Workshop $N01$

CESI - École d'Ingénieurs

Sciences Fondamentales.

Exercice 1 : Probabilités

Vous devez prévoir la météo pour les cinq prochains jours. Vous savez que la probabilité qu'un jour ait une couverture nuageuse inférieure à 50% est de 0.6.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins 3 des 5 prochains jours aient une couverture nuageuse inférieure à 50% ?
   Indice: Penser à utiliser la distribution binomiale.

2. Ecrire un code Python pour calculer vérifier vos résultats.
   Indice: Penser à utiliser le package 'scipy.stats'.

Solution de l'Exercice 1:

Définissons X comme le nombre de jours avec une couverture nuageuse inférieure à 50% sur les 5 prochains jours. X suit une distribution binomiale avec les paramètres $n = 5$ et $p = 0.6$.

La probabilité que $X = k$ est donnée par la formule de la distribution binomiale:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Nous cherchons $P(X \geq 3)$, ce qui peut être calculé comme suit:

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

Calculons chaque terme séparément:

$$P(X = 3) = \binom{5}{3}(0.6)^3(0.4)^2 = \frac{5!}{3!(5-3)!}(0.6)^3(0.4)^2 = 10 \times 0.216 \times 0.16 = 0.3456$$

$$P(X = 4) = \binom{5}{4}(0.6)^4(0.4)^1 = \frac{5!}{4!(5-4)!}(0.6)^4(0.4)^1 = 5 \times 0.1296 \times 0.4 = 0.2592$$

$$P(X = 5) = \binom{5}{5}(0.6)^5(0.4)^0 = \frac{5!}{5!(5-5)!}(0.6)^5(0.4)^0 = 1 \times 0.07776 \times 1 = 0.07776$$

En additionnant ces probabilités, nous obtenons:

$$P(X \geq 3) = 0.3456 + 0.2592 + 0.07776 = 0.68256$$

Donc, la probabilité qu'au moins 3 des 5 prochains jours aient une couverture nuageuse inférieure à 50% est environ 0.6826.

Les réponses aux différentes questions concernant le code Python se trouvent dans le notebook accompagnant ce workshop.

Exercice 2 : Analyse de Risque

Si la probabilité de stabiliser avec succès le réseau énergétique un jour donné est de 0.7, calculez le risque (probabilité d'échec) si la tâche est tentée pendant 4 jours.

Solution :

La probabilité d'échec un jour donné est $1 - 0.7 = 0.3$. Nous devons calculer la probabilité d'échouer au moins une fois en 4 jours :

$$P(\text{Au moins un échec}) = 1 - P(\text{Aucun échec})$$

$$P(\text{Aucun échec}) = (0.7)^4 = 0.2401$$

$$P(\text{Au moins un échec}) = 1 - 0.2401 = 0.7599$$

Exercice 3 : Équilibre de Nash

Soient deux forunisseurs d'énergie A, B. Chacun de ces fournisseurs a la possibilité de choisir entre trois stratégies : fournir une quantité d'énergie élevée, moyenne ou faible. La décision de chaque fournisseur affecte non seulement ses propres gains, mais aussi ceux de l'autre fournisseur.

La matrice des gains, qui résume les paiements (ou bénéfices) associés à chaque combinaison de stratégies choisies par les deux fournisseurs, est la suivante :

	Élevée	Moyenne	Faible
Élevée	$(2, 2)$	$(1, 3)$	$(0, 4)$
Moyenne	$(3, 1)$	$(4, 4)$	$(2, 5)$
Faible	$(4, 0)$	$(5, 2)$	$(3, 3)$

Dans cette matrice :

- La première entrée de chaque paire représente le gain du fournisseur A.
- La deuxième entrée représente le gain du fournisseur B.

Les stratégies disponibles pour chaque fournisseur sont :

- Fournir une quantité d'énergie élevée.
- Fournir une quantité d'énergie moyenne.
- Fournir une quantité d'énergie faible.

Questions

1. **Identification des stratégies dominantes :**
   - Une stratégie dominante pour un joueur est une stratégie qui lui procure un gain au moins aussi bon que toutes les autres, quelle que soit la stratégie choisie par l'autre joueur.
   - Examinez la matrice des gains pour déterminer s'il existe une stratégie dominante pour le fournisseur A et/ou le fournisseur B.
2. **Détermination des équilibres de Nash :**
   - Un équilibre de Nash est une situation dans laquelle aucun joueur n'a intérêt à changer unilatéralement sa stratégie, étant donné la stratégie de l'autre joueur.
   - Pour identifier les équilibres de Nash, examinez chaque combinaison de stratégies et vérifiez si un changement unilatéral de stratégie améliore le gain pour l'un des joueurs.

Solutions

Pour le fournisseur A :

- Si le fournisseur B choisit "Élevée" :
  - Gain pour A avec "Élevée" : 2
  - Gain pour A avec "Moyenne" : 1
  - Gain pour A avec "Faible" : 4
  - Il est préférable pour A de choisir "Faible".
- Si le fournisseur B choisit "Moyenne" :
  - Gain pour A avec "Élevée" : 1
  - Gain pour A avec "Moyenne" : 4
  - Gain pour A avec "Faible" : 5
  - Il est préférable pour A de choisir "Faible".
- Si le fournisseur B choisit "Faible" :
  - Gain pour A avec "Élevée" : 0
  - Gain pour A avec "Moyenne" : 2
  - Gain pour A avec "Faible" : 3
  - Il est préférable pour A de choisir "Faible".

Ainsi, le fournisseur A a une stratégie dominante : "Faible".

Pour le fournisseur B :

- Si le fournisseur A choisit "Élevée" :
  - Gain pour B avec "Élevée" : 2
  - Gain pour B avec "Moyenne" : 3
  - Gain pour B avec "Faible" : 4
  - Il est préférable pour B de choisir "Faible".
- Si le fournisseur A choisit "Moyenne" :
  - Gain pour B avec "Élevée" : 1
  - Gain pour B avec "Moyenne" : 4
  - Gain pour B avec "Faible" : 2
  - Il est préférable pour B de choisir "Moyenne".
- Si le fournisseur A choisit "Faible" :
  - Gain pour B avec "Élevée" : 0
  - Gain pour B avec "Moyenne" : 2
  - Gain pour B avec "Faible" : 3
  - Il est préférable pour B de choisir "Faible".

Ainsi, le fournisseur B a une stratégie dominante : "Faible".

Détermination des équilibres de Nash

- **Considérons la combinaison (Élevée, Élevée) :**
  - Fournisseur A : Si A passe à "Faible", son gain passe de 2 à 4, donc A change.
  - Fournisseur B : Si B passe à "Faible", son gain passe de 2 à 4, donc B change.
  - (Élevée, Élevée) n'est pas un équilibre de Nash.
- **Considérons la combinaison (Élevée, Moyenne) :**
  - Fournisseur A : Si A passe à "Faible", son gain passe de 1 à 5, donc A change.
  - Fournisseur B : Si B passe à "Faible", son gain passe de 3 à 2, donc B change.
  - (Élevée, Moyenne) n'est pas un équilibre de Nash.
- **Considérons la combinaison (Moyenne, Moyenne) :**
  - Fournisseur A : Si A passe à "Faible", son gain passe de 4 à 5, donc A change.

– Fournisseur B : Si B passe à "Faible", son gain passe de 4 à 2, donc B change.

– (Moyenne, Moyenne) n'est pas un équilibre de Nash.

- **Considérons la combinaison (Faible, Faible) :**

  – Fournisseur A : Si A passe à "Élevée", son gain passe de 3 à 0, donc A ne change pas.

  – Fournisseur B : Si B passe à "Élevée", son gain passe de 3 à 0, donc B ne change pas.

  – (Faible, Faible) est un équilibre de Nash.

Conclusion

Le seul équilibre de Nash en stratégies pures dans ce jeu est lorsque les deux fournisseurs choisissent de fournir une quantité d'énergie faible. Dans cette situation, ni le fournisseur A ni le fournisseur B n'ont intérêt à changer unilatéralement leur stratégie, car tout changement réduirait leur gain respectif.

Code Python

Utilisez la bibliothèque Python: 'nashpy' et 'numpy' pour trouver la solution à ce problème. Voir sur le notebook.

Exercice 4 : Equilibre de Nash en stratégie mixte

Reprendre l'exercice précédent avec cette table des payoffs et trouvez l'équilibre de Nash d'abord avec le programme Python que vous avez réalisé, puis à la main:

	Élevée	Moyenne	Faible
Élevée	$(2, 2)$	$(1, 3)$	$(0, 4)$
Moyenne	$(3, 1)$	$(4, 4)$	$(2, 3)$
Faible	$(4, 0)$	$(3, 2)$	$(3, 3)$

Solution de l'Exercice 4 : Équilibre de Nash

Considérons deux fournisseurs d'énergie, A et B, ayant chacun trois stratégies possibles : fournir une quantité d'énergie Élevée, Moyenne ou Faible. La matrice des gains est la suivante :

	Élevée	Moyenne	Faible
Élevée	$(2, 2)$	$(1, 3)$	$(0, 4)$
Moyenne	$(3, 1)$	$(4, 4)$	$(2, 3)$
Faible	$(4, 0)$	$(3, 2)$	$(3, 3)$

Matrices de gains pour les deux joueurs :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Équilibres de Nash en stratégies pures

Les équilibres de Nash en stratégies pures sont les points où aucune des parties ne peut améliorer son gain en changeant unilatéralement sa stratégie. Examinons les combinaisons :

- (Élevée, Élevée) : (2, 2)
- (Élevée, Moyenne) : (1, 3)
- (Élevée, Faible) : (0, 4)
- (Moyenne, Élevée) : (3, 1)
- (Moyenne, Moyenne) : (4, 4)
- (Moyenne, Faible) : (2, 3)
- (Faible, Élevée) : (4, 0)
- (Faible, Moyenne) : (3, 2)
- (Faible, Faible) : (3, 3)

Nous constatons que **(Moyenne, Moyenne)** et **(Faible, Faible)** sont des équilibres de Nash en stratégies pures.

Équilibres de Nash en stratégies mixtes

Pour trouver les équilibres de Nash en stratégies mixtes, nous devons déterminer les probabilités avec lesquelles chaque joueur choisit chacune de ses stratégies de manière à ce qu'aucun joueur ne puisse améliorer son gain attendu en modifiant sa stratégie mixte.

- Soit p_E, p_M, p_F les probabilités avec lesquelles le joueur A choisit respectivement les stratégies Élevée, Moyenne, et Faible.
- De même, soit q_E, q_M, q_F les probabilités avec lesquelles le joueur B choisit respectivement les stratégies Élevée, Moyenne, et Faible.

Les conditions de l'équilibre de Nash en stratégies mixtes nécessitent que chaque joueur soit indifférent entre ses différentes stratégies lorsqu'il utilise ses probabilités d'équilibre.

Calcul des gains attendus pour le joueur A :

$$\begin{aligned}
\text{Gain attendu pour A en jouant Élevée} &= 2q_E + 1q_M + 0q_F \\
\text{Gain attendu pour A en jouant Moyenne} &= 3q_E + 4q_M + 2q_F \\
\text{Gain attendu pour A en jouant Faible} &= 4q_E + 3q_M + 3q_F
\end{aligned}$$

Pour que le joueur A soit indifférent entre ses stratégies :

$$2q_E + 1q_M + 0q_F = 3q_E + 4q_M + 2q_F$$
$$2q_E + 1q_M + 0q_F = 4q_E + 3q_M + 3q_F$$

Résolution :

1. $2q_E + q_M = 3q_E + 4q_M + 2q_F$

$$q_E - 3q_M - 2q_F = 0$$

2. $2q_E + q_M = 4q_E + 3q_M + 3q_F$

$$2q_E - 2q_M - 3q_F = 0$$

Calcul des gains attendus pour le joueur B :

$$\begin{aligned}
\text{Gain attendu pour B en jouant Élevée} &= 2p_E + 3p_M + 4p_F \\
\text{Gain attendu pour B en jouant Moyenne} &= 1p_E + 4p_M + 3p_F \\
\text{Gain attendu pour B en jouant Faible} &= 0p_E + 2p_M + 3p_F
\end{aligned}$$

Pour que le joueur B soit indifférent entre ses stratégies :

$$2p_E + 3p_M + 4p_F = 1p_E + 4p_M + 3p_F$$
$$2p_E + 3p_M + 4p_F = 0p_E + 2p_M + 3p_F$$

Résolution :

1. $2p_E + 3p_M + 4p_F = p_E + 4p_M + 3p_F$

$$p_E - p_M - p_F = 0$$

2. $2p_E + 3p_M + 4p_F = 2p_M + 3p_F$

$$2p_E + p_M - 3p_F = 0$$

Conclusion

Résoudre ces équations linéaires nous donnera les probabilités p_E, p_M, p_F et q_E, q_M, q_F correspondant à l'équilibre de Nash en stratégies mixtes.

En résumé, les équilibres de Nash en stratégies pures sont (Moyenne, Moyenne) et (Faible, Faible). Les calculs détaillés ci-dessus fournissent une base pour déterminer les équilibres de Nash en stratégies mixtes, en résolvant les systèmes d'équations linéaires associés.