Indice

1 Dall'automa a pila alla grammatica di tipo 2

Ripetiamo la versione di automa a pila semplificato vista a lezione scorsa, in questo per riuscire ad accettare dobbiamo arrivare in uno stato finale con solo Z_0 lo stato finale sulla pila.

Dobbiamo trovare un modo di trasformare un automa a pila come definito nella lezione scorsa, in una grammatica. Questa grammatica ha nonterminali della forma $[qAp]$ con $q, p \in Q$ e $A \in V$, e rappresenta:

- q è lo stato in cui si inizia
- p è lo stato in cui si finisce
- e A è il simbolo in cima alla pila all'inizio e alla fine della computazione.

Infatti negli automi come li abbiamo definiti, vale la proprietà per cui ???

Definiamo ora le regole di produzione della grammatica induttivamente come le stringhe riconosciute dalla computazione $[qAp]$:

- base: abbiamo due casi
  - caso 0: il caso più semplice è $[qAq]$, qui l'unica parola riconosciuta è ϵ, quindi è necessaria la regola

    $$[qAq] \to \epsilon$$

    Quindi creo tutte le produzioni della forma

    $$\forall q \in Q, A \in \Gamma \mid [qAq] \to \epsilon$$

  - caso $0'$: il secondo caso più semplice è quello in qui si è nello stato q, si consuma un carattere o nessuno, e questo ci porta nello stato p; cioè $(p, -) \in \delta(q, a, A)$ con $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$. Questo si traduce nella produzione

    $$[qAp] \to a, \qquad a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$$

    Quindi creo tutte le produzioni della forma

    $$\forall q, p \in Q, A \in \Gamma, a \in \Sigma \cup \{\epsilon\} \mid [qAp] \to a$$

- passo: si distinguono due casi
  - caso 1: nei passi intermedi (tranne l'ultimo) la pila è sempre strettamente più alta di quando si è iniziato, questo si traduce in
    $$[qAp] \to [q'Bp']$$
    con $(q', \text{push}(B)) \in \delta(q, \epsilon, A)$ e $(p, \text{pop}) \in \delta(p', \epsilon, B)$. Quindi
    $$\begin{aligned}&\forall q, q', p, p' \in Q, A, B \in \Gamma\\ &\qquad\qquad \mid (q', \text{push}(B)) \in \delta(q, \epsilon, A) \land (p, \text{pop}) \in \delta(p', \epsilon, B)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow [qAp] \to [q'Bp']\end{aligned}$$
  - caso 2: la computazione $[qAp]$ svuota la pila fino alla A inizia e poi continua, allora possiamo scomporre la computazione in due parti, quindi
    $$\forall q, p, r \in Q, A \in \Gamma \mid [qAp] \to [qAr][rAp]$$

Si può dimostrare che

Lemma 1. *$\forall q, p \in Q, A \in \Gamma, w \in \Sigma^* \mid [qAp] \overset{*}{\Rightarrow} w$ sse l'automa M in una configurazione con A in cima alla pila, stato q, dopo aver letto w raggiunge una configurazione in cui il contentuto della pila è lo stesso dell'inizio, lo stato è p e nei passi intermedi la pila non scende mai sotto il livello iniziale.*

Quindi durante una computazione quello che c'è sotto al simbolo in cima alla pina all'inizio della computazione non è rilevante.

Per finire di costruire la grammatica manca di definire l'assioma. Prima di tutto si può notare che visto che l'automa parte nello stato q_0 con Z_0 e basta sulla pila, una stringa w può essere generata solo dalle triple

$$[q_0 Z_0 q_F] \overset{*}{\Rightarrow} w$$

con q_0 iniziale e q_F finale. Quindi definiamo l'insieme dei nonterminali della grammatica V come l'insieme di tutte le triple definite induttivamente sopra unito ad un nuovo nonterminale S tale che

$$\forall q_F \in F \mid S \to [q_0 Z_0 q_F] \in P$$

e questo S così definito è il simbolo iniziale.

2 Forme normali per le grammatiche di tipo 2

Si può vedere che tutte le produzioni generate dalla traduzione da automa a pila a grammatica sono di pochi tipi: variabile a terminale, variabile a variabile e variabile a coppia di variabili. Da questo fatto e dal fatto che i linguaggi riconosciuti dagli automi a pila sono esattamente quelli generati dalle grammatiche di tipo 2, ci rendiamo conto che possiamo restringere di molto il tipo di forma che il lato destro di una produzione di una grammatica CF può assumere. Nel caso di sopra appunto da variabile a terminale, da variabile a variabile e da variabile a coppia di variabili.

Vediamo ora due forme normali. Ogni grammatica può essere trasformata in una di queste forme normali a patto di sacrificare la parola vuota.

2.1 Forma normale di Greibach

In una grammatica in FNG (Forma Normale di Greibach) tutte le produzioi sono della forma

$$A \to aB_1 \dots B_k, \qquad a \in \Sigma, A, B_1, \dots, B_k \in V, k \geq 0$$

Supponiamo di avere la gramamtica

$$\begin{aligned}
&A \to aBB \\
&A \to b \\
&B \to bB \\
&B \to b
\end{aligned}$$

e di aver fatto la trasformazione in automa a pila. In questa forma normale la pila avrà in cima sempre un terminale e quindi si può avere un simbolo di lookahead e scegliere più precisamente la prossima produzione da utilizzare, anche se non si toglie il nondeterminismo (v. $B \to bB$ e $B \to b$). Un altro vantaggio di avere sempre un terminale in cima alla pila è che in questo tipo di automa si possono eliminare le ϵ-mosse.

2.2 Forma normale di Chomsky

Nella FNC (Forma Normale di Chomsky) ci sono solo due tipi di regole

$$\begin{array}{ll} A \to BC & A, B, C \in V \\ A \to a & A \in V, a \in \Sigma \end{array}$$

Questa genera alberi di derivazione binari, salvo sulle foglie; ed è comoda per studiare alcune proprietà combinatorie.

2.2.1 Trasformazione in FNC

Data una grammatica genererica G eseguiamo i seguenti passi (l'ordine è importante) per trasformarla in FNC:

1. eliminazione delle ϵ-produzioni: diciamo che una variabile A è *cancellabile* sse $A \overset{*}{\Rightarrow} \epsilon$. Induttivamente A è cancellabile se

   - banalmente $A \to \epsilon$
   - o se $A \to X_1X_2 \ldots X_k$ e $X_1, X_2, \ldots, X_k$ sono tutti cancellabili.

   Questo può essere definito come una chiusura dove

   $$C_0 = \{A \mid A \to \epsilon\}$$

   e

   $$C_i = C_{i-1} \cup \{A \mid \exists A \to X_1X_2 \ldots X_k \text{ con } \forall i \in 1, \ldots, k \mid X_i \in C_{i-1}\}$$

   Visto che

   $$C_0 \subseteq C_1 \subseteq \cdots \subseteq V$$

   e V è finito, allora esiste un i tale che $C_i = C_{i-1}$.

   Ora sia C l'insisme delle variabili cancellabili, costruiamo una grammatica $G' = \langle V, \Sigma, P', S\rangle$ con P' costituito da tutte le produzioni di P eccetto le ϵ produzioni e per ogni produzione $A \to X_1X_2 \ldots X_k$ con $X_1, X_2, \ldots, X_k \in V \cup \Sigma$ aggiungo a P' le produzioni $A \to X_{i_1}X_{i_2} \ldots X_{i_j}$ tali che $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leq k$ e per $\forall X_l \notin X_{i_1}, \ldots, X_{i_j} \mid X_l \in C$ e $j \geq 1$.

Supponiamo di avere nella gramamtica G che vogliamo trasformare la produzione

$$A \to BCaD$$

e che l'insieme delle variabili cancellabili è $C = \{C, D\}$.
Nella mia gramamtica G' simulo la cancellazione di C e D aggiungendo le produzioni

$$A \to BaD$$
$$A \to BCa$$
$$A \to Ba$$

Supponiamo di avere nella gramamtica G che vogliamo trasformare la produzone

$$A \to CDE$$

e che l'insieme delle variabili cancellabili è $C = \{C, D, E\}$.
Nella mia gramamtica G' simulo la cancellazione di C e D, quindi aggiungo le produzioni

$$A \to CD$$
$$A \to CE$$
$$A \to DE$$
$$A \to C$$
$$A \to D$$
$$A \to E$$

Visto che le produzioni da aggiungere sotto tutti i sottoinsiemi delle variabili cancellabili di un lato destro meno l'insieme vuoto, vengono aggiunge nel caso peggiore un numero esponenziale di produzioni.

2. eliminazione delle produzioni unitarie: una produzione unitaria è una

produzione della forma

$$A \to B, \qquad A, B \in V$$

Costruiamo similmente a prima l'insieme di tutte le coppie di variabili X, Y tali per cui $X \stackrel{+}{\Rightarrow} Y$, cioè per cui vale Abbiamo quindi

$$X \to A_1 \to \cdots \to Y$$

questo processo infatti le catene sono di lunghezza al più $|V|$ senza contenere cicli.

Nella nuova grammatica tolgo tutte le produzioni unitarie e se $X \to \cdots \to Y \to \alpha$ e $\alpha \in \Sigma$ oppure $|\alpha| > 1$, allora aggiungo la produzione $X \to \alpha$.

3. eliminazione simboli inutili: $X \in V \cup \Sigma$ è utile sse $\exists S \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha X \beta \stackrel{*}{\Rightarrow} w \in \Sigma^*$. Questi sono eliminati utilizzando algoritmi sui grafi (chiusura bottom up, chiusura top down, non lo ha spiegato ma ci sono negli appunti del Santini).

4. eliminazione dei terminali: in tutte le produzioni $A \to \alpha$ con $|\alpha| > 1$ si introducono nonterminali per ogni terminale.

   Supponiamo di avere le produzioni

   $$\begin{aligned} A &\to AaabC \\ A &\to bC \\ A &\to bb \end{aligned}$$

   introduciamo i nonterminali X_a e X_b e le regole

   $$\begin{aligned} A &\to AX_aX_aX_bC \\ A &\to X_bC \\ A &\to X_bX_b \\ X_a &\to a \\ X_b &\to b \end{aligned}$$

5. binarizzazione delle produzioni: per ogni produzione $A \to B_1 B_2 \dots B_k$ con $k > 2$, si introducono delle produzioni intermedie

$$
\begin{aligned}
A &\to B_1 Z_1 \\
Z_1 &\to B_2 Z_2 \\
&\vdots \\
Z_{k-2} &\to B_{k-1} B_k
\end{aligned}
$$

Date le produzioni

$$
\begin{aligned}
&S \to aB \\
&S \to bA \\
&A \to a \\
&A \to aS \\
&A \to bAA \\
&B \to b \\
&B \to bS \\
&B \to aBB
\end{aligned}
$$

questa è già priva di ϵ-produzioni, produzioni unitarie e tutti i simboli sono utili.

Ora eliminiamo i terminali e otteniamo

$$
\begin{aligned}
S &\to X_aB \\
S &\to X_bA \\
A &\to a \\
A &\to X_aS \\
A &\to X_bAA \\
B &\to b \\
B &\to X_bS \\
B &\to X_aBB \\
X_a &\to a \\
X_b &\to b
\end{aligned}
$$

ed ora binarizziamo le produzioni

$$
\begin{aligned}
S &\to X_aB \\
S &\to X_bA \\
A &\to a \\
A &\to X_aS \\
A &\to X_bE_1 \\
E &\to AA \\
B &\to b \\
B &\to X_bS \\
B &\to X_aE_2 \\
E_2 &\to BB \\
X_a &\to a \\
X_b &\to b
\end{aligned}
$$