22-23-1 学期高等数学 A1 期末练习卷参考答案

一．选择题:

1	2	3	4	5	6	7
A	D	D	C	B	B	
8	9	10	11	12	13	14
C	B	B	D	C	A	
15	16	17	18	19	20	21
C	B	A	D	C	C	A

二．填空题

1	2	3	4
单调增加	1	$-2019!$	$a=-1, b=2$
5	6	7	8
$\frac{52}{3}$	$\cos x + c$	收敛	$y^* = x^2(Ax+B)e^{-5x}$
9	10	11	12
$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{2}$	3	$0<q<1$
13	14	15	16
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}dx$	$\frac{\pi}{2}$	$\sqrt{\ln(1-x)}, x \le 0.$
17	18	19	20
$2x^2+e^{3x}+1$	12	$2e^{2x}$	$C_1+C_2x+(C_3+C_4x)e^x$
21	22	23	24

三．计算题

1. 解 原式$=\frac{1}{2}\int \ln(x^2+1)d(x^2+1)=\frac{1}{2}(x^2+1)\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\int 2xdx$

$=\frac{1}{2}(x^2+1)\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}x^2+C$ （$=\frac{1}{2}x^2\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$）

2. 解 方程两边关于 x 求导，得 $y'=\frac{1+y'}{x+y}\Rightarrow y'=\frac{1}{x+y-1}$

再对 x 求导得 $y''=-\frac{1+y'}{(x+y-1)^2}=-\frac{x+y}{(x+y-1)^3}$

3. 解：$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{t+1}}{2(t+1)}=\frac{1}{2(t+1)^2}$

当 $x=3$ 时，有 $t^2+2t=3,$ 得 $t=1$（$t=-3$ 舍去）

当 $t=1$ 时，有 $x=3, y=\ln 2, y'=\frac{1}{8}$

所以切线方程为 $y-\ln 2=\frac{1}{8}(x-3), x-8y+8\ln 2-3=0$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}(1-\cos\sqrt{t})dt}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2x(1-\cos x)}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2x^2}=\frac{1}{4}$

5. 解：令 $x=\sin t$ 则 $dx=\cos tdt$ 且 $x\in(0,\frac{1}{2})\Leftrightarrow t\in(0,\frac{\pi}{6})$

原式$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 tdt=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}$

6. 解一：先求解齐次方程 $y'-y=0$ （分离变量）

$$\frac{dy}{y}=dx\Rightarrow \ln y=x+c\Rightarrow y=ce^x$$

常数变易：设 $y=c(x)e^x$ 代入原方程得：

$c'(x)e^x=e^{2x}\Rightarrow c'(x)=e^x\Rightarrow c(x)=e^x+c$

所以 原方程的通解为 $y=(e^x+c)e^x=ce^x+e^{2x}$

解二：为一阶线性方程，其中 $P=-1,\ Q=e^{2x}$

则 $y=e^{\int dx}\left(\int e^{2x}e^{-\int dx}dx+c\right)=e^x\left(e^x+c\right)=ce^x+e^{2x}$

7. 解： 令 $\sqrt{x+1}=t$，则 $x=t^2-1, dx=2tdt$

原式 $=\int_2^{+\infty}\frac{2t}{(t^2-1)t}dt=\int_2^{+\infty}(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1})dt=\left[\ln\frac{t-1}{t+1}\right]_2^{+\infty}=\ln 3$

8. 解：原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$

9. 解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x^2)}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{3x^2}=\frac{2}{3}$

10. 解：原式 $=x\arcsin x-\int xd\arcsin x$

$=x\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\arcsin x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)$

$=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$

11. 解：原式 $=\int\frac{1}{(x+1)^2+1}dx=\int\frac{1}{(x+1)^2+1}d(x+1)=\arctan(x+1)+C$

12. 解：令 $t=\sqrt{x}$，则 $dx=2tdt$

原式 $=\int_0^1 e^{-t}2tdt=-2\int_0^1 tde^{-t}=-2te^{-t}\big|_0^1+2\int_0^1 e^{-t}dt$

$=-(te^{-t}+e^{-t})\big|_0^1=2(1-2e^{-1})$

13. 解： $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1-\frac{1}{1+t}}=\frac{2(1+t)}{1+t^2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2(1-2t-2t^2)}{(1+t^2)^2}\cdot\frac{1+t}{t}=\frac{2(1-t-3t^2-t^3)}{t(1+t^2)^2}$$

14. 解： $y=\left(\int xe^{\int -\frac{3}{x}dx}dx+C\right)e^{-\int -\frac{3}{x}dx}=\left(\int xe^{-3\ln x}dx+C\right)e^{3\ln x}=Cx^3-x^2$

15. 解：等式两边求微分，得 $dx-2ydy+\cos(xy)(ydx+xdy)=0$

解得 $dy=\frac{1+y\cos(xy)}{2y-x\cos(xy)}dx$

16. 解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sqrt{1+x^4}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+x^4}=\mathbf{1}$

17. 解： $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3a\sin^2 t\cos t}{3a(-\sin t)\cos^2 t}=-\tan t$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{-\sec^2 t}{3a(-\sin t)\cos^2 t}=\frac{\sec^4 t}{3a\sin t}$$

18. $\int\dfrac{(1+\ln x)^{2021}}{x}dx=\int(1+\ln x)^{2021}d(1+\ln x)=\dfrac{(1+\ln x)^{2022}}{2022}+C$

19. 解：1) 令 $x=\tan t$

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec^2 t}{\tan^2 t\sec t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin^2 t}d(\sin t)=-\frac{1}{\sin t}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

2）令 $\boldsymbol{t=\dfrac{1}{x}}$， $\int_1^{\sqrt{3}}\dfrac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\dfrac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}(-\dfrac{1}{t^2})dt$

$$=-\int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt=-(1+t^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

20. 解： $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx=-\dfrac{1}{a}e^{-ax}\Big|_0^{+\infty}=-\dfrac{1}{a}\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-ax}\Big|_0^{t}=-\dfrac{1}{a}\lim\limits_{t\to+\infty}(e^{-at}-1)$

当 $a>0$ 时反常积分收敛于 $\dfrac{1}{a}$；$a\le 0$，反常积分发散 .

21. 解：令 $\dfrac{y}{x}=u$ ，则 $u+x\dfrac{du}{dx}=u+\dfrac{1}{u}$， 即 $x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{u}$

分离变量 $udu=\dfrac{dx}{x}$， 两边积分得 $\dfrac{1}{2}u^2=\ln|x|+C$

即 $u^2=\ln x^2+C$， 代回变量得 $\left(\dfrac{y}{x}\right)^2=\ln x^2+C$

故原方程的通解为 $y^2=x^2(\ln x^2+C)$， 将 $y|_{x=1}=2$ 代入求得 $C=4$

所求特解为 $y^2=x^2(\ln x^2+4)$

四. 应用题

1. 解：$f'(x)=3x^2-6x-9=0$ 解得：$x=3, x=-1$ 为驻点, 另外，$x=4, x=-2$ 为端点 .

考察 $f(-1)=10, f(-2)=3, f(3)=-22, f(4)=-15$

显然，最大值为 10，最小值为-22

2. 解：（1）从方程中解出 $y^2=1-(x-1)^2=2x-x^2$，而 x 的变化范围为 $(0,2)$

所以 $V_1=\int_0^2 \pi y^2 dx=\int_0^2 \pi(2x-x^2)dx \quad =\pi\left[x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\frac{4\pi}{3}$ （或直接根据几何意义）

（2）绕 y 轴旋转，从方程中分别解出 $x_2=1+\sqrt{1-y^2}$ 和 $x_1=1-\sqrt{1-y^2}$，而 y 的变化范围皆为 $(-1,1)$

所以 $V_2=\int_{-1}^1 \pi(x_2{}^2-x_1{}^2)dy=\pi\int_{-1}^1\left[(1+\sqrt{1-y^2})^2-(1-\sqrt{1-y^2})^2\right]dy$

$$=4\pi\int_{-1}^1\sqrt{1-y^2}dy \quad =2\pi^2$$

3. 解：由题意 $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$，$-a\le x\le a$

则 $V=\pi\int_{-a}^a y^2dy \quad =\pi b^2\int_{-a}^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx \quad =\frac{4}{3}\pi ab^2$

4. 解：$y'=4x^3-6x^2$；$y''=12x^2-12x=12x(x-1)$；

令 $y''=0$，得 $x=0$ 或 $x=1$；

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	+	0	−	0	+
y	凹	1	凸	0	凹

由表可知，曲线 $y=x^4-2x^3+1$ 在 $(-\infty,0)$ 内凹，在 $(0,1)$ 内凸，在 $(1,+\infty)$ 内凹，拐点为 $(0,1)$ 与 $(1,0)$.

5. 解：由 $\begin{cases} y=2x^2 \\ y-x=1 \end{cases}$ 得交点 $(1,2)$，$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，（舍去）

选 x 为积分变量, $x\in[0,1]$, x 处的截面面积

$$A(x)=\pi[(x+1)^2-4x^4]$$

体积 $V=\pi\int_0^1[(x+1)^2-4x^4]dx=\pi[\frac{1}{3}(x+1)^3\Big|_0^1-\frac{4}{5}x^5\Big|_0^1]=(\frac{7}{3}-\frac{4}{5})\pi=\frac{23}{15}\pi$

6. 解： $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}-1<0$，

所以 $f(x)$ 的单调减区间为 $(0,+\infty)$,

当 $0<x<1$ 时， $\ln(1+\sqrt{2})-1<\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x<0$，

所以 $\int_0^1[\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x]dx$ 的取值范围为 $[\ln(1+\sqrt{2})-1,0]$。

五．证明题

1. 证：令 $\boldsymbol{f(x)=\ln x}$，则 $\boldsymbol{f'(x)=\frac{1}{x}}$

根据拉格朗日定理可得，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$\boldsymbol{\ln\frac{b}{a}=\ln b-\ln a=f'(\xi)(b-a)=\frac{1}{\xi}(b-a)}$, 而 $\boldsymbol{\frac{1}{b}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{a}}$

所以 $\boldsymbol{\dfrac{b-a}{b}<\dfrac{b-a}{\xi}<\dfrac{b-a}{a}}$.

2. 证: 令 $g(x)=x^{-\frac{1}{2020}}f(x)$,

则 $g(x)$ 在 $[1,2]$ 上满足罗尔定理条件, 故存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $g'(\xi)=0$，

而 $g'(x)=-\dfrac{1}{2020}x^{-\frac{1}{2020}-1}f(x)+x^{-\frac{1}{2020}}f'(x)$,

所以, 存在 $\xi\in(1,2)$, 使得 $\dfrac{f(\xi)}{\xi}=2020f'(\xi)$.

3. 证明 令 $F(x)=(x^2+1)f(x)$，$F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，$(0, 1)$ 内可导

$F(0)=f(0),F(1)=2f(1)$， $\therefore F(0)=F(1)$

由罗尔中值定理可知， $\exists\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，

即 $(\xi^2+1)f'(\xi)+2\xi f(\xi)=0$.