$+$ $\times$

$-$ $\div$

# SUCCESSIONI

**SUCCESSIONI: sequenza ordinata di infiniti numeri detti termini della successione in cu è possibile identificare unicamente chi è il primo, il secondo è e così via**

FUNZIONE $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

DALL'INSIEME DEI NUMERI NATURALI $\longrightarrow$ ALL'INSIEME DEI NUMERI REALI

SI CALCOLA SOLO PER VALORI NATURALI DELLA VARIABILE INDIPENDENTE $\longrightarrow$ INDICATA N

$f(x) \longrightarrow a_N$

$a_N = 2N-3$

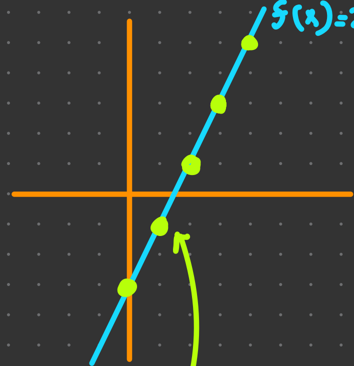
PRIMO VALORE $a_0$: $\boxed{-3}$

$a_1$: $\boxed{-1}$

$a_2$: $\boxed{1}$

$a_N = 2N-3$

$f(x) = 2x-3$



INSIEME DISCRETO DI PUNTI

X PUO' ASSUME QUALSIASI VALORE REALE $\mathbb{R}$

N PUO' ASSUMERE SOLO VALORI NATURALI

UNA SUCCESSIONE $\{a_n\}$ SI DICE

- LIMITATA INFERIORMENTE SE ESISTE $m \in \mathbb{R}$ TALE CHE

$$\underbrace{a_n \geq m}_{\text{TUTTI I TERMINI } a_n \text{ SONO} \geq \text{ DI UN CERTO NUMERO}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- LIMITATA SUPERIORMENTE SE ESISTE $M \in \mathbb{R}$ TALE CHE

$$a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- LIMITATA SE ESISTONO $m \in \mathbb{R}$ E $M \in \mathbb{R}$ TALI CHE

$$m \leq a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

* $a_n = \left\{ \frac{1}{n+1} \right\}$ È LIMITATA

$a_0 = 1, \ a_1 = \frac{1}{2}, \ a_2 = \frac{1}{3} \ \ldots$

$$0 < a_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

* $a_n = \{ n \}$ È INFERIORMENTE LIMITATA $0, 1, 2 \ldots$

MA NON SUPERIORMENTE

- MONOTONA CRESCENTE SE $\underbrace{a_n \leq a_{n+1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

  CIASCUN TERMINE DELLA SUCCESSIONE È $\leq$ DEL TERMINE SUCCESSIVO

- MONOTONA STRETTAMENTE CRESCENTE SE $a_n < a_{n+1}$

  $a_n = \{n\}$ $0, 1, 2, 3 \ldots$

- MONOTONA DECRESCENTE SE $a_n \geq a_{n+1}$
- MONOTONA STRETTAMENTE DECRESCENTE SE $a_n > a_{n+1}$

  $a_n = \left\{\frac{1}{1+n}\right\}$ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots$

.............

UNA SUCCESSIONE $\{a_n\}$ ACQUISTA UNA CERTA PROPRIETÀ DEFINITIVAMENTE SE ESISTE $N \in \mathbb{N}$ TALE CHE $a_n$ SODDISFA QUELLA PROPRIETÀ PER OGNI $n \geq N$

I TERMINI DELLA SUCCESSIONE GODONO DI QUELLA PROPRIETÀ DA UN CERTO TERMINE IN POI

$a_n = \{2n-3\}$ $\quad \underbrace{-3}_{a_0}, \underbrace{-1}_{a_1}, \underbrace{1}_{a_2}, \underbrace{3}_{a_3},$ $a_n$ È DEFINITIVAMENTE POSITIVA

DA $a_2$ IN AVANTI I TERMINI SONO POSITIVI

# 2. LIMITE DI SUCCESSIONI

NON HA SENSO FARE IL LIM CHE TENDE AD UN NUMERO FINITO

HA SENSO SOLO $n \to +\infty$

CHE COMPORTAMENTO HA LA SUCCESSIONE AL TENDERE DI $n$ A $+\infty$

## 4 POSSIBILITÀ

1) FISSATO QUALUNQUE $M \in \mathbb{R}$, $a_n > M$ <u>DEFINITIVAMENTE</u>
OVVERO $\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE $\forall n > n_0$ $a_n > M$

LA SUCCESSIONE DIVERGE A $+\infty$ $\lim_n a_n = +\infty$

$\lim_n n^3 = +\infty$ $n^3$ DIVERGE A $+\infty$

2) FISSATO QUALUNQUE $M \in \mathbb{R}$, $a_n < M$ <u>DEFINITIVAMENTE</u>
OVVERO $\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists n_0 \in \mathbb{R}$ TALE CHE $\forall n < n_0$ $a_n < M$

LA SUCCESSIONE DIVERGE A $-\infty$ $\lim_n a_n = -\infty$

$\lim_n (-n^3) = -\infty$ $-n^3$ DIVERGE A $-\infty$

3) SE ESISTE UN NUMERO REALE $l$ CHE FISSATO UN QUALUNQUE NUMERO REALE $\varepsilon > 0$ $|a_n - l| < \varepsilon$ DEFINITIVAMENTE

DA UN CERTO TERMINE IN AVANTI I TERMINI DELLA SUCCESSIONE DISTANO DA $l$ MENO DI $\varepsilon$

LA SUCCESSIONE CONVERGE $\lim_{n} a_n = l$

$\lim_{n} \frac{1}{n+1} = 0$ $\quad \frac{1}{n+1}$ CONVERGE

$\boxed{\text{SE } l = 0 \ \left(\lim_{n} a_n = 0\right) \text{ LA SUCCESSIONE SI DICE INFINITESIMA}}$

4) SE NON SI VERIFICA NESSUNO DEI CASI PRECEDENTI $\lim_{n} a_n$ NON ESISTE E LA SUCCESSIONE SI DICE INDETERMINATA

$a_n = (-1)^n \quad \lim_{n \to +\infty} a_n$ NON ESISTE

---

# 3. SERIE NUMERICHE

DATA UNA SUCCESSIONE DI NUMERI REALI $\{a_n\}$ SI CHIAMA SERIE DEI TERMINI $a_n$ LA SOMMA DEGLI INFINITI TERMINI DELLA SUCCESSIONE

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

$S_0 = a_0$

$S_1 = a_0 + a_1$

$S_2 = a_0 + a_1 + a_2$

......

$S_n = a_0 + a_1 \dots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

SE ESISTE IL LIMITE DI $S_n$ PER $n \to +\infty$ ALLORA

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n} S_n = \lim_{n} \sum_{k=0}^{n} a_n$$

COMPORTAMENTO DI $\lim_N = S_N$

1) SE $\lim_N S_N = l \in \mathbb{R}$ SI DICE CHE LA SERIE CONVERGE A $l$

2) SE $\lim_N S_N = +\infty$ SI DICE CHE LA SERIE DIVERGE A $+\infty$

3) SE $\lim_N S_N = -\infty$ SI DICE CHE LA SERIE DIVERGE A $-\infty$

4) SE $\lim_N S_N$ NON ESISTE SI DICE CHE LA SERIE È INDETERMINATA O IRREGOLARE

---

# SERIE GEOMETRICHE E TELESCOPICHE, CRITERI DI CONVERGENZA

SERIE GEOMETRICA: $\sum_{N=0}^{\infty} q^N$ CON $q \in \mathbb{R}$

$$S_N = 1 + q + q^2 + \dots q^N = \begin{cases} \frac{1-q^{N+1}}{1-q} & \text{SE } q \neq 1 \\ N+1 & \text{SE } q = 1 \end{cases}$$

CONVERGERGE? DIVERGE? IRREGOLARE?

FACCIO IL LIMITE

$$\lim_N S_N = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{SE } |q|<1 \\ +\infty & \text{SE } q \geq 1 \\ \text{NON ESISTE} & \text{SE } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ è } \begin{cases} \text{CONVERGENTE (CON SOMMA } \frac{1}{1-q}\text{)} & \text{SE } |q|<1 \\ \text{DIVERGENTE} & \text{SE } q \geq 1 \\ \text{INDETERMINATA} & \text{SE } q \leq -1 \end{cases}$$

NELLE SERIE GEOMETRICHE È SUFFICENTE OSSERVARE q PER STABILIRE SE LA SERIE CONVERGE, DIVERGE O SE NON ESISTE

## SERIE DI MENGOLI

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \underbrace{1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}}_{a_1} + \underbrace{\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}}_{a_2} + \underbrace{\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}}_{a_3} \dots + \underbrace{\cancel{\tfrac{1}{n-1}} - \cancel{\tfrac{1}{n}}}_{a_{n-1}} + \underbrace{\cancel{\tfrac{1}{n}} - \tfrac{1}{n+1}}_{a_n} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

SOPRAVVIVONO SOLO IL PRIMO E ULTIMO TERMINE

$$\lim_n S_n = \lim_{n \to +\infty} \left[1 - \frac{1}{n+1}\right] = 1$$

LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ <u>CONVERGE</u>

E LA SOMMA È 1

UN'ALTRA SERIE TELESCOPICA:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \qquad a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$$

$$S_n = \ln\cancel{(2)} - \underbrace{\ln\cancel{(1)}}_{=0} + \ln\cancel{(3)} - \ln\cancel{(2)} + \ln\cancel{(4)} - \ln\cancel{(3)} + \dots \ln(n+1) - \ln\cancel{(n)}$$

$$\longrightarrow +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \text{ DIVERGE}$$

LA SERIE GEOMETRICHE E LE SERIE TELESCOPICHE SONO SEMPLICI DA CARETTERIZZARE POICHE' POSSIAMO RICAVARE UNA FORMULA CHIUSA PER $S_N$

CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHE' UNA SERIE CONVERGA E' CHE IL TERMINE GENERALE $a_N$ SIA INFINITESIMO (OVVERO $a_N \to 0$ PER $N \to +\infty$)

[TENDA A ZERO NEL MOMENTO IN CUI $N \to +\infty$]

CRITERI CHE FORNISCONO DELLE CONDIZIONI SUFFICENTI PER LA CONVERGENZA

- CRITERIO DEL RAPPORTO
- CRITERIO DELLA RADICE
- CRITERIO DEL CONFRONTO
- CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

- CRITERIO DELL' ASSOLUTA CONVERGENZA
- CRITERIO DI LEIBNIZ

SERIE A TERMINI DI SEGNO VARIABILE

# CRITERIO DEL RAPPORTO E PROPRIETÀ UTILI

## PROPRIETÀ DELLE SERIE

SIANO $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ E $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ DUE SERIE NUMERICHE CONVERGENTI E SIA $k \in \mathbb{R}$ ALLORA

1) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} k a_n = k \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rightarrow$ SE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ CONVERGE, ANCHE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ CONVERGE (STESSA COSA PER LA DIVERGENZA)

UNA SERIE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ A TERMINI DEFINITIVAMENTE NON NEGATIVI (CIOÈ CON $a_n \geq 0$ DEFINITAMENTE) CONVERGE O DIVERGE A $+\infty$ NON PUÒ ESSERE INDETERMINATA!

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3^{-n}}{n^2 - 5}$ $\cdot\, a_n \geq 0$ DEFINITIVAMENTE QUINDI LA SERIE CONVERGE O DIVERGE A $+\infty$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2 + 3^{-n}}{n^2 - 5} = 1 \Rightarrow \underbrace{\text{LA SERIE NON CONVERGE}}_{\text{DIVERGE A } +\infty}$

# CRITERIO DEL RAPPORTO

⚠ CONTROLLARE ALL'INIZIO!

SIA $a_n > 0$ DEFINITIVAMENTE E SUPPONIAMO CHE $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$

- SE $\ell < 1$ ALLORA $\sum a_n$ CONVERGE
- SE $\ell > 1$ ALLORA $\sum a_n$ DIVERGE
- SE $\ell = 1$ ALLORA TUTTO E' POSSIBILE → BISOGNA CAMBIARE CRITERIO

ES 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2015}}{3^n}$

$a_n > 0$ DEFINTIVAMENTE E' VERA ($a_n = 0$ SOLO IN $a_0$)

↓ SVOLGO $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\lim_n \frac{(n+1)^{2015}}{\cancel{3^n}\,3} \cdot \frac{\cancel{3^n}}{n^{2015}} = \frac{1}{3} \underbrace{\frac{(n+1)^{2015}}{n^{2015}}}_{\to 1} = \frac{1}{3} < 1$$

↓ QUINDI LA SERIE CONVERGE

ES 2 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ (CONTROLLO $a_n > 0$)

↓ $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\lim_n \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}}{\cancel{(n+1)}(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} =$$

$$= \lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$$

LIMITE NOTEVOLE $\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\frac{1}{e} < 1$ → QUINDI LA SERIE CONVERGE

SE $\ell = 1$ IL CRITERIO NON E' CONCLUSIVO PUO' DIVERGERE O CONVERGERE

CAMBIARE CRITERIO

# CRITERIO DELLA RADICE E CRITERIO DEL CONFRONTO

## CRITERIO DELLA RADICE

(MOLTO COMODO SE IN $a_n$ CI SONO FATTORI ELEVATE ALLA $n$ O A DELLE POTENZE DI $n$)

SE $a_n \geq 0$ DEFINITIVAMENTE E SUPPONIAMO CHE $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \ell$

- SE $\ell < 1$ ALLORA $\sum a_n$ CONVERGE
- SE $\ell > 1$ ALLORA $\sum a_n$ DIVERGE
- SE $\ell = 1$ ALLORA TUTTO E' POSSIBILE $\longrightarrow$ BISOGNA CAMBIARE CRITERIO

= AL CRITERIO DEL CONFRONTO

ES 1: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{n/2}}$ ($a_n > 0$, PARTIAMO DA $n=2$)

SE $n=0$ E $n=1$ AVREMMO DEI PROBLEMI

CRITERIO DELLA RADICE $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \ell$

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{(\log n)^{n/2}}} = \lim_n \left( (\log n)^{-n/2} \right)^{1/n} = \lim_n (\log n)^{-1/2} = \lim_n \frac{1}{\sqrt{\log n}} = 0 < 1$$

QUINDI LA SERIE CONVERGE

ES: 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$ ($a_n \geq 0$)

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} \cdot \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n^2}} = \lim_n \left( \frac{1}{2^{\cancel{n}}} \right)^{1/\cancel{n}} \cdot \left( \frac{n+1}{n} \right)^{\frac{n^{\cancel{2}}}{\cancel{n}}} = \lim_n \frac{1}{2} \left( \frac{n+1}{n} \right)^n = \frac{e}{2} > 1$$

LIM. NOTEVOLE $e$

QUINDI LA SERIE DIVERGE A $+\infty$

⚠ $\lim_n \sqrt[n]{n!} = +\infty$ $\lim_n \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$ (MA IN QUESTO CASO E' MEGLIO USARE IL CRITERIO DEL RAPPORTO)

## CRITERIO DEL CONFRONTO

SUPPONIAMO CHE $0 \leq a_n \leq b_n$ DEFINITIVAMENTE. ALLORA VALGONO LE SEGUENTI IMPLICAZIONI

1) $\sum b_n$ CONVERGE $\Rightarrow$ $\sum a_n$ CONVERGE
2) $\sum a_n$ DIVERGE A $+\infty$ $\Rightarrow$ $\sum b_n$ DIVERGE A $+\infty$

LE IMPLICAZIONI INVERSE ($\not\Leftarrow$) NON VALGONO

SI UTILIZZANO LE SERIE ARMONICHE GENERALIZZATE

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ CONVERGE SE $\alpha > 1$, DIVERGE SE $\alpha \leq 1$ $(+\infty)$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$ CONVERGE SE $\alpha > 1$ O $\alpha = 1$ E $\beta > 1$, DIVERGE SE $\alpha < 1$ O $\alpha = 1$ E $\beta \leq 1$ $(+\infty)$

ES 3: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n}{n}\right)^2$

$0 \leq \left(\frac{\cos n}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{n^2}$ PER OGNI $n \geq 1$

COMPRESO TRA -1 E 1

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ CONVERGE $(\alpha > 1)$

DUNQUE IL CRITERIO DEL CONFRONTO CI ASSICURA CHE ANCHE $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n}{n}\right)^2$ CONVERGE

ES 4: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}}$

(PER $n \geq 1$ ALLORA $\log n \geq 0$, ALLORA LA SERIE È A TERMINI NON NEGATIVI)

$0 \leq \dfrac{1}{n^{\log n}} \rightarrow$ MONOTONA CRESCENTE

$\downarrow$

AUMENTA AL CRESCERE DI $n$ $\longrightarrow$ $\log n > 2$ DEFINITIVAMENTE

$\downarrow$ QUINDI

$n^{\log n} > n^2$ DEFINITIVAMENTE

$\downarrow$ QUINDI

$0 \leq \dfrac{1}{n^{\log n}} < \dfrac{1}{n^2}$

$\downarrow$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ CONVERGE $(\alpha > 1)$

$\downarrow$ QUINDI

PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}}$ CONVERGE

---

# CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

DATE DUE SUCCESSIONI $a_n$ E $b_n$ A TERMINI DEFINITIVAMENTE POSITIVI, SE

ASINTOTICHE

$$a_n \sim b_n \quad \left(\text{OVVERO SE } \lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1\right)$$

ALLORA LE CORRISPONDENTI SERIE $\sum a_n$ E $\sum b_n$ HANNO LO STESSO CARATTERE, CIOE' O SONO ENTRAMBE CONVERGENTI O SONO ENTRAMBE DIVERGENTI

COME NEL **TEOREMA DEL CONFRONTO**, CI SON 2 SERIE

- $a_n$: QUELLA A CUI SIAMO INTERESSATI
- $b_n$: INTRODOTTA DI VOLTA IN VOLTA PER IL CONFRONTO (DI CUI E' FACILE STABILIRE LA CONVERGENZA) → TENDENZIALMENTE SONO SERIE ARMONICHE

ES 1: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\cos n}{n^3-3n}$ (TERMINI DEFINITIVAMENTE POSITIVI)

TROVIAM UNA SUCCESSIONE $b_n$ CHE SIA ASINTOTICA AD $a_n$
QUINDI STUDIO $a_n$ QUANDO TENDE AD $+\infty$

IL $\lim_n$ DELLA FRAZIONE SI COMPORTA COME IL RAPPORTO TRA I TERMINI PREPONDERANTI DEL NUM. E DEL DEN.

$$\underbrace{\frac{n+\cos n}{n^3-3n}}_{a_n} \sim \frac{n}{n^3} = \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{b_n}$$

INFATTI $$\left(\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n \frac{n+\cos n}{n^3-3n} \cdot n^2 = \lim_n \frac{n^3+n^2\cos n}{n^3-3n} = \lim_n \frac{\cancel{n^3}\left(1+\frac{\cos n}{n}\right)}{\cancel{n^3}\left(1-\frac{3}{n^2}\right)} = 1\right.$$

$\frac{\cos n}{n} \to 0$, $\frac{3}{n^2} \to 0$

$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^2}$ CONVERGE (SERIE ARMONICA CON $q>1$)

$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{N+\cos N}{N^3-3N}$ CONVERGE

STEPS

1. DIMOSTRARE CHE LA SUCCESSIONE $a_N$ È (PER LO MENO DEFINITIVAMENTE) A TERMINI POSITIVI
2. TROVARE UNA SECONDA SUCCESSIONE (ASINTOTICA AD $a_N$)
3. CAPIRE SE LA SERIE $\sum b_N$ (DEL PUNTO 2) È UNA SERIE CONVERGENTE O DIVERGENTE (CONTROLLARE TERMINI PREPONDERANTI O LIMITI NOTEVOLI
4. SE $\sum b_N$ È CONVERGENTE $\Rightarrow$ $\sum a_N$ È CONVERGENTE
   SE $\sum b_N$ È DIVERGENTE $\Rightarrow$ $\sum a_N$ È DIVERGENTE

ES 2: $\sum_{N=1}^{\infty} \frac{e^{1/N^2}-1}{4N}$ (1) ($a_N$ È A TERMINI POSITIVI)

(2) CERCARE FUNZIONE ASINTOTICA

REMIND

$$\lim_{\varepsilon(x)\to 0} \frac{e^{\varepsilon(x)}-1}{\varepsilon(x)} = 1$$ OVVERO $e^{\varepsilon(x)}-1 \sim \varepsilon(x)$ PER $\varepsilon(x) \to 0$

ASINTOTICAMENTE EQUIVALENTE

ALLORA

$$e^{1/N^2}-1 \sim \frac{1}{N^2} \longrightarrow \underbrace{\frac{e^{1/N^2}-1}{4N}}_{a_N} \sim \frac{1/N^2}{4N} = \underbrace{\frac{1}{4N^3}}_{b_N}$$

$$\lim_N \frac{a_N}{b_N} = \lim_N \frac{e^{1/N^2}-1}{\cancel{4N}} \cdot \cancel{4N}^{\cancel{3}2} = \frac{e^{1/N^2}-1}{1/N^2} = 1$$

LIM. NOTEVOLE

3 $b_N$ CONVERGENTE O DIVERGENTE?

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{4N^3}$$ SERIE ARMONICA CON $\alpha > 1$ $\downarrow$ CONVERGE $\longrightarrow$ ALLORA 4 $\sum_{N=1}^{\infty} \frac{e^{1/N^2}-1}{4N}$ CONVERGE

NEL FARE STIME ASINTOTICHE PUO' ESSERE NECESSARIO SFRUTTARE GLI SVILUPPI DI TAYLOR

---

## SERIE A TERMINI POSITIVI

E' POSSIBILE (E A VOLTE CONVENIENTE) COMBINARE L'UTILIZZO DI 2 CRITERI DI CONVERGENZA

ES 1: $\sum_{N=0}^{\infty} \frac{N^3+\cos N+2N}{6N^2+1+4^N}$ (SERIE A TERMINI POSITIVI)

$$\frac{N^3+\cos N+2N}{6N^2+1+4^N} \sim \frac{N^3}{4^N} \Rightarrow$$ CONFRONTO ASINTOTICO $\sum_{N=0}^{\infty} \frac{N^3+\cos N+2N}{6N^2+1+4^N}$ E $\sum_{N=0}^{\infty} \frac{N^3}{4^N}$ HANNO LO STESSO CARATTERE

$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{N^3}{4^N}$ NON E' UNA SERIE ARMONICA O GEOMETRICA $\longrightarrow$ NON SAPPIAM SE DIVERGE O CONVERGE

APPLICHIAM UN ULTERIORE CRITERIO PER STABILIRE SE $\sum_{N=0}^{\infty} \frac{N^3}{4^N}$ E' DIVERGENTE O CONVERGENTE

USO IL CRITERIO DEL RAPPORTO

$$\lim_N \frac{b_{N+1}}{b_N} = \lim_N \frac{(N+1)^3}{\cancel{4^N}\cdot 4} \cdot \frac{\cancel{4^N}}{N^3} = \frac{1}{4}\left(\overset{1}{\frac{N+1}{N}}\right)^3 = \frac{1}{4} < 1 \quad \sum_{N=0}^{\infty} \frac{N^3}{4^N}$$ CONVERGE

(CRITERIO DEL RAPPORTO)

NE SEGUE CHE $\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{n^3+\cos n+2n}{6n^2+1+4^n}}$ CONVERGE

# SERIE A TERMINI DI SEGNO VARIABILE

- ASSOLUTA CONVERGENZA
- CRITERIO DI LEIBNIZ

} SPESSO UTILIZZATI IN QUESTI CASI

## ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE

UNA SERIE $\sum a_n$ SI DICE ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE SE CONVERGE LA SERIE $\sum |a_n|$

TEOREMA: SE LA SERIE $\sum a_n$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE, ALLORA CONVERGE → IL VICEVERSA, IN GENERALE NON E' VERO !!!

$\sum |a_n|$ E' UNA SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

↓

PIU' FACILE DA STUDIARE

POSSO UTILIZZARE I TEOREMI

- RAPPORTO
- RADICE
- CONFRONTO
- CONFRONTO ASINTOTICO

} FUNZIONANO CON TERMINI NON NEGATIVI

ES 1: $\sum_{N=1}^{\infty} \frac{\sin(N!)}{N^4}$ ($a_N$ SEGNO VARIABILE PER IL NUMERATORE)

↓ QUINDI

<u>NON</u> POSSO USARE IL TEOREMA DEL CONFRONTO

USO TEO DELL' ASSOLUTA CONVERGENZA

$$\left| \frac{\sin(N!)}{N^4} \right|$$

$$0 \leq \frac{|\sin(N!)|}{N^4} \leq \frac{1}{N^4}$$ → CRITERIO DEL CONFRONTO

$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{|\sin(N!)|}{N^4}$ E $\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^4}$ HANNO LO STESSO CARATTERE

$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^4}$ SERIE ARMONICA CON $(\alpha > 1)$ ALLORA CONVERGE

QUINDI $\sum_{N=1}^{\infty} \frac{|\sin(N!)|}{N^4}$ CONVERGE → $\sum_{N=1}^{\infty} \frac{\sin(N!)}{N^4}$ CONVERGE

↓ CRITERIO DEL CONFRONTO

↓ CRITERIO DELL' ASSOLUTA CONVERGENZA

ES 2: $\sum_{N=1}^{\infty} (-1)^N \frac{N^2+3}{N^4+2N}$ ($a_N$ SEGNO VARIABILE)

POSITIVO PER N PARI
NEGATIVO PER N DISPARI

↓ ASSOLUTA CONVERGENZA

CONFRONTO ASINTOTICO

$$\left| (-1)^N \frac{N^2+3}{N^4+2N} \right| = \frac{N^2+3}{N^4+2N} \sim \frac{1}{N^2}$$

$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^2}$ SERIE ARMONICA $(\alpha > 1)$

↓ CONVERGE → $\sum_{N=1}^{\infty} \frac{N^2+3}{N^4+2N}$ CONVERGE → $\sum_{N=1}^{\infty} (-1)^N \frac{N^2+3}{N^4+3N}$

CONVERGE

ES 3: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3}{n^3+2n}$ ($a_n$ SEGNO VARIABILE)

$\downarrow$ CONFRONTO ASSOLUTO

$$\left|(-1)^n \frac{n^2+3}{n^3+2n}\right| = \frac{n^2+3}{n^3+2n} \sim \frac{1}{n}$$

$\downarrow$ $\alpha = 1$

SERIE ARMONICA DIVERGENTE

$\frac{1}{n}$ DIVERGE $\Rightarrow$ $\frac{n^2+3}{n^3+2n}$ NON CONVERGE

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

$\downarrow$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{n^2+3}{n^3+2n}\right|$ NON CONVERGE

$\downarrow$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3}{n^3+2n}$ NON CONVERGE ASSOLUTAMENTE

SAPERE CHE DIVERGE NON CI FA OTTENERE NESS' INFORMAZIONE SULLA SERIE DI PARTENZA

$\downarrow$

POTREBBE CONVERGERE, DIVERGERE O ESSERE INDETERMINATA

$\downarrow$

USO CRITERIO DI LEIBNIZ

# CRITERIO DI LEIBNIZ

CRITERIO DI CONVERGENZA PER SERIE DI SEGNO ALTERNO

SIA $\{a_n\}$ UNA SUCCESSIONE E SUPPONIAMO CHE

1) $a_n \geq 0$ DEFINITIVAMENTE $\longrightarrow$ TERMINI NON NEGATIVI

2) $a_n \to 0$ PER $n \to +\infty$ $\longrightarrow$ INFINITESIMA

3) $a_{n+1} \leq a_n$ DEFINITIVAMENTE $\longrightarrow$ DEBOLMENTE DECRESCENTE

ALLORA LA SERIE $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ È CONVERGENTE

SEGNI ALTERNI

DOBBIAMO CONTROLLARE CHE LE 3 IPOTESI SIANO TUTTE VERE

ES 1: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ $\quad a_n = \frac{1}{n!}$ È POSITIVO (1) ED INFINITESIMO (2)

$\downarrow$ $n!$ POSITIVO

$\downarrow$ $n! \to \infty$ (TENDE A 0)

ED È DECRESCENTE (3)

$\downarrow$ $n!$ CRESCENTE

ALLORA LA SERIE CONVERGE PER IL CRITERIO DI LEIBNIZ

ES 2: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n^2+n}}$ (SEGNI ALTERNI)

$a_n = \frac{n-1}{n^2+n}$ POSITIVA (SIA NUM. CHE DEN.) 1

INFINITESIMA (GRADO DEN. MAGGIORE DEL GRADO NUM.) 2

SE $n \to \infty$ $a_n \sim \frac{1}{n}$

$(\alpha \le 1)$

NON E' ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE

↓

PROVA ALTRA STRADA

CHECK CRITERIO DI LEIBNIZ

E' DEBOLMENTE DECRESCENTE? $\longrightarrow$ $a_{n+1} \le a_n$

$a_{n+1} \le a_n$

$$\frac{(n+1)-1}{(n+1)^2+(n+1)} \le \frac{n-1}{n^2+n}$$

$$\frac{n}{(n+1)((n+1)+1)} \le \frac{n-1}{n(n+1)}$$

$$\frac{n\cancel{(n+1)}\cancel{(n+2)}\,n}{\cancel{(n+1)}\cancel{(n+2)}} \le \frac{n-1}{\cancel{n}\cancel{(n+1)}}\,\cancel{n}\cancel{(n+1)}(n+2)$$

$n^2 \le (n-1)(n+2)$

$\cancel{n^2} \le \cancel{n^2}+2n-n-2$

$0 \le n-2$ ; $n \ge 2$

L'UGUAGLIANZA E' VERIFICATA PER OGNI N NATURALE $\ge 2$

↓ 3

$a_n$ E' DEFINITIVAMENTE CRESCENTE

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n^2+2}}$

CONVERGE PER IL CRITERIO DI LEIBNIZ

ES 3: $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\log(n)}{n}$  $a_n = \frac{\log(n)}{n}$

$a_n$ è POSITIVA (1)

$a_n$ è INFINITESIMA (2) (GRADO DEN. > GRADO NUM)

NON è ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE

$$\left|(-1)^n \frac{\log(n)}{n}\right| = \frac{\log(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$$

$\sum \frac{1}{n}$ DIVERGE

APPLICO CRITERIO DI LEIBNIZ

è DECRESCENTE?

$a_{n+1} \leq a_n$

$$\underbrace{\frac{\log(n+1)}{n+1} \leq \frac{\log(n)}{n}}_{\text{DIFFICILE DA RISOLVERE}}$$

↓

STUDIO MONOTONIA DELLA SUCCESSIONE CON LA FUNZIONE DI VARIABILE REALE

POSSIAMO INTERPRETARE $a_n$ COME LA RESTRIZIONE A $\mathbb{N}^+$ DELLA FUNZIONE DI VARIABILE REALE $f(x) = \frac{\log(x)}{x}$

↓

SE $f(x)$ è DECRESCENTE ALLORA $a_n$ (PERLOMENO DEFINITIVAMENTE) SARÀ DEBOLMENTE DECRESCENTE

DERIVATA $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$

0 | 0 + e | • −

PER OGNI $n \geq 3$ LA SUCCESSIONE $a_n$ è DECRESCENTE

PRIMO INTERO > e (3)