1. Considerate il linguaggio

$$\text{DOUBLE}_k = \{ww \mid w \in \{a,b\}^k\}$$

dove $k > 0$ è un intero fissato. È abbastanza facile trovare un fooling set di cardinalità 2^k per questo linguaggio. Riuscite a trovare un fooling set o un extended fooling set di cardinalità maggiore?

Solution: Possiamo definire l'extended fooling set costituito

$$X = \bigcup_{i=0}^{k} \{a,b\}^i \times \{a,b\}^{k-i}$$

Ad esempio definiamo questo insieme per DOUBLE_2, come

$$\begin{aligned}
(\epsilon, aaaa),\\
(a, aaa), (b, bbb),\\
(aa, aa), (ab, ab), (ba, ba), (bb, bb),\\
(aaa, a), (bbb, b),\\
(bbbb, \epsilon)
\end{aligned}$$

Questo contiene il set definito di sopra, e per ogni altra coppia possono avvenire due casi:

- i due elementi x_i e x_j hanno lunghezza diversa, allora per forza $x_i y_j$ non sarà in DOUBLE_k, perché sarà o troppo breve o troppo lungo
- i due elementi avranno x_i e x_j di dimensione uguale, ma saranno per forza diversi, quindi la parola ancora non sarà in DOUBLE_k

Questo insieme ha cardinalità

$$2^k + \sum_{i=0}^{k-1} 2 \cdot 2^i$$

2. Considerate il linguaggio

$$\text{PAL}_k = \{w \in \{a,b\}^k \mid w = w^R\}$$

dove k è un intero fissato. Qual è l'extended fooling set per PAL_k di cardinalità maggiore che riuscite a trovare?

Solution: Questo è definito similmente a quello di sopra ??? Ed ha lo stesso numero di membri

$$2^k + \sum_{i=0}^{k-1} 2 \cdot 2^i$$

3. Considerate il linguaggio

$$K_k = \{w \mid w = x_1 \cdot x_2 \dots x_m \cdot x \mid m > 0, x_1, \dots, x_m, x \in \{a,b\}^k, \exists i, 1 \leq i \leq m, x_i = x\}$$

dove k è un intero fissato. Si può osservare che ogni stringa w di questo linguaggio è la concatenazione di blocchi di lunghezza k, in cui l'ultimo blocco coincide con uno dei blocchi precedenti.

(a) Riuscite a costruire un (extended) fooling set di cardinalità 2^k o maggiore per il linguaggio K_k? *Suggerimento: ispiratevi all'esercizio 1*

Solution: Si può generare il fooling se

$$X = \{(x,x) \mid x \in \{a,b\}^k\}$$

Questo ha dimensione 2^k ed è facile notare che ogni parola xx appartiene a K_k, mentre per due indici diversi xy non appartiene.

(b) Quale è l'informazione principale che un automa nondeterministico può scegliere di ricordare nel proprio controllo a stati finiti durante la lettura di una stringa per riuscire a riconoscere K_k? *Suggerimento: Che "scommessa" può fare l'automa mentre legge la stringa in ingresso e come può verificare tale scommessa leggendo l'ultimo blocco?*

Solution: L'insieme di tutte le possibili stringhe di k elementi nel linguaggio è finito, quindi l'automa si deve ricordare quale sottoinsieme di queste stringhe ha visto, quindi $2^{\{a,b\}^k}$. L'automa poi deve scegliere in uno stato in cui ha visto un certo sottoinsieme di stringhe da k elementi, se la prossima che vede è la finale o se ritornare in sé stesso.

(c) Supponenete di costruire un automa deterministico per riconoscere K_k. Cosa ha necessità di ricordare l'automa nel proprio controllo a stati finiti mentre legge la stringa in input?

(d) Utilizzando il concetto di distinguibilità, dimostrate che ogni automa deterministico che riconosce K_k deve avere almeno 2^{2^k} stati.

4. Considerate il linguaggio

$$J_k = \{w \mid w = x \cdot x_1 \cdot x_2 \dots x_m \mid m > 0, x_1, \dots, x_m, x \in \{a,b\}^k, \exists i, 1 \leq i \leq m, x_i = x\}$$

dove k è un intero fissato. Si può osservare che ogni stringa w di questo linguaggio è la concatenazione di blocchi di lunghezza k, in cui il primo blocco coincide con uno dei blocchi successivi; ogni stringa di J_k si ottiene "rovesciando" una stringa del linguaggio K_k dell'esercizio 3. Supponete di costruire automi a stati finiti per J_k. Valgono ancora gli stessi limiti inferiori per K_n o si riescono a costruire automi più piccoli? Rispondete sia nel caso di automi deterministici sia in quello di automi nondeterministici.

Solution: Non serve più ricordare gli stati visti, ma serve solo ricordare lo stato iniziale e accertarsi che ci sia un percorso che lo ripete, quindi la dimensione dell'automa (deterministico) sarà $2^k \cdot o(k)$.

5. Ispirandovi all'esercizio 3, fornite limiti inferiori per il numero di stati degli automi che riconoscono il seguente linguaggio:

$$E_k = \{w \mid w = x_1 \cdot x_2 \dots x_m \mid m > 0, x_1, \dots, x_m \in \{a, b\}^k, \exists i, j, 0 \leq i < j \leq m, x_i = x_j\}$$

dove k è un intero fissato. Considerate sia il caso deterministico che quello nondeterministico.

Solution: