线性代数/线性代数 A 综合练习 1

一、选择题。

1. 排列 **81726354** 的逆序数为 $\tau(81726354)=($　　$)$.

(A) **4**； (B) **8**； (C) **16**； (D) **32**.

2. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=E$，则下列一定成立的是（　　）

(A) $A=E$ 或者 $A=-E$； (B) $|A|=1$ 或者 -1；

(C) A 为正交矩阵； (D) $|A|^2=|A|$.

3. 若 n 阶矩阵 A 满足 $A^2+A-6E=0$，则 $\left(A+E\right)^{-1}$ 为（　　）

(A) A； (B) $\dfrac{A}{2}$； (C) $\dfrac{A}{3}$； (D) $\dfrac{A}{6}$.

4. n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m(\alpha_i\neq 0)$ 线性无关的充要条件是（　　）

(A) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ 中存在子向量组线性无关；

(B) 存在全为 **0** 的数 $k_1,k_2,\dots,k_m$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots+k_m\alpha_m=0$；

(C) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ 的秩 $R(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)=m$；

(D) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ 的秩 $R(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)<m$.

5. 下列集合中构成向量空间的是（　　）

(A) $V_1=\{(x_1,x_2,x_3)^T\mid x_1+x_2+x_3=1\}$； (B) $V_2=\{(0,x_1,x_2)^T\mid x_1+x_2=1\}$；

(C) $V_3=\{(1,x_1,x_2)^T\mid x_1+x_2=1\}$； (D) $V_4=\{x\mid Ax=0\}$.

6. n 阶方阵 A 相似于对角矩阵 Λ 的充要条件是（　　）.

(A) A 有 n 个线性无关的特征向量； (B) A 有 n 个不同的特征值；

(C) A 为可逆矩阵； (D) A 为正交矩阵.

7. 设二次型 $f=x^T\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&4\\1&0&2\end{pmatrix}x$,则下列说法正确的是(　　).

(A) f 为正定二次型； (B) 二次型 f 的秩为 3；

(C) 二次型 f 的秩为 2； (D) 二次型对应的矩阵 A 可逆.

二、填空题。

1. 已知四阶行列式 D 第一行的元素为 3,4,1,2，第一行元素对应的**余子式**分别为 0,3,1,1，则四阶行列式 D=____________.

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2\\8&5\end{pmatrix}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=$_____________.

3. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\t\\1\end{pmatrix}$ 线性相关，则 t 的取值范围为________.

4. 在齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 中，系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数为 4×5 且秩为 $R(A)=2$，则齐次线性方程组的解空间的维数为_____________.

5. 一向量组如果有两个或者两个以上的极大无关组，则任意两个极大无关组之间_____________ (等价或者不等价) .

6. 已知三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1,1,2$，则行列式 $\left|A^3+A^{-1}+4E\right|=$__________.

7. 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2+tx_3^2+4x_1x_2+2x_2x_3$ 为正定二次型，则 t 满足______.

三、计算题。

1、计算 5 阶行列式 $D_5=\begin{vmatrix}1&2&1&1&0\\1&2&4&5&2\\2&1&2&2&0\\4&1&3&1&0\\2&2&1&3&0\end{vmatrix}$.

2、设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$，使其满足矩阵方程 $\boldsymbol{XA}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}$.

3、求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-2\\-4\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\2\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}3\\6\\0\\5\end{pmatrix}$ 的秩和一个极大无关组，并将其余向量用极大无关组线性表示.

4、λ 取何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3-x_4+x_5=1\\3x_1-x_2+2x_3+5x_4+3x_5=7\\x_1+5x_2-10x_3-9x_4+x_5=\lambda\end{cases}$ 有无穷多解？并在有解时，求出其解（要求写出向量形式的通解）.

5、求一正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$，把二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 化为标准形，并写出所用的正交变换和 f 的标准形.

四、证明题。

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4$ 也线性无关.

线性代数/线性代数 A 综合练习 2

一、填空题

1. 排列 7623451 的逆序数 $\tau(7623451)=$_________.

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$______________.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，若 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=-1/3$，则 $|-3\boldsymbol{A}|=$_________.

4. 齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1 \quad +3x_3+4x_4-5x_5=0\\ x_2-2x_3-3x_4+x_5=0\end{cases}$ 的基础解系包含___个线性无关的解向量.

5. 已知行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\3&0&4&1&2\\1&1&1&1&1\\1&1&0&2&3\\2&4&3&2&1\end{vmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}_{41}+2\boldsymbol{A}_{42}+3\boldsymbol{A}_{43}+4\boldsymbol{A}_{44}+5\boldsymbol{A}_{45}=$______________.

6. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=8$，已知 $\boldsymbol{A}$ 有两个特征值 1 和 -4，则另一个特征值为___.

7. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{100}=$ __________.

二、选择题。

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则（　　）.

（A）$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$；　（B）$|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$；　（C）$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$；　（D）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$.

2. 下列矩阵中**不是**初等矩阵的是（　　）.

（A）$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$；　（B）$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$；　（C）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$；　（D）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$

3. 设 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是非齐次线性方程组，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是其任意两个解，则下列结论**错误的**是（　）.

（A）$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个解；（B）$\frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解；

（C）$\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个解；（D）$2\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解

4. 已知 3×4 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关，则 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于（　　）.

（A）1；　（B）2；　（C）3；　（D）4

5. 设 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是非齐次线性方程组，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维向量，则下列集合不构成向量空间的是（　　）.

（A）$\boldsymbol{V}_1=\left\{\boldsymbol{x}\middle|\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}\right\}$；　　（B）$\boldsymbol{V}_2=\left\{\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta}\middle|\lambda,\mu\in\mathbf{R}\right\}$；

（C）$\boldsymbol{V}_3=\left\{\boldsymbol{x}\middle|\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\right\}$；　　（D）$\boldsymbol{V}_4=\left\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}\middle|x_1+x_2+x_3=0\right\}$.

6. 若 $\boldsymbol{\alpha}=(1,k,1)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\beta}=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$ 正交，则 $k=$（　　）.

（A）0；　　（B）1；　　（C）-1；　　（D）2

7. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_2x_3$，则（　　）.

（A）f 的秩为 2 ；　　（B）f 是负定的；

（C）f 既不是正定的，也不是负定的；　　（D）f 是正定的

三、计算题

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$.

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&2&-1\\2&0&4\end{pmatrix}$，求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的矩阵 $\boldsymbol{B}$.

3. 求解非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+2x_4=1,\\2x_1+4x_2+x_3+x_4=5,\\-x_1-2x_2-2x_3+x_4=-4.\end{cases}$ （要求写出通解的向量形式）

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}$，　**（1）**求 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的一个极大无关组；**（2）**求出其余向量由这一极大无关组线性表示的表达式.

5. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+6x_2x_3$，**（1）**写出二次型 f 的矩阵；**（2）**用正交变换把二次型 f 化为标准形，并写出相应的正交矩阵.

6. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\\1&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}$，求**（1）**$3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BC}$；**（2）**$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

四、证明题

已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是三维向量空间 V 的一个基，且

$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\ \beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\ \beta_3=\alpha_1+\alpha_3$，证明$\beta_1,\beta_2,\beta_3$也是$V$的一个基.

线性代数/线性代数 A 综合练习 1 参考答案

一、选择题

1.（C）； 2.（B）； 3.（D）； 4.（C）； 5.（D）； 6.（A）； 7.（C）

二、填空题

1、$\underline{-13}$. 2、$\underline{\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5 & -2\\ -8 & 4\end{pmatrix}}$. 3、$\underline{t=1}$. 4、$\underline{3}$. 5、<u>等价</u>. 6、$\underline{150}$. 7、$\underline{t>1}$.

三、计算题

1. 解：

$$D\overset{按c_5展开}{=\!=\!=\!=}2\cdot(-1)^{2+5}\begin{vmatrix}1&2&1&1\\2&1&2&2\\4&1&3&1\\2&2&1&3\end{vmatrix}\overset{r_2-2r_1}{=\!=\!=}(-2)\begin{vmatrix}1&2&1&1\\0&-3&0&0\\4&1&3&1\\2&2&1&3\end{vmatrix}\overset{按r_2展开}{=\!=\!=\!=}6(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&1&1\\4&3&1\\2&1&3\end{vmatrix}=6(-4)=-24$$

2. 解：由已知得 $X(A-E)=A$，$\because |A-E|=4\neq 0$，$\therefore A-E$ 可逆，故 $X=A(A-E)^{-1}$，

$$(A-E，E)=\begin{pmatrix}0&-2&0&1&0&0\\2&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1/2&0\\0&1&0&-1/2&0&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix},$$

从而 $X=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1/2&0\\-1/2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1/2&0\\-1/2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

3. 解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&-2&0&3\\2&-4&0&6\\-1&1&2&0\\0&-1&4&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

从而向量组的秩为 3，且极大无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$； $\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$.

4. 解：增广矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&1&-2&-1&1&1\\3&-1&2&5&3&7\\1&5&-10&-9&1&\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&1&1&2\\0&1&-2&-2&0&-1\\0&0&0&0&0&\lambda+3\end{pmatrix}$,

从而当 $\lambda=-3$ 时，方程组有无穷多解，且同解方程组为 $\begin{cases}x_1=2-x_4-x_5,\\x_2=-1+2x_3+2x_4,\end{cases}$

令 $x_3=c_1,x_4=c_2,x_5=c_3$，则方程组的通解为

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$（其中 c_1,c_2,c_3 为任意实数）

5、解： A 的特征多项式为 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -1\\ -2 & \lambda-1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-4)$，

A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=4$；

当 $\lambda_1=-1$ 时，解 $(-E-A)x=0$，得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，单位化得 $p_1=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=1$ 时，解 $(E-A)x=0$，得基础解系 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，单位化得 $p_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=4$ 时，解 $(4E-A)x=0$，得基础解系 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $p_3=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$；

令 $P=(p_1,p_2,p_3)$，则经正交变换 $x=Py$ 原二次型化为 $f=-y_1^2+y_2^2+4y_3^2$

四、证明题

证明：设有数 k_1,k_2,k_3 使 $k_1(\alpha_1-\alpha_2)+k_2(\alpha_2-\alpha_3)+k_3(\alpha_3-\alpha_4)=0,$

即 $k_1\alpha_1+(k_2-k_1)\alpha_2+(k_3-k_2)\alpha_3-k_3\alpha_4=0$，

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，所以 $k_1=k_2-k_1=k_3-k_2=-k_3=0$，

$\Rightarrow k_1=k_2=k_3=k_4=0$，所以 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4$ 线性无关

线性代数/线性代数 A 综合练习 2 参考答案

一、填空题

1. $\underline{15}$.　2. $\underline{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}}$.　3. $\underline{9}$.　4. $\underline{3}$.　5. $\underline{0}$.　6. $\underline{-2}$.　7. $\underline{E}$.

二、选择题

1.（B）　2.（A）　3.（A）　4.（C）　5.（C）　6.（B）　7.（D）

三、计算题

1. **解**：原式 $\overset{c_1-2c_3}{\underset{c_4+c_3}{====}} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{按}r_3\text{展开}}{====} 1\cdot(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

$\overset{r_2+r_1}{====} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 40$

2. 解：由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$，

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & \vdots & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$；

或先求出 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$，再求 $\boldsymbol{B}$

3. 解：对方程组的增广矩阵进行初等行变换化为行最简形

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得同解方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_4=2, \\ x_3-x_4=1, \end{cases}$

解为 $\begin{cases} x_1=-2c_1-c_2+2, \\ x_2=c_1, \\ x_3=c_2+1, \\ x_4=c_2, \end{cases}$　即 $\boldsymbol{x}=c_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_1,c_2\in\mathbf{R}$

4. 解： $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&3&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的一个极大无关组；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_5=-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$

5. 解：（1）二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&3\\0&3&2\end{pmatrix}$；

（2）$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\0&2-\lambda&3\\0&3&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(5-\lambda)(-1-\lambda)$，得特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=5$；

求解对应的特征方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\ (i=1,2,3)$，得基础解系分别为

$$\xi_1=(0,-1,1)^{\mathrm{T}},\quad \xi_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\quad \xi_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}；$$

单位化得 $\boldsymbol{p}_1=(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}},\boldsymbol{p}_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{p}_3=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}}$；

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，作正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，则 f 标准化为 $f=-{y_1}^2+{y_2}^2+5{y_3}^2$

6. 解：（1）$\boldsymbol{BC}=\begin{pmatrix}5&5&2\\9&8&3\\2&-1&-1\end{pmatrix}$，$3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BC}=3\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&5&2\\9&8&3\\2&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-5&1\\-9&-5&-3\\1&1&1\end{pmatrix}$；

（2）$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{BC})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}5&9&2\\5&8&-1\\2&3&-1\end{pmatrix}$

四、证明题

证明：因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是三维向量空间 V 的一个基，所以线性无关；

设有数 x_1,x_2,x_3 使得 $x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{0}$，

即 $(x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_1+x_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关得 $\begin{cases}x_1+x_3=0,\\x_1+x_2=0,\\x_2+x_3=0,\end{cases}\Rightarrow x_1=x_2=x_3=0$，

所以$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关；

且$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的向量个数为 3，所以$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$也是$V$的一个基