1. Descrivete e costruite un automa a pila che accetti delle stringhe sull'alfabeto $\{a, b\}$ cha contengono lo stesso numero di a e di b, come ad esempio $aabb$, $abba$, $baba$.

Solution: Costruiremo un automa a pila vuota per questo linguaggio:

$$M = \langle \{q_0, q_a, q_b, q_F\}, \{a, b\}, \{X, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0 \rangle$$

con δ così definita

- all'inizio se si incontra una a si finisce in uno stato q_a e si contano le a, mentre se si incontra una b si finisce in uno stato q_b dove si contano le b

  $$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_a, XZ_0)\}$$
  $$\delta(q_0, b, Z_0) = \{(q_b, XZ_0)\}$$

  ogni nuova lettera incontrata aumenta il numero di X, queste tengono conto delle numero di a – o b – incontrate:

  $$\delta(q_a, a, X) = \{(q_a, XX)\}$$
  $$\delta(q_b, b, X) = \{(q_b, XX)\}$$

- supponiamo di essere nello stato q_a, per ogni b incontrata decrementiamo il numero di X sulla pila

  $$\delta(q_a, b, X) = \{(q_a, \epsilon)\}$$

  e viceversa per q_b

  $$\delta(q_b, a, X) = \{(q_b, \epsilon)\}$$

- nel caso in cui si finiscano le X sulla pila si cambia stato, quindi

  $$\delta(q_a, b, Z_0) = \{(q_b, XZ_0)\}$$
  $$\delta(q_b, a, Z_0) = \{(q_a, XZ_0)\}$$

- quando la pila è vuota si può finire, quindi

  $$\delta(q_a, \epsilon, Z_0) = \{(q_F, \epsilon)\}$$
  $$\delta(q_b, \epsilon, Z_0) = \{(q_F, \epsilon)\}$$

Per come l'automa di sopra è costruito è per forza non deterministico.

Mostriamo le derivazioni per

- $aabb$

$$\begin{aligned}(q_0, aabb, Z_0) &\vdash (q_a, abb, XZ_0)\\ &\vdash (q_a, bb, XXZ_0)\\ &\vdash (q_a, b, XZ_0)\\ &\vdash (q_a, \epsilon, Z_0)\\ &\vdash (q_F, \epsilon, \epsilon)\end{aligned}$$

- $abba$

$$\begin{aligned}(q_0, abba, Z_0) &\vdash (q_a, bba, XZ_0)\\ &\vdash (q_a, ba, Z_0)\\ &\vdash (q_b, a, XZ_0)\\ &\vdash (q_b, \epsilon, Z_0)\\ &\vdash (q_F, \epsilon, \epsilon)\end{aligned}$$

- $baba$

$$\begin{aligned}(q_0, baba, Z_0) &\vdash (q_b, aba, XZ_0)\\ &\vdash (q_b, ba, Z_0)\\ &\vdash (q_b, a, XZ_0)\\ &\vdash (q_b, \epsilon, Z_0)\\ &\vdash (q_F, \epsilon, \epsilon)\end{aligned}$$

2. Descrivete e costruite un automa a pila che accetti il linguaggio

$$\{a^n b^m \mid n \neq m\}$$

Solution: Utilizzando un automa che accetta per pila vuota

$$M = \langle \{q_0, q_1, q_T, q_F\}, \{a, b\}, \{X, Y, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0 \rangle$$

definiamo δ in questo modo:

- inseriamo sopra il simbolo iniziale della pila un altro simbolo

$$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, XYZ_0)\}$$

- per ogni a incontrata aggiungiamo una X alla pila

$$\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, XX)\}$$

- alla prima b incontrata cambiamo stato e incominciamo a decrementare la pila

$$\delta(q_0, b, X) = \{(q_1, \epsilon)\}$$

- nel caso le b fossero in minor numero delle a, ci sposiamo in uno stato finale in cui si svuota la pila

$$\begin{aligned}\delta(q_1, \epsilon, X) &= \{(q_F, \epsilon)\}\\ \delta(q_F, \epsilon, X) &= \{(q_F, \epsilon)\}\\ \delta(q_F, \epsilon, Y) &= \{(q_F, \epsilon)\}\\ \delta(q_F, \epsilon, Z_0) &= \{(q_F, \epsilon)\}\end{aligned}$$

- nel caso le b siano in egual numero alle a – quindi abbiamo raggiunto Y – entriamo in uno stato trappola

$$\delta(q_1, \epsilon, Y) = \{(q_T, Y)\}$$

- nel caso le b siano più delle a consumiamo Y

$$\delta(q_1, b, Y) = \{(q_1, \epsilon)\}$$

e continuamo a consumare b dall'input

$$\delta(q_1, b, Z_0) = \{(q_1, Z_0)\}$$

infine consumiamo Z_0

$$\delta(q_1, \epsilon, Z_0) = \{(q_1, \epsilon)\}$$

3. Sia $\Sigma = \{(,)\}$ un alfabeto i cui simboli sono la parentesi aperta e la parentesi chiusa.
   (a) Descrivete e costruite un automa a pila che riconosca il linguaggi formato da tutte le sequenze di parentesi correttamente bilanciate, come ad esempio (()(()))().

Solution: Questo è molto simile all'automa dell'esercizio uno, con il vincolo che il numero di) non superi mai quello delle (. Costruiamo l'automa che riconosce per pila vuota

$$M = \langle \{q_0\}, \{(,)\}, \{X, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0 \rangle$$

e definiamo δ in modo tale che quando si incontra una parentesi aperta si aggiunge un simbolo sulla pila, e quando la si incontra vuota lo si toglie:

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, \epsilon, Z_0) &= (q_0, \epsilon) \\
\delta(q_0, (, Z_0) &= \{(q_0, XZ_0)\} \\
\delta(q_0, (, X) &= \{(q_0, XX)\} \\
\delta(q_0,), X) &= \{(q_0, \epsilon)\}
\end{aligned}$$

Proviamo a riconoscere la stringa di sopra:

$$\begin{aligned}
(q_0, (()(()))(), Z_0) &\vdash (q_0, ()(()))(), XZ_0) \\
&\vdash (q_0,)(()))(), XXZ_0) \\
&\vdash (q_0, (()))(), XZ_0) \\
&\vdash (q_0, ()))(), XXZ_0) \\
&\vdash (q_0,)))(), XXXZ_0) \\
&\vdash (q_0,))(), XXZ_0) \\
&\vdash (q_0,))(), XXZ_0) \\
&\vdash (q_0,)(), XZ_0) \\
&\vdash (q_0, (), Z_0) \\
&\vdash (q_0,), XZ_0) \\
&\vdash (q_0, \epsilon, Z_0) \\
&\vdash (q_0, \epsilon, \epsilon)
\end{aligned}$$

(b) Risolvete il punto precedente per un alfabeto con due tipi di parentesi, come $\Sigma = \{(,), [,]\}$, nel caso in cui non vi siano vincoli tra i tipi di parentesti (le tonde possono essere contenute tra quadre e viceversa). Esempio [()([])[]], ma non [[][(])()].

Solution: Questo è simile all'automa di sopra, ma utilizza un simbolo in più per le quadre

$$M = \langle \{q_0\}, \{(,)\}, \{Y, X, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0 \rangle$$

con δ

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, \epsilon, Z_0) &= (q_0, \epsilon) \\
\delta(q_0, (, Z_0) &= \{(q_0, XZ_0)\} \\
\delta(q_0, [, Z_0) &= \{(q_0, YZ_0)\} \\
\delta(q_0, (, X) &= \{(q_0, XX)\} \\
\delta(q_0, (, Y) &= \{(q_0, XY)\} \\
\delta(q_0, [, X) &= \{(q_0, YX)\} \\
\delta(q_0, [, Y) &= \{(q_0, YY)\} \\
\delta(q_0,), X) &= \{(q_0, \epsilon)\} \\
\delta(q_0,], Y) &= \{(q_0, \epsilon)\}
\end{aligned}$$

Ad esmepio mostriamo per [()([])[]]

$$\begin{aligned}
(q_0, [()([])[]], Z_0) &\vdash (q_0, ()([])[]], YZ_0) \\
&\vdash (q_0,)([])[]], XYZ_0) \\
&\vdash (q_0, ([])[]], YZ_0) \\
&\vdash (q_0, [])[]], XYZ_0) \\
&\vdash (q_0,])[]], YXYZ_0) \\
&\vdash (q_0,)[]], XYZ_0) \\
&\vdash (q_0, []], YZ_0) \\
&\vdash (q_0,]], YYZ_0) \\
&\vdash (q_0,], YZ_0) \\
&\vdash (q_0, \epsilon, Z_0) \\
&\vdash (q_0, \epsilon, \epsilon)
\end{aligned}$$