Proof Search in Propositional Linear Logic via Boolean Constraints Satisfaction

Laurea Triennale in Informatica

Martino D'Adda (964827)

16 Luglio 2024

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Indice

Calcolo dei sequenti

1 Introduzione

Il calcolo dei sequenti è un sistema formale introdotto da G.Gentzen nel 1935 che può essere usato per specificare la ricerca di prove (*proof search*) in logica, basato su:

Calcolo dei sequenti

1 Introduzione

Il calcolo dei sequenti è un sistema formale introdotto da G.Gentzen nel 1935 che può essere usato per specificare la ricerca di prove (*proof search*) in logica, basato su:

- il sequente $\Delta \vdash \Gamma$, di solito interpretato come

$$\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_n \rightarrow \gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_m$$

Calcolo dei sequenti

1 Introduzione

Il calcolo dei sequenti è un sistema formale introdotto da G.Gentzen nel 1935 che può essere usato per specificare la ricerca di prove (*proof search*) in logica, basato su:

- il sequente $\Delta \vdash \Gamma$, di solito interpretato come

$$\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_n \rightarrow \gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_m$$

- la regola, che descrive come manipolare i sequenti
  - descrive la semantica di un connettivo (introduzione e eliminazione):

$$\text{intro}\wedge \frac{\Delta \vdash \phi', \Gamma \qquad \Delta \vdash \phi'', \Gamma}{\Delta \vdash \phi' \wedge \phi'', \Gamma} \qquad \text{elim}\wedge \frac{\Delta, \phi', \phi'' \vdash \Gamma}{\Delta, \phi' \wedge \phi'' \vdash \Gamma}$$

  - descrive come trattare le formule all'interno del sequente (regole strutturali).

Calcolo dei sequenti

1 Introduzione

Il calcolo dei sequenti è un sistema formale introdotto da G.Gentzen nel 1935 che può essere usato per specificare la ricerca di prove (*proof search*) in logica, basato su:

- il sequente $\Delta \vdash \Gamma$, di solito interpretato come

$$\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_n \rightarrow \gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_m$$

- la regola, che descrive come manipolare i sequenti
  - descrive la semantica di un connettivo (introduzione e eliminazione):

$$\text{intro}\wedge \frac{\Delta \vdash \phi', \Gamma \qquad \Delta \vdash \phi'', \Gamma}{\Delta \vdash \phi' \wedge \phi'', \Gamma} \qquad \text{elim}\wedge \frac{\Delta, \phi', \phi'' \vdash \Gamma}{\Delta, \phi' \wedge \phi'' \vdash \Gamma}$$

  - descrive come trattare le formule all'interno del sequente (regole strutturali).
- la dimostrazione, un albero avente come radice il sequente da dimostrare e ottenuto concatenando regole.

Proof search

1 Introduzione

Un **theorem prover** è un programma che, dato un sequente, prova a costruirne la dimostrazione. Nello specifico nella versione bottom-up:

1. si sceglie un *goal*, inizialmente il sequente iniziale;
2. lo si scompone applicando una regola ad una delle formule nel goal;
3. si aggiungono i nuovi goal al working-set;
4. si ripete dal passo 1 fino a che ci sono goal irrisolti.

Focusing

1 Introduzione

Nella maggior parte dei casi ci saranno più regole applicabili ad un sequente, ma non tutte le scelte sono uguali:

- certe sono *invertibili* e possono essere applicate in qualunque ordine senza perdere completezza (non-determinismo don't-care),
- altre richiedono scelte e creano punti di backtracking (non-determinismo don't-know).

Il **focusing** è una tecnica che suddivide la dimostrazione in due fasi che si alternano:

- asincrona: si applicano eagerly solo regole invertibili (non-determinismo don't-care);
- sincrona: ci si concentra su una formula e si continuano ad applicare regole non invertibili (non-determinismo don't-know).

Logica lineare

1 Introduzione

La **logica lineare** nasce dall'analisi delle regole strutturali e dall'abbandono di due di esse:

- *weakening*: nel sequente si possono sempre aggiungere formule;
- *contraction*: due copie della stessa formula possono essere contratte.

Nella logica che ne risulta:

- ogni formula deve essere usata esattamente una volta;
- le formule possono essere viste come **risorse**;
- ogni connettivo ammette due versioni, una additiva ed una moltiplicativa, corrispondenti a due diverse interpretazioni dei connettivi classici;

Degli speciali connettivi, chiamati esponenziali, permettono di localizzare weakening e contrazione.

Gestione delle risorse

Durante il proof searching bottom-up in logica lineare un'ulteriore fonte di non-determinismo è la gestione delle risorse.

$$\otimes_L \dfrac{\otimes_R \dfrac{A \dfrac{}{\phi' \vdash \phi''} \quad A \dfrac{}{\phi' \vdash \phi''}}{\phi', \phi'' \vdash \phi'' \otimes \phi'}}{\phi' \otimes \phi'' \vdash \phi' \otimes \phi''}$$

Le regole moltiplicative richiedono di scegliere un partizionamento corretto del contesto (**splitting**), operazione potenzialmente esponenziale.

Indice

2 Il nostro calcolo

Calcolo dei vincoli

2 Il nostro calcolo

Nel 2001 D.Pym e J.Harland propongono una gestione delle risorse basato su **vincoli booleani**. Questi

- generati durante la proof-search a partire da espressioni associate alle formule;
- due tipi:
  - una certa formula è stata usata nel goal corrente, e non può essere usata altrove;
  - una certa formula non è stata usata, ed è disponibile altrove;

La soddisfacibilità del vincolo rimpiazza lo splitting del contesto

$$\dfrac{\dfrac{A \quad \dfrac{}{\not{\phi}, \phi'' \vdash \phi''}}{\otimes_R \dfrac{\phi', \phi'' \vdash \phi'' \otimes \phi'}{\otimes_L \dfrac{}{\phi' \otimes \phi'' \vdash \phi'' \otimes \phi'}}} \quad A \quad \dfrac{}{\phi', \not{\phi''} \vdash \phi'}}{}$$

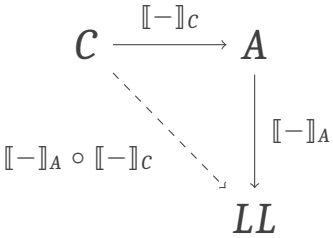
Calcolo dei vincoli cont'd

2 Il nostro calcolo

Rendiamo il calcolo dei vincoli focused, e di questo nuovo calcolo mostriamo la correttezza esibendo una traduzione tale che il diagramma a lato commuta.
Con:

- C il nostro calcolo;
- A il calcolo focused senza constraint;
- LL il calcolo classico della logica lineare.

e $[\![-]\!]$ le rispettive traduzioni.



Implementazione

2 Il nostro calcolo

Per il nostro calcolo abbiamo scritto:

Implementazione

2 Il nostro calcolo

Per il nostro calcolo abbiamo scritto:

- un'implementazione in SWI-Prolog;

Implementazione

2 Il nostro calcolo

Per il nostro calcolo abbiamo scritto:

- un'implementazione in SWI-Prolog;
- un generatore di test in OCaml;

Implementazione

2 Il nostro calcolo

Per il nostro calcolo abbiamo scritto:

- un'implementazione in SWI-Prolog;
- un generatore di test in OCaml;
- una libreria per il testing e il benchmarking in Python.

Implementazione

2 Il nostro calcolo

Per il nostro calcolo abbiamo scritto:

- un'implementazione in SWI-Prolog;
- un generatore di test in OCaml;
- una libreria per il testing e il benchmarking in Python.

Infine l'infrastruttura è stata gestita con Nix.

Prolog

2 Il nostro calcolo

Abbiamo scelto SWI-Prolog per:

- la sua capacità di esprimere le regole in modo dichiarativo;
- il suo supporto per il backtracking;
- le sue librerie per il constraint logic programming (CLP), che offrono una elegante interfaccia verso risolutori di vincoli booleani;
- l'unificazione che permette di gestire in automatico la propagazione degli assegnamenti delle variabili booleane.

Indice

3 Sperimentazione

Risultati

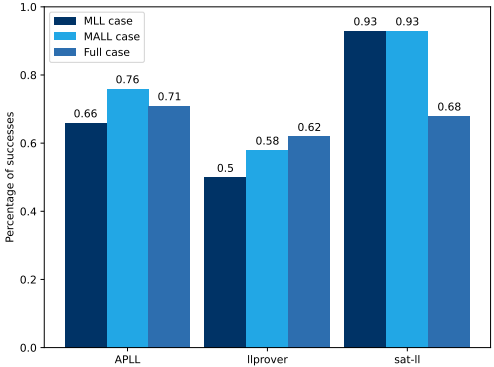
3 Sperimentazione

Il nostro prover è stato confrontato con altri due prover:

- llprover (Prolog, 1997),
- APLL (OCaml, 2019).

Le fonti dei test sono state principalmente due:

- test generati randomicamente (MLL e MALL);
- un dataset di traduzioni dalla logica intuizionista per i test esponenziali.



Conclusione e lavori futuri

3 Sperimentazione

Del calcolo dei vincoli

- abbiamo fornito un nuovo calcolo che utilizzi il focusing, di cui abbiamo dimostrato la correttezza;
- abbiamo fornito un'implementazione in Prolog;
- abbiamo confrontato questa implementazione con altri prover simili e mostrato che nel caso moltiplicativo si ottengono buoni risultati.

Possibili sviluppi futuri possono essere:

- affinamento dell'algoritmo nel caso esponenziale;
- scrittura di altri calcoli e prover simili per altre logiche sotto-strutturali (ILL, BI, ...).

Grazie per l'attenzione.