Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
Tot.	

Terzo appello di Analisi Matematica 1

Ingegneria Elettronica
Politecnico di Milano
A.A. 2011/2012. Prof. M. Bramanti
Tema n°1

Cognome e nome (in stampatello)____________________________________
n° di matricola ____
n° d'ordine (v. elenco) ____________________________________

Con riferimento al D.Lgs. 196/2003 ("Legge sulla privacy"), il docente del corso chiede allo studente il consenso a pubblicare nel sito web del corso i seguenti dati dello studente:
Nome, Cognome, numero di matricola, esito di questa prova scritta. (Barrare e firmare)
❑ Dò il mio consenso ❑ Nego il mio consenso. Firma dello studente______________________________

1. Numeri complessi. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso, scrivendo tutte le soluzioni in forma algebrica e dicendo esplicitamente quante sono:

$$\left|z^4\right| + 2 = 4iz^2$$

2. Limiti di funzioni. Calcolare il seguente limite, riportando i passaggi in modo chiaro e corretto:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+3\sin x) + 4\sqrt{x^3}\log x}{x\left(2\sqrt{x}+e^{-3x}\right)}$$

3. Punti di non derivabilità. Sia

$$f(x) = \left|1-x^2\right|\left(1-x^3\right).$$

Calcolare f' nei punti in cui esiste, e studiare i punti di non derivabilità, classificandoli (punti angolosi, di cuspide, ecc.).

4. Studio di funzione. Studiare la seguente funzione e tracciarne il grafico. E' richiesto in particolare: insieme di definizione, limiti alla frontiera dell'insieme di definizione, eventuali asintoti, studio del segno della derivata prima, determinazione dei punti di massimo e minimo, determinazione o qualche localizzazione dei punti di flesso, *senza* calcolare la derivata seconda.

$$f(x) = \frac{e^{-1/(x+3)}}{x+4}.$$

5. Serie numeriche. Studiare la convergenza semplice e assoluta della seguente serie, giustificando con precisione le proprie conclusioni in base ai criteri studiati.

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{n\log n}{1+n^2}$$

Calcolo integrale

6. Calcolare il seguente integrale definito, *semplificando l'espressione ottenuta*:

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^2}dx.$$

7. Calcolare il seguente integrale indefinito, *semplificando l'espressione ottenuta*:

$$\int \frac{x^3}{x^2+2x+3}dx.$$

8. Integrale generalizzato. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{\log x}{x(1-x^2)}.$$

Stabilire se convergono o divergono i seguenti integrali generalizzati, giustificando le affermazioni fatte:

$$\int_0^{1/2} f(x)dx; \int_1^2 f(x)dx; \int_2^{+\infty} f(x)dx$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+3\sin x) + 4\sqrt{x^3}\log x}{x\left(2\sqrt{x}+e^{-3x}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+3\sin(x)) + 4x^{3/2}\log x}{2x\sqrt{x} + xe^{-3x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+3\sin(x)) + 4x^{3/2}\log x}{2x^{3/2} + x\cdot e^{-3x}}$$

$\left[\frac{0}{0}\right]$ APPLY HOPITAL

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{3\cos(x)}{1+3\sin(x)} + 6\sqrt{x}\log x + \frac{4x^{3/2}}{x}}{3\sqrt{x} + e^{-3x} - 3x^2e^{-3x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{3\cos(x)}{1+3\sin(x)} + 6\sqrt{x}\log x + 4\sqrt{x}}{3\sqrt{x} + e^{-3x} - 3x^2e^{-3x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{3\cos(x) + 6\sqrt{x}\log}{1+3\sin(x)}}{\quad}$$

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
Tot.	

Terzo appello di Analisi Matematica 1

Ingegneria Elettronica

Politecnico di Milano

A.A. 2011/2012. Prof. M. Bramanti

Tema n°2

Cognome e nome (in stampatello)____

n°di matricola ____

n°d'ordine (v. elenco) ____

Con riferimento al D.Lgs. 196/2003 ("Legge sulla privacy"), il docente del corso chiede allo studente il consenso a pubblicare nel sito web del corso i seguenti dati dello studente:

Nome, Cognome, numero di matricola, esito di questa prova scritta. (Barrare e firmare)

❑ Dò il mio consenso ❑ Nego il mio consenso. Firma dello studente____________________________________

1. Numeri complessi. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso, scrivendo tutte le soluzioni in forma algebrica e dicendo esplicitamente quante sono:

$$z^2 + 2\sqrt{2}iz - \left(3 + \sqrt{3}i\right) = 0$$

2. Studio all'infinito. Dare una stima asintotica della funzione $f(x)$ per $x \to +\infty$, stabilendo se ha crescita lineare, sopralineare o sottolineare; quindi stabilire se esiste un asintoto obliquo, in caso affermativo determinandolo.

$$f(x) = \sqrt[4]{3x^4 + 5x^3 + 1}.$$

3. Calcolo di limiti. Calcolare il seguente limite facendo uso anche, se necessario, degli strumenti del calcolo differenziale (teorema di De L'Hospital / formula di Taylor - MacLaurin):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(\cos x) + \frac{1}{2}\left(e^{x^2} - 1\right)}{x^2\left(x + 3x^2\right)^2}.$$

4. Studio di funzione. Studiare la seguente funzione e tracciarne il grafico. E' richiesto in particolare: insieme di definizione, limiti alla frontiera dell'insieme di definizione, eventuali asintoti, studio del segno della derivata prima, determinazione dei punti di massimo e minimo, studio degli eventuali punti di non derivabilità, determinazione o qualche localizzazione dei punti di flesso, *senza* calcolare la derivata seconda.

$$f(x) = \mathrm{Sh}\left(\frac{2 + x}{1 - x^2}\right).$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)+\frac{1}{2}\left(e^{x^2}-1\right)}{x^2\left(x+3x^2\right)^2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{LOG}(\cos(x))+\frac{1}{2}e^{x^2}-\frac{1}{2}}{x^2(x^2+9x^4+6x^3)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{LOG}(\cos(x))+\frac{1}{2}e^{x^2}-1/2}{x^4+9x^6+6x^5} \quad \left[\frac{0}{0}\right] \text{ APPLY HOPITAL}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}+xe^{x^2}}{4x^3+54x^5+30x^4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\quad}{\cos(x)}}{\quad}$$

5. Serie numeriche. Studiare il carattere della seguente serie, giustificando con precisione le proprie conclusioni in base ai criteri studiati.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^n}{(3n)!}$$

Calcolo integrale

6. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos^2 x} dx.$$

7. Calcolare il seguente integrale definito, *semplificando l'espressione ottenuta*:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} x^2 |\log x| dx.$$

8. Funzione integrale. Determinare l'insieme di definizione della seguente funzione integrale, giustificando le proprie conclusioni:

$$F(x) = \int_{\pi}^{x} \frac{\sqrt[3]{t}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt.$$

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
Tot.	

Terzo appello di Analisi Matematica 1

Ingegneria Elettronica

Politecnico di Milano

A.A. 2011/2012. Prof. M. Bramanti

Svolgimento Tema n°1

1. Numeri complessi. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso, scrivendo tutte le soluzioni in forma algebrica e dicendo esplicitamente quante sono:

$$\left|z^4\right| + 2 = 4iz^2$$

Poniamo $z = \rho e^{i\vartheta}$, l'equazione si riscrive:

$$\rho^4 + 2 = 4i\rho^2 e^{2i\vartheta}$$

$$\rho^4 + 2 = 4\rho^2 e^{i\left(2\vartheta + \frac{\pi}{2}\right)}$$

che dà:

$$\begin{cases} \rho^4 - 4\rho^2 + 2 = 0 \\ 2\vartheta + \frac{\pi}{2} = 2k\pi \end{cases}$$

$$\rho^2 = 2\pm\sqrt{2}; \rho = \sqrt{2\pm\sqrt{2}};$$

$$\vartheta = -\frac{\pi}{4} + k\pi;$$

$$z = \sqrt{2\pm\sqrt{2}}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi\right)},$$

quindi le soluzioni sono 4:

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{2+\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}i} = \pm\sqrt{2+\sqrt{2}}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = \pm\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right) = \pm\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right);$$

$$z_{3,4} = \pm\sqrt{2-\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}i} = \pm\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = \pm\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right) = \pm\left(\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right).$$

2. Limiti di funzioni. Calcolare il seguente limite, riportando i passaggi in modo chiaro e corretto:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+3\sin x) + 4\sqrt{x^3}\log x}{x\left(2\sqrt{x} + e^{-3x}\right)}$$

Per $x \to 0^+$,

$$\log(1+3\sin x) \sim 3\sin x \sim 3x;$$

$$4\sqrt{x^3}\log x = 4x^{3/2}\log x = o(x), \text{ perciò Numeratore} \sim 3x.$$

$$\text{Denominatore} \sim x,$$

quindi il limite cercato è 3.

3. Punti di non derivabilità. Sia

$$f(x) = \left|1-x^2\right|\left(1-x^3\right).$$

Calcolare f' nei punti in cui esiste, e studiare i punti di non derivabilità, classificandoli (punti angolosi, di cuspide, ecc.).

$$f(x) = \begin{cases} (1-x^2)(1-x^3) & \text{per } -1 \leq x \leq 1 \\ (x^2-1)(1-x^3) & \text{per } x \leq -1, x \geq 1 \end{cases}$$

Perciò per $-1 < x < 1$

$$f'(x) = -2x\left(1-x^3\right) - 3x^2\left(1-x^2\right) = 5x^4 - 3x^2 - 2x$$

per $x < -1, x > 1$

$$f'(x) = -5x^4 + 3x^2 + 2x.$$

La f è continua ovunque. Studiamo la derivabilità o meno nei punti $x = \pm 1$.
Per $x \to 1^\pm$ $f'(x) \to 0$, perciò esiste $f'(1) = 0$ e la f è derivabile in 1.
Per $x \to -1^\pm$ $f'(x) \to \pm 4$, perciò f non è derivabile in -1, che è un punto angoloso.

4. Studio di funzione. Studiare la seguente funzione e tracciarne il grafico. E' richiesto in particolare: insieme di definizione, limiti alla frontiera dell'insieme di definizione, eventuali asintoti, studio del segno della derivata prima, determinazione dei punti di massimo e minimo, determinazione o qualche localizzazione dei punti di flesso, *senza* calcolare la derivata seconda.

$$f(x) = \frac{e^{-1/(x+3)}}{x+4}.$$

Definita per $x \neq -3, x \neq -4$.
Per $x \to -3^\pm$,

$$f(x) \sim e^{-1/(x+3)} \to \begin{cases} 0^+ & \text{(con tangente orizzontale)} \\ +\infty \end{cases}$$

$x = -3$ asintoto verticale da sinistra.
Per $x \to -4^\pm$,

$$f(x) \sim \frac{e}{x+4} \to \pm\infty$$

$x = -4$ asintoto verticale.

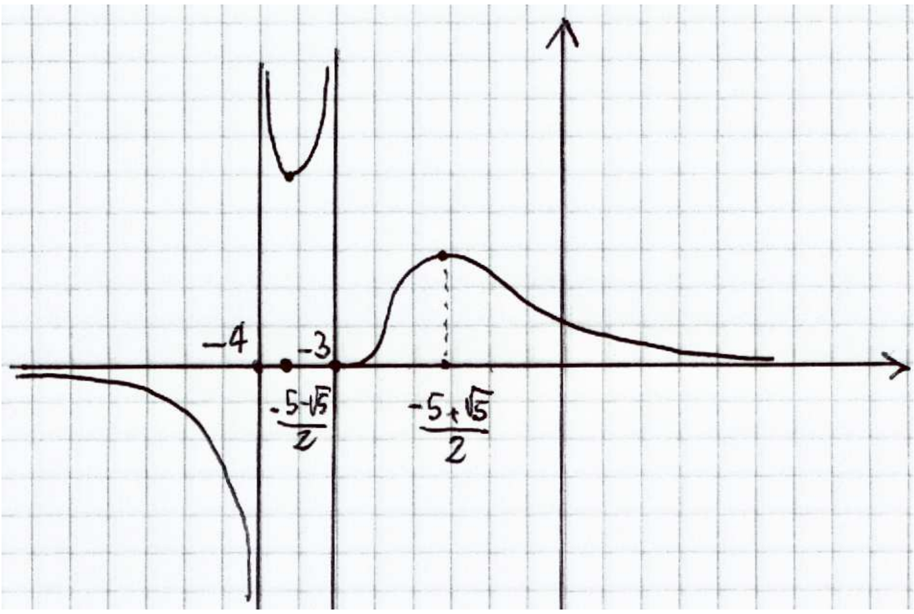
Per $x \to \pm\infty \; f(x) \sim \frac{1}{x} \to 0^{\pm}$.
$y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$.
Calcoliamo, per $x \neq -4, -3$

$$f'(x) = \frac{e^{-1/(x+3)}}{(x+4)^2}\left\{\frac{(x+4)}{(x+3)^2} - 1\right\} = \frac{e^{-1/(x+3)}}{(x+4)^2}\left\{\frac{x+4-x^2-6x-9}{(x+3)^2}\right\} =$$

$$= -\frac{e^{-1/(x+3)}}{(x+4)^2}\left\{\frac{x^2+5x+5}{(x+3)^2}\right\} \geq 0 \text{ per } x^2+5x+5 \leq 0$$

$$\frac{-5-\sqrt{5}}{2} \leq x < -3; -3 < x \leq \frac{-5+\sqrt{5}}{2}$$

Quindi: $x = \frac{-5-\sqrt{5}}{2}$ punto di minimo relativo;
$x = \frac{-5+\sqrt{5}}{2}$ punto di massimo relativo.
Dev'esserci almeno un punto di flesso in un certo $\alpha \in \left(-3, \frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right)$.
Grafico qualitativo:



5. Serie numeriche. Studiare la convergenza semplice e assoluta della seguente serie, giustificando con precisione le proprie conclusioni in base ai criteri studiati.

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{n\log n}{1+n^2}$$

Serie a segni alterni. Poiché

$$\frac{n\log n}{1+n^2} \sim \frac{\log n}{n} > \frac{1}{n}$$

per confronto con la serie armonica la serie diverge assolutamente. Per studiare la convergenza semplice applichiamo il criterio di Leibniz. Occorre verificare che

$$a_n = \frac{n\log n}{1+n^2}$$

è monotona decrescente. Consideriamo quindi

$$f(x) = \frac{x\log x}{1+x^2}$$

e calcoliamo

$$f'(x) = \frac{(\log x + 1)(1+x^2) - 2x^2\log x}{(1+x^2)^2} = \frac{1 + x^2 + \log x - x^2\log x}{(1+x^2)^2}$$

(per $x \to +\infty$) $$\sim \frac{-x^2\log x}{x^4} = \frac{-\log x}{x^2} < 0.$$

Quindi $f'(x) < 0$ definitivamente per $x \to +\infty$, f è definitivamente decrescente, a_n è definitivamente decrescente. Pertanto la serie converge semplicemente.

Calcolo integrale

6. Calcolare il seguente integrale definito, *semplificando l'espressione ottenuta*:

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^2}dx.$$

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^2}dx = [x = 2\text{Sh}t; dx = 2\text{Ch}t dt]$$

$$= \int_{\text{SettSh}1}^{\text{SettSh}2} \frac{\sqrt{4+4\text{Sh}^2 t}}{4\text{Sh}^2 t} 2\text{Ch}t dt = \int_{\text{SettSh}1}^{\text{SettSh}2} \frac{4\text{Ch}^2 t}{4\text{Sh}^2 t} dt =$$

$$= \int_{\text{SettSh}1}^{\text{SettSh}2} \left(\frac{\text{Ch}t}{\text{Sh}^2 t}\right)\text{Ch}t dt = (\text{per parti}) = \left[-\frac{1}{\text{Sh}t}\text{Ch}t\right]_{\text{SettSh}1}^{\text{SettSh}2} - \int_{\text{SettSh}1}^{\text{SettSh}2} -\frac{1}{\text{Sh}t}\cdot \text{Sh}t dt =$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{2} + \text{SettSh}2 - \text{SettSh}1.$$

7. Calcolare il seguente integrale indefinito, *semplificando l'espressione ottenuta*:

$$\int \frac{x^3}{x^2+2x+3}dx.$$

$$\int \frac{x^3}{x^2+2x+3}dx = \int \left(x - 2 + \frac{x+6}{x^2+2x+3}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx + \int \frac{5}{(x+1)^2+2}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{2}\log\left(x^2+2x+3\right) + \frac{5}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + c.$$

8. Integrale generalizzato. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{\log x}{x(1-x^2)}.$$

Stabilire se convergono o divergono i seguenti integrali generalizzati, giustificando le affermazioni fatte:

$$\int_0^{1/2} f(x)dx; \int_1^2 f(x)dx; \int_2^{+\infty} f(x)dx$$

Per $x \to 0$, $f(x) \sim \frac{\log x}{x}$; ora:

$$\int_\varepsilon^{1/2} \frac{\log x}{x}dx = \left[\frac{1}{2}\log^2 x\right]_\varepsilon^{1/2} = \frac{1}{2}\log^2 2 - \frac{1}{2}\log^2 \varepsilon \to -\infty.$$

Quindi il primo integrale diverge, per il criterio del confronto asintotico.

Per $x \to 1$, $f(x) \sim \frac{x-1}{(1-x)2} = -\frac{1}{2}$, limitata. Quindi il secondo integrale converge.

Per $x \to +\infty$, $f(x) \sim -\frac{\log x}{x^3}$ e $\left|\frac{\log x}{x^3}\right| \leq \frac{1}{x^2}$, integrabile a $+\infty$. Per il criterio del confronto e del confronto asintotico, il terzo integrale converge.

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
Tot.	

Terzo appello di Analisi Matematica 1

Ingegneria Elettronica
Politecnico di Milano

A.A. 2011/2012. Prof. M. Bramanti

Svolgimento Tema n°2

1. Numeri complessi. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso, scrivendo tutte le soluzioni in forma algebrica e dicendo esplicitamente quante sono:

$$z^2 + 2\sqrt{2}iz - \left(3 + \sqrt{3}i\right) = 0$$

$$z = -\sqrt{2}i \pm \sqrt{-2 + 3 + \sqrt{3}i} = -\sqrt{2}i \pm \sqrt{1 + \sqrt{3}i}.$$

$$\sqrt{1 + \sqrt{3}i} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{e^{i\frac{\pi}{3}}} = \pm\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right).$$

$$z = -\sqrt{2}i \pm \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right) = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{2}} + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} - i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}} - i\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

2. Studio all'infinito. Dare una stima asintotica della funzione $f(x)$ per $x \to +\infty$, stabilendo se ha crescita lineare, sopralineare o sottolineare; quindi stabilire se esiste un asintoto obliquo, in caso affermativo determinandolo.

$$f(x) = \sqrt[4]{3x^4 + 5x^3 + 1}.$$

$$f(x) = \sqrt[4]{3}\,x \cdot \sqrt[4]{1 + \frac{5}{3x} + \frac{1}{3x^4}} \sim \sqrt[4]{3}\,x \to +\infty$$

con crescita lineare. Inoltre:

$$f(x) = \sqrt[4]{3}\,x \cdot \sqrt[4]{1 + \frac{5}{3x} + \frac{1}{3x^4}} = \sqrt[4]{3}\,x\left(1 + \frac{1}{4}\left(\frac{5}{3x} + \frac{1}{3x^4} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) =$$

$$= \sqrt[4]{3}\,x + \frac{5\sqrt[4]{3}}{12} + o(1),$$

perciò la funzione ha asintoto obliquo

$$y = \sqrt[4]{3}\,x + \frac{5\sqrt[4]{3}}{12}.$$

3. Calcolo di limiti. Calcolare il seguente limite facendo uso anche, se necessario, degli strumenti del calcolo differenziale (teorema di De L'Hospital / formula di Taylor - MacLaurin):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)+\frac{1}{2}\left(e^{x^2}-1\right)}{x^2\left(x+3x^2\right)^2}.$$

$$\log(\cos x)=\log\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o\left(x^4\right)\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o\left(x^4\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o\left(x^4\right)\right)^2+o\left(x^4\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2\right)^2+o\left(x^4\right)=-\frac{1}{2}x^2+x^4\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{8}\right)+o\left(x^4\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(e^{x^2}-1\right)=\frac{1}{2}\left(1+x^2+\frac{1}{2}\left(x^2\right)^2+o\left(x^4\right)-1\right)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4+o\left(x^4\right)$$

$$\text{Num}=-\frac{1}{2}x^2+x^4\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{8}\right)+o\left(x^4\right)+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4+o\left(x^4\right)=$$

$$=x^4\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)+o\left(x^4\right)\sim\frac{x^4}{6}.$$

$$\text{Den}\sim x^2(x)^2=x^4.$$

E il limite cercato è $\frac{1}{6}$.

4. Studio di funzione. Studiare la seguente funzione e tracciarne il grafico. E' richiesto in particolare: insieme di definizione, limiti alla frontiera dell'insieme di definizione, eventuali asintoti, studio del segno della derivata prima, determinazione dei punti di massimo e minimo, studio degli eventuali punti di non derivabilità, determinazione o qualche localizzazione dei punti di flesso, *senza* calcolare la derivata seconda.

$$f(x)=\text{Sh}\left(\frac{2+x}{1-x^2}\right).$$

Definita per $x\neq\pm1$.
Per $x\to\pm\infty$, $f(x)\sim\frac{2+x}{1-x^2}\sim-\frac{1}{x}\to 0^{\mp}$.
$y=0$ asintoto orizzontale per $x\to\pm\infty$.
Per $x\to 1^{\pm}$, $\frac{2+x}{1-x^2}\sim\frac{3}{2(1-x)}\to\mp\infty$, $f(x)\to\mp\infty$.
$x=1$ asintoto verticale.
Per $x\to -1^{\pm}$, $\frac{2+x}{1-x^2}\sim\frac{1}{2(1+x)}\to\pm\infty$, $f(x)\to\pm\infty$.
$x=-1$ asintoto verticale.

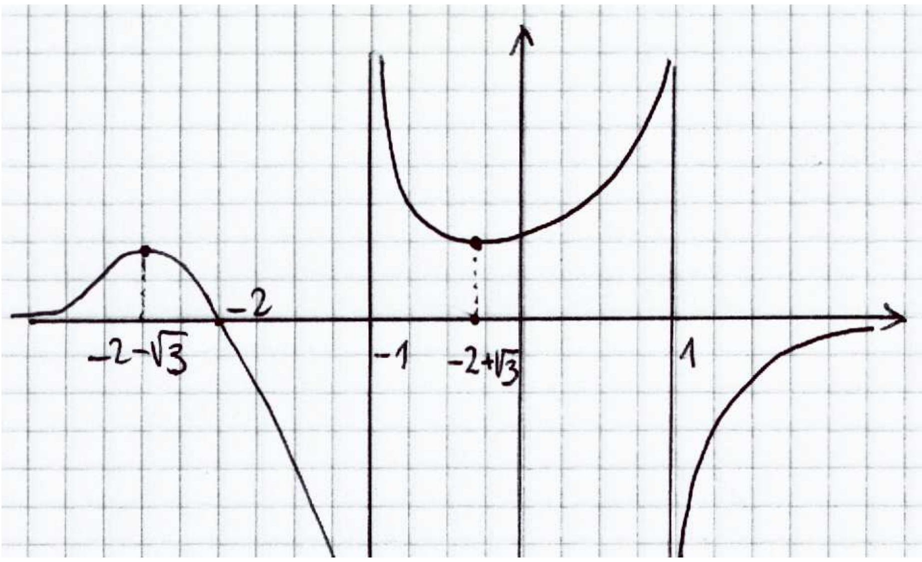
Calcoliamo, per $x \neq \pm 1$,

$$f'(x) = \mathrm{Ch}\left(\frac{2+x}{1-x^2}\right) \cdot \frac{(1-x^2)+2x(2+x)}{(1-x^2)^2} = \mathrm{Ch}\left(\frac{2+x}{1-x^2}\right) \cdot \frac{x^2+4x+1}{(1-x^2)^2} \geq 0 \text{ per}$$

$$x^2+4x+1 \geq 0 \text{ per:}$$

$$x \leq -2-\sqrt{3}; -2+\sqrt{3} \leq x < 1; x > 1.$$

$x = -2-\sqrt{3}$ punto di massimo relativo;
$x = -2+\sqrt{3}$ punto di minimo relativo.
Inoltre: $f(-2) = 0$. La funzione deve avere almeno un punto di flesso in $x = \alpha < -2-\sqrt{3}$.
Grafico qualitativo:



5. Serie numeriche. Studiare il carattere della seguente serie, giustificando con precisione le proprie conclusioni in base ai criteri studiati.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^n}{(3n)!}$$

Serie a termini positivi. Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!(n+1)^{n+1}}{(3n+3)!} \cdot \frac{(3n)!}{n!n^n} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim \frac{n^2 e}{(3n)^3} = \frac{e}{27n} \to 0,$$

perciò la serie converge.

Calcolo integrale

6. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos^2 x} dx.$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos^2 x} dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{2+\cos^2 x} dx = [\cos x = t; -\sin x dx = dt]$$

$$= \int \frac{t^2-1}{2+t^2} dt = \int \left(1 - \frac{3}{2+t^2}\right) dt = t - \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + c =$$

$$= \cos x - \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\cos x}{\sqrt{2}}\right) + c.$$

7. Calcolare il seguente integrale definito, *semplificando l'espressione ottenuta*:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} x^2 |\log x| dx.$$

Calcoliamo prima l'integrale indefinito:

$$\int x^2 \log x dx = (\text{per parti}) = \frac{x^3}{3}\log x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3}\log x - \int \frac{x^2}{3} dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\log x - \frac{x^3}{9} + c.$$

Ora:
$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} x^2 |\log x| dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} -x^2 \log x dx + \int_{1}^{2} x^2 \log x dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}\log x + \frac{x^3}{9}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \left[\frac{x^3}{3}\log x - \frac{x^3}{9}\right]_{1}^{2} =$$

$$= \frac{1}{9} - \frac{1}{24}\log 2 - \frac{1}{72} + \frac{8}{3}\log 2 - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = -\frac{49}{72} + \frac{21}{8}\log 2.$$

8. Funzione integrale. Determinare l'insieme di definizione della seguente funzione integrale, giustificando le proprie conclusioni:

$$F(x) = \int_{\pi}^{x} \frac{\sqrt[3]{t}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt.$$

La funzione integranda

$$f(t) = \frac{\sqrt[3]{t}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

è illimitata in un intorno dei punti: $t = 0$ e $\frac{t}{2} = k\pi,$ cioè $t = 2k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$.

Per $t \to 0, f(t) \sim \frac{\sqrt[3]{t}}{\frac{t}{2}} = \frac{2}{t^{2/3}}$, integrabile perché $2/3 < 1$.

Per $t \to 2k\pi$ con $k \neq 0,$ il numeratore è diverso da zero mentre il denominatore si annulla del prim'ordine, quindi non è integrabile. Conclusione: poiché l'estremo fisso di integrazione è il punto π, l'insieme di definizione di F è l'intervallo

$$(-2\pi, 2\pi).$$