L2 Économie

Année 2019-2020

Module 2 - Outils Quantitatifs

Mathématiques pour l'Économiste 4

Polycopié de cours

Julie Scholler

université de TOURS
Faculté de droit, économie
& sciences sociales

Table des matières

Chapitre 0

Suites numériques

1. Généralités sur les suites réelles

1.1. Définition des suites réelles

Définition. Suite réelle, terme général d'une suite

Une **suite réelle** $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une fonction dont l'ensemble de départ est $\mathbb{N}$ (ou $[\![n_0, +\infty[\![$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$)

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad n \longmapsto u_n.$$

u_n est appelé le **terme général** de la suite. Son **indice** ou **rang** est n.

On peut aussi définir des suites indexées sur l'ensemble $[\![n_0, +\infty[\![$ des entiers supérieurs ou égaux à un entier n_0.,Une telle suite est notée $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. En pratique, on commence souvent à 0 ou à 1.
Pour ne pas alourdir les énoncés, nous considérons dans ce cours des suites définies sur $\mathbb{N}$, si rien de particulier n'est précisé. La généralisation aux autres suites est triviale.

Remarque.
Il ne faut jamais oublier les parenthèses qui permettent de faire la différence entre une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et son terme général u_n qui est un réel.

Remarque.
Une suite peut être définie de différentes façons :

- de façon **explicite** : pour tout entier positif n, on a $u_n = f(n)$;
- de façon **récurrente** : pour tout entier positif n, on a $u_{n+1} = f(u_n)$ ou $u_{n+k} = f(u_{n+k-1}, u_{n+k-2}, \dots, u_n)$.

Exemples de suites définies explicitement :

- la suite de terme général : $u_n = 3n^2 + 5$;
- la suite de terme général : $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

Exemple de suites définies par récurrence :

- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$;
- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

1.2. Variations d'une suite

Définition. Variations d'une suite réelle

On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

- **croissante** (resp. **strictement croissante**) si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$ (resp. $u_{n+1} > u_n$) ;
- **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$) ;
- **monotone** si elle est soit croissante soit décroissante ;
- **strictement monotone** si elle est soit strictement croissante soit strictement décroissante.

On définit de manière évidente la notion de suite croissante ou décroissante à partir d'un certain rang. Une suite constante à partir d'un certain rang est dite **stationnaire**.

Méthode. Étudier les variations d'une suite

Pour montrer qu'une suite est croissante (respectivement décroissante), on peut utiliser l'une des méthodes suivantes.

- On montre que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ (resp. $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$).
- Si la suite est à termes strictement positifs, on montre que pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ (resp. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$).

Pour que le sens de variation soit stricte, il faut que l'inégalité soit stricte.

Exemple.
Étudions le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $\dfrac{n^n}{n!}$.
On donne deux méthodes.

- Soit n dans $\mathbb{N}^\star$. On prend $n > 0$ pour de pas se retrouver par une division par 0.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}n!}{n^n(n+1)!} = \frac{(n+1)(n+1)^n n!}{n^n(n+1)!} = (n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n > 1$$

car $\dfrac{n+1}{n} > 1$, ce qui prouve que la suite est strictement croissante à partir de l'indice 1.
De plus, $u_0 = 1 = u_1$ donc la suite est croissante.

- Soit n dans $\mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)^n(n+1)}{n!(n+1)} - \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)^n}{n!} - \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)^n - n^n}{n!} \geqslant 0,$$

et $u_{n+1} - u_n > 0$ si $n > 0$. ce qui prouve que la suite est croissante et strictement croissante à partir de l'indice 1.

Définition. Suites majorées, minorées, bornées

- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** si
$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant M.$$
- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** si
$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geqslant m.$$
- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** si elle est minorée et majorée :
$$\exists m \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad m \leqslant u_n \leqslant M.$$
ou de manière équivalente
$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n| \leqslant M.$$

Exemple.
Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ est bornée.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n+1 \geqslant 1$ donc $\dfrac{1}{n+1} \leqslant 1$ puisque la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$.
Par ailleurs, on a $|(-1)^n| = 1$ donc finalement, $|u_n| \leqslant 1$.
Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

2. Nature d'une suite

2.1. Suite convergente

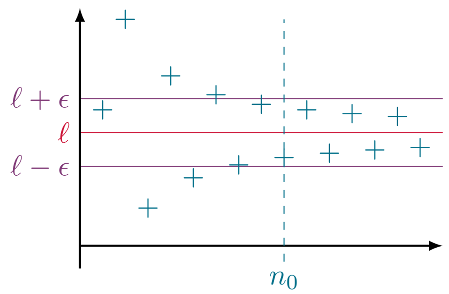
Définition informelle :
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite convergente s'il existe un nombre $\ell \in \mathbb{R}$ tel que, si on attend suffisamment (c'est-à-dire pour n assez grand), u_n va se rapprocher d'aussi près que l'on veut de ℓ.

Définition. Suite convergente

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers un réel ℓ, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, si et seulement si
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \qquad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$
ce qui revient à dire
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \qquad u_n \in\,]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[.$$

Ainsi, une suite converge vers ℓ si, quelque soit ε (aussi petit que l'on veut), on peut trouver un rang n_0 (dépendant de ε) à partir duquel tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$.

Si la suite converge, alors à partir du rang n_0, tous les termes sont dans la bande de largeur 2ε.
Si on diminue ε, alors le rang à partir duquel les termes sont dans la bande sera supérieur ou égal à n_0.



Proposition. Caractère borné des suites convergentes

Toute suite convergente est bornée.

Remarque.
La réciproque est fausse : il existe des suites bornées qui ne convergent pas.

Exemple.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n := (-1)^n$$

est bornée par -1 et 1 mais ne converge pas.

Proposition. Unicité de la limite

Quand une suite est convergente, sa limite est unique.

2.2. Suite divergente

Définition. Suite divergente

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- a pour **limite** $+\infty$, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, si et seulement si

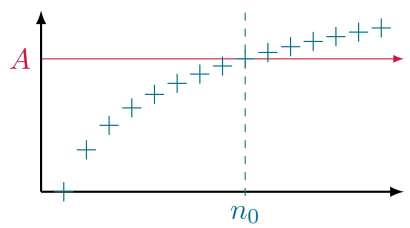
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \qquad u_n > A.$$

- a pour **limite** $-\infty$, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \qquad u_n < A.$$

- est **divergente** si et seulement si elle admet pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ ou n'admet pas de limite.

Ainsi, une suite diverge vers $+\infty$ si, quelque soit le réel A, il existe un rang n_0 (dépendant de A) à partir duquel les termes de la suite sont supérieurs à A.
Si on augmente A, alors le rang à partir duquel les termes seront supérieurs à A sera supérieur ou égal à n_0.



Remarque.
Il ne faut pas confondre la notion de suite divergente et de suite n'admettant pas de limite.
Il existe des suites divergentes qui admettent une limite, auquel cas la limite est infinie.

Proposition.

- Toute suite qui tend vers $+\infty$ est minorée.
- Toute suite qui tend vers $-\infty$ est majorée.

2.3. Généralités

Définition. Nature d'une suite

On appelle **nature** d'une suite son caractère convergent ou divergent.

3. Propriétés de limites

3.1. Opérations sur les limites

Proposition. Limite de la somme de deux suites

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Soient ℓ et ℓ' deux réels.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ', alors $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell+\ell'$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, alors la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

En particulier, on a les résultats suivants.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers un réel ou $+\infty$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers un réel ou $-\infty$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, alors la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

Remarque.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, alors on ne peut rien dire *a priori*.
C'est une **forme indéterminée** : il n'existe pas de théorème général mais la limite peut exister.

Exemple.

- Si pour tout entier naturel n, $u_n = n$ et $v_n = -n+\ell$, où ℓ désigne un réel, alors $u_n+v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
- Si pour tout entier naturel n, $u_n = n^2$ et $v_n = -n$, alors $u_n+v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Si pour tout entier naturel n, $u_n = n$ et $v_n = -n^2$, alors $u_n+v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
- Si pour tout entier naturel n, $u_n = n$ et $v_n = -n+(-1)^n$, alors la suite de terme général $u_n+v_n = (-1)^n$ n'admet pas de limite.

Proposition. Limite du produit d'une suite par un scalaire

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit λ un réel non nul.

- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ, alors la suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda\ell$.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors la suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda > 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, alors la suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\begin{cases} -\infty & \text{si } \lambda > 0 \\ +\infty & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite, alors la suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

Remarque.
Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $\lambda = 0$, alors la suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle donc admet pour limite 0.

Proposition. Somme d'une suite convergente et d'une suite divergente

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite divergente. Alors la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Remarque.
On ne peut rien dire *a priori* sur la somme de deux suites divergentes.

Proposition. Limite d'un produit de deux suites

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Soient ℓ et ℓ' deux réels.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ', alors $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\ell'$.
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et si, à partir d'un certain rang,
   - $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par une constante strictement positive, alors $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
   - $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par une constante strictement négative, alors $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.
4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ et si, à partir d'un certain rang,
   - $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par une constante strictement positive, alors $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.
   - $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par une constante strictement négative , alors $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Exemple.
Montrons que dans le cas de la forme indéterminée « $0 \times +\infty$ », tous les cas peuvent se présenter.

- Si pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{\ell}{n}$, où ℓ désigne un réel, et $v_n = n$, alors $u_nv_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
- Si pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ et $v_n = n$, alors $u_nv_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$.
- Si pour tout entier naturel n non nul, $u_n = -\dfrac{1}{n^2}$ et $v_n = n$, alors $u_nv_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^-$.
- Si pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = n^2$, alors $u_nv_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Si pour tout entier naturel n non nul, $u_n = -\dfrac{1}{n}$ et $v_n = n^2$, alors $u_nv_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
- Si pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = n$, alors $u_nv_n = (-1)^n$ n'admet pas de limite.

Proposition. Limite de l'inverse

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et soit ℓ un réel *non nul*.

1. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel non nul ℓ, alors la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ converge vers le réel $\dfrac{1}{\ell}$.
2. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, alors la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ converge vers 0.
3. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et si tous ses termes sont strictement positifs (respectivement négatifs) à partir d'un certain rang, alors la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

Exemple.
Dans le cas de la forme indéterminée « $\dfrac{1}{0}$ », les différentes possibilités sont $+\infty$, $-\infty$ ou pas de limite.

- Si pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{1}{n}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.

- Si pour tout entier naturel n non nul, $u_n = -\dfrac{1}{n}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$.

- Si pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, alors la suite de terme général $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{n+1}{(-1)^n}$ n'admet pas de limite.

Remarque.
On peut retenir

$$« \frac{1}{0^+} = +\infty », \qquad « \frac{1}{0^-} = -\infty » \qquad \text{et} \qquad « \frac{1}{\infty} = 0 »,$$

mais ces abréviations ne doivent *pas* être utilisées dans la rédaction d'une solution.

Proposition. Limite du quotient de deux suites

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
Soient ℓ un réel et ℓ' un réel non nul.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ', alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{\ell}{\ell'}$.
2. (a) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et si tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang, alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\begin{cases}+\infty & \text{si } \ell > 0\\ -\infty & \text{si } \ell < 0\end{cases}$.

   (b) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et si tous ses termes sont strictement négatifs à partir d'un certain rang, alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\begin{cases}-\infty & \text{si } \ell > 0\\ +\infty & \text{si } \ell < 0\end{cases}$.
3. (a) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\pm\infty$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ', alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\begin{cases}\pm\infty & \text{si } \ell' > 0\\ \mp\infty & \text{si } \ell' < 0\end{cases}$.

   (b) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\pm\infty$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\begin{cases}\text{minorée par une constante strictement positive}\\ \text{majorée par une constante strictement négative}\end{cases}$, alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\begin{cases}\pm\infty\\ \mp\infty\end{cases}$.

Remarque.
Les formes indéterminées sont « $\dfrac{\infty}{\infty}$ », « $\dfrac{0}{0}$ » et « $\dfrac{\infty}{0}$ » (pour le dernier, si le quotient n'est pas de signe constant à partir d'un certain rang, alors il n'y a pas de limite).
En revanche, « $\dfrac{\infty}{0^+}$ » et « $\dfrac{\infty}{0^-}$ » ne sont pas des formes indéterminées.

Exemple.
Dans le cas de la forme indéterminée « $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ », tous les cas non négatifs peuvent se présenter.

- Si pour tout entier naturel n, $u_n = \ell n$, où ℓ est dans $\mathbb{R}_+^\star$, et $v_n = n$, alors $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
- Si pour tout entier naturel n, $u_n = n$ et $v_n = n^2$, alors $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$.
- Si pour tout entier naturel n, $u_n = n^2$ et $v_n = n$, alors $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Si pour tout entier naturel n, $u_n = n\left(2+(-1)^n\right)$ et $v_n = n$, alors la suite de terme général $\dfrac{u_n}{v_n} = 2+(-1)^n$ n'a pas de limite.

3.2. Limites de suites et fonctions

Proposition. Limite d'une fonction d'une suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers ℓ (un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$).
Soit f une fonction telle que $f(x) \xrightarrow[x\to\ell]{} \lambda$ (un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$).
Alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers λ. En particulier, si f est une fonction continue au point ℓ, alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$.

Exemple.

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers ℓ (un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$).

  Alors la suite $(e^{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\begin{cases} +\infty & \text{si } \ell = +\infty \\ e^{\ell} & \text{si } \ell \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{si } \ell = -\infty \end{cases}$
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive qui tend vers ℓ (un réel positif ou $+\infty$).

  Alors la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\begin{cases} +\infty & \text{si } \ell = +\infty \\ \ln(\ell) & \text{si } \ell \in \mathbb{R}_+^\star \\ -\infty & \text{si } \ell = 0 \end{cases}$
-
  - Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive qui tend vers ℓ (un réel positif ou $+\infty$).

    Pour tout réel α dans $\mathbb{R}_+^\star$, la suite $(u_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\begin{cases} +\infty & \text{si } \ell = +\infty \\ \ell^\alpha & \text{si } \ell \in \mathbb{R}_+^\star \\ 0 & \text{si } \ell = 0 \end{cases}$
  - Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive qui tend vers ℓ (un réel positif ou $+\infty$).

    Pour tout réel α dans $\mathbb{R}_-^\star$, la suite $(u_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\begin{cases} 0 & \text{si } \ell = +\infty \\ \ell^\alpha & \text{si } \ell \in \mathbb{R}_+^\star \\ +\infty & \text{si } \ell = 0 \end{cases}$

3.3. Théorèmes d'encadrement

Théorème.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles.

- Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent la même limite réelle ℓ et si
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$
  alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et admet pour limite ℓ.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ et si
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant v_n,$$
  alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
- Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ et si
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant v_n,$$
  alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Exemple.

Pour tout entier n dans $\mathbb{N}^\star$, on a $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ donc $\dfrac{-1}{n} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.
Or les suites $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $\left(\dfrac{-1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ convergent vers 0.
Ainsi, d'après le théorème de convergence par encadrement, la suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge, et sa limite est 0.
Pour tout entier naturel n, $n-1 \leqslant n + (-1)^n$.
Or la suite $(n-1)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
D'après le théorème de divergence par minoration, on en déduit que la suite $(n+(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

3.4. Théorème de la limite monotone

Théorème. Théorème de la limite monotone

Toute suite réelle monotone admet une limite (finie ou infinie).

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante.
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par un réel M, alors elle converge vers un réel $\ell \leqslant M$.
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante.
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par un réel m, alors elle converge vers un réel $\ell \geqslant m$.
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée, alors elle diverge vers $-\infty$.

Remarque.
Ce théorème ne donne pas la limite de la suite mais est utilisé pour prouver l'existence de la limite.

3.5. Suites extraites des termes d'indices pairs et impairs

Définition. Suites extraites des termes d'indices pairs et impairs

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- On appelle **suite extraite des termes d'indices pairs** la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.
- On appelle **suite extraite des termes d'indices impairs** la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème. Théorème des suites extraites

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Soit ℓ un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite ℓ si et seulement si les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ admettent pour limite ℓ.

Remarque.
Pour montrer qu'une suite est divergente, il suffit de déterminer une sous-suite divergente ou deux sous-suites qui convergent vers des limites différentes.

Théorème. Théorème des suites extraites d'indices pairs et impairs

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Soit ℓ un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.
Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite ℓ si et seulement si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ admettent pour limite ℓ.

Remarque.
Pour tout entier naturel n, le terme qui suit u_{2n} dans la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est $u_{2(n+1)} = u_{2n+2}$.
Pour tout entier naturel n, le terme qui suit u_{2n+1} dans la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est $u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3}$.

Exemple.

- La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est bornée par -1 et 1, n'admet pas de limite.
  En effet, la suite des termes d'indices pairs est constante et prend la valeur 1 donc converge vers 1.

La suite des termes d'indices impairs est constante et prend la valeur -1 donc converge vers -1.
Comme les limites de deux suites extraites sont différentes, la suite diverge sans limite.

- La suite $(n(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui n'est pas bornée, n'admet pas de limite.
  En effet, la suite $(2n)_{n\in\mathbb{N}}$ des termes d'indices pairs tend vers $+\infty$.
  La suite $(-(2n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ des termes d'indices impairs tend vers $-\infty$.
  Comme les limites de deux suites extraites sont différentes, la suite diverge sans limite.

3.6. Croissances comparées

Théorème. Croissances comparées

Soient a et b deux réels tel que $a > 0$ et $b > 1$. Alors

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^a}{n!} = 0$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b^n}{n!} = 0$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^a}{b^n} = 0$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

Remarque.
Par ordre de prépondérance croissante on a ainsi :

- les suites puissances strictement positives ;
- les suites exponentielles de base $a > 1$;
- la suite factorielle ;
- la suite de terme général n^n.

4. Suites usuelles

4.1. Suites arithmétiques

Définition. Suite arithmétique

On appelle **suite arithmétique** de **raison** $r \in \mathbb{R}$ toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + r.$$

Une telle suite est entièrement déterminée par sa raison et par son premier terme (ou n'importe quel terme).

Exemple.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + 3$$

est l'unique suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 3.

Remarque.
Si $r = 0$, alors la suite est constante égale à son premier terme.

Méthode. Montrer qu'une suite est arithmétique

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique, on montre que pour tout entier naturel n, la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante, c'est-à-dire ne dépend pas de n.
Le réel ainsi trouvé est la raison de la suite arithmétique.

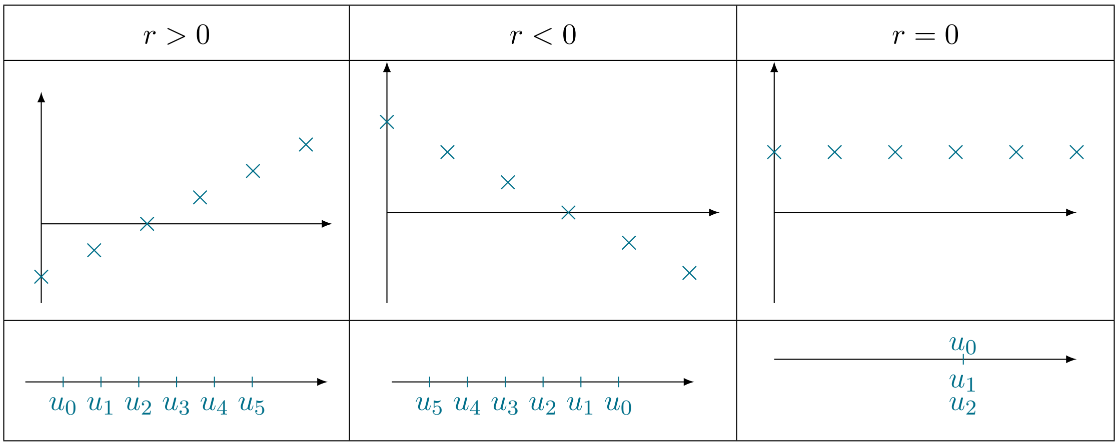
Proposition. Variations d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

- Si la raison r est strictement positive, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
- Si la raison r est strictement négative, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
- Si la raison est nulle, alors la suite est constante égale à son premier terme.

Démonstration.

$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r.$



Remarque.
Toute suite arithmétique de raison strictement positive est minorée et non majorée.
Toute suite arithmétique de raison strictement négative est majorée et non minorée.

Proposition. Terme général d'une suite arithmétique

Le terme général d'une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison r est

$$u_n = u_0 + nr.$$

Démonstration.
C'est trivial par récurrence sur l'entier n.

1. Initialisation : $u_0 = u_0 + 0 \times r$.
2. Hérédité : soit n un entier naturel tel que $u_n = u_0 + nr$. Alors

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n + r && \text{par définition de la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= u_0 + nr + r && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= u_0 + (n+1)r.
\end{aligned}$$

Plus généralement, on obtient facilement que pour tous entiers naturels $p \leqslant n$, $u_n = u_p + (n-p+1)r$.

Proposition. Somme de termes en progression arithmétique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$. Alors pour tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall p \in [\![n, +\infty[\![, \qquad \sum_{k=p}^{n} u_k = \underbrace{(n-p+1)}_{\text{nombre de termes}} \frac{\overbrace{u_p}^{\text{premier terme}} + \overbrace{u_n}^{\text{dernier terme}}}{2}.$$

Démonstration.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}(u_0+kr) = \sum_{k=0}^{n} u_0 + r\sum_{k=0}^{n} k = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}r = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}.$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n-p} u_{p+k} = \sum_{k=0}^{n-p} u_p + kr = \sum_{k=0}^{n-p} u_p + r\sum_{k=0}^{n-p} k = (n-p+1)u_p + r\frac{(n-p)(n-p+1)}{2}\\ &= (n-p+1)\frac{2u_p+(n-p)r}{2} = (n-p+1)\frac{u_p+u_p+(n-p)r}{2} = (n-p+1)\frac{u_p+u_n}{2}\end{aligned}$$

Théorème.

Toute suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, qui dépend du signe de sa raison r.

- Si r est strictement positif, alors la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et vaut $+\infty$.
- Si r est strictement négatif, alors la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et vaut $-\infty$.
- Si r est nul, alors la suite est constante égale à son premier terme.

4.2. Suites géométriques

Définition. Suite géométrique

On appelle **suite géométrique** de **raison** $q \in \mathbb{R}$ toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = q\,u_n.$$

Une telle suite est entièrement déterminée par sa raison et par son premier terme (ou n'importe quel terme).

Exemple.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n$$

est l'unique suite géométrique de premier terme 1 et de raison 3.

Remarque.

- Si $q = 1$, alors la suite est constante.
- Si $q = 0$, alors la suite est stationnaire : elle est nulle à partir du rang 1 (ou 0 si $u_0 = 0$).

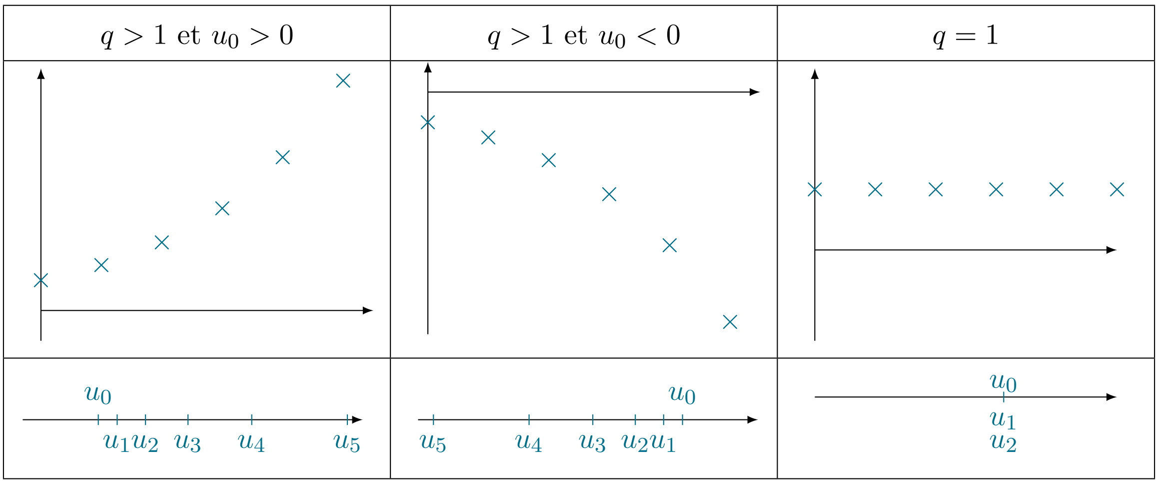
Méthode. Montrer qu'une suite est géométrique

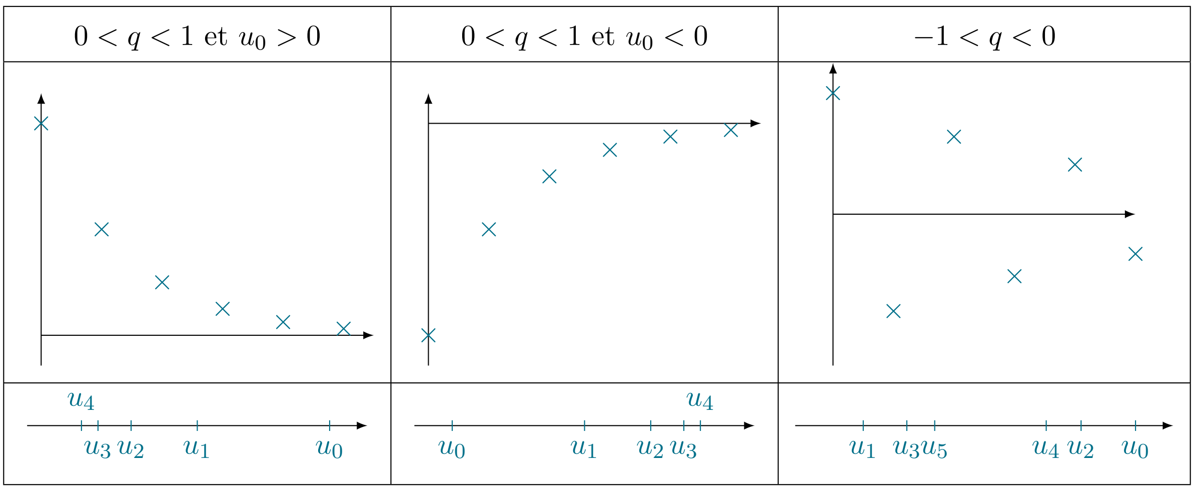
Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (dont tous les termes sont non nuls) est géométrique, on montre que pour tout entier naturel n, le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant, c'est-à-dire ne dépend pas de n. Le réel ainsi trouvé est la raison de la suite géométrique.

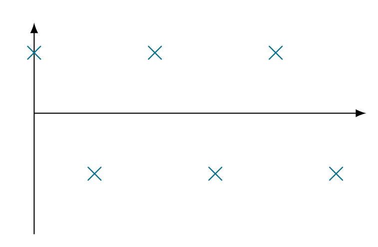
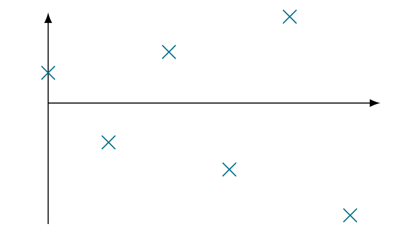
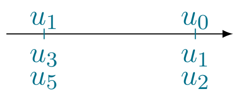
Proposition. Variations d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q.

1. Si $q > 1$,
   - si $u_0 > 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
   - si $u_0 < 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
2. Si $q = 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à son premier terme.
3. Si $0 < q < 1$,
   - si $u_0 > 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
   - si $u_0 < 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
4. Si $q = 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nulle et donc constante à partir du rang 1 (ou 0 si $u_0 = 0$).
5. Si $q < 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.





$q=-1$	$q<-1$
	
	

Remarque.
Une suite géométrique non nulle de raison $q \in \mathbb{R}$ est bornée si et seulement si $-1 \leqslant q \leqslant 1$.

Proposition. Terme général d'une suite géométrique

Le terme général d'une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison q est

$$u_n = q^n u_0.$$

Démonstration.
C'est trivial par récurrence sur l'entier n.

1. Initialisation : $u_0 = q^0 u_0$.
2. Hérédité : soit n un entier tel que $u_n = q^n u_0$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= q u_n && \text{par définition de la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= q\left(q^n u_0\right) && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= q^{n+1} u_0. \end{aligned}$$

Plus généralement, pour tous entiers naturels $p \leqslant n$, $u_n = q^{n-p} u_p$.

Théorème.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique non nulle de raison $q \in \mathbb{R}$.

- Si $|q| < 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, égale à 0.
- Si $q = 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à son premier terme.
- Si $q > 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, égale à $+\infty$ ou $-\infty$, selon le signe de u_0.
- Si $q \leqslant -1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

Remarque.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique non nulle de raison $q < -1$.
Alors la suite $\left(u_0 q^{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(u_0 \left(q^2\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q^2 > 1$ de premier terme u_0 donc tend vers $\begin{cases} +\infty & \text{si } u_0 > 0 \\ -\infty & \text{si } u_0 < 0 \end{cases}$
La suite $\left(u_0 q^{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(u_0 q \left(q^2\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q^2 > 1$ de premier terme $u_0 q$ de signe

opposé à u_0 donc tend vers $\begin{cases} +\infty & \text{si } u_0 < 0 \\ -\infty & \text{si } u_0 > 0 \end{cases}$
Comme les limites de deux suites extraites sont différentes, la suite diverge sans limite.

Rappelons la formule de la somme des puissances successives d'un réel.

Proposition. Somme des puissances entières successives d'un réel

Soit x un nombre réel (ou complexe). Pour tout entier naturel n, on a

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} & \text{si } x \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Démonstration.
Le cas où $x = 1$ est trivial. Si x est différent de 1, il suffit de développer

$$\begin{aligned}(1-x)(1+x+\cdots+x^n) &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \\ &\qquad - x - x^2 - \cdots - x^n - x^{n+1} \\ &= 1 - x^{n+1}.\end{aligned}$$

Plus généralement, par la même démonstration, pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leqslant n$, on a

$$x^p + \cdots + x^n = \sum_{k=p}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{x^p - x^{n+1}}{1 - x} & \text{si } x \neq 1 \\ n - p + 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Cette proposition permet de calculer la somme de termes en progression géométrique.

Proposition. Somme de termes en progression géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite en progression géométrique de raison $q \neq 1$. Pour tous entiers naturels $p \leqslant n$,

$$u_p + \cdots + u_n = \sum_{k=p}^{n} u_k = u_0 \frac{q^p - q^{n+1}}{1 - q} = \underbrace{u_p}_{\text{premier terme}} \frac{1 - q^{\overbrace{n-p+1}^{\text{nombre de termes}}}}{1 - q}.$$

4.3. Utilisation des résultats sur les suites arithmétiques et géométriques

Exemple.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{u_n + 2}$$

1. Montrons que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est défini et vérifie l'encadrement $-1 < u_n < 0$.
On montre par récurrence sur n dans $\mathbb{N}^\star$: H_n « u_n est bien défini et que $-1 < u_n < 0$ ».
   - Initialisation : $u_1 = -\dfrac{1}{6} \in]-1, 0[$.
   - Hérédité : soit n dans $\mathbb{N}^\star$ tel que u_n est bien défini et $-1 < u_n < 0$.
   Alors u_{n+1} existe et on a

$$-1 < u_n < 0 \Leftrightarrow 1 < u_n + 2 < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{u_n + 2} < 1 \Leftrightarrow -1 < u_{n+1} = -\frac{1}{u_n + 2} < -\frac{1}{2} < 0$$

- Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et tous ses termes sont compris strictement entre -1 et 0.

2. On introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{1}{u_n+1}.$$

Pour tout entier naturel n, $u_n + 1 \neq 0$ donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

3. Calculons les premiers termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On a $u_0 = 4$, $u_1 = \frac{1}{6}$, $u_2 = -\frac{6}{11}$, $u_3 = -\frac{11}{16}$. Donc $v_0 = \frac{1}{5}$, $v_1 = \frac{6}{5}$, $v_2 = \frac{11}{5}$ et $v_3 = \frac{16}{5}$.

4. On peut conjecturer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 1 et de premier terme $\frac{1}{5}$. Montrons-le.
Pour tout entier n on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1}+1} - \frac{1}{u_n+1} = \frac{1}{-\frac{1}{u_n+2}+1} - \frac{1}{u_n+1} = \frac{1}{\frac{u_n+2-1}{u_n+2}} - \frac{1}{u_n+1} \\ &= \frac{u_n+2}{u_n+1} - \frac{1}{u_n+1} = \frac{u_n+1}{u_n+1} = 1, \end{aligned}$$

ce qui prouve que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 1 et de premier terme $v_0 = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}$.
On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \frac{1}{5} + n$$

5. On déduit de l'expression de v_n une expression de u_n.
Or pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{1}{u_n+1} \quad \iff \quad u_n + 1 = \frac{1}{v_n} \quad \iff \quad u_n = \frac{1}{v_n} - 1.$$

Pa conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{1}{\frac{1}{5}+n} - 1$$

6. Finalement on constate que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -1.

Chapitre 1

Équations aux différences finies du premier ordre, Suites récurrentes d'ordre un

Définition. Suites récurrentes d'ordre p

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite récurrente** d'ordre $p \in \mathbb{N}^\star$ s'il existe une fonction f telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+p} = f\left(u_{n+p-1}, u_{n+p-2}, \ldots, u_n, n\right)$$

Définition. Suites récurrentes linéaires d'ordre p à coefficients constants avec second membre

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite récurrente linéaire** d'ordre $p \in \mathbb{N}^\star$ s'il existe des réels $a_1, \ldots, a_p, b$ et une fonction f tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+p} = a_1 u_{n+p-1} + a_2 u_{n+p-2} + \cdots + a_p u_n + f(n).$$

L'**ordre** d'une suite récurrente linéaire est la profondeur de la relation de récurrence : c'est le nombre de termes précédents dont on a besoin pour calculer un terme.

1. Suites récurrentes linéaires du premier ordre à coefficients constants et second membre constant

Définition.

On appelle suite récurrente linéaire du premier ordre à coefficients constants et second membre constant une suite vérifiant une relation de récurrence de la forme

$$y_{t+1} = a y_t + b, \ \forall t \in \mathbb{N}$$

ou

$$u_{n+1} = a u_n + b, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

avec a et b des constantes réelles.

Cas où $a = 0$.

L'équation devient $y_{t+1} = b$. Les solutions sont les suites constantes égales à b à partir du rang 1 et dont le terme de rang 0 est quelconque.

Cas où $b = 0$.

L'équation devient $u_{n+1} = au_n$. Les solutions sont les suites géométriques de raison a.

Cas où $a = 1$ et $b = 0$

L'équation devient $u_{n+1} = u_n$. Les solutions sont les suites constantes.

Cas où $a = 1$ et $b \neq 0$.

Les solutions sont les suites arithmétiques de raison b.

Définition.

On appelle ces suites : suites arithmético-géométriques.

Exemple.

1. Compte épargne : $u_0 = 100$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = (1+t)u_n + 10$ avec t le taux de rémunération du compte et 10 le montant du dépôt supplémentaire à chaque période ;
2. Évolution de capital : $K_{n+1} = (1-\delta)K_n + I$ avec $0 < \delta < 1$ le taux de dépréciation et I l'investissement (constant) à chaque période.

Proposition. Terme général d'une suite arithmético-géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n + r$, avec $q \neq 1$.
On pose ℓ l'unique solution de l'équation $\ell = q\ell + r$.
Alors la suite de terme général $u_n - \ell$ est une suite géométrique de raison q.
Puis, pour tout entier n positif ou nul, on a

$$u_n = q^n(u_0 - \ell) + \ell = q^{n-1}(u_1 - \ell) + \ell.$$

Démonstration.
Comme $q \neq 1$, l'équation $\ell = q\ell + r$ admet bien une unique solution et $\ell = \dfrac{r}{1-q}$.
On soustrait l'équation $\ell = q\ell + r$ à la relation $u_{n+1} = qu_n + r$ et on obtient

$$u_{n+1} - \ell = qu_n + r - q\ell - r = q\left(u_n - \ell\right).$$

Par conséquent la suite de terme général $u_n - \ell$ est une suite géométrique de raison q et vérifie, pour tout entier n dans $\mathbb{N}$, $u_n - \ell = q^n(u_0 - \ell)$. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = q^n(u_0 - \ell) + \ell$$

Méthode. Étudier une suite arithmético-géométrique

Pour déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique dont le terme général est défini par $u_{n+1} = qu_n + r$, avec $q \neq 1$, on effectue les étapes suivantes.

1. On cherche le réel ℓ tel que $\ell = q\ell + r$ (penser à la limite finie éventuelle de la suite).
2. On considère la suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n := u_n - \ell$ et on montre que c'est une suite géométrique de raison q.
3. On en déduit l'expression du terme général de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis celui de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 8$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+1} = -u_n + 9$.
L'unique réel ℓ tel que $2\ell = -\ell + 9$, c'est-à-dire tel que $3\ell = 9$ est $\ell = 3$.
La suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - 3$ est géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$ car

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = -\frac{1}{2}u_n + \frac{9}{2} - 3 = -\frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(u_n - 3) = -\frac{1}{2}v_n$$

Comme son premier terme est $v_0 = u_0 - 3 = 8 - 3 = 5$, on en déduit $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 5\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.
Finalement, comme pour tout entier naturel n, $u_n = v_n + 3$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 3.$$

Remarque.
On peut y voir un théorème de structure : toute suite arithmético-géométrique vérifiant la relation $u_{n+1} = qu_n + r$ est la somme d'une suite géométrique vérifiant la relation $u_{n+1} = qu_n$ (géométrique de raison q) et d'une suite particulière vérifiant la relation $u_{n+1} = qu_n + r$: la suite constante qui prend la valeur $\dfrac{r}{1-q}$.

Exemple sans valeur initiale

On cherche les solutions de l'équation

$$u_{n+1} = 0.5u_n + 10$$

1. Commençons par exprimer ℓ. $\ell = 0.5\ell + 10 \Leftrightarrow 0.5\ell = 10 \Leftrightarrow \ell = 20$.
2. On considère la suite auxiliaire de terme général $v_n = u_n - 20$.
   On remarque $v_{n+1} = 0.5u_n + 10 - 20 = 0.5v_{n+1}$. Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 0.5 et de premier terme $v_0 = u_0 - 20$.
3. Ainsi pour tout entier positif n, on a $v_n = 0.5^n \times (u_0 - 20)$. On en déduit que, pour tout entier positif n, on a $u_n = 0.5^n \times (u_0 - 20) + 20$.

Équilibre et limites

Définition.
Le **point d'équilibre** ou la valeur stationnaire d'une équation aux différences finies est la valeur de u_0 pour laquelle le système est stationnaire, c'est-à-dire $u_{n+1} = u_n$, pour tout entier positif n.

Soit la suite arithmético-géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n + r$.
Alors, si $q \neq 1$, le point d'équilibre est $\ell = \dfrac{r}{1-q}$.
Si $q = 1$, il n'y a pas de situation d'équilibre possible.

Remarque.
On pose f la fonction $x \mapsto qx + r$. Alors le point d'équilibre est un point fixe de la fonction f, c'est-à-dire $f(x) = x$.

Proposition.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n + r$, avec $q \neq 1$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $|q| < 1$.
Si elle converge, alors sa limite est $\ell = \dfrac{r}{1-q}$.

Bien que la convergence soit garantie dès que $|q| < 1$, le *chemin* que prend la suite vers sa limite diffère selon que q soit nul, strictement positif ou strictement négatif.

Les différents comportements des suites arithmético-géométriques

Cas particuliers

Cas $a = 1$:
divergence régulière

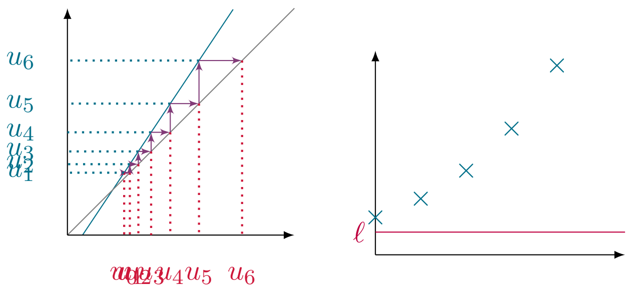
Cas $a = -1$:
divergence oscillatoire,
oscillations entretenues

Cas généraux

Si $|a| > 1$, alors (u_n) diverge.

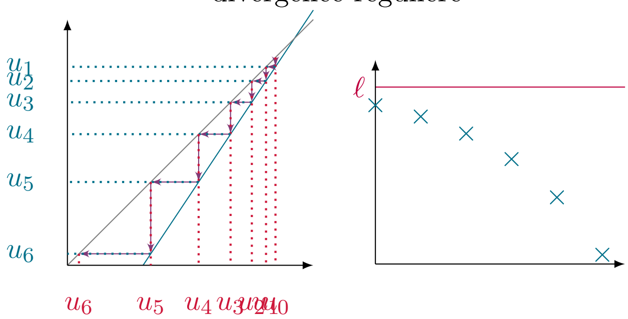
• $a > 1$ et $u_0 > \ell$:

divergence régulière



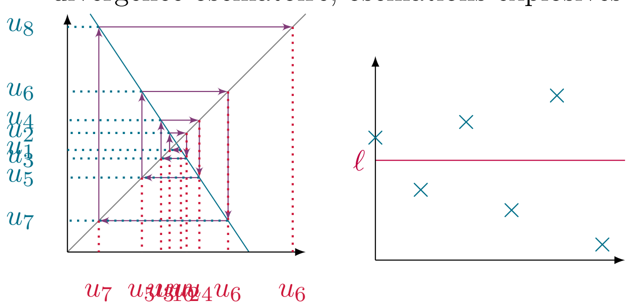
• $a > 1$ et $u_0 < \ell$:

divergence régulière



• $a < -1$:

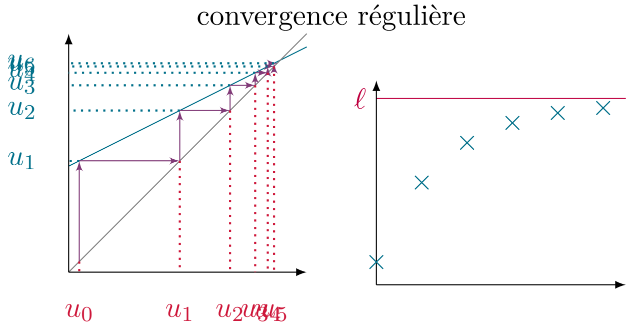
divergence oscillatoire, oscillations explosives



Si $|a| < 1$, alors (u_n) converge vers $l = \dfrac{b}{1-a}$.

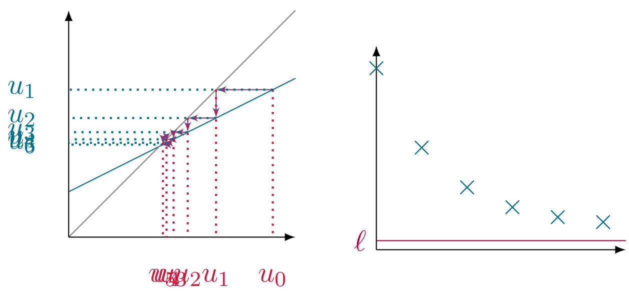
• $0 < a < 1$ et $u_0 < \ell$:

convergence régulière



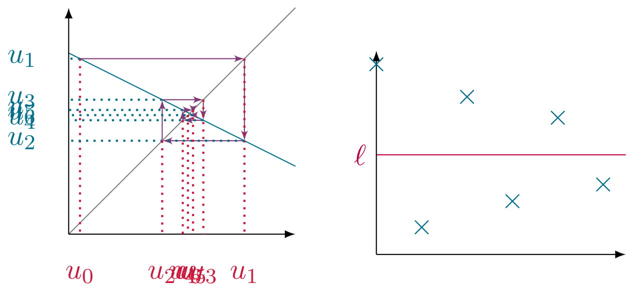
• $0 < a < 1$ et $u_0 > \ell$:

convergence régulière



• $-1 < a < 0$:

convergence oscillatoire, oscillations amorties



2. Équations aux différences finies du premier ordre non linéaires

Les équations aux différences finies non linéaires ne peuvent pas être résolues explicitement en général. Cependant il est possible d'obtenir des informations qualitatives, par exemple la nature de la suite, et sa monotonie.

2.1. Introduction

L'expression générale d'une équation aux différences finies non linéaire d'ordre un est

$$u_{n+1} = f(u_n, n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Cependant on ne considèrera que des équations homogènes, c'est-à-dire qui ne dépendent pas explicitement de n.

Définition.

On appelle équation aux différences finies non linéaire homogène d'ordre un toute équation de la forme

$$y_{t+1} = f(y_t), \ \forall t \in \mathbb{N}$$

ou

$$u_{n+1} = f(u_n), \ \forall n \in \mathbb{N},$$

avec $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$.

Remarque.
Nous ne considèrerons que des fonctions f continues sur I.

2.2. Existence de la suite

En général, il est impossible de justifier l'existence de tous les termes des suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

Définition.

Soit f une fonction telle que $f : D \to \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}$.

On dit qu'un intervalle $I \subset D$ est **stable** par f si et seulement si

$$f(I) \subset I.$$

Proposition.

Si l'intervalle I est stable par f et si le premier terme u_0 appartient à l'intervalle I, alors pour tout entier naturel n, le terme u_n existe et appartient à I.

Démonstration.
Posons, pour tout entier naturel n, l'hypothèse de récurrence

$$H_n : \text{« } u_n \text{ existe et } u_n \text{ appartient à } I \text{ »}$$

- Initialisation. H_0 est trivialement vraie.
- Hérédité. Soit n un entier naturel tel que H_n est vraie.
  Alors u_n existe et appartient à I.
  Donc $f(u_n)$ existe et, par stabilité de I par f, $f(u_n)$ appartient à I.
  Or $f(u_n) = u_{n+1}$ donc H_{n+1} est vraie.

- Conclusion. Pour tout entier naturel n, H_n est vraie.

Exemple.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
Si $\alpha > 0$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+$ par exemple sont des intervalles stables, mais également $[0;1]$ et $[1;+\infty[$.
Si $\alpha < 0$, l'intervalle $]0,+\infty[$ est stable, mais aussi $]-\infty;0[$ quand α est un entier impair.

2.3. Limites et points fixes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n),$$

où f est une fonction continue sur un intervalle I qui est stable par f et qui contient u_0, ce qui prouve que la suite est bien définie et que tous les termes appartiennent à l'intervalle I.
Que peut-on dire de son comportement asymptotique ? des valeurs possibles de sa potentielle limite ?

Définition.

Soit f une fonction telle que $f : D \to \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}$.

On dit qu'un réel x de D est un **point fixe** de la fonction f si et seulement si

$$f(x) = x.$$

Théorème.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in I \end{cases},$$

où la fonction f est continue sur un intervalle I, stable par f.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors elle converge vers un point fixe de la fonction f.

Démonstration.
On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ce même réel ℓ.
Comme la fonction f est continue au point ℓ, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel $f(\ell)$.
En passant à la limite en $+\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient

$$\ell = f(\ell).$$

Remarque.
- La fonction f peut posséder aucun, un ou plusieurs points fixes.
- Quel que soit le nombre de points fixes, la suite peut être divergente.

Exemple.
Revenons à l'exemple.

$$u_{n+1} = u_n^\alpha, \quad \alpha > 0, \ n \in \mathbb{N}.$$

Recherche d'un état d'équilibre : $\ell = \ell^{\alpha} \Leftrightarrow \ell(\ell^{\alpha-1} - 1) = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = 1$.
Si à un moment la suite prend la valeur 0 ou la valeur 1 alors elle prend cette valeur définitivement.
Mais si $u_0 \neq 0$ et $u_0 \neq 1$, est-ce que la suite converge vers une de ces valeurs et si oui laquelle ?

2.4. Étude du comportement de la suite quand f est monotone

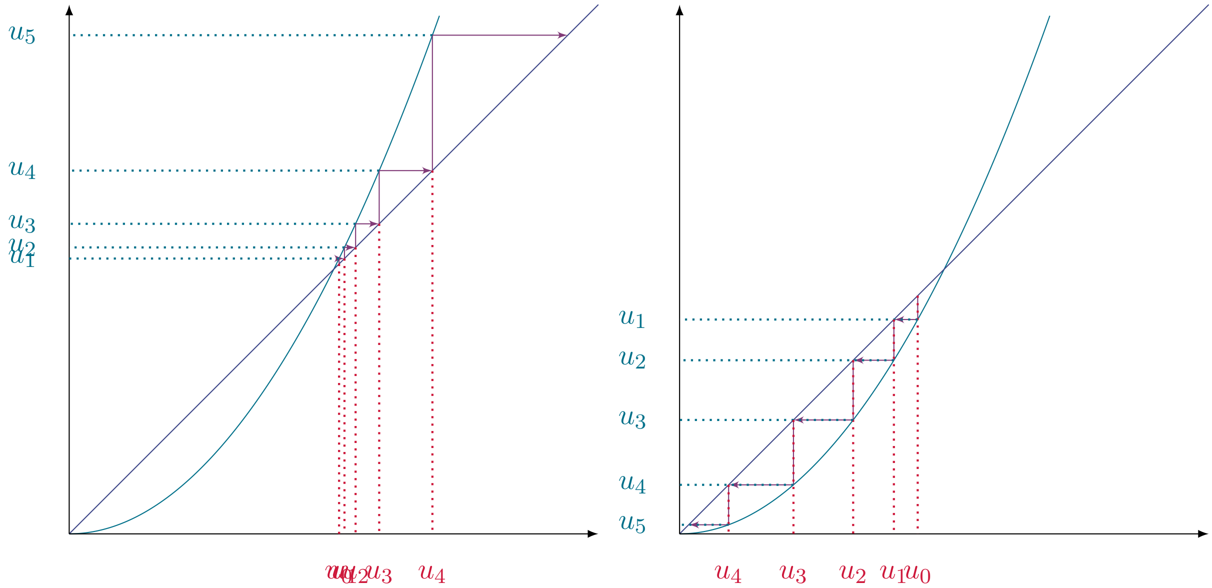
Considérons à nouveau les suites définies par

$$u_{n+1} = u_n^{\alpha},\ n \in \mathbb{N}.$$

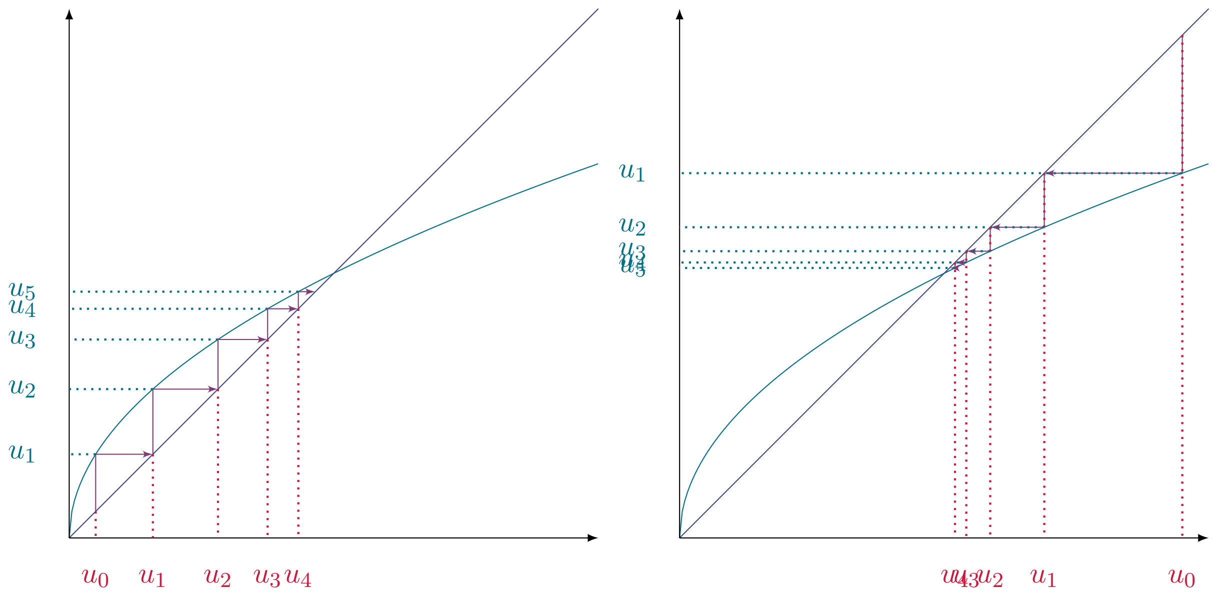
Cas où f est croissante

Pour notre exemple, cela correspond à $\alpha > 0$.
Observons quelques exemples.

Cas où $\alpha = 2$ ($\alpha > 1$).



Cas où $\alpha = \dfrac{1}{2}$ ($0 < \alpha < 1$).



Comment peut-on rigoureusement, sans se reposer uniquement sur une représentation graphique, affirmer des convergences ou divergences ?

Théorème. Théorème de la limite monotone

Toute suite réelle monotone admet une limite (finie ou infinie).

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante.
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par un réel M, alors elle converge vers un réel $\ell \leqslant M$.
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante.
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par un réel m, alors elle converge vers un réel $\ell \geqslant m$.
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée, alors elle diverge vers $-\infty$.

Remarque.
Soient f une fonction croissante sur l'intervalle I, stable par f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout entier naturel n. Alors

1. si $u_0 \leqslant u_1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
2. si $u_0 \geqslant u_1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Cela se démontrer aisément par récurrence.
Démonstration.

1. Posons, pour tout entier naturel n
$$H_n : u_n \leqslant u_{n+1}$$
   - Initialisation. H_0 est trivialement vraie car $u_0 \leqslant u_1$.
   - Hérédité. Soit n un entier naturel tel que H_n est vraie donc $u_n \leqslant u_{n+1}$.
     Or la fonction f est croissante sur I et u_n ainsi que u_{n+1} appartiennent à I donc
$$u_n \leqslant u_{n+1} \qquad \Longrightarrow \qquad f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \quad \Longleftrightarrow \quad u_{n+1} \leqslant u_{n+2},$$
     ce qui montre que H_{n+1} est vraie.
   - Conclusion. Par conséquent, pour tout entier naturel n, H_n est vraie et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Posons, pour tout entier naturel n
$$H_n : u_n \geqslant u_{n+1}$$
   - Initialisation. H_0 est trivialement vraie car $u_0 \geqslant u_1$.
   - Hérédité. Soit n un entier naturel tel que H_n est vraie donc $u_n \geqslant u_{n+1}$.
     Or la fonction f est croissante sur I et u_n ainsi que u_{n+1} appartiennent à I donc
$$u_n \geqslant u_{n+1} \qquad \Longrightarrow \qquad f(u_n) \geqslant f(u_{n+1}) \quad \Longleftrightarrow \quad u_{n+1} \geqslant u_{n+2},$$
     ce qui montre que H_{n+1} est vraie.
   - Conclusion. Par conséquent, pour tout entier naturel n, H_n est vraie et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Méthode.

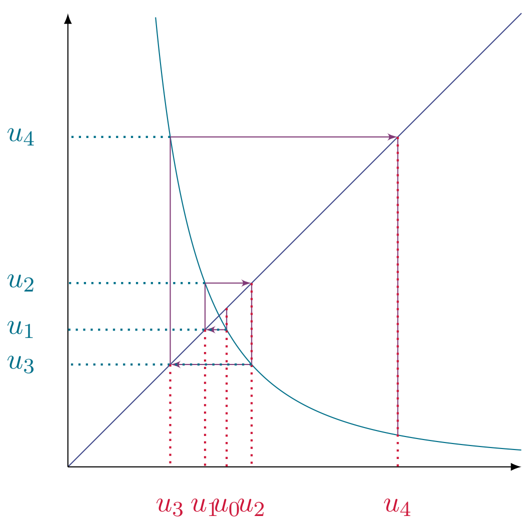
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par un réel M, alors elle converge vers un point fixe ℓ de f tel que $\ell \leqslant M$.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par un réel m, alors elle converge vers un point fixe ℓ de f tel que $\ell \geqslant m$.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et ne *semble* pas majorée, on peut raisonner par l'absurde en supposant que la suite converge vers un réel ℓ et on essaie de trouver une contradiction concernant ℓ. Dans ce cas, la suite ne converge pas et puisqu'elle est croissante, elle diverge vers $+\infty$.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et ne *semble* pas minorée, on peut raisonner par l'absurde en supposant que la suite converge vers un réel ℓ et on essaie de trouver une contradiction concernant ℓ. Dans ce cas, la suite ne converge pas et puisqu'elle est décroissante, elle diverge vers $-\infty$.

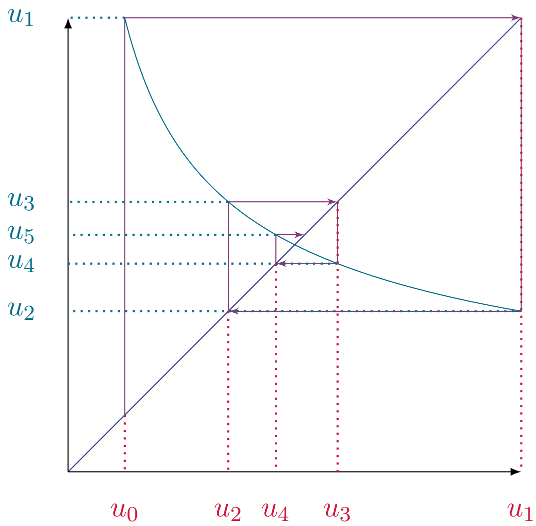
Cas où f est décroissante

On considère à nouveau les suites définies par

$$u_{n+1} = u_n^{\alpha},\ n \in \mathbb{N},$$

mais cette fois avec $\alpha < 0$.
Observons quelques exemples : $\alpha = -2$ et $\alpha = -\dfrac{1}{2}$.





Si f *est décroissante* sur l'intervalle I (stable par f), alors on étudie les suites des termes pairs et impairs :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = u_{2n} \quad \text{et} \quad b_n = u_{2n+1}.$$

On a alors

$$a_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = (f \circ f)(a_n)$$

Donc la suite a vérifie une relation de récurrence donnée par :

$$a_{n+1} = (f \circ f)(a_n)$$

La fonction $f \circ f$ est croissante sur I et I est un intervalle stable par $f \circ f$ car $f \circ f(I) \subset f(I) \subset I$.
On montre alors comme précédemment que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et admet donc une limite.
De même, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la relation :

$$b_{n+1} = (f \circ f)(b_n)$$

et on procède de la même façon que pour la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On montre alors comme précédemment que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et admet donc une limite.
Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de monotonie contraire.
On compare ensuite leurs limites.

2.5. Étude du comportement de la suite quand f n'est pas monotone

Précédemment on n'a considéré que des fonctions f monotones, jamais de fonctions en forme de vallée ou de colline. Nous verrons quelques exemples en cours à partir de suites dites logistiques. Ces suites permettent de modéliser l'évolution de populations. Voici la forme de la relation récurrence vérifiée par une suite logistique :

$$y_{t+1} = ry_t(1 - t_y)$$

2.6. Exemple d'étude complète

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{1}{20}(-x^3 + 30x)$. On s'intéresse à la suite définie par

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. On commence par rechercher les éventuels points fixes de la fonction f.
   $f(x) = x$ équivaut à $x^3 = 10x$ d'où 3 solutions, $\sqrt{10}$, 0 et $+\sqrt{10}$.
2. On a donc donc que si u_0 est l'un de ces points fixes alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En particulier, si $u_0 = 0$ alors $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Commençons par étudier le cas où $u_0 \in \left]0, \sqrt{10}\right]$.
   (a) En étudiant la dérivée de f, on constate que f est strictement croissante sur $]-\sqrt{10}; \sqrt{10}[$. De plus $f(0) = 0$ et $f(\sqrt{10}) = \sqrt{10}$. Ainsi, $\forall x \in \left]0, \sqrt{10}\right]$, on a $f(x) \in \left]0, \sqrt{10}\right]$.
   Donc l'intervalle $\left]0, \sqrt{10}\right]$ est stable par f.
   (b) L'intervalle $]0, \sqrt{10}]$ étant stable et $u_0 \in \left]0, \sqrt{10}\right]$, on a que $u_n \in]0, \sqrt{10}]$ pour tout n.
   (c) Pour tout entier n, on a
   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{20}\left(-u_n^3 + 30u_n - 20u_n\right) = \dfrac{1}{20}\left(-u_n^3 + 10u_n\right) = \dfrac{u_n}{20}(10 - u_n^2) \geqslant 0$
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.
   (d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre $\ell \in]0, \sqrt{10}]$. La fonction f étant continue, ℓ est nécessairement un point fixe de f.
   L'unique point fixe de f sur $]u_0, \sqrt{10}]$ est $\ell = \sqrt{10}$.
   En conclusion, si $u_0 \in]0, \sqrt{10}]$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{10}$.
4. Intéressons nous maintenant à la situation où $u_0 \in \left[-\sqrt{10}, 0\right[$.
   (a) Avec le même genre d'arguments que précédemment, on constate que l'intervalle $\left[-\sqrt{10}, 0\right[$ est stable par f.
   (b) L'intervalle $\left[-\sqrt{10}, 0\right[$ étant stable par f et u_n appartenant à $\left[-\sqrt{10}, 0\right[$, on a que $u_n \in \left[-\sqrt{10}, 0\right[$ pour tout n.
   (c) Pour tout entier n, on a cette fois $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. Ainsi la suite est décroissante et minorée. Donc elle converge vers $-\sqrt{10}$.
5. Observons ce qui se passe si $u_0 \in \left\{-\sqrt{50}, \sqrt{50}\right\}$.

   Si $u_0 = \sqrt{50}$ ou $u_0 = -\sqrt{50}$, on observe que $u_1 = -u_0$ et $u_2 = u_0$. Ainsi, la suite va osciller entre les deux valeurs $\sqrt{50}$ et $-\sqrt{50}$. Elle n'admettra donc pas de limite dans ce cas.
6. Maintenant voyons ce que l'on peut dire dans le cas où $u_0 \in \left]-\infty, -\sqrt{50}\right[\cup \left]\sqrt{50}, +\infty\right[$.
   (a) Tout d'abord, une étude de la fonction f montre que

   $$f\left(\left]-\infty, -\sqrt{50}\right[\right) = \left]+\sqrt{50}, +\infty\right[\quad \text{et} \quad f(\left(\left]+\sqrt{50}, +\infty\right[\right) = \left]-\infty, -\sqrt{50}\right[.$$

   Par conséquent l'ensemble $E = \left]-\infty, -\sqrt{50}\right[\cup \left]\sqrt{50}, +\infty\right[$ est stable par f.

(b) Si $u_0 \in E$, alors par stabilité de E, on a $u_n \in \left]-\infty, -\sqrt{50}\right[\cup \left]\sqrt{50}, +\infty\right[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble E ne contenant aucun point fixe de f, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut donc pas converger. En conclusion, si $u_0 \in E$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

(c) La situation où $u_0 \in]-\sqrt{50}, -\sqrt{10}[\cup]\sqrt{10}, \sqrt{50}[$ est plus difficile à étudier (et n'est pas attendue). On peut montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge toujours vers l'une des deux valeurs $\pm\sqrt{10}$. En revanche, le liens entre la valeur de u_0 et la valeur de la limite est très complexe. En fait, plus u_0 se rapproche des extrémités $\pm\sqrt{50}$, plus le comportement est sensible aux valeurs de u_0 (c'est un phénomène chaotique, on trouve une structure fractale).

Chapitre 2

Équations aux différences finies linéaires du second ordre, Suites récurrentes linéaires d'ordre deux

1. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants sans second membre

Définition. Suite récurrente linéaire d'ordre 2

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants sans second membre** s'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0.$$

Une telle suite est entièrement déterminée par les coefficients a et b et par ses deux premiers termes.

Exemple.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 12, \qquad u_1 = 31 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Cherchons s'il existe des suites géométriques non nulles à partir du rang 1 qui vérifient cette relation.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 0$ et de premier terme $u_0 \neq 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0.$$

Or

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = u_0 q^n.$$

Alors pour tout entier naturel n, on a

$$u_0 q^{n+2} + au_0 q^{n+1} + bu_0 q^n = 0.$$

En divisant par $u_0 q^n \neq 0$, on obtient

$$q^2 + aq + b = 0.$$

Ainsi, une suite géométrique non nulle à partir du rang 1 vérifie la relation $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$ si et seulement si sa raison q est une solution de l'équation $q^2 + aq + b = 0$.

Définition. Équation caractéristique

On appelle **équation caractéristique** d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont le terme général vérifie la relation $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$, l'équation du second degré $r^2 + ar + b = 0$, d'inconnue r.

Théorème. Terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

Soient a et b des réels et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0 \quad (R).$$

- Si l'équation caractéristique associée possède deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, alors il existe un unique couple de réels (α, β) tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n.$$

- Si l'équation caractéristique associée possède une unique solution (réelle) r_0, alors il existe un unique couple de réels (α, β) tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = (\alpha + n\beta) r_0^n.$$

- Si l'équation caractéristique associée possède deux récines complexes (non réelles) conjuguées distinctes $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \overline{r_1} = \rho e^{-i\theta}$ (avec ρ dans $\mathbb{R}_+^\star$ et θ dans $\mathbb{R}$) et il existe un unique couple de réels (α, β) tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \Big(\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta)\Big)\rho^n.$$

Remarque.
L'ensemble des solutions de (R) est un espace vectoriel, plus précisément un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'espace vectoriel des suites réelles $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.

Exemple.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses deux premiers termes $u_0 = 12$ et $u_1 = 31$, et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

L'équation caractéristique associée est $r^2 - 5r + 6 = 0$ et a pour discriminant $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 6 = 1$.
Ses racines sont $r_1 = \dfrac{5 - \sqrt{1}}{2} = 2$ et $r_2 = \dfrac{5 + \sqrt{1}}{2} = 3$.
Ainsi pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence, il existe deux réels α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \alpha \times 2^n + \beta \times 3^n.$$

Déterminons les réels α et β en considérant les termes $u_0 = 12$ et $u_1 = 31$. On a

$$12 = \alpha \times 2^0 + \beta \times 3^0 = \alpha + \beta \qquad \text{et} \qquad 31 = \alpha \times 2^1 + \beta \times 3^1 = 2\alpha + 3\beta.$$

En résolvant ce système, on obtient $\alpha = 5$ et $\beta = 7$. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 5 \times 2^n + 7 \times 3^n.$$

Exemple.
On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses deux premiers termes $v_0 = \sqrt{3}$ et $v_1 = 1$, et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+2} - 2\sqrt{3}v_{n+1} + 4v_n = 0.$$

- L'équation caractéristique associée est $x^2 - 2\sqrt{3}x + 4 = 0$ et a pour discriminant

$$\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times 4 = 12 - 16 = -4 = (2i)^2 < 0$$

L'équation admet ainsi deux racines complexes conjuguées

$$\frac{2\sqrt{3}+i\sqrt{4}}{2} = \sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) = 2e^{\frac{i\pi}{6}} \qquad \text{et} \qquad \overline{2e^{\frac{i\pi}{6}}} = 2e^{\frac{-i\pi}{6}}.$$

- Il existe deux réels α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 2^n\left(\alpha\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)+\beta\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right).$$

- On détermine les constantes α et β à l'aide des premiers termes.

$$\sqrt{3} = u_0 = 2^0\left(\alpha\cos\left(\frac{0\pi}{6}\right)+\beta\sin\left(\frac{0\pi}{6}\right)\right) = \alpha\cos(0)+\beta\sin(0) = \alpha.$$

$$1 = u_1 = 2^1\left(\alpha\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\beta\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}+\beta\sin\frac{1}{2}\right) = 3+\beta$$

On en déduit $\alpha = \sqrt{3}$ et $\beta = -2$.

- Conclusion.
Finalement, on a, pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n\left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)-2\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right)$.

Méthode. Déterminer le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

Pour déterminer le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, on effectue les étapes suivantes.

1. On écrit l'équation caractéristique.
2. On cherche les solutions de l'équation caractéristique (à l'aide du discriminant).
3. On applique le résultat du théorème.
4. On détermine les réels α et β en résolvant le système à deux équations et deux inconnues obtenu en prenant $n = 0$ et $n = 1$ (ou de manière plus générale deux valeurs connues de la suite).

2. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre

2.1. Généralités

Définition. Suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre** s'il existe deux réels a et b et une suite c tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2}+au_{n+1}+bu_n = c_n \quad (R).$$

La technique pour la résolution des équations de second ordre avec second membre consiste à découper le problème en deux : trouver les solutions générales de l'équation sans second membre et trouver une solution particulière de l'équation avec second membre.

Définition. Relation homogène associée

On appelle relation de récurrence homogène associée à la relation (R_h) la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0 \quad (R_h).$$

Théorème.

On considère l'équation suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = c_n$$

où a et b sont deux réels et c une suite.
Soit u^p est une suite solution particulière de (R).
Alors toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (R) peut s'écrire de la façon suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n = u_n^p + u_n^h$$

où u^h est une suite vérifiant (R_h).

Proposition. Principe de superposition

On considère l'équation suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = c_n + d_n \quad (R).$$

où a et b sont deux réels et c et d deux suites.
Si v est une solution particulière de l'équation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = c_n$$

et que w est une solution particulière de l'équation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = d_n,$$

alors $v + w$ est solution des l'équation (R).

2.2. Cas d'un second membre constant

On s'intéresse aux suites vérifiant la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = c \quad (R).$$

avec a, b et c des réels.

Solution particulière

Si $a + b \neq -1$, la suite constante égale à $\dfrac{c}{1+a+b}$ est une solution particulière de (R).

Solutions générales et comportement asymptotique

Dans le cas où $a^2 - 4b > 0$ et $a + b \neq -1$, les suites vérifiant (R) sont de la forme :

$$u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n + \frac{c}{1+a+b}$$

avec α et β deux réels.
On suppose α et β différents de 0. Alors on a :

- si $\max(|r_1|, |r_2|) < 1$, la suite converge vers $\ell = \dfrac{c}{1+a+b}$;
- si $\max(|r_1|, |r_2|) > 1$, la suite diverge.

Le cas où une des deux racines a pour valeur absolue 1 contient plusieurs cas distincts que je n'explicite pas ici.

Dans le cas où $a^2 - 4b = 0$ et $a + b \neq -1$, les suites vérifiant (R) sont de la forme :

$$u_n = (\alpha + \beta n)\, r_0^n + \frac{c}{1+a+b}$$

avec α et β deux réels.
On suppose α différent de 0. Alors on a :

- si $|r_0| < 1$, la suite converge vers $\ell = \dfrac{c}{1+a+b}$;
- si $|r_0| > 1$, la suite diverge.

Dans le cas où $|r_0| = 1$, la situation diffère selon la valeur exacte de r_0 (1 ou -1) et le fait que β soit nul ou non.

3. Étude complète d'une relation de récurrence linéaire à coefficients constants d'ordre 2

Soit $\beta \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 2\beta u_{n+1} + \beta u_n = 2 \qquad (R)$$

1. **Recherche d'une solution particulière.**
   Le second membre étant constant, commençons par chercher s'il existe une solution particulière constante.
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite constante : $u_n = k$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   $$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ vérifie } (R) \Leftrightarrow k - 2\beta k + \beta k = 2 \Leftrightarrow (1-\beta)k = 2$$

   Si $\beta \neq 1$, la suite constante égale à $\dfrac{2}{1-\beta}$ vérifie (R).
   Si $\beta = 1$, aucune suite constante ne vérifie (R).
   Supposons que $\beta = 1$.
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de la forme $u_n = an$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   $$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ vérifie } (R) \Leftrightarrow a(n+2) - 2a(n+1) + an = 2,\ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 0 = 2$$

   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de la forme $u_n = an^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   $$\begin{aligned}(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ vérifie } (R) &\Leftrightarrow a(n+2)^2 - 2a(n+1)^2 + an^2 = 2,\ \forall n \in \mathbb{N}\\ &\Leftrightarrow a(n^2+4n+4) - 2a(n^2+2n+1) + an^2 = 2,\ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 2a = 2 \Leftrightarrow a = 1\end{aligned}$$

   Pour conclure,

   - si $\beta \neq 1$, la suite constante égale à $\dfrac{2}{1-\beta}$ vérifie (R).
   - si $\beta = 1$, la suite de terme général $u_n = n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, vérifie (R).

2. **Recherche des solutions de l'équation homogène associée.**
   L'équation caractéristique associée est donnée par

   $$(EC) \quad x^2 - 2\beta x + \beta = 0$$

   On a $\Delta = 4\beta^2 - 4\beta = 4\beta(\beta - 1)$.

- Si $\beta > 1$, alors on a $\Delta > 0$ et l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes
$$r_1 = \beta - \sqrt{\beta(\beta-1)} \quad \text{et} \quad r_2 = \beta + \sqrt{\beta(\beta-1)}$$
Du coup, l'ensemble des suites vérifiant l'équation homogène associée à (R) ont leur terme général de la forme
$$u_n = A\left(\beta - \sqrt{\beta(\beta-1)}\right)^n + B\left(\beta + \sqrt{\beta(\beta-1)}\right)^n, \ \forall n \in \mathbb{N}, \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$
- Si $\beta = 1$, alors on a $\Delta = 0$ et l'équation caractéristique admet une unique racine réelle double $r_0 = \beta = 1$. Du coup, l'ensemble des suites vérifiant l'équation homogène associée à (R) ont leur terme général de la forme
$$u_n = (A + Bn) \times 1^n = A + Bn, \ \forall n \in \mathbb{N}, \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$
- Si $\beta < 1$, alors on a $\Delta = \left(2i\sqrt{\beta(1-\beta)}\right)^2 < 0$ et l'équation caractéristique admet deux racines complexes (non réelles) distinctes conjuguées
$$r_1 = \beta - i\sqrt{\beta(1-\beta)} \quad \text{et} \quad r_2 = \beta + i\sqrt{\beta(1-\beta)}$$
On a $|r_1| = |r_2| = \sqrt{\beta^2 + \beta(\beta-1)} = \sqrt{\beta}$ et on note θ l'argument principal de r_1.
Du coup, l'ensemble des suites vérifiant l'équation homogène associée à (R) ont leur terme général de la forme
$$u_n = \left(\sqrt{\beta}\right)^n (A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)), \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

3. **Ensemble des suites vérifiant (R) et leur comportement asymptotique.**
   - Si $\beta > 1$, l'ensemble des suites vérifiant l'équation (R) ont leur terme général de la forme
   $$u_n = A\left(\beta - \sqrt{\beta(\beta-1)}\right)^n + B\left(\beta + \sqrt{\beta(\beta-1)}\right)^n + \frac{2}{1-\beta}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$
   La racine $\beta + \sqrt{\beta(\beta-1)}$ est strictement supérieure à 1 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\beta + \sqrt{\beta(\beta-1)}\right)^n = +\infty$.
   De plus, $\beta > \beta - 1$ donc $\beta^2 > \beta(\beta-1)$ ainsi $\beta > \sqrt{\beta(\beta-1)}$ et $\beta - \sqrt{\beta(\beta-1)} > 0$.
   On peut constater que la fonction $x \mapsto x - \sqrt{x(x-1)}$ est décroissante sur $]1; +\infty[$ et vaut 1 en 1.
   Par conséquent, on a $0 < \beta - \sqrt{\beta(\beta-1)} < 1$ donc on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\beta - \sqrt{\beta(\beta-1)}\right)^n = 0$.
   Pour conclure,
     - si $B \neq 0$, la suite est divergente et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } B > 0 \\ -\infty & \text{si } B < 0 \end{cases}$.
     - si $B = 0$, la suite converge vers l'état d'équilibre $\dfrac{2}{1-\beta}$.
   - Si $\beta = 1$, l'ensemble des suites vérifiant l'équation (R) ont leur terme général de la forme
   $$u_n = (A + Bn) \times 1^n = A + Bn + n^2, \ \forall n \in \mathbb{N}, \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$
   Dans ce cas, peu importe les valeurs de A et de B la suite tend vers $+\infty$.
   - Si $\beta < 1$, l'ensemble des suites vérifiant l'équation (R) ont leur terme général de la forme
   $$u_n = \left(\sqrt{\beta}\right)^n (A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)) + \frac{2}{1-\beta}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$
   Comme on a $0 < \beta < 1$, on a $0 < \sqrt{\beta} < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{\beta}\right)^n = 0$. Par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers son état d'équilibre $\dfrac{2}{1-\beta}$, peu importe les valeurs de A et de B.
4. **Conclusion.** Une suite vérifiant (R) sera convergente si $0 < \beta < 1$ ou si $\beta > 1$ et que le paramètre B est nul.

Chapitre 3

Équations différentielles du premier ordre

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction dérivable et qui fait intervenir la fonction et ses dérivées. Résoudre une telle équation, c'est trouver l'ensemble des fonctions qui vérifient cette équation.

Les équations différentielles ordinaires font intervenir les dérivées d'une fonction et ce sont les fonctions vérifiant l'équation qui en sont solutions.
Il n'est pas toujours évident de déterminer la solution générale d'une équation différentielle. On peut alors être amené à représenter graphiquement (à l'aide d'un ordinateur) ces solutions par des approximations successives.

1. Équations « primitives »

Il s'agit de la forme la plus simple d'équation différentielle :

$$y'(t) = g(t).$$

Résoudre cette équation revient à trouver les fonctions donc la dérivée est la fonction g. La résolution revient à une recherche de primitive.

Exemples.

- Une solution de l'équation différentielle $y' = -10t^3$ est la fonction $x \mapsto -\frac{5}{2}t^4$ définie sur $\mathbb{R}$.
- Une solution de l'équation différentielle $y'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ est la fonction $x \mapsto \ln(1+t^2)$ définie sur $\mathbb{R}$.

Méthode.

Lorsque l'équation différentielle peut être mise sous la forme

$$y'(t) = g(t)$$

et si G est une primitive de g, alors les solutions de l'équation proposée sont les fonctions de la forme $y(t) = G(t) + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

Exemples.

- L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = -10t^3$ est l'ensemble des fonctions définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto -\frac{5}{2}t^4 + C$, avec C un réel.
- L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ est $\left\{x \mapsto \ln(1+t^2) + C; C \in \mathbb{R}\right\}$.

2. Équations différentielles linéaires du premier ordre

Dans toute cette section, a et b désignent deux fonctions continues sur un intervalle I non réduit à un point. Toutes les équations différentielles considérées sont définies et résolues sur I.

2.1. Généralités

Définition. Équation différentielle linéaire du premier ordre

On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** toute équation de la forme $y'+ay=b$:

$$\forall t \in I, \qquad y'(t)+a(t)y(t)=b(t). \tag{E}$$

Si la fonction a est constante, alors on dit que l'équation différentielle est **à coefficients constants**.
La fonction b est appelée le **second membre**.
Si b est la fonction nulle, alors on dit que l'équation, qui s'écrit sous la forme $y'+ay=0$, c'est-à-dire

$$\forall t \in I, \qquad y'(t)+a(t)y(t)=0 \tag{E_H}$$

est **homogène**.

Par abus de notation, on notera parfois $y'+a(t)y=b(t)$.

Remarque.
Une équation différentielle de la forme $\alpha y'+\beta y=\gamma$, avec α une fonction ne s'annulant pas sur I, est également une équation différentielle linéaire.
En divisant par la fonction α, on se ramène à la **forme résolue** $y'+\dfrac{\beta}{\alpha}y=\dfrac{\gamma}{\alpha}$.

Exemple.

1. L'équation $y'+3y=2$, que l'on peut également noter $y'(t)+3y(t)=2$, est une équation linéaire du premier ordre à coefficients constants et second membre constant.
2. L'équation $2y'+3y=5t$ est une équation linéaire du premier ordre à coefficients constants et second membre non constant. Elle est équivalente à l'équation $y'+\dfrac{3}{2}y=\dfrac{5t}{2}$.
3. L'équation $y'+3ty=2$ que l'on peut également noter $y'(t)+3ty(t)=2$ est une équation linéaire du premier ordre mais n'est pas à coefficients constants car la fonction $t\mapsto 3t$ n'est pas constante. Son second membre est constant.

Définition. Solution d'une équation différentielle linéaire

On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est une solution de l'équation $y'+ay=b$ sur I si et seulement si

- la fonction f est dérivable sur I ;
- la fonction f vérifie

$$\forall t \in I, \qquad f'(t)+a(t)f(t)=b(t).$$

Exemple.
La fonction

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad t\mapsto e^{-3t}+\frac{2}{3}$$

est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'+3y=2$ car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t\in\mathbb{R}, \qquad f'(t)+3f(t)=-3e^{-3t}+3\left(e^{-3t}+\frac{2}{3}\right)=2.$$

Proposition. Structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $y' + ay = 0$ contient la fonction nulle et est stable par combinaison linéaire.
Par conséquent, l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre un est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions dérivables.

Démonstration.

- La fonction nulle est clairement solution de l'équation homogène $y' + ay = 0$.
- Soient f_1 et f_2 deux solutions de l'équation homogène $y' + ay = 0$.
  Alors les fonctions f_1 et f_2 sont dérivables et elles vérifient $f_1' + af_1 = 0$ et $f_2' + af_2 = 0$.
  Soit λ un élément de $\mathbb{R}$.
  Alors la fonction $\lambda f_1 + f_2$ est dérivable, comme combinaison linéaire de fonctions dérivables, et on a

$$\begin{aligned}(\lambda f_1 + f_2)' + a(\lambda f_1 + f_2) &= \lambda f_1' + f_2' + a(\lambda f_1 + f_2)\\ &= \lambda(f_1' + af_1) + f_2' + af_2\\ &= \lambda 0 + 0\\ &= 0,\end{aligned}$$

  ce qui prouve que la fonction $\lambda f_1 + f_2$ est solution de l'équation $y' + ay = 0$.

Donc l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre un est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions dérivables.

Remarque.
Cette démonstration ne dépend pas de l'ordre de l'équation différentielle, mais seulement de sa linéarité.

Remarque.
Nous verrons que si a n'est pas la fonction identiquement nulle alors l'ensemble des solutions de l'équation $y' + ay = 0$ est un espace vectoriel de dimension 1.

2.2. Résolution de l'équation homogène

Théorème. Solutions d'une équation différentielle linéaire homogène

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $(E_H) : y' + ay = 0$ sur l'intervalle I est

$$\mathcal{S}_H := \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}, \\ t & \mapsto & \lambda e^{-A(t)} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

où A désigne une primitive sur I de la fonction a.

Démonstration.

- Pour tout réel λ, la fonction

$$f : I \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$$

  est solution de l'équation $y' + ay = 0$ car

$$\forall t \in I, \qquad f'(t) + a(t)f(t) = -a(t)\lambda e^{-A(t)} + a(t)\lambda e^{-A(t)} = 0.$$

- Soit f une solution de l'équation $y' + ay = 0$. Alors on a

$$\forall t \in I, \qquad f'(t) + a(t)f(t) = 0.$$

En multipliant par $e^{A(t)}$, on obtient

$$\forall t \in I, \qquad e^{A(t)}f'(t) + a(t)e^{A(t)}f(t) = 0.$$

On reconnaît la dérivée, nulle sur l'intervalle I, de la fonction

$$I \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto e^{A(t)}f(t)$$

ce qui prouve que la fonction est constante :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \qquad e^{A(t)}f(t) = \lambda.$$

Finalement, il existe un réel λ tel que pour tout réel t dans I, $f(t) = \lambda e^{-A(t)}$.

Remarque.
Comme la fonction a est continue, elle admet nécessairement une primitive A, mais il n'est pas toujours possible d'obtenir une expression explicite pour cette dernière.

Remarque.
Si une fonction est une solution non identiquement nulle d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, alors elle ne s'annule pas.

Solutions d'une équation linéaire homogène à coefficients constants.

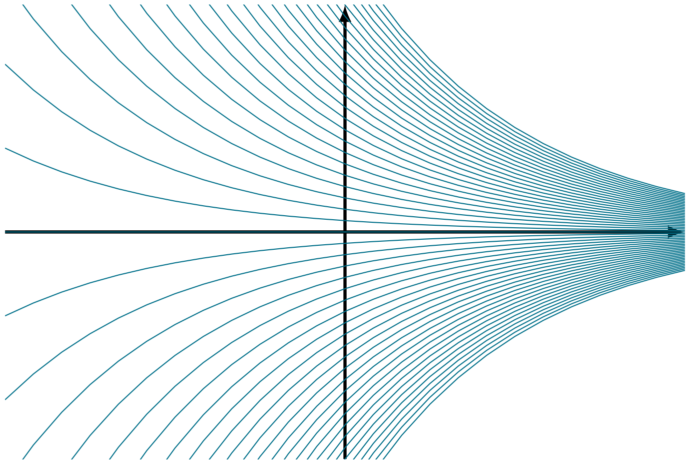
L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants $(E_H) : y' + ay = 0$, où a est un réel, est

$$\mathcal{S}_H := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-at} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exemple.
L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire $y' + 3y = 0$ est

$$\mathcal{S} := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-3t} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Représentation graphique des courbes représentatives de différentes solutions de l'équation différentielle précédente pour différentes valeur de λ.



2.3. Résolution de l'équation avec second membre

Théorème. Solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre

Soit f_0 une solution de l'équation différentielle linéaire $y' + ay = b$.
Alors l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $y' + ay = b$ est

$$\mathcal{S} = \{f_0 + f, f \in \mathcal{S}_H\},$$

où $\mathcal{S}_H$ désigne l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $y' + ay = 0$.

Démonstration.

- Dans le sens direct, la fonction f_0 est solution de l'équation $y' + ay = b$ donc

$$f_0' + af_0 = b$$

et la fonction f est solution de l'équation homogène associée $y' + ay = 0$ donc

$$f' + af = 0$$

D'après le principe de superposition, la fonction $f_0 + f$ est solution de l'équation $y' + ay = b$ car

$$(f_0 + f)' + a(f_0 + f) = f_0' + f' + af_0 + af = \underbrace{f_0' + af_0}_{b} + \underbrace{f' + af}_{0} = b + 0 = b.$$

- Réciproquement, si une fonction g est solution de l'équation différentielle $y' + ay = b$, alors

$$g' + ag = b$$

et donc $g - f_0$ est une solution de l'équation différentielle homogène $y' + ay = b$, toujours d'après le principe de superposition car

$$(g - f_0)' + a(g - f_0) = g' - f_0' + ag - af_0 = \underbrace{g' + ag}_{b} - \underbrace{(f_0' + af_0)}_{b} = b - b = 0.$$

Finalement, g s'écrit bien sous la forme $g = f_0 + \underbrace{(g - f_0)}_{\in \mathcal{S}_H}$.

Cette démonstration ne dépend pas de l'ordre de l'équation différentielle, mais seulement de sa linéarité.

Remarque.
Si f_1 est une autre solution de l'équation différentielle $y' + ay = b$, alors $\{f_0 + f, f \in \mathcal{S}_H\} = \{f_1 + f, f \in \mathcal{S}_H\}$.

À l'aide de la résolution de l'équation homogène faite précédemment et en déterminant une solution particulière, on obtient l'ensemble des solutions de manière explicite.

Méthode. Résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre

Pour résoudre l'équation différentielle $y' + ay = b$,

1. on détermine l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'équation homogène $y' + ay = 0$ en trouvant une primitive A de la fonction a : $\mathcal{S}_H = \left\{t \mapsto \lambda e^{-A(t)}, t \in \mathbb{R}\right\}$;
2. on détermine une solution particulière f_0 de l'équation différentielle $y' + ay = b$;
3. on écrit $\mathcal{S} = \left\{t \mapsto f_0(t) + \lambda e^{-A(t)}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

2.4. Principe de superposition

Proposition. Principe de superposition

Soient a, b_1 et b_2 trois fonctions continues sur I.
Soit f_1 une solution de l'équation différentielle $(E_1) : y' + ay = b_1$.
Soit f_2 une solution de l'équation différentielle $(E_2) : y' + ay = b_2$.
Alors, pour tout réel λ, la fonction $\lambda f_1 + f_2$ est solution de l'équation différentielle $y' + ay = \lambda b_1 + b_2$.

Démonstration.
On a

$$f_1' + af_1 = b_1$$

donc

$$\lambda f_1' + \lambda af_1 = \lambda b_1$$

et

$$f_2' + af_2 = b_2$$

En additionnant membre à membre les deux équations précédentes, on obtient

$$\lambda f_1' + f_2' + \lambda af_1 + af_2 = \lambda b_1 + b_2,$$

c'est-à-dire

$$(\lambda f_1 + f_2)' + a(\lambda f_1 + f_2) = \lambda b_1 + b_2.$$

Finalement, la fonction $\lambda f_1 + f_2$ est solution de l'équation différentielle $y' + ay = \lambda b_1 + b_2$.

Cette démonstration ne dépend pas de l'ordre de l'équation différentielle, mais seulement de sa linéarité.

2.5. Quelques seconds membres particuliers pour a constant

On considère l'équation $y' + ay = b$, où a est un réel, dans quelques cas particuliers.

Second membre constant

L'équation différentielle $y' + ay = b$ admet une solution particulière constante.
Celle-ci s'interprète souvent comme étant une situation d'équilibre.
On remarque que c'est la limite de n'importe quelle solution convergente, lorsque (le temps) t tend vers $+\infty$.

Proposition. Second membre constant

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire $y' + ay = b$, avec $a \in \mathbb{R}^\star$ et $b \in \mathbb{R}$ est

$$\mathcal{S} := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{b}{a} + \lambda e^{-at} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exemple.
L'ensemble des solutions de l'équation $y' + 3y = 2$ est $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{2}{3} + \lambda e^{-3t} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Second membre de type exponentiel

Proposition. Second membre de type exponentiel

Si l'équation est de la forme $y' + ay = e^{mt}$, où m est un réel, alors la fonction $\begin{cases} t \mapsto \dfrac{1}{m+a}e^{mt} & \text{si } m \neq -a \\ t \mapsto te^{mt} & \text{si } m = -a \end{cases}$ est une solution particulière.

Démonstration.
Soit λ un scalaire dans $\mathbb{R}$.

- La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \lambda e^{mt}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'(t) + af(t) = \lambda m e^{mt} + \lambda a e^{mt} = \lambda(m+a)e^{mt}.$$

  Si $m \neq -a$, alors la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{m+a}e^{mt}$ est solution de l'équation $y'(t) + ay(t) = e^{mt}$.
  Si $m = -a$, alors aucune fonction de cette forme n'est solution de l'équation $y'(t) + ay(t) = e^{-at}$.
- La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \lambda t e^{-at}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'(t) + af(t) &= \lambda e^{-at} + \lambda t(-a)e^{-at} + a\lambda t e^{-at} \\ &= \lambda(1 - at + at)e^{-at} \\ &= \lambda e^{-at}. \end{aligned}$$

  En prenant $\lambda = 1$, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto te^{-at}$ est solution de l'équation $y'(t) + ay(t) = e^{-at}$.

Remarque.
Plus généralement, si l'équation est de la forme $y' + ay = P(t)e^{mt}$ où P est un polynôme de degré n, alors il existe un polynôme Q de degré n tel que la fonction $\begin{cases} t \mapsto Q(t)e^{mt} & \text{si } m \neq -a \\ t \mapsto tQ(t)e^{mt} & \text{si } m = -a \end{cases}$ soit une solution particulière.

Remarque.
Ces résultats ne sont pas à connaître par cœur.

Exemple.

1. On considère l'équation $y' + y = e^{2t}$.
   Comme $2 \neq -1$, on cherche une solution particulière sous la forme $f : t \mapsto \lambda e^{2t}$.

$$\begin{aligned} f \text{ est solution} &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'(t) + f(t) = e^{2t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \qquad 2\lambda e^{2t} + \lambda e^{2t} = e^{2t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \qquad 3\lambda = 1 \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \lambda = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

   Finalement, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{3}e^{2t}$ est une solution particulière.
   L'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{3}e^{2t} + Ce^{-t} \end{array}, C \in \mathbb{R} \right\}$.

2. On considère l'équation $y' - y = 2e^t$.
   Comme $1 = 1$, on cherche une solution particulière sous la forme $f : t \mapsto \lambda t e^t$.

$$\begin{aligned} f \text{ est solution} &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) - f(t) = 2e^t \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda e^t + \lambda t e^t - \lambda t e^t = 2e^t \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda e^t + \lambda t e^t - \lambda t e^t = 2e^t \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda = 2. \end{aligned}$$

   Finalement, la fonction $t \mapsto 2te^t$ est une solution particulière.
   L'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 2te^t + Ce^t \end{array}, C \in \mathbb{R} \right\}$.

2.6. Méthode de variation de la constante

Méthode. Méthode de variation de la constante

Pour déterminer une solution particulière de l'équation $y' + ay = b$, on utilise la **méthode de variation de la constante** : on cherche une solution f_0 sous la forme

$$f_0(t) = \lambda(t) e^{-A(t)},$$

où λ est une fonction dérivable sur I et où A désigne une primitive de a.

On dérive la fonction λ sur I et on obtient

$$\begin{aligned} f_0'(t) &= \lambda'(t) e^{-A(t)} - a(t)\lambda(t) e^{-A(t)} \\ &= \lambda'(t) e^{-A(t)} - a(t) f_0(t). \end{aligned}$$

La fonction f_0 est une solution de l'équation différentielle $y' + ay = b$ si et seulement si

$$\begin{aligned} b(t) &= f_0'(t) + a(t) f_0(t) \\ &= \lambda'(t) e^{-A(t)} - a(t) f_0(t) + a(t) f_0(t) \\ &= \lambda'(t) e^{-A(t)}. \end{aligned}$$

On intègre alors la relation obtenue

$$\lambda'(t) = b(t) e^{A(t)}$$

pour obtenir une fonction λ qui convient et donc une solution particulière $x \mapsto \lambda(x) e^{-A(x)}$ de l'équation avec second membre.

Exemple.
On cherche une solution de l'équation $y' - ty = 3te^{t^2}$ sous la forme $f_0(t) = \lambda(t) e^{\frac{t^2}{2}}$.
En dérivant, on a $f_0'(t) = \lambda'(t) e^{\frac{t^2}{2}} + x\lambda(t) e^{\frac{t^2}{2}} = \lambda'(t) e^{\frac{t^2}{2}} + t f_0(t)$, c'est-à-dire $f_0'(t) - t f_0(t) = \lambda'(t) e^{\frac{t^2}{2}}$.
Si $\lambda'(t) = 3te^{\frac{t^2}{2}}$, alors $\lambda'(t) e^{\frac{t^2}{2}} = 3te^{t^2}$ et donc f_0 est solution de l'équation.
En intégration, on obtient $\lambda(t) = 3e^{\frac{t^2}{2}} + C$ (on prend $C = 0$).
Finalement, la fonction $f_0 : t \mapsto 3e^{\frac{t^2}{2}} e^{\frac{t^2}{2}} = 3e^{t^2}$ est une solution de l'équation.

2.7. Problème de Cauchy

Définition. Problème de Cauchy

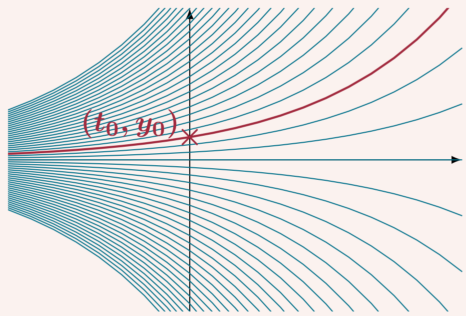
Soient t_0 et y_0 deux réels. On appelle **problème de Cauchy** de (E) de condition $y(t_0) = y_0$ le système

$$(E_{t_0,y_0}) : \begin{cases} y' + ay &= b \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

Théorème. Solution du problème de Cauchy

Soient y_0 et t_0 deux réels.

Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + ay &= b \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$ admet une *unique* solution.



Remarque.
L'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' + ay &= 0 \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$ est la fonction $f : t \mapsto y_0 e^{-A_0(t)}$, où la fonction $t \mapsto A_0(t) := \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(t)\mathrm{d}t$ est la primitive de la fonction a qui s'annule en t_0.

Remarque.
Soient f_1 et f_2 deux solutions de l'équation $(E) : y' + ay = b$.
S'il existe un réel t tel que $f_1(t) = f_2(t)$, alors les fonctions f_1 et f_2 sont égales.

Méthode. Résolution d'un problème de Cauchy

Pour résoudre le problème de Cauchy $\left(E_{(t_0,y_0)}\right)$, on résout l'équation $y(t_0) = y_0$ en utilisant la forme des solutions trouvée précédemment.

Exemple.
On cherche à résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + 3y &= 2 \\ y(0) &= 2 \end{cases}$.

Or l'ensemble des solutions de l'équation $y' + 3y = 2$ est $\left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto \dfrac{2}{3} + \lambda e^{-3t} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

L'unique solution du problème de Cauchy est donc de la forme $f : t \mapsto \dfrac{2}{3} + \lambda e^{-3t}$.
Pour déterminer le réel λ, on utilise la condition de Cauchy

$$f(0) = 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{2}{3} + \lambda e^{-3\times 0} = 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda = \frac{4}{3}.$$

Finalement, le problème de Cauchy admet pour unique solution la fonction $t \mapsto \dfrac{4}{3}e^{-3t} + \dfrac{2}{3}$.

Méthode. Résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre

Pour **résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre**,

1. On l'écrit sous forme résolue $y' + ay = b$ et on se place sur un intervalle.
2. On résout l'équation homogène $y' + ay = 0$.
3. On cherche une solution particulière de l'équation $y' + ay = b$, en utilisant éventuellement la méthode de variation de la constante.
   Si le second membre s'écrit sous forme d'une combinaison linéaire, on utilise le principe de superposition.
4. On en déduit l'ensemble des solutions de l'équation $y' + ay = b$ à l'aide du théorème de structure.
5. Si on a une condition de Cauchy, alors on détermine l'unique solution en cherchant parmi les solutions de l'équation $y' + ay = b$ celle qui vérifie la condition de Cauchy.

3. Équations différentielles du premier ordre non linéaires autonomes

Les équations différentielles non linéaires ne peuvent pas toujours être résolues explicitement. Cependant il est possible d'obtenir des informations qualitatives sur les fonctions solutions : sens de variation et limite par exemple.

3.1. Introduction

L'expression générale d'une équation différentielle non linéaire d'ordre un est

$$y'(t) = f(y_t, t).$$

Cependant on ne considèrera que des équations dites autonomes, c'est-à-dire qui ne dépendent pas explicitement de t.

Soient deux intervalles I et J et une fonction continue $f : J \to \mathbb{R}$.

Définition.

On appelle équation différentielle non linéaire autonome d'ordre un toute équation de la forme

$$y'(t) = f(y(t)), \qquad \forall t \in I$$

avec $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$.

Remarque.
Les fonctions y vérifiant cette équation sont des fonctions de I dans J.

Exemple.

$$y'(t) = 2\sqrt{y(t)}, \forall t \in \mathbb{R}$$

Les fonctions $t \mapsto 0$ et $t \mapsto t^2 \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ sont des solutions. De plus, elles vérifient toutes les deux la condition initiale $y(0) = 0$.
On n'a donc pas forcément unicité de la solution d'une équation différentielle autonome d'ordre un avec une condition initiale.

Définition. Problème de Cauchy

Soient t_0 et y_0 deux réels. On appelle **problème de Cauchy** de (E) de condition $y(t_0) = y_0$ le système

$$(E_{t_0,y_0}) : \begin{cases} y'(t) & = & f(y(t)) & \forall t \in I \\ y(t_0) & = & y_0 & \text{avec } y_0 \in J,\ t_0 \in I \end{cases}$$

3.2. Unicité de la solution

Théorème. Unicité de la solution

Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J, alors il existe un intervalle ouvert contenant t_0 (de la forme $]t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon[$) tel qu'il existe une unique solution au problème de Cauchy (P) définie sur cet intervalle.

Exemple.
Notre exemple introductif,

$$y'(t) = 2\sqrt{y(t)}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad y(0) = 0$$

admet plusieurs solutions (en fait une infinité). Il ne vérifie pas les hypothèses du théorème précédent car la fonction f n'est pas dérivable en 0 qui correspond à la valeur requise pour la fonction au temps initial.

Proposition. Conséquence

Soient deux solutions de (P) : y et z.
S'il existe un réel τ tel que $y(\tau) = z(\tau)$, alors on a $y(t) = z(t)$, pour tout réel t.

Remarque.
Graphiquement cela signifie que les courbes représentatives de deux solutions différentes de la même équation ne peuvent pas s'intersecter.
En particulier, si la fonction identiquement nulle est une solution, alors toutes les autres solutions sont de signe constant.

3.3. Existence globale

Proposition.

Il existe un intervalle maximal T contenant t_0 tel que (P) admet une unique solution sur T.

Définition. Solution maximale

On appelle solution maximale au problème de Cauchy (P) une fonction de T dans $\mathbb{R}$, solution de (P), qui ne peut pas être prolongée sur un intervalle plus grand que T.

Exemples.

- $y'(t) = y(t)$ et $y(0) = 1$
  La fonction y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $y(t) = e^t$ est une solution maximale du problème précédent.

- $y'(t) = y^2(t)$ et $y(0) = 1$
  La fonction y de $]-\infty; 1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $y(t) = \dfrac{1}{1-t}$ est une solution maximale du problème précédent.

Théorème. Théorème d'existence globale

Soit y une solution maximale de (P) définie sur T.
Si $y(T)$ est bornée, alors $T = \mathbb{R}$.

Il y a trois situations différentes concernant la limite des solutions :
- soit $T =]t_-; +\infty[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \ell \in \mathbb{R}$;
- soit $T =]t_-; +\infty[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \pm\infty$;
- soit $T =]t_-; t_+[$ et $\lim\limits_{t\to t_+} y(t) = \pm\infty$.

Dans le dernier cas, on dit que la solution explose en temps fini.

3.4. Étude qualitative de la solution maximale

Définition. Point d'équilibre

Un point $y^* \in J$ est appelé point d'équilibre de (E) si $f(y^*) = 0$.

Un point d'équilibre est un état d'équilibre. Si une solution maximale démarre à un point d'équilibre, alors elle y reste et, en fait, elle y a toujours été.

Proposition.

Soit y une solution maximale de (E). On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J.
S'il existe $t \in T$ tel que $y(t) = y^*$, alors $y(t) = y^*$, pour tout $t \in T$.

Ainsi, si on ne démarre pas à un point d'équilibre, on ne peut pas l'atteindre. On dit que « les solutions ne peuvent pas traverser les points d'équilibre ».

Proposition. Limites possibles

Soit y une solution maximale de (E) définie sur $]t_-; +\infty[$.
Si la fonction y converge, alors elle converge vers un point d'équilibre.

Démonstration. On considère l'équation

$$y'(t) = f(y(t)), \qquad \forall t \in I$$

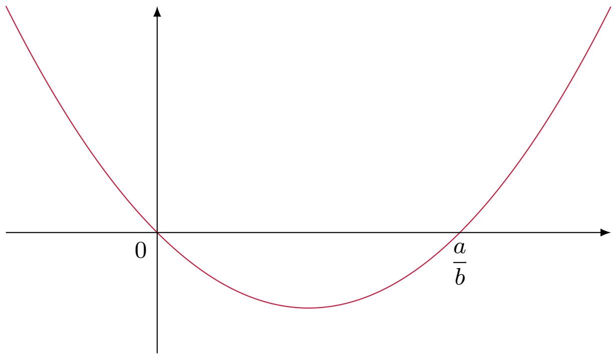
Soit y une solution maximale de cette équation, définie sur $]t_-; +\infty[$.
- S'il existe un réel t tel que $y'(t) = 0$, alors $f(y(t)) = 0$. Ainsi il existe un point d'équilibre y^*, tel que $y(t) = y^*$. Et en fait, on a $y(t) = y^*$ pour tout t. En conclusion $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = y^*$.
- Si, pour tout t, on a $y'(t) \neq 0$. Alors y' est de signe constant (car y' est continue). Donc la fonction y est monotone.
  Or si une fonction converge et est monotone, alors, forcément, sa dérivée tend vers 0. Ainsi $\lim\limits_{t\to+\infty} y'(t) = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(y(t)) = 0$.
  De plus $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = l$ donc, comme f est continue, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(y(t)) = f(l)$. Par unicité des limites, on obtient $f(l) = 0$. Donc la limite l est un point d'équilibre de f.

3.5. Étude complète

Soient a et b deux réels non nuls. On s'intéresse au problème de Cauchy suivant

$$(P)\ :\ \begin{cases} y'(t) = ay(t) - by^2(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

On va étudier le comportement asymptotique de la solution maximale de l'équation différentielle, en fonction de la valeur initiale $y_0 = y(0)$.
On suppose que $a < 0$ et $b < 0$. La fonction $f : x \mapsto ax - bx^2$ a pour représentation graphique :



La fonction f admet deux points d'équilibre 0 et $\dfrac{a}{b}$. Donc si $y_0 = 0$, l'unique solution est la fonction constante égale à 0 et si $y_0 = \dfrac{a}{b}$, alors l'unique solution est la fonction constante égale à $\dfrac{a}{b}$. Sinon, si $y_0 \neq 0$ et $y_0 \neq \dfrac{a}{b}$, la solution ne prendra jamais la valeur 0 ou la valeur $\dfrac{a}{b}$.

Cas où $y_0 \in \left]0; \dfrac{a}{b}\right[$.

On note y la solution maximale et I son intervalle de définition.
Comme $y_0 \in \left]0; \dfrac{a}{b}\right[$, que y est continue et qu'une solution ne peut pas traverser les point d'équilibre, on a, pour tout t, $y(t) \in \left]0; \dfrac{a}{b}\right[$. Ainsi la solution y est bornée, c'est-à-dire $y(I)$ est bornée. Par conséquent $I = \mathbb{R}$, la solution y est donc définie sur tout $\mathbb{R}$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) \in \left]0; \dfrac{a}{b}\right[$ et pour tout $x \in \left]0; \dfrac{a}{b}\right[$, $f(x) < 0$, on a ainsi $y'(t) < 0$ pour tout t. La fonction y est par conséquent strictement décroissante. La fonction y étant de plus minorée, elle converge. Or les seules limites possibles sont les états d'équilibre. On obtient $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0$.

Cas où $y_0 < 0$.

On note y la solution maximale et I son intervalle de définition.
Comme $y_0 < 0$, que y est continue et qu'une solution ne peut pas traverser les points d'équilibre, on a, pour tout t, $y(t) < 0$.
Or pour tout $x < 0$, $f(x) > 0$, on a ainsi $y'(t) > 0$ pour tout t. La fonction y est par conséquent strictement croissante.
Comme y est croissante et majorée par 0, elle est bornée au-delà de t_0. Par conséquent $I = \mathbb{R}$, la solution y est donc définie sur tout $\mathbb{R}$ et elle converge. Or les seules limites possibles sont les états d'équilibre. On obtient $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0$.

Cas où $y_0 > \dfrac{a}{b}$.

On note y la solution maximale et I son intervalle de définition.
Comme $y_0 > \dfrac{a}{b}$, que y est continue et qu'une solution ne peut pas traverser les point d'équilibre, on a, pour

tout t, $y(t) > \frac{a}{b}$.
Or pour tout $x > \frac{a}{b}$, $f(x) > 0$, on a ainsi $y'(t) > 0$ pour tout t. La fonction y est par conséquent strictement croissante.
D'après le théorème de la limite monotone, soit elle tend vers $+\infty$, soit elle converge. Or si elle converge, c'est forcément vers un état d'équilibre ce qui est impossible dans ce cas. Donc on a que y tend vers $+\infty$. Cependant on ne sait pas si c'est en $+\infty$ ou avant, c'est-à-dire si on est en présence d'une explosion en temps fini.

Chapitre 4

Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Dans tout ce chapitre, a est un réel non nul, b et c sont deux réels et d est une fonction continue sur I.

1. Généralités

Définition. Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** toute équation de la forme

$$\forall t \in I, \qquad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t), \tag{E}$$

où a est un réel non nul, où b et c sont deux réels et où d est une fonction.
Si d est la fonction nulle, alors on dit que l'équation

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{E_H}$$

est **homogène**. C'est l'équation homogène **associée** à (E) : $ay'' + by' + cy = d$.

Exemple.
L'équation

$$y'' - 3y' - 4y = e^t + 1$$

est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Définition. Solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$ si et seulement si la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\forall t \in I, \qquad af''(t) + bf'(t) + cf(t) = d(t).$$

2. Structure de l'ensemble des solutions

Théorème. Solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre

Soit f_0 une solution de l'équation différentielle linéaire $(E) : ay'' + by' + cy = d$.
Alors l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation (E) est

$$\mathcal{S} = \{f_0 + f, f \in \mathcal{S}_H\},$$

où $\mathcal{S}_H$ désigne l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène

$$(E_H) : ay'' + by' + cy = 0.$$

La démonstration est la même que celle à l'ordre 1.

Exemple.
Pour résoudre l'équation $y'' - 3y' - 4y = e^t + 1$,

- on commence par trouver l'ensemble des solutions de l'équation homogène $y'' - 3y' - 4y = 0$
- on ajoute à chacune de ces solutions une solution particulière de l'équation $y'' - 3y' - 4y = e^t + 1$.

Proposition. Principe de superposition

Soient $a \neq 0$, b, c des réels. Soient d_1 et d_2 deux fonctions continues sur I.
Soit f_1 une solution de l'équation différentielle $(E_1) : ay'' + by' + cy = d_1$.
Soit f_2 une solution de l'équation différentielle $(E_2) : ay'' + by' + cy = d_2$.
Alors pour tout réel λ, la fonction $\lambda f_1 + f_2$ est une solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = \lambda d_1 + d_2$.

La démonstration est la même que celle à l'ordre 1.

Si le second membre s'écrit comme une somme de fonctions, alors on utilise le principe de superposition.

Exemple.
En additionnant

- une solution de l'équation $y'' - 3y' - 4y = e^t$;
- une solution de l'équation $y'' - 3y' - 4y = 1$;

on obtient une solution de l'équation $y'' - 3y' - 4y = e^t + 1$.

3. Résolution de l'équation homogène

3.1. Structure de l'ensemble des solutions

Proposition. Structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$ contient la fonction nulle et est stable par combinaison linéaire.
Par conséquent, l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre deux est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions deux fois dérivables.

Démonstration. La fonction nulle est clairement solution de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$.
Soient f_1 et f_2 deux solutions de l'équation homogène c'est-à-dire que f_1 et f_2 sont deux fois dérivables et vérifient $af_1'' + bf_1' + cf_1 = 0$ et $af_2'' + bf_2' + cf_2 = 0$.
Soit λ un élément de $\mathbb{R}$.
Alors la fonction $\lambda f_1 + f_2$ est deux fois dérivable, comme combinaison linéaire de fonctions deux fois dérivable et on a

$$\begin{aligned} a(\lambda f_1 + f_2)'' + b(\lambda f_1 + f_2)' + a(\lambda f_1 + f_2) &= a(\lambda f_1'' + f_2'') + b(\lambda f_1' + f_2') + c(\lambda f_1 + f_2) \\ &= \lambda(af_1'' + bf_1' + cf_1) + af_2'' + bf_2' + cf_2 \\ &= \lambda 0 + 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui prouve que la fonction $\lambda f_1 + f_2$ est solution de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$.
Donc l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre deux est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions deux fois dérivables.

3.2. Polynôme caractéristique

Définition. Polynôme caractéristique

On appelle **polynôme caractéristique** de l'équation $(E) : ay'' + by' + cy = d$ le polynôme

$$aX^2 + bX + c.$$

Proposition.

Soit λ un élément de $\mathbb{R}$.
La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto e^{\lambda t}$ est solution de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ si et seulement si λ est racine du polynôme caractéristique $aX^2 + bX + c$, c'est-à-dire $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

Démonstration. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivées successives $f' : t \mapsto \lambda e^{\lambda t}$ et $f'' : t \mapsto \lambda^2 e^{\lambda t}$. Ainsi

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } ay'' + by' + cy = 0 &\iff af'' + bf' + cf = 0 \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ a\left(\lambda^2 e^{\lambda t}\right) + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} = 0 \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ \left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right) e^{\lambda t} = 0 \\ &\iff a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \qquad \text{en divisant par } e^{\lambda t} \neq 0 \end{aligned}$$

3.3. Forme des solutions de l'équation homogène

Théorème. Solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2

On considère l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 (E_H) : $ay'' + by' + cy = 0$.
Soit $\Delta := b^2 - 4ac$ le discriminant du polynôme caractéristique $aX^2 + bX + c$.

1. Si $\Delta > 0$, alors le polynôme admet **deux racines réelles distinctes** :

$$\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

   L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'équation homogène est

$$\mathcal{S}_H := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \end{array}, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2. Si $\Delta = 0$, alors le polynôme admet **une unique racine réelle** : $\lambda_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
   L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'équation homogène est

$$\mathcal{S}_H := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (At+B)e^{\lambda_0 t} \end{array}, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

3. Si $\Delta < 0$, alors le polynôme admet **deux racines complexes** :

$$\lambda_1 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

   L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'équation homogène est

$$\mathcal{S}_H := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{-\frac{b}{2a}t}\left(A\cos\left(\dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right) + B\sin\left(\dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right)\right) \end{array}, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Remarque.
Dans le cas où $\Delta < 0$, remarquez que la constante multiplicative dans l'exponentielle, $-\dfrac{b}{2a}$, correspond à la partie réelle des racines complexes du polynôme caractéristique et la constante multiplicative dans le sinus et le cosinus correspond, éventuellemnt au signe près, à la partie imaginaire des racines complexes du polynôme caractéristique.

Remarque.
Dans les trois cas, l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 de l'ensemble des fonctions deux fois dérivables.

Exemple.

1. L'équation différentielle linéaire d'ordre 2

$$y'' - 3y' - 4y = 0$$

   a pour polynôme caractéristique $X^2 - 3X - 4$ qui admet pour racines -1 et 4.

L'ensemble des solutions de cette équation est est

$$\mathcal{S}_H := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & Ae^{-t} + Be^{4t} \end{array}, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2. L'équation différentielle linéaire d'ordre 2

$$y'' - 2y' + 4y = 0$$

a pour polynôme caractéristique $X^2 - 2X + 4$ de racines $1 + i\sqrt{3}$ et $1 - i\sqrt{3}$.
L'ensemble des solutions de cette équation est est

$$\mathcal{S}_H := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^t\left(A\cos\left(\sqrt{3}t\right) + B\sin\left(\sqrt{3}t\right)\right) \end{array}, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

3.4. Comportement asymptotique des solutions de l'équation homogène

Cas où $\Delta > 0$

Les solutions sont de la forme $f(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$ avec A et B deux nombres réels.
On suppose que A et B ne sont pas nuls.

- Si les deux racines du polynôme caractéristique sont strictement négatives, alors les solutions vont tendre vers 0 en $+\infty$.
- Si une des deux racines du polynôme caractéristique est strictement positive, alors les solutions vont tendre vers l'infini ($+$ ou $-$ selon le signe de la constante A ou B correspondant) en $+\infty$.

Cas où $\Delta = 0$

Les solutions sont de la forme $f(t) = (A + Bt)\,e^{\lambda_0 t}$ avec A et B deux nombres réels.
On suppose que A et B ne sont pas nuls.

- Si la racine du polynôme caractéristique est strictement négative, alors les solutions vont tendre vers 0 en $+\infty$.
- Si la racine du polynôme caractéristique est strictement positive, alors les solutions vont tendre vers l'infini ($+$ ou $-$ selon les signes des constantes A et B) en $+\infty$.

Cas où $\Delta < 0$

Les solutions sont de la forme $f(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}(A\cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right)$ avec A et B deux nombres réels.
On suppose que A et B ne sont pas nuls.

- Si $-\dfrac{b}{2a} < 0$, alors les solutions vont tendre vers 0 en $+\infty$ (en oscillant).
- Si $-\dfrac{b}{2a} > 0$, alors les solutions vont osciller de façon explosive quand t tend vers $+\infty$.
- Si $-\dfrac{b}{2a} = 0$, c'est-à-dire $b = 0$, alors les solutions vont osciller avec une amplitude entretenue quand t tend vers $+\infty$.

4. Cas d'un second membre constant

Proposition. Solution particulière avec second membre constant

Si $c \in \mathbb{R}^\star$ et $d \in \mathbb{R}$, alors la fonction constante égale à $\dfrac{d}{c}$ est une solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d$.

Remarque.
La solution particulière constante s'interprète comme étant la situation d'équilibre égale à la limite de n'importe quelle solution convergente lorsque (le temps) t tend vers $+\infty$.

Exemple.
L'ensemble des solutions de l'équation $y'' - 3y' - 4y = 1$ est

$$\mathcal{S}_H := \left\{ \begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & -\dfrac{1}{4} + Ae^{-t} + Be^{4t} \end{array}, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

car la fonction constante égale à $-\dfrac{1}{4}$ est une solution de l'équation $y'' - 3y' - 4y = 1$.

Remarque.

1. Si c est nul et que b est non nul, alors la fonction linéaire $t \mapsto \dfrac{d}{b}t$ est une solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d$.
2. Si b et c sont nuls, alors la fonction $t \mapsto \dfrac{d}{2a}t^2$ est une solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d$.

5. Problème de Cauchy

Définition. Problème de Cauchy

Soient t_0, y_0 et y_1 trois réels.
On appelle **problème de** Cauchy de conditions $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$ le système

$$\left(E_{t_0,y_0,y_0'}\right) : \begin{cases} ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

Théorème. Solution du problème de Cauchy

Soient t_0, y_0 et y_1 trois réels.

Le problème de Cauchy $\begin{cases} ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$ admet une *unique* solution.

MÉTHODE. RÉSOUDRE UN PROBLÈME DE CAUCHY

Pour résoudre le problème de CAUCHY $\left(E_{(t_0,y_0,y_1)}\right)$, on détermine les constantes à l'aide d'un système à deux équations et deux inconnues obtenu en écrivant $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$ et en utilisant la forme des solutions trouvée précédemment.

REMARQUE.
Il ne suffit pas de donner deux conditions quelconques sur la fonction.
Il n'est pas surprenant qu'il faille deux conditions pour obtenir une unique solution car l'ensemble des solutions est un plan.

EXEMPLES.

- Le problème de Cauchy $y'' + y = 0$ avec conditions $y(0) = 0$ et $y(2\pi) = 0$ admet une infinité de solutions. En effet, pour tout réel A, la fonction $t \mapsto A\sin(t)$ convient.

- Le problème de Cauchy $y'' + y = 0$ avec conditions $y(0) = 0$ et $y(2\pi) = 1$ n'admet aucune solution. En effet, toute solution de l'équation $y'' + y = 0$ est une combinaison linéaire des fonctions cosinus et sinus qui sont 2π-périodiques donc est 2π-périodique.

EXEMPLE.
On cherche à résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) - 4y(t) = 8 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

- Les solutions de l'équation homogène sont toutes les fonctions de la forme $t \mapsto Ae^{-t} + Be^{4t}$, où A et B sont des réels.

- La fonction constante égale à -2 est une solution particulière donc les solutions de l'équation avec second membre sont toutes les fonctions de la forme $t \mapsto Ae^{-t} + Be^{4t} - 2$, où A et B sont des réels.

- On cherche à déterminer les réels A et B à l'aide des conditions de Cauchy $y(0) = -2$ et $y'(0) = 1$.

$$\begin{cases} y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} Ae^{-0} + Be^{4\times 0} - 2 &= -2 \\ -Ae^{-0} + 4Be^{4\times 0} &= 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} A + B &= 0 \\ -A + 4B &= 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} A &= -\dfrac{1}{5} \\ B &= \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

Finalement, l'unique solution du problème de Cauchy est la fonction $t \mapsto -\dfrac{1}{5}e^{-t} + \dfrac{4}{5}e^{4t} - 2$.

6. Méthode de résolution complète

Méthode. Résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre

Pour **résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants** $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$,

1. on écrit le polynôme caractéristique $aX^2 + bX + c$ puis on calcule son discriminant et on détermine ses racines complexes ;
2. on en déduit l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$;
3. on détermine une solution particulière f_0 de l'équation avec second membre $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$ en utilisant éventuellement le principe de superposition ;
4. on écrit, d'après le théorème de structure, l'ensemble $\mathcal{S} = f_0 + \mathcal{S}_H = \{f_0 + f, f \in \mathcal{S}_H\}$ des solutions ;
5. on détermine l'unique solution si l'on dispose de conditions de Cauchy. Pour cela, on détermine les constantes à l'aide d'un système à deux équations et deux inconnues obtenu en écrivant $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$ et en utilisant la forme des solutions trouvée précédemment.