

## 22-23-1 学期高等数学 A1 期末练习卷

## 一. 选择题

1. 下列各对函数中, 表示同一个函数的是 ( ).

(A)  $y = |x|$  和  $y = \sqrt{x^2}$  (B)  $y = \ln(x^2)$  和  $y = 2\ln x$

(C)  $y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$  和  $y = \sin x$  (D)  $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$  和  $y = x - 1$

2. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}}, & x > 0, \\ x^2 g(x), & x \leq 0 \end{cases}$  其中  $g(x)$  有界, 则  $f(x)$  在点  $x = 0$  处 ( )

- (A) 极限不存在 (B) 极限存在但不连续  
(C) 连续但不可导 (D) 可导

3. 若  $x_0$  为函数  $y = f(x)$  的极值点, 则下列命题中正确的是 ( ).

- (A)  $f'(x_0) = 0$  (B)  $f'(x_0) \neq 0$   
(C)  $f'(x_0)$  不存在 (D)  $f'(x_0) = 0$  或  $f'(x_0)$  不存在

4. 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 下列哪一个无穷小与  $x^3$  同阶 ( ).

(A)  $\sqrt{x^5} + \sqrt{x}$  (B)  $x^3 + 0.01x$  (C)  $\sqrt{1 + x^3} - 1$  (D)  $\sqrt{\sin x}$

5. 若  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , 则  $\int f(2x+1)dx = ( )$ .

- (A)  $2F(2x+1) + C$  (B)  $\frac{1}{2}F(2x+1) + C$   
(C)  $\frac{1}{2}F(x) + C$  (D)  $2F(x) + C$

6. 设  $I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} \cos^4 x dx$ ,  $I_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^4 x) dx$ ,

$I_3 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 - \cos^4 x) dx$ , 则 ( ).

- (A)  $I_2 < I_3 < I_1$  (B)  $I_3 < I_1 < I_2$  (C)  $I_2 < I_1 < I_3$  (D)  $I_1 < I_3 < I_2$

7.

8. 下列说法正确的是( )。
- (A)收敛数列必有界, 发散数列必无界  
(B)若点  $x_0$  是函数的驻点, 则点  $x_0$  一定是该函数的极值点  
(C)若函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处可导, 则函数必在此点连续  
(D)若数列  $\{a_n b_n\}$  收敛, 则  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  或者同时收敛, 或者同时发散
9. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\cos x - 1$  与  $\frac{x^2}{2}$  是( )。
- (A) 低阶无穷小量 (B) 同阶但不是等价无穷小量  
(C) 等价无穷小量 (D) 高阶无穷小量
10. 设函数  $f(x) = x \sin x$ , 则  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$  等于( )。
- (A)  $\frac{1}{2}$  (B) 1 (C) -1 (D)  $\frac{\pi}{2}$
11. 设  $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$  则  $f(x)$  在  $x = 0$  处( )。
- (A) 不连续 (B) 连续但不可导  
(C) 可导但不连续 (D) 连续且可导
12. 二阶常微分方程  $y'' - 3y' + 2y = 0$  通解的形式正确的是( )。
- (A)  $y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$  (B)  $y = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$   
(C)  $y = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$  (D)  $y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$
13. 设  $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx$ ,  $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ , 则下列关系正确的是( )。
- (A)  $I_1 > I_2$  (B) 不确定 (C)  $I_1 < I_2$  (D)  $I_1 = I_2$
- 14.
15. 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处可导是函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处可微的( )。
- (A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既非充分也非必要条件
16. 设  $f(x) = 2x \ln(1-x)$ ,  $g(x) = \arcsin x^2$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x)$  是  $g(x)$  的( )。
- (A) 等价无穷小 (B) 同阶但非等价无穷小  
(C) 高阶无穷小 (D) 低阶无穷小
17. 函数  $f(x) = \ln(1+x)$  的  $n$  阶麦克劳林公式中  $x^3$  项的系数为( )。
- (A)  $\frac{1}{3}$  (B)  $-\frac{1}{3}$  (C)  $\frac{1}{3!}$  (D)  $-\frac{1}{3!}$

18. 关于函数  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$  的凹凸区间以及拐点叙述正确的是( ).

- (A) 函数图像在  $[-1, 1]$  上是凸的      (B) 函数图像在  $[0, +\infty)$  上是凹的  
(C) 拐点为  $(0, 0)$       (D) 拐点为  $(\pm 1, \ln 2)$

19. 反常积分  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = ( \quad )$ .

- (A) 0      (B)  $\ln 2$       (C) 发散      (D)  $-\ln 2$ .

20. 通解为  $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - x + \frac{1}{3}$  的微分方程是 ( ).

- (A)  $y'' + 2y' - 3y = 3x + 1$       (B)  $y'' + 2y' - 3y = (3x + 1)e^x$   
(C)  $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$       (D)  $y'' - 2y' - 3y = (3x + 1)e^{2x}$

21. 心形线  $\rho = 2(1 + \cos \theta)$  所围的图形面积为( ).

- (A)  $4 \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^2 d\theta$       (B)  $8 \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^2 d\theta$   
(C)  $4 \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta$       (D)  $\int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta$

## 二. 填空题

1. 函数  $f(x) = x - \int_0^x \frac{1}{1+t} dt$  在区间  $[0, +\infty)$  上的单调性是 \_\_\_\_\_.

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x} =$  \_\_\_\_\_.

3. 已知  $f(x) = x(x-1)(x-2)L(x-2019)$ , 则  $f'(0) =$  \_\_\_\_\_.

4. 已知  $f(x) = \begin{cases} 1 + \ln(1+2x), & x \leq 0, \\ a + be^x, & x > 0 \end{cases}$  在点  $x = 0$  处可导,

则  $a =$  \_\_\_\_\_,  $b =$  \_\_\_\_\_.

5. 曲线  $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$  在  $x \in [0, 8]$  的弧长  $s =$  \_\_\_\_\_.

6. 设  $\ln f(x) = \cos x$ , 则  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx =$  \_\_\_\_\_.

7. 瑕积分  $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$  \_\_\_\_\_. (选择收敛或发散)
8. 方程  $y'' + 10y' + 25y = 7xe^{-5x}$  的特解形式为 \_\_\_\_\_.
9.  $\int_{-1}^1 x[x^5 + (e^x - e^{-x})\sin x]dx =$  \_\_\_\_\_.
10. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x+1)}{x+1}, & x \neq -1, \\ 2k, & x = -1, \end{cases}$  在点  $x = -1$  处连续, 则  $k =$  \_\_\_\_\_.
11. 已知  $f'(3)=1$ , 则  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(3+2t) - f(3-t)}{t} =$  \_\_\_\_\_.
12. 若反常积分  $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^q} dx, (q > 0)$  是收敛的, 则  $q$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.
13. 若  $x \in [-1, 1]$ , 则  $\arcsin x + \arccos x =$  \_\_\_\_\_.
14. 若  $xy = e^{x+y}$  确定隐函数  $y = y(x)$ , 则  $dy =$  \_\_\_\_\_.
15. 设  $f(x)$  的一个原函数为  $\frac{\ln x}{x}$ , 则  $\int f'(x)dx =$  \_\_\_\_\_.
16.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x\sqrt{1-x^2} + \cos^2 x)dx =$  \_\_\_\_\_.
17. 设  $f(x) = e^{x^2}, f[\varphi(x)] = 1 - x$ , 且  $\varphi(x) \geq 0$ , 则  $\varphi(x) =$  \_\_\_\_\_.
18. 若  $\int f'(x)dx = 2x^2 + e^{3x} + C$ , 且  $f(0) = 2$ , 则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_.
19. 曲线  $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 - t \\ y = t^2 + 2 \end{cases} (0 \leq t \leq 3)$  的弧长  $s =$  \_\_\_\_\_.
20. 若  $\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{2}f(x) - 1$ ,  $f(x)$  连续, 则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_.
21. 微分方程  $y^{(4)} - 2y''' + y'' = 0$  的通解为 \_\_\_\_\_.

### 三. 计算题:

1. 计算不定积分  $\int x \ln(1+x^2) dx$ .
2. 设  $y = f(x)$  由方程  $y = \ln(x+y)$  所确定, 求函数  $y = f(x)$  的一阶和二阶导数.

3. 求由参数方程  $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = \ln(t+1) \end{cases}$  所表示的曲线  $y = y(x)$  在  $x = 3$  处的切线方程.
4. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} (1 - \cos \sqrt{t}) dt}{x^4}$ .
5. 求定积分  $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$ .
6. 求微分方程  $y' - y = e^{2x}$  的通解.
7. 计算广义积分  $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$ .
8. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$
9. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(1+2t^2) dt}{x^3}$ .
10. 求不定积分  $\int \arcsin x dx$ .
11. 求不定积分  $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$ .
12. 求定积分  $\int_0^1 e^{-\sqrt{x}} dx$ .
13. 设  $\begin{cases} x = t - \ln(1+t), \\ y = \ln(1+t^2), \end{cases}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .
14. 求常微分方程  $y' - \frac{3}{x}y = x$  的通解.
15. 设  $x - y^2 + \sin(xy) = 0$ , 求  $dy$ .
16. 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt}{x^2}$ .
17. 求由参数方程  $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$  所确定的函数的一阶和二阶导数.
18. 计算  $\int \frac{(1 + \ln x)^{2021}}{x} dx$ .
19. 计算  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$ .

20. 讨论反常积分  $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$  (其中  $a$  为常数) 的敛散性.

21. 求微分方程  $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$  满足条件  $y|_{x=1} = 2$  的特解.

#### 四. 应用题

1. 求函数  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$  在  $[-2, 4]$  上的最大值和最小值.

2. 计算由曲线  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  所围成的平面图形

(1) 绕  $x$  轴旋转而成的旋转体的体积  $V_1$

(2) 绕  $y$  轴旋转而成的旋转体的体积  $V_2$

3. 求由椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  所围成的图形绕  $x$  轴旋转一周所围成的旋转体 (称为旋转椭球体) 的体积.

4. 求曲线  $y = x^4 - 2x^3 + 1$  的拐点以及凹凸区间.

5. 求由曲线  $y = 2x^2 (x \geq 0)$ ,  $y - x = 1$  及  $y$  轴所围成的平面图形绕  $x$  轴旋转一周所成的旋转体的体积.

6. 求  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - x, (x > 0)$  的单调区间;

并估计积分  $\int_0^1 [\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - x] dx$  的取值范围.

#### 五. 证明题

1. 设  $b > a > 0$ , 求证:  $\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$ .

2. 设  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上连续, 在  $(1, 2)$  内可导,  $f(1) = f(2) = 0$ ,

证明: 存在  $\xi \in (1, 2)$ , 使得  $\frac{f(\xi)}{\xi} = 2020 f'(\xi)$ .

3. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续可导, 且  $f(0) = 2f(1)$ , 证明  $\exists \xi \in (0, 1)$ ,

使得  $(\xi^2 + 1)f'(\xi) + 2\xi f(\xi) = 0$ .