Contributeurs

ACT-1003 Compléments de mathématiques

aut., cre. Félix Cournoyer

src. Ilie Radu Mitric

1 Rappels

Propriétés des limites

- $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a} k * f(x) = k * \lim_{x\to a} f(x)$
- $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) * \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$
- $\lim_{x\to a}(f(x))^n = (\lim_{x\to a} f(x))^n$
- $\lim_{x\to a} \log_b(x) = \log_b a \iff a > 0$
- $\lim_{x\to\infty} \log_b(x) = \infty \iff b > 1, \quad = -\infty \iff 0 < b < 1$
- $\lim_{x\to 0^+} \log_b(x) = -\infty \iff b > 1, \quad = \infty \iff 0 < b < 1$

Opérations avec les ∞

- $k \pm \infty = \pm\infty$
- $\pm\infty * \pm\infty = \pm\infty$
- $k * \pm\infty = \pm\infty$
- $\frac{k}{\pm\infty} = 0$
- $\frac{k}{0^+} = \infty$, $\frac{k}{0^-} = -\infty$, pour k > 0

2 Fonctions

Caractéristiques de fonctions

Il existe trois caractéristiques pour une fonction donnée : la surjectivité, l'injectivité et la bijectivité.

Lorsque tous les y d'une fonction, c'est-à-dire chaque élément de son image, sont tous reliés à au moins un x, la fonction est dite surjective. Par exemple, la fonction x^2 n'est pas surjective car y=-1 n'a pas de x dans les réels. Si on limite toutefois l'image aux réels positifs, la fonction devient surjective, car chaque y des réels positifs ont au moins un x correspondant.

Lorsque tous les y d'une fonction ne sont reliés qu'à un seul x, la fonction est dite injective. En reprenant x^2, on peut démontrer qu'elle n'est pas injective : $x^2 = (-x)^2$. Toutefois, 2x est injective car il n'existe pas deux x pouvant donner le même y.

La fonction est bijective lorsqu'elle est à la fois bijective et injective, ce qui veut dire que chaque y de la fonction ne possède qu'un seul x. En reprenant 2x, on peut démontrer sa bijectivité : chaque y possède un x dans les réels. La fonction étant aussi injective, elle devient alors bijective.

Racines réelles

On peut identifier les racines réelles à l'aide d'un calcul simple. Si on a la fonction $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$, on doit utiliser la fonction suivante :

$$\pm\frac{Facteurspositifsdea_0}{Facteurspositifsdea_k}$$

Le numérateur serait 24 et le dénominateur serait 1 (car $24x^0$ et $1x^3$). Les racines de la fonction sont donc $\in \{\pm1; \pm2; \pm3; \pm4; \pm6; \pm8; \pm12; \pm24\}$. Il faut ensuite essayer les chiffres de l'ensemble de la fonction. Par exemple, en ayant x=2, la fonction donne 0. En divisant la fonction par (x-2), il reste $x^2 - x - 12$. On peut encore essayer avec les racines du départ et on verrait qu'en ayant x=-3, la fonction donne 0, ou on peut déjà voir qu'il reste (x+3)(x-4).

Fonctions inverses

Pour obtenir une fonction inverse, il faut avoir une fonction bijective sur l'intervalle donné dans l'énoncé. Par la suite, on isole x dans la fonction et on remplace x par $f^{-1}(x)$ et y par x. Pour reprendre l'exemple plus haut :

$f(x) = x^2$

On peut trouver l'inverse lorsque les intervalles sont de $[0, \infty[\to [0, \infty[$ étant donné la bijectivité sur cet intervalle. En isolant x, on a la fonction $\sqrt{y} = x$ et on remplace les variables. On obtient $\sqrt{x} = f^{-1}(x)$ pour les intervalles $[0, \infty[\to [0, y[$.

Fonctions monotones

Il existe quatre types de fonctions monotones.
La première la fonction dite non-décroissante; elle augmente sans arrêt, mais peut avoir un plateau ($f(x_1) \leq f(x_2)$).
Il y a la fonction strictement croissante, qui s'apparente à la première, mais qui ne peut avoir de plateaux ($f(x_1) < f(x_2)$). On peut penser à une fonction linéaire à pente positive pour se l'imaginer. Une fonction qui est stric-

tement croissante est donc aussi non-décroissante. Une fonction en escalier avec une "pente positive" serait par exemple une fonction non-décroissante, mais pas strictement croissante avec ses plateaux.
Il existe aussi la fonction non-croissante, qui se veut une fonction décroissante sur son domaine, mais qui peut avoir un plateau ($f(x_1) \geq f(x_2)$).
Pour finir, il y a aussi la fonction strictement décroissante, où il ne peut y avoir de plateaux ($f(x_1) > f(x_2)$). On peut penser à une fonction linéaire à pente négative pour se l'imaginer. Une fonction qui est strictement décroissante est donc automatiquement une fonction non-croissante.

3 Limites

Les indéterminations

Une limite est dite indéterminée lorsque son résultat est un calcul utilisant les infinis. Les principales indéterminations sont les suivantes :

- $\frac{0}{0}$
- $\pm\frac{\infty}{\infty}$
- $\infty - \infty$
- $0 \cdot \infty$
- 1^∞
- 0^0
- ∞^0

Théorème du sandwich

Nous avons au départ :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$$

Nous avons aussi la fonction h suivante :

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

Le but du théorème est alors de trouver la valeur de la limite de h, comme on peut voir par cette image :

Une limite classique pour démontrer le théorème est $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x}$. Elle représente notre h que nous désirons isoler. Nous devons nous retrouver avec cette limite encadrée de deux fonctions calculables. Ici, la fonction sinus est difficile à calculer à l'infini. Nous sommes toutefois certain que $\sin(x)$ donne un résultat entre -1 et 1 :

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

Nous commencons donc à voir que la fonction centrale ressemble à la fonction h de départ. Nous divisons donc le tout par x :

$$\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Nous retrouvons donc la fraction centrale h. En évaluant à l'infini le sandwich constitué de $\frac{-1}{x}$ et de $\frac{1}{x}$, nous obtenons 0 de part et d'autre du sandwich, ce qui signifie que le milieu doit aussi être égal à 0 pour que l'équation soit vraie.

Limites avec une fonction composée

La fonction composée

La fonction composée correspond à une fonction évaluée dont cette évaluation est utilisée pour une autre fonction. Par exemple, en considérant f comme étant la fonction x^2 et g étant 3x, la fonction (f ∘ g)(x) -à prononcer f rond g- évaluée avec x=5 donne 225. On peut le voir comme f(g(x)).

La fonction composée n'est pas vraiment affectée par les limites. Nous avons :

- $\lim_{x\to a} g(x) = b$
- $\lim_{x\to a}(f \circ g)(x) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = f(b)$

Règle de L'Hospital

En ayant une limite de la forme $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, on peut utiliser la règle de L'Hospital (la dérivée du numérateur et du dénominateur) seulement si la limite donne l'indétermination $0/0$ ou $\pm\frac{\infty}{\infty}$. Visuellement, on obtient ceci lorsque la règle est applicable :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Factorisation des limites

Il est possible d'avoir une limite évaluée à l'infini qui donne $\frac{\infty}{\infty}$, ce qui est indéterminé. Pour évaluer cette limite, on peut passer par la règle de L'Hospital, mais cela peut donner lieu à des dérivations successives et on obtient rien ou la limite est tout simplement difficile à dériver. Il y a toutefois une autre façon qui est assez simple, c'est-à-dire sortir l'élément qui a la puissance la plus élevée. Voici un exemple :

- $\lim_{x\to\infty} \frac{7*x^4-2*x+4}{2*x^5-3*x^3-11} = \frac{\infty}{\infty}$
- On peut toutefois sortir x^4 du numérateur et x^5 du dénominateur.
- $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4*(7-\frac{2}{x^3}+\frac{4}{x^4})}{x^5*(2-\frac{3}{x^2}-\frac{11}{x^5})} = \lim_{x\to\infty} \frac{7-\frac{2}{x^3}+\frac{4}{x^4}}{x*(2-\frac{3}{x^2}-\frac{11}{x^5})}$

De ce qu'on a vu précédemment avec les opérations avec les ∞, le numérateur donne 7 et le dénominateur donne $2*\infty$, ce qui nous amène à la valeur de la limite qui est de 0.

Utilisation du conjugué

Le conjugué

Lorsqu'il y a un binôme de la forme $a-\sqrt{f(x)}$, son conjugué sera $a+\sqrt{f(x)}$. L'inverse est aussi vrai. Multiplier un binôme par son conjugué donne $a^2 - f(x)$.

Nous avons la limite suivante :

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{1-\sqrt{x^2-8}}$$

Lorsque l'on évalue la limite, on obtient $0/0$, ce qui est indéterminé. Nous pouvons toutefois utiliser le conjugué :

- $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{1-\sqrt{x^2-8}} \cdot \frac{1+\sqrt{x^2-8}}{1+\sqrt{x^2-8}}$
- $\lim_{x\to 3} \frac{(x^2-9)(1+\sqrt{x^2-8})}{1-x^2+8} = \lim_{x\to 3} \frac{(x^2-9)(1+\sqrt{x^2-8})}{9-x^2}$
- $-\lim_{x\to 3} 1+\sqrt{x^2-8} = -2$

Le conjugué permet donc de se débarrasser d'un élément, que ce soit au numérateur ou au dénominateur. Dans l'exemple, nous avions exactement le bon terme, mais il faudra parfois utiliser la différence de carrés pour simplifier le tout.

Continuité

Si une limite existe au point a et que celle-ci n'est pas égale à l'infini, la fonction est continue au point a et est égale à la fonction évaluée en ce point. Par exemple, $-1/|x|$, ne serait pas continue en 0. Bien que la limite existe, elle est de $-\infty$, ce qui infirme sa continuité.
Rappel 1 : pour qu'une fonction soit continue, il faut aussi que la fonction évaluée en a soit égale à la valeur de la limite en a. Cela fait juste confirmer l'exemple : f(0) n'avait pas de valeur, alors que la limite est de $-\infty$. Les exemples courants en ce sens sont des fonctions définies par parties.
Rappel 2 : la limite doit être égale de part et d'autres du point a pour être définie. Par exemple, $\lim_{x\to 0} 1/x$ n'est pas définie, car en 0^-, la fonction vaut $-\infty$ et en 0^+, la fonction vaut ∞ et $-\infty \neq \infty$.

Résumé

Il y a deux conditions pour établir la continuité en un point a :

- $\lim_{x\to a} f(x)$ existe
- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, pourvu que f(a) existe et $\neq \pm\infty$

Théorème des valeurs intermédiaires

Avec une fonction continue dans l'intervalle [a, b] et w un nombre situé entre f(a) et f(b), il doit exister au moins un nombre c tel que f(w)=c situé dans [a, b].

4 La dérivée

Formules de binômes et rappels

- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
- $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
- $a^n+b^n = (a+b)(a^{n-1}-an-2b+a^{n-3}b^2+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1}$
- $a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+an-2b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}$
- $S_n = 1+r+r^2+\cdots+r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$
- $S_\infty = \infty$ si r $\geq$ 1, $\varnothing$ si r $\leq$ -1, $\frac{1}{1-r}$ si $-1<r<1$

Définition de la dérivée

La dérivée en un point a est définie par la limite suivante :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Plus h est petit, plus la mesure de la dérivée est précise. Avec un h de 0^+, on obtient le taux de variation instantané, ce qui est la pente exacte au point a. On peut d'ailleurs obtenir les formules de dérivation en utilisant la formule de la définition.
On parle de dérivée à gauche lorsque $h \to 0^-$ et de dérivée à droite lorsque $h \to 0^+$.

Définition de la dérivée

test