第二章　导数与微分

习 题 2.1　导数的概念

(A)

1.设 $f'(x_0)$ 存在,求下列极限：

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$；　　(2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$.

解: ()1 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}=-f'(x_0)$.

(2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)-\left[-f'(x_0)\right]=2f'(x_0)$.

2.设 $f(x)$, $g(x)$ 在点 $x=0$ 处可导,且 $f(0)=g(0)=0$, $g'(0)\neq 0$,证明: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(0)}{g'(0)}$.

证: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}}=\dfrac{f'(0)}{g'(0)}$.

3.求下列函数的导数：

(1) $y=\sqrt[3]{x^2}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$；　　(3) $y=\dfrac{x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}}$.

解：(1) $y'=(x^{\frac{2}{3}})'=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$；　(2) $y'=(x^{-\frac{1}{2}})'=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$；　(3) $y'=(x^{\frac{7}{6}})'=\dfrac{7}{6}x^{\frac{1}{6}}$.

4.设 $f(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geq 0.\end{cases}$ 求 $f'(0)$.

解: $f'_+(0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1$, $f'_-(0)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h}{h}=1$,

所以 $f'(0)=1$.

5.设 $f(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x^2, & x\geq 0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解: $f'_+(0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h^2}{h}=0$, $f'_-(0)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h}{h}=1$,

所以 $f'(0)$ 不存在.故 $f'(x)=\begin{cases}1, & x<0,\\ 2x, & x>0.\end{cases}$

6.求曲线 $y=\sin x$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{1}{2}\right)$ 处的切线方程与法线方程.

解: $y'\Big|_{x=\frac{\pi}{6}}=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 所以曲线 $y=\sin x$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{1}{2}\right)$ 处的切线方程为

$y-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$,法线方程为 $y-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

7.求曲线 $y=\sqrt{x^3}$ 与直线 $y=3x+2$ 平行的切线方程.

解:设切点 (x_0,y_0), 则由条件知 $y'\Big|_{x=x_0}=\dfrac{3}{2}x_0^{\frac{1}{2}}=3$,求得 $x_0=4$,从而 $y_0=8$,所以所求切线方程为 $y-8=3(x-4)$, 即 $3x-y-4=0$.

8.选择适当的常数 a 与 b ,使得 $f(x)=\begin{cases}ax+b, x<1,\\ 2x^2, x\ge 1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处可导.

解:若要使 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导, 则在点 $x=1$ 处必连续, 所以有 $a+b=2$, 即

$$f(x)=\begin{cases}ax+2-a, & x<1,\\ 2x^2, & x\ge 1.\end{cases}$$

若要使 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导, 则 $f'_+(1)=f'_-(1)$, 又

$$f'_+(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{4h+2h^2}{h}=4,$$
$$f'_-(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{ah}{h}=a,$$

所以 $a=4,b=-2$.

9.讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{x}, x\ne 0,\\ 0, \qquad x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解: 因为$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\arctan\dfrac{1}{x}=0=f(0)$,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续;

又$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\arctan\dfrac{1}{h}$ 不存在(因为左右极限不相等),所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

10.证明：曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 上任一点的切线与两坐标轴所围成的三角形面积为常数.

证：设切点 $(x_0,\dfrac{1}{x_0})$,则切线方程为 $y-\dfrac{1}{x_0}=-\dfrac{1}{{x_0}^2}(x-x_0)$,即 $y=-\dfrac{1}{{x_0}^2}x+\dfrac{2}{x_0}$.切线与两坐标轴的交点分别为$(2x_0,0),(0,\dfrac{2}{x_0})$.所以切线与两坐标轴所围成的三角形面积为 2(常数).

(B)

1.设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续,且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a$,证明： $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导,并求 $f'(0)$.

证：由 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续,且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a$可知

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}x=0,$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a$,即 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导,且 $f'(0)=a$.

2.设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=e^x-1$在原点相切,求$\lim\limits_{n\to\infty} n\,f(\dfrac{1}{2n})$.

解: 因为 $y=e^x-1$在原点处的切线斜率为 1,由曲线 $y=f(x)$ 与 $y=e^x-1$在原点相切可知 $f(0)=0,\ f'(0)=1$,所以$\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\dfrac{1}{2n}\right)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\dfrac{1}{2n}\right)-f(0)}{\dfrac{1}{2n}-0}=\dfrac{1}{2}f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

3.设 $f(x)=|x-a|\varphi(x)$,其中$\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续,证明：$f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导的充要条件是$\varphi(a)=0$.

证：由$\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续可知 $\lim\limits_{x\to a^-}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\varphi(x)=\varphi(a)$,又

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{|x-a|\varphi(x)}{x-a}=\varphi(a),$$

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{|x-a|\varphi(x)}{x-a}=-\varphi(a),$$

所以 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\Leftrightarrow\varphi(a)=0$.

4.设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义,在 $x=0$ 处可导,且 $f(0)=0$, $f'(0)=1$,又对任意的实数 x,y,有 $f(x+y)=f(x)\varphi(y)+f(y)\varphi(x)$,其中 $\varphi(0)=1$, $\varphi'(0)=0$,证明: $f(x)$ 可导,且 $f'(x)=\varphi(x)$.

证:由已知得 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x)\varphi(\Delta x)+f(\Delta x)\varphi(x)-f(x)}{\Delta x}$

$$=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(\Delta x)-1}{\Delta x}+\varphi(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(\Delta x)-\varphi(0)}{\Delta x}+\varphi(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=f(x)\varphi'(0)+\varphi(x)f'(0)=\varphi(x).$$

5.设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导,证明:(1)若 $f(x)$ 是奇函数,则 $f'(x)$ 是偶函数;(2)若 $f(x)$ 是偶函数,则 $f'(x)$ 是奇函数.

证:(1)若 $f(x)$ 是奇函数,则

$$f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-f(x-\Delta x)+f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}=f'(x),$$

所以 $f'(x)$ 是偶函数.

(2)若 $f(x)$ 是偶函数,则

$$f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}=-f'(x),$$

所以 $f'(x)$ 是奇函数.

习　题 2.2　微分的概念

(A)

1.设函数 $y=f(x)$ 的图形如图 2.6 所示,试在图 2.6(a)、(b)、(c)、(d)中分别标出点 x_0 处的 Δy、$\mathrm{d}y$ 及 $\Delta y-\mathrm{d}y$,并说明其符号.

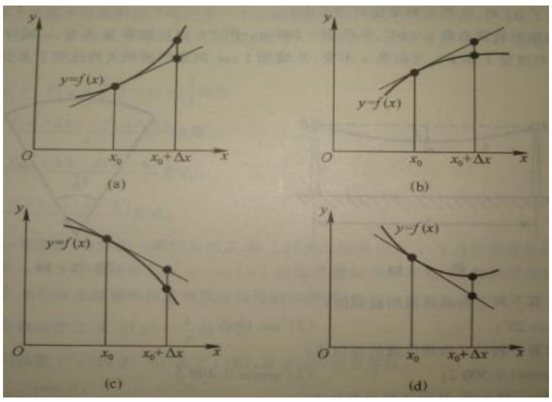

图 2-6

解：如图

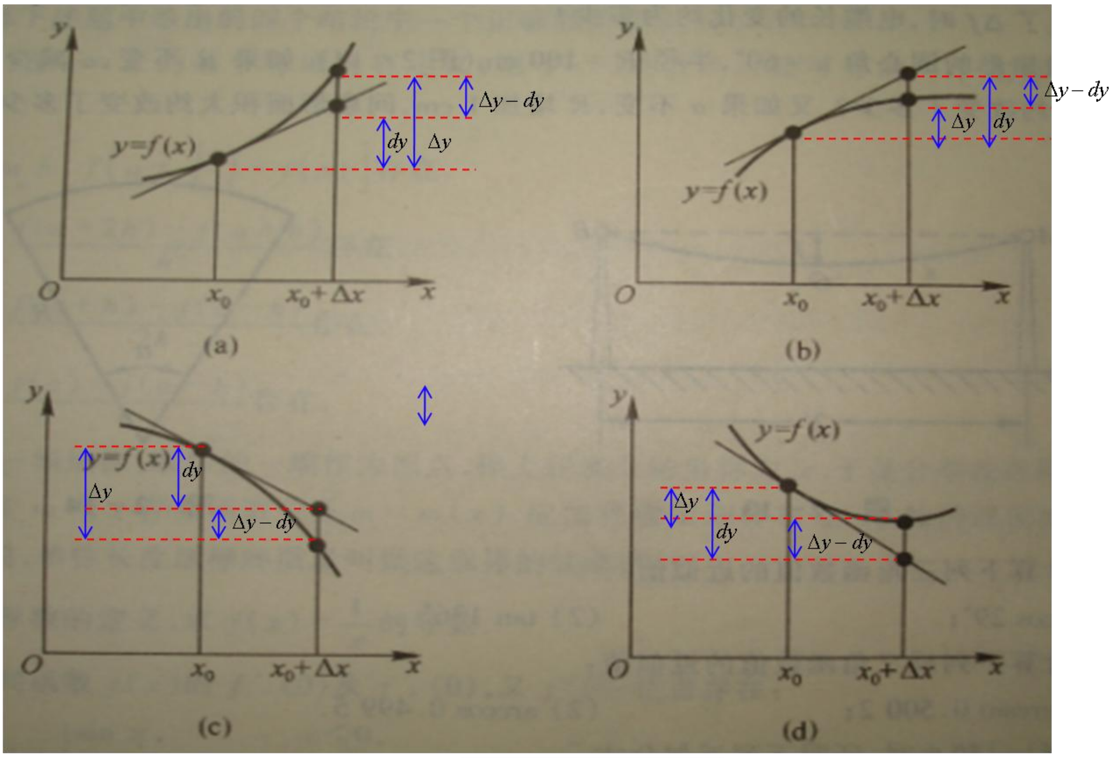

图2-6

(a) $\Delta y>0, dy>0, \Delta y-dy>0$;　　(b) $\Delta y>0, dy>0, \Delta y-dy<0$;

(c) $\Delta y<0, dy<0, \Delta y-dy<0$;　　(d) $\Delta y<0, dy<0, \Delta y-dy>0$.

2.已知 $y=\dfrac{1}{x}$,计算在 $x=2$ 处,当 Δx 分别等于 1,0.1,0.01 时的 Δy 和 $\mathrm{d}y$.

解：因为 $\Delta y=\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}, dy=y'\Delta x=-\dfrac{1}{x^2}\Delta x$,

所以 $\Delta y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=1}}=-\dfrac{1}{6}\approx-0.1667, dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=1}}=-\dfrac{1}{4}=-0.2500$,

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.1}}=-\frac{1}{42}\approx-0.0238, dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=1}}=-\frac{1}{40}=-0.0250,$$

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}}=-\frac{1}{402}\approx-0.0025, dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=1}}=-\frac{1}{400}=-0.0025.$$

3.设函数 $f(x)$ 可导,且 $f'(x)\neq 0$,证明:当 $\Delta x\to 0$ 时, $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ 与 $\mathrm{d}y$ 是等价无穷小.

证: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{dy}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f'(x)\Delta x}=\dfrac{1}{f'(x)}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{1}{f'(x)}f'(x)=1$,

所以当 $\Delta x\to 0$ 时, $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ 与 $\mathrm{d}y$ 是等价无穷小.

习　题 2.3　导数与微分的运算

(A)

1.求下列函数的导数:

(1) $y=x^3+2\sqrt{x}+\log_2 x-\dfrac{2}{x}$; (2) $y=3^x+5\tan x-\csc x$;

(3) $y=\sin x\cdot\cos x$; (4) $y=e^x\tan x$; (5) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$;

(6) $y=\dfrac{\ln x}{x}$; (7) $y=\dfrac{1+\sin t}{1+\cos t}$; (8) $y=\dfrac{\sec x}{1+\tan x}$.

解: (1) $y'=3x^2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x\ln 2}+\dfrac{2}{x^2}$; (2) $y'=3^x\ln 3+5\sec^2 x+\csc x\cot x$;

(3) $y'=\cos x\cos x-\sin x\sin x=\cos 2x$; (4) $y'=e^x\tan x+e^x\sec^2 x=e^x(\tan x+\sec^2 x)$;

(5) $y'=\left(1-\dfrac{2}{x+1}\right)'=\dfrac{2}{(x+1)^2}$; (6) $y'=\dfrac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$;

(7) $y'=\dfrac{\cos t(1+\cos t)+\sin t(1+\sin t)}{(1+\cos t)^2}=\dfrac{\cos t+\sin t+1}{(1+\cos t)^2}$;

(8) $y'=\dfrac{\sec x\tan x(1+\tan x)-\sec x\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}=\dfrac{\sec x\tan x-\sec x}{(1+\tan x)^2}$.

2.求下列函数的导数：

(1) $y=\dfrac{1}{(2x+1)^3}$;　(2) $y=\tan(1-3x)$;　(3) $y=\sqrt{a^2-x^2}$;　(4) $y=\ln(1+x^2)$;

(5) $y=\cos^2 3x$;　(6) $y=e^{-x^2}$;　(7) $y=\sec 2^x$;　(8) $y=\arctan e^{-x}$;

(9) $y=\ln\sin x$;　(10) $y=\ln\ln\ln x$;　(11) $y=(\arcsin\dfrac{x}{2})^2$; (12) $y=\dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$.

解: (1) $y'=-6\left(2x+1\right)^{-4}$;　(2) $y'=-3\sec^2(1-3x)$;

(3) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(-2x)=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$;　(4) $y'=\dfrac{2x}{1+x^2}$;

(5) $y'=2\cos 3x\cdot(-\sin 3x)\cdot 3=-3\sin 6x$;　(6) $y'=-2xe^{-x^2}$;

(7) $y'=\sec 2^x\tan 2^x\cdot 2^x\ln 2$;　(8) $y'=\dfrac{1}{1+e^{-2x}}\cdot e^{-x}\cdot(-1)=-\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}$;

(9) $y'=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x$;　(10) $y'=\dfrac{1}{\ln x\ln x}\cdot\dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x\ln x\cdot\ln x\ln x}$;

(11) $y'=2\arcsin\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{4-x^2}}\arcsin\dfrac{x}{2}$;

(12) $y'=\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x+\arcsin x\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\left(\arccos x\right)^2}=\dfrac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\left(\arccos x\right)^2}$.

3.求下列函数的导数：

(1) $y=e^{-\frac{x}{2}}\cos 3x$;　(2) $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$;　(3) $y=\ln(\sec x+\tan x)$;

(4) $y=\ln(\csc x-\cot x)$;　(5) $y=\arctan\dfrac{1}{x}$;　(6) $y=\arccos x^2$;

(7) $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$;　(8) $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;　(9) $y=\arctan\dfrac{x+1}{x-1}$;

(10) $y=x\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$.

解：(1) $y'=-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\cos 3x+e^{-\frac{x}{2}}(-\sin 3x)\cdot 3=-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(\cos 3x+6\sin x3x)$;

(2) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{1+\ln^2 x}}\cdot 2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$;

(3) $y'=\dfrac{1}{\sec x+\tan x}\cdot\left(\sec x\tan x+\sec^2 x\right)=\sec x$;

(4) $y'=\dfrac{1}{\csc x-\cot x}\cdot\left(-\csc x\cot x+\csc^2 x\right)=\csc x$;

(5) $y'=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\dfrac{1}{1+x^2}$;

(6) $y'=-\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$;

(7) $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;

(8) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1-x}{1+x}}}\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}\dfrac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}=-\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$;

(9) $y'=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2}\dfrac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}=-\dfrac{1}{1+x^2}$;

(10) $y'=\arcsin\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}}+\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{2}$.

4.设 $f(x)$ 可导,求下列函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(1) $y=\sin f(x^2)$;　　　　(2) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$.

解:(1) $y'=\cos f(x^2)\cdot f'(x^2)\cdot 2x=2xf'(x^2)\cos f(x^2)$;

(2) $y'=2f'(\sin^2 x)\sin x\cos x-2f'(\cos^2 x)\cos x\sin x=\sin 2x\left[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)\right]$.

5.将适当的函数填入下列括号内,使等式成立:

(1) $\mathrm{d}(\quad)=3\mathrm{d}x$;　(2) $\mathrm{d}(\quad)=x\mathrm{d}x$;　(3) $\mathrm{d}(\quad)=\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$;　(4) $\mathrm{d}(\quad)=\sin\omega x\mathrm{d}x$;

(5) $\mathrm{d}(\quad)=\dfrac{\mathrm{d}x}{2x+1}$; (6) $\mathrm{d}(\quad)=e^{-x}\mathrm{d}x$;　(7) $\mathrm{d}(\quad)=\sec^2 5x\mathrm{d}x$;　(8) $\mathrm{d}(\quad)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$.

解：(1)因为 $(3x+C)'=3$,所以括号内填 $3x+C$;

(2)因为$\left(\frac{1}{2}x^2+C\right)'=x$,所以括号内填$\frac{1}{2}x^2+C$;

(3)因为$\left(2\sqrt{x}+C\right)=\frac{1}{\sqrt{x}}$,所以括号内填$2\sqrt{x}+C$;

(4)因为$\left(-\frac{1}{\omega}\cos\omega x+C\right)'=\sin\omega x$,所以括号内填$-\frac{1}{\omega}\cos\omega x+C$;

(5)因为$\left(\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C\right)'=\frac{1}{2x+1}$,所以括号内填$\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$;

(6)因为$(-e^{-x}+C)'=e^{x}$,所以括号内填$-e^{-x}+C$;

(7)因为$\left(\frac{1}{5}\tan 5x+C\right)'=\sec^2 5x$,所以括号内填$\frac{1}{5}\tan 5x+C$;

(8)因为$\left(\arcsin\frac{x}{2}+C\right)'=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$,所以括号内填$\arcsin\frac{x}{2}+C$.

6.求下列函数的微分:

(1) $y=x^2+\frac{1}{x}-3\sqrt{x}$; (2) $y=(2x+1)^{-3}$; (3) $y=(\sin x+\cos x)^3$; (4) $y=\mathrm{e}^{-x}\cos(3-x)$;

(5) $y=\ln\sqrt{1-x^3}$; (6) $y=\tan^2(1+2x^2)$; (7) $y=\arcsin(1-x)$; (8) $y=\arctan\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

解:(1) $\mathrm{d}y=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)+\mathrm{d}\left(-3\sqrt{x}\right)=2x\mathrm{d}x-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x-\frac{3}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\left(2x-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{2\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$;

(2) $\mathrm{d}y=-3(2x+1)^{-4}\mathrm{d}(2x+1)=-6(2x+1)^{-4}\mathrm{d}x$;

(3) $\mathrm{d}y=3(\sin x+\cos x)^2\mathrm{d}(\sin x+\cos x)=3(\sin x+\cos x)^2(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x$;

(4) $\mathrm{d}y=\cos(3-x)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}\left[\cos(3-x)\right]=-\cos(3-x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+\sin(3-x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

$=\mathrm{e}^{-x}\left[\sin(3-x)-\cos(3-x)\right]\mathrm{d}x$;

(5) $\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\mathrm{d}\sqrt{1-x^3}=\frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\frac{1}{2\sqrt{1-x^3}}\mathrm{d}\left(1-x^3\right)=-\frac{3x^2}{2\left(1-x^3\right)}\mathrm{d}x$;

(6) $\mathrm{d}y=2\tan(1+2x^2)\mathrm{d}\tan(1+2x^2)=2\tan(1+2x^2)\sec^2(1+2x^2)\mathrm{d}(1+2x^2)$

$=8x\tan(1+2x^2)\sec^2(1+2x^2)\mathrm{d}x$;

(7) $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}\mathrm{d}(1-x)=-\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-x^2}}$;

(8) $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}\mathrm{d}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)=\dfrac{\left(1+x^2\right)^2}{\left(1+x^2\right)^2+\left(1-x^2\right)^2}\dfrac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{\left(1+x^2\right)^2}\mathrm{d}x$

$=\dfrac{-2x}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

(B)

1.设 $y=\arctan e^x-\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$,求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}$.

解:化简函数 $y=\arctan e^x-\dfrac{1}{2}\left[2x-\ln\left(e^{2x}+1\right)\right]$,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}-\frac{1}{2}\left[2-\frac{2\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}\right]=\frac{\mathrm{e}^x-1}{1+\mathrm{e}^{2x}},\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=\frac{\mathrm{e}-1}{1+\mathrm{e}^2}.$$

2.设 $y=3^{|x-2|}$,求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解:首先 $y=\begin{cases}3^{x-2}, & x\ge 2\\ 3^{2-x}, & x<2\end{cases}\triangleq f(x)$,则

$$f'_+(2)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{3^{2+\Delta x-2}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{3^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x\ln 3}{\Delta x}=\ln 3,$$
$$f'_-(2)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{3^{2-(2+\Delta x)}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{3^{-\Delta x}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{-\Delta x\ln 3}{\Delta x}=-\ln 3,$$

所以 $f'(2)$ 不存在,故 $y'=f'(x)=\begin{cases}3^{x-2}\ln 3, & x>2\\ -3^{2-x}\ln 3, & x<2\end{cases}$.

3.已知 $g(x)$ 可导,$h(x)=e^{1+g(x)}$,$h'(1)=1, g'(1)=2$,则 $g(1)$ 等于多少?

解:$h'(x)=\mathrm{e}^{1+g(x)}g'(x)$, $h'(1)=\mathrm{e}^{1+g(1)}g'(1)$,代入 $h'(1)=1, g'(1)=2$,得 $g(1)=-1-\ln 2$.

4.设 $f(x)+2f(\dfrac{1}{x})=\dfrac{3}{x}$,求 $f'(x)$.

解:由 $f(x)+2f(\dfrac{1}{x})=\dfrac{3}{x}$ 得 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2f(x)=3x$,则

$$f'(x)+2f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{3}{x^2}\quad -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)+2f'(x)=3,$$

消去 $f'\left(\frac{1}{x}\right)$ 得 $f'(x)=2+\frac{1}{x^2}$.

5.设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}x(1+\frac{1}{t})^{2tx}$,求 $f'(x)$.

解: $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}x\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2tx}=x\lim\limits_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{2x}=x\mathrm{e}^{2x}$, $f'(x)=\mathrm{e}^{2x}+2x\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^{2x}(2x+1)$.

6.设 $y=f(\ln x)e^{f(x)}$,其中 f 可微,求 $\mathrm{d}y$.

解: $y'=\frac{1}{x}f'(\ln x)\mathrm{e}^{f(x)}+f(\ln x)\mathrm{e}^{f(x)}f'(x)$, $\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{f(x)}\left[\frac{1}{x}f'(\ln x)+f(\ln x)f'(x)\right]\mathrm{d}x$.

习　题 2.4　高阶导数

(A)

1.求下列函数的二阶导数：

(1) $y=x\sin x$;　(2) $y=\sin x^2$;　(3) $y=\frac{1}{x-1}$;　(4) $y=e^{\sin x}$;

(5) $y=e^x\sin x$;　(6) $y=\tan x$;　(7) $y=xe^{x^2}$;　(8) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

(9) $y=\ln(1+x^2)$;　(10) $y=(1+x^2)\arctan x$.

解:(1) $y'=\sin x+x\cos x$, $y''=\cos x+\cos x-x\sin x=2\cos x-x\sin x$;

(2) $y'=2x\cos x^2$, $y''=2\cos x^2-4x^2\sin x^2$;

(3) $y'=-\frac{1}{(x-1)^2}=-(x-1)^{-2}$, $y''=2(x-1)^{-3}$;

(4) $y'=\cos xe^{\sin x}$, $y''=-\sin xe^{\sin x}+\cos^2 xe^{\sin x}=e^{\sin x}\left(\cos^2 x-\sin x\right)$;

(5) $y'=e^x\left(\sin x+\cos x\right)$, $y''=e^x\left(\sin x+\cos x\right)+e^x\left(\cos x-\sin x\right)=2e^x\cos x$;

(6) $y'=\sec^2 x$, $y''=2\sec x\cdot\sec x\tan x=2\sec^2 x\tan x$;

(7) $y'=e^{x^2}+xe^{x^2}\cdot 2x=e^{x^2}\left(1+2x^2\right)$, $y''=2xe^{x^2}\left(1+2x^2\right)+e^{x^2}\cdot 4x=2xe^{x^2}\left(3+2x^2\right)$;

(8) $y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$,

$$y''=-\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-x\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}};$$

(9) $y'=\dfrac{2x}{1+x^2}$, $y''=\dfrac{2\left(1+x^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$;

(10) $y'=2x\arctan x+(1+x^2)\cdot\dfrac{1}{1+x^2}=2x\arctan x+1$, $y''=2\arctan x+\dfrac{2x}{1+x^2}$.

2.设 $f''(x)$ 存在,求下列函数的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$:

(1) $y=f(2^x)$;　　　　(2) $y=\ln f(x)$.

解: (1) $y'=f'(2^x)\cdot 2^x\ln 2$,

$$y''=\left(2^x\ln 2\right)^2 f''(2^x)+f'(2^x)2^x\left(\ln 2\right)^2=2^x\left(\ln 2\right)^2\left[2^x f''(2^x)+f'(2^x)\right];$$

(2) $y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, $y''=\dfrac{f''(x)f(x)-f'^2(x)}{f^2(x)}$.

3.求下列函数的 n 阶导数:

(1) $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$;　　(2) $y=x\ln x$;

(3) $y=\ln(x^2+3x+2)$;　　　　(4) $y=\dfrac{1}{x(1-x)}$.

解:(1) $y'=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\cdots+a_{n-1}$,

$$y''=n(n-1)a_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+(n-2)(n-3)a_2x^{n-4}+\cdots+2a_{n-2},$$

……

$$y''=a_0n!.$$

(2) $y'=\ln x+1, y''=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$,

$$y^{(n)}=\left(x^{-1}\right)^{(n-2)}=(-1)(-2)\cdots(2-n)x^{1-n}=(-1)^n(n-2)!x^{1-n}\left(n\geq 2\right).$$

(3) $y'=\dfrac{2x+3}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}=\left(x+1\right)^{-1}+\left(x+2\right)^{-1}$,

$$y^{(n)}=\left(y'\right)^{(n-1)}=(-1)(-2)\cdots(-n+1)\left(x+1\right)^{-n}+(-1)(-2)\cdots(-n+1)\left(x+2\right)^{-n}$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)!\left[\left(x+1\right)^{-n}+\left(x+2\right)^{-n}\right].$$

(4) $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}=x^{-1}+(1-x)^{-1}$,

$$y^{(n)}=(-1)(-2)\cdots(-n)x^{-1-n}+n!(1-x)^{-1-n}=n!\left[(-1)^n x^{-1-n}+(1-x)^{-1-n}\right].$$

(B)

1.设 $f''(x)$ 存在,求下列函数的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$：

(1) $y=f(x^2)$;　　　　(2) $y=f(\ln x)$.

解: (1) $y'=2xf'(x^2),\ y''=2f'(x^2)+4x^2f''(x^2)$;

(2) $y'=\dfrac{f'(\ln x)}{x},\ y''=\dfrac{\frac{1}{x}f''(\ln x)\cdot x-f'(\ln x)}{x^2}=\dfrac{f''(\ln x)-f'(\ln x)}{x^2}$.

2.求下列函数的 n 阶导数：

(1) $y=\dfrac{x}{1+x}$;　　　　(2) $y=\sin^4x+\cos^4x$.

解: (1) $y=1-\dfrac{1}{1+x}=1-(1+x)^{-1}$,

$$y^{(n)}=\left[1-(1+x)^{-1}\right]^{(n)}=-(-1)(-2)\cdots(-n)(1+x)^{-1-n}=(-1)^{n+1}n!(1+x)^{-1-n}$$

(2) $y'=4\sin^3x\cos x-4\cos^3x\sin x=4\sin x\cos x\left(\sin^2x-\cos^2x\right)=-\sin 4x$

$$y^{(n)}=\left(y'\right)^{(n-1)}=\left(-\sin 4x\right)^{(n-1)}=-4^{n-1}\left[\sin\left(4x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)\right]=4^{n-1}\left(\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)\right).$$

习　题 2.5　隐函数与参数方程所表示的函数的导数

(A)

1.求下列方程所确定的隐函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

(1) $x^2+y^2=e^{xy}$;　(2) $y=\sin(x+y)$;　(3) $e^{x+y}+\sin(xy)=0$;　(4) $y=1-xe^y$.

解: (1)方程两边对 x 求导得 $2x+2yy'=\mathrm{e}^{xy}(y+xy')$,所以 $y'=\dfrac{2x-y\mathrm{e}^{xy}}{x\mathrm{e}^{xy}-2y}$.

(2)方程两边对 x 求导得 $y'=\left[\cos(x+y)\right](1+y')$，所以 $y'=\dfrac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}$.

(3)方程两边对 x 求导得 $\mathrm{e}^{x+y}(1+y')+\left[\cos(xy)\right](y+xy')=0$,所以 $y'=-\dfrac{\mathrm{e}^{x+y}+y\cos(xy)}{\mathrm{e}^{x+y}+x\cos(xy)}$

(4)方程两边对 x 求导得 $y'=-e^{y}-xe^{y}y'$,所以 $y'=-\dfrac{\mathrm{e}^{y}}{1+x\mathrm{e}^{y}}$.

2.设函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^{y}+xy=e$ 所确定,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程和法线方程.

解:方程两边对 x 求导得 $\mathrm{e}^{y}y'+y+xy'=0$,所以 $y'=-\dfrac{y}{x+\mathrm{e}^{y}}$, $y'\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, 所以切线方程为 $y-1=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$，即 $x+\mathrm{e}y-\mathrm{e}=0$;法线方程为 $y-1=\mathrm{e}x$，即 $\mathrm{e}x-y+1=0$.

3.求下列方程所确定的隐函数的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$：

(1) $x^2-y^2=1$; (2) $y=\ln(x+y)$.

解：(1)方程两边对 x 求导得 $2x-2yy'=0$,则 $y'=\dfrac{x}{y}$,所以

$$y''=\frac{y-xy'}{y^2}=\frac{y-x\dfrac{x}{y}}{y^2}=\frac{y^2-x^2}{y^3}=-\frac{1}{y^3}.$$

(2)方程两边对 x 求导得 $y'=\dfrac{1+y'}{x+y}$,则 $y'=\dfrac{1}{x+y-1}$,所以

$$y''=-\frac{1}{(x+y-1)^2}\cdot(1+y')=-\frac{1}{(x+y-1)^2}\cdot\left(1+\frac{1}{x+y-1}\right)=-\frac{x+y}{(x+y-1)^3}.$$

4.用对数求导法求下列函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

(1) $y=(\sin x)^{\frac{1}{x}}$; (2) $y=(\dfrac{x}{x+1})^{x}$; (3) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-4}{\sqrt[3]{x^2+1}}}$; (4) $y=\sqrt{xe^{x}\sqrt{1+\sin x}}$.

解：(1)原方程两边取自然对数得 $\ln y=\dfrac{1}{x}\ln\sin x$,方程两边对 x 求导得

$$\frac{y'}{y}=\frac{\dfrac{x\cos x}{\sin x}-\ln\sin x}{x^2}=\frac{x\cos x-\sin x\ln\sin x}{x^2\sin x},$$

所以 $y'=(\sin x)^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{(x\cos x-\sin x\ln\sin x)}{x^2\sin x}=\dfrac{(x\cot x-\ln\sin x)}{x^2}(\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

(2)原方程两边取自然对数得 $\ln y=x\left[\ln x-\ln(x+1)\right]$,方程两边对 x 求导得

$$\frac{y'}{y}=\left[\ln x-\ln(x+1)\right]+x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=\ln\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x+1},$$

所以 $y'=\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x\left(\ln\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}\right)$.

(3)原方程两边取自然对数得 $\ln y=\dfrac{1}{3}\ln(x-4)-\dfrac{1}{9}\ln(x^2+1)$,方程两边对 x 求导得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3(x-4)}-\frac{2x}{9(x^2+1)},$$

所以 $y'=\left[\dfrac{1}{3(x-4)}-\dfrac{2x}{9(x^2+1)}\right]\sqrt[3]{\dfrac{x-4}{\sqrt[3]{x^2+1}}}$.

(4)原方程两边取自然对数得 $\ln y=\dfrac{1}{2}(\ln x+x)+\dfrac{1}{4}\ln(1+\sin x)$,方程两边对 x 求导得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}(\frac{1}{x}+1)+\frac{\cos x}{4(1+\sin x)}=\frac{1+x}{2x}+\frac{\cos x}{4(1+\sin x)},$$

所以 $y'=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1+x}{x}+\dfrac{\cos x}{2(1+\sin x)}\right]\sqrt{xe^x\sqrt{1+\sin x}}$.

5.求下列参数方程所确定的函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$：

(1) $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t).\end{cases}$

解：(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{(a\sin^3 t)'}{(a\cos^3 t)'}=\dfrac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-\tan t$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\left[a(1-\cos t)\right]'}{\left[a(t-\sin t)\right]'}=\dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$.

6.求曲线在 $\begin{cases}x=e^t\sin t,\\ y=e^t\cos t\end{cases}$ 当参数 $t=0$ 时所对应点处的切线方程和法线方程.

解：因为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\left(\mathrm{e}^t\cos t\right)'}{\left(\mathrm{e}^t\sin t\right)'}=\dfrac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=0}=1$,参数 $t=0$ 时所对应点为 $(0,1)$，

所以切线方程为 $y-1=x$,即 $x-y+1=0$;法线方程为 $y-1=-x$,即 $x+y-1=0$.

7.求下列参数方程所确定的函数的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$：

(1) $\begin{cases}x=1-t^2,\\ y=t-t^3;\end{cases}$　　　　(2) $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=t-\arctan t.\end{cases}$

解：(1)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\left(t-t^3\right)'}{\left(1-t^2\right)'}=-\frac{1-3t^2}{2t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t}\Bigg/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\left(-\frac{1-3t^2}{2t}\right)'\Bigg/\left(1-t^2\right)'=-\frac{-12t^2-2\left(1-3t^2\right)}{4t^2}\cdot\frac{1}{-2t}=-\frac{1+3t^2}{4t^3}.$$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\left(t-\arctan t\right)'}{\left[\ln(1+t^2)\right]'}=\dfrac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{t}{2}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left(\dfrac{t}{2}\right)'\Bigg/\left[\ln(1+t^2)\right]'=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1+t^2}{4t}$.

8.一气球在离观察者 500 米处的地点铅直上升,当气球高度为 500 米时,其速率为 140 米/分.求此时观察者视线的仰角增加的速率.

解: 设气球上升 t 秒后高度为 x 米,观察者视线仰角为 θ 弧度.由题意有 $\tan\theta=\dfrac{x}{500}$,方程两边对 t 求导得

$$\sec^2\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{500}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

已知气球高度为 500 米时,观察者视线仰角 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$,又 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=140$ 米/分,代入方程解得 $\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{7}{500}=0.14$ 弧度/分.

(B)

1.求由方程 $y^x=x^y$ 所确定的隐函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解：原方程两边去自然对数得 $x\ln y=y\ln x$,方程两边对 x 求导得 $\ln y+\dfrac{xy'}{y}=y'\ln x+\dfrac{y}{x}$,

所以 $y'=\dfrac{\ln y-\dfrac{y}{x}}{\ln x-\dfrac{x}{y}}=\dfrac{y(x\ln y-y)}{x(y\ln x-x)}$.

2.设 $y=f(x+y)$,其中 f 二阶可导,且 $f'\neq 1$,求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解：方程两边对 x 求导得 $y'=(1+y')f'(x+y)$, 所以 $y'=\dfrac{f'(x+y)}{1-f'(x+y)}$,

$$y''=\frac{(1+y')f''(x+y)\left[1-f'(x+y)\right]+f'(x+y)(1+y')f''(x+y)}{\left[1-f'(x+y)\right]^2}$$

$$=\frac{(1+y')f''(x+y)}{\left[1-f'(x+y)\right]^2}=\frac{\left[1+\dfrac{f'(x+y)}{1-f'(x+y)}\right]f''(x+y)}{\left[1-f'(x+y)\right]^2}=\frac{f''(x+y)}{\left[1-f'(x+y)\right]^3}.$$

3.求下列参数方程所确定的函数的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$：

(1) $\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2},\\ y=\arctan t;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=f'(t),\\ y=tf'(t)-f(t),\end{cases}$ 其中 $f''(t)$ 存在且不为零.

解：(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\left(\arctan t\right)'}{\left(\ln\sqrt{1+t^2}\right)'}=\dfrac{\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{t}{1+t^2}}=\dfrac{1}{t}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dt}\dfrac{dt}{dx}=-\dfrac{1}{t^2}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{t}{1+t^2}}=-\dfrac{1+t^2}{t^3}$.

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\left[tf'(t)-f(t)\right]'}{\left[f'(t)\right]'}=\dfrac{\dfrac{1}{1+t^2}}{f''(t)}=t$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dt}\dfrac{dt}{dx}=1\cdot\dfrac{1}{f''(t)}=\dfrac{1}{f''(t)}$.

4.证明星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$ 上任一点的切线介于两坐标轴间的线段的长为常数.

证: 方程两边对 x 求导得 $\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\dfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0$,所以 $y'=-\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$.取星形线上任一切点坐标为 $\left(x_0,y_0\right)$,则 $x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}=a_0^{\frac{2}{3}}$,且在此点处的切线方程为

$$y-y_0=-\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{3}}(x-x_0).$$

切线与两坐标轴的交点分别为 $\left(0,a^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{1}{3}}\right)$, $\left(a^{\frac{2}{3}}x_0^{\frac{1}{3}},0\right)$,所以切线介于两坐标轴间的部分线段的

长为 $\sqrt{\left(a^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{1}{3}}\right)^2+\left(a^{\frac{2}{3}}x_0^{\frac{1}{3}}\right)^2}=\sqrt{a^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}}}=a$ (常数).

习　题 2.6　近似计算与误差估计

1.有一批半径为1厘米的球,为了提高球面的光洁度,要镀上一层厚度为0.01厘米的铜. 估计每只球约需用铜多少克(铜的密度为$8.9g/cm^3$)?

解:$8.9\times\left[\frac{4\pi}{3}\times(1+0.01)^3-\frac{4\pi}{3}\times1^3\right]=8.9\times\frac{4\pi}{3}\times0.030301\approx8.9\times0.13\approx1.16$(克).

2.单摆的周期与摆长有如下关系:$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.设有一周期为1秒的单摆,在冬季,它的摆长缩短了0.01厘米,试问该单摆每天约快多少?

解:由$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$,$T=1$可得$l=\frac{g}{4\pi^2}$;又每天摆动次数$3600\times24=86400$,所以每天约快:

$$\Delta t=86400-86400\times2\pi\sqrt{\frac{\frac{g}{4\pi^2}-0.0001}{g}}=86400-86400\times\sqrt{1-\frac{0.0004\pi^2}{g}}.$$

若$\pi\approx3.14, g=9.8$, 则$\Delta t=17.3868$秒,

若$\pi\approx3.1415926, g=9.8$, 则$\Delta t=$ 17.4045秒.

3.计算下列各式的近似值:

(1) $\sin29^0$;　　(2) $\tan136^0$;　　(3) $\arcsin0.4983$;

(4) $\arctan1.02$;　　(5) $\sqrt[3]{1.02}$;　　(6) $\sqrt[7]{130}$.

解: 根据 $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

(1) $\sin29^0=\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180}\right)\approx\sin\frac{\pi}{6}+\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right)\approx0.4849$;

(2) $\tan136^0=\tan\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\right)\approx\tan\frac{3\pi}{4}+\left(\sec^2\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{180}\right)=-1+2\cdot\left(\frac{\pi}{180}\right)\approx-0.9651$;

(3) $\arcsin 0.4983=\arcsin\left(0.5-0.0017\right)\approx\arcsin 0.5+\frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}}\cdot\left(-0.0017\right)$;

$$=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(-0.0017\right)\approx 0.5216;$$

(4) $\arctan 1.02=\arctan\left(1+0.02\right)\approx\arctan 1+\frac{1}{1+1^2}\cdot\left(0.02\right)=\frac{\pi}{4}+0.01\approx 0.7954$;

(5) $\sqrt[3]{1.02}=\sqrt[3]{1+0.02}\approx\sqrt[3]{1}+\frac{1}{3}\left(1+0\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(0.02\right)=1+\frac{0.02}{3}\approx 1.0067$;

(6) $\sqrt[7]{130}=2\sqrt[7]{1+\frac{1}{64}}\approx 2\left(\sqrt[7]{1}+\frac{1^{-\frac{6}{7}}}{7}\cdot\left(\frac{1}{64}\right)\right)=2\left(1+\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{64}\right)\right)\approx 2.0045$.

4.设 $y=\frac{x}{10-x}$,若度量 x 的值为 0.2 ± 0.001,求计算 y 所产生的相对误差.

解:因为 $y\big|_{x=0.2}=\frac{0.2}{10-0.2}=\frac{1}{49}$,

所以,计算 y 所产生的绝对误差: $\delta y=y'\big|_{x=0.2}\cdot\delta x=\frac{10}{(10-x)^2}\Big|_{x=2}\cdot\delta x=\frac{10}{9.8^2}\cdot 0.001=\frac{1}{98^2}$;

计算 y 所产生的相对误差: $\frac{\delta y}{\left|y\big|_{x=0.2}\right|}=\frac{\frac{1}{98^2}}{\frac{1}{49}}=\frac{1}{196}=0.0051=0.51\%$.

5.计算球体的体积,要求精确度在 2% 以内.问这时测量直径 D 的相对误差不能超过多少?

解:设测量直径为 x，则球体的体积为 $y=\frac{\pi}{6}x^3$，设测量直径的相对误差为 δx，则体积的绝对误差: $\delta y=y'\cdot\delta x=\frac{\pi x^2}{2}\cdot\delta x$,体积的相对误差: $\frac{\delta y}{|y|}=\frac{\frac{\pi x^2}{2}\cdot\delta x}{\frac{\pi x^3}{6}}=\frac{3\cdot\delta x}{x}$,

要使 $\frac{3\cdot\delta x}{x}\le 2\%$，必须 $\frac{\delta x}{x}\le\frac{2}{3}\%$，即测量直径 D 的相对误差不能超过 $\frac{2}{3}\%$.

总习题二

(A)

1.选择题

(1)设 $f(x+1)=af(x)$,且 $f'(0)=b$ (a , b 为非零常数),则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处(　　).

(A) 不可导; (B)可导且 $f'(1)=a$; (C)可导且 $f'(1)=b$; (D)可导且 $f'(1)=ab$.

解: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{af(\Delta x)-af(0)}{\Delta x}=af'(0)=ab$, 所以选(D).

(2)设函数 $\boldsymbol{y=y(x)}$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t^2+2t, \\ y=\ln(1+t) \end{cases}$ 确定,则曲线 $y=y(x)$ 在 $x=3$ 处的法线与 $\boldsymbol{x}$ 轴交点的横坐标是( ).

(A) $\dfrac{1}{8}\ln 2+3$; (B) $-\dfrac{1}{8}\ln 2+3$; (C) $-8\ln 2+3$; (D) $8\ln 2+3$.

解: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{[\ln(1+t)]'}{\left(t^2+2t\right)'}=\dfrac{\frac{1}{1+t}}{2t+2}=\dfrac{1}{2(1+t)^2}$, 在 $x=3$ 时 $t=1$, $y=\ln 2$, $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=3}=\dfrac{1}{8}$.

在 $x=3$ 处的法线方程为: $y-\ln 2=-8(x-3)$, 与 $\boldsymbol{x}$ 轴交点的横坐标是 $\dfrac{1}{8}\ln 2+3$, 所以选(A).

(3)设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h}=1$,则( ).

(A) $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$ 存在; (B) $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$ 存在;

(C) $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在; (D) $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在.

解:由 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h}$ 存在且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续知 $f(0)=f(0^+)=\lim\limits_{h\to 0}f(h^2)=0$.所以

$f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$ (令 $h^2=\Delta x$) $=\lim\limits_{h^2\to 0^+}\dfrac{f(h^2)-f(0)}{h^2}$,所以选(C).

(4)设 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,且 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$,当 $\Delta x\to 0$ 时, $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}$ 是( ).

(A)与 Δx 等价的无穷小; (B)比 Δx 高阶的无穷小;

(C)与 Δx 同阶但不等价的无穷小; (D)比 Δx 低阶的无穷小.

解: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{dy}{\Delta x}\Big|_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x_0)\Delta x}{\Delta x}=\dfrac{1}{2}$, 所以选(C).

(5)设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0, \\ x^2 g(x), & x\le 0, \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处( ).

(A)极限不存在; (B)极限存在但不连续; (C)连续但不可导; (D)可导.

解： $f_+'(0)=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{\frac{1-\cos h}{\sqrt{h}}}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{1-\cos h}{h^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{\frac{1}{2}h^2}{h^{\frac{3}{2}}}=0$，

$f_-'(0)=\lim\limits_{h\to0^-}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0^-}\dfrac{h^2g(h)}{h}=\lim\limits_{h\to0^-}hg(h)=0$，所以选(D).

2.填空题

(1)设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为_______.

解： $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to\infty}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=2\lim\limits_{\Delta x\to\infty}\dfrac{f(1)-f\left[1-(-\Delta x)\right]}{2(-\Delta x)}=-2$，故切线斜率为 -2.

(2)已知 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$，求 $f'(0)=$_____.

解：因为 $f(x)=x\left[(x-1)(x-2)\cdots(x-n)\right]$，所以

$$f'(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-n)+x\left[(x-1)(x-2)\cdots(x-n)\right]',$$

所以 $f'(0)=(-1)(-2)\cdots(-n)=(-1)^n n!$.

(3)设 $f(x)$ 的各阶导数均存在，且 $f'(x)=f^2(x)$，则 $f^{(n)}(x)=$_______.

解： $f''(x)=2f(x)f'(x)=2f^3(x)$， $f'''(x)=3!f^2(x)f'(x)=3!f^4(x),\cdots\cdots$，以此类推，

$f^{(n)}(x)=n!f^{n+1}(x)$.

(4)设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=$______.

解： $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x_0)+x_0f(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}$

$=f(x_0)-x_0\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)-x_0f'(x_0)$，故所求极限为 $f(x_0)-x_0f'(x_0)$.

(5)设 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}=3$，则 $f'(x_0)=$_______.

解：由 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}$ 存在且 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续知 $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，所

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}=3.$$

3.设 $f(x)=\begin{cases}1+\ln(1+2x), & x\le 0,\\ a+be^x, & x>0.\end{cases}$ 确定 a 、 b 常数,使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,并求 $f'(0)$.

解：要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,首先要 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，即

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$,且 $f'_+(0)=f'_-(0)$.而 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(a+be^x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[1+\ln(1+2x)\right]$,且

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{a+be^x-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{be^x-b}{x}=b;$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1+\ln(1+2x)-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+2x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{x}=2.$$

所以 $a+b=1$ 且 $b=2$.故 $a=-1,b=2$, $f'(0)=2$.

4.(1)已知 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(\frac{1}{x^2})=\frac{1}{x}$,求 $f'(\frac{1}{2})$. (2)已知 $y=f(\frac{3x-2}{3x+2})$,且 $f'(x)=\arctan x^2$,求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

(3)已知 $(\sin x)^y=x^{\ln y}$,求 $\mathrm{d}y$. (4)已知 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t),\\ y=t^3+t^2.\end{cases}$ 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 、 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解：(1)由已知得 $f'\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot(-2x^{-3})=\frac{1}{x}$,即 $f'\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{2}x^2$,所以 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\times 2=-1$.

(2)由已知得 $\frac{dy}{dx}=f'\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)\cdot\frac{12}{(3x+2)^2}$, $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=f'\left(-1\right)\cdot 3=3\arctan 1=\frac{3\pi}{4}$.

(3)两边取对数得 $y\ln\sin x=\ln y\ln x$,方程两边求导得 $y'\ln\sin x+y\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{y'}{y}\ln x+\frac{\ln y}{x}$,

所以 $y'=\frac{y\ln y-xy^2\cot x}{xy\ln\sin x-x\ln x}$,故 $\mathrm{d}y=\frac{y\ln y-xy^2\cot x}{xy\ln\sin x-x\ln x}\mathrm{d}x$.

$$(4)\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\left(t^3+t^2\right)'}{\left(t-\ln(1+t)\right)'}=\frac{3t^2+2t}{1-\frac{1}{1+t}}=\left(3t+2\right)\left(1+t\right)=3t^2+5t+2,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\left(3t^2+5t+2\right)'}{\left(t-\ln(1+t)\right)'}=\frac{(6t+5)}{1-\frac{1}{1+t}}=\frac{(6t+5)(t+1)}{t}.$$

5.求下列函数的 n 阶导数:

(1) $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$； (2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

解:(1) $y=\ln(1-x)-\ln(1+x)$, $y'=\dfrac{-1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=-(x-1)^{-1}-(x+1)^{-1}$,

$$y^{(n)}=\left(y'\right)^{(n-1)}=-(-1)(-2)\cdots(-n+1)(x-1)^{-n}-(-1)(-2)\cdots(-n+1)(x+1)^{-n}$$

$$=(-1)^{n}(n-1)!\left[(x-1)^{-n}+(x+1)^{-n}\right],\ 或\ (n-1)!\left[\frac{1}{(1-x)^{n}}-\frac{(-1)^{n-1}}{(x+1)^{n}}\right].$$

(2) $y=\dfrac{2}{1+x}-1=2(1+x)^{-1}$, $y^{(n)}=2\times(-1)(-2)\cdots(-n)(1+x)^{-1-n}=\dfrac{2\cdot(-1)^{n}n!}{(1+x)^{1+n}}$.

6.证明可导的周期函数的导数仍是周期函数,且周期不变.

解:设 $f(x)$ 可导,周期为 T .因为

$$f'(x+T)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+T+\Delta x)-f(x+T)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x),$$

所以 $f(x)$ 的导数仍是周期函数,且周期仍然为 T .

7.设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,且满足 $f(x+y)=f(x)f(y)$,又 $f(x)=1+xg(x)$,其中 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$.证明: $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,并求其导数.

证: $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}$

$$=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1+\Delta xg(\Delta x)-1}{\Delta x}=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}g(\Delta x)=f(x).$$

8.设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,在区间 $[0,2]$ 上, $f(x)=x(x^{2}-4)$,如果对于任意的 x 均有 $f(x)=kf(x+2)$,其中 k 为常数.(1) 写出 $f(x)$ 在 $[-2,0)$ 上的表达式；(2) 问 k 为何值时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,并求其导数.

解：(1) 当 $x\in[-2,0)$ 时， $f(x)=kf(x+2)=k(x+2)\left[(x+2)^{2}-4\right]=kx(x+2)(x+4)$ ；

(2) $f'_{+}(0)=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{x(x^{2}-4)}{x}=-4$,

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{kx(x+2)(x+4)}{x}=8k,$$

要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,必须 $f'_{+}(0)=f'_{-}(0)$ ，即 $k=-\dfrac{1}{2}$ ，且 $f'(0)=-4$.

(B)

1.设 $f(a)=0$, $f'(a)=1$,求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\, f\left(a-\dfrac{1}{n}\right)$.

解: $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(a-\dfrac{1}{n}\right)=-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(a-\dfrac{1}{n}\right)-f(a)}{-\dfrac{1}{n}}=-f'(a)=-1$.

2.设曲线 $f(x)=x^n$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n,0)$,求 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n)$.

解：因为曲线 $f(x)=x^n$ 在点 $(1,1)$ 处的切线斜率为 $f'(1)=nx^{n-1}\big|_{x=1}=n$,

所以切线方程为 $y-1=n(x-1)$,令 $y=0$ 解得 $\xi_n=1-\dfrac{1}{n}$.故 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}^{-1}$.

3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且 $f(0)=0$,求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\sin x^2}$.

解:
$$\lim_{x\to0}\frac{f(1-\cos x)}{\sin x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}\frac{1-\cos x}{\sin x^2}$$
$$=f'(0)\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x^2}=f'(0)\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}f'(0).$$

4.设 $f(x)=\begin{cases} g(x)\arctan\dfrac{1}{x}, & x\neq0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 且 $g(0)=g'(0)=0$,证明: $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导,

并求 $f'(0)$.

解: 因为 $g(0)=g'(0)=0$,则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)=0$ ，又 $\arctan\dfrac{1}{x},(x\neq0)$ 是有界函

数，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)\arctan\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}\arctan\frac{1}{x}=0$$

即 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=0$.

5.问 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处是否可导？

解：因为 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}}{x}=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$，则

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to0^{+}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^{+}}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0,\quad f'_{-}(0)=\lim_{x\to0^{-}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^{-}}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1,$$

所以 $f(x)$ 点 $x=0$ 处不可导.

6.已知 $f(x)$ 为奇函数,且当 $x>0$ 时, $f(x)=e^{x}-1$,求 $f'(x)$.

解:当 $x<0$ 时, $f(x)=-f(-x)=-\left(e^{-x}-1\right)=1-e^{-x}$,又 $f(0)=0$,则 $f'(x)=\begin{cases}e^{x}-1, x\geq 0,\\ 1-e^{-x}, x<0\end{cases}$

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to0^{+}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^{+}}\frac{e^{x}-1}{x}=1,\ f'_{-}(0)=\lim_{x\to0^{-}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^{-}}\frac{1-e^{-x}}{x}=1,$$

所以 $f'(0)=1$,故 $f'(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x<0,\\ e^{x}, & x\geq 0.\end{cases}$

7.设 $y=y(x)$ 由方程 $y=1+xe^{xy}$ 确定,求 $y''(0)$.

解：原方程两边分别对 x 求一阶导数、二阶导数得方程组

$$\begin{cases}y'=e^{xy}+xe^{xy}(y+xy')\\ y''=e^{xy}(y+xy')+e^{xy}(y+xy')+xe^{xy}(y+xy')^{2}+xe^{xy}(2y'+xy'')\end{cases}$$

因为当 $x=0$ 时 $y=1$,代入方程组解得 $y'\big|_{x=0}=1$, $y''\big|_{x=0}=2$,故 $y''(0)=2$.

8.已知对数螺线 $\rho=e^{\theta}$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=e^{\theta}\cos\theta,\\ y=e^{\theta}\sin\theta,\end{cases}$ 求曲线在平面直角坐标系中的点 $(0,e^{\frac{\pi}{2}})$ 处的切线方程.

解：因为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\left(e^{\theta}\sin\theta\right)'}{\left(e^{\theta}\cos\theta\right)'}=\dfrac{e^{\theta}\sin\theta+e^{\theta}\cos\theta}{e^{\theta}\cos\theta-e^{\theta}\sin\theta}=\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$，又在平面直角坐标系中的点 $(0,e^{\frac{\pi}{2}})$ 处 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1$. 故所求的切线方程为 $x+y=e^{\frac{\pi}{2}}$.

9.设 $\begin{cases}x=2t+|t|,\\ y=5t^{2}+4t|t|,\end{cases}$ 求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解：当$t>0$时,$x=3t, y=9t^2 \Rightarrow y=x^2$;当$t<0$时,$x=t, y=t^2 \Rightarrow y=x^2$;又当$t=0$时，$x=0, y=0$. 所以曲线为$y=x^2$,故$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=0$.

10.设$f(x)$在$(0,+\infty)$内有定义,且对于任意的正数x, y有$f(xy)=f(x)+f(y)$,又$f'(1)=a$.证明: $f(x)$在$(0,+\infty)$内可导,并求其导数.

证:由$f(xy)=f(x)+f(y)$,且令$x=1, y=0$,得$f(1)=0$.

当$x>0$时,$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f\left[x\cdot\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]-f(x)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)+f(x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}}=\frac{1}{x}f'(1)=\frac{a}{x},$$

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$内可导, 且$f'(x)=\frac{a}{x}$.