24-25-1 学期高等数学 A1 期末练习卷

一．选择题:

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微的(　　).

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

2. 设 $f(x)=2x\ln(1-x), g(x)=\arcsin x^2$, 则当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的(　　).

(A) 等价无穷小　　(B) 同阶但非等价无穷小

(C) 高阶无穷小　　(D) 低阶无穷小

3. 函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 的 n 阶麦克劳林公式中 x^3 项的系数为(　　).

(A) $\frac{1}{3}$　　(B) $-\frac{1}{3}$　　(C) $\frac{1}{3!}$　　(D) $-\frac{1}{3!}$

4. 关于函数 $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$ 的凹凸区间以及拐点叙述正确的是(　　).

(A) 函数图像在[-1,1]上是凸的　　(B) 函数图像在 $[0,+\infty)$ 上是凹的

(C) 拐点为(0，0)　　(D) 拐点为 $(\pm 1,\ln 2)$

5. 反常积分 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=$ (　　).

(A) 0　　(B) $\ln 2$　　(C) 发散　　(D) $-\ln 2$.

6. 通解为 $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}-x+\frac{1}{3}$ 的微分方程是 (　　).

(A) $y''+2y'-3y=3x+1$　　(B) $y''+2y'-3y=(3x+1)e^{x}$

(C) $y''-2y'-3y=3x+1$　　(D) $y''-2y'-3y=(3x+1)e^{2x}$

7. 心形线 $\rho=2(1+\cos\theta)$ 所围的图形面积为(　　).

(A) $4\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2d\theta$　　(B) $8\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2d\theta$

(C) $4\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2d\theta$　　(D) $\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2d\theta$

8. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 点(　　).

(A) 不连续　　(B) 连续但不可导

(C) 连续但不可微　　(D) 连续并且可导

9. 设 $f(x)=1-\cos\sqrt{x}, g(x)=\arcsin x$, 则当 $x\to 0^{+}$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的（　）.

(A) 等价无穷小　　(B) 同阶但非等价无穷小

(C) 高阶无穷小　　(D) 低阶无穷小

10. 函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 是(　　).

(A)可去间断点　　(B) 跳跃间断点

(C)无穷间断点　　(D) 震荡间断点

11. 关于函数 $f(x)=\dfrac{2x}{3}-x^{2/3}$ 的叙述正确的是(　　).

(A) 函数在 $x=0$ 时取得极大值，在 $x=1$ 时取得极小值

(B) 函数在 $x=0$ 时取得极小值，在 $x=1$ 时取得极大值

(C) 函数在 $x=0$ 不是极值点，在 $x=1$ 时取得极小值

(D) 函数在 $x=0$ 不是极值点，在 $x=1$ 时取得极大值

12. 反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x}{1+x^{2}}dx=$ （　　）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 发散　　(D) -1

13. 二阶常微分方程 $y''-2y'+y=1$ 的通解是(　　).

(A) $(C_1+C_2x)e^{x}+1$　　(B) $(C_1+C_2x)e^{x}-1$

(C) $(C_1+C_2x)e^{-x}+1$　　(D) $(C_1+C_2x)e^{-x}-1$

14. 设 $I_1=\int_0^1 e^{x^2}dx$, $I_2=\int_0^1 e^{x^3}dx$,则（　　）.

(A) $I_1>I_2$　　(B) $I_1=I_2$　　(C) $I_1<I_2$　　(D) 无法确定

15. $f(x)=|x|$在$x=0$处(　　).

(A) 不连续　　(B) 连续并且可导

(C) 连续但不可微　　(D) 无法判断

16. 设 $f(x)=e^{x}-1, g(x)=1-\cos x$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的（　　）.

(A) 等价无穷小　　(B) 同阶但非等价无穷小

(C) 高阶无穷小　　(D) 低阶无穷小

17. $\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x}+\frac{\sin 3x}{x})=($　　$)$.

(A) 4　　(B) 3　　(C) 2　　(D) -1

18. 设 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$，则点 $x=2$ 是 $f(x)$ 的（　　）.

(A) 连续点　(B) 可去间断点　(C) 跳跃间断点　(D) 无穷间断点

19. 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}xdx$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin xdx$，$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan xdx$，则下列关系正确的是(　　).

(A) $I_1>I_2>I_3$　　(B) $I_2>I_1>I_3$

(C) $I_3>I_1>I_2$　　(D) $I_3>I_2>I_1$

20. 二阶常微分方程 $y''+4y'+4y=1$ 的通解是(　　).

(A) $(C_1+C_2x)e^{-2x}+\frac{1}{4}$　　(B) $(C_1+C_2x)e^{-2x}-\frac{1}{4}$

(C) $(C_1+C_2x)e^{2x}+1$　　(D) $(C_1+C_2x)e^{2x}-1$

21. 下列等式中**不正确**的是（　　）.

(A) $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$　　(B) $d\int f(x)dx=f(x)dx$

(C) $\int f'(x)dx=f(x)+C$　　(D) $\int df(x)=f(x)$

二. 填空题:

1. 若 $xy=e^{x+y}$ 确定隐函数 $y=y(x)$，则 $dy=$ ______________。

2. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\dfrac{\ln x}{x}$，则 $\int f'(x)dx=$ ________________________。

3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x\sqrt{1-x^2}+\cos^2 x)dx=$ __________________ .

4. 设 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$, 且 $\varphi(x)\ge 0$, 则 $\varphi(x)=$ ______________.

5. 若 $\int f'(x)dx=2x^2+e^{3x}+C$, 且 $f(0)=2$, 则 $f(x)=$ ________________.

6. 曲线$\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}t^3-t \\ y=t^2+2 \end{cases}$ $(0\le t\le 3)$的弧长$s=$________.

7. 若$\int_0^x f(t)dt=\dfrac{1}{2}f(x)-1$，$f(x)$连续，则$f(x)=$________.

8. 微分方程$y^{(4)}-2y'''+y''=0$的通解为________.

9. 函数$\boldsymbol{y=\arcsin(x^2-1)}$的定义域是________.

10. 利用函数的奇偶性，计算定积分$\boldsymbol{\int_{-1}^{1}(1+x^5)e^{|x|}dx=}$________.

11. 计算$\boldsymbol{y=\int_0^{x^2}\sin t^2dt}$的微分$\boldsymbol{dy=}$________.

12. 若$\boldsymbol{f(x)}$的一个原函数是$\boldsymbol{\sin 2x}$，则$\boldsymbol{\int xf'(x)dx=}$________.

13. 曲线$\begin{cases} \boldsymbol{x=\arctan t} \\ \boldsymbol{y=\ln(1+t^2)} \end{cases}$在$\boldsymbol{t=1}$时的切线方程是________.

14. 一阶线性常微分方程$\boldsymbol{xy'=-2y+\dfrac{x}{1+x^2}}$的通解为________.

15. 函数$y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{3-2x}{5}$的定义域是________.

16. 设$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{(\sin x)^2}, & x>0, \\ x+a, & x\le 0, \end{cases}$在点$x=0$连续,则$a$的值为________.

17. 反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=$________.

18. 设$f(x)$在点$x=1$处可导，则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-f(1-2h)}{h}=$________.

19. $\dfrac{d}{dx}\int_1^x e^{t^2}dt=$________.

20. $\int xe^{x^2+1}\mathrm{d}x=$________.

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x=$________.

三．计算题:

1. 设 $x-y^2+\sin(xy)=0$，求 dy .

2. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt}{x^2}$.

3. 求由参数方程 $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ 所确定的函数的一阶和二阶导数.

4. 计算 $\int\dfrac{(1+\ln x)^{2021}}{x}dx$.

5. 计算 $\int_1^{\sqrt{3}}\dfrac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

6. 讨论反常积分 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx$（其中 a 为常数）的敛散性.

7. 求微分方程 $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ 满足条件 $y|_{x=1}=2$ 的特解.

8. 设 $\boldsymbol{x^3+y^3=e^{x+y}}$，求 $\boldsymbol{y'}$.

9. 计算 $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}$.

10. 计算 $\boldsymbol{\int \sin^3 x\, dx}$.

11. 计算 $\boldsymbol{\int_1^4 x\ln x\, dx}$.

12. 求函数 $\boldsymbol{f(x)=(x^2-4x+5)e^x}$ 的凹凸区间和拐点.

13. 求微分方程 $\boldsymbol{ydx+(x^2+x)dy=0}$ 满足初始条件 $\boldsymbol{y|_{x=1}=2}$ 的解.

14. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(x+1)}]$.

15. 求由方程 $y=1-xe^y$ 所确定的隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 和 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

16. 求函数$f(x)=xe^{-2x}$图像的凹凸区间和拐点.

17. 求不定积分 $\int x\cos x\,dx$.

18. 求$\int_{-1}^{2}f(x)dx$，其中 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+x^2}, x\le 1, \\ e^x+1, x>1. \end{cases}$

19. 求微分方程 $y'+2\dfrac{y}{x}=\ln x$ 满足初始条件$y(1)=-\frac{1}{9}$的解.

四．应用题

1. 求由曲线 $y=2x^2(x\geq 0)$, $y-x=1$ 及 y 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积.
2. 求 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x,(x>0)$ 的单调区间；
   并估计积分 $\int_0^1[\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x]dx$ 的取值范围.
3. 求曲线 $\boldsymbol{x=y^2-3,y=-\frac{1}{2}x}$ 所围区域的面积. （把所围区域画出来）
4. 求由 $\boldsymbol{x=y^2,y=x^2}$ 所围成的平面图形绕 $\boldsymbol{x}$ 轴旋转一周所成的旋转体的体积.
5. (1) 计算由曲线 $y=x$ 和 $y=x^2$ 所围成的平面图形的面积；
   (2) 计算由 (1) 中所围平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.
6. 设曲线方程为 $\begin{cases} x=t+2+sint \\ y=t+cost \end{cases}$, 求此曲线在 $t=0$ 处的切线方程和法线方程**.**

五．证明题

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导，且 $f(0)=2f(1)$，证明 $\exists\xi\in(0,1)$，
   使得 $(\xi^2+1)f'(\xi)+2\xi f(\xi)=0$.
2. 证明恒等式： $\boldsymbol{\arcsin x+\arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\frac{\pi}{2},\quad 0<x\leq 1}$.
3. 设 $a_0+\frac{a_1}{2}+......+\frac{a_n}{n+1}=0$，证明多项式 $f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个零点.