$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

这就是所求量 U 的积分表达式，这种方法通常叫元素法．

常考点　定积分所计算的是某函数改变量，如曲边梯形的面积是面积函数改变量，弧长是弧长函数改变量，所用方法是分割、近似、求和、取极限．

$$F(b)-F(a)\xlongequal{\text{总体改变量为局部改变量之和}}\sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-F(x_{i-1})]$$

$$\approx(\text{局部上用微分近似变量})\sum_{i=1}^{n}F'(x_i)\Delta x_i=\!=\!=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i$$

取极限从近似转化为精确，即

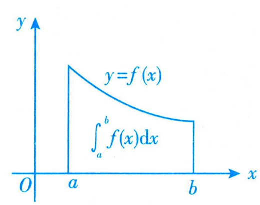
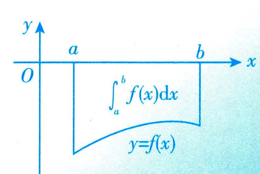
$$F(b)-F(a)=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\text{，其中 }\lambda=\max\Delta x_i.$$

第二节　定积分在几何学上的应用

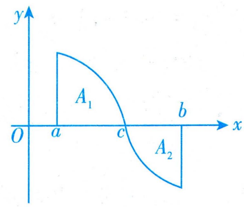
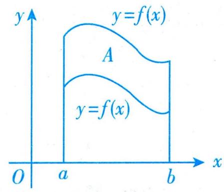
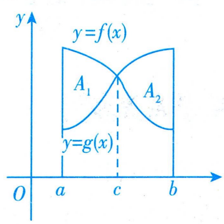
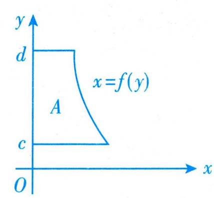
知识要点及常考点

1. 平面图形的面积

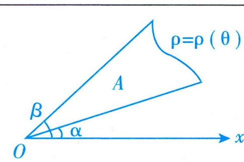
(1) 直角坐标形式

面积公式	图形
$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ $(f(x)\geqslant 0, a\leqslant x\leqslant b)$	
$A=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ $(f(x)\leqslant 0, a\leqslant x\leqslant b)$	

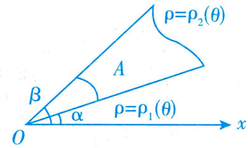
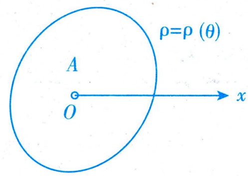
续表

面积公式	图形
$A=\int_a^b \lvert f(x)\rvert \mathrm{d}x$ $A=A_1+A_2$ $=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x-\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$	
$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$ $(f(x)\geqslant g(x),a\leqslant x\leqslant b)$	
$A=\int_a^b \lvert f(x)-g(x)\rvert \mathrm{d}x$ $A=A_1+A_2$ $=\int_a^c [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$ $+\int_c^b [g(x)-f(x)]\mathrm{d}x$	
$A=\int_c^d f(y)\mathrm{d}y$ $(f(y)\geqslant 0,c\leqslant y\leqslant d)$	

（2）极坐标形式

面积公式	图形
$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta$	

续表

面积公式	图形
$A=\dfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[\rho_2^2(\theta)-\rho_1^2(\theta)]\mathrm{d}\theta$	
$A=\dfrac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta$	

2. 立体体积

(1) 已知平行截面面积的立体体积

$$V=\int_a^b s(x)\mathrm{d}x$$

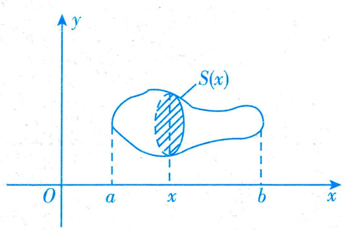


图 6-1

(2) 旋转体体积

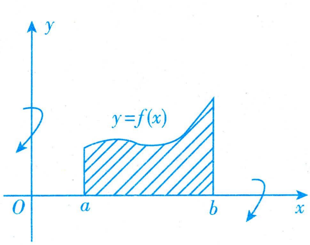


图 6-2

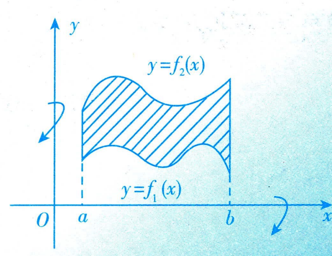


图 6-3

$$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \qquad V_x = \pi\int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)]\mathrm{d}x$$

$$V_y = 2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \qquad V_y = 2\pi\int_a^b x[f_2(x) - f_1(x)]\mathrm{d}x$$

易错点 ① 由曲线 $y = f(x)$ 及 $x = a, x = b$ 与 x 轴所围图形面积为 $A = \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$ 一定注意绝对值号.

② $y = f(x)$ 绕 x 轴和绕 y 轴时的旋转体体积公式不要混淆.

③ 弧长的极坐标和参数方程形式要记住,不要弄混.

3. 平面曲线的弧长

分类	公式
直角坐标	设 $y = f(x)$ 为光滑曲线(y 在$[a,b]$ 上连续),则在$[a,b]$ 段上弧长为 $s = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x$
极坐标	设 $\rho = \rho(\theta)$,在$[\alpha,\beta]$ 上连续,则曲线弧长为 $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta)+[\rho'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta$
参数方程	若光滑曲线由参数方程$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$组成,$t_1 \leqslant t \leqslant t_2$,则曲线弧长为 $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$

本节考研要求

掌握用定积分表达和计算一些几何量(平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积,平行截面面积为已知的立体体积)及函数的平均值.

题型、真题、方法

题型 1 求平面图形的面积

题型分析 画出平面图形的大致图形,特别是找出曲线与坐标轴或曲线之间的交点,根据条件选择用直角坐标系还是极坐标系.在直角坐标系下,还需根据图形的特征选择相应的积分变量及积分区域,然后写出面积的积分表达式进行计算.