第一章　函数、极限与连续

习　题 1.1　曲线的极坐标方程与参数方程

1. 将下列极坐标方程化为直角坐标方程,并指出方程表示怎样的曲线.

(1) $\rho=2\cos\theta$;　　(2) $\rho=2a(2-\cos\theta)$,其中常数 $a\geq 0$;

(3) $\rho=\sqrt{2}\sin\theta$;　　(4) $\rho=2a(1+\sin\theta)$,其中常数 $a\geq 0$.

解：(1) 设 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，且 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，于是 $\rho=2\cos\theta$ 可化为 $\sqrt{x^2+y^2}=2\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,即 $x^2+y^2=2x$. 故方程表示以（1,0）为圆心，1 为半径的圆周.

(2) 设 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，且 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，于是 $\rho=2a(2-\cos\theta)$ 可化为 $\sqrt{x^2+y^2}=2a\left(2-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$,即 $x^2+y^2+2ax=4a\sqrt{x^2+y^2}$. 故方程表示心形线.

(3)设 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,且 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$,于是 $\rho=\sqrt{2}\sin\theta$ 可化为

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\text{即}\quad x^2+y^2=\sqrt{2}y$$

故方程表示以 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 为圆心，$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为半径的圆周.

(4)设 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，且 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，于是 $\rho=2a(1+\sin\theta)$ 可化为

$$\sqrt{x^2+y^2}=2a\left(1+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),\text{即}\quad x^2+y^2-2ay=2a\sqrt{x^2+y^2}.$$

故方程表示心形线.

2. 试引进合适的参数, 将下列方程化为参数方程:

(1) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$(星形线);　(2) $(x-a)^2+y^2=a^2$;　(3) $x^2+(y-a)^2=a^2$.

解：(1)方程变形为 $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2+\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2$,令 $x^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\cos t, y^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\sin t$,则参数方程为

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \quad t \in [0, 2\pi).$$

(2)令 $x-a=a\cos t, y=a\sin t$,则参数方程为 $x=a\left(1+\cos t\right)$， $y=a\sin t$， $t\in[0,2\pi)$.

(3).令 $x=a\cos t, y-a=a\sin t$,则参数方程为 $x=a\cos t$， $y=a\left(1+\sin t\right)$， $t\in[0,2\pi)$.

3. 将下列方程化为极坐标方程:

(1) $x^2+y^2=a^2$,其中常数 $a\ge 0$； (2) $y=kx$,其中 k 为常数.

解：(1)设 $x=\rho\cos\theta$， $y=\rho\sin\theta$，且 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ ，于是 $\rho^2=a^2$.因为 $\rho>0$，所以极坐标方程为 $\rho=a$.

(2)设 $x=\rho\cos\theta$， $y=\rho\sin\theta$，且 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ ，于是 $\rho\sin\theta=k\rho\cos\theta$,

故所求的极坐标方程为 $\tan\theta=k$,即 $\theta=arc\tan k$ 或 $\theta=\pi+arc\tan k$.

习　题 1.2　函数

(A)

1．求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{4-x^2}$ ； (2) $y=\sec(x+\frac{\pi}{4})$； (3) $y=\lg(x+3)$；

(4) $y=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)$； (5) $y=\arccos\frac{1-x}{3}$； (6) $y=\sqrt{x+2}-\frac{1}{1-x^2}$；

(7) $y=\sqrt{3-x}+\tan\frac{1}{x}$; (8) $y=\begin{cases}x^2,-2<x\le 0\\ 2^x,0<x\le 3\end{cases}$.

解：(1)利用幂函数的定义得: $4-x^2\ge 0$,即 $-2\le x\le 2$.所以函数的定义域为 $[-2,2]$.

(2)利用正割函数的定义得: $x+\frac{\pi}{4}\ne k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$,即 $x\ne k\pi+\frac{\pi}{4},k\in Z$.所以函数的定义域为 $\left\{x\mid x\ne k\pi+\frac{\pi}{4},k\in Z\right\}$.

(3)利用对数函数的定义得: $x+3>0$,即 $x>-3$.所以函数的定义域为 $(-3,\infty)$.

(4)利用幂函数的定义得: $a^2+x^2>0$,即 $-a<x<a$.所以函数的定义域为 $(-a,a)$.

(5)利用反余弦函数的定义得: $-1 \le \frac{1-x}{3} \le 1$，即 $x \ge -2, x \ne \pm 1$.所以定义域为

$\{x \mid x \ge -2, x \ne \pm 1\}$.

(6)利用函数的定义得: $x+2 \ge 0$ 且 $1-x^2 \ne 0$.所以定义域为 $[-2,4]$.

(7)利用函数的定义得: $3-x \ge 0$，且 $\frac{1}{x} \ne \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in Z$，即 $x \le 3$,且

$x \ne \frac{2}{(2k+1)\pi}, k \in Z$.所以定义域为 $\left\{x \mid x \le 3, x \ne \frac{2}{(2k+1)\pi}, x \ne 0, k \in Z\right\}$.

(8)要使这个分段函数有意义,则定义域为 $(-2,3]$.

2．下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同,为什么?

(1) $f(x) = \ln x^2, g(x) = 2\ln x$； (2) $f(x) = \csc^2 x - \cot^2 x, g(x) = 1$.

解：(1)不同.因为定义域不同: $f(x)$ 有意义要求 $x \ne 0$, $g(x)$ 有意义则要求 $x > 0$.

(2)不同.因为定义域不同: $f(x)$ 的定义域为 $\csc x$ 和 $\cot x$ 各自定义域的交集,是实数集 R 的真子集,而 $g(x)$ 的定义域为实数集 R .

3．判别下列函数的奇偶性.

(1) $y = x^4 - 2x^2$； (2) $y = x - x^2$； (3) $y = x\sec x$；

(4) $y = \sin x - \cos x$； (5) $y = \frac{x\sin x}{2+\cos x}$； (6) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$；

(7) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$； (8) $y = \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$.

解：(1)设 $f(x) = x^4 - 2x^2$,则 $f(-x) = f(x)$,且 $x \in R$,故 $f(x)$ 是偶函数.

(2)设 $f(x) = x - x^2$,则 $f(-x) = -x - x^2$,且 $x \in R$,所以 $f(x)$ 是非奇非偶函数.

(3)设 $f(x) = x\sec x$,则 $f(-x) = -f(x)$,且 $x \in R$,所以 $f(x)$ 是奇函数.

(4)设 $f(x) = \sin x - \cos x$,则 $f(-x) = -\sin x - \cos x$,所以 $f(x)$ 是非奇非偶函数.

(5)设 $f(x) = \frac{x\sin x}{2+\cos x}$,则 $f(-x) = f(x)$,且 $x \in R$,所以 $f(x)$ 是偶函数.

(6)设 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$,则

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=-\ln(\frac{1}{-x+\sqrt{1+x^2}})=-\ln(x+\sqrt{1+x^2}),且\ x\in R,$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

(7)设 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$,则 $f(-x)=-f(x)$,且 $x\in R$,所以 $f(x)$ 是奇函数.

(8) $f(-x)=-f(x)$,且 $x\in R$,所以 $f(x)$ 是奇函数.

4．判断下列函数的单调性.

(1) $y=5x-8$; (2) $y=3^{x-1}$; (3) $y=2x+\ln x$; (4) $y=2+\dfrac{8}{x}$.

解：(1)在定义域内任取 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，于是

$$f(x_1)-f(x_2)=5x_1-8-5x_2+8=5(x_1-x_2)<0$$

所以 $f(x_1)<f(x_2)$，说明在其定义域 R 上 $f(x)$ 是单调增函数.

(2)在定义域内任取 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，于是

$$f(x_1)-f(x_2)=3^{x_1-1}-3^{x_2-1}=3^{x_1-1}(1-3^{x_2-x_1})<0$$

所以 $f(x_1)<f(x_2)$,说明在其定义域 R 上 $f(x)$ 是单调增函数.

(3)在定义域 $(0,+\infty)$ 内任取 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，于是

$$f(x_1)-f(x_2)=2x_1+\ln x_1-2x_2-\ln x_2=2(x_1-x_2)+\ln\frac{x_1}{x_2}$$

所以 $f(x_1)<f(x_2)$，说明 $f(x)$ 是单调增函数。

(4)在定义域 $\{x\mid x\in R,x\neq 0\}$ 内任取 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，于是

$$f(x_1)-f(x_2)=8\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}$$

所以在定义域 $(0,+\infty)$ 上和 $(-\infty,0)$ 都有 $f(x_1)<f(x_2)$，说明 $f(x)$ 是单调减函数.

5．判断下列函数的有界性.

(1) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$; (2) $y=\sin\dfrac{1}{x}$; (3) $y=x\cos x$.

解：(1)首先函数的定义域为R,易知在R内有$|x|<1+x^2$，从而$|f(x)|<1$,所以$f(x)$有界.

(2)首先函数的定义域为$\{x\mid x\in R, x\neq 0\}$，易知在该定义域内有$|f(x)|\le 1$，所以$f(x)$有界.

(3)首先函数的定义域为R,易知在R内x为无界函数,$|\cos x|\le 1$为有界函数且不恒为零,所以其乘积无界,即原函数$y=x\cos x$无界.

6．求下列周期函数的最小正周期.

注：求三角函数的最小正周期的方法有：

(1)定义法与图像法;

(2)公式法:函数$f(x)=A\sin(\omega x+\phi)$和$f(x)=A\cos(\omega x+\phi)(A\neq 0,\omega>0)$的最小正周期都为$\dfrac{2\pi}{\omega}$；函数$f(x)=A\tan(\omega x+\phi)$和$f(x)=A\cot(\omega x+\phi)(A\neq 0,\omega>0)$的最小正周期都为$\dfrac{\pi}{\omega}$.

(3)最小公倍数法:求和函数的最小正周期,首先求出各个三角函数的最小正周期，然后再求其最小公倍数，即为和函数的最小正周期.

(1) $y=\cos^2 x$；　(2) $y=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$；　(3) $y=\sqrt{|\tan x|}$.

解: (1) $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$,所以最小正周期是$\pi$.

(2)因为$\sin x, \sin 2x, \sin 3x$的最小正周期分别是$2\pi, \pi, \dfrac{2\pi}{3}$,所以原函数的最小正周期为$2\pi$.

(3)由函数图像可知,最小正周期是π.

7. 求下列函数的反函数.

(1) $y=\sqrt{1-x^2}(-1\le x\le 0)$;　　(2) $y=\tan e^x, (-\infty<x<\ln\dfrac{\pi}{2})$;

(3) $y=1+\ln(x+1), (x>-1)$;　　(4) $y=\begin{cases} x, & x<1 \\ x^2, & 1\le x\le 4 \\ 2^x, & x>4 \end{cases}$.

解：(1)原函数值域为$[0,1]$,且由原函数得$y^2=1-x^2$，则$x=-\sqrt{1-y^2}$,所以反函数为

$$y=-\sqrt{1-x^2},\quad x\in[0,1].$$

(2)原函数值域为$[0,1]$,且由原函数得$\arctan y=e^x$, 则$x=\ln\arctan y$,所以反函数为

$$y=\ln\arctan x, x\in[0,1].$$

(3)原函数值域为$[1,+\infty)$,且由原函数得$y-1=\ln(x+1)$,则$x=e^{y-1}-1$,所以反函数为

$$y=e^{x-1}-1, x\in[1,+\infty)$$

(4) 由 $y=x$ 得 $x=y$,由 $y=x^2,1\le x\le 4$ 得 $x=\sqrt{y}$,由 $y=2^x$ 得 $x=\log_2 y$,所以反函数为

$$y=\begin{cases} x, & x<1; \\ \sqrt{x}, & 1\le x\le 16; \\ \log_2 x, & x>16. \end{cases}$$

8．在下列各题中,将 y 表示为 x 的函数,并求对应于自变量值 x_1 和 x_2 的函数值 y .

(1) $y=u^2, u=\sin x, x_1=\dfrac{\pi}{4}, x_2=\dfrac{\pi}{2}$;　　(2) $y=e^u, u=x^2, x_1=1, x_2=2$;

(3) $y=u^2, u=\arcsin x, x_1=1, x_2=0$.

解：(1) $y=\sin^2 x, y_1=\dfrac{1}{2}, y_2=1$

(2) $y=e^{x^2}, y_1=e, y_2=e^4$

(3) $y=\arcsin^2 x, y_1=\dfrac{\pi^2}{4}, y_2=0$

9．指出下列函数可以由哪些简单函数复合而成的.

(1) $y=\sqrt{3x-1}$;　　(2) $y=\arctan\sqrt[3]{1+x}$;　　(3) $y=(1+\ln x)^5$;

(4) $y=e^{e^{-x^2}}$;　　(5) $y=e^{\tan\frac{x}{2}}$;　　(6) $y=\arcsin[\lg(2x+1)]$.

解：(1) $y=\sqrt{u}, u=3x-1$,其中 $x\in[\dfrac{1}{3},\infty)$.

(2) $y=\arctan \mathrm{u}, \mathrm{u}=\sqrt[3]{v}, v=1+x$,其中 $x\in(-\infty,\infty)$.

(3) $y=u^5, u=1+\ln x$,其中 $x\in(0,\infty)$.

(4) $y=e^u, u=e^v, v=-x^2$,其中 $x\in(-\infty,\infty)$.

(5) $y=e^u, u=\tan v, v=\dfrac{x}{2}$,其中 $\{x|x\ne(2k+1)\pi, k\in Z\}$.

(6) $y=\arcsin u, u=\lg v, v=2x+1$,其中 $x\in(-\dfrac{9}{20},\dfrac{9}{2})$.

10．设 $f(x+\dfrac{1}{x})=x^2+\dfrac{1}{x^2}$,求 $f(x)$.

解：因为 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$,所以 $f(x)=x^2-2$.

11．已知 $f(x)=x^3-x,\varphi(x)=\sin 2x$,求 $f[\varphi(x)],\varphi[f(x)]$.

解：$f(\varphi(x))=\sin^3 2x-\sin 2x,\varphi[f(x)]=\sin 2(x^3-x)$.

12．指出下列函数中哪些是初等函数,哪些不是初等函数.

(1) $y=\dfrac{e^{\sqrt{1-x^2}}+x^2}{1+x+\sin\sqrt{x}}$;　　(2) $y=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\ge 0;\end{cases}$

(3) $y=\sqrt{x}+\ln(2-\frac{1}{2}\cos x)$;　　(4) $y=\begin{cases}1, & x\in \mathrm{Q},\\ 0, & x\in \mathrm{R}/\mathrm{Q}.\end{cases}$

解：(1)是.因为原函数符合初等函数的定义.

(2)是.因为原函数可化为 $y=\sqrt{x^2}$,符合初等函数的定义.

(3)是. 因为原函数符合初等函数的定义.

(4)不是.因为原函数不能由一个解析式表示，不符合初等函数的定义.

13．讨论当 $a=2$ 和 $a=-2$ 时, $y=\lg(a-\sin x)$ 是不是复合函数;如果是复合函数,求其定义域.

解：当 $a=2$ 时，$\mathrm{y}=\lg(a-\sin x)$ 是由 $y=\lg u, u=2-\sin x$ 复合而成的复合函数. 因为对任意的 $x\in R$,函数 $u=2-\sin x$ 的值域为 $D=[1,3]\subset \mathrm{U}$,其中 $U=(0,+\infty)$ 为 $y=\lg u$ 的定义域.所以原复合函数的定义域为实数集 R.

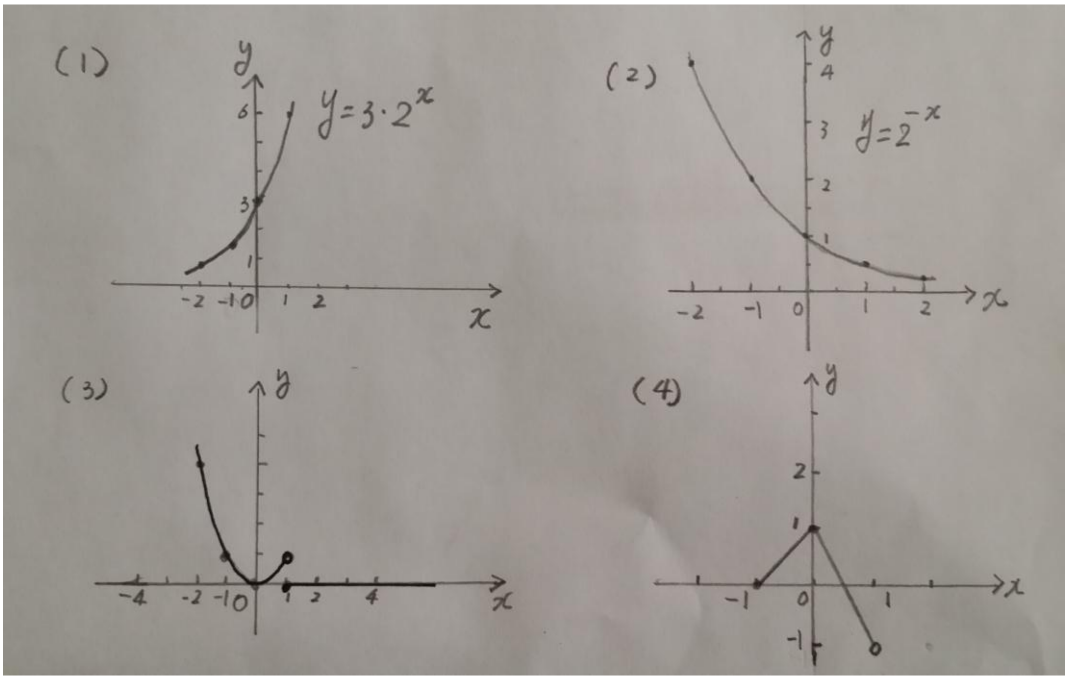
当 $a=$-2 时，$\mathrm{y}=\lg(a-\sin x)$ 不是复合函数.因为函数 $u=2-\sin x$ 的值域为 $D=[-3,-1]$,而 $D\cap U=\varnothing$.

14. 作下列函数的图形.

(1)　$y=3\cdot 2^x$;　　(2)　$y=2^{-x}$;

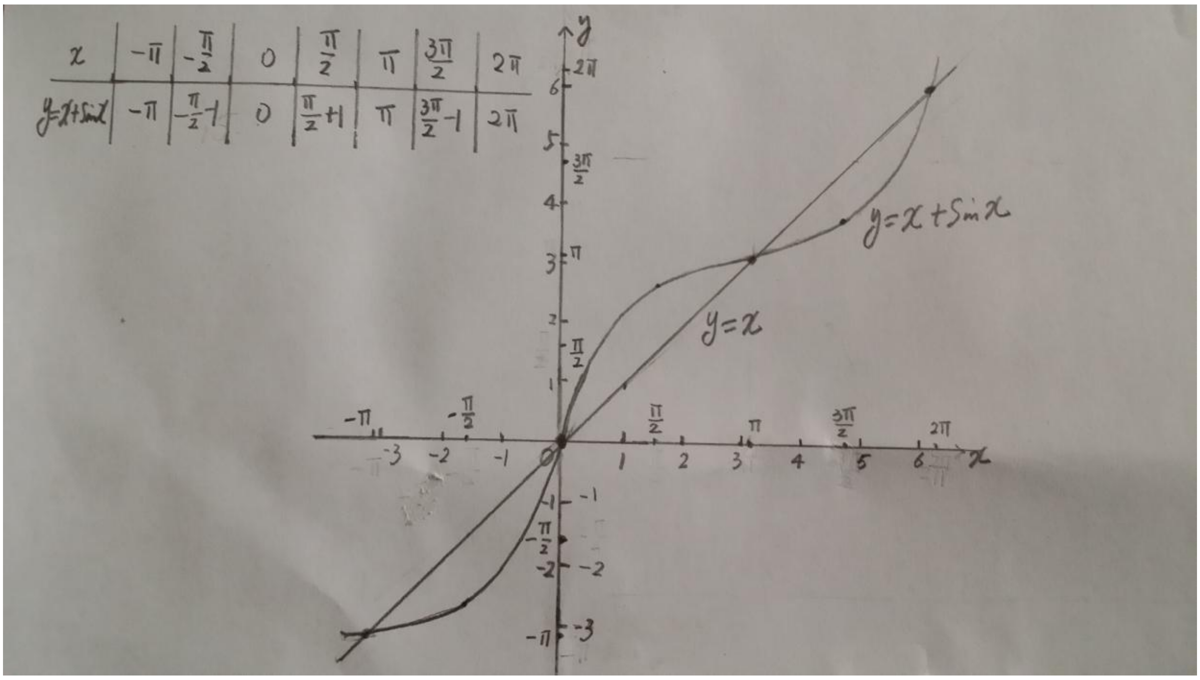
(3)　$y=\begin{cases}x^2, x<1,\\ 0, x\ge 1;\end{cases}$　　(4) $y=\begin{cases}x+1, -1\le x\le 0,\\ -2x+1, 0\le x<1.\end{cases}$

解：根据函数的定义域，取合适的点,并用描点法作图.



15．先作出 $y=x$ 及 $y=\sin x$ 的图形,再由两个函数的图形叠加出 $y=\sin x+x$ 的图形.

解：根据函数的定义域，取合适的点,并用描点法作图.



(B)

1.设 $f(x)$ 的定义域为[0,1],求下列各函数的定义域.

(1) $f(\cos x)$;　　　　(2) $f(x+a)+f(x-a)\quad(a>0)$.

解：(1)令 $0 \le \cos x \le 1$，解得函数的定义域为 $D=\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2}, 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right], k \in Z$.

(2)令 $0 \le x+a \le 1$,且 $0 \le x-a \le 1$，得此不等式组的解集为

$$D=\{x \mid -a \le x \le 1-a, a \le x \le 1+a\}$$

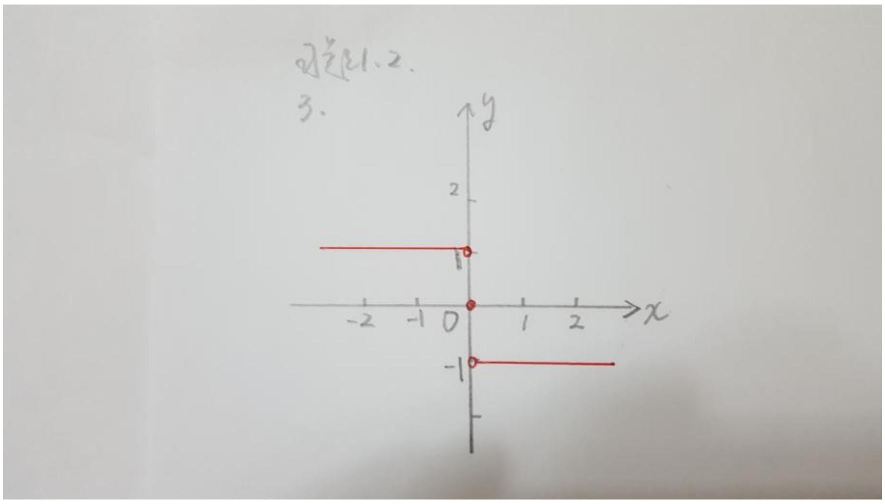
所以,当 $1-a<a$ ，即 $a>\dfrac{1}{2}$ 时,函数的定义域为空集；当 $1-a \ge a$ 时，即 $a \le \dfrac{1}{2}$ 时,函数的定义域为 $[a,1-a]$.

2.设 $f(x)=\begin{cases}-x^2, & x \ge 0,\\ -e^x, & x<0,\end{cases}$ $\varphi(x)=\ln x$, 求 $f(\varphi(x))$ 的表达式.

解：因为 $\varphi(x)=\begin{cases}\ln x \ge 0, x \ge 1\\ \ln x<0, 0<x<1\end{cases}$,所以 $f(\varphi(x))=\begin{cases}-\ln^2 x, x \ge 1;\\ -x, x<0<1.\end{cases}$

3.设 $f(x)=e^x$, $g(x)=\begin{cases}-1, & |x|>1,\\ 0, & |x|=1,\\ 1, & |x|<1,\end{cases}$ 求 $g[f(x)]$ 和 $f[g(x)]$, 并画出这两个函数的图形.

解： $g(f(x))=\begin{cases}-1, & |e^x|>1,\\ 0, & |e^x|=1,\\ 1, & |e^x|<1.\end{cases}=\begin{cases}-1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x<0.\end{cases}$ $f(g(x))=\begin{cases}e^{-1}, & |x|>1\\ 1, & |x|=\\ e, & |x|<1\end{cases}$



4.设 $f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n个}$,若 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f_n(x)$.

解： $f_1(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ， $f_2(x)=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$ ， $f_2(x)=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+2\dfrac{x^2}{1+x^2}}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$

作归纳假设： $f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}, k=1,2,3,\dots,n-1$,根据定义 $f_n(x)=f\left\{f[\cdots f(x)]\right\}$,有

$$f_{\mathrm{k+1}}(x)=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+k\dfrac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$$

所以,总有 $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

解：由 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 得 $\left|f(x)\right|\le 1$,且 $f\left[f(x)\right]=\begin{cases}1, & \left|f(x)\right|\le 1,\\ 0, & \left|f(x)\right|>1,\end{cases}$ 所以 $f\left[f(x)\right]=1$.

6. $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 内有定义 $(l>0)$, 并且 $f(x)$ 是奇函数,证明:若 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内单调增加, 则 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内也单调增加.

证明：已知 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 内有定义,且 $f(x)=-f(-x)$.

若 $\forall -l<x_1<x_2<0$,有 $f(x_1)<f(x_2)$. 则 $\forall l>-x_1>-x_2>0$,有

$$-f(-x_1)=f(x_1)<f(x_2)=-f(-x_2)\text{，即 } f(-x_1)>f(-x_2).$$

故 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内也单调增加.

7. 若 $f(x)$ 是二次有理整式函数,且 $f(a)=f(b)=0(a\ne b), f(\dfrac{a+b}{2})=m$, 求 $f(x)$.

解：二次多项式的一般形式为 $f(x)=Ax^2+Bx+C$,由 $f(a)=f(b)=0(a\ne b)$ 可知

$$f(a)=Aa^2+Ba+C=0$$

$$f(b)=Ab^2+Bb+C$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=A\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+B\left(\frac{a+b}{2}\right)+C=m$$

由以上三个线性方程可解得 $A=-\dfrac{4m}{(a-b)^2}, B=-(a+b), C=ab\cdot A$.

从而，二次多项式的一般形式为 $f(x)=-\dfrac{4m}{(a-b)^2}[x^2-(a+b)x+ab]$.

8. 设 $f(x+2)=2^{x^2+4x}-x$, 求 $f(x-2)$.

解: $f(x+2)=2^{x^2+4x}-x=2^{(x+2)-4}-(x+2)+2$,令 $t=x+2$,即有 $f(t)=2^{(t)-4}-(t)+2$.

所以 $f(x-2)=2^{(x-2)-4}-(x-2)+2=2^{x^2-4x}-x+4$.

9. 函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义,证明:函数 $f(x)$ 在数集 X 上有界的充要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

证明：(必要性)已知 $f(x)$ 在数集 X 上有界，即 $\forall x\in X$,$\exists$正数 M,满足 $-M\le f(x)\le M$,可见 $f(x)$ 在数集 X 既有上界又有下界.

(充分性)已知 $f(x)$ 在数集 X 上既有上界又有下界,即 $\forall x\in X$,$\exists$正数 M 和 N,满足 $f(x)\le M$，且 $-N\le f(x)$.取 $m=\max\{M,N\}$,于是 $|f(x)|\le m$成立,即 $f(x)$ 在数集 X 上有界.

10. 设存在两个实数 a,b $(a<b)$，使对任意 x, $f(x)$ 满足 $f(a-x)=f(a+x)$ 及 $f(b-x)=f(b+x)$, 证明: $f(x)$ 是以 $T=2(b-a)$ 为周期的函数.

证明：对任意 x,有 $f(a-x)=f(a+x)$, $f(b-x)=f(b+x)$, 于是

$$f(x+2(b-a))=f(x+b-a+b-a)=f((x+b-a-a)+b)=f(b-(x+b-a-a))$$
$$=f(-x+a+a)=f(a+(a-x))=f(a-(a-x))=f(x)$$

故 $f(x)$ 的周期为 $T=2(b-a)$.

习　题 1.3　简单函数模型

(A)

1. 已知自变量 t 和因变量 x 的值如下表 1.4 所示,假设 x 和 t 之间的关系为线性函数关系,试写出 x 关于 t 的函数表达式.

表 1.4

t	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6
x	27.8	29.2	30.6	32.0	33.4

解：设因变量 x 和自变量 t 的线性函数的关系为

$$x = at + b$$

选取表中任意的 2 组数对 $(t,x) = (5.2, 27.8), (t,x) = (5.4,\ 30.6)$，分别代入上式得：$a = 14, b = -45$, 即因变量 x 和自变量 t 的线性函数的关系为

$$x = 14t - 45$$

2.设华氏温度(F)与摄氏温度(°C)是线性关系,已知212F和100°C均表示水的沸点温度, 32 F和0°C均表示水的冰点温度,

(1)写出华氏温度与摄氏温度的函数关系,并画出函数图形;

(2)30°C相当于华氏几度?

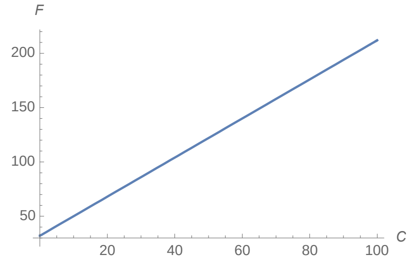
解：(1) 设华氏温度(F)与摄氏温度(°C)是线性关系为

$$F = a\,C + b$$

将$F = 212,\ C = 100;\ F = 32,\ C = 0$ 分别代入得：$a = 1.8, b = 32$, 即华氏温度(F)与摄氏温度(°C)是线性关系为

$$F = 1.8C + 32$$

函数图形如下：



(2)将$C = 30$ 代入华氏温度（F）与摄氏温度（C）的线性关系式得华氏温度 $F = 86$.

3. 求下列表 1.5 和表 1.6 中的函数的可能表达式:

(1)

表 1. 5

t	0	1	2	3

x	4.30	6.02	8.43	11.80

表 1. 6

t	0	1	2	3
y	5.50	4.40	3.52	2.82

解：(1)观察表中数据,设因变量 x 和自变量 t 的函数关系为

$$x = a(1+b)^t,$$

任选表中的两组数对 $(t,x)=(0,4.3),(t,x)=(1,6.02)$，分别代入上述函数得：$a=4.3,\ b=0.4$，即因变量 x 和自变量 t 的函数关系为

$$x = 4.3(1+0.4)^t.$$

验证表 1.5 中剩余的数据表明:可能近似符合上述指数函数.

(2)观察表中数据,设因变量 y 和自变量 t 的函数关系为

$$y = a(1+b)^t,$$

任选表中的两组数对 $(t,y)=(0,5.5),(t,y)=(1,4.4)$,分别代入上述函数得：$a=5.5, b=-0.2$，即因变量 y 和自变量 t 的函数关系为

$$y = 5.5(1-0.2)^t.$$

同样验证表 1.6 中剩余的数据表明:可能近似符合上述指数函数.

4. 某地区人口为 100 万,年平均增长率为 2%,

(1)请估计该地区人口的倍增期;

(2)若目前该地区人口为 200 万,年平均增长率不变,则人口的倍增期为多少?

解：(1)所谓人口倍增期就是人口数量成倍增长的那个时期。目前人口为 100 万，年平均增长率为 2%，假设倍增期为 t ,于是有关系式

$$\mathbf{100(1+2\%)^t = 200},$$

可得$\mathbf{t = 35.0028}$. 故倍增期为 35 年.

(2)目前人口为 200 万，年平均增长率为 2%，假设倍增期为 t ,于是有关系式

$$\mathbf{200(1+2\%)^t = 400},$$

可得$\mathbf{t = 35.0028}$.故倍增期为 35 年.

5. ${}^{226}\mathrm{Ra}$ 的半衰期为 1620 年，若 ${}^{226}\mathrm{Ra}$ 得初始量为$\boldsymbol{C_0}$,

(1)写出 t 年后 $^{226}\mathrm{Ra}$ 的剩余量 C 的表达式； (2) 500 年后 $^{226}\mathrm{Ra}$ 的剩余量是初始量的百分之几?

解：(1) t 年后 $^{226}\mathrm{Ra}$ 的剩余量 C 的表达式为

$$C=C_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1620}}.$$

(2)500 年后 $^{226}\mathrm{Ra}$ 的剩余量为$C_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{500}{1620}}$，于是$\frac{C_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{500}{1620}}}{C_0}$=0.8074. 故 500 年后 $^{226}\mathrm{Ra}$ 的剩余量是初始量的 80.74%.

6.试估计当 x 多大时，$3^x>x^3$ 成立.

解：记 $f(x)=3^x-x^3$，有$f(3)=3^3-3^3=0$，而且函数3^x单调递增的速度比x^3快. 故当$x>3$时，$3^x>x^3$成立.

(B)

1.由于新的农业技术和改良种子品种,某地区的粮食产量不断提高,但是该地区的人口也在不断的增加. 20 年内该地区的粮食产量以及同期人口数的变化如下表 1.7 和表 1.8(粮食产量单位:百万吨,人口数量单位:百万):

表 1.7

年份	1980	1985	1990	1995	2000
粮食产量	5.35	5.90	6.49	7.05	7.64

表 1.8

年份	1980	1985	1990	1995	2000
人口数量	53.2	56.9	60.9	65.2	69.7

(1)请你判断,以上每组数据更近似符合线性函数还是指数函数，并写出各自的函数表达式;

(2)如果该地区 1980 年粮食产量基本上能自给自足,那么 1980 年到 2000 年期间还能做到吗?

(3)如果按照这种趋势继续下去,你对该地区将来的粮食供给有何预测?

解：(1)观察表 1.7 的数据，假设其满足如下关系式

$$L=a(t-1980)+b$$

任意选取两组数对$(t,l)=(1980,1985)$,$(t,l)=(1990,6.49)$,代入上述函数得:a =0.114, b=5.35,于是有

$$L = 0.114(t-1980)+5.35.$$

验证剩余的数据，$t=1985$，$L=0.114(1985-1980)+5.35=5.92$.

$$t=1995，L=0.114(1995-1980)+5.35=7.06.$$

$$t=2000，L=0.114(2000-1980)+5.35=7.63.$$

由此可见表 1.7 近似符合线性函数.

观察表 1.8 的数据，假设其满足如下关系式

$$R=a(1+b)^{(t-1980)}$$

任意选取两组数据$(t,R)=(1980,53.2)$, $(t,R)=(1990,60.9)$,代入上述函数得:a =53.2，b=0.01354. 于是有

$$R=53.2(1+0.01354)^{(t-1980)}.$$

同样验证表 1.8 中剩余的数据表明:近似符合上述指数函数.

(2)能做到. 1980 年粮食产量基本上能自给自足，意味着人均粮食量为$\frac{6.49}{60.9}=0.1005$. 从表中数据知 1985 年人均粮食量为$\frac{5.90}{56.9}=0.1037$，1990 年人均粮食量为$\frac{5.90}{56.9}=0.1066$，1995 年人均粮食量为$\frac{7.05}{65.2}=0.1081$，1995 年人均粮食量为$\frac{7.64}{69.7}=0.1096$. 可见 1980 年到 2000 年期间还能做到自给自足.

(3)记$f(t)=\frac{L}{R}=\frac{0.114(t-1980)+5.35}{53.2(1+0.01354)^{(t-1980)}}$, 当$t=2045$时，有$f(2044.6)=0.1005$，由此可见，按照这种趋势继续下去,人口增长将超过粮食增长，该地区从 2045 年开始将不能自给自足了.

2.某宾馆现有客房 50 套,若每间每天按租金为 120 元,则可全部租出,租出的客房每天需交税金 10 元;若每天租金提高 5 元,将空出一间客房.试求宾馆所获利润与闲置房间的间数的函数关系;并确定每间租金如何定价,才能获得最大利润？最大利润是多少？

解：假设闲置房间数为x，利润为y，宾馆所获利润与闲置房间的间数的函数关系为

$y=(50-x)(120+5x)-10(50-x)$

计算可得当月租金定为 190 元时，最大利润为 6480 元，闲房 14 间.

3. 20 世纪 60 年代初期,某地区因核试验释放出的同位素 $^{90}\mathrm{Sr}$ 进入当时活着的人的骨骼中,如果 $^{90}\mathrm{Sr}$ 的半衰期是 29 年,那么 2010 年这些受核试验影响的人的骨骼中的 $^{90}\mathrm{Sr}$ 还剩百分之几?

解：20 世纪 60 年代初期考虑为 1960 年. t 年后 $^{90}\mathrm{Sr}$ 的剩余量 C 的表达式为

$$C=C_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{29}}$$

50 年(1960 年到 2010 年间隔为 50 年)后 $^{90}\mathrm{Sr}$ 的剩余量为$C_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{50}{29}}$，于是$\frac{C_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{50}{29}}}{C_0}$＝0.302679. 故 50 年后 $^{226}\mathrm{Ra}$ 的剩余量是初始量的 30.26%.

习　题 1.4　数列的极限

(A)

1. 下列结论是否正确,为什么？

(1)零数列是无穷小数列;　(2)绝对值非常小的常数列是无穷小;

(3)两个无穷小数列的商是无穷小;　(4) 任意个无穷小数列的和是无穷小.

解：(1)正确.因为零作为常数数列,它的极限为 0,由无穷小的定义可知:零数列是无穷小数列.

(2)不正确.因为对于常数数列而言,它的极限是它自身,尽管它的绝对值非常小,但是仍然不是 0.

(3)不正确.例如两个无穷小数列$\left\{\frac{2}{n}\right\},\left\{\frac{1}{n}\right\}$，它们的商数列却是常数列$\{2\}$而非无穷小数列.

(4)不正确.有限个无穷小数列的和是无穷小,而无限个无穷小数列的和不一定是无穷小.例如

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}_{n\text{个}}=\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)=1\neq 0$$

2. 观察下列数列$\{x_n\}$的变化趋势,如果极限存在,请写出它们的极限:

(1) $x_n=(-1)^n\frac{1}{n}$;　(2) $x_n=2+\frac{1}{n^2}$;　(3) $x_n=\frac{n-1}{n+1}$;　(4) $x_n=\sin\frac{1}{n}$.

解：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n^2})=2$； (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}=1$； (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}=0$.

3. 下列说法是否正确,为什么?

(1) 若数列$\{x_n\}$,当n越来越大时,$|x_n-a|$越来越小,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$；

(2) 已知数列$\{x_n\}$,若对任意小的正数ε,有无穷多个$\{x_n\}$满足$|x_n-a|<\varepsilon$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

解：(1)不正确.因为“$|x_n-a|$越来越小”并不能保证“$|x_n-a|$是无穷小”,所以题设条件不满足极限定义中的条件.

(2)不正确.因为“有无穷多项x_n满足$|x_n-a|<\varepsilon$”并不能保证“存在正整数项N,当$n>N$时,恒有$|x_n-a|<\varepsilon$”, 所以题设条件不满足极限定义中的条件.

(B)

1. 用定义证明当$n\to\infty$时,$|x_n|\to 0$的充分必要条件是当$n\to\infty$时,$x_n\to 0$.

证：(要证原命题即证“$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$”,根据定义,这是显然的.)

因为$||x_n|-0|=|x_n-0|$,所以

$$\lim_{n\to\infty}|x_n|=0\Leftrightarrow \text{对}\ \forall\varepsilon>0,\exists N\in Z^+,\text{使得当}\ n>N\ \text{时,恒有}\ ||x_n|-0|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{对}\ \forall\varepsilon>0,\exists N\in Z^+,\text{使得当}\ n>N\ \text{时,恒有}\ |x_n-0|<\varepsilon\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=0$$

2. 设数列当$n\to\infty$时,$\{x_n\}$为无穷小,且数列$\{y_n\}$有界,用极限定义证明当$n\to\infty$时,$\{x_ny_n\}$为无穷小.

证: 由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$得:对$\forall\varepsilon>0,$存在$N\in Z^+$,使得当$n>N$时,恒有$|x_n|<\varepsilon$.由数列$\{y_n\}$有界可知:对一切$n\in Z^+$,存在$M>0$,使得$\{y_n\}<M$.所以,对$\forall\varepsilon>0,$存在$N\in Z^+$,使得当$n>N$时,恒有$|x_ny_n|<M\varepsilon$,即当$n\to\infty$时,$\{x_ny_n\}$为无穷小.

3. 用极限的定义证明下列数列的极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n}=\frac{2}{3}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=2$.

证: (1)对$\forall\varepsilon>0,$取正整数$N=\left[\frac{1}{3\varepsilon}\right]$,使得当$n>N$时,有$\left|\frac{2n+1}{3n}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{1}{3n}\right|<\varepsilon$.所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n}=\frac{2}{3}.$$

(2)对 $\forall\varepsilon>0,$ 取正整数 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]$,使得当 $n>N$ 时,有 $\left|\frac{1+2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}-2\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right|<\varepsilon$.所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=2.$$

4. 用极限的定义证明:若 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$,则 $\lim_{n\to\infty}|x_n|=|a|$;并举反例说明反之不一定成立.

证:由 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$ 知:对 $\forall\varepsilon>0,$ 存在 $N\in Z^+$,使得当 $n>N$ 时,有 $|x_n-a|<\varepsilon$;又因为

$$||a|-|b||\le|a-b|$$

所以,对 $\forall\varepsilon>0,$ 存在 $N\in Z^+$,当 $n>N$ 时,$||x_n|-|a||\le|x_n-a|<\varepsilon$.

反例:$\{x_n\}=\{(-1)^n\}$,可知 $\lim_{n\to\infty}|x_n|=1$,但是 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

习　题 1.5　函数的极限

(A)

1. 观察下列函数在所给的自变量变化趋势下极限是否存在,如果存在,则写出极限值:

(1) $\frac{x}{x+2}$ ($x\to0$);　　　　(2) $\cos\frac{1}{x}$ ($x\to0$);

(3) $\arctan x$ ($x\to-\infty$);　　　　(4) e^{-x} ($x\to+\infty$).

解：(1)存在，因为当 $x\to0$ 时，$x+2\to2,\ \frac{x}{x+2}\to0$,所以 $\lim_{x\to0}\frac{x}{x+2}=0$；

(2)不存在,因为当 $x\to0$ 时，$\frac{1}{x}\to\infty$, $\cos\frac{1}{x}$ 不能无限趋近于某一个常数;

(3)存在,由反正切函数的图形可得: $\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$;

(4)存在,且 $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2x+1}=0$.

2. 函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ 2, & x\ge0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的极限是否存在？为什么？

解：因为 $\lim_{x\to0^-}f(x)=0$, $\lim_{x\to0^+}f(x)=2$,左右极限不相等,所以极限不存在.

3. 求 $f(x)=\frac{x}{x},\quad \varphi(x)=\frac{|x|}{x}$ 当 $x\to0$ 时的左、右极限,并说明它们在 $x\to0$ 的极限是否存在.

解：因为 $\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=1$,左右极限相等,所以当 $x\to0$ 时, $f(x)=\frac{x}{x}$ 极限存在且为 1.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\phi(x)=1, \lim\limits_{x\to 0^+}\phi(x)=-1$,左右极限不相等,所以当 $x\to 0$ 时, $\varphi(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 的极限不存在.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}3x+2, & x<0,\\ x^2+1, & 0\le x\le 1,\\ \dfrac{2}{x}, & x>1,\end{cases}$ 分别讨论 $x\to 0, x\to 1$ 时函数 $f(x)$ 的极限.

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=2, \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$,左右极限不相等,所以当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 的极限不存在.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$,左右极限相等,所以 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$.

5.若 $f(x)=\begin{cases}x+a, & x<0\\ x^3+2, & x\ge 0\end{cases}$,在 $x=0$ 处的极限存在,求常数 a.

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2,\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=a,\ f(x)$ 在 $x=0$ 处的极限存在,即左右极限相等,则 $a=2$.

(B)

1. 用定义证明:

(1)当 $x\to 2$ 时,函数 $2x-4$ 为无穷小;　　　(2)当 $x\to +\infty$ 时, $\dfrac{1}{2x+1}$ 为无穷小.

证: (1)对 $\forall\varepsilon>0$,要找 $\delta(\varepsilon)>0$,使得当 $0<|x-2|<\delta$ 时,有 $|2x-4|<\varepsilon$,即 $\left|x-2\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.所以我们取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$,则对 $\forall\varepsilon>0$,当 $0<|x-2|<\delta$ 时,有 $|2x-4|<\varepsilon$.故当 $x\to 2$ 时,函数 $2x-4$ 为无穷小.

(2) 对 $\forall\varepsilon>0$,我们要找 $X(\varepsilon)>0$,使得当 $\left|x\right|>X$ 时,有 $\left|\dfrac{1}{2x+1}\right|<\varepsilon$,即 $\left|2x+1\right|>\dfrac{1}{\varepsilon}$.由于

$$2|x|-1<|2x+1|$$

所以我们令 $\varepsilon<2\left|x\right|-1<\left|2x+1\right|$，即令 $X=\dfrac{1}{2\varepsilon}+\dfrac{1}{2}$，则对 $\forall\varepsilon>0$,当 $\left|x\right|>X$ 时，有 $\left|\dfrac{1}{2x+1}\right|<\varepsilon$.

故当 $x\to +\infty$ 时, $\dfrac{1}{2x+1}$ 为无穷小.

2. 用定义证明下列函数极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$;　　　(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}\cos x=0$;　　　(4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}=-2$.

证: (1)对 $\forall\varepsilon>0$,要找 $\delta(\varepsilon)>0$,使得当 $0<\left|x-2\right|<\delta$ 时,有 $\left|5x+2-12\right|<\varepsilon$,即 $5\left|x-2\right|<\varepsilon$.所

以取$\delta=\frac{\varepsilon}{5}$,则对$\forall\varepsilon>0$,当$0<|x-2|<\delta$,有$|5x+2-12|<\varepsilon$.故$\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$.

(2)对$\forall\varepsilon>0$,要找正数$X(\varepsilon)>0$,使得当$x>X(\varepsilon)$时,有$\left|\frac{1}{e^x}\right|<\varepsilon$,即$e^x>\frac{1}{\varepsilon}$.所以,我们取$X=-\ln\varepsilon$,则对$\forall\varepsilon>0$,当$x>X(\varepsilon)$时,有$\left|\frac{1}{e^x}\right|<\varepsilon$.故$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$.

(3)对$\forall\varepsilon>0$,要找$X(\varepsilon)>0$,使得当$|x|>X$时,有$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|<\varepsilon^2$.于是令

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|<\left|\frac{1}{x^2}\right|<\varepsilon^2.$$

所以,取$X(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}$,则对$\forall\varepsilon$,当$|x|>X(\varepsilon)$时,有$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|<\varepsilon^2$.故$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\cos x=0$.

(4)对$\forall\varepsilon>0$,要找$\delta(\varepsilon)>0$,使得当$0<|x+1|<\delta$时,有$\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}+2\right|<\varepsilon$,即$|x+1|<\varepsilon$.所以,取$\delta=\varepsilon$,则对$\forall\varepsilon$,当$0<|x+1|<\delta$时,有$\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}+2\right|<\varepsilon$. 故$\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x+1}=-2$.

3. 下列结论是否成立?如成立,给出其证明;如不成立,举反例说明之.

(1)设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,若$f(x)>0$,则$A>0$;

(2)若$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|$存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$是否存在.

证: (1)不成立. 例$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$,$\forall x\neq 0$,有$f(x)>0$, 单$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

(2)不成立.例$f(x)=\frac{|x|}{x}$,可知$\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=1$,但是$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在.

4. 利用极限定义证明:函数$f(x)$当$x\to x_0$时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限都存在并相等.

证:(充分性)已知$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, 即$\exists A,\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

即当$0<x-x_0<\delta$时,$|f(x)-A|<\varepsilon$成立;同时当$-\delta<x-x_0<0$时,$|f(x)-A|<\varepsilon$成立.则有

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A,\text{且}\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A.$$

(必要性)已知$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$, 且$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.即$\exists A$,对$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta_1,\delta_2>0$,使得当

$0 < x - x_0 < \delta_1$,或当$-\delta_2 < x - x_0 < 0$ 时，均有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

现取$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$,则$\exists A$,对$\forall \varepsilon > 0$,使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时,恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$.即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

习　题 1.6　极限运算法则

(A)

1.求下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$;　(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$;　(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$;

(4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}$;　(5) $\lim\limits_{x \to \infty} (5 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2})$;　(6) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$;

(7) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$;　(8) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}$;　(9) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{e^x + e^{-x}}$;

(10) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$.

解: (1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}}{1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}} = 1$.

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{x}} + 1} = \dfrac{1}{2}$.

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} = 1$.

(4) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\left(\dfrac{1}{x} + 1\right)^5 - \left(\dfrac{1}{x^5} + \dfrac{5}{x}\right)}{\dfrac{1}{x^3} + 1} = 1$.

(5) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(5 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2}\right) = 5$.

(6) $\mathop{lim}\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}=\mathop{lim}\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(2-\dfrac{3}{x}\right)^{20}\left(3+\dfrac{2}{x}\right)^{30}}{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{50}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{30}$.

(7) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2-x-2}=\mathop{lim}\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)(x+2)}=\mathop{lim}\limits_{x\to1}\dfrac{(x-2)}{(x+1)(x+2)}=-\dfrac{1}{6}$.

(8) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}=\mathop{lim}\limits_{x\to3}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x-5)}=\mathop{lim}\limits_{x\to3}\dfrac{(x-2)}{(x-5)}=-\dfrac{1}{2}$.

(9)因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}=0$,且$cos\,x$为有界函数，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{cos\,x}{e^x+e^{-x}}=0$.

(10) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{2xh+h^2}{h}=\mathop{lim}\limits_{h\to0}(2x+h)=2x$.

2.求下列数列的极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$.

解：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\mathop{lim}\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{-2}{3}\right)^n+\dfrac{1}{3}}{\left(\dfrac{-2}{3}\right)^{n+1}+1}=\dfrac{1}{3}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+(n-1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2n^2}=\dfrac{1}{2}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{1}{n+1}\right]=1$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}\right)}=1$.

(B)

1. 下列说法是否正确，为什么？

(1) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{b_n}=a^b$.

(2) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}=\dfrac{a}{a}=1$.

(3) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.

解：(1)不正确. 根据指数函数的定义,必须在$a>0$的条件下才能成立.

(2)不正确. 只有当$a\neq 0$时结论才能成立.

(3)不正确. 反例$\{a_n\}=\{n\}$.

2. 下列说法是否正确，为什么？

(1) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$不存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$不存在;

(2) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$都不存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$不存在;

(3) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$不存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)$存在.

(4) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$都存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$存在.

解:(1)正确.反证法,假设$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$存在，由于$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,利用极限运算法则,有$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)-f(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]-\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,即$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$存在，矛盾.

(2)不正确. 反例$f(x)=\dfrac{1}{x-x_0}$，$g(x)=-\dfrac{1}{x-x_0}$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x),\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$均不存在.但$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=0$,即极限存在.

(3)不正确. 反例$f(x)=1$，$g(x)=\dfrac{1}{x-x_0}$，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{x-x_0}$,极限不存在.

(4)不正确. 必须同时满足$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$.例如$f(x)=\dfrac{1}{x},g(x)=x-x_0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$不存在.

3. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+bn+2}{2n+1}=3$，求常数$a, b$.

解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+bn+2}{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an+b+\dfrac{2}{n}}{2+\dfrac{1}{n}}=3$极限存在,且$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)=2$,则

$$\lim_{n\to\infty}\left(an+b+\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{an+b+\dfrac{2}{n}}{2+\dfrac{1}{n}}\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)=6$$,又$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}=0$,所以$a=0,b=6$.

习　题 1.7　极限存在准则　两个重要极限

(A)

1. 求下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$ ；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x$ ；　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$ ；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$ ；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}-1}$ ；　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}$ ；　(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x}$ ；　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

解:(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3x}{5x}\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{5x}{\tan 5x}\right)=\dfrac{3}{5}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{2\sin 2x}\cdot\cos 2x=\dfrac{1}{2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(\sin x)^2}{x\sin x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=2\cdot$

(4)令 $t=\arctan x, x=\tan t$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\tan t}=1$.

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}}\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{-1}=e^{-1}$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\left(-\dfrac{x}{2}\right)\right)^{\frac{-2}{x}\bullet(-1)}=e^{-1}\cdot$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x+1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{2}{x+1}\right)^{-\frac{x+1}{2}}\right]^{-2}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x+1}\right)^{-1}=e^{-2}$.

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}=e^{-1}$.

2. 利用极限存在准则证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\dots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$;　(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{4}{n}}=1$.

解：(1)记 $f(n)=n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)$,则

$$g(n)=n\frac{n}{n^2+n\pi}< f(n)<n\frac{n}{n^2+\pi}=h(n)\ ,$$

$$\lim_{n\to+\infty}h(n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=1,\ \lim_{n\to+\infty}g(n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi}=1\ ,$$

利用“夹逼定理”,有 $\lim_{n\to+\infty}f(n)=1$.

(2) $f(n)=\sqrt{1+\frac{4}{n}}$,易知 $f(n)$ 单调减少有下界,最大下界为 1,利用“单调有界准则”,有

$$\lim_{n\to+\infty}f(n)=1.$$

(B)

1.求下列极限

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x}$;　　(2) $\lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{x}{2^n}$ (x 为不等于零的常数);

(3) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$;　　(4) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^x$;　　(5) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{kx}$ (k 为常数).

解：(1) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1-1=0$.

(2) $\lim_{n\leftarrow\infty}2^n\sin\frac{x}{2^n}=\lim_{n\to\infty}x\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}=x$.

(3) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2\sin^2\frac{x^2}{2}}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x^2}{2}}{\sqrt{2}\sin^2\frac{x}{2}}=\sqrt{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\sqrt{2}$.

(4) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)^{x^2-1}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)=\mathrm{e}$.

(5) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{kx}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-k}=\mathrm{e}^{-k}$.

2.设 $x_1=2$, $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)$ $(n=1,2,\ldots)$,证明数列 $\{x_n\}$ 收敛,并求出极限值.

解：因为 $x_1=2$ ，而且根据递推公式 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{1}{x_n})(n=1,2,3\cdots)$,有

$$x_{n+1}-1=\frac{1}{2}(x_n+\frac{1}{x_n}-2)=\frac{1}{2}(\sqrt{x_n}-\frac{1}{\sqrt{x_n}})^2>0\,.$$

或者利用 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{1}{x_n})\geq\frac{1}{2}2(\sqrt{x_n\cdot\frac{1}{x_n}})=1$,所以 $x_n>1, n=1,2\cdots$，即数列 $\{x_n\}$ 有下界.

下面证明数列 $\{x_n\}$ 是一个单调递减数列.

因为 $x_{k+1}-x_k=\frac{1}{2}(x_k+\frac{1}{x_k})-x_k=\frac{1}{2}(\frac{1}{x_k}-x_k)=\frac{1}{2}(\frac{1}{x_k}+x_k)=\frac{(1-x_k)(1+x_k)}{2x_k}<0$,

所以根据“单调有界准则”,可知数列 $\{x_n\}$ 收敛.

设其极限值为 A，即 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=A$.于是,由递推公式 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{1}{x_n})$ 两边同时取极限,我们有

$A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{1}{A}\right)$,所以 A=1.

3.设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin ax}{x}, x>0\\ ax+2, x<0\end{cases}$,在 $x=0$ 处有极限,求 $f(-2)$.

解:$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}a\frac{\sin(ax)}{ax}=a$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(ax+2)=2$,由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有极限可知:左右极限相等,故 a=2,从而 $f(-2)=-2$.

4.设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^{\frac{x}{2}}=3$,求常数 c.

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{\frac{x-c}{2c}}\right]^{c}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{\frac{c}{2}}=\mathrm{e}^c=3$,所以 $c=\ln3$.

习　题 1.8　无穷大　无穷小的比较及等价代换法则

(A)

1.下列结论是否成立？若成立,试给出证明;若不成立,举反例说明:

(1)若数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时,为无穷小,而数列 $\{y_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时,为无穷大,则数列 $\{x_n\pm y_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时为无穷大,数列 $\{x_ny_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时为无穷小？

(2)若非零数列 $\{x_n\}$与 $\{y_n\}$当$n\to\infty$时,均为无穷大,则数列$\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$当$n\to\infty$时,为无穷大?

解：(1)无穷小和无穷大之和为无穷大，即结论“ $\{x_n\pm y_n\}$当$n\to\infty$时为无穷大”是对的.

因为对 $\forall M>0,$ 不妨设 $M=M_1-M_2$，其中 $M_1,M_2>0$.由 $\{x_n\}$为$n\to\infty$时为无穷小可知:对 $M_2>0,\exists N_2\in Z^+,$ 当$n>N_2$时,$|x_n|<M_2$,即

$$-|x_n|>-M_2.$$

再由 $\{y_n\}$为当 $n\to\infty$ 时为无穷大可知:对 $M_1>0,\exists N_1\in Z^+,$ 当 $n>N_1$ 时,$|y_n|>M_1$.取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当$n>N$时，有$|x_n+y_n|\ge||y_n|-|x_n||>M$.即结论成立.

无穷小和无穷大的乘积不一定是无穷小，即结论“ $\{x_ny_n\}$当$n\to\infty$时为无穷大”是错的.

例如：取$x_n=\dfrac{1}{n},y_n=n$，则 $\{x_n\}$为当$n\to\infty$时的无穷小， $\{y_n\}$为当$n\to\infty$时的无穷大，但是$\{x_ny_n\}$当$n\to\infty$时趋于定值 1，而不是$n\to\infty$时的无穷小.

(2)结论不成立.例如:取$x_n=n,y_n=n^2$,则 $\{x_n\}$为当$n\to\infty$时的无穷大，$\{y_n\}$为当$n\to\infty$时的无穷大，但是$\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$当$n\to\infty$时趋于 0，即$\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$是当$n\to\infty$时的无穷小.

2.当$x\to0$时,x^2-3x与$x\tan x$相比,哪一个是高阶无穷小?

解：因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\tan x}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x-3}=0$,所以当$x\to0$时,$x\tan x$是$x^2-3x$的高阶无穷小.

3.利用无穷小的等价代换法则,求下列极限:

(1)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan3x}{\sin2x}$；　(2)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{3x+x^2}$；　(3)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^n}{\sin^m x}$($m,n$为正整数);

(4)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x^2}{1-\cos2x}$；　(5)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan2x-\sin2x}{\arcsin3x^3}$.

解: (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan3x}{\sin2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{3x+x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{3x+x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5}{3+x}=\dfrac{5}{3}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^n}{\sin^m x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n}{x^m}=\lim\limits_{x\to 0}x^{n-m}=\begin{cases}0 & n>m,\\ 1 & n=m,\\ \infty & n<m.\end{cases}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x^2}{1-\cos 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\dfrac{(2x)^2}{2}}=\dfrac{1}{2}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x-\sin 2x}{\arcsin 3x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x(1-\cos 2x)}{3x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\dfrac{(2x)^2}{2}}{3x^3}=\dfrac{4}{3}$

(B)

1．证明无穷小的等价关系具有下列性质:

(1) $\alpha\sim\alpha$ (反身性); (2) 若$\alpha\sim\beta$,则$\beta\sim\alpha$(对称性);

(3) 若$\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$,则$\alpha\sim\gamma$(传递性).

证明: 当$\alpha\neq 0,\beta\neq 0,\gamma\neq 0$时,

(1)$\lim\dfrac{\alpha}{\alpha}=1$,故$\alpha\sim\alpha$;

(2)由$\alpha\sim\beta$可得$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$,则$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{1}{\dfrac{\beta}{\alpha}}=\dfrac{1}{\lim\dfrac{\beta}{\alpha}}=1$,故$\beta\sim\alpha$;

(3)由$\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$可得$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$, $\lim\dfrac{\gamma}{\beta}=1$，则$\lim\dfrac{\gamma}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta}{\alpha}\lim\dfrac{\gamma}{\beta}=1$，故$\alpha\sim\gamma$.

2. 用定义证明:当$x\to 1$时, $\dfrac{1}{x-1}\to\infty$.

证: 对$\forall M>0$,无论M如何大, $\exists\delta=\dfrac{1}{M}>0$,当$0<|x-1|<\delta$时,有$|\dfrac{1}{x-1}|>M$,

即当$x\to 1$时, $\dfrac{1}{x-1}\to\infty$.

习　题 1.9　连续函数

(A)

1．研究下列函数的连续性,并画出函数的图形:

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x\le 1 \\ 2-x, & 1<x\le 2 \end{cases}$;　　(2) $f(x)=\begin{cases} x, & -1\le x\le 1 \\ 0, & x<-1 或 x>1 \end{cases}$.

解: (1) 当 $0<x<1, 1<x<2$ 时, $f(x)$ 均为初等函数,连续.又

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x^2=1=f(1), \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 2-x=1=f(1),$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0=f(0), \lim_{x\to 2^-} f(x)=0=f(2)$$

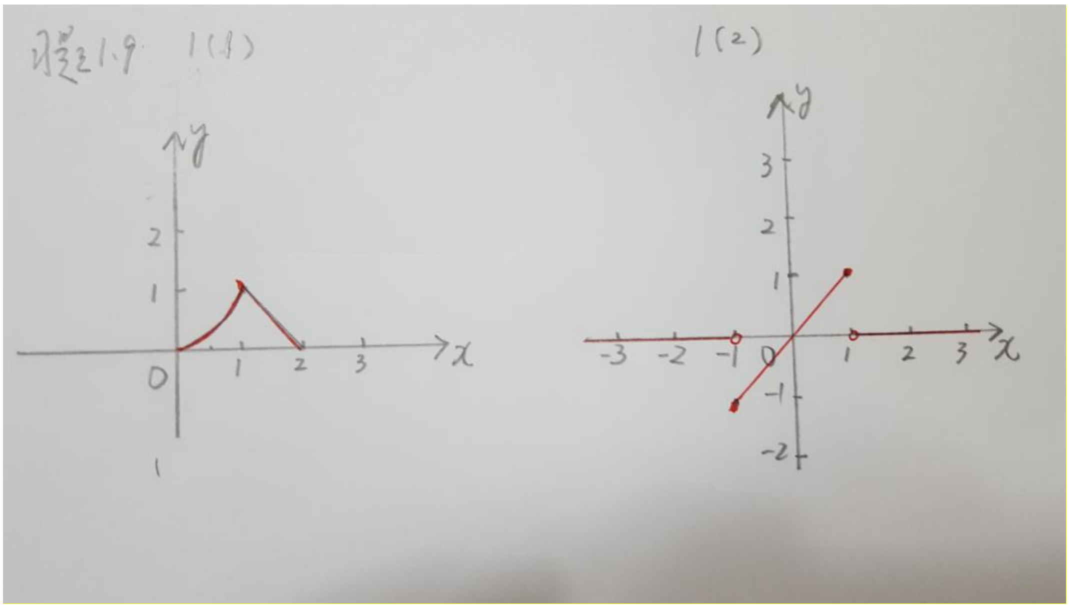
故 $f(x)$ 在[0,2]上连续.

(2) 当 $-1<x<1,\quad x<-1,\quad x>1$ 时, $f(x)$ 均为初等函数,连续. 又

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-} x=1=f(1), \lim_{x\to 1+} f(x)=0\ne f(1)$$

$$\lim_{x\to -1-} f(x)=0\ne f(-1), \lim_{x\to -1+} f(x)=-1=f(-1)$$

故 $f(x)$ 在除 1 和-1 两点外都连续.



2．考察下列函数在指定点处的连续性(如果是间断点,指出是第几类间断点;如果是可去间断点,则补充或者修改函数的定义使它成为函数的连续点):

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-x-2}, x=-1, x=2$;　　(2) $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}, x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$;

(3) $f(x)=\cos^2\dfrac{1}{x}, x=0$.

解: (1) $f(x)$ 在 $x=-1, x=2$ 处无定义, 且

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2-x-2}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+1)}=\frac{2}{3},\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2-x-2}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+1)}=\infty.$$

故 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点, $x=2$ 为 $f(x)$ 无穷间断点.

(2) $f(x)$ 在 $x=k\pi(k=0,\pm1,\cdots)$ 处无定义，且

$$当 k=0 时, \lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1，当 k\neq0 时 \lim_{x\to k\pi}\frac{x}{\sin x}=\infty.$$

故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点, $x=k\pi(k\neq0)$ 为 $f(x)$ 无穷间断点.

(3) $f(x)$ 在 $x=0$ 处无定义，且 $\cos^2\frac{1}{x}$ 当 $x\to0$ 时呈现震荡现象,极限不存在.故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的震荡间断点.

3．讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$ 的连续性,若有间断点判别其类型.

解：当 $|x|=1$ 时，$f(x)=0$;当 $|x|<1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}=1$;

当 $|x|>1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^{2n}}-1}{\frac{1}{x^{2n}}+1}=-1$,

且 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1\neq f(1), \lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-1\neq f(1)$; $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=1\neq f(-1), \lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=-1\neq f(-1)$

故 $f(x)$ 在除-1,1 两点外均连续，$x=1,-1$ 是其跳跃间断点.

4.求函数 $y=\ln(x^2-3x+2)$ 的连续区间.

解：$y=\ln(x^2-3x+2)$ 在 $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ 内有定义,由初等函数的连续性,函数的连续区间为 $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

5.求函数 $f(x)=\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续区间,并计算 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-3}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to2}f(x)$.

解：$f(x)=\frac{(x+1)(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-2)}$ 在 $x=-3, x=2$ 处无定义,有

$$\lim_{x\to-3}f(x)=-\frac{8}{5}, \lim_{x\to2}f(x)=\infty, \lim_{x\to0}f(x)=\frac{1}{2},$$

所以 $f(x)$ 的连续区间为 $(-\infty,-3)\cup(-3,2)\cup(2,+\infty)$.

6．求下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{3x^2+2x+1}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}}(\tan 2x)^3$;　　(3) $\lim\limits_{x\to0}\ln\frac{\sin x}{x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$;　　(5) $\lim\limits_{x\to0^+}\sin(\arctan\frac{1}{x})$;　　(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$;

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{\frac{x}{3}}$;　　(8) $\lim\limits_{x\to0}(1+3\sin x)^{\frac{1}{x}}$;　　(9) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x+2})^{2x}$.

解: (1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{3x^2+2x+1}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(3x^2+2x+1)}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}}(\tan 2x)^3=(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}}\tan 2x)^3=1$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\frac{\sin x}{x}=\ln\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=1$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0+}\sin(\arctan\frac{1}{x})=\sin(\lim\limits_{x\to 0+}\arctan\frac{1}{x})=\sin\frac{\pi}{2}=1$.

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=1$.

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{\frac{x}{3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+\frac{2}{x})^{\frac{x}{2}}\right]^{\frac{2}{3}}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{\frac{x}{2}}\right]^{\frac{2}{3}}=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}$.

或 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{\frac{x}{3}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{3}\ln(1+\frac{2}{x})}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{3}\cdot\frac{2}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}$.

(8) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\sin x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+3\sin x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x}{x}}=\mathrm{e}^3$.

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x+2})^{2x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}2x\ln(1+\frac{1}{x+2})}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x+2}}=\mathrm{e}^2$.

(B)

1．确定常数 a 使得下列函数在点 $x=0$ 时连续:

(1) $f(x)=\begin{cases}\frac{\tan ax}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$;　　(2) $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$.

解: (1) 当 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan ax}{x}=a=2=f(0)$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 时连续.故 $a=2$.

(2) 当 $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=0=a=f(0)$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 时连续.故 $a=0$.

2．证明方程 $x+e^x=0$ 在区间 $(-1,1)$ 内至少有一个根.

证: 令 $f(x)=x+\mathrm{e}^x,\ x\in[-1,1]$，显然 $f(x)$ 在[-1,1]上连续,且

$$f(-1)=-1+\mathrm{e}^{-1}<0,\ f(1)=1+\mathrm{e}>0,$$

由零点定义知, $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内至少有一个根.

3．证明方程 $x=a\sin x+b(a>0,b>0)$ 至少有一不超过 $a+b$ 的正根.

证: 令 $f(x)=a\sin x+b-x,\ x\in[0,a+b]$,则 $f(x)$ 在 $[0,a+b]$ 上连续,且

$$f(0)=b>0\,,\ f(a+b)=a\sin(a+b)+b-(a+b)=a[\sin(a+b)-1]$$

若 $\sin(a+b)=1$,取 $\xi=a+b$，有 $f(\xi)=0$；

若 $\sin(a+b)\neq1$, $f(a+b)=a[\sin(a+b)-1]<0$,由零点定理，$\exists\xi\in(0,a+b)$,使得 $f(\xi)=0$ 综上所述，对函数 $f(x)$,总 $\exists\xi\in[0,a+b]$，使得 $f(\xi)=0$,即方程 $x=a\sin x+b(a>0,b>0)$ 至少有一不超过 $a+b$ 的正根.

4．设 $f(x)$, $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)<g(a)$, $f(b)>g(b)$.证明:在 (a,b) 内至少有一点 ξ ,使得 $f(\xi)=g(\xi)$.

证: 令 $\varphi(x)=f(x)-g(x),\ x\in[a,b]$，则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且

$$\varphi(a)=f(a)-g(a)<0,\varphi(b)=f(b)-g(b)>0\,,$$

由零点定理，$\exists\xi\in[a,b]$，使得 $\varphi(\xi)=0$.

5．设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b(n\geq3)$.证明:在 $[x_1,x_n]$ 上至少有一点 ξ ,使得 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

证:因为 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上存在最大值、最小值,记为 M,m，不妨设 $f(c)=M,\ f(d)=m$，其中 $c,d\in[x_1,x_n]$.

(1) 若 $M=m$,结论显然成立.

(2) 若 $M\neq m$,对 $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，有 $nm\leq f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\leq nM$,即

$$m\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\leq M\,.$$

令 $\varphi(x)=f(x)-\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$,则

$$\varphi(c)=f(c)-\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n},\varphi(d)=f(d)-\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\,,$$

若 $\varphi(c)$ 或 $\varphi(d)$ 为零，则取 $\xi=c$ 或 $\xi=d$,结论成立;

若 $\varphi(c)$, $\varphi(d)$ 都不为零,则 $\varphi(c)<0,\varphi(d)>0$,由零点定理: $\exists\xi\in(x_1,x_n)$,使得 $\varphi(\xi)=0$.综上所述 $\exists\xi\in[x_1,x_n]$，使得 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

总 习 题 一

(A)

1.选择题

(1)下列关系式中(　　)是初等函数.

(A) $y=(\sin x)^x$　　　　(B) $y=\operatorname{sgn} x$

(C) $f(x)=\begin{cases}2x, & x<1\\ 3, & x>1\end{cases}$　　　　(D) $y=\arcsin(2+x^2)$

解: 答案 A. 因为 $y=(\sin x)^x$ 是由 $y=e^u, u=x\ln\sin x$ 复合而成, 是初等函数.

(2)设函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,1)$,则函数 $f(\sqrt{1-x^2})$ 的定义域是(　　).

(A) $\{x|x\neq -1,0,1\}$　　　　(B) $\{x|-1<x<1\}$ $\{x|-1<x<1\}$

(C) $\{x|-1<x<1, 且x\neq 0\}$　　　　(D) $\{x|-1\le x\le 1, 且x\neq 0\}$

解: 答案 C.解不等式 $0<\sqrt{1-x^2}<1$, 且 $1-x^2\ge 0$ 可得.

(3)若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ (a 为常数),则以下结论正确的是(　　).

(A)函数 $f(x)$ 在点 x_0 有定义　　　　(B) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

(C) $f(x_0)=a$　　　　(D)函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续

解: 答案 B.因为(A)(C)(D)反例如下: $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 处无定义,但是极限存在为 1.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ 的值为(　　).

(A)1　　　　(B) ∞　　　　(C) 不存在　　　　(D)0

解: 答案 D. 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

(5)当 $x\to 0$ 时,下列哪一个无穷小与 x^3 同阶(　　).

(A) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}$　　　　(B) $\sqrt{1+x^3}-1$　　　　(C) $x^3+0.0001x^2$　　　　(D) $\sqrt{\tan x}$

解: 答案 B. 因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^3}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^3}{2}}{x^3}=\dfrac{1}{2}$.

(6)设 $f(x)=2x\ln(1-x),\ g(x)=\arcsin x^2$,则当$x\to 0$时 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的(　　).

(A)等价无穷小　(B)同阶但非等价无穷小　(C)高阶无穷小　(D)低阶无穷小

解: 答案 B. 因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\ln(1-x)}{\arcsin x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x(-x)}{x^2}=-2$.

(7)函数 $f(x)=x\sin x$ (　　).

(A)当$x\to\infty$时为无穷大　　(B)当$x\to\infty$时有极限

(C)在$(-\infty,+\infty)$内无界　　(D)在$(-\infty,+\infty)$内有界

解: 答案 C. 因为$\forall M>0,\exists x_0=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\in(-\infty,+\infty)$, 其中$k=[M]+1$,使得

$$|x_0\sin x_0|=|(2k\pi+\frac{\pi}{2})\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2})|=2k\pi+\frac{\pi}{2}>M,$$

故 $f(x)=x\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$, 内无界.

(8)当$x\to 0$时,$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是$x\sin x^n$的同阶无穷小,则n等于(　　).

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

解: 答案 C. 因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\ln(1+x^2)}{x\sin x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}x^2}{x^4}=\dfrac{1}{2}$

(9)下列运算过程完全正确的是(　　).

(A) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}x}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)}=\infty$　　(B) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0$

(C) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$

解: 答案 D. 因为(A)中由于$\lim\limits_{x\to 0}x^2-1=0$,不能使用商的极限运算法则.

(B)中$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在,不能使用乘积的极限运算法则,而应使用无穷小和有界量的乘积为无穷小来计算.

(C)中$\dfrac{1}{x}\to\infty$当 x 趋于 0 时,此时不能使用重要极限来求.

(10)函数 $f(x)=\dfrac{\ln|1+x|}{x(x^2-1)}$ 的无穷间断点个数是(　　).

(A)0　　　　(B)1　　　　(C)2　　　　(D)3

解: 答案 C.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x(x^2-1)}=-1$不是无穷间断点.

$\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{\ln(1+x)}{x(x^2-1)}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -1+}\dfrac{\ln(1+x)}{x(x^2-1)}=-\infty$ 是无穷间断点.

(11)若 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=k_1$, $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=k_2$, 其中 k_1,k_2 为常数,则点 $x=a$ 不可能是 $f(x)$ 的(　　).

(A)可去间断点　　(B)跳跃间断点　　(C)连续点　　(D)无穷间断点

解: 答案 D.若是 $f(x)$ 的无穷间断点,则在 a 点的左右极限至少有一个为无穷大,与已知矛盾.

(12)设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{1/x}-1}{2^{1/x}+1}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$,则点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的(　　).

(A)可去间断点　　(B)跳跃间断点　　(C)无穷间断点　　(D)连续点

解: 答案 B. 因为 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=1,\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=-1$.

(13)如果 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续且无零点,但有使 $f(x)$ 取正值的点,则 $f(x)$ 在$[a,b]$上(　　).

(A)可取正值也可取负值　　(B)恒为正　　(C)恒为负　　(D)非负

解: 答案 B.

若$\exists x_0\in[a,b]$,有 $f(x_0)<0$,而已知$\exists x_1\in[a,b]$,有 $f(x_1)>0$, 在$[x_0,x_1]$上使用零点定理存在

$\exists\zeta\in(x_0,x_1)\subset[a,b]$,有 $f(\zeta)=0$,这与已知无零点矛盾.

2．填空题

(1)函数 $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{3-2x}{5}$ 的定义域为________________.

解: 解不等式$\begin{cases}3-x\geq 0\\ -1\leq\dfrac{3-2x}{5}\leq 1\end{cases}$可得 $-1\leq x\leq 3$，即定义域为$[-1,3]$.

(2)设函数 $f(x)=\begin{cases}0, & |x|\le 1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$________ .

解: 由 $f(x)$ 定义可知在 R 上$|f(x)|\le 1$, 则 $f[f(x)]=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}=$____________.

解: $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$.

(4)已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^{\alpha}}=\dfrac{1}{2}$,则 $\alpha=$______.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^{\alpha}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^{\alpha}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(\frac{1}{2}x^2\right)}{x^{\alpha}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}x^{3-\alpha}=\dfrac{1}{2}$,则 $\alpha=3$.

(5)如果 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}, & x>0,\\ x+a, & x\le 0,\end{cases}$ 在点 $x=0$ 连续,则 a 的值为___________.

解: 由连续定义 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\dfrac{1}{2}=a=f(0)=\lim\limits_{x\to 0+}(x+a)$, 即 $a=\dfrac{1}{2}$.

(6)函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-3}{x(x^2-1)}$ 的间断点个数是________.

解: 因为函数在 $x=-1,0$ 的邻域内无定义,所以 $x=-1,0$ 不是函数的间断点;函数在 $x=1$ 的邻域内有定义但是 $f(1)$ 不存在,所以 $x=1$ 是函数的间断点,因此间断点的个数是 1.

(7)如果 $x\to 0$ 时,无穷小 $1-\cos x$ 与 $a\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)^2$ 等价,则 $a=$_________.

解: 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{a(\sin\frac{x}{2})^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{a(\frac{x}{2})^2}=\dfrac{2}{a}=1$, 故 $a=2$

(8)设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{(\arcsin x)^2}, & x>0,\\ x+a, & x\le 0,\end{cases}$ 在点 $x=0$ 连续,则 a 的值为______.

解: 由连续定义 $\lim\limits_{x\to 0-}(x+a)=a=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{(\arcsin x)^2}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\frac{-x^2}{2}}{(x)^2}=-\dfrac{1}{2}=a=f(0)$,则 $a=-\dfrac{1}{2}$.

(9) $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$ 的____________间断点.

解:因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=0, \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=1$,所以 $x=0$ 为跳跃间断点.

(10)已知 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+kx-3}{x+2}=a$, 则常数 k =_________, a=________.

解: $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+kx-3)=0$, 即 $4-2k-3=0, k=\dfrac{1}{2}$,

$$a=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+\frac{1}{2}x-3}{x+2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(2x-3)}{x+2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to -2}(2x-3)=-\frac{7}{2}.$$

3. 求下列数列的极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2})$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{3}{n+1})^n$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n+1}{n+4})^n$.

解: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots\dfrac{n}{n^2})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{3}{n+1})^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{3}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{3}}\right]^{\frac{3n}{n+1}}=\mathrm{e}^3$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n+1}{n+4})^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-3}{n+4}\right)^{\frac{n+4}{-3}}\right]^{\frac{-3n}{n+4}}=\mathrm{e}^{-3}$.

4．求下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{\mathrm{e}^{2x}-1}$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+2x}{1+2x}\right)^{x+1}$; (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{(\mathrm{e}^x-1)\ln(1+x)}$;

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$; (5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cos x}{x^2}\right)$; (6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\arctan 2x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2\cos x}\right)$; (8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)^x}{\cos x-1}$.

解: (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{e^{2x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-x}{2}}{2x}=-\dfrac{1}{4}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{3+2x}{1+2x})^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{1+2x}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right]^{\frac{2(x+1)}{2x+1}}=\mathrm{e}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{(e^x-1)\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{1}{2}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cos x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\arctan 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2\cos x}\right)=-\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2\cos x}\right)=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$.

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)^x}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{-\frac{x^2}{2}}=-2$.

(B)

1.求下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\cot x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0+}(1+x)^{\csc x}$; (3) $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\cdot\left(\dfrac{1}{\sin x}-\cot x\right)$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\ln(1+2x^3)}$; (5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{(1-\cos x)\ln(1-x)}$; (6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 x\right)^{\tan x}$.

解: (1) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1+x}{1-x})^{\cot x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{2x}}\right]^{\frac{2x}{(1-x)\tan x}}=\mathrm{e}^2$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\csc x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x)}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{x}{\sin x}}=\mathrm{e}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\cdot\left(\dfrac{1}{\sin x}-\cot x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{\sin x}\cdot\left(\dfrac{1-\cos x}{\sin x}\right)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2 x}=\dfrac{1}{2}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\ln(1+2x^3)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{2x^3}=\dfrac{1}{4}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{(1-\cos x)\ln(1-x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{(1-\cos x)\cdot(-x)}=-1$.

(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 x\right)^{\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{2\tan x\ln\sin x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\frac{2\sin x\ln(1+\sin x-1)}{\cos x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\frac{2(\sin x-1)}{\cos x}}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\frac{2(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})^2}{(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\frac{2(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}}=\mathrm{e}^0=1$.

2.求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$

解：由不等式 $\dfrac{k}{n^2+n+n}\le\dfrac{k}{n^2+n+k}\le\dfrac{k}{n^2+n+1},(k=1,2,\cdots,n)$,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+n}\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+1},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+n+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n+n}=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n+1}=\dfrac{1}{2}$,

由夹逼准则，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=\dfrac{1}{2}$.

3.求常数 a,b 的值,使 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{x-1}-\dfrac{b}{x^2-1}\right)=1$.

解：由 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{x-1}-\dfrac{b}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax+a-b}{x^2-1}=1$ 可知,$\lim\limits_{x\to 1}(ax+a-b)=0$，即 $b=2a$.

将上式代入可得 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax+a-b}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax-a}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a}{x+1}=1$，故 $\dfrac{a}{2}=1,a=2,b=4$.

4.求常数 a,b 的值,使 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+3}{x-1}=b$.

解：由极限存在可知$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+ax+3)=0$,即$4+a=0, a=-4$,将$a=-4$代入原式

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}=-2=b$.故$a=-4, b=-2$.

5.求a的值,使函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan 2x+e^{2ax}-1}{\sin x}, & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$在$x=0$点连续.

解：由连续定义,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x+\mathrm{e}^{2ax}-1}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{2ax}-1}{\sin x}=2+2a=a=f(0)$,

故$a=-2$.

6.求a的值时,使下列函数在$x=0$处连续.

(1) $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\sin x, & x>0,\\ a+x^2, & x\leq 0,\end{cases}$;　　(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$

解:因为$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\sin x\right)=0+1=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-}(a+x^2)=a$, $f(0)=a$,由连续定义得$a=1$.

7.判断函数$f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$在$x=0$的间断点类型,并说明理由.

解：$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{-x}=-1$,故$x=0$是$f(x)$的跳跃间断点.

8.讨论下列函数在$x=0$处的连续性:

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

解: (1)当$x\neq 0$时，$\sin\dfrac{1}{x}$为有界函数，则$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，故$f(x)$在$x=0$处连续.

(2) 当$x\neq 0$时，$\arctan\dfrac{1}{x}$为有界函数，则$\lim\limits_{x\to 0}x\arctan\dfrac{1}{x}=0=f(0)$,故$f(x)$在$x=0$处连续.

9. 证明方程$x^5+5x+1=0$在区间$(-1,0)$内有实根.

证明：令$f(x)=x^5+5x+1$,在[-1,0]上连续,且

$f(-1)=-5<0, f(0)=1>0$,由零点定理$\exists\zeta\in(-1,0)$,使得$f(\zeta)=0$.

10.证明:方程$x^7+x+1=0$在区间$(-1,0)$至少有一个实根.

证: 令 $f(x)=x^7+x+1$,则 $f(x)$ 在$[-1,0]$上连续,且 $f(-1)=-1<0, f(0)=1>0$,由零点定理 $\exists\zeta\in(-1,0)$, 使得 $f(\zeta)=0$,即方程 $x^7+x+1=0$ 在区间$(-1,0)$ 至少有一个实根.

11. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且恒为正,证明:对任意的 $x_1, x_2\in(a,b)$, $x_1<$,必存在点 $\xi\in[x_1,x_2]$,使得 $f^2(\xi)=f(x_1)f(x_2)$.

证: 令$\varphi(x)=f^2(x)-f(x_1)f(x_2)$,则$\varphi(x)$ 在$[x_1,x_n]$上连续,且

$$\varphi(x_1)=f(x_1)[f(x_1)-f(x_2)],\varphi(x_2)=f(x_2)[f(x_2)-f(x_1)]$$

若 $f(x_1)-f(x_2)=0$,取$\xi=x_1$或$\xi=x_2$,结论成立

若 $f(x_1)-f(x_2)\neq 0$, 而且 $f(x)$ 恒正,则 $\varphi(x_1)\varphi(x_2)<0$,由零点定理, $\exists\xi\in(x_1,x_n)$,使得 $f(\xi)=0$,

综上所述, $\exists\xi\in(x_1,x_n)$,使得 $f^2(\xi)=f(x_1)f(x_2)$.

12.证明:方程$2x+\cos 2x-2=0$至少有一个小于π的正根.

解: 令 $f(x)=2x+\cos 2x-2$,则 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上连续,且 $f(0)=-1<0, f(\pi)=2\pi-1>0$,由零点定理$\exists\zeta\in(0,\pi)$, 使得 $f(\zeta)=0$,即方程$2x+\cos 2x-2=0$至少有一个小于π的正根.