第五章　定积分应用

习　题 5.2　定积分在几何上的应用

(A)

1.求由下列各组曲线所围图形的面积:

(1) $y=\cos x, y=0, x=0, x=\pi$；　　(2) $y^2=2x, y=x$；

(3) $x=y^2-3, y=-\dfrac{1}{2}x$；　　(4) $y=\dfrac{1}{x^2}, y=x, x=3$；

(5) $y=\ln x, y=\ln a, y=\ln b\ (0<a<b), x=0$；　(6) $y=\sin x, y=\cos x, x=0, x=\pi$.

解：(1)选 x 为积分变量,则面积

$$A=\int_0^{\pi}\left|\cos x\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=2 .$$

(2)两曲线的交点 $(0,0),(2,2)$，选 x 为积分变量,则面积

$$A=\int_0^2(\sqrt{2x}-x)dx=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^2=\frac{2}{3} .$$

(3)两曲线的交点 $(-2,1),(6,-3)$，选 y 为积分变量,则面积

$$A=\int_{-3}^{1}\left[-2y-(y^2-3)\right]dy=\left(-\frac{1}{3}y^3-y^2+3y\right)\Big|_{-3}^{1}=\frac{32}{3} .$$

(4)三曲线的交点 $(1,1),(3,3),\left(3,\dfrac{1}{9}\right)$，选 x 为积分变量,则面积

$$A=\int_1^3\left(x-\frac{1}{x^2}\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^3=\frac{10}{3} .$$

(5)四曲线的交点 $(a,\ln a),(b,\ln b),\left(0,\ln a\right),(0,\ln b)$，选 y 为积分变量,则面积

$$A=\int_{\ln a}^{\ln b}e^y dy=e^y\Big|_{\ln a}^{\ln b}=b-a .$$

(6) $y=\sin x, y=\cos x$ 的交点 $(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，选 x 为积分变量,则面积

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx=(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+(-\sin x-\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}=2\sqrt{2} .$$

2．求由抛物线 $y^2=4x$ 及其在点 $(1,2)$ 处的法线所围图形的面积.

解：在点 $(1,2)$ 处的切线斜率 $k\Big|_{(1,2)}=\left(2\sqrt{x}\right)'\Big|_{(1,2)}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Big|_{(1,2)}=1$，法线斜率为 -1，法线方程 $y-2=-(x-1)$， $y^2=4x$ 与法线的交点为 $(1,2),(9,-6)$.选 y 为积分变量,则面积

$$A=\int_{-6}^{2}\left[(3-y)-\frac{1}{4}y^2\right]dy=\left(-\frac{1}{12}y^3-\frac{1}{2}y^2+3y\right)\Big|_{-6}^{2}=\frac{64}{3} .$$

3．求由抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 及其在点 $(0,-3)$ 和 $(3,0)$ 处的切线所围图形的面积.

解：抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 在点 $(0,-3)$ 处的切线斜率为

$k_1=\left(-x^2+4x-3\right)'\Big|_{(0,-3)}=\left(-2x+4\right)'\Big|_{(0,-3)}=4$，切线方程为 $y+3=4x$；抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 在点 $(3,0)$ 处的切线斜率 $k_1=\left(-x^2+4x-3\right)'\Big|_{(3,0)}=\left(-2x+4\right)'\Big|_{(3,0)}=-2$，切线方程：$y=-2(x-3)$.

两切线的交点为 $\left(\dfrac{3}{2},3\right)$，选 x 为积分变量,则面积

$$A=\int_0^{\frac{3}{2}}\left[(4x-3)-\left(-x^2+4x-3\right)\right]dx+\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left[(-2x+6)-\left(-x^2+4x-3\right)\right]dx$$

$$=\int_0^{\frac{3}{2}}x^2dx+\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left(x^2-6x+9\right)dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right)\Big|_{\frac{3}{2}}^{3}=\frac{9}{4}.$$

4．求由星形线 $x=a\cos^3t, y=a\sin^3t(a>0)$ 所围图形的面积.

解：图形上下左右对称，所以面积

$$A=4\int_0^a ydx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}a\sin^3tda\cos^3t=-12a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^4t\cos^2tdt$$

$$=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4t(1-\sin^2t)dt=12a^2\left(\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{8}\pi a^2.$$

5．求由曲线 $\rho=a\sin\theta(a>0)$ 所围图形的面积.

解：面积 $A=\dfrac{1}{2}a^2\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta=\dfrac{1}{4}a^2\int_0^{\pi}(1-\cos2\theta)d\theta=\dfrac{1}{4}a^2\left(\theta-\dfrac{1}{2}\sin2\theta\right)\Big|_0^{\pi}=\dfrac{\pi a^2}{4}$.

6．求位于曲线 $y=e^x$ 的下方，该曲线过原点的切线的左方以及 x 轴上方之间图形面积.

解：设曲线 $y=e^x$ 上的切点坐标为 (x_0,e^{x_0})，则切线方程为 $y-e^{x_0}=e^{x_0}(x-x_0)$. 由于切线过原点，令 $x=0,y=0$ 可求得 $x_0=1$, 即切线方程为 $y=ex$, 则面积

$$A=\int_{-\infty}^{0}e^xdx+\int_0^1(e^x-ex)dx=e^x\Big|_{-\infty}^{0}+\left(e^x-\frac{1}{2}ex^2\right)\Big|_0^1=\frac{e}{2}.$$

7．设有一立体，其底面是半径为 R 的圆，而垂直于底面上的一条固定直径的所有截面都是等边三角形（如图 5.38），计算该立体的体积.

解：体积

$$V=\int_{-R}^{R}\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{R^2-x^2})^2dx=\sqrt{3}\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)dx=2\sqrt{3}\left(R^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^R=\frac{4\sqrt{3}}{3}R^3.$$

8.求下列旋转体的体积:

(1) $y=x^3, x=2, y=0$ 所围图形绕 x 轴旋转;

(2)曲线 $y=\sin^{\frac{3}{2}}x(0\le x\le\pi)$ 与 x 轴所围图形绕 x 轴旋转;

(3)星形线 $x=a\cos^3t, y=a\sin^3t\ (a>0)$ 所围图形绕 x 轴旋转;

(4) $y=x^2$ 和 $y=x$ 所围图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转;

(5)圆 $(x-4)^2+y^2=9$ 所围图形绕 y 轴旋转;

(6) $y=\sin x, x=0, x=\pi, y=0$ 所围图形绕 y 轴旋转.

解：(1)体积 $V=\pi\int_0^2\left(x^3\right)^2dx=\dfrac{1}{7}\pi x^7\Big|_0^2=\dfrac{128}{7}\pi$.

(2)体积 $V=\pi\int_0^{\pi}\left(\sin^{\frac{3}{2}}x\right)^2dx=\pi\int_0^{\pi}\sin^3xdx=-\pi\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2x\right)d\cos x$

$$=-\pi\left(\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{4}{3}\pi .$$

(3)体积$V=2\pi\int_0^a y^2dx=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0\left(a\sin^3 t\right)^2 da\cos^3 t=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t(1-\sin^2 t)dt$

$$=6\pi a^3\left(\frac{6}{7}\frac{4}{5}\frac{2}{3}-\frac{8}{9}\frac{6}{7}\frac{4}{5}\frac{2}{3}\right)=\frac{32}{105}\pi a^3 .$$

(4)绕 x 轴旋转体积$V=\pi\int_0^1 x^2dx-\pi\int_0^1 x^4dx=\frac{1}{3}\pi x^3\Big|_0^1-\frac{1}{5}\pi x^5\Big|_0^1=\frac{2}{15}\pi$;

绕 y 轴旋转体积$V=\pi\int_0^1 ydy-\pi\int_0^1 y^2dy=\frac{1}{2}\pi y^2\Big|_0^1-\frac{1}{3}\pi y^3\Big|_0^1=\frac{1}{6}\pi$.

(5)体积$V=\pi\int_{-3}^3\left(4+\sqrt{9-y^2}\right)^2 dy-\pi\int_{-3}^3\left(4-\sqrt{9-y^2}\right)^2 dy=16\pi\int_{-3}^3\sqrt{9-y^2}dy$

$$=32\pi\int_0^3\sqrt{9-y^2}dy=32\pi\left(\frac{1}{2}y\sqrt{9-y^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{y}{3}\right)\Big|_0^3=72\pi^2 .$$

(6)$V=\pi\int_0^1\left(\pi-\arcsin y\right)^2 dy-\pi\int_0^1\left(\arcsin y\right)^2 dy=\pi\int_0^1\left(\pi^2-2\pi\arcsin y\right)dy$

$$=\pi^3-2\pi^2\int_0^1\arcsin ydy=\pi^3-2\pi^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}xd\sin x=\pi^3-2\pi^2\left(x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=2\pi^2 .$$

9.利用积分方法推导球缺（如图 5.39）的体积公式$V=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right)$.

解：选 y 为积分变量,则体积

$$V=\pi\int_{R-H}^R\left(R^2-y^2\right)dy=\pi\left(R^2y-\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{R-H}^R=\pi\left[R^2H-\frac{1}{3}\left(3R^2H-3RH^2+H^3\right)\right]$$

$$=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right)$$

10.求下列曲线的弧长:

(1) $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ \ (0\le x\le 8)$;　　　　　　(2) $y^2=2x\ (0\le y\le\sqrt{3})$;

(3) $y=\ln(1-x^2)\ (0\le x\le\frac{1}{2})$;　　　　　(4) $x=\frac{1}{2}\ln(1+t^2),\ y=t-\arctan t\ (0\le t\le 1)$;

(5) $\rho=a(1+\cos\theta)\ (a>0)$ 的全长;　(6) $\rho=e^{a\theta}\ (0\le\theta\le\varphi)$.

解：(1) 弧长 $s=\int_0^8\sqrt{1+(x^{\frac{1}{2}})^2}dx=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^8=\frac{52}{3}$.

(2) $s=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+y^2}dy\overset{y=\tan x}{=}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec xd\tan x\overset{p214}{=}\left(\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\ln\left|\sec x+\tan x\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}$

$$=\sqrt{3}+\frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

(3) $s=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{1-x^2}-1\right)dx=\left(-\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-x\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}$

$$=\ln 3-\frac{1}{2}.$$

(4) $s=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{2t}{1+t^2}\right)^2+\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)^2}dt=\int_0^1\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt=\int_0^1\frac{1}{2\sqrt{1+t^2}}dt\left(1+t^2\right)$

$=\sqrt{1+t^2}\Big|_0^1=\sqrt{2}-1.$

(5) $s=2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}dt=2\sqrt{2}a\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos\theta}d\theta=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta$

$=8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi}=8a.$

(6) $s=\int_0^{\varphi}\sqrt{\left(e^{a\theta}\right)^2+a^2\left(e^{a\theta}\right)^2}dt=\sqrt{1+a^2}\int_0^{\varphi}e^{a\theta}d\theta=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}e^{a\theta}\Big|_0^{\varphi}=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\left(e^{a\varphi}-1\right).$

11．证明：函数 $y=\sin x$ 在一个周期上曲线弧的长等于椭圆 $x^2+2y^2=2$ 的周长.

证：函数 $y=\sin x$ 在一个周期上曲线弧的长 $s_1=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}dx,$ 椭圆 $x^2+2y^2=2$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$，它的周长

$s_2=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(-\sqrt{2}\sin t\right)^2+(\cos t)^2}dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^2 t}dt\overset{P219}{=}4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 t}dt,$ 所以结论成立.

（B）

1．由曲线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 与 $x^2+y^2=8$ 所围的较大部分的面积.

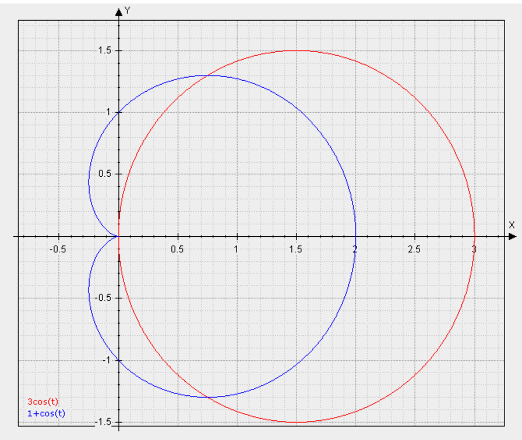
解：两曲线的交点 $(-2,2),(2,2),$ 所围的较小部分的面积

$$A=2\int_0^2\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx=2\left(\frac{1}{2}x\sqrt{8-x^2}+\frac{8}{2}\arcsin\frac{x}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{6}x^3\right)\Big|_0^2=\frac{4}{3}+2\pi,$$

所以较大部分的面积为

$$8\pi-\left(\frac{4}{3}+2\pi\right)=6\pi-\frac{4}{3}.$$

2．求由曲线 $\rho=3\cos\theta$ 及 $\rho=1+\cos\theta$ 所围图形公共部分的面积.



解：图形上下对称，则面积

$$A=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{9}{2}\cos^2\theta dx\right]=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)dx+\frac{9}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)dx$$

$$=\left(\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}+\left(\frac{9}{2}\theta+\frac{9}{4}\sin 2\theta\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{5}{3}\pi.$$

3.由曲线 $\left(x^2+y^2\right)^2=x^2-y^2$ 所围并位于圆 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ 外部的图形的面积.

解：$\left(x^2+y^2\right)^2=x^2-y^2$ 是双纽线，所求图形上下左右对称，曲线 $\left(x^2+y^2\right)^2=x^2-y^2$ 与圆 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ 在第一象限的交点为 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 故所求面积

$$A=4\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}\cos 2\theta d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}\frac{1}{2}d\theta\right)=\left(\sin 2\theta-\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}.$$

4.由曲线 $y=4-x^2$ 与 $y=0$ 所围的图形绕直线 $x=3$ 旋转而成的旋转体的体积.

解：y 轴坐标平移至 $x=3$，x 轴不动，则曲线 $y=4-x^2$ 变成 $Y=4-(X+3)^2$，直线 $x=3$ 变成 $X=0$，所求体积为

$$V=\pi\int_0^4\left(-3-\sqrt{4-Y}\right)^2dY-\pi\int_0^4\left(-3-\sqrt{4-Y}\right)^2dY=12\pi\int_0^4\sqrt{4-Y}dY=-12\pi\cdot\frac{2}{3}(4-Y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4=64\pi.$$

5.计算由摆线 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)(a>0)$ 的一拱 $(0\le t\le 2\pi)$ 与 x 轴所围的图形绕直线 $y=2a$ 旋转一周而成的立体体积.

解一：x 轴平移至直线 $y=2a$，y 轴不动，则摆线方程变成

$$X=a(t-\sin t),Y=a(1-\cos t)-2a=-a-a\cos t(a>0),$$

直线 $y=2a$，变成 $X=0,$ 所求体积为

$$V=\pi\cdot 2\pi a\cdot(2a)^2-\int_0^{2\pi a}\pi Y^2dX=8\pi^2a^3-\int_0^{2\pi}\pi a^2(1+\cos t)^2d\left[a(t-\sin t)\right]$$

$$=8\pi^2a^3-\pi a^3\int_0^{2\pi}(1+\cos t)^2(1-\cos t)dt=8\pi^2a^3-\pi a^3\int_0^{2\pi}(1+\cos t)\sin^2 tdt$$

$$=8\pi^2a^3-\pi a^3\int_0^{2\pi}\sin^2 tdt=8\pi^2a^3-\pi a^3\frac{t-\frac{1}{2}\sin 2t}{2}\Big|_0^{2\pi}=7\pi^2a^3.$$

解二：x 轴平移至直线 $y=2a$，y 轴不动，则摆线方程变成

$$X=a(t-\sin t),Y=a(1-\cos t)-2a=-a-a\cos t(a>0),$$

直线 $y=2a$，变成 $X=0,$ 所求体积为

$$V=\pi\cdot 2\pi a\cdot(2a)^2-\int_0^{2\pi a}\pi Y^2dX=8\pi^2a^3-\int_0^{2\pi}\pi a^2(1+\cos t)^2d\left[a(t-\sin t)\right]$$

$$=8\pi^2a^3-\pi a^3\int_0^{2\pi}(1+\cos t)^2(1-\cos t)dt=8\pi^2a^3-\pi a^3\int_0^{2\pi}(1+\cos t)\sin^2 tdt$$

$$=8\pi^2a^3-\pi a^3\int_0^{2\pi}\sin^2 tdt=8\pi^2a^3-\pi a^3\frac{t-\frac{1}{2}\sin 2t}{2}\Big|_0^{2\pi}=7\pi^2a^3.$$

6．过点 $(1,0)$ 作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线，设切线与该抛物线及 x 轴围成一平面图形，求此平面图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积.

解：设切点 $(x_0,\sqrt{x_0-2})$，则切线方程 $y-\sqrt{x_0-2}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(x-x_0)$，由过点 $(1,0)$ 可得 $x_0=3$，所以切线方程 $y-1=\frac{1}{2}(x-3)$，即 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 所求旋转体的体积为

$$V=\frac{1}{4}\int_1^3\pi(x-1)^2dx-\int_2^3\pi(x-2)dx=\frac{\pi}{6}.$$

7．求半立方抛物线 $y^2=\frac{2}{3}(x-1)^3$ 被抛物线 $y^2=\frac{x}{3}$ 截得的一段曲线弧的弧长.

解：两曲线交点：$(2,\pm\frac{\sqrt{6}}{3})$，所求弧长为

$$s=2\int_1^2\sqrt{1+\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}\right]^2}dx=2\int_1^2\sqrt{1+\frac{3}{2}(x-1)}dx=2\int_1^2\sqrt{\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}}dx=\frac{8}{9}\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]=\frac{10\sqrt{10}-8}{9}$$

习题 5.3　定积分在科学技术上的应用

（A）

1.由实验知道，弹簧在拉伸过程中，需要的力 F（单位：N）与伸长量 x (单位：cm)成正比，即 $F=kx$（k 为比例系数），如果弹簧由原长拉伸 4cm,计算所做的功.

解: 将弹簧一端固定于 A,另一端(拉伸端)在自由长度时的点 O 为坐标原点,建立数轴.拉长 dx 所作的功元素为 $dW=kxdx$，所以

$$W=\int_0^{0.04}F(x)dx=\int_0^{0.04}kxdx=\frac{1}{2}kx^2\Big|_0^{0.04}=0.0008k\ \ (J).$$

2.有一单位质量的质点按规律 $x=\frac{1}{3}t^3$ 作直线运动，媒质的阻力与速度的平方成正比，求质点 $x=0$ 移动到 $x=2$ 时，克服阻力所做的功.

解: 由物体的动动规律 $x=\frac{1}{3}t^3$ 知物体的速度 $v=\frac{dx}{dt}=t^2$;

由题意得:阻力 $f=-kv^2=-kt^4$，其中 $k>0$ 为比例系数.

由动动规律 $x=\frac{1}{3}t^3$ 知: 当 $x=0$ 时，$t=0$;当 $x=2$ 时，$t=\sqrt[3]{6}$.

功元素为 $dW=-f(x)dx$

所以克服阻力所做的功为:

$$W=\int_0^2-f(x)dx=\int_0^{\sqrt[3]{6}}kt^4d\left(\frac{1}{3}t^3\right)=\int_0^{\sqrt[3]{6}}kt^6dt=\frac{1}{7}kt^7\Big|_0^{\sqrt[3]{6}}=\frac{36\sqrt[3]{6}}{7}k\ \ (J).$$

3.直径为 20cm,高为 80cm 的圆筒内充满压强为 $10N/cm^2$ 的蒸汽，设温度保持不变，要使蒸汽体积缩小一半，问需要做多少功?

解:由玻意尔—马略特定律可知:在温度不变的情况下,$P_1V_1=PV$.

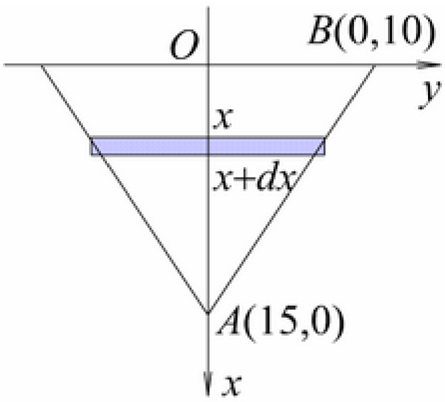
已知 $P_1=10^5\,N/m^2$, $V_1=\pi\cdot(0.1)^2\cdot 0.8\,m^3$

$$\mathrm{P}=\frac{\mathrm{P_1V_1}}{\mathrm{V}}=\frac{\pi\cdot(0.1)^2\cdot 0.8\cdot 10^5}{\pi\cdot(0.1)^2\cdot(0.8-\boldsymbol{x})}=\frac{8\cdot 10^4}{0.8-\boldsymbol{x}}=\mathrm{P}(\boldsymbol{x})$$

此时功元素为 $dW=\pi\cdot(0.1)^2\cdot P(x)dx$,

$$W=\int_0^{0.4}\pi\cdot(0.1)^2\cdot P(x)dx=\int_0^{0.4}\frac{800\pi}{0.8-\boldsymbol{x}}dx=800\pi\ln 2\ \ (J)$$

4.一圆锥形蓄水池，口径 20m，深 15m，池内水深 10m，现用水泵将水全部抽出，问要做多少功?



解:如图, 建立直角坐标系。

A、B 两点的坐标分别为 A（15，0）、B（0，10）

过 A、B 两点的直线方程为 $y=-\dfrac{2}{3}x+10$ 。

设水的密度为 ρ，重力加速度为 g。

选取 x 作为积分变量，对于任意的小区间 $[x,x+dx]\subseteq[5,15]$,其对应的薄层水的体积为 $\pi y^2(x)dx$ 。

从池中抽出水所做的功近似等于功元素

$$dW=\rho g\pi\cdot y^2(x)\cdot xdx=\rho g\pi\cdot(-\frac{2}{3}x+10)^2\cdot xdx\ 。$$

所求功为

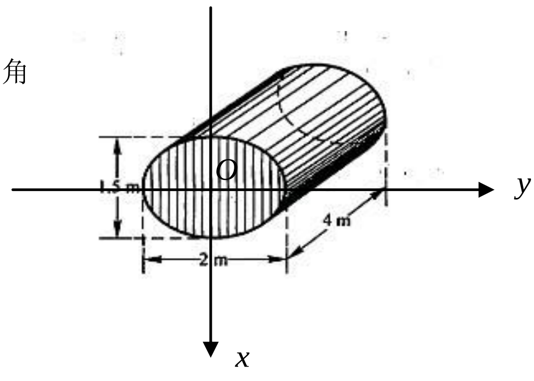
$$W=\int_5^{15}\rho g\pi\cdot(-\frac{2}{3}x+10)^2\cdot xdx=\rho g\pi\int_5^{15}(\frac{4}{9}x^3-\frac{40}{3}x^2+100x)dx$$

$$=\rho g\pi(\frac{1}{9}x^4-\frac{40}{9}x^3+50x^2)\Big|_5^{15}$$

$$\approx 1111.11\rho g\pi\approx 34191\ (\mathrm{kJ})\ 。$$

5.洒水车上的水箱是一个横放的椭圆柱体，尺寸如图 5.52 所示，当水箱装满水时，计算水箱的一个端面所受的压力。

解： 以水箱的一个侧面椭圆的中心为原点建立直角坐标系（如图)，则椭圆的方程为:



$$\frac{x^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}+\frac{y^2}{1}=1$$

设水的密度为ρ，重力加速度为 g。

选取 x 作为积分变量，对于任意的小区间 $[x,x+dx]\subseteq[-\frac{3}{4},\frac{3}{4}]$，

其对应的小窄条受到的压力的近似值，即压力元素 $dF=\rho g(\frac{3}{4}+x)\cdot 2y(x)dx$。

又因为 $y(x)=\frac{4}{3}\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2-x^2}$，所以压力元素 $dF=\frac{8}{3}\rho g(\frac{3}{4}+x)\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2-x^2}dx$。

所求压力为：$F=\int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{3}{4}}\frac{8}{3}\rho g(\frac{3}{4}+x)\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2-x^2}dx=2\rho g\int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{3}{4}}\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2-x^2}dx+0$

（注：利用被积函数在对称区间上积分的奇偶性）

$$=4\rho g\int_0^{\frac{3}{4}}\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2-x^2}dx=4\rho g\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{4}\cos t\right)^2dt \qquad \text{（令 } x=\frac{3}{4}\sin t\text{）}$$

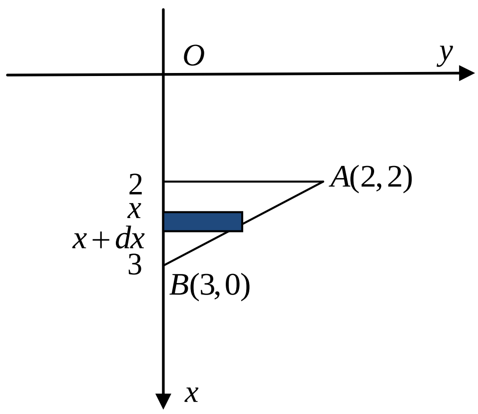
$$=\frac{9}{8}\rho g\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{9}{16}\rho g\pi\approx 17.3 \quad (KN)$$

6.将直角边各为 1m 与 2m 的直角三角形薄板垂直地浸入密度为 ρ 的液体中，斜边朝下，长直角边与液面平行，且该边距液面等于该边的边长，求薄板一侧所受的压力。

解:如图，建立直角坐标系。

A、B 两点的坐标分别为 A（2，2）、B（3，0），

过 A、B 两点的直线方程为 $y=-2x+6$。



设水的密度为ρ，重力加速度为 g。

选取 x 作为积分变量，对于任意的小区间

$[x,x+dx]\subseteq[2,3]$,其对应的小窄条受到

的压力的近似值，即压力元素 $dF=\rho gx\cdot y(x)dx$

$=\rho gx(-2x+6)dx$。

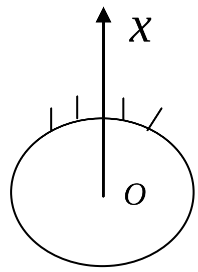
所求压力为：

$$F=\int_2^3\rho gx(-2x+6)dx=\rho g(-\frac{2}{3}x^3+3x^2)\Big|_2^3=\frac{7}{3}\rho g \quad (N)$$。

7.火星的半径为 3430km，其表面的重力加速度 g=3.92m/s^2,若在火星上发射一枚火箭，试问要用多大的初速度才能摆脱火箭的引力？

解：以火星的中心为原点,建立垂直向上的数轴,如图。

选取 x 作为积分变量，对于任意的小区间 $[x, x+dx] \subseteq [R, R+h]$ $(h>0)$,其中 R 代表火星的半径，于是由万有引力定律可知：火箭从 x 处升空到 $x+dx$ 处克服引力所做的功的近似值，即功元素为 $dW = \frac{GMm}{x^2}dx$，其中 G 代表万有引力系数，M 代表火星的质量，m 代表火箭的质量。则火箭从 R 处升空到 $R+h$ 处所做的功为：



$$W = \int_R^{R+h} \frac{GMm}{x^2}dx = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)。$$

当 $x = R$ 时，引力 $F = \frac{GMm}{R^2} = mg$，即 $GM = gR^2$。

于是 $W = mgR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)$。

火箭要脱离火星的引力，即 $h \to +\infty$，此时功 $W \to mgR$。

设火箭离开火星时的初速度为 v_0，则火箭的初始动能为 $\frac{1}{2}mv_0^2$。要使火箭脱离火星的引力范围，则必须有 $\frac{1}{2}mv_0^2 \ge mgR$，即

$$v_0 \ge \sqrt{2gR} = \sqrt{2\times 3.92\times 3.43\times 10^6} \approx 5.186\ km/s。$$

所以，火箭脱离火星的引力范围的最小初速度为 $5.186\ km/s$。

8.设有一长度为 l,线密度为 μ 的均匀细直棒，在细棒所在直线上，位于棒的左侧且距棒左端 a 单位处有一质量为 M 的质点 A，求该细棒对该点的引力。

解：以细棒的左侧端点作为原点、右侧端点作为数轴正方向建立数轴。

选取 x 作为积分变量，对于任意的小区间 $[x, x+dx] \subseteq [0, l]$,其对应的细棒的质量的近似值为 $dm = \mu dx$，于是由万有引力定律得这一小段棒对质点 A 的引力大小的近似值，即引力元素

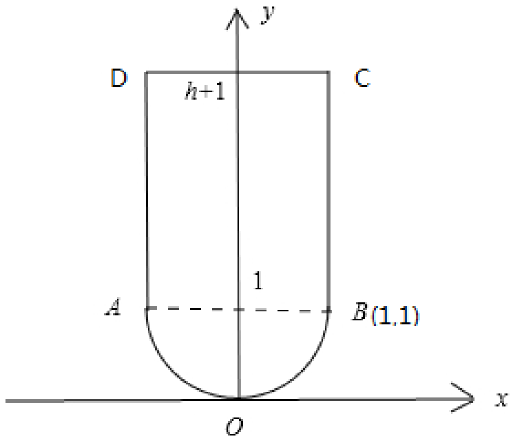
$dF = \frac{GM\mu dx}{(a+x)^2}$，其中 G 代表万有引力系数。

所求引力为：

$$F = \int_0^l \frac{GM\mu}{(a+x)^2}dx = -\frac{GM\mu}{(a+x)}\Big|_0^l = GM\mu\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l}\right)。$$

(B)

1. 某闸门形状如图 5.53 所示,其中 l 为对称轴,闸门的上部为矩形 $ABCD$,下部为抛物线与线段 AB 所围,当水面与闸门上端相平时,欲使闸门矩形部分承受的水压力与下部承受的水压力之比为 $5:4$,闸门矩形部分的高 h 应为多少?



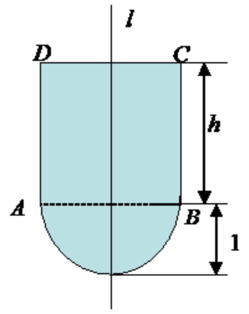


图 5.53

解:如图建立坐标系，则抛物线的方程为 $y=x^2$ ，设水的密度为 ρ，重力加速度为 g。

选取 y 作为积分变量，对于任意的小区间 $[y,y+dy]\subseteq[1,h+1]$,其对应的闸门矩形部分一个微小宽度 dy 所受水压力为： $dP_1=2\rho g(h+1-y)dy$ 。

则矩形部分所受水压为 $P_1=\int_1^{h+1}2\rho g(h+1-y)dy$

$=2\rho g[(h+1)y-\frac{1}{2}y^2]\Big|_1^{h+1}=\rho gh^2$ 。

同理: 对于任意的小区间 $[y,y+dy]\subseteq[0,1]$，其对应的闸门下部一个微小宽度 dy 所受水压力为： $dP_2=2\rho g(h+1-y)\sqrt{y}dy$ 。

则闸门下部所受压力为： $P_2=\int_0^1 2\rho g(h+1-y)\sqrt{y}dy$

$=2\rho g[\frac{2}{3}(h+1)y^{3/2}-\frac{2}{5}y^{5/2}]\Big|_0^1=4\rho g(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15})$ 。

又因为 $\frac{P_1}{P_2}=\frac{5}{4}$，即： $\frac{\rho gh^2}{4\rho g(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15})}=\frac{5}{4}$。解得 $h=2$； $h=-\frac{1}{3}$ （舍去）。

故 $h=2$，即闸门矩形部分的高为 $2m$ 。

2.某工地打地基时，用气锤将桩打进土层，气锤每次击打都要克服土层对桩的阻力而做功 ，设土层对桩的阻力的大小与被打进地下的深度成正比（比例系数为 $k>0$ ）,气锤第一次击打将桩

打进地下 a m,且气锤每次击打所做的功与前一次击打所作的功之比为常数 $r(0<r<1)$,问：

（1）气锤击打桩 3 次后，可将桩打进地下多深？

（2）若气锤击打桩的次数不限，气锤至多可将桩打进地下多深？

解:（1） 由题意得，土层对桩的阻力 $F=kx$（$k>0$ 为比例系数）。

设第 n 次击打后，将桩打进地下的总深度为 $x_n\ m$，第 n 次击打时气锤做的功为 $W_n\ J$，第 n 次击打后气锤做的总功为 $T_n\ J$，则由题意可得 $W_n=r^{n-1}W_1\ (0<r<1)$。

又因为 $W_1=\int_0^{x_1}F(x)dx=\frac{1}{2}kx^2\Big|_0^{x_1}=\frac{1}{2}kx_1^2$；$T_3=\int_0^{x_3}F(x)dx=\frac{1}{2}kx^2\Big|_0^{x_3}=\frac{1}{2}kx_3^2$

且 $T_3=W_1+W_2+W_3=(1+r+r^2)W_1$ ， $x_1=a$

所以 $\frac{1}{2}kx_3^2=(1+r+r^2)\frac{1}{2}kx_1^2$

解得 $x_3=\sqrt{1+r+r^2}x_1=\sqrt{1+r+r^2}a\ (m)$。

即：气锤击打桩 3 次后，可将桩打进地下 $\sqrt{1+r+r^2}a\ (m)$。

（2）$T_n=\int_0^{x_n}F(x)dx=\frac{1}{2}kx^2\Big|_0^{x_n}=\frac{1}{2}kx_n^2$

且 $T_n=\sum_{i=1}^{n}W_i=(1+r+r^2+...+r^{n-1})W_1=\frac{1-r^n}{1-r}\times\frac{1}{2}kx_1^2$

所以 $\frac{1}{2}kx_n^2=\frac{1-r^n}{1-r}\times\frac{1}{2}kx_1^2$， 且已知 $x_1=a$

得 $x_n=\sqrt{\frac{1-r^n}{1-r}}\,a$

显然：当 $0<r<1$ 且 $n\to\infty$ 时，$x_n\to\sqrt{\frac{1}{1-r}}\,a$。

即：若气锤击打桩的次数不限，气锤至多可将桩打进地下 $\sqrt{\frac{1}{1-r}}\,a\ (m)$。

3.求抛物线 $y=x^2$ 与 $y^2=x$ 所围平面图形的形心坐标。

解：联立方程组 $\begin{cases}y=x^2\\y^2=x\end{cases}$ ， 解得 $\begin{cases}x_1=0\\y_1=0\end{cases}$，$\begin{cases}x_2=1\\y_2=1\end{cases}$。

$$\bar{x}=\frac{\int_a^b x[f_2(x)-f_1(x)]dx}{\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx}=\frac{\int_0^1 x(\sqrt{x}-x^2)dx}{\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx}=\frac{9}{20},$$

$$\bar{y}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b [f_2^2(x)-f_1^2(x)]dx}{\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx}=\frac{\frac{1}{2}\int_0^1(x-x^4)dx}{\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx}=\frac{9}{20}。$$

即：所围平面图形的形心坐标为$(\frac{9}{20},\frac{9}{20})$。

4.设交流电$i(t)=I_m\sin wt$经半波整流后得到电流$i=\begin{cases} I_m\sin\omega t, 0\le t\le\dfrac{\pi}{\omega}, \\ 0, \quad \dfrac{\pi}{\omega}<t\le\dfrac{2\pi}{\omega}. \end{cases}$

求交流电的有效值。

解: 由有效值公式$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}$

得 $I=\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} i^2(t)dt}=\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} i^2(t)dt+\int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} i^2(t)dt\right)}$

$$=\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} I_m^2\sin^2\omega tdt}=\sqrt{\frac{\omega I_m^2}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\frac{1-\cos 2\omega t}{2}dt}$$

$$=\frac{I_m}{2}\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}(1-\cos 2\omega t)d(2\omega t)}=\frac{I_m}{2}\sqrt{\frac{1}{2\pi}\left[2\omega t\Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}}-\sin 2\omega t\Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}}\right]}=\frac{I_m}{2}。$$

5.在电力需求的电涌时间，电能消耗的速度（电能对时间的变化率）为$r(t)=te^{-t}$ (t 的单位：h),求在前两个小时内消耗的总电能 E（单位：J）.

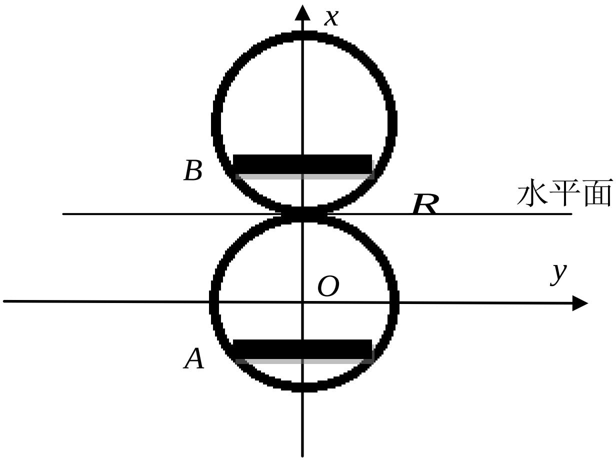
解： 因为 $r(t)=\frac{dE}{dt}=te^{-t}$，由题意得，前两个小时内消耗的总电能

$$E=\int_0^2 r(t)dt=\int_0^2 te^{-t}dt=-\int_0^2 td(e^{-t})=-te^{-t}\Big|_0^2+\int_0^2 e^{-t}dt=-2e^{-2}-e^{-t}\Big|_0^2$$

$$=1-3e^{-2}\approx 0.594\ (J)。$$

6.半径为 R 的球沉入水中，球的上部与水面相切，球的密度与水的密度相同，现将球从水中取出，需做多少功?

解: 如图,以沉入水中的球心为原点建立坐标系。设水的密度为 ρ，重力加速度为 g。



选取 x 作为积分变量，对于任意的小区间 $[x,x+dx]\subseteq[-R,R]$,其对应的球的薄片的体积为

$dV=\pi y^2(x)dx=\pi(R^2-x^2)dx$.

以水面为分界，把水下球变为水上球，可看成许多薄片由 A 到 B，它由 A 上升至 B 时在水中行程为 $R-x$,在水上的行程为 $2R-(R-x)=R+x$.因为球的密度与水的密度相同，所以此薄片在水中由 A 上升到水平面时不做功。由水面再向上提到 B 时，需作的功即功元素为:

$dW=\rho g(R+x)\cdot\pi(R^2-x^2)dx$ 。

所求功

$$W=\rho g\pi\int_{-R}^{R}(R+x)\cdot(R^2-x^2)dx$$

$$=\rho g\pi R\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)dx+\rho g\pi\int_{-R}^{R}x(R^2-x^2)dx$$

$$=2\rho g\pi R\int_{0}^{R}(R^2-x^2)dx+0$$

$$=\frac{4}{3}\rho g\pi R^4\ (J)$$ 。

总习题五

(A)

1.选择题:

(1)由曲线 $x^2+y^2=\sqrt{2}y$ 与曲线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 所围图形公共部分的面积为(   )

(A) $\frac{1}{2}[\int_0^{\frac{\pi}{6}}2\sin^2\theta\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos2\theta\mathrm{d}\theta]$　　(B) $\frac{1}{2}[\int_0^{\frac{\pi}{6}}2\sin^2\theta\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta\mathrm{d}\theta]$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{6}}2\sin^2\theta\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos2\theta\mathrm{d}\theta$　　(D) $\int_0^{\frac{\pi}{6}}2\sin^2\theta\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta\mathrm{d}\theta$

解：两曲线的极坐标方程分别为：$\rho=\sqrt{2}\sin\theta,\rho^2=\cos2\theta$

围成的图形左右对称，所以面积为

$$2\left[\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\sin\theta\right)^2 d\theta+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\left(\cos 2\theta\right)d\theta\right]=\int_0^{\frac{\pi}{6}}2\sin^2\theta d\theta+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta,$$ 所以选 D。

(2)设 $f_1(x), f_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f_1(x)<f_2(x)<k$, k 为常数,则由曲线 $y=f_1(x), y=f_2(x)$, 直线 $x=a, x=b$ 围成的平面图形绕直线 $y=k$ 旋转而成的旋转体的体积为( )

(A) $\pi\int_a^b[k-f_2(x)-f_1(x)][f_2(x)-f_1(x)]$ (B) $\pi\int_a^b[k-f_2(x)+f_1(x)][f_2(x)-f_1(x)]$

(C) $\pi\int_a^b[2k-f_2(x)-f_1(x)][f_2(x)-f_1(x)]$ (D) $\pi\int_a^b[2k-f_2(x)+f_1(x)][f_2(x)-f_1(x)]$

解：x 轴坐标平移至： $y=k,$ 直线 $y=k$ 变成 $Y=0,$ $y=f_1(x), y=f_2(x)$

变成 $Y=f_1(x)-K, y=f_2(x)-K$ 所求体积为

$$\int_a^b\pi\left[f_1(x)-k\right]^2dx-\int_a^b\pi\left[f_2(x)-k\right]^2dx=\pi\int_a^b\left[2k-f_2(x)-f_1(x)\right]\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx,$$

所以选 C。

(3) 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且都大于零,则由曲线 $y=f(x), y=g(x),$ 直线 $x=a, x=b$ 围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为( )

(A) $\pi\int_a^b |f(x)-g(x)|^2\,\mathrm{d}x$ (B) $\pi\int_a^b |f^2(x)-g^2(x)|\,\mathrm{d}x$

(C) $\pi\left|\int_a^b[f^2(x)-g^2(x)]\mathrm{d}x\right|$ (D) $\pi\int_a^b[f^2(x)-g^2(x)]\mathrm{d}x$

解：根据 $y=f(x), y=g(x)$ 根的大小而定，所以选 B。

2. 填空题:

(1)由曲线 $y^2=(1-x)^3$ 与 y 轴所围图形的面积为________________ ;

解：图形上下对称，所以所求面积为： $A=2\int_0^1(1-x)^{\frac{3}{2}}dx=-\frac{4}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1=\frac{4}{5}$ 。

(2)曲线 $y=2-x^2$ 与 x 轴所围的图形面积被曲线 $y=ax^2$ 分成相等的两块,则 $a=$___;

解：两曲线交点 $\left(\pm\sqrt{\frac{2}{a+1}},\frac{2a}{a+1}\right)$, 由题意：

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(2-x^2)dx=2\int_{-\sqrt{\frac{2}{a+1}}}^{\sqrt{\frac{2}{a+1}}}(2-x^2-ax^2)dx, \text{即} \int_0^{\sqrt{2}}(2-x^2)dx=2\int_0^{\sqrt{\frac{2}{a+1}}}(2-x^2-ax^2)dx,$$

$$\left(2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^{\sqrt{2}}=2\left(2x-\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{3}x^3\right)\Bigg|_0^{\sqrt{\frac{2}{a+1}}}\Rightarrow a=3$$

(3)由曲线 $x=y^2$ 与直线 $y=x$ 所围的图形绕直线 $x=-1$ 旋转一周所成的旋转体的体积为_____________;

解:y 轴坐标平移至 $x=-1,$ 则直线 $x=-1$ 变成 $X=0$, $x=y^2, x=y$ 变成 $X=Y^2+1, X=Y+1$

所以所求体积为： $V=\pi\int_0^1(Y+1)^2dY-\pi\int_0^1(Y^2+1)^2dY=\frac{7}{15}\pi$ 。

(4) 由曲线 $\rho=2\sin\theta$ 所围的图形绕直线 $y=-1$ 旋转一周所成的旋转体的体积为 _______;

解：x 轴坐标平移至 $y=-1,$ 则直线 $y=-1$ 变成 $Y=0$,

$\rho=2\sin\theta$,即$x^2+y^2=2y$,即$y=1\pm\sqrt{1-x^2}$ 变成$Y=2\pm\sqrt{1-X^2}$

所以所求体积为：

$$V=\pi\int_{-1}^{1}(2+\sqrt{1-X^2})^2dX-\pi\int_{-1}^{1}(2-\sqrt{1-X^2})^2dX=16\pi\int_0^1\sqrt{1-X^2}dX=4\pi^2.$$

(5)圆的渐开线$x=a(\cos t+t\sin t),\ y=a(\sin t-t\cos t)$上相应于$0\le t\le\pi$一段弧的弧长为____________________.

解：弧长$s=\int_0^\pi\sqrt{a^2\left(t\cos t\right)^2+a^2\left(t\sin t\right)^2}dt=\int_0^\pi atdt=\frac{1}{2}\pi a^2.$

3.求曲线$\rho=\sin\theta$与$\rho=\cos\theta+\sin\theta$所围图形公共部分的面积。

解：交点$\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$，所求面积为：

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta+\sin\theta)^2d\theta=\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}(1+\sin2\theta)d\theta$$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\left(\theta-\frac{1}{2}\cos2\theta\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}=\frac{\pi-1}{4}$$

4．求曲线$y=\sqrt{x}$的一条切线l，使该曲线与切线l及直线$x=0,x=2$所围图形的面积最小。，

解：设切点$(x_0,\sqrt{x_0})$，则切线方程：$y-\sqrt{x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}\left(x-x_0\right)$，即$y=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}x+\frac{1}{2}\sqrt{x_0}$

所围图形的面积：$A=\int_0^2\left(\frac{1}{2\sqrt{x_0}}x+\frac{1}{2}\sqrt{x_0}-\sqrt{x}\right)dx=\frac{1}{\sqrt{x_0}}+\sqrt{x_0}-\frac{4}{3}\sqrt{2}$

当$\frac{1}{\sqrt{x_0}}=\sqrt{x_0}$, 即$x_0=1$时，所围图形的面积最小，所以所求切线方程为：$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$。

5.设$y=x^2$, $x\in[0,1]$, t为$(0,1)$内的点,问t为何值时,图 5.54 中两阴影部分的面积A_1与A_2 之和为最小？t为何值时,面积A_1与A_2 之和为最大？

解：阴影部分的面积可表示为：$A=\int_0^t\left(t^2-x^2\right)dx+\int_t^1\left(x^2-t^2\right)dx=\frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}$

$A_t'=4t^2-2t$，得内部的驻点为$\frac{1}{2}$, $A\big|_{t=0}=\frac{1}{3},A\Big|_{t=\frac{1}{2}}=\frac{1}{4},A\big|_{t=1}=\frac{2}{3},$

所以$t=\frac{1}{2}$,面积之和最小， $t=1$,面积之和最大。

6.求由曲线$y=x^{\frac{3}{2}}$,直线$x=4$及x轴所围图形绕y轴旋转一周所得的立体的体积.

解：所求体积：$A=\pi\int_0^8 4^2dy-\pi\int_0^8\left(y^{\frac{2}{3}}\right)^2dy=128\pi-\frac{3}{7}\pi y^{\frac{7}{3}}\big|_0^8=\frac{512}{7}\pi.$

7.过原点作曲线$y=\ln x$的切线,求:

(1)该切线与曲线$y=\ln x$及x轴所围图形的面积;

(2)该平面图形绕直线$x=e$旋转一周所得的立体的体积.

解：设切点$(x_0,\ln x_0)$，则切线方程：$y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}\left(x-x_0\right)$，即$y=\frac{x}{x_0}-1+\ln x_0$

由于过原点，可求得$x_0=e$,所以切线方程$y=\frac{x}{e}$，

（1）所围图形的面积可表示为：

$$A=\int_0^1 \frac{x}{e}dx+\int_1^e\left(\frac{x}{e}-\ln x\right)dx=\frac{x^2}{2e}\Big|_0^1+\frac{x^2}{2e}\Big|_1^e-x\ln x\Big|_1^e+\int_1^e xd\ln x=\frac{1}{2e}+\frac{e}{2}-\frac{1}{2e}-e+x\Big|_1^e=\frac{e}{2}-1.$$

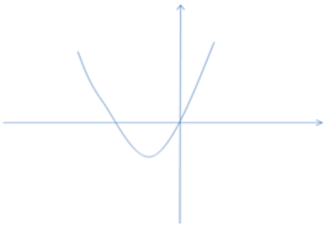
（2）y 轴坐标平移至 $x=e,$

则直线 $x=e$ 变成 $X=0$， $y=\frac{x}{e}, y=\ln x,$ 即$x=ey, x=e^y,$ 变成 $X=eY-e, X=e^Y-e$

所求体积：$V=\pi\int_0^1\left(eY-e\right)^2 dY-\pi\int_0^1\left(e^Y-e\right)^2 dY=\pi\left(\frac{5}{6}e^2-2e+\frac{1}{2}\right).$

8.设抛物线 $y=ax^2+bx+c\ (a>0)$ 通过原点,当 $x\in[0,1]$ 时, $y\geq 0$,又该抛物线与直线 $x=1, y=0$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$,试确定 a,b,c 的值,使该图形绕 x 轴旋转而成的立体的体积最小.

解：根据题意，$c=0$，且抛物线的形状如图：



图中所述所围面积为： $\frac{1}{3}=\int_0^1(ax^2+bx)dx=\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b,$ 即$b=\frac{2-2a}{3}.$

绕 x 轴旋转而成的立体的体积可表示为：

$$V=\pi\int_0^1\left(ax^2+\frac{2-2a}{3}x\right)^2 dx=\pi\int_0^1\left[a^2x^4+\frac{4-4a}{3}ax^3+\left(\frac{2-2a}{3}\right)^2 x^2\right]dx$$

$$=\pi\left[\frac{a^2}{5}+\frac{a(1-a)}{3}+\frac{4(1-a)^2}{27}\right]=\frac{\pi}{135}\left(2a^2+5a+20\right),$$

$V_a'=\frac{\pi}{135}\left(4a+5\right),$ 驻点： $a=-\frac{5}{4},$

$V''_{a=-\frac{5}{4}}=\frac{4\pi}{135}>0$，所以 $a=-\frac{5}{4}$ 时体积最小，相应地 $b=\frac{3}{2}.$

9.设曲线 $y=ax^2\ (a>0, x\geq 0)$ 与 $y=1-x^2$ 交于点 A,过原点 O 与点 A 的直线与 $y=ax^2$ 围成一个平面图形,问 a 取何值时,该图形绕 x 轴旋转而成的立体的体积最大？最大体积为多少？

解： $y=ax^2, y=1-x^2$ 的交点： $\left(\frac{1}{\sqrt{a+1}},\frac{a}{a+1}\right),$ 直线 OA 方程： $y=\frac{a}{\sqrt{a+1}}x,$

体积为：

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}\left(\frac{a}{\sqrt{a+1}}x\right)^2 dx-\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}\left(ax^2\right)^2 dx=\frac{\pi a^2}{3(a+1)}x^3\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}-\frac{\pi a^2}{5}x^5\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}=\frac{2\pi a^2}{15(a+1)^{\frac{5}{2}}}$$

$$V_a=\frac{2\pi}{15}\frac{2a\left(a+1\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{5}{2}a^2\left(a+1\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(a+1\right)^5}=\frac{2\pi}{15}\frac{a\left(a+1\right)^{\frac{3}{2}}\left(2-\frac{1}{2}a\right)}{\left(a+1\right)^5},$$

唯一的驻点： $a=4,$ 由问题的实际意义知： $a=4$ 时体积最大，最大体积为$=\frac{32\sqrt{5}\pi}{1875}.$

10.求曲线 $y=\int_0^x \sqrt{\sin t}\mathrm{d}t$ 上相应于 $0\le x\le\pi$ 一段的弧长.

解： $y'=\sqrt{\sin x}$, 所求弧长：

$$s=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin x}dx=\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)dx=\left(2\sin\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\pi}=4.$$

11.证明:由非负、连续光滑曲线段 $y=f(x)\ (a\le x\le b)$ 绕 x 轴旋转一周所成的旋转曲面的面积为 $S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$.

解：选 x 为积分变量，则 $x\in[a,b]$, 面积微元为 $2\pi y\sqrt{1+y'^2}dx,$

所以旋转曲面的面积为： $S=\int_a^b 2\pi y\sqrt{1+y'^2}dx=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx.$

12.根据上题的结论求由半圆周 $x^2+(y-2)^2=1\ (y\ge 2)$ 绕 x 轴旋转一周所成的旋转曲面的面积.

解： $y=2+\sqrt{1-x^2},\ y'=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$， 曲面面积为：

$$S=2\pi\int_{-1}^{1}\left(2+\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dx=4\pi\int_0^1\left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+1\right)dx$$

$$=4\pi\left(2\arcsin x\Big|_0^1+x\Big|_0^1\right)=4\pi\left(\pi+1\right).$$

(B)

1.一根金属细棒长 $3\,m$， 离棒左端 $x\,m$ 处的线密度为 $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}kg/m$， 问 x 为何值时， $[0,x]$ 一段的质量为整根棒质量的三分之一。

解：以细棒的左侧端点作为原点、右侧端点作为数轴正方向建立数轴。

由题意得 $\int_0^x\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}dt=\dfrac{1}{3}\int_0^3\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}dt,$ 即 $2\sqrt{1+t}\,\big|_0^x=\dfrac{2}{3}\sqrt{1+t}\,\big|_0^3,$

解得 $2(\sqrt{1+x}-1)=\dfrac{2}{3},\quad x=\dfrac{7}{9}(m)$。

2. 求半径为 a，质量为 m 的圆周对轴 l 的转动惯量，其中该轴过圆心且垂直于圆所在的平面。

注: 此题需要说明圆周为均匀的圆周.

解: 设圆周线密度为 ρ，因为圆周的半径为 a，所以 $2\pi a\rho=m$；且圆心角 $d\theta$ 对应的弧长 $dl=a\,d\theta$。可得 $dm=\rho dl=\rho a\,d\theta$。

因为 $I_y=\int_a^b r^2dm$ ， $2\pi a\rho=m$

所以 $I_y=\int_0^{2\pi}a^2\cdot\rho a\,d\theta=\rho a^3\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi\rho a^3=ma^2$。

即 圆周对轴l的转动惯量为ma^2。

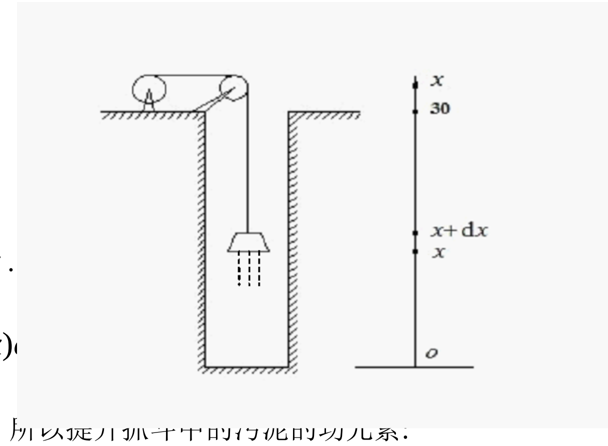
3. 设有一根半径为 R，长度为l的圆柱体浸没在水深为 H（H>2R）的池底，圆柱体的密度为 $\rho(\rho>1)$，现将圆柱体从水面移出，需做多少功?

注:本题的参考答案与l是无关的,本人认为显然是不可能的.

而且计算比较复杂.折腾了好长时间后决定放弃.

另外，要注明圆柱体是横卧的.虽然有条件 H>2R 隐含了横卧,但感觉还是有歧义的.

4.为清除井底的污泥，用缆绳将抓斗放入井底，抓起污泥后提出井口（5.55 如图）.已知井深 30m，抓斗自重 400N，缆绳每米重 50N,抓斗抓起污泥重 2000N，提升速度为 3m/s,在提升过程中，污泥以 20N/s 的速率从抓斗缝隙中漏掉，现将抓起污泥的抓斗提升至井口，问克服重力需做多少焦耳的功?(抓斗的高度及位于井口上方的缆绳的长度忽略不计。)



解：作x轴如图.

将抓起污泥的抓斗由x提升dx所作的功，

即功元素为 $dW = dW_1 + dW_2 + d$

其中克服抓斗自重的功元素：$dW_1 = 400dx$.

其中克服缆绳重的功元素：$dW_2 = 50(30-x)($

由于抓斗从井底升至x处所需时间为$\frac{x}{3}$ s，所以提升抓斗中的污泥的功元素：

$$dW_3 = (2000 - 20\cdot\frac{x}{3})dx.$$

$$W = \int_0^{30}[400 + 50(30-x) + (2000 - 20\cdot\frac{x}{3})]dx = 91500\ (J).$$