Teoria da Computação

Exercícios Resolvidos

Daniel Castro Silva [1]

Setembro de 2016 (v2.0)

[1]Departamento de Engenharia Informática, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto / Laboratório de Inteligência Artificial e Ciência dos Computadores - dcs@fe.up.pt

Prefácio

Este livro tem como objetivo ser um auxiliar no estudo de Teoria da Computação[1], tal como lecionada na FEUP, apresentando exercícios resolvidos relativos às diversas temáticas abordadas. As soluções apresentadas não devem ser vistas como soluções únicas para os problemas, mas sim como possíveis resoluções dos mesmos.

Vários dos exercícios aqui resolvidos foram recolhidos de diversas fontes bibliográficas, sendo aqui dados os devidos créditos aos seus autores originais.

Bibliografia recomendada:

[Hopcroft et al., 2013] Hopcroft, J. H., Motwani, R., and Ullman, J. D. (2013). Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation. Pearson, 3rd edition. ISBN: 978-1292039053.

[Linz, 2011] Linz, P. (2011). An Introduction to Formal Languages and Automata. Jones Bartlett Learning, 5th edition. ISBN: 978-1449615529.

[Sipser, 2013] Sipser, M. (2013). Introduction to the Theory of Computation. Cengage Learning, 3rd edition. ISBN: 978-1-133-18779-0.

[1] Os conteúdos aqui presentes não constituem de forma alguma fonte de estudo única ou suficiente para uma disciplina de Teoria de Computação.

Estrutura do Livro

Este livro está estruturado de forma idêntica à unidade curricular de Teoria da Computação do MIEIC da FEUP. Cada capítulo foca numa temática, apresentando um conjunto de exercícios resolvidos, e propondo também alguns exercícios para resolução.

No primeiro capítulo são abordados alguns métodos de prova, com foco na prova por indução, que será útil mais tarde. Nos capítulos 2 a 5 são abordadas as diferentes representações para Linguagens Regulares: autómatos finitos (deterministas e não deterministas), e expressões regulares, abordando-se no capítulo 6 as propriedades deste tipo de linguagens.

Nos capítulos 7 e 8 são abordadas duas representações para Linguagens Livres de Contexto - Gramáticas Livres de Contexto e Autómatos de Pilha - sendo no capítulo 9 abordadas as propriedades deste tipo de linguagens.

Finalmente, no capítulo 10 são abordadas Máquinas de Turing.

Capítulo 1

Introdução

Esta introdução aborda a temática de provas formais. Existem vários métodos de prova que podem ser usados, dependendo da hipótese a provar, ou refutar. Vamos aqui focar nas provas por indução e contradição, que são provavelmente as mais importantes em Teoria da Computação. Outros tipos de provas devem ser recordadas da unidade curricular Matemática Discreta, ou consultando fontes de informação auxiliares.

1.1 Prova por Contradição

Uma prova por contradição prova que o oposto daquilo que se quer provar é falso. Para isso, começamos por assumir o contrário do que queremos provar, e a partir daí tentamos encontrar uma contradição. Essa contradição implica que a assunção inicial (o contrário do que queríamos provar) estava errada, e portanto temos a nossa prova de que o que queríamos provar inicialmente é verdadeiro. De uma forma mais formal, supondo que queremos provar uma proposição P, começamos por assumir $\neg P$ como sendo verdadeiro. Usando premissas que sabemos serem verdadeiras é possível chegar a uma contradição $A \wedge \neg A$. Esta contradição implica que alguma das premissas usadas está errada, e sendo $\neg P$ a única premissa cuja veracidade era desconhecida, fica provado que $\neg P$ é falso, e consequentemente P é verdadeiro.

Exercício 1

Prove que um inteiro n é par se e apenas se n^2 for par (ou, de uma forma um pouco mais formal, $n = 2m \leftrightarrow n^2 = 2p$).

Este exercício introduz também o conceito de 'se e apenas se' (muitas vezes abreviado de iff, do inglês *if and only if*), que implica que na realidade é necessário realizar duas provas (ou seja, provar nos dois sentidos): provar que se n for par então n^2 também é par; e provar que se n^2 for par então n também é par.

Parte 1: $n = 2m \rightarrow n^2 = 2p$ (se um inteiro n for par, n^2 também é par)

Esta prova é simples, e requer apenas uma prova algébrica direta. Sabemos que um número par pode ser representado por $2m$.

Ora, $n^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2\,(2m^2)$. E está então provado que o quadrado de um número par é também um número par.

Parte 2: $n = 2m \leftarrow n^2 = 2p$ (se um quadrado perfeito n^2 for par, então n também é par)

Esta prova torna-se mais simples de realizar usando uma prova por contradição. Começamos então por assumir que n será ímpar, o que significa que pode ser escrito como $2m+1$. Ora, se assim fosse, n^2 poderia ser escrito como $(2m+1)^2$, o que resultaria em $4m^2 + 4m + 1 = 2\,(2m^2 + 2m) + 1$, que é também um número ímpar. Isto contradiz o pressuposto de que n^2 é par. Assim, fica provado que n não pode ser ímpar, e é portanto par[1].

Exercício 2

Na ilha de *Logos* existem dois tipos de habitantes: os *Aleteus*, que dizem sempre a verdade; e os *Pseudos*, que dizem sempre a mentira. Prove que a frase 'Eu sou mentiroso' não pode ser dita por um habitante de *Logos*.

Esta prova pode ser feita recorrendo a uma prova por contradição. Começamos então por assumir o contrário do que queremos provar: a frase foi dita por um habitante de *Logos*. Temos então duas hipóteses: ou se trata de um *Aleteu*, ou de um *Pseudo*. Vamos analisar cada um destes possíveis casos:

Caso 1: No caso de se tratar de um *Aleteu*, sabemos que ele diz sempre a verdade, pelo que a frase 'Eu sou mentiroso' é necessariamente uma falsidade, e portanto contraditória com a sua natureza, o que significa que

[1] Estamos a assumir alguns factos, como o facto de os números inteiros pares e ímpares seres mutuamente exclusivos, que deveriam também ser provados numa prova formal mais completa

chegámos a uma contradição.

Caso 2: No caso de se tratar de um *Pseudo*, sabemos que ele diz sempre a mentira, pelo que a frase 'Eu sou mentiroso' seria verdadeira, e portanto contraditória com a sua natureza, o que significa que chegámos também a uma contradição.

Como existem apenas dois tipos de habitantes em *Logos*, e em ambos os casos chegámos a uma contradição, então podemos concluir que a premissa inicial de que a frase 'Eu sou mentiroso' foi dita por um habitante de *Logos* é falsa, e portanto podemos concluir que a frase não foi dita por um habitante daquela ilha.

1.2 Prova Indutiva

A prova indutiva é das mais importantes em teoria da computação, uma vez que muitas das estruturas usadas possuem uma definição indutiva. Para realizar uma prova indutiva é necessário provar a hipótese a testar para um ou mais casos base e fazer depois a prova para o passo indutivo, isto é, provar que se a hipótese for assumida como verdadeira para um elemento, ela mantém-se verdadeira para o elemento seguinte da estrutura indutiva. Para sistematização, vamos apresentar sempre a prova indutiva em 4 pontos: estrutura de indução (qual a estrutura em que a prova será realizada; como se obtém o elemento seguinte a partir do atual); hipótese (o que queremos provar); caso base (prova para um ou mais casos de base); e passo indutivo (prova para o passo indutivo).

Exercício 1

Prove que $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

- Estrutura de Indução. A estrutura é a dos números inteiros maiores ou igual a 0. O elemento base é o zero, e os elementos seguintes são obtidos somando 1 unidade ao elemento anterior.
- Hipótese. $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$
- Caso Base. Para $n = 0$, podemos calcular $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$. Do outro lado, temos $2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 1$. Obtemos uma igualdade, e a hipótese fica então provada para o caso base.

- Passo Indutivo. Vamos agora provar para qualquer inteiro positivo. Então, vamos assumir a hipótese como verdadeira e tentar fazer a prova para o passo indutivo. Mais formalmente, tentamos provar que

  $$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1 \rightarrow \sum_{i=0}^{n+1} 2^i = 2^{n+2} - 1$$

  .

  Desenvolvendo, temos que

  $$\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = 2^{n+2} - 1$$

  $$\sum_{i=0}^{n} 2^i + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$$

  $$2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$$

  $$2 \times 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$$

  $$2^{n+2} - 1 = 2^{n+2} - 1$$

E obtemos então a igualdade que prova que a hipótese também se mantém para o passo indutivo, ficando assim provado que a hipótese é verdadeira.

Exercício 2 (TPC 2012/13)

Prove que para qualquer número inteiro maior ou igual a zero,

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

- Estrutura de Indução. A estrutura é a dos números inteiros maiores ou igual a zero. O elemento base é 0, e os elementos seguintes são obtidos somando 1 unidade ao elemento anterior.

- Hipótese. $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- Caso Base. Para $n = 0$, podemos calcular $\sum_{i=0}^{0} i^2 = 0^2 = 0$. Do outro lado da igualdade, temos que $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{0(0+1)(2\times0+1)}{6} = 0$. Verifica-se então a hipótese para o caso base.

- Passo Indutivo. Está provado para n = 0. Agora, temos de provar para qualquer número maior do que zero. Então, temos a seguinte pergunta: Se assumirmos que a hipótese é válida para n, será válida também para $n+1$? Dito de uma forma mais formal:
  $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \rightarrow \sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$
  Assumimos então a premissa como verdadeira e tentamos desenvolver a segunda parte de forma a usar a primeira equivalência e encontrar uma igualdade.

$$\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)(n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+3n+4n+6)}{6}$$

$$\frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)] = (n+1)\left(2n^2+7n+6\right)$$

$$(n+1)\left(2n^2+n+6n+6\right) = (n+1)\left(2n^2+7n+6\right)$$

$$2n^2+7n+6 = 2n^2+7n+6$$

Chegamos assim a uma equivalência, o que significa que a prova para o passo indutivo foi realizada com sucesso, e assim toda a prova indutiva foi concluída, podendo-se afirmar que a hipótese é verdadeira.

Exercício 3 (Desafio 2014/15)

Prove que $n\left(n^2+5\right)$ é divisível por 6, para qualquer número inteiro $n \geq 0$

- Estrutura de Indução. A estrutura é a dos números inteiros positivos mais o zero. O elemento base é 0, e os elementos seguintes são obtidos somando 1 unidade ao elemento anterior.
- Hipótese. $n\left(n^2+5\right)$ é divisível por 6, ou seja, $n\left(n^2+5\right) mod 6 = 0$, ou dito de outra forma, $n\left(n^2+5\right) = 6k$
- Caso Base. Para $n = 0$, podemos calcular $n\left(n^2+5\right) = 0\left(0^2+5\right) = 0$. Como zero é divisível por 6 $(0 = 6 \times 0)$, está provado para o caso base.
- Passo Indutivo. Para fazer a prova para o passo indutivo, vamos então assumir que a hipótese é válida para n, e tentar provar se será também válida para $n+1$. Dito de uma forma mais formal:

  $n\left(n^2+5\right) = 6k \rightarrow (n+1)\left((n+1)^2+5\right) = 6j$

  Então, tentamos desenvolver uma das partes, de forma a chegar a uma equivalência verdadeira. Começando por desenvolver a parte direita:

  $(n+1)\left(n^2+2n+1+5\right) = 6j$

  $n\left(n^2+2n+1+5\right) + \left(n^2+2n+1+5\right) = 6j$

  $n\left(n^2+5\right) + n\left(2n+1\right) + \left(n^2+2n+1+5\right) = 6j$

  $6k + n\left(2n+1\right) + \left(n^2+2n+1+5\right) = 6j$

  $6k + 2n^2 + n + n^2 + 2n + 1 + 5 = 6j$

  $6k + 3n^2 + 3n + 6 = 6j$

  $6\left(k+1\right) + n\left(3n+3\right) = 6j$

  $n\left(3n+3\right) = 6j - 6\left(k+1\right)$

  $3n\left(n+1\right) = 6\left(j-k+1\right)$

  Resta-nos agora provar que $3n\left(n+1\right)$ é também divisível por 6. Para isso, podemos optar por realizar nova prova indutiva para esta afirmação, ou então provar que $n\left(n+1\right)$ é um número par (e portanto possível de reescrever como $2m$, o que permitiria reescrever o termo como $3 \times 2m = 6m$, que é divisível por 6). Vamos fazer a prova para esta segunda opção.

  - Estrutura de Indução. Números inteiros positivos mais o zero. O elemento base é 0, e os elementos seguintes são obtidos somando 1 unidade ao elemento anterior.

  - Hipótese. $n\,(n+1) = 2a$
  - Caso Base. Para $n = 0$, podemos calcular $n\,(n+1) = 0\,(0+1) = 0$. Como zero é divisível por 2 ($0 = 2 \times 0$), está provado para o caso base.
  - Passo Indutivo. Está provado para n = 0. Agora, temos de provar para qualquer número maior que zero. Novamente, se assumirmos que a hipótese é válida para n, será válida também para n+1? Dito de uma forma mais formal: $n\,(n+1) = 2a \rightarrow (n+1)\,(n+2) = 2b$

    Desenvolvendo então a parte da direita da implicação:

    $(n+1)\,n + (n+1)\,2 = 2b$

    $2a + (n+1)\,2 = 2b$

    $2\,(a+n+1) = 2b$

  Podemos agora dizer que $n\,(n+1)$ é um número par, pelo que podemos reescrever o termo $3n\,(n+1)$ como $3\times 2m$, ou $6m$, e ficamos então com:

  $6m = 6\,(j-k+1)$

E provamos assim que $n\,(n^2+5)$ é divisível por 6.

Uma outra forma de resolver este exercício passa pelo uso do Paradoxo do Inventor, encontrando uma afirmação mais forte. Observando a sequência de valores gerados para valores crescentes de n, conseguimos encontrar uma nova expressão a provar:

$$n\left(n^2+5\right) = 6 \times \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i(i+1)}{2}+1\right)$$

Vamos então realizar esta prova:

- Estrutura de Indução. A estrutura é a dos números inteiros maiores ou igual a zero. O elemento base é 0, e os elementos seguintes são obtidos somando 1 unidade ao elemento anterior.
- Hipótese. $n\,(n^2+5) = 6 \times \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i(i+1)}{2}+1\right)$
- Caso Base. Para $n = 0$, temos do lado esquerdo da igualdade que $0\,(0^2+5) = 0$. Do lado direito da igualdade, temos $6\times\sum_{i=0}^{0-1}\left(\frac{i(i+1)}{2}+1\right) = 6 \times 0 = 0$. Chegamos a uma igualdade, pelo que podemos afirmar ter provado o caso base.

- Passo Indutivo. Para realizar a prova para o passo indutivo, assumimos novamente que a hipótese é válida para n, tentando provar para $n+1$. Dito de uma forma mais formal: $n\left(n^2+5\right) = 6 \times \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i(i+1)}{2}+1\right) \rightarrow (n+1)\left((n+1)^2+5\right) = 6 \times \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2}+1\right)$

$$(n+1)\left((n+1)^2+5\right) = 6 \times \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2}+1\right)$$

$$(n+1)\left(n^2+2n+6\right) = 6 \times \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2}+1\right)$$

$$n\left(n^2+2n+6\right) + n^2+2n+6 = 6 \times \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2}+1\right)$$

$$n(n^2+5) + 2n^2 + n + n^2 + 2n + 6 = 6 \times \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2}+1\right)$$

$$6 \times \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i(i+1)}{2}+1\right) + 3n^2 + 3n + 6 = 6 \times \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2}+1\right)$$

$$6 \times \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i(i+1)}{2}+1\right) + 6\left(\frac{n^2+n}{2}+1\right) = 6 \times \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2}+1\right)$$

$$6 \times \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i(i+1)}{2}+1\right) + 6\left(\frac{n(n+1)}{2}+1\right) = 6 \times \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2}+1\right)$$

$$6\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i(i+1)}{2}+1\right) + \frac{n(n+1)}{2}+1\right) = 6 \times \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2}+1\right)$$

$$6 \times \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2}+1\right) = 6 \times \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2}+1\right)$$

E com esta equivalência fica assim provada a hipótese.

Exercício 4

Vamos agora ver um exemplo usando grafos como estrutura. Prove que num grafo completo $E = \frac{N(N-1)}{2}$, em que E é o número de arestas e N o número de nós do grafo.

- Estrutura de Indução. A estrutura é a dos grafos completos. O elemento base é grafo com apenas um nó, e nenhuma aresta. Os elementos seguintes são obtidos acrescentando um novo nó a um grafo existente, e as arestas necessárias para ligar a cada um dos nós desse grafo.
- Hipótese. $E = \frac{N(N-1)}{2}$
- Caso Base. Para o grafo simples, com apenas um nó (e nenhuma aresta), podemos calcular $\frac{N(N-1)}{2} = \frac{1(1-1)}{2} = 0$, ficando provada a hipótese para o caso base.
- Passo Indutivo. Vamos agora tentar fazer a prova para um grafo completo com um qualquer número de nós. Vamos assumir que para o grafo com N nós temos $E_N = \frac{N(N-1)}{2}$, e tentar verificar se acrescentando um nó ficamos com $E_{N+1} = \frac{(N+1)(N+1-1)}{2}$.

  Como sabemos, ao acrescentar um novo nó a um grafo com N nós, são necessárias mais N arestas, pelo que $E_{N+1} = E_N + N$.

  Assim, podemos substituir e ficamos com

$$E_N + N = \frac{(N+1)(N+1-1)}{2}$$

$$\frac{N(N-1)}{2} + N = \frac{(N+1)N}{2}$$

$$\frac{N(N-1)}{2} + \frac{2N}{2} = \frac{(N+1)N}{2}$$

$$\frac{N(N-1+2)}{2} = \frac{(N+1)N}{2}$$

$$\frac{N(N+1)}{2} = \frac{(N+1)N}{2}$$

E com esta equivalência fica assim provada a hipótese.

Exercício 5 (TPC 2010/11)

Prove por indução que, para todo o número natural n, $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

- Estrutura de Indução. A estrutura é a dos números inteiros maiores ou igual a 1. O elemento base é 1, e os elementos seguintes são obtidos somando 1 unidade ao elemento anterior.
- Hipótese. $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- Caso Base. Para $n = 1$, podemos calcular $\sum_{i=0}^{n} i = 0 + 1 = 1$. Do outro lado da igualdade, temos que $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1\times 2}{2} = 1$. Verifica-se então a hipótese para o caso base.
- Passo Indutivo. Está provado para n = 1. Agora, temos de provar para qualquer número maior do que um. Se assumirmos que a hipótese é válida para n, será válida também para $n+1$? Dito de uma forma mais formal:
  $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \rightarrow \sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
  Assumimos então a premissa como verdadeira e tentamos desenvolver a segunda parte de forma a usar a primeira equivalência e encontrar uma igualdade.

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Chegamos novamente a uma equivalência, o que significa que a prova para o passo indutivo foi realizada com sucesso, e podemos afirmar que a hipótese é verdadeira.

Exercício 6 (TPC 2011/12)

Prove por indução a seguinte igualdade, em que h é um número inteiro maior ou igual a 1: $\sum_{i=0}^{h-1} 2^i = 2^h - 1$

- Estrutura de Indução. A estrutura é a dos números inteiros maiores ou igual a 1. O elemento base é 1, e os elementos seguintes são obtidos somando 1 unidade ao elemento anterior.
- Hipótese. $\sum_{i=0}^{h-1} 2^i = 2^h - 1$
- Caso Base. Para $h = 1$, podemos calcular $\sum_{i=0}^{1-1} 2^i = 2^0 = 1$. Do outro lado da igualdade, temos que $= 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$. Verifica-se então a hipótese para o caso base.
- Passo Indutivo. Está provado para h = 1. Agora, temos de provar para qualquer número maior do que um. Se assumirmos que a hipótese é válida para h, será válida também para $h + 1$? Mais formalmente:

  $\sum_{i=0}^{h-1} 2^i = 2^h - 1 \rightarrow \sum_{i=0}^{h} 2^i = 2^{h+1} - 1$

  Assumimos então a premissa como verdadeira e tentamos desenvolver a segunda parte, usando a primeira equivalência até encontrar uma igualdade.

$$\sum_{i=0}^{h} 2^i = 2^{h+1} - 1$$

$$\sum_{i=0}^{h-1} 2^i + 2^h = 2^{h+1} - 1$$

$$2^h - 1 + 2^h = 2^{h+1} - 1$$

$$2 \times 2^h - 1 = 2^{h+1} - 1$$

$$2^{h+1} - 1 = 2^{h+1} - 1$$

Chegamos a uma equivalência, o que significa que a prova para o passo indutivo foi realizada com sucesso, e a hipótese é então verdadeira.

Exercício 7 (TPC 2013/14)

Prove por indução que a soma dos primeiros n cubos (ou seja, $1^3+2^3+...+n^3$) é dada por $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

- Estrutura de Indução. A estrutura é a dos números inteiros maiores ou igual a 1. O elemento base é 1, e os elementos seguintes são obtidos somando 1 unidade ao elemento anterior.
- Hipótese. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
- Caso Base. Para $n = 1$, podemos calcular $\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = 1$. Do outro lado da igualdade, temos que $\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$. Verifica-se então a hipótese para o caso base.
- Passo Indutivo. Está provado para n = 1. Agora, temos de provar para qualquer número maior do que um. Se assumirmos que a hipótese é válida para n, será válida também para $n + 1$? Mais formalmente:

  $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \to \sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$

  Assumimos então a premissa como verdadeira e tentamos desenvolver a segunda parte, usando a primeira equivalência até encontrar uma igualdade.

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4}$$

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4}$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4}$$

$$\frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4}$$

$$\frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^2\,(n+2)^2}{4}$$

$$\frac{(n^2 + 4(n+1))(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^2\,(n+2)^2}{4}$$

$$\frac{(n^2 + 4n + 4)(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^2\,(n+2)^2}{4}$$

$$\frac{(n+2)^2(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^2\,(n+2)^2}{4}$$

Chegamos a uma equivalência, o que significa que a prova para o passo indutivo foi realizada com sucesso, e a hipótese é então verdadeira.

Exercício 8 (Exercício 2015/16)

Prove por indução a seguinte igualdade para $n \geq 1$: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

- Estrutura de Indução. A estrutura é a dos números inteiros maiores ou igual a 1. O elemento base é 1, e os elementos seguintes são obtidos somando 1 unidade ao elemento anterior.
- Hipótese. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$
- Caso Base. Para $n = 1$, podemos calcular $\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$. Do outro lado da igualdade, temos que $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Verifica-se então a hipótese para o caso base.
- Passo Indutivo. Está provado para n = 1. Agora, temos de provar para qualquer número maior do que um. Se assumirmos que a hipótese é válida para n, será válida também para $n + 1$? Mais formalmente:

  $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1} \rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n+1}{n+2}$

  Novamente, assumimos a premissa como sendo verdadeira e tentamos desenvolver a segunda parte, usando a primeira equivalência na tentativa de encontrar uma igualdade.

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)(n+1)}{(n+2)(n+1)}$$

$$\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+2)(n+1)}$$

$$\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+2)(n+1)}$$

Chegamos a uma equivalência, o que significa que a prova para o passo indutivo foi realizada com sucesso, e a hipótese é então verdadeira.

Exercício 9 (Desafio 2015/16)

Prove que $n^3 - n$ é divisível por 3 para qualquer número inteiro positivo (ou seja, $n^3 - n = 3k$).

- Estrutura de Indução. A estrutura é a dos números inteiros maiores ou igual a 1. O elemento base é 1, e os elementos seguintes são obtidos somando 1 unidade ao elemento anterior.

- Hipótese. $n^3 - n = 3k$

- Caso Base. Para $n = 1$, podemos calcular $n^3 - n = 1 - 1 = 0$. Do outro lado da igualdade, para $k = 0$, temos que $3 \times 0 = 0$. Verifica-se então a hipótese para o caso base.

- Passo Indutivo. Está provado para n = 1. Agora, temos de provar para qualquer número maior do que um. Se assumirmos que a hipótese é válida para n, será válida também para $n+1$? Mais formalmente:

  $n^3 - n = 3k \rightarrow (n+1)^3 - (n+1) = 3j$

  Novamente, assumimos a premissa como sendo verdadeira e tentamos desenvolver a segunda parte, usando a primeira equivalência na tentativa de encontrar uma igualdade.

$$(n+1)^3 - (n+1) = 3j$$

$$(n+1)(n^2 + 2n + 1) - n - 1 = 3j$$

$$n^3 + 2n^2 + n + n^2 + 2n + 1 - n - 1 = 3j$$

$$n^3 - n + 3n^2 + 3n = 3j$$

$$3k + 3n^2 + 3n = 3j$$

$$3(k + n^2 + n) = 3j$$

Como chegamos a um número que é múltiplo de 3 do lado esquerdo da equação, podemos afirmar que a hipótese é verdadeira. Poderíamos no entanto usar o paradoxo do inventor para tornar a prova mais forte, percebendo o fator de crescimento e provando que $n^3 - n = 3 \times \sum_{i=0}^{n-1}(i^2 + i)$. Tente fazer esta prova.

Exercício Proposto

a) Prove que $11^n - 6$ é divisível por 5 para qualquer número inteiro positivo (ou seja, $11^n - 6 = 5k$).

b) Consegue descobrir uma prova mais forte para usar o paradoxo do inventor?