第十一章 无穷级数

习　题 11.1 常数项级数

(A)

1. 写出下列级数的一般项：

（1）$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots$；　　（2）$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$；

（3）$\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\frac{6}{5}-\cdots$；　　（4）$\frac{\sqrt{x}}{1}+\frac{x}{1\cdot 3}+\frac{x\sqrt{x}}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{x^2}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots$；

（5）$\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{4}+\frac{a^4}{6}-\frac{a^5}{8}+\cdots$；　　（6）$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots$.

解：（1）一般项 $u_n=\frac{1}{(2n-1)\bullet(2n+1)}$，　$n=1,2,3,\ldots$

（2）一般项 $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}$，　$n=1,2,3,\ldots$

（3）一般项 $u_n=\frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n}$，　$n=1,2,3,\ldots$

（4）一般项 $u_n=\frac{x^{\frac{n}{2}}}{1\cdot 3\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)}=\frac{x^{\frac{n}{2}}}{(2n-1)!!}$，　$n=1,2,3,\ldots$

（5）一般项 $u_n=\frac{(-1)^n a^{n+1}}{2n}$，　$n=1,2,3,\ldots$

（6）一般项 $u_n=\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}$，　$n=1,2,3,\ldots$

2. 根据级数收敛与发散的定义判定下列级数的收敛性，对收敛级数求出其和：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$；　　（2）$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}+\cdots$；

（3）$\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{6}+\cdots$.

解：（1）因为 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\sqrt{n+1}-1$，

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$，由级数收敛的定义知，原级数发散。

（2）因为 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4},$$

由级数收敛的定义知，原级数收敛，且和为 $\frac{3}{4}$。

（3）因为级数的一般项 $u_n=\sin\frac{n\pi}{6}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{n\pi}{6}$ 不存在，

从而级数收敛的必要条件不成立，故原级数发散。

3. 判定下列级数的收敛性：

（1）$-\frac{5}{7}+\frac{5^2}{7^2}-\frac{5^3}{7^3}+\cdots+(-1)^n\frac{5^n}{7^n}+\cdots$；　　（2）$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3n}+\cdots$；

（3）$\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{2}}+\cdots$；　　（4）$\frac{4}{3}+\frac{4^2}{3^2}+\frac{4^3}{3^3}+\cdots+\frac{4^n}{3^n}+\cdots$；

（5）$(\frac{1}{5}+\frac{1}{7})+(\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2})+(\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3})+\cdots+(\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n})+\cdots$.

解：（1）因为原级数为几何级数，且一般项为 $u_n=(-1)^n\frac{5^n}{7^n},n=1,2,\cdots$，

公比的绝对值 $|q|=\left|{u_{n+1}}\big/{u_n}\right|=\frac{5}{7}<1$，

所以原级数收敛，且和 $S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{-\frac{5}{7}}{1-\frac{5}{7}}=-\frac{5}{2}$。

（2）因为原级数为 $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，且调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，由级数性质知，原级数发散。

（3）因为级数的一般项 $u_n=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2}}=\frac{1}{2^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2^0}=1\neq0$，

从而级数收敛的必要条件不成立，故原级数发散。

（4）因为原级数为几何级数，且一般项为 $u_n = \dfrac{4^n}{3^n}, n = 1, 2, \cdots$，

公比的绝对值 $|q| = \left| {u_{n+1}}\big/{u_n} \right| = \dfrac{4}{3} > 1$，所以原级数发散。

（5）因为原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{5^n} + \dfrac{1}{7^n} \right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{5^n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{7^n}$，

且几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{5^n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{7^n}$ 均收敛，由级数性质知，原级数收敛。

4. 用比较审敛法或极限形式的比较审敛法判定下列级数的收敛性：

（1）$1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1} + \cdots$；　　（2）$1 + \dfrac{2+2}{1+2^2} + \dfrac{2+3}{1+3^2} + \cdots + \dfrac{2+n}{1+n^2} + \cdots$；

（3）$\dfrac{1}{2 \cdot 5} + \dfrac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \dfrac{1}{(n+1)(n+4)} + \cdots$；　（4）$\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{2a+b} + \dfrac{1}{3a+b} + \cdots$，其中 $a, b > 0$；

（5）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n}{a^n + n^2}$，其中 $a > 0$.

解：（1）因为原级数的一般项 $u_n = \dfrac{1}{2n-1} > \dfrac{1}{2n}$，　$(n = 1, 2, \cdots)$，

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 为发散级数，由比较法可知，原级数发散。

（2）原级数的一般项 $u_n = \dfrac{2+n}{1+n^2}$，　$(n = 1, 2, \cdots)$，设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$，

$$\text{因为} \lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \to \infty} {\frac{2+n}{1+n^2}}\Big/{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2n+n^2}{1+n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{2}{n}+1}{\frac{1}{n^2}+1} = 1,$$

由调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散以及比较法可知，原级数发散。

（3）原级数的一般项 $u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+4)}$，　$(n = 1, 2, \cdots)$，设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$，

$$\text{因为} \lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \to \infty} {\frac{1}{(n+1)(n+4)}}\Big/{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+4)} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{4}{n})} = 1,$$

由 P-级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛以及比较法可知，原级数收敛。

（4）原级数的一般项 $u_n=\frac{1}{na+b}$，$(n=1,2,\cdots)$，设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，

因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{an+b}\Big/\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{na+b}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a+\frac{b}{n}}=a>0$，

由调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散以及比较法可知，原级数发散。

(5) 原级数的一般项 $u_n=\frac{a^n}{a^n+n^2}$，$(n=1,2,...)$，设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，

因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{a^n+n^2}\Big/\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n n^2}{a^n+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{\frac{a^n}{n^2}+1}=\lim_{n\to\infty}a^n=\begin{cases}0, & 0<a<1,\\ \infty, & a>1.\end{cases}$，

由 P-级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛以及比较法可知：当 $0<a<1$ 时，原级数收敛；当 $a>1$ 时原级数发散。

5. 用比值审敛法判定下列级数的收敛性：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{9^n}$；　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$；　（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ $(a>0)$；　（4）$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\tan\frac{\pi}{3^n}$.

解：(1) 原级数的一般项 $u_n=\frac{n!}{9^n}$，$(n=1,2,...)$，

因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{9^{n+1}}\Big/\frac{n!}{9^n}=\frac{1}{9}\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$，由比值判别法可知，原级数发散。

(2) 原级数的一般项 $u_n=\frac{n}{2^n}$，$(n=1,2,...)$，

因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\Big/\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}$，

由比值判别法可知，原级数收敛。

(3) 原级数的一般项 $u_n=\frac{a^n n!}{n^n}$，$(n=1,2,...)$，

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{a^n n!}{n^n}}=a\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=a\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{a}{e}$，

1）当 $0<a<e$ 时，原级数收敛；当 $a>e$ 时，原级数发散；

2）当 $a=e$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{e}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{e}{e}=1$。

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$，以及数列 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 单调增加可知：

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^n n!}{n^n}$ 的通项 $u_n=\dfrac{e^n n!}{n^n}$ 为单调增加，此时原级数发散。

(4) 原级数的一般项 $u_n=2^n\tan\dfrac{\pi}{3^n}$，$(n=1,2,\ldots)$，

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}\tan\dfrac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n\tan\dfrac{\pi}{3^n}}=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{3^{n+1}}}{\tan\dfrac{\pi}{3^n}}=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{3^{n+1}}}{\dfrac{\pi}{3^n}}=\dfrac{2}{3}<1$，

由比值判别法可知，原级数收敛。

6. 用根值审敛法判定下列级数的收敛性：

（1） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{3n+1}\right)^n$；　（2） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3+(-1)^n}{2^n}$；

（3） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n-1}\right)^{2n-1}$；　（4） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{k^n(1+n)}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}$，其中 $k>0$ 且 $k\neq \mathrm{e}$.

解：(1)原级数的一般项 $u_n=\left(\dfrac{n}{3n+1}\right)^n$，$(n=1,2,\ldots)$，

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3n+1}=\dfrac{1}{3}<1$，由根值判别法可知，原级数收敛。

(2)原级数的一般项 $u_n=\dfrac{3+(-1)^n}{2^n}$，$(n=1,2,\ldots)$，因为

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{3+(-1)^n}{2^n}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+(-1)^n}$，$\sqrt[n]{2}<\sqrt[n]{3+(-1)^n}<\sqrt[n]{4}, \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4}=1$，

由夹逼定理知：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\dfrac{1}{2}<1$，所以原级数收敛。

(3)原级数的一般项 $u_n=\left(\dfrac{n}{2n-1}\right)^{2n-1}$，$(n=1,2,\ldots)$，

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{n}{2n-1}\right)^{2n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{n}}\right)^{2-\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{4}<1$，

所以原级数收敛。

(4)原级数的一般项 $u_n=\dfrac{k^n(1+n)}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}$，$(n=1,2,\ldots)$，

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{k^n(1+n)}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}}=k\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{1+n}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}}=\dfrac{k}{e}$，

（其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n)}{n}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x}}=\mathrm{e}^{0}=1$，洛必达法则）

所以当 $k<\mathrm{e}$ 时，原级数收敛；所以当 $k>\mathrm{e}$ 时，原级数发散。

7. 判定下列级数的收敛性:

（1）$1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^n}$；（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{8n-6}$；（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}$；（4）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{n^3+1}$；

（5）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n-2}$；（6）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$；（7）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot2\cdot3\cdots n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}$.

解：(1)因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^n}$ 是公比为 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 的几何级数，所以原级数发散。

(2)将原级数与调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 比较：

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{8n-6}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{8n-6}=\dfrac{1}{8}$，且调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，所以，原级数发散。

(3)原级数的一般项 $u_n=\dfrac{n^n}{n!}$，$(n=1,2,\ldots)$，

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{(n+1)^n}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\bullet\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=0$，

所以原级数收敛。

(4)将原级数与调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 比较：

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n^2+1}{n^3+1}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+n}{n^3+1}=1$，且调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，所以，原级数发散。

(5)将原级数与几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ 比较：

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{3^n-1}}{\frac{1}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{3^n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1-3^{-n}}=1$，且几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ 收敛，所以原级数收敛。

(6)因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{2}{3}<1$， 由比值判别法可知，原级数收敛。

(7) 原级数的一般项 $u_n=\dfrac{n!}{(2n-1)!!}$， $(n=1,2...)$，

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{(n+1)!}{(2n+1)!!}}{\frac{n!}{(2n-1)!!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n(2n+1)}=\dfrac{1}{2}<1$

8. 判定下列级数是否收敛？若收敛，是条件收敛还是绝对收敛？

（1） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{2^n+1}$； （2） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2(-1)^n+1}{n\sqrt{n}}$； （3） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$；

（4） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{10}}{2^n}\cos n\alpha$（$\alpha$ 为正整数）； （5） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$.

解：(1)因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n+1}{2^{n+1}+1}}{\frac{n}{2^n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{2^n+1}{2^{n+1}+1}\right)=\dfrac{1}{2}<1$，

所以，原级数绝对收敛。

(2)因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n+1}{n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n\sqrt{n}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$，

又 P-级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，且$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2(-1)^n}{n\sqrt{n}}\right|=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$也收敛，所以，原级数绝对收敛。

(3)因为原级数的一般项的绝对值$u_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$，$(n=1,2,...)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}}{\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n(n+1)}\right)^{\frac{1}{3}}=1$$，由 P-级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$发散知，

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$发散。

又因为$u_{n+1}<u_n$，$(n=1,2,...)$，且$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}=0$,由莱布尼兹判别法知，原级数条件收敛。

(4)因为原级数的一般项为$u_n=\frac{n^{10}}{2^n}\cos n\alpha$，$(n=1,2,...)$，且$\left|\frac{n^{10}}{2^n}\cos n\alpha\right|\le\frac{n^{10}}{2^n}$。

又$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}}}{\frac{n^{10}}{2^n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{10}=\frac{1}{2}$，则正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{2^n}$收敛，

故由比较判别法知，原级数绝对收敛。

(5)因为原级数的一般项的绝对值$u_n=\frac{\ln n}{n}$，$(n=1,2,...)$，

又$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\ln n=\infty$，且调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$发散。

设$f(x)=\frac{\ln x}{x}$，$(x\ge \mathrm{e})$，则$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$，$(x\ge \mathrm{e})$，即当$x\ge \mathrm{e}$时，$f(x)$为单调减函数，

则$u_{n+1}/u_n<1$，$(n\ge 3)$，又$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$，由莱布尼兹判别法可知，原级数条件收敛。

9. 设$a_n>0(n=1,2,\cdots)$单调递减，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$发散，判定$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$的收敛性.

解：由 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$ 单调递减且 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 发散可知，$\lim_{n\to\infty}a_n=a>0$。

（否则，若 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，由条件，根据莱布尼兹判别法可知，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，矛盾!）

则 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a_n}=\frac{1}{1+a}<1$，由根值判别法可知，原级数收敛。

10. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty}b_n=1$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

证明： 1）当 $a_n\equiv 0$ 时，显然，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛；

2）当 $a_n\equiv 0$ 不成立时，不妨假设 $a_n\neq 0,(n=1,2,...)$，

则 $\lim_{n\to\infty}|a_nb_n|\big/|a_n|=\lim_{n\to\infty}|b_n|=1$，由比较判别法可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛。

(B)

1. 判定下列级数收敛性；若收敛，求出级数的和.

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$；　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

解：(1)原级数的一般项 $u_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$,

$s_n=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，故原级数收敛，且和为 1.

(2)法一：令 $s_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$,则 $\frac{1}{2}s_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$,

以上两式相减得，$\frac{1}{2}s_n=\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+2\cdot\frac{\frac{1}{2^2}(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

所以 $s_n=3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right)=3$，故原级数收敛，且和为 1.

(2)法二：原级数的一般项$u_n=\dfrac{2n-1}{2^n}$，$(n=1,2,\cdots)$，

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}}{\dfrac{2n-1}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{2(2n-1)}=\dfrac{1}{2}$，由比值判别法可知，原级数收敛.

令$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n$，该幂级数的收敛区间为$(-1,1)$，

$$s(x)=2x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}x^n=2x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)-\sum_{n=1}^{\infty}x^n=2x\left(\frac{x}{1-x}\right)'-\frac{x}{1-x}=\frac{x+x^2}{(1-x)^2},$$

于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}=s\left(\dfrac{1}{2}\right)=3$.

2. 判定下列级数的收敛性：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^n n!}{n^n}$；（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n\sin\dfrac{\pi}{5^n}$；（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$；

（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+\dfrac{1}{n})^n$；（5）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^6[(-1)^n+3]^n}{6^n}$.

解：(1)原级数的一般项$u_n=\dfrac{e^n n!}{n^n}$，$(n=1,2,...)$，

因为$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{\dfrac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{e^n n!}{n^n}}=\dfrac{e}{(1+\dfrac{1}{n})^n}>\dfrac{e}{e}=1$，

所以当$n\to\infty$时，一般项u_n不趋于零，因此原级数发散.

(2)原级数的一般项$u_n=3^n\sin\dfrac{\pi}{5^n}$，$(n=1,2,...)$，

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}{3^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{5^{n+1}}}\Big/{3^n\sin\dfrac{\pi}{5^n}}=\dfrac{3}{5}$，由比值判别法可知，原级数收敛.

(3)原级数的一般项$u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$，$(n=1,2,...)$，

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=1,$ 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，

所以由比较判别法可知，原级数收敛.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$，由级数收敛的必要条件知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+\dfrac{1}{n})^n$ 发散.

(5)原级数的一般项 $u_n=\dfrac{n^6[(-1)^n+3]^n}{6^n},\quad (n=1,2,...)$，

$$u_n=\frac{n^6[(-1)^n+3]^n}{6^n}\le\frac{n^6 4^n}{6^n}=n^6\left(\frac{2}{3}\right)^n=v_n，$$

由于 $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\dfrac{(n+1)^6\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}}{n^6\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}=\dfrac{2}{3},$ 由比值判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，

再由比较判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^6[(-1)^n+3]^n}{6^n}$ 收敛.

3. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n-1)!}$ 收敛，并求其和的近似值，使绝对误差小于 10^{-3}.

证明：原级数的一般项 $u_n=(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n-1)!},\quad (n=1,2,...)$，

因为 $u_{n+1}<u_n,\quad (n=1,2,...)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, 由莱布尼兹判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n-1)!}$ 收敛. 这是一个交错级数，用前 n 项作为近似值时，绝对误差 $|r_n|\le u_{n+1}=\dfrac{1}{(2n+1)!}$，要使 $\dfrac{1}{(2n+1)!}<10^{-3}$, 取 $n=3$, 所以，级数取近似值为 $s_3=1-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{5!}=\dfrac{101}{120}$, 时，绝对误差小于 10^{-3}.

4. 利用柯西审敛原理证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}+\cdots$ 收敛.

解：对任何的自然数 p,

$$\left|s_{n+p}-s_n\right|=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{n+p}$$

$$=\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+\cdots-\frac{(-1)^{p-1}}{n+p}\right)<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n},$$

于是，对任意正数ε，存在$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，$\forall p=1,2,3,\cdots$，均有$\left|s_{n+p}-s_n\right|<\varepsilon$，

由柯西审敛原理知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\cdots$收敛.

5. 判定下列级数是否收敛？若收敛，是条件收敛还是绝对收敛？

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n!}{n\sqrt{n}}$；　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$；　（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$；

（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{3n-2}$；　（5）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}\sin\frac{1}{n}$.

解：(1)原级数的一般项$u_n=\frac{\sin n!}{n\sqrt{n}}$，由于$\left|u_n\right|=\left|\frac{\sin n!}{n\sqrt{n}}\right|\le\frac{1}{n\sqrt{n}}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$收敛，

所以原级数绝对收敛.

(2)原级数的一般项$(-1)^{n-1}u_n=(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$，　$(n=1,2,...)$，

因为$u_{n+1}<u_n$，　$(n=1,2,...)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，由莱布尼兹判别法知，级数收敛，但级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$

发散，所以原级数条件收敛.

(3)原级数的一般项

$$(-1)^{n-1}u_n=(-1)^{n-1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},\quad (n=1,2,...)\text{，}$$

因为$u_{n+1}<u_n$，　$(n=1,2,...)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，

由莱布尼兹判别法知，级数收敛，但级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$发散，所以原级数条件收敛.

(4)因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n-2}=\frac{1}{3}$，由级数收敛的必要条件知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{3n-2}$发散.

(5)原级数的一般项$(-1)^n u_n=\frac{(-1)^n}{n^p}\sin\frac{1}{n}$，　$(n=1,2,...)$，

当 $p \le -1$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p}\sin\frac{1}{n} \ne 0$, 由级数收敛的必要条件知原级数发散；

当 $p > -1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n^{p+1}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^p}\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^{p+1}}} = 1$,

（1）当 $p+1>1$, 即 $p>0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}$ 收敛，此时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，所以原级数绝对收敛；

（2）当 $0<p+1\le 1$, 即 $-1<p\le 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}$ 发散，此时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

又因为 $u_{n+1}<u_n$，$(n=1,2,...)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n = 0$，

由莱布尼兹判别法知，原级数收敛，所以原级数条件收敛.

6. 已知正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，试讨论下列级数的收敛性：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$；　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n a_{n+1}}$；　（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$.

解：（1）因为正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 由比较判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ 收敛.

（2）因为 $\sqrt{a_n a_{n+1}} \le \frac{a_n}{2} + \frac{a_{n+1}}{2}$，而由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}, \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{2}$ 收敛，

所以由比较判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n a_{n+1}}$ 收敛.

（3）因为 $\frac{\sqrt{a_n}}{n} \le \frac{a_n}{2} + \frac{1}{n^2}$，而由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}$ 收敛，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，

所以由比较判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 收敛.

7. 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$，证明对任意的常数 $\lambda > 0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

解：因为 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx \overset{\tan x = t}{=} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt < \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$，所以 $\frac{a_n}{n^\lambda} \le \frac{1}{n^\lambda(n+1)} < \frac{1}{n^{1+\lambda}}$，

当 $\lambda > 0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\lambda}}$ 收敛，因此原级数收敛.

习　题 11.2　幂级数

(A)

1. 求函数 $f(x)=\ln x$ 在 $x=1$ 处的泰勒级数.

解：因为 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$， $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$， $f'''(x)=\dfrac{2!}{x^3}$， $\cdots$ ， $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$, $(n\geq 1,\ 0!=1)$,

所以，函数 $f(x)=\ln x$ 在 $x=1$ 处的泰勒级数为：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n+\cdots$$

$$=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n+\cdots \qquad x\in(0,2]$$

2. 求下列幂级数的收敛区间(要讨论端点处的收敛性)：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^{n-1}(n+1)}$；（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[1-(-2)^n\right]x^n$；（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n^2+1}x^n$；（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x+1)^n}{n}$；

（5）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n(x-2)^n$；（6）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}x^n$；（7）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-1}$；

（8）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}$；（9）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}(x+1)^n$；（10）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n!}\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^n$.

解：（1）因为 $r=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2^n\cdot(n+2)}}{\dfrac{1}{2^{n-1}\cdot(n+1)}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2(n+2)}=\dfrac{1}{2}$，故收敛半径 $R=\dfrac{1}{r}=2$。

当 $x=2$ 时，原级数为 $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$，此时原级数发散；当 $x=-2$ 时，原级数为 $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}$，此时原级数收敛。因此，原级数的收敛域为 $[-2,2)$。

（2）因为 $r=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1-(-2)^{n+1}}{1-(-2)^n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{1}{(-2)^{n+1}}-1}{\dfrac{1}{(-2)^{n+1}}+\dfrac{1}{2}}\right|=2$，故收敛半径 $R=\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{2}$。当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\dfrac{1}{2^n}-(-1)^n]$，此时原级数发散；当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\dfrac{(-1)^n}{2^n}-1]$，此时原级数发散。因此，原级数的收敛域为 $(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$。

（3）因为 $r=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2+1}}{\dfrac{2^n}{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n^2+1)}{(n+1)^2+1}=2$，故收敛半径 $R=\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{2}$。

当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+1}$，此时原级数收敛；当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$，此时原级数收敛。因此，原级数的收敛域为 $[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$。

（4）因为 $r=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1$，故收敛半径 $R=\dfrac{1}{r}=1$。当 $x+1=1$ 即 $x=0$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$，此时原级数收敛；当 $x+1=-1$ 即 $x=-2$ 时，原级数为 $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，此时原级数发散。因此，原级数的收敛域为 $(-2,0]$。

（5）因为 $r=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n(n+1)=+\infty$，故收敛半径 $R=\dfrac{1}{r}=0$。因此，原级数仅在 $x=2$ 处收敛。

（6）因为 $r=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{n+1}}{\frac{3^n+(-2)^n}{n}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+(-\frac{2}{3})^{n+1}}{\frac{1}{3}+(-\frac{2}{3})^n}\dfrac{n}{n+1}=3$，故收敛半径 $R=\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{3}$。当 $x=\dfrac{1}{3}$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\dfrac{1}{n}-(-\dfrac{2}{3})^n]$，此时原级数发散；当 $x=-\dfrac{1}{3}$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\dfrac{(-1)^n}{n}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n]$，此时原级数收敛。因此，原级数的收敛域为 $[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3})$。

（7）该幂级数缺少偶数次项，可用比值审敛法求收敛半径及收敛域

$$l=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2n+1}{2^{n+1}}\left|x^{2n+1}\right|}{\frac{2n-1}{2^n}\left|x^{2n-1}\right|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{2(2n-1)}x^2=\frac{1}{2}x^2$$

当 $l=\left|\dfrac{1}{2}x^2\right|<1$，即 $|x|<\sqrt{2}$ 时，原幂级数绝对收敛，当 $\left|\dfrac{1}{2}x^2\right|>1$，即 $|x|>\sqrt{2}$ 时，原幂级数发散，所以该级数的收敛半径为 $R=\sqrt{2}$。当 $x=\sqrt{2}$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{\sqrt{2}}$，此时原级数发散；当 $x=-\sqrt{2}$ 时，原级数为 $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{\sqrt{2}}$，此时原级数发散。因此，原级数的收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$。

（8）该题是缺少奇次幂的幂级数，可用比值审敛法求收敛半径及收敛域

$$u_n=(-1)^n\frac{1}{n\cdot 2^n}x^{2n}\text{，且 } l=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\left|x^{2n+2}\right|}{\frac{1}{n\cdot 2^n}\left|x^{2n}\right|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2(n+1)}x^2=\frac{1}{2}x^2$$

由比值审敛法得，当 $\dfrac{1}{2}x^2<1$ 即 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}$ 收敛；当 $\dfrac{1}{2}x^2>1$ 即 $x>\sqrt{2}$ 或 $x<-\sqrt{2}$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}$ 发散；当 $\dfrac{1}{2}x^2=1$ 即 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，若 $x=\sqrt{2}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 收敛，若 $x=-\sqrt{2}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 收敛；

所以幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}$的收敛区间为$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$。

（9）因为$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln(n+2)}{n+2}}{\frac{\ln(n+1)}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}\frac{n+1}{n+2}=1$ （由洛必达法则可得，$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2)}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x+2}=1$），故收敛半径$R=\frac{1}{r}=1$。当$x+1=1$即$x=0$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{n+1}$，由交错级数判别法可得此级数收敛；当$x+1=-1$即$x=-2$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$，由$\frac{\ln(n+1)}{n+1}\geq\frac{1}{n+1}$及比较判别法可得此级数发散。因此，原级数的收敛域为$(-2,0]$。

（10）因为$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}\times(n+1)!}}{\frac{3^n}{2^n\times n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\frac{n}{n+1}=\frac{3}{2}$，故收敛半径$R=\frac{1}{r}=\frac{2}{3}$。当$x-1=\frac{2}{3}$即$x=\frac{5}{3}$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$，此时原级数收敛；当$x-1=-\frac{2}{3}$即$x=\frac{1}{3}$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$，此时原级数收敛。因此，原级数的收敛域为$[\frac{1}{3},\frac{5}{3}]$。

3. 逐项求导或逐项积分，求下列级数的和函数：

（1）$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$；（3）$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$；（4）$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$.

解：（1）$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)x^{n+1}}{(n+1)x^n}\right|=|x|$，$R=1$，当$x=\pm1$时，$\lim_{n\to\infty}u_n\neq0$，∴收敛域为$(-1,1)$，

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n=-\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^{n+1}\right)'=\left(\frac{x}{1+x}\right)'=\frac{1}{(1+x)^2},\ x\in(-1,1)$$

（2）$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2n+1}\left|x^{2n+1}\right|}{\frac{1}{2n-1}\left|x^{2n-1}\right|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{2n+1}x^2=x^2$， $R=1$，

当$x=1$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$，此时原级数收敛；当$x=-1$时，原级数为$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$，此时原级数收敛。因此，原级数的收敛域为$[-1,1]$。

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1}dx=\arctan x,\ x\in[-1,1]$$

（3）$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n}\right|=|x|$，$R=1$，当$x=\pm1$时，$\lim_{n\to\infty}u_n\neq0$，∴收敛域为$(-1,1)$，

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2},\ x\in(-1,1)$$

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\cdot\dfrac{n(n+1)}{x^n}\right|=|x|$， $R=1$，

当 $x=\pm1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq0$，$\therefore$ 收敛域为 $(-1,1)$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1}=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right)''=x\left(\frac{1}{1-x}\right)''=\frac{2x}{(1-x)^3}\text{，}x\in(-1,1)$$

4. 将下列函数展开成 x 的幂级数，并求展开式成立的区间：

（1）$f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；　（2）$f(x)=\cos^2 x$；　（3）$f(x)=\ln(a+x)$；

（4）$f(x)=\dfrac{1}{3+x}$；　（5）$f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

解：（1）$\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\dfrac{1}{2}[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-x)^n}{n!}]=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{n!}x^n=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$，$x\in(-\infty,+\infty)$

（2）$\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2x)^{2n}}{(2n)!}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}$，$x\in(-\infty,\infty)$

（3）$\ln(a+x)=\ln a(1+\dfrac{x}{a})=\ln a+\ln(1+\dfrac{x}{a})$

$$=\ln a+\frac{1}{a}x-\frac{1}{2a^2}x^2+\frac{1}{3a^3}x^3-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{na^n}x^n+\cdots\text{，}x\in(-a,a]$$

（4）$\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-(-\frac{x}{3})}=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{x}{3}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}}x^n$，$x\in(-3,3)$

（5）$\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\dfrac{1}{2}\{\ln(1+x)-\ln[1+(-x)]\}=\dfrac{1}{2}[\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(-x)^{n+1}}{n+1}]$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\ x\in(-1,1)$$

5. 将 $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ 展开 $(x-4)$ 的幂级数，并指出其收敛域.

解：$\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{1-(-\frac{x-4}{6})}=\dfrac{1}{6}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{x-4}{6}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{6^{n+1}}(x-4)^n$，$x\in(-2,10)$

6. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数，并确定其收敛域.

解：$\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}=\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-(-\frac{x-1}{2})}-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-\left(-\frac{x-1}{3}\right)}\right)$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x-1}{2})^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x-1)^n\text{，}\quad x\in(-1,3)$$

7. 利用函数的幂级数展开式求下列各数的近似值：

（1）$\sqrt{\mathrm{e}}$（误差不超过 0.0001）；　　　　（2）$\sqrt[5]{240}$（误差不超过 0.0001）；

（3）$\sin 18^\circ$（误差不超过 0.0001）；　　　　（4）$\ln 3$（误差不超过 0.0001）.

解：（1）$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$,所以，当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时有，

则 $\sqrt{e}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2\cdot 2!}+\cdots+\dfrac{1}{2^n\cdot n!}+\cdots$，若取前 $n+1$ 项近似计算 $\sqrt{\mathrm{e}}$，其误差

$$\left|r_n\right|=\frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}+\frac{1}{2^{n+2}\cdot(n+2)!}+\cdots=\frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}\left[1+\frac{1}{2(n+2)}+\frac{1}{2^2(n+2)(n+3)}+\cdots\right]$$

$$<\frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right)=\frac{1}{2^n\cdot(n+1)!},$$

要使 $\dfrac{1}{2^n\cdot(n+1)!}<0.0001$，只要取 $n=5$，此时 $\left|r_5\right|<\dfrac{1}{2^5\cdot 6!}\approx 0.00004<0.0001$，

于是 $\sqrt{e}\approx 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2\cdot 2!}+\dfrac{1}{2^3\cdot 3!}+\dfrac{1}{2^4\cdot 4!}+\dfrac{1}{2^5\cdot 5!}\approx 1.6487.$

（2）$\sqrt[5]{240}=\left(3^5-3\right)^{\frac{1}{5}}=3\left(1-\dfrac{1}{3^4}\right)^{\frac{1}{5}}$，取 $x=-\dfrac{1}{3^4},\alpha=\dfrac{1}{5}$, 利用 $(1+x)^\alpha$ 的幂级数的展开式，

有 $\sqrt[5]{240}=3\left(1-\dfrac{1}{3^4}\right)^{\frac{1}{5}}=3\left(1-\dfrac{1}{5\cdot 3^4}-\dfrac{2}{25\cdot 3^8}-\dfrac{6}{125\cdot 3^{12}}-\cdots\right)$。

若取前 $n+1$ 项近似计算 $\sqrt[5]{240}$，其误差

$$\left|r_n\right|=\left|3\times\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\cdots\left(\frac{6}{5}-k\right)}{k!}\left(-\frac{1}{3^4}\right)^k\right|=3\times\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdots(5k-6)}{5^k\cdot k!}\left(\frac{1}{3^4}\right)^k$$

$$<3\times\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^4}\right)^k=\frac{3}{80}\cdot\frac{1}{3^{4n}},$$

要使 $\dfrac{3}{80}\cdot\dfrac{1}{3^{4n}}<0.0001$, 只要取 $n=2$，此时 $\left|r_2\right|<\dfrac{3}{80}\cdot\dfrac{1}{3^8}\approx 0.000006<0.0001$,

于是 $\sqrt[5]{240}\approx 3\left(1-\dfrac{1}{5\cdot 3^4}-\dfrac{2}{25\cdot 3^8}\right)\approx 2.9926.$

（3）$\sin 18^\circ=\sin\dfrac{\pi}{10}=\dfrac{\pi}{10}-\dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{\pi}{10}\right)^3+\dfrac{1}{5!}\left(\dfrac{\pi}{10}\right)^5-\cdots$, 这是一个交错级数，且

$\left|r_n\right|\le\dfrac{1}{(2n+1)!}\left(\dfrac{\pi}{10}\right)^{2n+1}$，要使 $\dfrac{1}{(2n+1)!}\left(\dfrac{\pi}{10}\right)^{2n+1}<0.0001$, 只要取 $n=2$，此时

$\left|r_2\right| \le \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^5 \approx 0.00002544 < 0.0001$, 于是 $\sin 18^\circ = \frac{\pi}{10} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3 \approx 0.3090.$

（4）$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots\right), x \in (-1,1)$, 令 $\frac{1+x}{1-x} = 3$，可得 $x = \frac{1}{2}$,

所以， $\ln 3 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}} + \cdots\right)$, 若取前 n 项近似计算 $\ln 3$,

其误差 $\left|r_n\right| = 2\left[\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}} + \frac{1}{(2n+3)\cdot 2^{2n+3}} + \cdots\right]$

$$= \frac{2}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}\left[1 + \frac{(2n+1)}{(2n+3)\cdot 2^2} + \frac{(2n+1)}{(2n+5)\cdot 2^4} + \cdots\right]$$

$$< \frac{2}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots\right) = \frac{1}{3(2n+1)\cdot 2^{2n-2}},$$

要使 $\frac{1}{3(2n+1)\cdot 2^{2n-2}} < 0.0001$，只要取 $n = 6$, 此时 $\left|r_6\right| < \frac{1}{3\cdot 13\cdot 2^{10}} \approx 0.00003 < 0.0001$,

于是 $\ln 3 \approx 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} + \cdots + \frac{1}{11\cdot 2^{11}}\right) \approx 1.0986.$

8. 利用被积函数的幂级数展开式求下列定积分的近似值：

（1）$\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{x^2} dx$（误差不超过 0.0001）；　　（2）$\int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x} dx$（误差不超过 0.001）.

解：（1）$\mathrm{e}^{x^2} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$, 所以

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots\right)dx = \left(x + \frac{1}{3}\frac{x^3}{1!} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{2!} + \cdots + \frac{1}{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{n!} + \cdots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{2^3\cdot 1!} + \frac{1}{5}\frac{1}{2^5\cdot 2!} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\frac{1}{2^{2n-1}(n-1)!} + \frac{1}{2n+1}\frac{1}{2^{2n+1}n!} + \cdots,$$

$$\left|r_n\right| \le \frac{1}{2n+1}\frac{1}{2^{2n+1}n!} + \frac{1}{2n+3}\frac{1}{2^{2n+3}(n+1)!} + \cdots < \frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{2^{2n+3}} + \cdots = \frac{2}{3\cdot 4^n},$$

要使 $\frac{2}{3\cdot 4^n} < 0.0001$，只要取 $n = 7$, 此时 $\left|r_7\right| < \frac{2}{3\cdot 4^7} \approx 0.000041 < 0.0001$,

于是 $\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{x^2} dx = = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{2^3\cdot 1!} + \frac{1}{5}\frac{1}{2^5\cdot 2!} + \cdots + \frac{1}{13}\frac{1}{2^{13}6!} \approx 0.5450$.

（2）$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \quad (-1 < x < 1)$,

所以$\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx=\int_0^{0.5}\left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}+\cdots\right)dx$

$$=\left(x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^5}{25}-\frac{x^7}{49}+\cdots\right)\Big|_0^{0.5}=\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\frac{1}{2^3}+\frac{1}{25}\frac{1}{2^5}-\frac{1}{49}\frac{1}{2^7}+\cdots,$$

这是一个交错级数，$\left|r_n\right|\le\frac{1}{(2n+3)^2}\frac{1}{2^{2n+3}}$，要使$\frac{1}{(2n+3)^2}\frac{1}{2^{2n+3}}<0.001$，只要取$n=2$,

此时$r_2<\frac{1}{49}\frac{1}{2^7}\approx0.00016<0.001$，于是$\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\frac{1}{2^3}+\frac{1}{25}\frac{1}{2^5}\approx0.487.$

9. 利用幂级数法求方程$y'=\ln(x+1)+y$满足初始条件$y(0)=0$的特解.

解：设幂级数$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$为方程的解，由条件$y(0)=0$，可得$a_0=0$,

因而$y=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots$, $y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$,

又$\ln(x+1)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$，代入原方程，合并$x$的各同次幂的系数，得

$$y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3\cdot4}x^4-\frac{1}{3\cdot4\cdot5}x^5+\cdots$$

(B)

1. 求下列幂级数的收敛区间(要讨论端点处的收敛性)：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(x-1)^n$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$；（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n4^n}x^{2n-1}$；

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n}x^{2n}}{2n}$；（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}x^{4n+1}$.

解：（1）因为$r=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}=1$（利用$1\le\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}\le\sqrt[n]{n}$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$及夹逼定理)，故收敛半径$R=\frac{1}{r}=1$。当$x-1=1$即$x=2$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$，此时原级数发散（通项极限不等于0）；当$x-1=-1$即$x=0$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$，此时原级数发散(通项极限不等于0)。因此，原级数的收敛域为$(0,2)$。

（2）因为$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\frac{1}{e}$，故收敛半径$R=\frac{1}{r}=e$。当$|x|=e$时，得级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(\pm e)^n$，$|u_n|=\frac{n!}{n^n}e^n$，$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}$，因$x_n=(1+\frac{1}{n})^n$单调增

加，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e$，故$x_n<e$，于是得$|u_{n+1}|>|u_n|$，由此$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(\pm e)^n$发散；因此，原级数的收敛域为$(-e,e)$。

（3）该幂级数缺少偶数次项，可用比值审敛法求收敛半径及收敛域。

$$l=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)4^{n+1}}\left|x^{2n+1}\right|}{\frac{1}{n4^n}\left|x^{2n-1}\right|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{4(n+1)}x^2=\frac{1}{4}x^2$$

当$l=|\ \frac{1}{4}x^2\ |<1$，即$|\ x\ |<2$时，原幂级数绝对收敛，当$|\ \frac{1}{4}x^2\ |>1$，即$|\ x\ |>2$时，原幂级数发散，所以该级数的收敛半径为$R=2$。当$x=\ 2$时，原级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$，此时原级数收敛；当$x=-2$时，原级数为$-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$，此时原级数收敛。因此，原级数的收敛域为$[-2,2]$。

（4）该题是缺少奇次幂的幂级数，可用比值审敛法求收敛半径及收敛域

$$u_n=\frac{(-1)^n2^{2n}x^{2n}}{2n}，且\ l=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2^{2(n+1)}}{2(n+1)}x^{2n+2}}{\frac{2^{2n}}{2n}x^{2n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4n}{(n+1)}x^2=4x^2$$

由比值审敛法得，当$4x^2<1$即$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$时，幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n}x^{2n}}{2n}$收敛；当$4x^2>1$即$x>\frac{1}{2}$或$x<-\frac{1}{2}$时，幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n}x^{2n}}{2n}$发散；当$4x^2=1$即$x=\pm\frac{1}{2}$时，若$x=\frac{1}{2}$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n}x^{2n}}{2n}=\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$收敛，若$x=-\frac{1}{2}$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n}x^{2n}}{2n}=\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$收敛；因此，原级数的收敛域为$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$。

（5）可用比值审敛法求收敛半径及收敛域。

$$l=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{4(n+1)+1}\left|x^{4(n+1)+1}\right|}{\frac{1}{4n+1}\left|x^{4n+1}\right|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4n+1}{4n+5}x^4=x^4$$

当$l=|\ x^4\ |<1$，即$|\ x\ |<1$时，原幂级数绝对收敛，当$|\ x^4\ |>1$，即$|\ x\ |>1$时，原幂级数发散，所以该级数的收敛半径为$R=1$。当$x=\ 1$时，原级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}$，此时原级数发散；当$x=-1$时，原级数为$-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}$，此时原级数发散。因此，原级数的收敛域为$(-1,1)$。

2. 逐项求导或逐项积分，求下列级数的和函数：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n$；　　　　（2）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$.

解：(1) $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2nx^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=2x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$

$$=2x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'+\frac{x}{1-x}=\frac{3x-x^2}{(1-x)^2}，\quad x\in(-1,1)$$

(2) $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\frac{1}{1-x}-\frac{x}{1-x}=\begin{cases}1, x\in(-1,1)\\0, x=1\end{cases}$

3. 将下列函数展开成 x 的幂级数，并求展开式成立的区间：

（1） $f(x)=\ln(3-2x^2)$；　　（2） $f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$；　　（3） $\frac{d}{dx}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x^2}-1}{x}\right)$ $(x\neq 0)$.

解：(1) $f(x)=\ln(3-2x^2)=\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2}x)+\ln(\sqrt{3}-\sqrt{2}x)$

$$=2\ln\sqrt{3}+\ln(1+\sqrt{\frac{2}{3}}x)+\ln[1+(-\sqrt{\frac{2}{3}}x)]$$

$$=2\ln\sqrt{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(\sqrt{\frac{2}{3}}x)^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-\sqrt{\frac{2}{3}}x)^n}{n}$$

$$=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{\frac{2}{3}})^n\frac{(-1)^{n-1}-1}{n}x^n=\ln 3-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{2}{3})^n x^{2n},\ x\in(-\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}})$$

$$(2)\ f'(x)=\frac{\frac{-2(1+2x)-2(1-2x)}{(1+2x)^2}}{1+\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)^2}=\frac{-2}{1+4x^2}=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nx^{2n}$$

$$\Rightarrow f(x)-f(0)=\int_0^x\left[-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nx^{2n}\right]dx=-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$f(0)=\arctan\frac{1-0}{1+0}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow f(x)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}]$$

$$(3)\ e^{-x^2}=1+(-x^2)+\frac{1}{2!}(-x^2)^2+\cdots+\frac{(-x^2)^n}{n!}+\cdots$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-x^2}-1}{x}\right)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n-1}}{n\,!}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{n\,!}x^{2n-2},\quad(x\neq 0)$$

4. 将函数 $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$ 展开成 x 的幂级数.

解：因为 $\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$，且 $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$　　$x\in(-1,1]$

$$\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n,\qquad x\in[-1,1)$$

于是有　$\ln\frac{1+x}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}-1}{n}x^n=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\ x\in(-1,1)$，　　$x\in(-1,1)$.

又 $\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^x(1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^nx^{2n}+\cdots)dx$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\in[-1,\ 1]$$

所以，$f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}-x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}，\quad x\in(-1,1)$$

5. 求下列级数的和：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$；　　　　（2）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}$.

解：（1）因为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n=x\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^{n-1}=x\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n n!}x^n\right)'=x\left[x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\right)'\right]'$

$$=x\left[x\left(e^x-1\right)'\right]'=x(x+1)e^x，\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

所以，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=x(x+1)e^x\big|_{x=1}=2e$。

（2）因为$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\mathrm{L}\ +(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\mathrm{L}$ ，$(-\infty<x<+\infty)$

所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+2}}{2(2n+1)!}\right)'=\left(\frac{x}{2}\sin x\right)'=\frac{1}{2}(\sin x+x\cos x)，\quad(-\infty<x<+\infty)$$

令$x=1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}(\sin x+x\cos x)\big|_{x=1}=\frac{1}{2}(\sin 1+\cos 1)$

6. 试用幂级数法求方程$y''-2xy'-4y=0$的满足初始条件$y(0)=0$，$y'(0)=1$的特解.

解：设幂级数$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$　　为方程的解，

由条件$y(0)=0$，$y'(0)=1$可得$a_0=0,a_1=1,$因而

$$y=x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots,\quad y'=1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots,$$

$$y''=2a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots,$$

代入原方程，合并x的各同次幂的系数，得$a_2=0,a_3=1,a_4=0,\cdots,a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n,\cdots$

因而$a_5=\frac{1}{2!},a_6=0,a_7=\frac{1}{6}=\frac{1}{3!},a_8=0,a_9=\frac{1}{4!},\cdots,$

所以 $a_{2k+1}=\frac{1}{k!},a_{2k}=0,k=0,1,2,\cdots,$

因此$y=x+x^3+\frac{x^5}{2!}+\cdots+\frac{x^{2k+1}}{k!}+\cdots=x\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\cdots+\frac{x^{2k}}{k!}+\cdots\right)=xe^{x^2}$.

习题 11.3　傅里叶级数

1. 证明三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

在区间$[-\pi, \pi]$上具有下列性质：任意两个不同函数的乘积在$[-\pi, \pi]$上的积分都等于0（正交性）；每一个函数的平方在$[-\pi, \pi]$上的积分都等于π. 即对任意的非负整数m与n，有

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n \neq 0; \end{cases} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n \neq 0. \end{cases}$$

证明：当$m = n \neq 0$时，$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 2\int_0^{\pi} \sin^2 mx dx = 2\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2mx}{2} dx = \pi$

当$m \neq n$时，

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 2\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx dx = -\int_0^{\pi} [\cos(m+n) - \cos(m-n)x] dx = 0$$

利用和差化积公式同法可证后两式。

2. 下列周期函数的周期为2π，试将$f(x)$展开成傅立叶级数，如果$f(x)$在$[-\pi, \pi)$上的表达式为：

（1）$f(x) = \sin ax, (-\pi \le x < \pi)$（$a$为非整数的常数）；

（2）$f(x) = \pi^2 - x^2$，$(-\pi \le x < \pi)$；（3）$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < 0, \\ 1 & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

解：（1）$\sin ax$在$(-\pi \le x < \pi)$内连续且为奇函数故

$a_n = 0, (n = 0, 1, 2, \text{L})$，

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin ax \sin nx dx = \frac{2}{\pi}(-\frac{1}{2})\int_0^{\pi} [\cos(a+n)x - \cos(a-n)x] dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}[\frac{1}{a+n}\sin(a+n)x |_0^{\pi} - \frac{1}{a-n}\sin(a-n)x |_0^{\pi}]$$

$$= -\frac{1}{\pi}\frac{(-1)^n}{a+n}\sin \pi a + \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^n}{a-n}\sin \pi a = \frac{\sin \pi a}{\pi}\frac{(-1)^n 2n}{a^2 - n^2}$$

故$f(x) = \sin ax$的傅里叶级数展开式为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi a}{\pi}\frac{(-1)^n 2n}{a^2 - n^2}\sin nx = \frac{2\sin \pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{a^2 - n^2}\sin nx$$

（2）$f(x) = \pi^2 - x^2$在$(-\pi \le x < \pi)$连续且为偶函数故

$b_n = 0, (n = 1, 2, \text{L})$，

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) dx = 2\pi^2 - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{4}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2)\cos nx dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} x^2 d\sin nx = -\frac{4\cos n\pi}{n^2} = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

故 $f(x)=\pi^2-x^2$ 的傅里叶级数展开式为 $f(x)=\frac{2}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$.

（3）因为 $f(x)$ 在除 $x=k\pi$, 外连续，所以在 $x=k\pi,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处，级数收敛于 $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$；在 $x\neq k\pi,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处收敛于 $f(x)$.

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}1dx=1$，$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nxdx=0$，

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx=-\frac{1}{n\pi}(\cos n\pi-1)=\frac{2}{(2m-1)\pi}$, 其中 $n=2m-1,(m=1,2,\cdots)$.

故 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin x+\frac{2}{3\pi}\sin 3x+\frac{2}{5\pi}\sin 5x+\cdots$ ，当 $x\neq k\pi,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时.

3. 将下列各周期函数展开成傅里叶级数（下面给出函数在一个周期内的表达式）:

（1） $f(x)=2+|x|$，$(-1\le x<1)$；　　（2） $f(x)=1-x^2$，$(-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2})$；

（3） $f(x)=\begin{cases}2x+1, & -3\le x<0,\\ 1, & 0\le x<3.\end{cases}$.

解: （1） $f(x)=2+|x|$ 在 $(-1\le x<1)$ 内连续且为偶函数，$l=1$

$a_0=\frac{2}{1}\int_0^1(2+x)dx=5$，$a_n=\frac{2}{1}\int_0^1(2+x)\cos\frac{n\pi x}{1}dx=2\int_0^1 x\cos n\pi xdx$

$=\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi x|_0^1=\frac{-4}{(2m-1)^2\pi^2}$,其中 $n=2m-1,(m=1,2,\cdots)$，$b_n=0$.

故 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为 $f(x)=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2m-1)\pi x}{(2m-1)^2}$

（2） $f(x)=1-x^2$ 在 $(-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2})$ 内连续且为偶函数，$l=\frac{1}{2}$

$a_0=4\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)dx=\frac{11}{6}$，$a_n=4\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\cos 2n\pi xdx=\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}$，$b_n=0$.

故 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为 $f(x)=\frac{11}{12}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\cos 2n\pi x$

（3） $f(x)$ 在除 $x=3k,(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 外连续，在 $x=3k,(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 处，级数收敛于 $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}=\frac{1-5}{2}=-2$.

$a_0=\frac{1}{3}(\int_{-3}^{0}(2x+1)dx+\int_0^3 1dx)=-1$，

$a_n=\frac{1}{3}(\int_{-3}^{0}(2x+1)\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\int_0^3\cos\frac{n\pi x}{3}dx)$

$=\frac{1}{3}\int_{-3}^{0}2x\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{2}{3}\frac{3}{n\pi}\int_{-3}^{0}xd\sin\frac{n\pi x}{3}=\frac{6}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}|_{-3}^{0}$

$=\frac{6}{n^2\pi^2}(1-\cos n\pi)=\frac{6}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]$

$$b_n=\frac{1}{3}(\int_{-3}^{0}(2x+1)\sin\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{0}^{3}\sin\frac{n\pi x}{3}dx)$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-3}^{0}2x\sin\frac{n\pi x}{3}dx=-\frac{2}{3}\frac{3}{n\pi}\int_{-3}^{0}xd\cos\frac{n\pi x}{3}=-\frac{6}{n\pi}\cos n\pi=\frac{6}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

故 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=-\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\{\frac{6[1-(-1)^n]}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}+\frac{6}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi x}{3}\}\ ,x\neq 3k,(k=\pm1,\pm2,\cdots).$$

4. 将函数 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\leq 0\\ 1, & 0<x\leq\pi\end{cases}$ 展成傅里叶级数.

解：$f(x)$ 在除 $x=0$ 处连续,满足狄利克雷定理条件,做周期延拓后函数 $F(x)$ 收敛于 $f(x)$.

在 $x=k\pi,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处，级数收敛于 $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$.

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}1dx=1$，$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nxdx=0$，

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx=\frac{1}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\frac{2}{(2m-1)\pi}$,其中 $n=2m-1,(m=1,2,\cdots)$.

故 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为 $f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{(2m-1)\pi}\sin(2m-1)x$,$x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$.

5. 将下列函数分别展开成正弦级数和余弦级数：

（1）$f(x)=\begin{cases}x\ , & 0\leq x<\frac{l}{2},\\ l-x, & \frac{l}{2}\leq x\leq l;\end{cases}$　　（2）$f(x)=x^2\ (0\leq x\leq 2)$.

解：（1）先求正弦级数,做奇延拓,有 $a_0=0$, $a_n=0$,

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}[\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx]$$

$$=\frac{2}{l}[-\frac{l^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{l^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}]$$

$$=\frac{2}{l}\frac{2l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

将 b_n 代入正弦级数得 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}\ (0\leq x\leq l)$

将函数做偶延拓,求余弦级数,此时 $b_n=0$, $a_0=\frac{2}{l}[\int_0^{\frac{l}{2}}xdx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)dx]=\frac{l}{2}$.

$$a_n=\frac{2}{l}[\int_0^{\frac{l}{2}}x\cos\frac{n\pi x}{l}dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx]$$

$$=\frac{2}{l}\{\frac{l}{n\pi}[\frac{l}{2}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{l}{n\pi}]+\frac{l}{n\pi}[-\frac{l}{2}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}]\}$$

$$=\frac{2l}{n^2\pi^2}(-1-\cos n\pi+2\cos\frac{n\pi}{2})$$

将 a_n 代入余弦级数得 $f(x)=\frac{l}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{n^2\pi^2}(-1-\cos n\pi+2\cos\frac{n\pi}{2})\cos\frac{n\pi x}{l}\ (0\le x\le l)$.

（2）先求正弦级数, 做奇延拓, 有 $a_0=0$， $a_n=0$，

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2\sin\frac{n\pi x}{l}dx=-\frac{2}{n\pi}\int_0^2 x^2 d\cos\frac{n\pi x}{l}=-\frac{8}{n\pi}\cos n\pi+\frac{16}{n^3\pi^3}(\cos n\pi-1).$$

将 b_n 代入正弦级数得 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{8}{n\pi}(-1)^{n+1}+\frac{16}{n^3\pi^3}((-1)^n-1)]\sin\frac{n\pi x}{2}\ (0\le x\le 2)$

将函数做偶延拓,求余弦级数,此时 $b_n=0$， $a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2dx=\frac{8}{3}$，

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{2}{n\pi}[x^2\sin\frac{n\pi x}{2}|_0^2-2\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx]=\frac{16}{n^2\pi^2}\cos n\pi.$$

将 a_n 代入余弦级数得 $f(x)=\frac{4}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^2\pi^2}(-1)^n\cos\frac{n\pi x}{2}\ (0\le x\le 2)$.

6. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，证明：

（1）如果 $f(x-\pi)=-f(x)$，则 $f(x)$ 的傅立叶系数 $a_0=0$， $a_{2k}=0$， $b_{2k}=0$（$k=1,2,\cdots$）；

（2）如果 $f(x-\pi)=f(x)$，则 $f(x)$ 的傅立叶系数 $a_{2k+1}=0$， $b_{2k+1}=0$（$k=1,2,\cdots$）.

证: （1） $f(x)$ 的傅立叶系数

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nxdx+\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx]$$

在积分 $\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx$ 中,令 $x-\pi=t$

$$a_n=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nxdx+\int_{-\pi}^{0}f(\pi+t)\cos(n\pi+nt)dt]$$

此时 $f(\pi+t)=-f(t)$， $a_n=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nxdx-\int_{-\pi}^{0}f(t)\cos(n\pi+nt)dt]$

当 $n=2k,(k=1,2,3,\cdots)$ 时 $\cos(n\pi+nt)=\cos nt$,有

$$a_n=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nxdx-\int_{-\pi}^{0}f(t)\cos ntdt]=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nxdx]$$
$$=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin nxdx+\int_{-\pi}^{0}f(\pi+t)\sin(n\pi+nt)dt]$$
$$=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin nxdx-\int_{-\pi}^{0}f(t)\sin(n\pi+nt)dt]$$

当 $n=2k,(k=1,2,3,\cdots)$ 时 $\sin(n\pi+nt)=\sin nt$,有

$$b_n=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin nxdx-\int_{-\pi}^{0}f(t)\sin ntdt]=0$$

同法可证(2).

(B)

1．填空：（1）若 $f(x)$ 在 $\left[-\pi,\pi\right]$ 上满足收敛定理的条件，则在连续点 x_0 处它的傅里叶级数与 $f(x_0)$ ________；

解：相等，由狄利克雷收敛定理可知.

（2）设周期函数 $f(x)=\dfrac{x}{2}(-\pi\le x<\pi)$，则它的傅里叶系数 $a_0=$________，$a_n=$________，$b_1=$________，$b_n=$________；

解：$a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{2}dx=0,$

$$b_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{2}\sin xdx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{2}d\cos x=-\frac{x}{2\pi}\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin x}{2}dx=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{2}\sin nxdx=-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{2}d\cos nx$$
$$=-\frac{x}{2n\pi}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{2}dx=\frac{(-1)^{n+1}}{n},\quad(n=1,2,\cdots).$$

（3）用周期为 2π 的函数 $f(x)$ 的傅里叶系数公式求周期为 l 的函数 $g(t)$ 的傅里叶级数，应作代换 $t=$______；

解：$\dfrac{lx}{2\pi}$.

（4）周期为 2 的函数 $f(x)=x^2\ (-1<x\le1)$ 的傅里叶系数 $a_0=$_______，$a_n=$________，$b_n=$________；

解：$a_0=\displaystyle\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3},$

$$a_n=\int_{-1}^{1}x^2\cos nxdx=2\int_0^1 x^2\cos nxdx=\left(\frac{2}{n}x^2\sin nx+\frac{4}{n^2}x\cos nx-\frac{4}{n^3}\sin nx\right)\Big|_0^1$$

$$=\frac{2\sin n}{n}+\frac{4}{n^2}\cos n-\frac{4}{n^3}\sin n,\quad (n=1,2,\cdots).$$

$$b_n=\int_{-1}^{1}x^2\sin nxdx=0,\quad (n=1,2,\cdots).$$

（5）设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数在 $(-1,1]$ 上定义为 $f(x)=\begin{cases}2,-1<x\le 0\\ x^3,0<x\le 1\end{cases}$，则 $f(x)$ 的傅立叶级数在 $x=1$ 处收敛于_______；

解：在 $x=1$ 处收敛于 $\dfrac{f(-1^+)+f(1^-)}{2}=\dfrac{2+1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

（6）设函数 $f(x)=x^2$（$0\le x<1$），而 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\pi x)$ $(-\infty<x<+\infty)$，其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)dx$ $(n=1,2,3,\cdots)$，则 $s(-\frac{1}{2})=$_______；

解：b_n 是把 $f(x)=x^2$ 进行奇延拓后的正弦级数的系数，而奇延拓后得到的函数在 $-\dfrac{1}{2}$ 处是连续的，所以 $s(-\dfrac{1}{2})=-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=-\dfrac{1}{4}$.

（7）设 $x^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx(-\pi\le x\le\pi)$，则 $a_2=$________.

解：$a_2=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos 2xdx=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos 2xdx=\dfrac{1}{\pi}\left(x^2\sin 2x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+x\cos 2x\right)\Big|_0^{\pi}=1$.

2. 将下列各周期函数展开成傅里叶级数（下面给出函数在一个周期内的表达式）：

（1）$f(x)=\begin{cases}a, & -\pi\le x<0,\\ b, & 0\le x<\pi,\end{cases}$（其中 a、b 均为常数）；（2）$f(x)=\begin{cases}x-1, & -\pi\le x<0,\\ x+1, & 0\le x<\pi;\end{cases}$

（3）$f(x)=\begin{cases}x, & -1\le x<0,\\ 1, & 0\le x<\dfrac{1}{2},\\ -1, & \dfrac{1}{2}\le x<1.\end{cases}$

解：（1）$f(x)$ 满足收敛定理的条件，它在除点 $x=k\pi,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 外处处连续，

在 $x=k\pi,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处，级数收敛于 $\dfrac{f(x^-)+f(x^+)}{2}=\dfrac{a+b}{2}$，

在 $x\ne k\pi,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处，级数收敛于 $f(x)$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}adx+\int_{0}^{\pi}bdx\right]=a+b,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}a\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}b\cos nxdx\right]=0,\quad (n=1,2,\cdots);$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}a\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}b\sin nxdx\right]$$

$$=\frac{b-a}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right],\quad (n=1,2,\cdots).$$

所以 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为：

$$f(x)=\frac{a+b}{2}-\frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1},\left(x\neq k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right).$$

（2） $f(x)$ 满足收敛定理的条件，它在除点 $x=k\pi,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 外处处连续，

在 $x=k\pi,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处，级数收敛于 $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}=0$，

在 $x\neq k\pi,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处，级数收敛于 $f(x)$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(x-1)dx+\int_{0}^{\pi}(x+1)dx\right]=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(x-1)\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}(x+1)\cos nxdx\right]=0,\quad (n=1,2,\cdots);$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(x-1)\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}(x+1)\sin nxdx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\cos nx}{n}-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Big|_{-\pi}^{0}+\left(-\frac{\cos nx}{n}-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Big|_{0}^{\pi}\right]$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[1-(1+\pi)(-1)^n\right],\quad (n=1,2,\cdots);$$

所以 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left[1-(1+\pi)(-1)^n\right]\sin nx,\quad \left(x\neq k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right).$$

（3） 函数 $f(x)$ 的半周期 $l=1$. $f(x)$ 满足收敛定理的条件，它在除点 $x=2k,2k+\frac{1}{2},(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 外处处连续.

在 $x=2k,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处，级数收敛于 $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}=\frac{1}{2}$，

在 $x=2k+\frac{1}{2},(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处，级数收敛于 $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}=0$，

在 $x\neq 2k,2k+\dfrac{1}{2},(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处，级数收敛于 $f(x)$.

$$a_0=\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}xdx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)dx=-\frac{1}{2};$$

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi xdx=\int_{-1}^{0}x\cos n\pi xdx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\cos n\pi xdx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-\cos n\pi x)dx$$

$$=\left[\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x+\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right]_{0}^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right]_{1}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{n^2\pi^2}\left[1-(-1)^n\right]+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\quad(n=1,2,\cdots);\ ,$$

$$b_n=\int_{-1}^{1}f(x)\sin n\pi xdx=\int_{-1}^{0}x\sin n\pi xdx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\sin n\pi xdx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-\sin n\pi x)dx$$

$$=\left[-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x+\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\right]_{\frac{1}{2}}^{0}+\left[\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\frac{(-1)^n}{n\pi}+\frac{1}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}=\frac{1}{n\pi}-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\quad(n=1,2,\cdots).$$

所以 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为:

$$f(x)=-\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right]\cos n\pi x+\left(\frac{1}{n\pi}-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin n\pi x\right\},$$

$$\left(x\neq 2k,x\neq 2k+\frac{1}{2},k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right).$$

3. 将函数 $f(x)=\pi-x(0\le x\le\pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

解:先求正弦级数,做奇延拓,有 $a_0=0$, $a_n=0$,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos nx+\frac{1}{n}x\cos nx-\frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

将 b_n 代入正弦级数得， $f(x)=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin nx\quad(0<x\le\pi).$

将函数做偶延拓,求余弦级数,此时 $b_n=0$, $a_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)dx=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)dx=\pi,$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos nxdx=-\frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$=-\frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\left[1-(-1)^n\right]=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi n^2}, & n=2k-1,\\ 0, & n=2k,\end{cases}$$

将 a_n 代入余弦级数得 $f(x)=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}con(2n-1)x,\quad (0\le x\le \pi).$

4. 把函数 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4}, -\pi\le x<0\\ \dfrac{\pi}{4}, \quad 0\le x<\pi\end{cases}$ 展开成傅里叶级数，并由它导出：

（1）$\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots$；　　（2）$\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi=1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{17}+\cdots.$

解：（1）$f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$ 满足收敛定理的条件，对它进行周期延拓.

在 $x=\pi,$ 处，级数收敛于 $\dfrac{f\left(-\pi^{+}\right)+f\left(\pi^{-}\right)}{2}=0$，在 $x=0$ 处，级数收敛于 $\dfrac{f\left(0^{+}\right)+f\left(0^{-}\right)}{2}=0$，

在其余点处，级数收敛于 $f(x)$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=0,\quad (n=1,2,\cdots);$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin nxdx+\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin nxdx\right]$$

$$=\frac{1}{2n}\left[1-(-1)^n\right],\quad (n=1,2,\cdots).$$

所以 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为：$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2m-1)x}{2m-1},\quad x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi).$

当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，得 $\dfrac{\pi}{4}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}(2m-1)}{2m-1}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots,$

当 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 时，得 $\dfrac{\pi}{4}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{3}(2m-1)}{2m-1}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}+0-\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{5}+\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{7}\cdots,$

即 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi=1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{17}+\cdots.$

5. 证明：当 $0\le x\le\pi$ 时，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{\pi x}{2}+\dfrac{\pi^2}{6}.$

证明：本题实质上是将函数 $g(x)=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{12}\left(3x^2-6\pi x+2\pi^2\right)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 展开成余弦级数. 为此，将 $f(x)=3x^2-6\pi x$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 偶延拓到 $\left[-\pi,\pi\right]$，再以 2π 为周期进行周期性延拓，

则 $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(3x^2-6\pi x\right)dx=-4\pi^2,\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(3x^2-6\pi x\right)\cos nxdx=\frac{12}{n^2},\quad (n=1,2,\cdots);$

$b_n=0,\quad (n=1,2,\cdots)$，由收敛性定理知

$3x^2-6\pi x=-2\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{n^2}\cos nx,\quad x\in\left[0,\pi\right]$，即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6}.$

总习题十一
（A）

1. 选择题

（1）设 $a_n>0$，$n=1,2,\mathrm{L}$ ，若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，则下列结论正确的是（　　）；

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 发散　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 发散

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$ 收敛

解：由于收敛级数加括号仍收敛，故正确的是（D)。（A）（B）的反例：$a_n=\frac{1}{n}$；由性质：正项级数加括号或去括号不改变其敛散性，可判定(C)选项是错误的。

（2）设有以下命题：①若 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；②若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1000}$ 收敛；③若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；④若 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛. 则以上命题中正确的是（　　）；

（A）①②　　（B）②③　　（C）③④　　（D）①④

解：①错误，如反例：$u_n=\left(-1\right)^n$，②正确，因为增加或减少有限项不改变级数的敛散性；③正确，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$；④错误，如反例：$u_n=\frac{1}{n}$，$u_n=-\frac{1}{n}$；故正确的是（B)。

（3）下列各选项正确的是（　　）；

（A）若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 均收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛

（B）若 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_nv_n\right|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 均收敛

（C）若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $u_n\geq\frac{1}{n}$

（D）若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，且$u_n \ge v_n (n=1,2,\cdots)$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 也收敛

解：因为 $(u_n+v_n)^2=u_n^2+2u_nv_n+v_n^2 \le 2(u_n^2+v_n^2)$，由正项级数的比较判别法知正确的是（A）。

（4）下列级数中收敛的是（　　）；

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n\,!}$　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)\,!}$　　（C）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$

解：（A）因 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e>1$，由比值判别法知，级数发散。

（B）因 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{[2(n+1)]!}}{\frac{n!}{(2n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{2(n+1)}=\frac{1}{2}<1$，由比值判别法知，级数收敛。

（C）因 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{3^n}{n\times 2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2(n+1)}=\frac{3}{2}>1$，由比值判别法知，级数发散。

（D）由于$\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}$，所以由比较判别法知，级数发散。 故正确的是（B）。

（5）若$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{\ln(n+1)}$收敛$(a>0)$，则$a$的范围为（　　）；

（A）$(0,1)$　　（B）$(1,2)$　　（C）$(1,+\infty)$　　（D）$(0,+\infty)$

解：因为当$a>1$时，由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a^{n+1}}{\ln(n+2)}}{\frac{a^n}{\ln(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)}a=a>1$，故由比值判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{\ln(n+1)}$发散；当$a<1$时，由于$\sum_{n=1}^{\infty}a^n$收敛，而$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a^n}{\ln(n+1)}}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0$，故由比较判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{\ln(n+1)}$收敛；所以正确的是（A）。

（6）设$p_n=\frac{a_n+|a_n|}{2}$，$q_n=\frac{a_n-|a_n|}{2}$，$n=1,2,\cdots$，则下列命题正确的是（　　）；

（A）若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ 和$\sum_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛

（B）若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ 和$\sum_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛

（C）若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ 和$\sum_{n=1}^{\infty}q_n$ 的收敛性都不定

（D）若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}p_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}q_n$的收敛性都不定

解：若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$和$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$均收敛，从而$\sum_{n=1}^{\infty}p_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}q_n$都收敛，故正确的是（B）。

（7）设幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$在点$x=2$处收敛，则$a$的取值范围为（　　）；

（A）$1<a<3$　　　（B）$1\le a<3$　　　（C）$1<a\le 3$　　　（D）$1\le a\le 3$

解：因为幂级数的收敛半径为 1，且在点$x=2$处收敛，故$1<|2-a|<3,\ 1<a<3$；又在点$x=2$处，当$a=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散；当$a=3$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛；故正确的是（C）。

（8）设幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$的收敛半径分别为$\frac{\sqrt{5}}{3}$与$\frac{1}{3}$，则幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{b_n^2}x^n$的收敛半径为（　　）.

（A）5　　　（B）$\frac{\sqrt{5}}{3}$　　　（C）$\frac{1}{3}$　　　（D）$\frac{1}{5}$

解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{a_n^2}{b_n^2}}{\frac{a_{n+1}^2}{b_{n+1}^2}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|^2\Big/\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right|^2=(\frac{\sqrt{5}}{3})^2\Big/(\frac{1}{3})^2=5$，故正确的是（A）。

2. 填空题

（1）已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的前 n 项部分和$s_n=\frac{3n}{n+1}\ (n=1,2,3,\cdots)$，则此级数的通项$u_n=$______；

解：由于$s_n-s_{n-1}=\frac{3n}{n+1}-\frac{3(n-1)}{n}=\frac{3}{n(n+1)}$，故此级数的通项$u_n=\underline{\frac{3}{n(n+1)}}$。

（2）要使级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{2n^2-1}}{n^p}$收敛，实数$p$必须满足条件______；

解：由于当$p-\frac{1}{3}>1$时，正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p-\frac{2}{3}}}$收敛，而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[3]{2n^2-1}}{n^p}}{\frac{1}{n^{p-\frac{2}{3}}}}=\sqrt[3]{2}$，故由比较判别法得，实数$p$必须满足条件$\underline{p>\frac{5}{3}}$。

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=$______；

解：由于$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$，$x\in(-1,1)$，且$\left.\frac{1}{(1-x)^2}\right|_{x=\frac{1}{2}}=4$，

故$\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\underline{\ 4\ }$。

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n}$收敛半径为______；

解：由于 $l=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{\dfrac{(n+1)}{2^{n+1}+(-3)^{n+1}}x^{2n+2}}{\dfrac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n}}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{2^n+(-3)^n}{2^{n+1}+(-3)^{n+1}}\right|\dfrac{(n+1)}{n}x^2=\dfrac{1}{3}x^2$，由比值审敛法得，当 $\dfrac{1}{3}x^2<1$ 即 $|x|<\sqrt{3}$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n}$ 收敛；当 $\dfrac{1}{3}x^2>1$ 即 $|x|>\sqrt{3}$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n}$ 收敛半径为 $\underline{\sqrt{3}}$。

（5）设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为3，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为______；

解：由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}=(x-1)^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n-1}=(x-1)^2\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n\right]'$，而 $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n\right]'$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 有相同的收敛半径，故幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为 $\underline{(-2,4)}$。

（6）当 $|x|<\sqrt{2}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的和函数为______；

解：由于当 $|x|<\sqrt{2}$ 时，$\left[\int_0^x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}\right)dx\right]'=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2^n}\right)'=\left[\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n\right]'$

$=\left(\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{1-\frac{1}{2}x^2}\right)'=\left(\dfrac{x}{2-x^2}\right)'=\dfrac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的和函数为 $\underline{\dfrac{2+x^2}{(2-x^2)^2}}$。

3. 判定下列级数的收敛性：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$；（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{x}{1+x^2}dx$；（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\left(\dfrac{e}{n}\right)^n$；（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{an}{n+1}\right)^n$ $(a>0)$.

解：（1）对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}<1$，由比值判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$ 收敛；由于 $0\le\dfrac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}\le\dfrac{n}{2^n}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$ 收敛，由比较判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$ 收敛。

（2）由于 $0\le u_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{x}{1+x^2}dx\le\int_0^{\frac{1}{n}}xdx=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{n^2}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^2}$ 收敛，因此，由比较判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{x}{1+x^2}dx$ 收敛。

（3）$u_n=\frac{n!}{n^n}e^n$，$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}$，因 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$ 单调增加，且 $\lim_{n\to\infty}x_n=e$，故 $x_n<e$，于是得 $u_{n+1}>u_n$，由此 $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{e}{n}\right)^n$ 发散。

另解：由斯特定公式 $n!=\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n}\cdot e^{\frac{\theta_n}{12n}}$，$0<\theta_n<1$ 得，$\lim_{n\to\infty}\frac{n!e^n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2\pi n}=+\infty$，所以，$\sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{e}{n}\right)^n$ 发散。

（4）由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{an}{n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{an}{n+1}=a$，故由根值判别法知道，当 $a>1$ 时，原级数发散；当 $0<a<1$ 时，原级数收敛；当 $a=1$ 时，因为 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}\neq 0$，所以原级数发散。

4. 设有两条抛物线 $y=nx^2+\frac{1}{n}$ 和 $y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$，记它们交点的横坐标的绝对值为 a_n.

（1）求这两条抛物线所围成的平面图形的面积 S_n；　（2）求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}$ 的和.

解：（1）用 L_n 与 L_{n+1} 分别表示两条抛物线 $y=nx^2+\frac{1}{n}$ 与 $y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$,L_n 与 L_{n+1} 有两个交点 $(-a_n,y_n)$ 与 (a_n,y_n)。

令 $nx^2+\frac{1}{n}=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$，容易求得 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$，利用定积分还可求得两抛物线围成的平面图形的面积。

$$s_0=\int_{-a_n}^{a_n}\left[nx^2+\frac{1}{n}-(n+1)x^2-\frac{1}{n+1}\right]dx=\frac{2a_n}{n(n+1)}-\int_{-a_n}^{a_n}x^2dx=\frac{4}{3n(n+1)\sqrt{n(n+1)}}。$$

（2）因为 $\frac{s_n}{a_n}=\frac{4}{3}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{4}{3}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$　$(n=1,2\cdots\cdots)$，

于是 $\sum_{k=1}^{n}\frac{s_k}{a_k}=\frac{4}{3}\left[(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})\right]=\frac{4}{3}(1-\frac{1}{n+1})$，

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{s_k}{a_k}=\frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=\frac{4}{3}$。

5. 求下列极限：

（1）$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$；　（2）$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}(1+\frac{1}{k})^{k^2}$；　（3）$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+\cdots+\frac{n}{a^n})$ $(a>1)$.

解：（1）因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\frac{1}{e}<1$，因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 收敛，

于是，$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$。

（2）由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}(1+\frac{1}{k})^{k^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$，且 $\frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}<(\frac{e}{3})^n$，

由比较判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{e}{3})^n$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}=0$，

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}(1+\frac{1}{k})^{k^2}=0$

（3）对幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}x^{n-1}\ (a>1)$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{a^{n+1}}}{\frac{n}{a^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$，所以收敛半径 $R=a\ (a>1)$。当 $|x|<a$ 时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}x^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}x^n\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n\right)'=\left(\frac{x}{a-x}\right)'=\frac{a}{(a-x)^2},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+\cdots+\frac{n}{a^n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}x^{n-1}=\left.\frac{a}{(a-x)^2}\right|_{x=1}=\frac{a}{(a-1)^2}$。

6. 设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos x\mathrm{d}x$，$n=0,1,2,\cdots$，求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_n$.

解：由 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n xd(\sin x)=\left.\frac{1}{n+1}(\sin x)^{n+1}\right|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1}(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}$，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}I_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}$$

令 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$，因其收敛半径 $R=1$，且 $s(0)=0$，故在 $(-1,1)$ 内有

$$s'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

于是 $s(x)=s(0)+\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x),\ x\in(-1,1)$。

令 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\in(-1,1)$，即得 $s(\frac{\sqrt{2}}{2})=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}=-\ln(1-\frac{\sqrt{2}}{2})=\ln(2+\sqrt{2})$，

从而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos xdx=s(\frac{\sqrt{2}}{2})=\ln(2+\sqrt{2})$。

7. 将下列函数展开成 x 的幂级数，并指出其收敛域：

（1）$f(x)=\ln(1-x-2x^2)$；　　（2）$f(x)=\frac{1}{4-5x+x^2}$.

解：（1）利用展开式 $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\ x\in(-1,1]$，得到

$\ln(1-x-2x^2)=\ln(1+x)+\ln(1-2x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-2x)^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}+(-2)^n}{n}x^n$，

又 $\begin{cases}-1<x\le 1\\-1<-2x\le 1\end{cases}\Rightarrow -\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}$，即收敛域为 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$。

（2）因为 $\dfrac{1}{4-5x+x^2}=\dfrac{1}{(x-1)(x-4)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x-1}\right)$，

而 $\dfrac{1}{x-4}=-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{4}}=-\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{4^n}$，$|x|<4$； $\dfrac{1}{x-1}=-\dfrac{1}{1-x}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$，$|x|<1$

所以，$\dfrac{1}{4-5x+x^2}=\dfrac{1}{3}(-\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{4^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n)=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4^{n+1}-1}{4^{n+1}}x^n$，$x\in(-1,1)$。

8. 求下列幂级数的和函数：

（1）$1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2n}$； （2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{2n+1}-1)x^{2n}$.

解：(1) 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2n}$，则 $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n-1}=-\dfrac{x}{1+x^2}$，

$$f(x)-f(0)=-\int_0^x\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln(1+x^2),$$

由 $f(0)=0$，得 $f(x)=-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$，$(|x|<1)$，

所以，$1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2n}=1-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$，$(|x|<1)$。

（2）设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{2n+1}-1)x^{2n}$，记 $S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}x^{2n}$，$S_2(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n}$，

则 $S(x)=S_1(x)-S_2(x)$，$x\in(-1,1)$。

$S_2(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\dfrac{x^2}{1-x^2}$，$(xS_1(x))'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\dfrac{x^2}{1-x^2}$，$x\in(-1,1)$，

$xS_1(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{t^2}{1-t^2}\mathrm{d}t=-x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$，$S_1(x)=\begin{cases}-1+\dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, & 0<|x|<1\\ 0, & x=0\end{cases}$，

由于 $S_1(0)=0$，故 $S(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^2}, & 0<|x|<1\\ 0, & x=0\end{cases}$。

9. 证明：

（1）设 $x_n>0$，$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}>1-\dfrac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散；

（2）设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 是收敛的正项级数，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛；

（3）当 $|x|<1$ 时，有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n=\dfrac{2}{(1-x)^3}$.

证明：(1) 由 $x_n>0$，$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}>1-\dfrac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$ 得：$x_{n+1}>\left(1-\dfrac{1}{n}\right)x_n=\dfrac{n-1}{n}x_n$，

则 $x_{n+1}>\dfrac{n-1}{n}x_n>\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-2}{n-1}\cdots\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}x_2=\dfrac{1}{n}x_2$ $(n=1,2,\cdots)$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，根据比较判别法可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散。

(2) 由 $\sum_{i=1}^{n}(a_n-a_{n-1})=\left(a_1-a_0\right)+\left(a_2-a_1\right)\left(a_3-a_2\right)+\cdots+\left(a_{n-1}-a_{n-2}\right)+\left(a_n-a_{n-1}\right)=a_n-a_0$

得 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 收敛 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-a_0\right)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-a_0$ 存在 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，于是，a_n 必有界，不妨设 $\left|a_n\right|\le M$（M 为正实数），则 $\left|a_nb_n\right|\le Mb_n$，$(b_n\ge 0)$，故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛。

(3) 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$，$x\in(-1,1)$，则

$$\int_0^x f(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(n+1)(n+2)t^ndt=\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)x^{n+1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+2}\right)'=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2},$$

对上式两边关于 x 求导得 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n=\frac{2}{(1-x)^3}$，$x\in(-1,1)$。

10. 设级数 $\frac{x^4}{2\cdot4}+\frac{x^6}{2\cdot4\cdot6}+\frac{x^8}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty)$ 的和函数为 $s(x)$. 求：

（1）$s(x)$ 所满足的一阶微分方程；　　（2）$s(x)$ 的表达式.

解：（1）因为 $s(x)=\frac{x^4}{2\cdot4}+\frac{x^6}{2\cdot4\cdot6}+\frac{x^8}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\cdots$, 所以 $s(0)=0$,

$$s'(x)=\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2\cdot4}+\frac{x^7}{2\cdot4\cdot6}+\cdots=x\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot4}+\frac{x^6}{2\cdot4\cdot6}+\cdots\right)=x\left[\frac{x^2}{2}+s(x)\right],$$

所以 $s(x)$ 是初值问题 $y'=xy+\frac{x^3}{2},y(0)=0$ 的解.

（2）一阶方程 $y'=xy+\frac{x^3}{2},y(0)=0$ 的通解为：

$$y=e^{\int xdx}\left[\int\frac{x^3}{2}e^{\int -xdx}dx+C\right]=e^{\int xdx}\left[-\frac{x^2}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}-e^{-\frac{x^2}{2}}+C\right]=-\frac{x^2}{2}-1+Ce^{-\frac{x^2}{2}},$$

由初始条件 $y(0)=0$，得 $C=1$，故 $s(x)=-\frac{x^2}{2}-1+e^{-\frac{x^2}{2}}$.

(B)

1. 填空题

（1）设 $x^2=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx\ (-\pi\le x\le\pi)$，则 $a_2=$______；

解：$a_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos 2xdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos 2xdx\quad=\frac{1}{\pi}\left(x^2\sin 2x-\frac{1}{2}\sin 2x+x\cos 2x\right)\Big|_0^{\pi}=1$.

（2）以 2π 为周期的函数在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0,\\ 1+x^2, & 0\le x<\pi,\end{cases}$ 设其傅立叶级数的和函数为 $s(x)$，则 $s(\pi)=$______.

解：显然 $f(x)$ 满足狄利克雷条件因此由收敛定理可得

$$s(\pi)=\frac{f(\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}=\frac{1+\pi^2-1}{2}=\frac{\pi^2}{2}.$$

2. 设周期为 2π 的周期函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为：

$f(x)=\begin{cases}ax, & -\pi\le x<0\\ bx, & 0\le x<\pi\end{cases}$（其中 a 、b 均为常数，且 $a>b>0$），试将其展开成傅里叶级数.

解：$f(x)$ 满足收敛定理的条件，它在除点 $x=2k\pi+\pi,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 外处处连续，

在 $x=2k\pi+\pi,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处，级数收敛于 $\dfrac{f(x^-)+f(x^+)}{2}=\dfrac{\pi(b-a)}{2}$，

在 $x\ne 2k\pi+\pi,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处，级数收敛于 $f(x)$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}axdx+\int_0^{\pi}bxdx\right)=\frac{\pi(b-a)}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}ax\cos nxdx+\int_0^{\pi}bx\cos nxdx\right)$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}axd\sin nx+\int_0^{\pi}bxd\sin nx\right)=\frac{1}{n\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0}a\sin nxdx-\int_0^{\pi}b\sin nxdx\right)$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}\left\{a\left[1-(-1)^n\right]+b\left[(-1)^n-1\right]\right\}=\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}(a-b),\quad (n=1,2,3,\cdots);$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}ax\sin nxdx+\int_0^{\pi}bx\sin nxdx\right)$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}axd\cos nx+\int_0^{\pi}bxd\cos nx\right)$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\left(ax\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}-\int_{-\pi}^{0}a\cos nxdx+bx\cos nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}b\cos nxdx\right)$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\left[\pi ax(-1)^n+b\pi(-1)^n\right]=\frac{(-1)^{n+1}}{n}(a+b),\quad (n=1,2,3,\cdots).$$

所以 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为：

$$f(x)=\frac{\pi}{4}(b-a)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}(a-b)\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}(a+b)\sin nx\right\},\left(x\ne 2k\pi+\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$$

3. 将函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\le x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

解:先求正弦级数,做奇延拓,有 $a_0=0$, $a_n=0$,

$$b_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin xdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin xdx=\frac{1}{\pi},$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin(n+1)x+\sin(n-1)x]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{n-1}\cos(n-1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n-1}\cos(n-1)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2n}{n^2-1}-\frac{2}{n^2-1}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\quad (n=2,3,\cdots).$$

将 b_n 代入正弦级数得 $f(x)=\dfrac{1}{\pi}\left[\sin x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{2n}{n^2-1}-\dfrac{2}{n^2-1}\sin\dfrac{n\pi}{2}\right)\sin nx\right]\quad (0<x\le\pi).$

将函数做偶延拓,求余弦级数,此时 $b_n=0$, $a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=\dfrac{2}{\pi},$

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos xdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos xdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{2},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos(n+1)x+\cos(n-1)x]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n+1}\sin(n+1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{n-1}\sin(n-1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n+1}\sin(n+1)\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n-1}\sin(n-1)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n-1}\cos\frac{n\pi}{2}\right]=\begin{cases}0, & n=2k+1 \\ \dfrac{2(-1)^{k-1}}{\pi(4k^2-1)}, & n=2k\end{cases}\quad k=1,2,\cdots$$

将 a_n 代入余弦级数得 $f(x)=\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos 2nx\quad (0\le x\le\pi).$

4. 设在一个周期 $[-\dfrac{T}{2},\dfrac{T}{2})$ 内宽为 τ 、高为 h、周期为 T 的矩形波的函数表达式为:

$$u(t)=\begin{cases}0, -\frac{T}{2}\le t<-\frac{\tau}{2}, \\ h,\ -\frac{\tau}{2}\le t<\frac{\tau}{2}, \\ 0,\ \frac{\tau}{2}\le t<\frac{T}{2},\end{cases}$$ 试将它展开为复数形式的傅里叶级数.

解：它的复数形式的傅里叶系数为 $c_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}u(t)dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}hdt=\frac{h\tau}{T},$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}u(t)e^{-i\frac{2n\pi t}{T}}dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}he^{-i\frac{2n\pi t}{T}}dt=\frac{h}{T}\left[-\frac{T}{2n\pi i}e^{-i\frac{2n\pi t}{T}}\right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$=-\frac{h}{2n\pi i}\left(e^{-i\frac{n\pi\tau}{T}}-e^{i\frac{n\pi\tau}{T}}\right)=\frac{h}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T},\quad n=\pm1,\pm2,\cdots,$$

所以 $u(t)=\frac{h\tau}{T}+\frac{h}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\tau}{T}e^{i\frac{2n\pi t}{T}},\quad (-\infty<t<+\infty, t\neq nT\pm\frac{\tau}{2}, n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$