1. Sia $\Sigma = \{a, b\}$ e $L = \{w \in \Sigma^+ \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$, dove $\#_\sigma(w)$ indica il numero di occorrenze del simbolo σ nella stringa w, con $\sigma \in \Sigma$. Siano inoltre $L_a = \{w \in \Sigma^+ \mid \#_a(w) = \#_b(w) + 1\}$ e $L_b = \{w \in \Sigma^+ \mid \#_b(w) = \#_a(w) + 1\}$. Si fornisca una definizione induttiva per le stringhe nel linguaggio L, L_a, L_b. Dalla definizione ricavate una grammatica per il linguaggio L.

Solution: Definiamo per mutua induzione L, L_a e L_b. Caso base:

$$a \in L_a$$
$$b \in L_b$$

Passo induttivo:

- se $w \in L$, allora $aw \in L_a$ e $wa \in L_a$;
- se $w \in L$, allora $bw \in L_b$ e $wb \in L_b$;
- se $w \in L_a$, allora $bw \in L$ e $wb \in L$;
- se $w \in L_b$, allora $aw \in L$ e $wa \in L$.

Da qui possiamo ricavare la grammatica

$$\begin{aligned} L &\to aL_b \mid L_b a \mid bL_a \mid L_a b \\ L_a &\to aL \mid La \mid a \\ L_b &\to bL \mid Lb \mid b \end{aligned}$$

Suggerimento. Ispiratevi all'esempio presentato a lezione per il linguaggio delle parentesi bilanciate, utilizzando affermazioni come '*Una stringa di L inizia con una b seguita da una stringa di L_w, oppure inizia con ...*'. Per ricavare la grammatica potete considerare una variabile per ognuno dei tre linguaggi. Una delle possibili soluzioni vi permetterà di ottenere una grammatica per L presentata a lezione.

2. Ripetete l'esercizio precedente, sostituendo $w \in \Sigma^*$ a $w \in \Sigma^+$ nella definizione dei linguaggio. Osservate che è sufficiente un unico caso base n tutta la definizione ricorsiva.

Solution: Precediamo similmente a sopra per mutua induzione. Caso base:

$$\varepsilon \in L$$

Passo induttivo:

- se $w \in L$, allora $aw \in L_a$ e $wa \in L_a$;
- se $w \in L$, allora $bw \in L_b$ e $wb \in L_b$;
- se $w \in L_a$, allora $bw \in L$ e $wb \in L$;
- se $w \in L_b$, allora $aw \in L$ e $wa \in L$.

Da qui possiamo ricavare la grammatica

$$\begin{aligned} L &\to aL_b \mid L_b a \mid bL_a \mid L_a b \mid \epsilon \\ L_a &\to aL \mid La \\ L_b &\to bL \mid Lb \end{aligned}$$