

# Саморепродукция и эффект Талбота

# 1. Теоретическая часть

## 1.1 Саморепродукция

Если рассмотреть дифракцию на предмете, имеющем некую периодическую структуру, то можно будет пронаблюдать эффект саморепродукции: на некотором расстоянии от предмета вдоль распространения волны появится изображение той же периодической структуры. Физическая природа этого эффекта заключается в том, что при прохождении волны через периодическую структуры комплексная амплитуда волны, идущая после предмета будет тоже периодичной. В таком случае будет существовать плоскость, в которой волны, пришедшие от предмета, будут иметь задержку, кратную  $2\pi$ . И тогда в этой плоскости возникнет репродуцированное изображение.

Пусть на нашу периодическую структуру падает монохроматическая волна:

$$E(r,t) = a_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} - \psi_0)} \quad (1)$$

Согласно определению плоской волны, колебания происходят синфазно во всех точках плоскости:

$$\mathbf{k}\mathbf{r} = xu - yv - z\sqrt{k^2 - u^2 - v^2} = \text{const} \quad (2)$$

где  $u$  и  $v$  – пространственные частоты, определяемые направлением вектора  $\mathbf{k}$ . Тогда комплексная амплитуда такой волны записывается в виде:

$$f(x,y,z) = a_0 e^{i\psi_0} e^{i(xu+yv)} e^{iz\sqrt{k^2-u^2-v^2}} = f(x,y,0) e^{iz\sqrt{k^2-u^2-v^2}} \quad (3)$$

Тогда поле в плоскости  $z = 0$  однозначно определяет поле плоскости  $z = \text{const}$ .

Пусть  $t(x,y)$  – функция пропускания транспаранта. И пусть она является периодической с периодом  $d$ . А тогда и волновой фронт, в плоскости  $z = 0$  имеет тот же период. Значит такую функцию можно разложить в ряд Фурье с кратными пространственными частотами  $u_n = 2\pi n/d$  и  $v_m = 2\pi m/d$ :

$$f(x,y,0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{iu_n x} e^{iv_m y} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{i\frac{2\pi}{d}nx} e^{i\frac{2\pi}{d}my} \quad (4)$$

Тогда значение комплексной амплитуды в произвольной плоскости  $z = \text{const}$  имеет вид:

$$f(x,y,z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{i\frac{2\pi}{d}nx} e^{i\frac{2\pi}{d}my} e^{iz\sqrt{k^2-u_n^2-v_m^2}} \quad (5)$$

Получается каждая плоская волна в суперпозиции (4) при распространении от транспаранта до плоскости  $z = \text{const}$  приобрела набег фаз:

$$\varphi_{nm} = \sqrt{k^2 - u_n^2 - v_m^2} \cdot z$$

Который с учетом френелевского приближения можно представить в виде:

$$\varphi_{nm} \approx kz - \frac{u_n^2 + v_m^2}{2k} z \quad (6)$$

Тогда набег фаз между двумя любыми плоскими волнами (с индексами  $n, m$  и  $p, q$ ) равен:

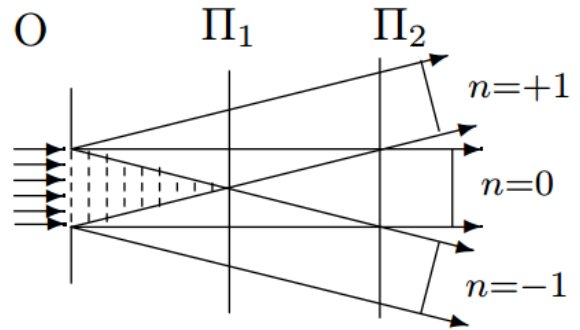
$$\Delta\varphi_{nm} = (u_n^2 + v_m^2 - u_p^2 - v_q^2) \frac{z}{2k} = (n^2 + m^2 - p^2 - q^2) \frac{\pi\lambda}{d^2} z \quad (7)$$

Тогда если в какой-то плоскости эта разница фаз равна  $2\pi$ , то в результате интерференции волн воспроизведется картина, которая находится в плоскости  $z = 0$  т.е. повторит эту периодическую структуру. И такие плоскости соответствуют:

$$z_N = \frac{2d^2}{\lambda} N \quad (8)$$

## 1.2 Число «копий»

В предшествующих выводах мы никак не учитывали, что периодическая структура имеет конечные размеры. Для конкретики, рассмотрим дифракционную решетку. За счет дифракционного уширения, картина после щели будет выглядеть, если мы нарисуем три продифрагированных луча порядков  $n = \{-1, 0, 1\}$  (рис. 1)



Оценим максимальное число «копий» решетки длиной  $D$ . Три волны перестают перекрываться на расстоянии  $L$  между плоскостями  $O$  и  $\Pi_1$ :

Рис. 1: Зависимость освещенности в максимуме от высоты входной щели

$$L = \frac{D}{2} \operatorname{ctg} \theta, \quad (9)$$

где  $\theta$  – угол дифракции, который определяется из условия  $d \sin \theta = \lambda$ . Тогда за счет параксиальности лучей получим:

$$L \approx \frac{D}{2\theta} \approx \frac{Dd}{2\lambda} \quad (10)$$

И тогда на этом расстоянии число плоскостей саморепродукции составляет

$$N \approx \frac{L}{z_1} \approx \frac{D}{4d} \quad (11)$$

### 1.3 Ковер Талбота

Рассмотрим в качестве периодической структуры дифракционную решетку с периодом  $d$ . А на экран падает плоская волна вдоль оси  $z$ :

$$E(x, z) = a_0 e^{ikz} e^{-i\omega t} \quad (12)$$

Тогда с учетом (12) выражение (5) представляется в виде:

$$f(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{iu_n x} e^{iz\sqrt{k^2 - u_n^2}} = e^{ikz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(u_n x - \frac{u_n^2}{2k} z)} = e^{ikz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi}{d} n(x - \frac{\pi n}{kd} z)} \quad (13)$$

Эффект саморепродукции конечно проявляется и в этом случае. Но больший интерес представляет картина интенсивности на одном периоде (см. рис. 2)

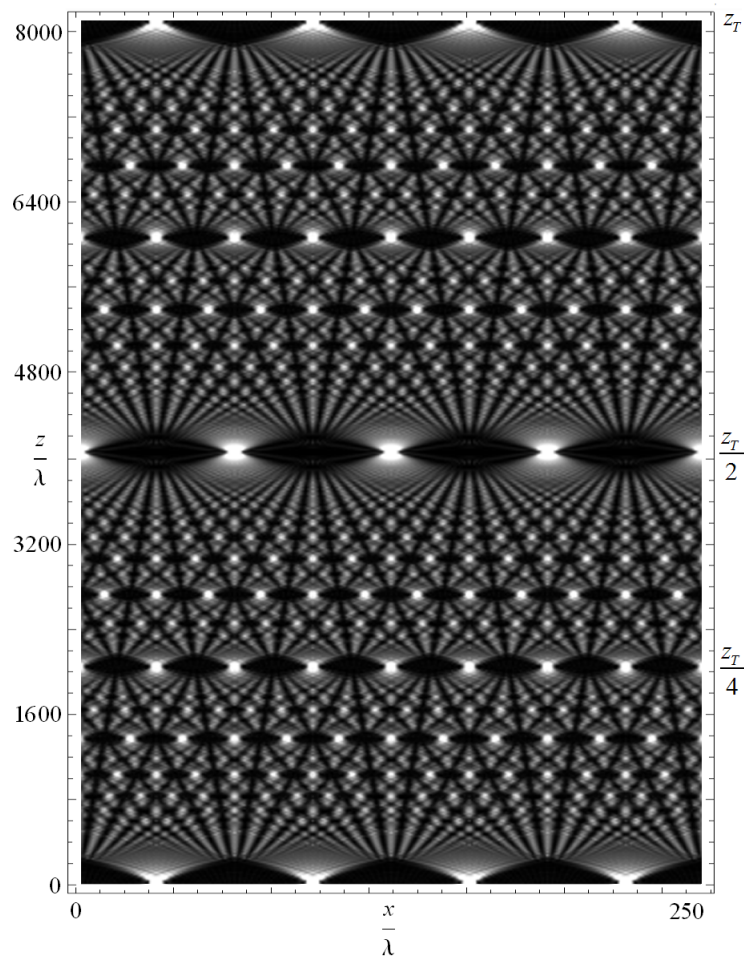


Рис. 2: Ковер Талбота

## 2. Экспериментальная часть

### 2.1 Экспериментальная установка

В качестве хорошего приближения плоской волны будет служить лазер. На рис. 3 можно увидеть принципиальную схему установки.

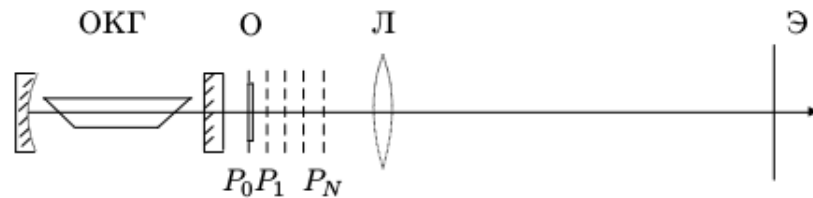


Рис. 3: Схема установки: ОКГ – гелий-неоновый лазер, О – двумерная решетка,  $P_N$  – плоскости саморепродукции, Л – короткофокусная линза, Э – экран

С помощью линзы мы можем сфокусировать изображение находящиеся в любой из плоскостей  $P_N$  или между ними. В нашем случае вместо экрана будет выступать диафрагма фотоаппарата. И перемещая линзу с помощью микрометрического винта сделаем ряд снимков. После чего обработаем их на компьютере, для получения похожей картинки с рис. 2.

## 3. Обработка результатов