高等数学 A2 综合练习卷(60 题)

第七章 向量代数与空间解析几何(14 题)

一．向量的数量积和向量积

1. 已知$|\vec{a}|=\sqrt{2},|\vec{b}|=2,$且$\vec{a}\bullet\vec{b}=2$，则$|\vec{a}\times\vec{b}|=$__________.

2. 已知$|\vec{a}|=\sqrt{2},|\vec{b}|=2,$且$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角是$\dfrac{\pi}{4}$，则$2\vec{a}\bullet\vec{b}=$__________.

3. 求与$\vec{a}=3i-2j+4k,\vec{b}=i+j-2k$都垂直的单位向量.

二．平面方程

1. 求过点$(1,-3,2)$且以$\vec{n}=(2,-1,1)$为法向量的平面方程.

2. 一平面过点$M(1,0,-1)$且平行于向量$a=(2,1,1)$和$b=(1,-1,0)$，试求这平面方程.

三．两平面的位置关系及点面距离

1. 求两平面$2x-y+z=0,x+y+2z-5=0$的夹角.

2. 一平面过点$M(1,0,-1)$且平行于向量$a=(2,1,1),b=(1,-1,0)$，试求这平面的方程.

3. 已知原点到平面$2x-y+kz=6$的距离等于 2，则$k=$__________.

4. 点$(1,1,1)$到平面$x+y+z=1$的距离.

四．空间直线的一般方程

1. 求与两平面$2x+y-z=1$和$2x-y=3$的交线平行且过点$(3,-2,1)$的直线的方程.

2. 空间直线$x=y=z$与平面$x-2y+z=0$的位置关系为__________.

3. 求直线$x-2=y-3=\dfrac{z-4}{2}$与平面$2x-y+z-6=0$的夹角.

五．旋转曲面

1. 将xoz坐标面上的抛物线$z=x^2$分别绕z轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.

2. 曲面$x^2+y^2=9z^2$是哪个坐标平面上哪个曲线绕哪个轴旋转而成的？

第八章 多元函数微分学及其应用(18 题)

一．多元函数的定义域、极限、连续性

1. 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=$__________.

2. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

3. 已知 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2},x^2+y^2\neq 0,\\ 0,x^2+y^2=0,\end{cases}$ 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在.

4. 求函数 $f(x,y)=\ln(y-x^2)+\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定义域.

二．多元函数的导数与微分

1. 求函数 $z=x^2+3xy+y^2$ 在点 $(1,2)$ 处的偏导数.

2. 求函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2},x^2+y^2\neq 0,\\ 0,x^2+y^2=0,\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的偏导数.

3. 计算函数 $u=x^{yz}$ 的全微分.

三．复合函数和隐函数的求导

1. 设 $z=u^2v+e^v,u=\cos x,v=\sin x$，求 $\dfrac{dz}{dx}$.

2. 设 $z=u\ln v,u=x+y,v=xy,$ 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

3. 设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $z^3+3xyz=a^3$ 确定，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$__________.

4. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\sin(z+x)=y-z+1$ 所确定，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

四．多元函数微分学在几何上的应用

1. 求曲线 $\Gamma: x=e^{2t},y=2t,z=-e^{-3t}$ 在 $t=0$ 时对应点处的切线方程和法平面方程.

2. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2-1$ 在点 $(2,1,4)$ 处的切平面及法线方程.

3. 求空间螺线 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, z=k\theta(k>0)$ 在 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 处的切向量.

五．多元函数的极值

1. 求函数 $f(x,y)=2-4xy+x^4+y^4$ 的极值.

2. $f(x,y)$ 在原点处是驻点且二阶连续可导，设 $A=f_{xx}(0,0), B=f_{xy}(0,0), C=f_{yy}(0,0)$. 则 $f(x,y)$ 必定在原点取得极小值时 A,B,C 满足__________.

3. 求三元函数 $f(x,y,z)=xy^2z^3$ 在条件 $x,y,z>0, x+y+z=6$ 下的最大值.

4. 求二元函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在直线 $x+y=6$, x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的极值和最值.

第九章 重积分(11 题)

一．二重积分

1. 利用二重积分的性质比较积分 $\iint\limits_D (x+y)dxdy$ 和 $\iint\limits_D (x+y)^3dxdy$ 的大小，其中积分区域 $D=\{(x,y)\big|(x-2)^2+(y-1)^2\le 2\}$.

2. 计算 $\iint\limits_D 2xydxdy$, 其中 D 是由 $(0,0),(1,2)$ 和 $(0,3)$ 为顶点的三角形的有界区域.

3. 计算 $\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}dxdy$, 其中 D 是直线 $y=x, y=0, x=\pi$ 所围成的闭区域.

4. 改变二次积分的积分顺序:

(1) $I=\int_0^4 dy\int_{\sqrt{4-y}}^{\frac{y+4}{2}} f(x,y)dx$ (2) $\int_0^2 \mathrm{d}y\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x$ (3) $\int_1^e \mathrm{d}x\int_0^{\ln x} f(x,y)\mathrm{d}y$

5. 计算二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, 其中 D 是由 x 轴及上半圆周 $y=\sqrt{1-x^2}$ 所围成的区域.

6. 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)\big|\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2\}$.

(2) $\iint\limits_D e^{y^2}d\sigma$，其中 D=$\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le 1, 0\le x\le y\right\}$

(3) $\iint\limits_D (2x-y)d\sigma$，其中 D 由以原点为中心 2 位半径的圆周所围成.

二．三重积分

1. 求 $\iiint\limits_{\Omega} e^{x^2+y^2} dxdydz$，其中 Ω 是由抛物面 $x^2+y^2+z=1$ 及 xoy 平面所围成的有界闭区域.

2. 求 $\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和上半球面 $x^2+y^2+z^2=2(z\geq 0)$ 平面所围成的有界闭区域.

3. 求 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz$，其中 Ω 是由椭圆抛物面 $z=4(x^2+y^2)$ 和平面 $z=4$ 所围成的有界闭区域.

4. 求由抛物面 $x^2+y^2+z=2$ 和 $x^2+y^2=z$ 所围成的有界闭区域的体积.

5. 求 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所围成的区域.

第十章 曲线积分和曲面积分(9 题)

一．曲线积分

1. $\int\limits_{L}(x+y)^2 ds=$__________，其中 $L: x^2+y^2=1$.

2. $\int\limits_{L}(x+1)ds=$__________，其中 $L: x^2+y^2=1$.

3. 求 $\int\limits_{\Gamma} zds$，其中 $\Gamma: x=t\cos t, y=t\sin t, z=t, t\in[0,2\pi]$ 为圆锥螺线.

4. 计算 $\int\limits_{L} xdy-ydx$，其中 L 为：

(1) 沿 $y=x$ 由点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的一段弧；

(2) 沿 $y=x^2$ 由点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的一段弧；

(3) 沿 $y=x^3$ 由点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的一段弧.

5. 计算 $\int\limits_{L} 2xydx-x^2dy$，其中 L 为：

(1) 沿 $x=y^2$ 由点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的一段弧；

(2) 沿 $y=x^2$ 由点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的一段弧；

(3) 有向折线 OAB，其中 $O(0,0), A(1,0), B(1,1)$..

6. 求曲线积分 $\int_L e^x \sin ydx + (e^x \cos y - x)dy$ 的值，其中 L 是从 $A(2,0)$ 到 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2 + y^2 = 2x(y \ge 0)$.

7. 验证曲线积分 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} e^x \sin ydx + e^x \cos ydy$ 的值与积分路径无关并计算该积分值.

8. 求空间曲线 $x = 3t,\ y = 3t^2,\ z = 2t^3$ 从 $O(0,0,0)$ 至 $A(3,3,2)$ 的弧长.

9. 利用格林公式，计算下列曲线积分：

(1) $\int_L (2xy - x^2)dx + (x^2 + y^2)dy$, 其中 L 是由抛物线 $y = x^2$ 和 $y^2 = x$ 所围成的区域的边界正向；

(2) $\int_L (x^2 - y)\mathrm{d}x - (x + \sin^2 y)\mathrm{d}y$ 其中 L 是在圆周 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 上由点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧.

第十一章 无穷级数(9 题)

一. 级数的敛散性

1. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ ， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ ， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n2^n}$ ， $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{2n+1})^n$ 的敛散性.

2. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$ 的敛散性.

3. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n+1}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n}{2^n}$ 是否收敛，如果是，判断是条件收敛还是绝对收敛.

4. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛， $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 条件收敛.

5. 证明若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} a_n$ 绝对收敛.

6. 证明定理：若 $\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n\right|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

二．幂级数

1. 求下列幂级数的收敛区间(要讨论端点处的收敛性)：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n-1}(n+1)}$　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x+1)^n}{n}$　　（3）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}$

2. 分别求级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}x^n$和$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}(x-4)^n$的收敛域.

3. 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}x^n$、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$和$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$的和函数.