第六章　常微分方程

习题 6.1 微分方程的基本概念

（A）

1. 指出下列方程中，哪些是微分方程？

(1) $y^2-3y+2=x$；　(2) $y''+3y'+2y=x$；　(3) $y'=x-y-y^2\sin x$；

(4) $y^2+1=3x-2xy-\cos x$；　(5) $2x=3xy+3y^2$；　(6) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\sin x$.

解：方程(2)、(3)、(6)是微分方程，(1)、(4)、(5)不是微分方程.

2. 指出下列微分方程的阶数，并指出它是线性的，还是非线性的:

(1) $x(y')^2-2yy'-x=1$；　(2) $xy''-xy'-y=x\ln x$；　(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$；

(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{5x+3y}{x+y}$；　(5) $x^4y^{(4)}+2y'+x^2y=0$；　(6) $L\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+R\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\theta}{C}=E_0\sin\omega t$.

解： (1) 一阶非线性微分方程；(2) 二阶线性微分方程；(3) 一阶非线性微分方程；
(4) 一阶非线性微分方程；(5) 四阶线性微分方程；(6) 二阶线性微分方程.

3. 判别下列各题中的函数是否为所给微分方程的解；若是，指出是通解还是特解？

解： (1)特解；　(2) 特解；　(3) 特解；　(4) 通解.

4. 设函数 $y=C_1+C_2\ln x+C_3x^3$ 是某微分方程的通解，求该方程满足初始条件 $y(1)=1$，$y'(1)=0$，$y''(1)=2$ 的特解.

解：因为 $y'=\dfrac{C_2}{x}+3C_3x^2$，$y''=-\dfrac{C_2}{x^2}+6C_3x$，故有 $\begin{cases}C_1+C_3=1\\ C_2+3C_3=0\\ -C_2+6C_3=2\end{cases}$

解得 $C_1=\dfrac{7}{9}$，$C_2=-\dfrac{2}{3}$，$C_3=\dfrac{2}{9}$，故所求特解为 $y=\dfrac{7}{9}-\dfrac{2}{3}\ln x+\dfrac{2}{9}x^3$.

（B）

1. 写出由下列条件所确定的曲线所满足的微分方程:

(1) 曲线上任一点 (x,y) 处的切线的纵截距等于切点横坐标的平方；

(2) 曲线上点 $P(x,y)$ 处的法线与 x 轴的交点为 Q，且线段 PQ 被 y 轴平分.

解：(1) 设曲线方程为 $y=f(x)$，则曲线在点 (x,y) 处的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，其在 y 轴上的截距为 $y-xy'$。由题设条件，曲线所满足的微分方程为 $y-xy'=x^2$.

(2) 设曲线方程为 $y=f(x)$，由题设条件，点 Q 的坐标为 $(-x,0)$，直线 PQ 的斜率即为法线的斜率，从而有 $\dfrac{y}{2x}=-\dfrac{1}{y'}$，即 $y'y+2x=0$.

2. 用微分方程表示一物理命题：某种气体的气压 P 对于温度 T 的变化率与气压成正比，与温度的平方成反比.

解：由题设条件，得 $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T}=k\dfrac{P}{T^2}$.

习题 6.2　一阶微分方程

（A）

1. 求下列微分方程的通解:

(1) $y\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y=0$； (2) $(y+1)^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x^2=0$； (3) $y'\tan x-y=1$；

(4) $(\mathrm{e}^{x+y}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=0$；(5) $(1+2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}})\mathrm{d}x+2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}(1-\dfrac{x}{y})\mathrm{d}y=0$；(6) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\ln\dfrac{y}{x}$.

解：(1) 方程为可分离变量的方程，变量分离得 $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dx}{4x-x^2}$,

两端积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int\frac{\mathrm{d}x}{4x-x^2}=\frac{1}{4}\int(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-x})\mathrm{d}x$,

解得 $\ln y=\dfrac{1}{4}[\ln x-\ln(4-x)+\ln C]=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{Cx}{4-x}$，故方程的通解为 $(4-x)y^4=Cx$.

(2) 方程为可分离变量的方程，变量分离得 $(y+1)^2\mathrm{d}y=-x^2\mathrm{d}x$,

两端积分 $\displaystyle\int(y+1)^2\mathrm{d}y=-\int x^2\mathrm{d}x$，　解得 $\dfrac{1}{3}(y+1)^3=-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{3}C$,

故方程的通解为 $x^3+(y+1)^3=C$.

(3) 方程为可分离变量的方程，变量分离得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y+1}=\cot x\mathrm{d}x$,

两端积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{y+1}=\int\cot x\mathrm{d}x$，　解得 $\ln(y+1)=\ln\sin x+\ln C=\ln C\sin x$,

故方程的通解为 $y+1=C\sin x$.

(4) 方程为可分离变量的方程，变量分离得 $\dfrac{\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^y-1}\mathrm{d}y=-\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$,

两端积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^y-1}\mathrm{d}y=-\int\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$，解得 $\ln(\mathrm{e}^y-1)=-\ln(\mathrm{e}^x+1)+\ln C$

故方程的通解为 $(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^y-1)=C$.

(5) 方程为化为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}(\frac{x}{y}-1)}{1+2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}}$，它是齐次方程，令 $u=\dfrac{x}{y}$，则原方程可化为可分离变量的方程 $y\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=-\dfrac{u+2\mathrm{e}^u}{1+2\mathrm{e}^u}$，变量分离得 $\dfrac{1+2\mathrm{e}^u}{u+2\mathrm{e}^u}\mathrm{d}u=-\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$,

两端积分 $\displaystyle\int\frac{1+2\mathrm{e}^u}{u+2\mathrm{e}^u}\mathrm{d}u=-\int\frac{\mathrm{d}y}{y}$，解得 $\ln(u+2\mathrm{e}^u)=-\ln y+\ln C=\ln\dfrac{C}{y}$,

即 $y(u+2\mathrm{e}^u)=C$，变量还原可得故方程的通解为 $x+2y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}=C$.

(6) 方程为化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$，它是齐次方程，令 $u=\dfrac{y}{x}$，则原方程可化为可分离变量的

方程 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u(\ln u-1)$，变量分离得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{u(\ln u-1)}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，

两端积分 $\int\dfrac{\mathrm{d}u}{u(\ln u-1)}=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，解得 $\ln(\ln u-1)=\ln x+\ln C=\ln Cx$，

即 $\ln u-1=Cx$，变量还原可得故方程的通解为 $\ln\dfrac{y}{x}-1=Cx$.

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

(1) $y'=\mathrm{e}^{2x-y}$，$y\big|_{x=0}=0$；　　(2) $x\mathrm{d}y+2y\mathrm{d}x=0$，$y\big|_{x=2}=1$；

(3) $\cos x\sin y\mathrm{d}y=\cos y\sin x\mathrm{d}x$，$y\big|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}$；　　(4) $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$，$y\big|_{x=1}=2$；

(5) $(y^2+x^2)\mathrm{d}x-xy\mathrm{d}y=0$，$y\big|_{x=1}=1$.

解：(1) 方程为可分离变量的方程 $\mathrm{e}^{y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$，两端积分得 $\mathrm{e}^{y}=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$，

又 $y\big|_{x=0}=0$，解得 $C=\dfrac{1}{2}$，故方程的特解为 $\mathrm{e}^{y}=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+\dfrac{1}{2}$.

(2) 方程为可分离变量的方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=-2\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，

两端积分得，$\ln y=-2\ln x+\ln C=\ln\dfrac{C}{x^2}$，故方程的通解为 $y=\dfrac{C}{x^2}$，

又 $y\big|_{x=2}=1$，解得 $C=4$，故方程的特解为 $y=\dfrac{4}{x^2}$.

(3) 方程为可分离变量的方程，变量分离得 $\dfrac{\sin y}{\cos y}\mathrm{d}y=\dfrac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$，

两端积分得，$\ln\cos y=\ln\cos x+\ln C=\ln C\cos x$，故方程的通解为 $\cos y=C\cos x$，

又 $y\big|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}$，解得 $C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故方程的特解为 $\cos y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x$.

(4) 方程是齐次方程，令 $u=\dfrac{y}{x}$，可化为 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{u}$，分离变量且积分得 $\dfrac{1}{2}u^2=\ln Cx$，

即 $\dfrac{1}{2}(\dfrac{y}{x})^2=\ln Cx$，又 $y\big|_{x=1}=2$，解得 $C=e^2$，

故方程的特解为 $\dfrac{1}{2}(\dfrac{y}{x})^2=\ln e^2x$，即 $\dfrac{1}{2}(\dfrac{y}{x})^2=\ln x+2$.

(5) 方程为化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^2+x^2}{xy}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$，它是齐次方程，令 $u=\dfrac{y}{x}$，则原方程可化为可分离变量的方程 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{u}$，由前题可知，原方程的通解为 $\dfrac{1}{2}(\dfrac{y}{x})^2=\ln Cx$，

又 $y\big|_{x=1}=1$，解得 $C=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$，故方程的特解为 $\dfrac{1}{2}(\dfrac{y}{x})^2=\ln\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}x$，即 $\dfrac{1}{2}(\dfrac{y}{x})^2=\ln x+\dfrac{1}{2}$.

3. 求下列微分方程的通解:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{y}{x}=2x^2$；　　(2) $(x-2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+2(x-2)^3$；

(3) $(x^2+1)y'+2xy=4x^2$；　　(4) $y'+f'(x)y=f(x)f'(x)$.

解：(1) 方程为一阶线性微分方程，其中 $P(x)=-\frac{1}{x}$， $Q(x)=2x^2$，

故方程的通解为 $y=\mathrm{e}^{\int\frac{\mathrm{d}x}{x}}(2\int x^2\mathrm{e}^{-\int\frac{\mathrm{d}x}{x}}\mathrm{d}x+C)=x(2\int x\mathrm{d}x+C)=x(x^2+C)$.

(2) 方程为一阶线性微分方程，其中 $P(x)=-\frac{1}{x-2}$， $Q(x)=2(x-2)^2$，

故方程的通解为 $y=\mathrm{e}^{\int\frac{\mathrm{d}x}{x-2}}(2\int(x-2)^2\mathrm{e}^{-\int\frac{\mathrm{d}x}{x-2}}\mathrm{d}x+C)$

$$=(x-2)(2\int(x-2)\mathrm{d}x+C)=(x-2)[(x-2)^2+C].$$

(3) 方程为一阶线性微分方程，其中 $P(x)=\frac{2x}{x^2+1}$， $Q(x)=\frac{4x^2}{x^2+1}$，

故方程的通解为 $y=\mathrm{e}^{-2\int\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x}(4\int\frac{x^2}{x^2+1}\mathrm{e}^{2\int\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)=\frac{1}{x^2+1}(4\int x^2\mathrm{d}x+C)$

$$=\frac{1}{x^2+1}(\frac{4}{3}x^3+C).$$

(4) 方程为一阶线性微分方程，其中 $P(x)=f'(x)$， $Q(x)=f(x)f'(x)$，

故方程的通解为 $y=\mathrm{e}^{-\int f'(x)\mathrm{d}x}(\int f(x)f'(x)\mathrm{e}^{\int f'(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)$

$$=\mathrm{e}^{-f(x)}(\int f(x)f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x+C)=\mathrm{e}^{-f(x)}(\int f(x)\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}f(x)+C)$$

$$=\mathrm{e}^{-f(x)}(\int f(x)\mathrm{d}\mathrm{e}^{f(x)}+C)=\mathrm{e}^{-f(x)}(f(x)\mathrm{e}^{f(x)}-\int\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}f(x)+C)\text{。}$$

$$=\mathrm{e}^{-f(x)}(f(x)\mathrm{e}^{f(x)}-\mathrm{e}^{f(x)}+C)=f(x)-1+C\mathrm{e}^{-f(x)}.$$

4. 求下列伯努利微分方程的通解:

(1) $y'+\frac{y}{x}=2x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{7}{2}}$； (2) $x\mathrm{d}y-[y+xy^3(\ln x+1)]\mathrm{d}x=0$；

(3) $y'+y=y^2(\cos x-\sin x)$； (4) $(e^x+3y^2)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y=0$.

解：(1) 方程变形为 $y^{-\frac{7}{2}}y'+\frac{y^{-\frac{5}{2}}}{x}=2x^{-\frac{1}{2}}$，令 $z=y^{-\frac{5}{2}}$，

则原方程可化为一阶线性微分方程 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{5}{2x}z=-5x^{-\frac{1}{2}}$，

从而 $z=\mathrm{e}^{\frac{5}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x}}(-5\int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x}}\mathrm{d}x+C)=x^{\frac{5}{2}}(-5\int x^{-3}\mathrm{d}x+C)=x^{\frac{5}{2}}(\frac{5}{2}x^{-2}+C)=(\frac{5}{2}x^{\frac{1}{2}}+Cx^{\frac{5}{2}})$，

故方程的通解为 $y^{-\frac{5}{2}}=(\frac{5}{2}x^{\frac{1}{2}}+Cx^{\frac{5}{2}})$。

(2) 方程变形为 $y^{-3}y'-\frac{y^{-2}}{x}=\ln x+1$，令 $z=y^{-2}$，

则原方程可化为一阶线性微分方程 $\frac{dz}{dx}+\frac{2}{x}z=-2(\ln x+1)$，

从而 $z=e^{-2\int\frac{dx}{x}}[-2\int(\ln x+1)e^{2\int\frac{dx}{x}}dx+C]=\frac{1}{x^2}[-2\int x^2(\ln x+1)dx+C]$

$$=\frac{1}{x^2}[-\frac{2}{3}\int(\ln x+1)dx^3+C]=\frac{1}{x^2}[-\frac{2}{3}x^3(\ln x+1)+\frac{2}{3}\int x^2dx+C]$$

$$=\frac{1}{x^2}[-\frac{2}{3}x^3(\ln x+1)+\frac{2}{9}x^3+C]=-\frac{2}{3}x(\ln x+1)+\frac{2}{9}x+\frac{C}{x^2}$$

故方程的通解为 $\frac{1}{y^2}=-\frac{2}{3}x(\ln x+1)+\frac{2}{9}x+\frac{C}{x^2}$.

(3) 方程变形为 $y^{-2}y'+y^{-1}=\cos x-\sin x$，令 $z=y^{-1}$，

则原方程可化为一阶线性微分方程 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-z=\sin x-\cos x$，

从而 $z=e^{\int dx}[\int(\sin x-\cos x)e^{-\int dx}dx+C]=e^x[\int(\sin x-\cos x)e^{-x}dx+C_1]$，

又 $\int(\sin x-\cos x)e^{-x}dx=\int(\cos x-\sin x)de^{-x}=(\cos x-\sin x)e^{-x}-\int e^{-x}d(\cos x-\sin x)$

$$=(\cos x-\sin x)e^{-x}+\int(\sin x+\cos x)e^{-x}dx=(\cos x-\sin x)e^{-x}-\int(\sin x+\cos x)de^{-x}$$

$$=(\cos x-\sin x)e^{-x}-(\sin x+\cos x)e^{-x}+\int e^{-x}d(\sin x+\cos x)$$

$$=-2\sin x\cdot e^{-x}-\int(\sin x-\cos x)e^{-x}dx，$$

所以 $\int(\sin x-\cos x)e^{-x}dx=-\sin x\cdot e^{-x}+C_2$，

故 $z=e^x[\int(\sin x-\cos x)e^{-x}dx+C]=-\sin x+Ce^x$，

因此，原方程的通解为 $(Ce^x-\sin x)y=1$.

(4) 方程可变形为 $\frac{dy^2}{dx}+\frac{3}{x}y^2=-\frac{e^x}{x}$，它是一个关于 y^2 的一阶线性微分方程，

从而 $y^2=e^{-3\int\frac{dx}{x}}(-\int\frac{e^x}{x}e^{3\int\frac{dx}{x}}dx+C)=\frac{1}{x^3}(-\int x^2e^xdx+C)=\frac{1}{x^3}(-\int x^2de^x+C)$

$$=\frac{1}{x^3}(-x^2e^x+2\int xe^xdx+C)=\frac{1}{x^3}(-x^2e^x+2\int xde^x+C)$$

$$=\frac{1}{x^3}(-x^2e^x+2xe^x-2e^x+C).$$

（B）

1. 若 $y(x)$ 为连续函数，且满足条件 $\int_0^x[(x+1)t-x]y(t)dt=7x$，$y(1)=2$，求函数 $y(x)$.

解：因为 $(x+1)\int_0^x t\,y(t)\mathrm{d}t-x\int_0^x y(t)\mathrm{d}t=7x$，等式两边关于 x 求导两次，可得

$x^2y'(x)+(3x-1)y(x)=0$，这是一个一阶齐次线性微分方程，

从而 $y(x)=C\mathrm{e}^{-\int\frac{3x-1}{x^2}\mathrm{d}x}=C\mathrm{e}^{-\int(\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x}=C\mathrm{e}^{-3\ln x-\frac{1}{x}}$，又 $y(1)=2$，所以，$C=2\mathrm{e}$，

故所求函数为 $y=2\mathrm{e}^{-3\ln x-\frac{1}{x}+1}=2\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}+1}}{x^3}$，即 $x^3\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}y=2\mathrm{e}$.

2. 求一曲线的方程，该曲线通过原点，且在点 (x,y) 处的切线斜率等于 $2x+y$.

解：由题意，所求曲线方程满足 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=2x$，$y(0)=0$，

从而 $y=e^{\int\mathrm{d}x}(2\int xe^{-\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)=e^x(2\int xe^{-x}dx+C)=e^x(-2\int xde^{-x}+C)$

$$=e^x(-2xe^{-x}+2\int e^{-x}dx+C)=e^x(-2xe^{-x}-2e^{-x}+C)=Ce^x-2x-2，$$

又 $y(0)=0$，所以 $C=2$，故所求曲线方程为 $y=2(e^{x}-x-1)$。

3. 镭的衰变规律是：衰减速度与其现存量 $\boldsymbol{R}$ 成正比，若经过 1600 年后，镭剩余原始量 $\boldsymbol{R_0}$ 的一半，试求镭的现存量 $\boldsymbol{R}$ 与时间的关系.

解：设镭的现存量 R 与时间的关系为 $R=R(t)$，由题意，$\dfrac{dR}{dt}=kR$，$R(0)=R_0$，$R(1600)=\dfrac{1}{2}R_0$

从而 $R=Ce^{k\int dt}=Ce^{kt}$，又 $R(0)=R_0$，$R(1600)=\dfrac{1}{2}R_0$，故 $C=R_0$，$k=-\dfrac{\ln 2}{1600}$

所以，镭的现存量 R 与时间的关系曲线方程为 $R=R_0e^{-\frac{\ln 2}{1600}t}$。

习 题 6.3 高阶微分方程

(A)

1.求下列各微分方程的通解:

(1) $y''+5y'+6y=0$；

(2) $y''+6y'+13y=0$；

(3) $y^{(4)}-y=0$；

(4) $y^{(4)}+2y'''+y''=0$；

(5) $2y''+y'-y=(x+2)e^{x}$；

(6) $2y''+3y'=x^2-3x+4$；

(7) $y''-2y'+5y=e^{x}(\sin x+\cos x)$；

(8) $y''-6y'+9y=(2x+1)e^{3x}$.

解：(1)特征方程 $r^2+5r+6=0$ 有两个相异的特征根 $r_1=-3, r_2=-2$。

因此，方程的通解为 $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-2x}$，C_1,C_2 为任意常数。

(2)特征方程 $r^2+6r+13=0$ 有共轭特征复根 $r_{1,2}=-3\pm 2i$。

因此，方程的通解为 $y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$，$C_1,C_2$ 为任意常数。

(3)特征方程 $r^4-1=0$ 有四个特征根 $r_1=1, r_2=-1, r_3=i, r_4=-i$。

因此，方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$，$C_1,C_2,C_3,C_4$ 为任意常数。

(4)特征方程 $r^4+2r^3+r^2=0$ 有两对二重根 $r_1=r_2=0, r_3=r_4=-1$，

因此，方程的通解为 $y=C_1+C_2x+C_3\mathrm{e}^{-x}+C_4x\mathrm{e}^{-x}$，$C_1,C_2,C_3,C_4$ 为任意常数。

(5)特征方程 $2r^2+r-1=0$ 有两个相异的特征根 $r_1=-1,\ r_2=\dfrac{1}{2}$，所以原方程对应的齐次方

程的通解为$Y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$。

由于 $f(x)=(x+2)\mathrm{e}^x$ 中的$\lambda=1$不是特征根,所以设原方程的特解为$y^*=(b_0x+b_1)\mathrm{e}^x$。

将y^*代入原方程,解得$b_0=\dfrac{1}{2},b_1=-\dfrac{1}{4},y^*=(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4})\mathrm{e}^x$。

所以，原方程的通解为$y=Y+y^*=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}+\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}\right)\mathrm{e}^x$，$C_1,C_2$为任意常数。

(6)特征方程$2r^2+3r=0$有两个相异的特征根$r_1=0,\ r_2=-\dfrac{3}{2}$，所以原方程对应的齐次方程的通解为$Y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}$。

由于 $f(x)=x^2-3x+4$ 中的$\lambda=0$是特征单根,所以设原方程的特解为

$y^*=x(b_0x^2+b_1x+b_2)$。将y^*代入原方程，解得

$b_0=\dfrac{1}{9},b_1=-\dfrac{13}{18},b_2=\dfrac{62}{27},y^*=\dfrac{1}{9}x^3-\dfrac{13}{18}x^2+\dfrac{62}{27}x$。

所以，原方程的通解为$y=Y+y^*=C_1+C_2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}+\dfrac{1}{9}x^3-\dfrac{13}{18}x^2+\dfrac{62}{27}x,\ C_1,C_2$为任意常数。

(7)特征方程$r^2-2r+5=0$有一对共轭的复根$r_{1,2}=1\pm2i$,于是原方程对应的齐次方程的通解为$Y=\mathrm{e}^x(C_1\cos2x+C_2\sin2x)$。

由于 $f(x)=\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)$ 中的$\lambda=1,\ \omega=1$,而$\lambda+i\omega=1+i$不是特征根，则设原方程的特解为$y^*=\mathrm{e}^x(a\cos x+b\sin x)$,将它代入原方程并整理得

$3b\sin x+3a\cos x=\sin x+\cos x$,解得$a=b=\dfrac{1}{3}$,从而$y^*=\mathrm{e}^x(\dfrac{1}{3}\cos x+\dfrac{1}{3}\sin x)$。

所以，原方程的通解为$y=\mathrm{Y}+y^*=\mathrm{e}^x(C_1\cos2x+C_2\sin2x+\dfrac{1}{3}\cos x+\dfrac{1}{3}\sin x)$，$C_1,C_2$为任意常数。

(8)特征方程$r^2-6r+9=0$有二重特征根$r_1=r_2=3$，所以原方程对应的齐次方程的通解为$Y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{3x}$。

由于 $f(x)=(2x+1)\mathrm{e}^{3x}$ 中的$\lambda=3$是二重特征根,所以设原方程的特解为

$y^*=x^2(b_0x+b_1)\mathrm{e}^{3x}$，将$y^*$代入原方程，解得

$b_0=\frac{1}{3}, b_1=\frac{1}{2}, y^*=x^2(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2})e^{3x}=(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2)e^{3x}$。

所以，原方程的通解为 $y=Y+y^*=(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3)e^{3x}, C_1, C_2$ 为任意常数。

2.求下列各方程满足所给条件的特解:

(1) $y''-4y'+3y=0,\ y|_{x=0}=6,\ y'|_{x=0}=10$；(2) $4y''+4y'+y=0,\ y|_{x=0}=2,\ y'|_{x=0}=0$；

(3) $y''-6y'+5y=4x+1,\ y|_{x=0}=1,\ y'|_{x=0}=2$；(4) $y''-3y'+2y=5,\ y|_{x=0}=1,\ y'|_{x=0}=2$.

解：(1)特征方程 $r^2-4r+3=0$ 有二相异的特征根 $r_1=1, r_2=3$。

因此，原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$， C_1, C_2 为任意常数。

将初始条件 $y\big|_{x=0}=6,\ y'\big|_{x=0}=10$ 代入通解，解得 $C_1=2, C_2=4$。

所以，原方程的特解是 $y=2e^x+4e^{3x}$。

(2)特征方程 $4r^2+4r+1=0$ 有二重特征根 $r_1=r_2=-\frac{1}{2}$。

因此，原方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{1}{2}x}$， C_1, C_2 为任意常数。

将初始条件 $y\big|_{x=0}=2,\ y'\big|_{x=0}=0$ 代入通解，解得 $C_1=2, C_2=1$。

所以，原方程的特解是 $y=(2+x)e^{-\frac{1}{2}x}$。

(3)特征方程 $r^2-6r+5=0$ 有相异的特征根 $r_1=1, r_2=5$，所以原方程对应的齐次方程的通解为 $Y=C_1e^x+C_2e^{5x}$， C_1, C_2 为任意常数。

由于 $f(x)=4x+1$ 中的 $\lambda=0$ 不是特征根，所以设原方程的特解为 $y^*=b_0x+b_1$。将 y^* 代入原方程，解得 $b_0=\frac{4}{5}, b_1=\frac{29}{25}, y^*=\frac{4}{5}x+\frac{29}{25}$。

于是，原方程的通解为 $y=Y+y^*=C_1e^x+C_2e^{5x}+\frac{4}{5}x+\frac{29}{25}$， C_1, C_2 为任意常数。

将初始条件 $y\big|_{x=0}=1,\ y'\big|_{x=0}=2$ 代入通解，解得 $C_1=-\frac{1}{2}, C_2=\frac{34}{100}$。

所以，原方程的特解是 $y=-\frac{1}{2}e^x+\frac{34}{100}e^{5x}+\frac{4}{5}x+\frac{29}{25}$。

(4)特征方程 $r^2-3r+2=0$ 有相异的特征根 $r_1=1, r_2=2$，所以原方程对应的齐次方程的通解为 $Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$， C_1, C_2 为任意常数。

由于 $f(x)=5$ 中的 $\lambda=0$ 不是特征根，所以设原方程的特解为 $y^*=b_0$。将 y^* 代入原方程，

解得$b_0=\dfrac{5}{2}$ ，$y^*=\dfrac{5}{2}$。

于是，原方程的通解为$y=Y+y^*=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+\dfrac{5}{2}$， C_1,C_2为任意常数。

将初始条件$y\big|_{x=0}=1,\ y'\big|_{x=0}=2$代入通解，解得$C_1=-5,C_2=\dfrac{7}{2}$。

所以，原方程的特解是$y=-5\mathrm{e}^x+\dfrac{7}{2}\mathrm{e}^{2x}+\dfrac{5}{2}$。

3.求下列各微分方程的通解:

(1) $y''=\dfrac{1}{1+x^2}$； (2) $y'''=xe^x$； (3) $y''=x+\cos x$；

(4) $y''=y'+x$； (5) $y''=\dfrac{1}{\sqrt{y}}$； (6) $y''=(y')^3+y'$.

解：(1)逐次积分得

$y'=\arctan x+C_1$，C_1为任意常数，

$y=\int\arctan x\mathrm{d}x+C_1x+C_2=x\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2$， C_1,C_2为任意常数。

(2)逐次积分得$y''=\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+C_1=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C_1$，$C_1$为任意常数，

$y'=\int(x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C_1)\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^x+C_1x+C_2$， C_1,C_2为任意常数，

$y=\int(x\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^x+C_1x+C_2)\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-3\mathrm{e}^x+C_1x^2+C_2x+C_3$， C_1,C_2,C_3为任意常数。

(3)逐次积分得$y'=\dfrac{1}{2}x^2+\sin x+C_1$，$C_1$为任意常数，

$y=\int(\dfrac{1}{2}x^2+\sin x+C_1)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{6}x^3-\cos x+C_1x+C_2$， C_1,C_2为任意常数。

(4)(方法一) 令$y'=p$，则$y''(x)=p'$，原方程化为$p'-p=x$,它是一阶线性方程。

利用通解公式或常数变异法解得通解为$p=-x+1+C_1\mathrm{e}^x$,即$y'=-x-1+C_1\mathrm{e}^x$,C_1为任意常数。

两边积分，得原方程的通解为$y=-\dfrac{1}{2}x^2-x+C_1\mathrm{e}^x+C_2$,$C_1,C_2$为任意常数。

(方法二) 特征方程$r^2-r=0$有相异的特征根$r_1=0,r_2=1$，所以原方程对应的齐次方程的通解为$Y=C_1+C_2\mathrm{e}^x$， C_1,C_2为任意常数。

由于$f(x)=x$中的$\lambda=0$是特征单根，所以设原方程的特解为$y^*=x(b_0x+b_1)$。将y^*代入原方程，解得$b_0=-\dfrac{1}{2},b_1=-1$ ，$y^*=-\dfrac{1}{2}x^2-x$。

于是，原方程的通解为$y=Y+y^*=-\frac{1}{2}x^2-x+C_1e^x+C_2$， C_1,C_2为任意常数。

(5)令$y'=p(y)$，则$y''=p\frac{dp}{dy}$，代入原方程得到$p\frac{dp}{dy}=\frac{1}{\sqrt{y}}$，

分离变量并积分得$\frac{1}{2}p^2=2\sqrt{y}+C_1'$，即$\frac{dy}{dx}=\pm 2\sqrt{\sqrt{y}+C_1}$，$C_1$为使方程有意义的任意常数。

令$z=\sqrt{\sqrt{y}+C_1}$，$z\geq 0$，将方程换元化简为$(z^2-C_1)dz=\pm\frac{1}{2}dx$

积分得$\frac{z^3}{3}-C_1z=\pm\frac{1}{2}x+C_2$， C_1,C_2为使方程有意义的任意常数。

将z代如化简得原方程的通解为

$\frac{2\left(\sqrt{\sqrt{y}+C_1}\right)^3}{3}-2C_1\sqrt{\sqrt{y}+C_1}=\pm x+C_2$，其中$C_1,C_2$为使方程有意义的任意常数。

(6)令$y'=p(y)$，则$y''=p\frac{dp}{dy}$，代入原方程得到$p\frac{dp}{dy}=p^3+p$

当$p=0$时，原方程的通解为$y=C$,C 为任意常数。

当$\frac{dp}{dy}=p^2+1$时，分离变量并积分得$p=\tan(y+C_1)$， C_1为任意常数，

即$\frac{dy}{dx}=\tan(y+C_1)$，解此方程得$y=\arcsin(C_2e^x)+C_1$， C_1,C_2为任意常数。

所以，原方程的通解为$y=C$,或$y=\arcsin(C_2e^x)+C_1$， C,C_1,C_2为任意常数。

4.求下列各方程满足所给条件的特解:

(1) $yy''+2(y')^2=0,\ y|_{x=1}=1,\ y'|_{x=1}=\frac{1}{2}$；　(2) $y''+2x(y')^2=0,\ y|_{x=0}=1,\ y'|_{x=0}=-\frac{1}{2}$；

(3) $yy''=2(y')^2-2y'$，　$y\big|_{x=0}=1,\ y'\big|_{x=0}=2$.

解：(1)令$y'=p(y)$，则$y''=p\frac{dp}{dy}$，代入原方程得到$yp\frac{dp}{dy}+2p^2=0$。

由已知条件知，特解$p\neq 0$，于是$y\frac{dp}{dy}+2p=0$，

分离变量并两边积分得$p=C_1y^{-2}$， C_1为任意常数。

由$y\big|_{x=1}=1,\ y'\big|_{x=1}=\frac{1}{2}$得$C_1=\frac{1}{2}$，则$p=\frac{1}{2}y^{-2}$，即$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}y^{-2}$，分离变量并两边积分得

$\frac{1}{3}y^3=\frac{1}{2}x+C_2$， C_2为任意常数。由$y\big|_{x=1}=1$ 得$C_2=-\frac{1}{6}$。

所以，原方程的特解为$2y^3=3x-1$。

(2)令 $y'=p$，则 $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，代入原方程得到$\frac{dp}{dx}+2xp^2=0$，

分离变量并两边积分得 $p=\frac{1}{x^2+C_1}$， C_1为任意常数。

由 $y'\Big|_{x=0}=-\frac{1}{2}$ 得 $C_1=-2$，则 $p=\frac{1}{x^2-2}$，即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x^2-2}$，分离变量并两边积分得

$C_2\mathrm{e}^{2\sqrt{2}y}=\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}$， C_2为任意常数。由$y\big|_{x=0}=1$ 得$C_2=-\mathrm{e}^{-2\sqrt{2}}$。

所以，原方程的特解为$\mathrm{e}^{2\sqrt{2}(y-1)}=\frac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}+x}$，即$\mathrm{e}^{2\sqrt{2}(y-1)}(\sqrt{2}+x)+x-\sqrt{2}=0$。

(3)令 $y'=p(y)$，则 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入原方程得到$yp\frac{dp}{dy}=2p^2-2p$。

由已知条件知，特解 $p\neq 0$，于是$y\frac{dp}{dy}=2(p-1)$，

分离变量并两边积分得 $p=C_1y^2+1$， C_1为任意常数。

由 $y\big|_{x=0}=1,\ y'\big|_{x=0}=2$得$C_1=1$，则 $p=y^2+1$，即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2+1$，分离变量并两边积分得

$\arctan y=x+C_2$， C_2为任意常数。由$y\big|_{x=0}=1$ 得$C_2=\frac{\pi}{4}$。

所以，原方程的特解为$y=\tan(x+\frac{\pi}{4})$。

(B)

1.试求$y''=x$的经过点$M(0,1)$且在此点与直线$y=\frac{x}{2}+1$相切的积分曲线.

解：将方程$y''=x$逐次积分得 $y'=\frac{1}{2}x^2+C_1$，C_1为任意常数，

$y=\int(\frac{1}{2}x^2+C_1)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}x^3+C_1x+C_2$， C_1,C_2为任意常数，

由题可知初始条件为$y\big|_{x=0}=1,\ y'\Big|_{x=0}=\frac{1}{2}$，代入以上$y,y'$表达式可得$C_1=\frac{1}{2},C_2=1$。

故所求的积分曲线为$y=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x+1$。

2.已知某曲线$y=y(x)\ (y'(x)>0)$在第一象限内且经过坐标原点,其上任一点M处的切线与x轴交于点T,过点M作x轴的垂线,垂足为点P.又知直线$MT,\ MP$与x轴所围成的三角形MPT与曲边三角形OMP的面积之比恒为常数$k\ (k>\frac{1}{2})$,求此曲线方程.

解：设曲线$y=y(x)\ (y'(x)>0)$上点M的坐标为$M(x,y)$，则点P的坐标为$P(x,0)$，且过点M的切线方程为$Y-y=y'(X-x)$，于是点T的坐标为$T(x-\frac{y}{y'},0)$。

由题意得曲线满足的方程为 $\frac{1}{2}\frac{y^2}{y'}=k\int_0^x ydx$，两边求导并化简得微分方程

$$yy''+2(k-1)y'^2=0$$

令$y'=p(y)$，则$y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入原方程得到$yp\frac{dp}{dy}+2(k-1)p^2=0$。

由已知条件知，特解$p>0$，于是$y\frac{dp}{dy}+2(k-1)p=0$，分离变量并两边积分得

$p=Cy^{2(1-k)}$，C 为任意常数，即$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=Cy^{2(1-k)}$，分离变量并两边积分得

$y^{2k-1}=(2k-1)(Cx+C')$,C 为任意常数，由$y\big|_{x=0}=0$得$C'=0$。

故所求的积分曲线为$y\ =[C(2k-1)x]^{\frac{1}{2k-1}}$，$C$ 为任意常数。

3.设有一质量为m的物体,在空气中由静止开始落下,如果空气阻力$R=C^2v^2$(其中C为常数,v为物体运动速度),试求物体下落的距离s与时间t的函数关系.

解：由已知条件，以及牛顿第二定律，可得距离s满足以下方程

$$\begin{cases} ms''=mg-C^2s'^2 \\ s\big|_{t=0}=0,\quad s'\big|_{t=0}=0. \end{cases}$$

在方程$ms''=mg-C^2s'^2$中令$s'=x(t)$，则方程为$x'=g-\frac{C^2}{m}x^2$，解此方程得

$\frac{\sqrt{mg}+Cx}{\sqrt{mg}-Cx}=C_1\mathrm{e}^{\frac{2C\sqrt{m}g}{m}t}$，$C_1$为任意常数，由$x\big|_{t=0}=s'\big|_{t=0}=0$得$C_1=1$。

又令 $a=\dfrac{2C\sqrt{mg}}{m}$，则方程化为 $x=\dfrac{\sqrt{mg}}{C}\dfrac{e^{at}-1}{e^{at}+1}$，即 $ds=\dfrac{\sqrt{mg}}{C}\dfrac{e^{at}-1}{e^{at}+1}dt$。

积分得 $s=\dfrac{\sqrt{mg}}{aC}[-at+2\ln(e^{at}+1)]+C_2$, C_2 为任意常数，由 $s\big|_{t=0}=0$ 得 $C_2=0$。

故所求的距离函数为 $s=\dfrac{m}{2C^2}[-at+2\ln(e^{at}+1)]$ $=\dfrac{m}{2C^2}[at+2\ln(1+e^{-at})]$，其中 $a=\dfrac{2C\sqrt{mg}}{m}$。

4.设 $f(0)=0$ 且满足 $f'(x)=1+\int_0^x[3e^{-t}-f(t)]dt$,求函数 $f(x)$.

解：设 $y=f(x)$，并将原积分方程两边求导得 $y''+y=3e^{-x}$。

特征方程 $r^2+1=0$ 有共轭特征复根 $r_1=i, r_2=-i$，所以原方程对应的齐次方程的通解为 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$， C_1,C_2 为任意常数。

由于 $3e^{-x}$ 中的 $\lambda=-1$ 不是特征根，所以设原方程的特解为 $y^*=b_0e^{-x}$。将 y^* 代入方程，解得 $b_0=\dfrac{3}{2}$ ， $y^*=\dfrac{3}{2}e^{-x}$。

于是，原方程的通解为 $y=Y+y^*=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{3}{2}e^{-x}$， C_1,C_2 为任意常数。

由题知初始条件为 $y\big|_{x=0}=0,\ y'\big|_{x=0}=1$，将其代入通解，解得 $C_1=-\dfrac{3}{2},C_2=\dfrac{5}{2}$。

故所求的函数为 $f(x)=-\dfrac{3}{2}\cos x+\dfrac{5}{2}\sin x+\dfrac{3}{2}e^{-x}$。

5.设二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^x$ 的一个特解为 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$,试确定常数 α,β,γ,并求该方程的通解.

解：由 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$ 得 $y'=2e^{2x}+2e^x+xe^x$， $y''=4e^{2x}+3e^x+xe^x$，

将 y,y',y'' 代入 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^x$ 并比较系数得 $\begin{cases}4+2\alpha+\beta=0\\1+\alpha+\beta=0\\3+2\alpha+\beta=\gamma\end{cases}$，解得

$\alpha=-3,\beta=2,\gamma=-1$，则方程为 $y''-3y'+2y=-e^x$。

于是特征方程 $r^2-3r+2=0$ 有共轭特征复根 $r_1=1, r_2=2$，所以原方程对应的齐次方程的通解为 $Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$， C_1,C_2 为任意常数。

已知方程的一个特解为 $y=\mathrm{e}^{2x}+(1+x)\mathrm{e}^{x}$，则原方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{2x}+(1+x)\mathrm{e}^{x}=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^{x}，\quad C_1,C_2 \text{ 为任意常数。}$$

6.设 $f(x)$ 连续且满足 $f(x)=\mathrm{e}^{x}+\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$,并求该函数 $f(x)$.

解：将方程 $f(x)=\mathrm{e}^{x}+\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$ 化为

$$f(x)=\mathrm{e}^{x}+\sin x-x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

将原积分方程两边求导，并设 $y=f(x)$ 得 $y''+y=\mathrm{e}^{x}-\sin x$ 。

于是特征方程 $r^2+1=0$ 有共轭特征复根 $r_1=i, r_2=-i$，所以原方程对应的齐次方程的通解为 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$， C_1,C_2 为任意常数。

又可设方程 $y''+y=-\sin x$ 的特解为 $y_1^*=x(a\sin x+b\cos x)$，解得 $y_1^*=\frac{1}{2}x\cos x$；又易得方程 $y''+y=\mathrm{e}^{x}$ 的特解为 $y_2^*=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}$ 。则原方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}+x\cos x)，\quad C_1,C_2 \text{ 为任意常数。}$$

习 题 6.4 微分方程组初步

1.求下列方程组的通解:

（1）$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=z,\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=y;\end{cases}$

（2）$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+y+3,\\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+y-3;\end{cases}$

（3）$\begin{cases}x'=y+1,\\ y'=x+1;\end{cases}$

（4）$\begin{cases}x'=2x+y,\\ y'=4y-x;\end{cases}$

（5）$\begin{cases}x'=x+2y+16te^{t},\\ y'=2x-2y.\end{cases}$

解：（1）该常系数线性微分方程组含有两个未知函数 $\boldsymbol{y(x)}$, $\boldsymbol{z(x)}$. 设消去$\boldsymbol{z}$, 将第一式代入第二式有$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{d}\mathrm{x}^2}=\mathrm{y}$，这个二阶常系数齐次线性微分方程的通解是 $y(x)=C_1e^{x}+C_2e^{-x}$，代入第一式得$z(x)=C_1e^{x}-C_2e^{-x}$。

故综上可知方程组的通解为 $y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$，$z(x)=C_1e^x-C_2e^{-x}$，C_1,C_2 为任意常数。

（2）该常系数线性微分方程组含有两个未知函数 $x(t)$，$y(t)$. 将第一式减去第二式有 $\frac{dy}{dt}=-x+3$，将上式代入第一式有$-\frac{d^2y}{dt^2}=y$，这个二阶常系数非齐次线性微分方程的通解是 $y(t)=C_1\cos t+C_2\sin t$，于是$x(t)=C_1\sin t-C_2\cos t+3$。

故综上可知方程组的通解为$x(t)=C_1\sin t-C_2\cos t+3$，$y(t)=C_1\cos t+C_2\sin t$，$C_1,C_2$ 为任意常数。

（3）由第一式可得$y=\frac{dx}{dt}-1$，代入第二式得$\frac{d^2x}{dt^2}=x+1$，这是一个二阶常系数非齐次线性微分方程. 首先考虑其齐次方程的通解$x(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}$。

假设该非齐次微分方程有如下形式的特解$x_p(t)=A$,代入该非齐次微分方程得 $A=-1$. 于是我们得改非齐次方程的通解为 $x(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}-1$，于是 $y(t)=C_1e^t-C_2e^{-t}-1$。

故综上可知方程组的通解为$x(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}-1$，$y(t)=C_1e^t-C_2e^{-t}-1$，C_1,C_2 为任意常数。

（4）由第二式可得 $x=4y-\dfrac{dy}{dx}$，代入第一式可得$\frac{d^2y}{dt^2}-6\frac{dy}{dt}+9y=0$，这个二阶常系数齐次线性微分方程的特征方程是$\lambda^2-6\lambda+9=0$，有重根 $\lambda_1=\lambda_2=3$. 故该微分方程的通解可表示为$y(t)=(C_1+C_2t)e^{3t}$，于是$x(t)=[C_1+C_2(t-1)]e^{3t}$。

故综上可知方程组的通解为$x(t)=[C_1+C_2(t-1)]e^{3t}$，$y(t)=(C_1+C_2t)e^{3t}$，$C_1,C_2$ 为任意常数。

（5）由第二式可得$2x=\frac{dy}{dt}+2y$，求一次导数得$2\frac{dx}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}$

将 2 倍的第一式减去第二式得$2\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}=6y+32te^t$，将上述两式相减得

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}-\frac{dy}{dt}=6y+32te^t,\text{ 即}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-6y=32te^t.$$

对于这个二阶常系数非齐次线性微分方程的通解. 首先考虑其齐次形式的通解为$y(t)=C_1e^{-3t}+C_2e^{2t}$, 假设该非齐次微分方程有如下形式的特解$y_p(t)=(A+Bt)e^t$,代入该非齐次微分方程得$A=-6, B=-8$. 于是我们有该非齐次微分方程的通解为$y(t)=C_1e^{-3t}+C_2e^{2t}-2(3+4t)e^t$,于是$x(t)=-\frac{1}{2}C_1e^{-3t}+2C_2e^{2t}-(13+12t)e^t$.

故综上可知方程组的通解为$x(t)=-\frac{1}{2}C_1e^{-3t}+2C_2e^{2t}-(13+12t)e^t$,$y(t)=C_1e^{-3t}+C_2e^{2t}-2(3+4t)e^t$, C_1,C_2 为任意常数。

2. 求下列方程组的特解:

(1) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\ \ x|_{x=0}=0,\\ \dfrac{dy}{dt}=-x,\ \ y|_{t=0}=1;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x'=3x+8y,\\ y'=-x-3y,\\ x(0)=6, y(0)=-2.\end{cases}$

解：(1)将第一式代入第二式得$\frac{d^2x}{dt^2}=-x$,这个二阶常系数线性微分方程的通解是$x(t)=C_1\cos t+C_2\sin t$,于是$y(t)=-C_1\sin t+C_2\cos t$.根据初值条件有$C_1=0, C_2=1$.

故方程的特解为$x(t)=\sin t$, $y(t)=\cos t$.

(2)将第二式化为$x=-\frac{dy}{dt}-3y$,代入第一式有$\frac{d^2y}{dt^2}=y$,这个二阶常系数线性微分方程的通解是 $y(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}$ ，于是 $x(t)=-4C_1e^t-2C_2e^{-t}$ ，初值条件有$-4C_1-2C_2=6, C_1+C_2=-2$,即$C_1=-1, C_2=-1$

故方程的特解为$x(t)=4e^t+2e^{-t}$,$y(t)=-e^t-e^{-t}$.

总习题六

（A）

1.填空题

(1) 以 $x^2+y^2-2cx=0$ (其中 c 为任意常数)为通解的微分方程是_____________。

解：由题意，所求方程应为一阶微分方程，在上式两端关于 x 求导得 $x+yy'-c=0$，又 $c=\dfrac{x^2+y^2}{2x}$，故所求微分方程为 $x+yy'-\dfrac{x^2+y^2}{2x}=0$，即 $\underline{2xyy'+x^2-y^2=0}$。

(2) 若 $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3\cos x+c_4\sin x$ 是某一常系数齐次线性微分方程的通解，(其中 c_1，c_2，c_3，c_4 为任意常数)，则此微分方程为_____________。

解：由题意，所求方程应为四阶常系数齐次线性微分方程，其特征方程的四个根为 $r_1=r_2=1$，$r_{3,4}=\pm i$，所以其特征方程为 $(r-1)^2(r^2+1)=1$，即 $r^4-2r^3+2r^2-2r+1=0$，

故所求微分方程为 $\underline{y^{(4)}-2y'''+2y''-2y'+y=0}$。

(3) 已知 $y=\dfrac{c_1x+c_2}{x+c_3}$ 是某一微分方程的通解，其中 $\boldsymbol{c_1,c_2,c_3}$ 为任意常数，则此微分方程为________。

解：由题意，所求方程应为三阶微分方程，且有 $y'=\dfrac{c_1c_3-c_2}{(x+c_3)^2}$，$y''=-2\dfrac{c_1c_3-c_2}{(x+c_3)^3}$，$y'''=6\dfrac{c_1c_3-c_2}{(x+c_3)^4}$，从而有 $\dfrac{y''}{y'}=-\dfrac{2}{x+c_3}$，$\dfrac{y'''}{y''}=-\dfrac{3}{x+c_3}$，即 $3\dfrac{y''}{y'}=2\dfrac{y'''}{y''}$，

故所求微分方程为 $\underline{2y'y'''-3y''^2=0}$。

(4) 已知函数 $y=ae^x+be^{-x}+x-1$，其中 a,b 为任意常数，则此函数所满足的线性微分方程为_____________。

解：由题意，所求方程应为二阶常系数非齐次线性微分方程，且其特征根 $r_{1,2}=\pm1$，故其特征方程为 $r^2-1=0$，所以对应的齐次方程为 $y''-y=0$，因此，所求的微分方程为 $y''-y=f(x)$，又 $y^*=x-1$ 是方程的一个特解，代入可得 $y^*=-x+1$。

故所求微分方程为 $\underline{y''-y=-x+1}$。

(5) 若 $f(x)=e^{2x}-\int_0^x(x-t)f(t)dt$，其中 $f(t)$ 连续，则 $f(x)=$_____________。

解：因为 $f(x)=e^{2x}-x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x t\,f(t)dt$，所以 $f'(x)=2e^{2x}-\int_0^x f(t)dt$，$f''(x)+f(x)=4e^{2x}$，其特征方程为 $r^2+1=0$，特征根 $r_{1,2}=\pm i$，所以对应的齐次方程的通解为 $Y=c_1\cos x+c_2\sin x$，又 $\lambda=2$ 不是特征根，所以 $y^*=Ae^{2x}$，代入方程可以解得 $A=\dfrac{4}{5}$，故 $f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+\dfrac{4}{5}e^{2x}$。又 $f(0)=1$，$f'(0)=2$，解得 $c_1=\dfrac{1}{5}$，$c_2=\dfrac{2}{5}$。

所以 $\underline{f(x)=\dfrac{1}{5}\cos x+\dfrac{2}{5}\sin x+\dfrac{4}{5}e^{2x}}$。

(6) 设 $y'+y=g(x)$，$g(x)=\begin{cases}2, 0\le x\le 1\\ 0,\ x>1\end{cases}$，方程在 $[0,+\infty)$ 上满足 $y|_{x=0}=0$ 的解为________。

解：当 $0\le x\le 1$ 时，有 $y'+y=2$，解得 $y=C_1e^{-x}+2$，又 $y|_{x=0}=0$，故 $C_1=-2$，从而，

当 $0\le x\le 1$ 时，$y=-2e^{-x}+2$；当 $x>1$ 时，有 $y'+y=0$，解得 $y=C_2e^{-x}$，因为 $y(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，所以在 $[0,+\infty)$ 上连续，所以 $y(1^-)=y(1^+)=y(1)$，又 $y(1)=y(1^-)=-2e^{-1}+2$，$y(1^+)=C_2e^{-1}$，故 $C_2=2e-2$。

故方程在 $[0,+\infty)$ 上满足 $y\big|_{x=0}=0$ 的解为 $y=\begin{cases}-2e^{-x}+2, 0\le x\le 1\\ (2e-2)e^{-x},\ x>1\end{cases}$。

2.求解下列一阶方程:

(1) $y'=\cos(x-y)-\cos(x+y)$，$y\big|_{x=0}=\dfrac{\pi}{2}$；　　(2) $(y^3-x)y'=y$；

(3) $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$；　　(4) $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=2\sqrt{\dfrac{y}{x}}$。

解：(1) 利用三角函数和差化积公式，原方程为化为 $\dfrac{dy}{dx}=2\sin x\cdot\sin y$，变量分离得 $\dfrac{dy}{\sin y}=2\sin xdx$，两端积分得 $\ln(\csc y-\cot y)+\ln C=-2\cos x$，即 $\ln C\tan\dfrac{y}{2}=-2\cos x$，$C\tan\dfrac{y}{2}=e^{-2\cos x}$，又 $y\big|_{x=0}=\dfrac{\pi}{2}$，解得 $C=e^{-2}$。

故所求方程的特解为 $\tan\dfrac{y}{2}=e^{2(1-\cos x)}$，或 $y=2\arctan e^{2(1-\cos x)}$。

(2) 原方程为变形为 $\dfrac{dx}{dy}+\dfrac{x}{y}=y^2$，这是一个关于未知函数 x 的一阶线性微分方程，

从而原方程的通解为 $x=e^{-\int\frac{dy}{y}}(\int y^2e^{\int\frac{dy}{y}}dy+C)=\dfrac{1}{y}(\int y^3dy+C)=\dfrac{1}{y}(\dfrac{1}{4}y^4+C)$，化简为 $y^4-4xy+C=0$，C 为任意常数。

(3) 原方程是齐次方程，当 $x>0$ 时，整理得 $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{1-\dfrac{y^2}{x^2}}+\dfrac{y}{x}$，令 $u=\dfrac{y}{x}$，方程可化为 $x\dfrac{du}{dx}=\sqrt{1-u^2}$，变量分离并两端积分得 $\arcsin u=\ln(Cx)$，即 $u=\sin\ln(Cx)$，此时，原方程的通解为 $y=x\sin\ln(Cx)$。

当 $x<0$ 时，有 $\dfrac{dy}{dx}=-\sqrt{1-\dfrac{y^2}{x^2}}+\dfrac{y}{x}$，令 $u=\dfrac{y}{x}$，方程可化为可分离变量的方程 $x\dfrac{du}{dx}=-\sqrt{1-u^2}$，变量分离并两端积分可得 $\arcsin u=\ln\dfrac{C}{x}$，即 $u=\sin\ln\dfrac{C}{x}$，此时，原方程的通解为 $y=x\sin\ln\dfrac{C}{x}$。

综上所解，原方程的通解可 $y=\begin{cases}x\sin\ln(Cx), & .x>0,\\ x\sin\ln\left(\dfrac{C}{x}\right), & x<0,\end{cases}$ C 为任意常数。

(4) 原方程为贝努里方程，方程两端同除以 $\sqrt{y}$，得 $\dfrac{1}{\sqrt{y}}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\sqrt{y}}{x}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$，令 $z=\sqrt{y}$，

原方程可化为一阶线性微分方程 $\dfrac{dz}{dx}+\dfrac{z}{2x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，

从而， $z=e^{-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}}(\int\dfrac{1}{\sqrt{x}}e^{\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}}dx+C)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}(\int dx+C)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}(x+C)$，

故原方程的通解为 $xy=(x+C)^2$， C 为任意常数。

3.求解下列高阶方程:

(1) $y'''+4y''+13y'=0$； (2) $y'''-y''=12x^2+6x$； (3) $y''+10y'+25y=4e^{-5x}$；

(4) $y''+3y'+2y=x\sin x$； (5) $y''+y=x\cos x$。

解：(1) 方程的特征方程为 $r^3+4r^2+13r=0$，解得特征根为 $r_1=0$， $r_{2,3}=-2\pm3i$，故原方程的通解为 $y=C_1+e^{-2x}(C_2\cos3x+C_3\sin3x)$， C_1,C_2 为任意常数。

(2) 方程的特征方程为 $r^3-r^2=0$，解得特征根为 $r_{1,2}=0$， $r_3=1$， 故对应的齐次方程特解为 $Y=C_1+C_2x+C_3e^x$；又 $\lambda=0$ 为二重特征根，所以原方程有形如 $y^*=x^2(Ax^2+Bx+C)$ 的特解，将 y^* 代入原方程，可以解得 $A=-1$， $B=-5$， $C=-15$，故 $y^*=-x^2(x^2+5x+15)$。

因此，原方程的通解为 $y=C_1+C_2x+C_3e^x-x^2(x^2+5x+15)$， C_1,C_2 为任意常数。

(3) 方程的特征方程为 $r^2+10r+25=0$，解得特征根为 $r_{1,2}=-5$，故对应的齐次方程的特解为 $Y=(C_1+C_2x)e^{-5x}$，又 $\lambda=-5$ 为二重特征根，所以原方程有形如 $y^*=Ax^2e^{-5x}$ 的特解，将 y^* 代入原方程，解得 $A=2$，故 $y^*=2x^2e^{-5x}$。

因此，原方程的通解为 $y=(C_1+C_2x+2x^2)e^{-5x}$， C_1,C_2 为任意常数。

(4) 方程的特征方程为 $r^2+3r+2=0$，解得特征根为 $r_1=-1$， $r_2=-2$，故对应的齐次方程的特解为 $Y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$，又 $\lambda+i\omega=i$ 不是特征根，所以原方程有形如 $y^*=(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x$ 的特解，将 y^* 代入原方程，解得 $A=-\dfrac{3}{10}$， $B=\dfrac{17}{50}$， $C=\dfrac{1}{10}$， $D=\dfrac{3}{25}$，故 $y^*=(-\dfrac{3}{10}x+\dfrac{17}{50})\cos x+(\dfrac{1}{10}x+\dfrac{3}{25})\sin x$，

因此，原方程的通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+(-\dfrac{3}{10}x+\dfrac{17}{50})\cos x+(\dfrac{1}{10}x+\dfrac{3}{25})\sin x$， C_1,C_2 为任意常数。

(5) 方程的特征方程为 $r^2+1=0$，解得特征根为 $r_{1,2}=\pm i$，故对应的齐次方程的特解为 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$，又 $\lambda+i\omega=i$ 是单特征根，所以原方程有形如 $y^*=x[(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x]$ 的特解，将 y^* 代入原方程，解得 $A=0$， $B=\dfrac{1}{4}$， $C=\dfrac{1}{4}$， $D=0$，故 $y^*=\dfrac{1}{4}x\cos x+\dfrac{1}{4}x^2\sin x$。

因此，原方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{1}{4}x\cos x+\dfrac{1}{4}x^2\sin x$， C_1,C_2 为任意常数。

(B)

1. $y_1(x)$、 $y_2(x)$、 $y_3(x)$ 是 $y'+P(x)y=Q(x)$ 三个不同的特解,证明: $\dfrac{y_3-y_1}{y_2-y_1}$ 为常数.

解：因为 $y_n'+P(x)y_n=Q(x),\ n=1,2,3$，所以

$(y_3'-y_1')+P(x)(y_3-y_1)=0,$ 且 $(y_2'-y_1')+P(x)(y_2-y_1)=0,$

这说明 $\dfrac{y_3-y_1}{y_2-y_1}$ 的分子分母都是一阶线性齐次方程 $y'+P(x)y=0$ 的特解，故 $y_3-y_1=C(y_2-y_1)$，即 $\dfrac{y_3-y_1}{y_2-y_1}$ 为常数.

（或利用导函数恒为零的性质，易得 $\left(\dfrac{y_3-y_1}{y_2-y_1}\right)'=0$，从而 $\dfrac{y_3-y_1}{y_2-y_1}$ 为常数.）

2.设 $y''+p(x)y'=f(x)$ 有一特解为 $\dfrac{1}{x}$,对应的齐次方程有一特解为 x^2,试求: (1) $p(x)$、$f(x)$ 的表达式; (2) 此方程的通解.

解：（1）根据条件，$\begin{cases}\dfrac{2}{x^3}-p(x)\dfrac{1}{x^2}=f(x)\\ 2+2p(x)x=0\end{cases}$，解得 $p(x)=-\dfrac{1}{x},\ f(x)=\dfrac{3}{x^3}$.

（2）故原方程为 $y''-\dfrac{1}{x}y'=\dfrac{3}{x^3}$，由于 $y=1$ 也是这方程对应的齐次方程的特解，根据解的结构，得知原方程的通解为 $y=C_1+C_2x^2+\dfrac{1}{x}$，$C_1,C_2$ 为任意常数。

3.求解下列一阶方程:

(1) $y'-y=e^{2x},y\big|_{x=0}=1$;　(2) $3y'+y=\dfrac{1}{y^2}$;　(3) $y'-\dfrac{y}{x}+y^2=0$;

(4) $(x^3+xy^2)\mathrm{d}x+(x^2y+y^3)\mathrm{d}y=0$;　(5) $(x+y^2)\mathrm{d}x-2xy\mathrm{d}y=0$.

解：（1）这是一阶线性非齐次方程，根据公式，方程的通解为

$$y=e^{-\int -dx}[\int e^{2x}e^{\int -dx}dx+C]=e^x[\int e^{2x}e^{-x}dx+C]=e^x[e^x+C].$$

由初始条件得，$1=y\big|_{x=0}=e^0[e^0+C]$，即 $C=0$，故所求特解为 $y=e^{2x}$.

（2）原方程可以改写为 $3y'=\dfrac{1}{y^2}-y$，所以这是变量可分离的方程。即可改写为 $\dfrac{3y^2dy}{1-y^3}=dx$，积分解得 $y^3=Ce^{-x}+1$，C 为任意常数。

（3） $y'-\dfrac{y}{x}+y^2=0$，这是贝努利方程 $y'-\dfrac{y}{x}=-y^2$，$n=2$，令 $z=y^{-1}$，则原方程改

写为 $z'+\dfrac{z}{x}=1$，解得 $y^{-1}=z=e^{-\int\frac{1}{x}dx}[\int e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+\frac{1}{2}C]=\dfrac{1}{x}[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}C]$，即 $y=\dfrac{2x}{x^2+C}$，C 为任意常数。

（4）$(x^3+xy^2)\mathrm{d}x+(x^2y+y^3)\mathrm{d}y=0$，这是齐次方程。将方程变型得

$$y'=-\frac{x^3+xy^2}{x^2y+y^3}=-\frac{1+(y/x)^2}{y/x+(y/x)^3}\text{，令 } u=y/x\text{，有}$$

$$u'=\frac{1}{x}[-\frac{1+u^2}{u+u^3}-u]=-\frac{1}{x}[\frac{(1+u^2)^2}{u+u^3}]=-\frac{1+u^2}{ux}\text{，}\quad\frac{udu}{1+u^2}=-\frac{dx}{x}\text{，}$$

解得 $y^2+x^2=C$，C 为任意常数。

（5）原方程改写为：$y'-\dfrac{1}{2x}y=\dfrac{1}{2}y^{-1}$，这是贝努里方程，令 $z=y^{1-(-1)}=y^2$，则原方程可以改写为 $z'-\dfrac{1}{x}z=1$，于是根据一阶线性方程的公式解，得

$$z=e^{-\int-\frac{1}{x}dx}[\int e^{\int-\frac{1}{x}dx}dx+C]=x[\ln x+C],$$

即原方程的解为 $y^2=z=e^{-\int-\frac{1}{x}dx}[\int e^{\int-\frac{1}{x}dx}dx+C]=x[\ln x+C]$，$C$ 为任意常数。

4.解下列方程组:

(1) $\begin{cases}x'=x-2y+e^t\\ y'=x+4y+e^{2t}\end{cases}$;　　(2) $\begin{cases}x'=x+3y\\ y'=x-5\sin t\end{cases}$;

(3) $\begin{cases}x'=1-2x-4y+4t\\ y'=y-x+\dfrac{3}{2}t^2\end{cases}$;　　(4) $\begin{cases}x'=8y\\ y'=-2z\\ z'=2x+8y-2z\\ x(0)=-4,y(0)=0,z(0)=1\end{cases}$.

解：（1）由第二个方程得 $x=y'-4y-e^{2t}$，　$x'=y''-4y'-2e^{2t}$，代入第一个方程得

$$y'-4y-e^{2t}-2y+e^t=y''-4y'-2e^{2t}\text{，即 } y''-5y'+6y=e^{2t}+e^t\text{，}$$

由特征方程 $r^2-5r+6=0$，解得 $r_1=2,\ r_2=3$.

考虑方程 $y''-5y'+6y=e^{2t}$，其特解可设为 $y_1=Ate^{2t}$，即 $Q=A$，代入 $y''-5y'+6y=e^{2t}$，解得 $A=-1$，即 $y_1=-te^{2t}$.

再考虑方程 $y''-5y'+6y=e^t$，其特解可设为 $y_2=Be^t$，代入 $y''-5y'+6y=e^t$，解得

$B=1/2$，即 $y_2=\dfrac{1}{2}e^t$.

因此，$y=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}+\dfrac{1}{2}e^t-te^{2t}$，代入到方程组中的第二个方程，得 $x=y'-y-4e^{2t}$，即 $x=-e^t(2+e^t+4C_1e^t+4C_2e^{2t}-4te^t)$。

故原方程组的通解为$\begin{cases} x=-2C_1e^{2t}-C_2e^{3t}-\dfrac{3}{2}e^t-2e^{2t}-te^{2t}, \\ y=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}+\dfrac{1}{2}e^t-te^{2t}, \end{cases}$ C_1,C_2 为任意常数。

（2）由第二个方程得 $x=y'+5\sin t,\quad x'=y''+5\cos t$，代入第一个方程得

$$y''+5\cos t=y'+5\sin t+3y，即 y''-y'-3y=5(\sin t-\cos t)，$$

由特征方程 $r^2-r-3=0$，解得 $r_{1,2}=\dfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{13})$.

考虑方程 $y''-y'-3y=5\sin t$，可设特解为 $y=A\cos t+B\sin t$，代入方程 $y''-y'-3y=5\sin t$，解得 $A=\dfrac{5}{17},B=-\dfrac{20}{17}$，即 $\bar{y}_1=\dfrac{1}{17}(5\cos t-20\sin t)$ 是 $y''-y'-3y=5\sin t$ 的特解。

再考虑方程 $y''-y'-3y=-5\cos t$，可设特解为 $y=A\cos t+B\sin t$，代入方程 $y''-y'-3y=-5\cos t$，解得 $A=-\dfrac{20}{17},B=\dfrac{5}{17}$，所以 $y''-y'-3y=-5\cos t$ 的一个特解为 $\bar{y}_2=\dfrac{1}{17}(-20\cos t+5\sin t)$。

所以 $y''-y'-3y=5(\sin t-\cos t)$ 的一个特解为：

$$y^*=\frac{1}{17}(5\cos t-20\sin t)+\frac{1}{17}(-20\cos t+5\sin t)=-\frac{15}{17}(\cos t+\sin t)，$$

因此 $y''-y'-3y=5(-\cos t+\sin t)$ 的通解为：

$y=C_1e^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{13})t}+C_2e^{\frac{1}{2}(1-\sqrt{13})t}-\dfrac{15}{17}(\cos t+\sin t)$. 代入第二个方程，得

$$x=y'+5\sin t=\frac{C_1}{2}e^{\frac{1+\sqrt{13}}{2}t}(1+\sqrt{13})+\frac{C_2}{2}e^{\frac{1-\sqrt{13}}{2}t}(1-\sqrt{13})-\frac{5}{17}(3\cos t+14\sin t)，$$

C_1,C_2 为任意常数。

（3）由第二个方程 $x=-y'+y+3t^2/2,\quad x'=-y''+y'+3t$，代入第一个方程得

$$-y''+y'+3t=1-2(-y'+y+3t^2/2)-4y+4t，即 y''+y'-6y=3t^2-t-1，$$

由特征方程 $r^2+r-6=0$，解得 $r_1=2,\ r_2=-3$. 设 $y''+y'-6y=3t^2-t-1$ 的一个特解为 $y_1=At^2+Bt+C$，代入方程

$$-(3+6A)t^2+(1+2A-6B)t+(1+2A+B-6C)=0，$$

解得 $A=-1/2,\ B=C=0$，$y_1=-t^2/2$。

所以 $y''+y'-6y=3t^2-t-1$ 的通解为 $y=C_1e^{2t}+C_2e^{-3t}-\dfrac{1}{2}t^2$，由第二个方程得 $x=-y'+y+3t^2/2=-C_1e^{2t}+4C_2e^{-3t}+t^2+t$，$C_1,C_2$ 为任意常数。

（4）由第一个方程得 $y'=\dfrac{1}{8}x''$，由第二个方程得 $z=-\dfrac{1}{2}y'=-\dfrac{1}{16}x'',\ z'=-\dfrac{1}{16}x'''$,再由第三个方程得 $-\dfrac{1}{16}x'''=2x+x'+y'=2x+x'+\dfrac{1}{8}x''$，即 $x'''+2x''+16x'+32x=0$，由特征方程 $r^3+2r^2+16r+32=0$，解得 $r_1=-2,\ r_{2,3}=\pm 4i$.

故通解为 $x=8C_1e^{-2t}+2C_2\cos 4t+2C_3\sin 4t$，这样可以解得

$$y=\frac{1}{8}(-16C_1e^{-2t}-8C_2\sin 4t+8C_3\cos 4t)=-2C_1e^{-2t}-C_2\sin 4t+C_3\cos 4t，$$

$$z=-\frac{1}{2}(4C_1e^{-2t}-4C_2\cos 4t-4C_3\sin 4t)=-2C_1e^{-2t}+2C_2\cos 4t+2C_3\sin 4t，$$

根据初始条件有 $C_1=-1/2,\ C_2=0,\ C_3=-1$，故所求特解为：

$$x=-4e^{-2t}-2\sin 4t,\ y=e^{-2t}-\cos 4t,\ z=e^{-2t}-2\sin 4t。$$

5. 解下列高阶方程:

(1) $y'''=2x^3, y(0)=1, y'(0)=1, y''(0)=0$；　　　　(2) $y'''-y''=12x^2+6x$.

解：（1）原方程两边逐次积分得

$$y''=\frac{1}{2}x^4+C_1, y'=\frac{1}{10}x^5+C_1x+C_2, y=\frac{1}{60}x^6+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3，$$

将初始条件代入，解得 $C_1=0, C_2=1, C_3=1$，故原方程的特解为 $y=\dfrac{1}{60}x^6+x+1$。

（2）特征方程为：$r^3-r^2=0$，解得 $r_{1,2}=0,\ r_3=1$，因此对应的齐次方程的通解为：$y=C_1+C_2x+C_3e^x$，

设特解为 $\overline{y}=(Ax^2+Bx+C)x^2=Ax^4+Bx^3+Cx^2$，代入原方程得：

$6B-2C=0,\ -6+24A-6B=0,\ -12-12A=0$，解得 $A=-1,\ B=-5,\ C=-15$.

因此 $\overline{y}=-x^4-5x^3-15x$，故所求通解为 $y=C_1+C_2x+C_3e^x-x^4-5x^3-15x$，$C_1,C_2,C_3$ 为任意常数。

6.求方程 $y''+2y'+y=xe^{-x}$ 过点 $M_0(1,e^{-1})$ 且在点 M_0 处有平行于 x 轴的切线的积分曲线.

解：特征方程为 $r^2+2r+1=0$，解得 $r_{1,2}=-1$，因此对应的齐次方程的通解为：$y=(C_1+C_2x)e^{-x}$，C_1,C_2 为任意常数。

设特解：$\overline{y}=(Bx+C)x^2e^{-x}=(Bx^3+Cx^2)e^{-x}$，代入原方程解得 $B=1/6,\ C=0$， 即 $\overline{y}=\dfrac{1}{6}x^3e^{-x}$，也即 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+\dfrac{1}{6}x^3e^{-x}$.

根据初始条件 $y(1)=e^{-1},\ y'(1)=0$，代入解得所求特解 $y=e^{-x}(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{6}x^3)$.

7.设函数 $y=y(x)$ 满足 $y''-3y'+2y=2e^x$,且图形与 $y=x^2-x+1$ 在点(0,1)处有公切线,求 $y(x)$）.

解：特征方程为：$r^2-3r+2=0$，解得 $r_1=1,\ r_2=2$，因此对应的齐次方程的通解为：$y=C_1e^x+C_2e^{2x}$，故可设特解为 $\overline{y}=Axe^x$，代入原方程解得 $A=-2$，故 $\overline{y}=-2xe^x$，也即原方程通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}-2xe^x$，C_1,C_2 为任意常数。

根据题设 $y(0)=1$，而 $y=x^2-x+1$ 在点(0,1)处的切线斜率为 $y'(0)=-1$，根据这两个条件可以解得所求特解为 $y=(1-2x)e^x$。

8.设曲线 $y=y(x)$, $x=1$, $x=x\,(x>1)$ 及 x 轴所围图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积为 $v(x)=\dfrac{1}{3}\pi[x^2y(x)-y(1)]$,且 $y(2)=\dfrac{2}{9}$,求曲线方程.

解：$v(x)=\pi\int_1^x y^2(x)dx$，$\therefore \pi\int_1^x y^2(x)dx=\dfrac{1}{3}\pi[x^2y(x)-y(1)]$，两边关于 x 求导得：$y^2(x)=\dfrac{1}{3}[2xy(x)+x^2y'(x)]$，这是一个贝努利方程：$y'+\dfrac{2}{x}y=\dfrac{3}{x^2}y^2$，令 $z=y^{-1}$，得方程：$z'-\dfrac{2}{x}z=-\dfrac{3}{x^2}$，因此

$$y^{-1}=z=e^{-\int-\frac{2}{x}dx}[\int-\frac{3}{x^2}e^{\int-\frac{2}{x}dx}dx+C]=x^2[\int-\frac{3}{x^4}dx+C]=x^2[\frac{1}{x^3}+C]=\frac{1}{x}+Cx^2,$$

即 $y=\dfrac{x}{1+Cx^3}$ 将 $y(2)=\dfrac{2}{9}$ 代入得 $C=1$，于是所求的曲线方程为 $y=\dfrac{x}{1+x^3}$ 。

9.连接两点 $A\left(0,1\right)$、$B\left(1,0\right)$的一条曲线,它位于弦 AB 的上方,$P\left(x,y\right)$为曲线上一点,已知曲线与弦 AP 之间的面积为 x^3,求曲线方程.

解：已知曲线与弦 AP 之间的面积为 x^3，即该面积是单调增加的，可知该曲线是向上凸的，故 $x^3=\int_0^x y(x)dx-\dfrac{1}{2}(y(x)+1)x$，两边关于 x 求导得 $3x^2=\dfrac{1}{2}y(x)-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}y'(x)x$，即得方程

$$y'(x)-\frac{1}{x}y(x)=-\frac{1}{x}-6x\text{，}$$

故 $y(x)=e^{-\int -\frac{1}{x}dx}[\int(-\dfrac{1}{x}-6x)e^{\int -\frac{1}{x}dx}dx+C]=x[\int(-\dfrac{1}{x}-6x)\dfrac{1}{x}dx+C]=1-6x^2+Cx$，又已知曲线过 B 点，即 $y(1)=0$，所以 $C=5$，即所求曲线为 $y(x)=1+5x-6x^2$.

10.设方程 $xy''+3x(y')^2=1-e^{-x}$ 的解 $y(x)$ 有连续的二阶导数,若 $y(x)$ 在 $x=c(\neq 0)$ 处有极值,证明: $y(c)$ 必为极小值.

证明：因方程 $xy''+3x(y')^2=1-e^{-x}$ 的解 $y(x)$ 有连续的二阶导数，且 $y(x)$ 在 $x=c(\neq 0)$ 处有极值，所以 $y'(c)=0$，代入方程得：$y''(c)=(1-e^{-c})c^{-1}$。

若 $c<0$，则 $e^{-c}>1\Rightarrow y''(c)=(1-e^{-c})c^{-1}>0$；

若 $c>0$，则 $e^{-c}<1\Rightarrow y''(c)=(1-e^{-c})c^{-1}>0$；因此只要 c 非零，均可得到 $y''(c)$ 大于零，根据极值的第二充分条件可知结论真。