overline{z}=\frac{\iint\limits_{\Sigma} zdS}{\iint\limits_{\Sigma} dS}=\frac{1}{2\pi a^2}\iint\limits_{\Sigma} zdS=\frac{1}{2\pi a^2}\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{(\sqrt{a^2-x^2-y^2})^2}}dxdy$$

$=\frac{a}{2\pi a^2}\iint\limits_{D_{xy}} dxdy=\frac{1}{2\pi a}\pi a^2=\frac{a}{2}$。因此该曲面的质心坐标为$(0,0,a/2)$。

3.求向量场$\boldsymbol{A}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$通过区域$\Omega:0\le x\le 1,0\le y\le 1,0\le z\le 1$的边界曲面流向外侧的流量.

解：流量$\Phi=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=3\iiint\limits_{\Omega} dv=3$。

4.设在右半平面$x>0$内有力$\boldsymbol{F}=-\frac{k}{\rho^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$构成力场，其中$k$为常数，$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，证明在此力场中场力所做的功与所取的路径无关.

证明：在右半平面$x>0$内，$P=-\frac{kx}{\rho^3},\ Q=-\frac{ky}{\rho^3}$有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{3kxy}{\rho^5}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

故$\vec{F}$所作的的功$W=\int_L -\frac{kx}{\rho^3}dx-\frac{ky}{\rho^3}dy$与所取路径无关。