

Capítulo 6

Control de Sistemas no lineales por realimentación

Introducción

El objetivo principal de un sistema de control es que algunas variables de interés medibles $y(t)$ que se consideran salidas se comporten de forma determinada acorde a especificaciones. Esto se logra mediante la manipulación de otras variables $u(t)$ llamadas entradas, pero siempre manteniendo los estados acotados, para ello debe ser **estable** es decir el objetivo implícito primario es la estabilización

El objetivo más simple suele ser tratar de mantener $y(t)$ lo más cercana posible a algún valor de consigna R (Set Point), el cual se mantiene constante al menos durante intervalos de tiempo considerables lo cual es un problema de **regulación**
Esto se debe lograr ante la presencia de perturbaciones en general no medibles ni estimables

Otro objetivo más ambicioso es tratar de mantener la diferencia $e(t) = y(t) - r(t)$ pequeña, donde $r(t)$ es una entrada de referencia perteneciente a cierta clase de señales deseadas, lo cual es un problema de **seguimiento (Tracking)**, por ejemplo seguir una trayectoria

En la mayoría de los casos para lograrse requiere el uso de realimentación, ya sea de la salida, los estados o ambos, aquí aparece un nuevo problema de control, dependiendo de los elementos necesarios para resolverlo.

Puede bastar solo con realimentación de la salida, si no es suficiente se puede recurrir a realimentación de los estados, estos a su vez pueden ser medibles o no, en caso negativo puede ser necesario implementar un observador o estimador para los estados no medibles.

Además pueden existir restricciones en los valores de la entrada de control $u(t)$, por la naturaleza física del actuador y/o por problemas de costos, por lo que forzosamente se cae en soluciones de compromiso.

El deseo de optimizar estas soluciones de compromiso da lugar a la formulación del problema de control óptimo, el cual pretende minimizar un funcional de costo que incluye dicho compromiso entre errores de las salidas frente a las deseadas (calidad) y magnitud de las acciones de control (costo)

Un objetivo de control adicional particularmente importante es el de mantener dentro de ciertos límites de tolerancia el desempeño deseado ante la presencia de incertidumbres en el modelo matemático del sistema, lo cual lleva a la formulación de problemas de control robusto

Por otro lado las condiciones de trabajo del sistema pueden ir cambiando en el tiempo de forma relativamente lenta comparada con la dinámica de diseño, aquí es donde aplica el control adaptable.

Estabilización y regulación por linealización local

Realimentación estática de estados.

Sea el sistema

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Con la ley de control

$$u = \gamma(x)$$

El problema consiste en encontrar $u(\cdot)$ tal que el origen del sistema de lazo cerrado

$$\dot{x} = f(x, \gamma(x))$$

Sea asintóticamente estable.

Para ello tiene que existir $u(x)$ tal que

$$f(x, u) = 0$$

Una vez resuelto este problema, se puede estabilizar el sistema con respecto a un punto p arbitrario mediante traslación del origen con el cambio de variables

$$z = x - p$$

- El valor p no tiene que ser necesariamente un punto de equilibrio del sistema a lazo abierto

Realimentación de la salida

El problema de estabilización por realimentación de salida para el sistema

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$y = h(x, u)$$

Con la ley de control

$$u = \gamma(y)$$

Tal que el origen del sistema de lazo cerrado

$$\dot{x} = f(x, \gamma(y))$$

Sea asintóticamente estable, como antes debe existir $u(y)$ tal que

$$f(x, u) = 0$$

Observador de estados

La información de la salida puede no ser suficiente para el objetivo propuesto, por lo que a menudo es necesario implementar a un observador o estimador de estados basado en la entrada y la salida, del cual resulta la ley de control

$$u = \gamma(y, x_M, \tilde{x})$$

$$\dot{\tilde{x}} = g(y, \tilde{x}, u)$$

Donde x_M representa las variables de estado medibles y \tilde{x} es una estima de los estados no medibles, lo cual incrementa la dinámica del sistema y lo hace variante en el tiempo.

Diseño por linealización

Se linealiza el sistema no lineal alrededor del origen mediante la Jacobiana, y se diseña un control lineal estabilizante para el modelo obtenido según las técnicas clásicas de asignación de polos o por Lyapunov.

La estabilidad alcanzada en el sistema no lineal será local, aunque se puede en muchos casos estimar la región de atracción y la validez de éste procedimiento está garantizada por el Método Indirecto de Lyapunov

Ejemplo 1. Estabilización local por linealización

Se desea estabilizar usando realimentación el origen del sistema escalar

$$\dot{x} = x^2 + u$$

Usando la ley de control lineal $u = -kx$

$$\dot{x} = -kx + x^2$$

Por Lyapunov con

$$V = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow \dot{V} = x\dot{x} = x(-kx + x^2) = x^2(x - k)$$

El sistema es AE y su región de atracción es $x < k$

Usando una ley de control no lineal

$$u = -kx - x^2$$

$$\dot{x} = -kx$$

Y el origen es ahora GAE, esta cancelación del termino no lineal es muy útil, pero funciona bien solamente si se conoce el modelo exacto del sistema

Supóngase que el modelo real fuera

$$\dot{x} = (1+a)x^2 + u$$

Con a cercano a 0, de signo no definido y $|a|$ es la cota del error de modelado.

Con la ley de control lineal se tiene que

$$V = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow \dot{V} = x\dot{x} = x[-kx + x^2(1+a)] = x^2[(1+a)x - k]$$

Siendo el dominio de atracción levemente menor o mayor según el signo de a

$$x < k / (1+a)$$

La ley de control no lineal no cancela ahora exactamente el término cuadrático quedando

$$\dot{x} = -kx + ax^2$$

$$V = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow \dot{V} = x\dot{x} = x(-kx + ax^2) = x^2(ax - k)$$

Lo que no garantiza Globalidad de la región de atracción, pero al ser a pequeño aumenta la región de atracción respecto de la ley lineal siendo ahora

$$|x| < k / |a|$$

En la figura 1 se muestran resultados de simulación

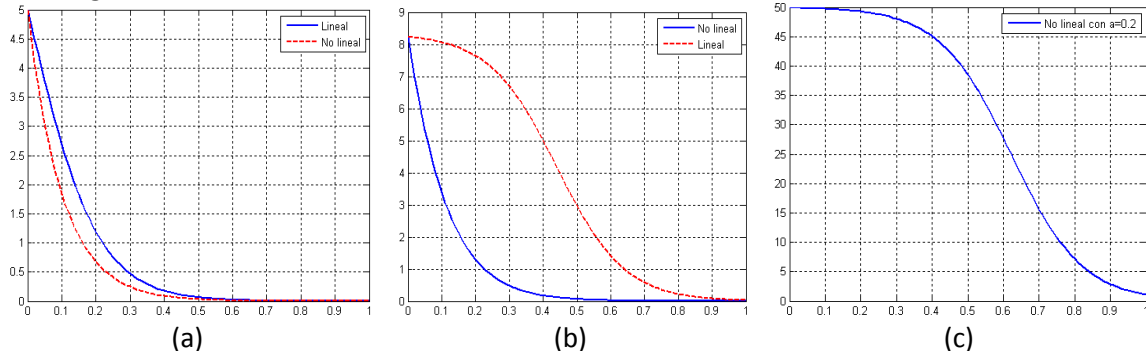


Figura 1: (a) Con $a=0$, (b) con $a=0.2$ CI límite de atracción ley lineal (c) Ídem CI limite no lineal

Ejemplo 2: Regulación del péndulo por estabilización local y realimentación de estados.

Considérese la ecuación del péndulo

$$\ddot{\theta} = -a \sin \theta - b \dot{\theta} + cT$$

Donde $a = g/l > 0$, $b = k/ml^2 \geq 0$, $c = 1/ml^2 > 0$, θ es el ángulo entre la cuerda y el eje vertical, y T es el torque aplicado al péndulo. Usando el torque como entrada de control, se pretende estabilizar al péndulo en un ángulo δ

Tomando como variables de estado el error y su derivada $x_1 = \theta - \delta$, $x_2 = \dot{\theta}$ resultan las ecuaciones

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -a \sin(x_1 + \delta) - b x_2 + cT$$

Para que tenga un PE en el origen, el par debe tener una componente estática que compense el efecto gravitatorio es decir la variable de control debe ser

$$u = T - T_f \Rightarrow T = u + T_f$$

$$T_f = a \cdot \text{sen}(\delta) / c$$

Reemplazando T queda el sistema con un PE en el origen

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -a[\text{sen}(x_1 + \delta) - \text{sen}\delta] - bx_2 + cu$$

Calculando la jacobiana en el origen resultan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos \delta & -b \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}$$

$$\text{Rank}[B, AB] = 2$$

Luego el par A,B es controlable, se puede realizar estabilización local y control por métodos lineales

$$u = -Kx = -[k_1 \quad k_2]x$$

Resultando

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 c - a \cos \delta & -k_2 c - b \end{bmatrix}$$

Y el polinomio característico

$$|\lambda I - (A - BK)| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ a \cos \delta + k_1 c & \lambda + k_2 c + b \end{vmatrix}$$

$$|\lambda I - (A - BK)| = \lambda^2 + (b + k_2 c)\lambda + a \cos \delta + k_1 c$$

La condicion para estabilidad es que los coeficientes sean positivos

$$b + k_2 c > 0 \Rightarrow k_2 > -b / c$$

$$a \cos \delta + k_1 c > 0 \Rightarrow k_1 > -a \cos(\delta) / c$$

Resultando el torque de control

$$T = a \cdot \text{sen}(\delta) / c - k_1(\theta - \delta) - k_2 \dot{\theta} = mgl \cdot \text{sen}(\delta) - k_1(\theta - \delta) - k_2 \dot{\theta}$$

El sistema puede verse como un control de lazo cerrado por realimentación de estados con una componente de pre alimentación (feedforward) como se ilustra en la figura 2

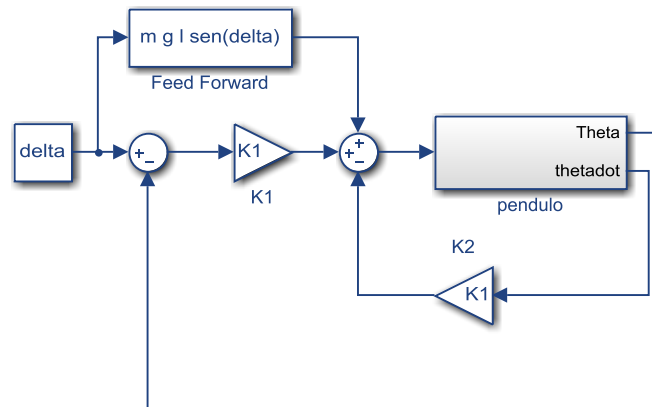


Figura 2: Esquema de lazo cerrado equivalente del ejemplo 2

Se puede usar asignación de polos, una posible sería un polo doble en -2 con lo que

$$\lambda_{1,2} = -2 \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 4 = \lambda^2 + (b + k_2 c)\lambda + a \cos \delta + k_1 c$$

Luego

$$b + k_2 c = 4 \Rightarrow k_2 = (4 - b) / c$$

$$a \cos \delta + k_1 c = 4 \Rightarrow k_1 = [4 - a \cos \delta] / c$$

Si fueran

$$m = l = k = 1, g = 10 \quad \delta = \pi / 2 \Rightarrow a = 10 \quad b = 1 \quad c = 1 \quad \cos \delta = 0$$

Luego calculando el controlador

$$k_2 = 3 \quad k_1 = 4$$

Siendo el torque necesario

$$T = 10 \cdot \sin(\delta) - 4(\theta - \delta) - 3\dot{\theta}$$

- Como la Matriz A depende de la referencia δ los valores de k_1, k_2 obtenidos solo serán válidos para ese Set Point

En la figura 3 se muestran los resultados de simulación, donde se nota que existe un torque en régimen para compensar el efecto de la gravedad.

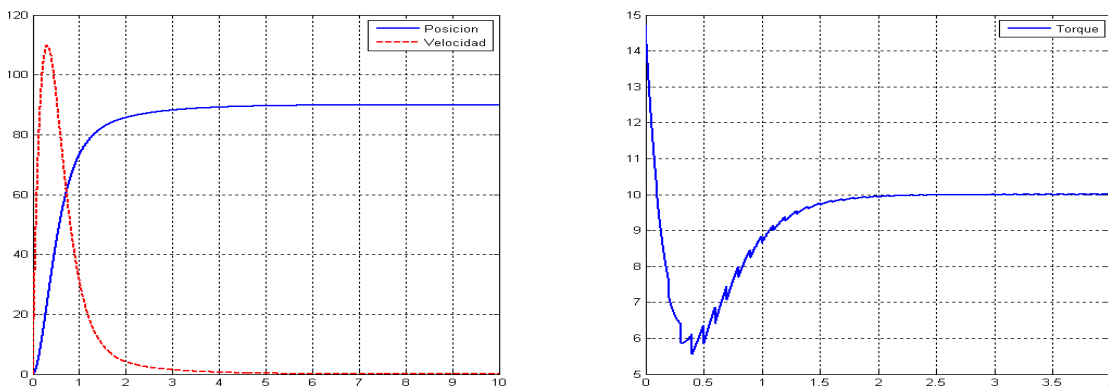


Figura 3: Resultados simulación ejemplo 2

En el diseño se supuso que algunos parámetros son exactamente conocidos, pero en realidad el controlador tiene la forma

$$T = \tilde{m}gl \cdot \sin(\delta) - k_1(\theta - \delta) - k_2\dot{\theta}$$

Donde \tilde{m} es el valor **nominal** de la masa, al diferir del valor real puede darse una sobreestimación $\tilde{m} < m$ o bien una subestimación $\tilde{m} > m$, lo cual puede causar errores de régimen considerables

Esto desplaza el punto de equilibrio del error fuera del origen, y los resultados se muestran en la figura, de hecho el método solo garantiza estabilización local y no especifica la región de atracción

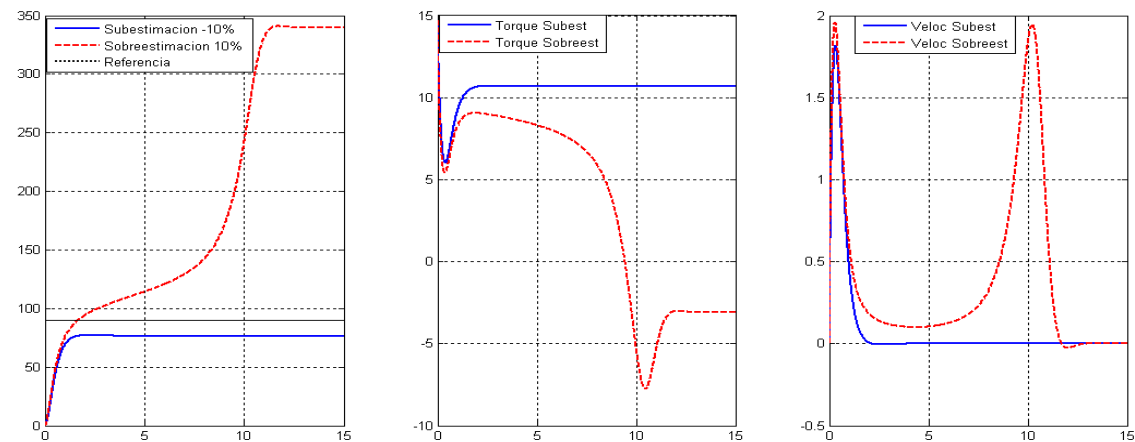


Figura 4: Resultados simulación ejemplo 2 con Sub y Sobre estimación de la masa
Si se subestima se produce subcompensación del efecto gravitatorio y se llegara a un valor menor que la referencia, si por el contrario se sobreestima se sobrecompensa y como se

muestra el ángulo puede cruzar la referencia con cierta velocidad y torque positivo lo que hace que sobrepase los 180° y quede del otro lado

Para que ello no ocurra es necesario incorporar otro tipo de estrategia dinámica de control

Regulación Vía Control Integral

En el ejemplo 2 se redujo el problema de regulación a uno de estabilización mediante corrimiento del punto de equilibrio deseado al origen. Aunque este enfoque es adecuado cuando se conocen los parámetros del sistema con exactitud, puede no ser aceptable si existen perturbaciones de los valores nominales de los parámetros del modelo. Se presentara un esquema de realimentación de estados, el agregado de acción integral, que permitirá regulación robusta frente a perturbaciones paramétricas.

Considérese el sistema

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$y = h(x)$$

Donde $x(t)$ son los estados e $y(t)$ la salida deseada (no necesariamente escalar), se desea diseñar un sistema tal que se acerque asintóticamente una referencia constante y_R , es decir

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow y_R$$

Se supone que el sistema tiene solución única y que $y(t)$ es medible, se pretende estabilizar el sistema a lazo cerrado en un PE tal que $y = y_R$, para ello debe cumplirse que existen x_f, u_f tales que

$$f(x_f, u_f) = 0$$

$$h(x_f) - y_R = 0$$

Para que el PE pueda existir, sea el error de seguimiento $e = y - y_R$, luego se aumenta el sistema con la integral del error quedando

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$\dot{\sigma} = e = h(x) - y_R$$

Tomando la acción de control como

$$u = K_1 x + K_2 \sigma$$

con K_1, K_2 matrices que pueden ser calculadas como antes por linealización del modelo mediante la Jacobiana y usando el modelo lineal ampliado

$$\dot{\zeta} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v$$

Con

$$\zeta = \begin{bmatrix} x - x_f \\ \sigma - \bar{\sigma} \end{bmatrix}, v = u - u_f$$

Siendo ahora un control dinámico que no necesita un término feedforward

$$u = K_1 x + K_2 \sigma$$

$$\dot{\sigma} = e = h(x) - y_R$$

El sistema de lazo cerrado se muestra en la figura 5 y es

$$\dot{x} = f(x, K_1 x + K_2 \sigma)$$

$$\dot{\sigma} = e = h(x) - y_R$$

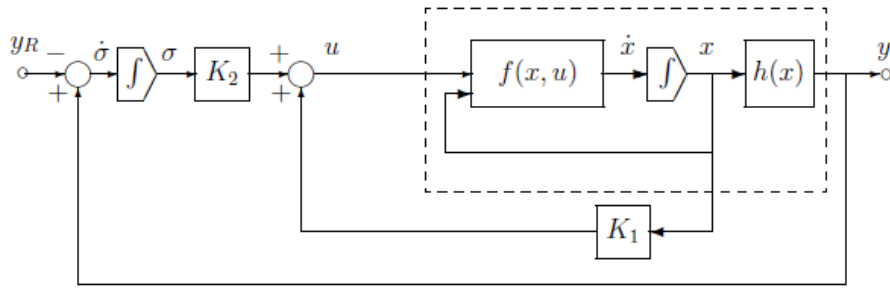


Figura 5: Control por realimentación de estados y salidas con acción integral

Ejemplo 3 Regulación del péndulo por Acción integral.

En el ejemplo 2 se mostró la ecuación del péndulo, el cual se desea estabilizar en un ángulo δ

Tomando como estados, entrada y salida respectivamente

$$x_1 = \theta - \delta = e$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

$$u = T$$

$$y = e$$

Resulta el sistema dinámico en términos del error

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -a \sin(x_1 + \delta) - b x_2 + c u$$

$$y = e = x_1$$

Para que el error se anule debe ser $y = 0$, luego el equilibrio deseado es

$$x_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, u_f = \frac{a}{c} \sin \delta$$

Para lograr el equilibrio se utilizara un integrador sobre el error,

$$\dot{\sigma} = e$$

Las matrices A y B ya fueron calculadas, luego resulta el modelo linealizado

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos \delta & -b \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} C = [1 \quad 0]$$

Las matrices del sistema ampliado serán

$$A_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a \cos \delta & -b & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} B_a = \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{bmatrix}$$

El nuevo par es controlable y se puede hacer asignación de polos como en el ejemplo 2, pudiéndose elegir ahora una ganancia adicional, resultando el torque de entrada al sistema

$$T = k_1(\theta - \delta) + k_2\dot{\theta} + k_3\sigma$$

$$\dot{\sigma} = \theta - \delta$$

Que no es otra cosa que un PID en la forma PI+D, ya que

$$T = k_1 e + k_3 \int_0^t e(\tau) d\tau + k_2 \dot{\theta}$$

Para un valor de

$$\delta = \frac{\pi}{2} (90^\circ)$$

Y con

$$m = l = k = 1, g = 10$$

Resultan las matrices

$$A_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mediante Ackerman se puede ubicar un polo triple en -2

$$A = [0 \ 1 \ 0; 0 \ -1 \ 0; 1 \ 0 \ 0], B = [0; 1; 0]$$

$$K = \text{acker}(A, B, [-2 \ -2 \ -2])$$

Resultan

$$k_1 = 12 \quad k_2 = 5 \quad k_3 = 8$$

Tiene como ventaja no requerir de un torque estático y ser más robusto frente a incertidumbre paramétrica, si bien la acción integral puede tornarlo más lento y potencialmente más oscilatorio, según puede verse en la figura 6 simulado con los valores del ejemplo 2 y

Es más lento que con la prealimentación, si bien la acción de control es más suave

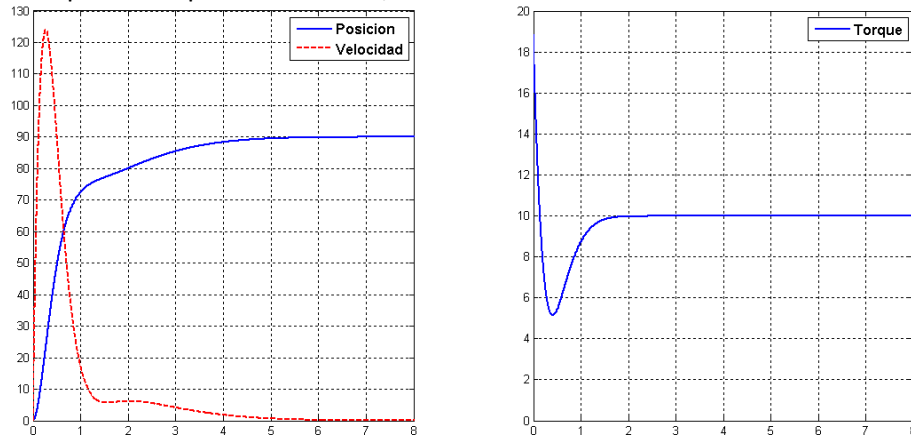


Figura 6: Resultados simulación péndulo con PID

Se observa en la figura 7 que aquí desaparece el problema de la incertidumbre paramétrica respecto del error de régimen, solo se ve alterado levemente el transitorio

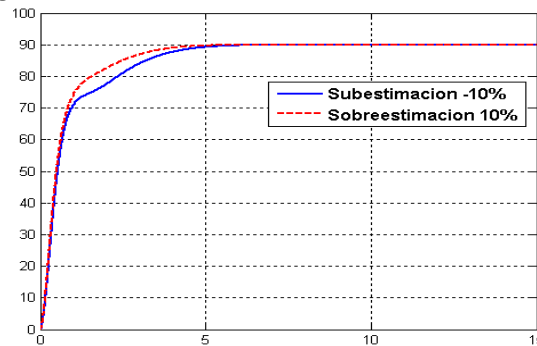


Figura 7: Resultados simulación ejemplo 3: sub y sobre estimación de la masa

Observador de estados Lineal

Si los estados no están disponibles para medición y si el par (A, C) es observable se puede implementar un observador de estados para estimar los estados no medibles como se muestra en la figura 8, el control pasa ahora a ser

$$T = K_1 \tilde{x} + K_2 \sigma$$

$$\dot{\sigma} = y - y_R = e$$

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + H(C\tilde{x} - y)$$

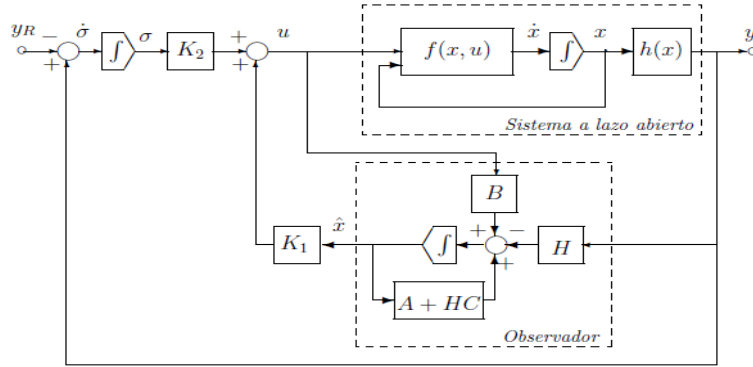


Figura 8: Control integral con observador de estados

Aquí hay que tener presente que la dinámica del observador dada por la matriz H debe ser más rápida que la de diseño del sistema a lazo cerrado, es decir el error de estimación debe converger más rápido que el error de control (separación de dinámicas)

Control por Ganancia Tabulada

La principal limitación del control por linealización es que sólo se puede garantizar que el Control cumple su objetivo localmente alrededor de un único PE, o punto de operación (PO). Una forma de extender la validez del control por linealización a un conjunto de POs es usar control por ganancia tabulada ("gain scheduling"). Este enfoque asume que se puede representar el sistema mediante un modelo parametrizado por ciertas variables, llamadas variables de tabulación ("scheduling variables"), de modo que cuando estas variables asumen un valor constante obtenemos un PO. En estos casos, se linealiza el sistema alrededor de distintos POs de interés, obteniéndose una familia de modelos lineales para la cual se diseña una familia de controladores lineales. Luego, se implementa el esquema de control en un único controlador cuyos parámetros son cambiados acorde a los valores que toman las variables de tabulación, que deberán monitorearse continuamente.

Ejemplo 4: Control de nivel por ganancia tabulada

El sistema, representado en la Figura 9, Tomando $x = h$ (nivel del tanque) como variable de estado y $u = q$ (caudal de entrada) como variable de control se obtiene el modelo de estado

$$\dot{x} = \frac{1}{\beta(x)} (u - c\sqrt{2x}) \triangleq f(x, u)$$

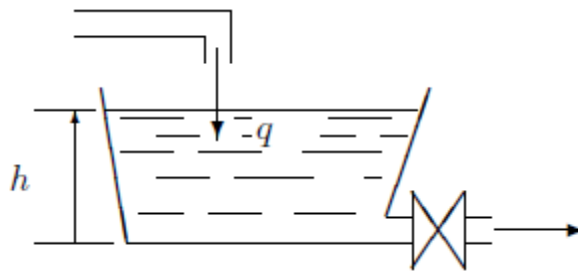


Figura 9: Control de nivel de un tanque

El objetivo de control es que el nivel $y = x$ siga a una referencia y_R . Usando y_R como variable de tabulación. Supóngase un punto de operación genérico $y_R = \alpha = Cte$, como la salida y debe mantenerse igual a α en este punto es necesario que

$$\dot{x}|_{x=\alpha} = 0 \Rightarrow \bar{u}(\alpha) = c\sqrt{2\alpha}.$$

Linealizando alrededor del PO inducido por $y_R = \alpha = Cte$

$$PO(\alpha) = \begin{bmatrix} \bar{x} = \alpha & \bar{u} = c\sqrt{2\alpha} \end{bmatrix}^T$$

Se obtiene el modelo lineal alrededor del PO, el cual está parametrizado por α

$$\dot{x}_\delta = a(\alpha)x_\delta + b(\alpha)u_\delta$$

Donde

$$x_\delta = x - \alpha \quad a(\alpha) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{PO} = \frac{-c\sqrt{2\alpha}}{2\alpha\beta(\alpha)}$$

$$u_\delta = u - \bar{u}(\alpha) \quad b(\alpha) = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{PO} = \frac{1}{\beta(\alpha)}$$

Considérese el control PI (proporcional-integral)

$$u_\delta = K_1 e + K_2 \sigma$$

$$\dot{\sigma} = y - y_R = e = x_\delta - r_\delta$$

Donde $r_\delta = y_R - \alpha$, luego el sistema a lazo cerrado en las nuevas variables $\begin{bmatrix} x_\delta & \sigma \end{bmatrix}^T$ es,

$$\dot{x}_\delta = a(\alpha)x_\delta + K_1 b(\alpha)x_\delta - K_1 b(\alpha)r_\delta + K_2 b(\alpha)\sigma$$

$$\dot{\sigma} = x_\delta - r_\delta$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_\delta \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(\alpha) + K_1 b(\alpha) & K_2 b(\alpha) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\delta \\ \sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_1 b(\alpha) \\ -1 \end{bmatrix} r_\delta$$

Cuyo polinomio característico es

$$s^2 - [a(\alpha) + K_1 b(\alpha)]s - K_2 b(\alpha)$$

Igualando con un sistema de segundo orden

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

Resultan

$$K_1(\alpha) = -\frac{2\xi\omega_n + a(\alpha)}{b(\alpha)} \quad K_2(\alpha) = -\frac{\omega_n^2}{b(\alpha)}$$

Es decir las 2 ganancias son variables, pero si se reparametriza el controlador PI

$$u_\delta = K_1 e + K_2 \sigma = K \left(e + \frac{1}{T} \sigma \right) \quad K = K_1, T = \frac{K_1}{K_2}$$

$$K(\alpha) \simeq -\frac{2\xi\omega_n + a(\alpha)}{b(\alpha)} \quad T \simeq -\frac{2\xi + a(\alpha)}{\omega_n^2}$$

Y si se asume que la parte real de los polos de lazo cerrado es mucho mayor que el de lazo abierto, es decir $|a(\alpha)| \ll 2\xi\omega_n$, lo cual deviene en un sistema más rápido a lazo cerrado

Resulta

$$K(\alpha) \simeq -\frac{2\xi\omega_n}{b(\alpha)} \quad T \simeq -\frac{2\xi}{\omega_n^2}$$

Con lo que bastaría cambiar la ganancia K del PI según la altura deseada

El control real por ganancia tabulada se obtiene cuando se reemplazan en el controlador los puntos de operación α por la variable de tabulación y_R que normalmente es la referencia

Esto trae consecuencias adversas puesto que la variable de tabulación puede variar y por tanto su derivada no es cero, lo que agrega dinámicas no consideradas en el proceso de diseño anterior.

Con valores numéricos y suponiendo que la sección es uniforme (tanque cilíndrico) haciendo por simplicidad $\beta(\alpha) = 1, c = 1, 0.2 < \alpha < 1$ resulta el sistema

$$\dot{x} = (u - \sqrt{2x})$$

Que linealizado da

$$\dot{x}_\delta = -\frac{1}{\sqrt{2\alpha}} x_\delta + u$$

Su polo de lazo abierto sera

$$a(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \Rightarrow -1.6 < a(\alpha) < -0.707$$

Se pretende que el sistema de lazo cerrado tenga valores

$$\xi = 1, \omega_n = 1 \Rightarrow \text{Re}\{p_{1,2}\} = -1$$

Lo que supondría un tiempo de establecimiento de 5.6 seg sin sobrepaso

Si bien no cumple las condiciones de simplificación del PI vistas, ello no es necesario pues al haber considerado la sección constante el termino integrador es constante

$$\beta(\alpha) = 1 \Rightarrow b(\alpha) = 1$$

Se puede usar el controlador PI diseñado de forma general

$$K_1(\alpha) = -2\xi\omega_n + a(\alpha) \quad K_2(\alpha) = -\omega_n^2$$

Donde reemplazando los valores resulta

$$u(t) = -\left(2e(t) + \frac{1}{\sqrt{2y_R}} e(t) + \int_0^t e(\tau) d\tau\right)$$

Donde el término tabulado es

$$K_T(y_R) = \frac{1}{\sqrt{2y_R}}$$

También hay que tener en cuenta que la variable de control por ser un caudal tiene la restricción de no ser negativa, resultados de simulación para varios escalones de referencia incrementados de 0.2 en 0.2 hasta 1 y luego bajado a 0.2 se muestran en la figura 10

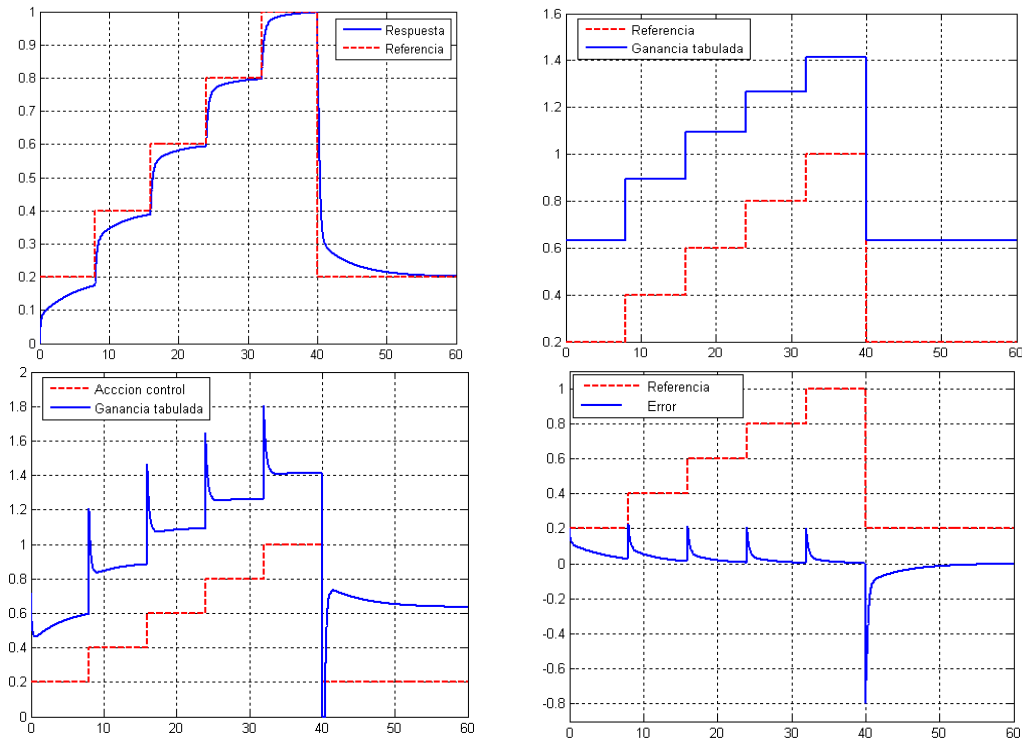


Figura 10: Control de nivel de un tanque por ganancia tabulada

Resumen del método.

En base al ejemplo 3, se pueden resumir los pasos a seguir para diseñar un control por ganancia tabulada

- 1) Linealizar el modelo no lineal alrededor de una familia de POs parametrizada por las variables de tabulación.
- 2) Diseñar una familia parametrizada de controladores lineales que consigan el desempeño deseado para la familia de modelos lineales en cada PO.
- 3) Construir un control por ganancia tabulada tal que, en cada PO, el control genere un valor estático que produzca error estático nulo
- 4) Verificar por simulación el desempeño no local del control por ganancia tabulada para el modelo no lineal.

El paso 3 puede conseguirse resolviendo el problema de diseño sólo en un número finito de POs usando la misma estructura de control para todos ellos pero permitiendo que los parámetros del controlador cambien de un PO a otro, esto es útil cuando la variable a tabular cambia permanentemente en el tiempo y no de forma escalonada como se vio

Linealización Exacta por Realimentación

Sea el sistema **afín a la ley de control** definido como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

El problema consiste en plantear qué condiciones se necesitan para que exista una realimentación de estados

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

Que transformen al sistema no lineal a una forma lineal equivalente.

Esta linealización no se refiere a la "Jacobiana" aproximada del sistema, sino que convierte exactamente al sistema en lineal en la nueva variable v .

Posiblemente sea necesario un cambio de variables

$$z = T(x)$$

Linealización Entrada-Estado

Se puede introducir la idea de linealización exacta por realimentación de estados a través del péndulo.

Ejemplo 5: Linealización del péndulo

En el ejemplo 2 a través de la asignación de estados

$$x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$$

Se obtuvo el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a[\sin(x_1)] - bx_2 + cu\end{aligned}$$

Eligiendo la ley de control

$$u = \frac{a}{c}[\sin(x_1)] + \frac{v}{c}$$

Para cancelar el término no lineal de la segunda ecuación y obtener el sistema lineal en la nueva variable de entrada v

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 + v \\ y &= x_1\end{aligned}$$

De esta manera, el problema se reduce al control de un sistema lineal, un esquema se muestra en la figura 13 y no debe confundirse con la **prealimentación** del ejemplo 2

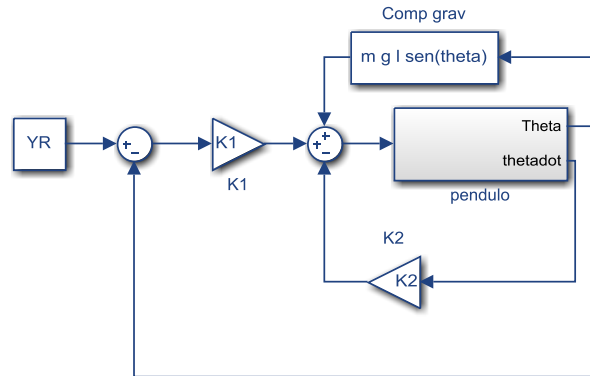


Figura 12: Linealización por realimentación del péndulo

Sea el error de seguimiento

$$e = \theta_R - \theta$$

Y el controlador P+D

$$v = k_1 e - k_2 \dot{\theta}$$

Luego la ley completa de control sería

$$u = mgl[\text{sen}(\theta)] + \frac{1}{c}(k_1 e + k_2 \dot{\theta})$$

Las matrices del sistema linealizado con los valores el ejemplo 2 son

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Y se puede hacer asignación de un polo doble en -2 mediante la orden Acker de Matlab

$$A = [0 \ 1; 0 \ -1], B = [0; 1]$$

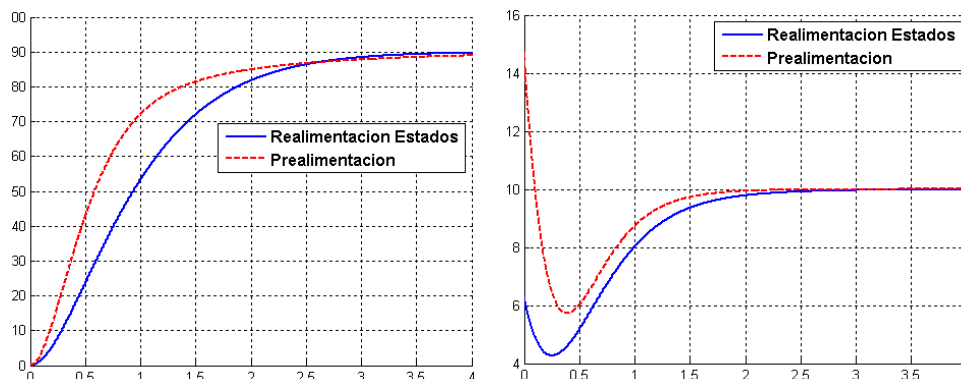
$$K = \text{acker}(A, B, [-2 \ -2])$$

$$v = -4e - 3\dot{\theta}$$

Este control se conoce como P+D con compensación de gravedad

- Obsérvese que en esta técnica las matrices A y B son constantes y en el caso de prealimentación variaban con el punto de trabajo.

En la figura 13 se muestran los resultados de simulación comparados, en el caso de prealimentación de la referencia, en el cual la respuesta es más rápida a expensas de un mayor esfuerzo de control.



(a)

(b)

Figura 13: Resultados simulación ejemplo 5 y 2 (a) Salida en grados (b) Torque

Al igual que la prealimentación el método solo funciona bien cuando se conoce con mucha exactitud el modelo

Sea por ejemplo el péndulo linealizado por realimentación ya visto, en realidad la ley de control está basada en los valores estimados de los parámetros, supóngase que es

$$u = \tilde{m}gl[\sin(\theta)] + k_1 e + k_2 \dot{\theta} ..$$

Donde la estimación de la masa, por ejemplo, es incorrecta, es decir existe una variación

$$\Delta m = \frac{m - \tilde{m}}{m}$$

En estado de régimen se deben igualar el torque de restitución con el proporcionado por el controlador quedando

$$mgl[\sin(\theta)] = \tilde{m}gl[\sin(\theta)] + k_1 e$$

$$\Delta mgl[\sin(\theta)] = k_1 e$$

Si se ha sobreestimado la masa

$$\Delta m < 0 \Rightarrow e < 0 \Rightarrow \theta > \theta_R$$

Es decir hay error negativo ante un escalon

Si en cambio se ha subestimado

$$\Delta m > 0 \Rightarrow e > 0 \Rightarrow \theta < \theta_R$$

Ahora hay error positivo ante un escalon

En la figura se muestran resultados de simulación para $\theta_R = 90^\circ$ con $\Delta m = \pm 10\%$

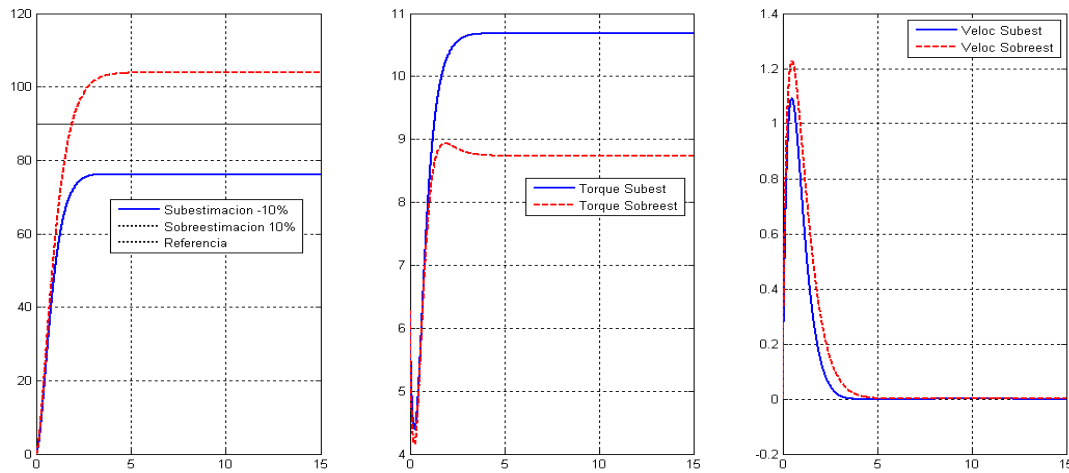


Figura: Resultados con sobre y subestimación de la masa

Procedimiento general

Dado lo anterior se puede deducir que

- Para cancelar un término no lineal $\alpha(x)$ por substracción, siempre deben aparecer juntos en forma de suma $u + \alpha(x)$
- para cancelar un término no lineal $\gamma(x)$ por división siempre deben aparecer juntos en forma de producto $\gamma(x)u$ y $1/\gamma(x) \neq 0$ en el dominio de interés

La posibilidad de convertir una ecuación de estado no lineal en una lineal controlable cancelando alinealidades por realimentación de los estados requiere entonces que la ecuación no lineal tenga, al menos en un entorno del origen, una estructura del tipo

$$\dot{x} = Ax + B\beta(x)[u - \alpha(x)]$$

Con (A,B) controlable y $\beta(x)$ no singular luego con la ley de control

$$u = \alpha(x) + \beta(x)^{-1}v$$

Se obtiene la ecuación lineal

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Aun cuando el sistema no esté en la forma deseada, puede existir un cambio de variables que lo lleve a la forma deseada, esto es si existe lo que se conoce como **Difeomorfismo**, el cual es una transformación $z = T(x)$ definida en un dominio D_x tal que su transformación inversa $x = T^{-1}(z)$ este definida en $D_z = T^{-1}(D_x)$ y ambas transformaciones sean continuamente diferenciables en sus respectivos dominios.

Conveniencia de la Linealización

Básicamente, la técnica de linealización se basa en la cancelación de los términos no lineales del sistema, lo cual simplifica el problema de diseño del controlador no lineal general a un controlador no lineal que cancele alinealidades y luego uno lineal cuyos parámetros se determinan mediante las técnicas convencionales de asignación de polos o similares con relativa facilidad.

Sin embargo, no siempre es buena idea cancelar alinealidades, dado que puede haber alinealidades “convenientes” desde el punto de vista de desempeño del sistema, se ilustrará la idea con un ejemplo.

Ejemplo 6: Sistema inestable cancelación alinealidad

Sea el sistema inestable en el origen

$$\dot{x} = ax - bx^3 + u$$

Con $a, b > 0$ constantes positivas, si se utiliza la ley de control linealizante y estabilizante

$$u = -(\gamma + a)x + bx^3$$

Con $\gamma > 0$, Resulta el sistema de lazo cerrado lineal

$$\dot{x} = -\gamma x$$

Pero esta ley de control cancela el término $-bx^3$ que provee “amortiguamiento no lineal” al sistema. De hecho, este término garantiza, a pesar de que el origen del sistema a lazo abierto sea inestable, que las soluciones del sistema sean acotadas. Alternativamente usando el control lineal estabilizante

$$u = -(\gamma + a)x$$

Resulta el sistema de lazo cerrado no lineal

$$\dot{x} = -\gamma x - bx^3$$

Cuyo origen es globalmente asintóticamente estable y sus trayectorias se aproximan al origen más rápido que las de $\dot{x} = -\gamma x$. Además, el control lineal es más simple de implementar y requiere menos esfuerzo de control, tal cual puede apreciarse en la figura 14.

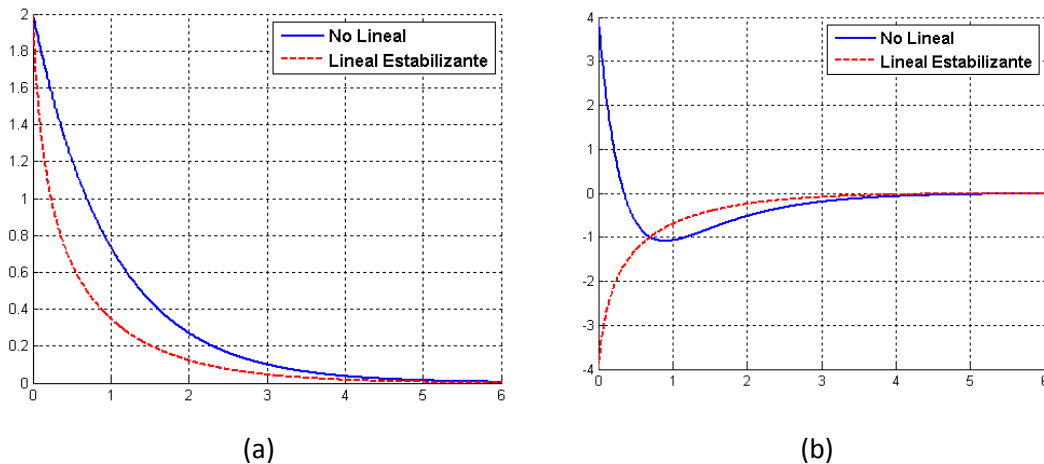


Figura 14: Resultados simulación ejemplo 6 (a) Salida (b) Acción control

Como conclusión se puede decir que la linealización es una herramienta poderosa, pero, no hay que perder de vista, dado el ejemplo anterior, que no siempre es la alternativa más adecuada

Seguimiento

El objetivo de control ahora es diseñar la entrada de control de forma que algunas salidas deseadas $y(t)$ sigan una señal de referencia $y_R(t)$ **no necesariamente constante** manteniendo los **estados acotados**, claramente es un problema más difícil que la regulación a una referencia constante y en la mayoría de los casos no hay un seguimiento perfecto debido a las dinámicas involucradas en los procesos y la naturaleza de las referencias a seguir.

Se puede pedir que dicho seguimiento sea **asintótico**, es decir:

$$e(t) = y - y_R(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$$

Lo cual funciona para referencias "suaves" pero muchas veces es imposible para cierto tipo de señales, más aun si son señales con cambios abruptos

Se puede pedir alternativamente, que $e(t)$ esté **acotado**

$$\|e(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq T$$

El problema de seguimiento se puede reformular entonces como un problema de hallar la entrada $u(t)$ que provea la estabilización (asintótica o no) del error de seguimiento cuya dinámica vectorial es

$$\dot{e}(t) = f(e, Y_R, u)$$

Acción Integral

Tal como en los sistemas lineales la acción integral sobre el error mejora la capacidad de seguimiento a costa de aumentar el orden del sistema y volverlo más oscilatorio, se tratará el tema a través de un ejemplo

Ejemplo 7: Mejora de seguimiento con Accion Integral

Sea el sistema del ejemplo 6 que se desea siga a una referencia $x_R(t)$ con la ley de control linealizante y estabilizante

$$u = bx^3 - ax + v$$

Luego el sistema linealizado corresponde a un integrador puro

$$\dot{x} = v$$

Sea ahora la ley de control proporcional (P) sobre el error

$$v = -\gamma e$$

con $e = x - x_R$ error de seguimiento, luego el sistema en términos del error resulta

$$\dot{e} = -\lambda e - \dot{x}_R$$

Supóngase una referencia **constante** $x_R = C$, luego $\dot{x}_R = \ddot{x}_R = 0$ entonces

$$\dot{e} = -\lambda e$$

Es asintóticamente estable y el error converge a $e_{ss} = 0$

Si fuera una referencia lineal (rampa) $x_R = Ct$ luego $\dot{x}_R = C$ y

$$\dot{e} = -\lambda e - C$$

Cuando

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow \dot{e} \rightarrow 0 \Rightarrow 0 = -\lambda e - C$$

Es estable y el error converge a $e_{ss} = -\frac{C}{\lambda}$

Supóngase una referencia cuadrática (Parábola) $x_R = Ct^2 / 2$ luego $\dot{x}_R = Ct$

$$\dot{e} = -\lambda e - Ct$$

Cuando

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow |\dot{e}| = |\lambda e + Ct| \rightarrow \infty$$

Es inestable y el error diverge

Sea ahora la ley de **control Proporcional Integral (PI)** sobre el error

$$v = -\gamma e - k \int_0^t e(\tau) d\tau$$

Con $e = x - x_R$ error de seguimiento, luego el sistema en términos del error resulta

$$\dot{e} = -\lambda e - k \int_0^t e(\tau) d\tau - \dot{x}_R$$

Derivando se obtiene

$$\ddot{e} = -\lambda \dot{e} - ke - \ddot{x}_R$$

Ahora para una referencia lineal $\ddot{x}_R = 0$

$$\ddot{e} = -\lambda \dot{e} - ke$$

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow \ddot{e} = 0 \Rightarrow \lambda \dot{e} = -ke \Rightarrow \dot{e} = 0 \Rightarrow e = 0$$

Asintóticamente estable, error nulo $e_{ss} = 0$

Ahora para la referencia cuadrática (Parábola) $\ddot{x}_R = C$

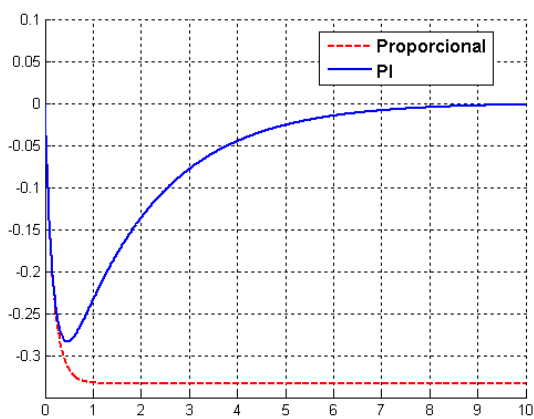
$$\ddot{e} = -\lambda \dot{e} - ke - C$$

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow \ddot{e} = 0 \Rightarrow \lambda \dot{e} = -ke - C \Rightarrow \dot{e} = 0$$

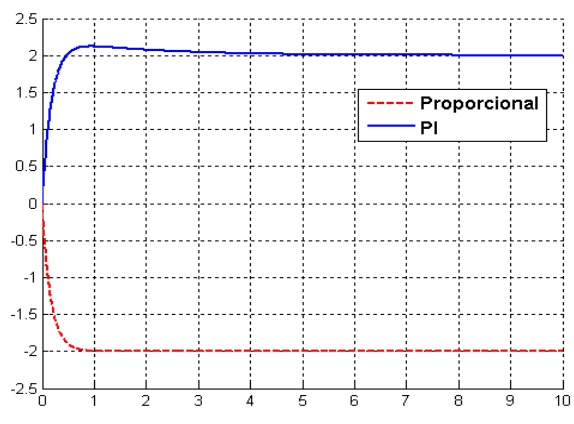
$$ke = -C \Rightarrow e = \frac{-C}{k}$$

Aquí el sistema es estable y con error de régimen acotado.

En las figuras se observan los resultados comparados de simulación



(a)



(b)

Figura 16: Resultados simulación Rampa (a) Error (b) Salida controlador lineal

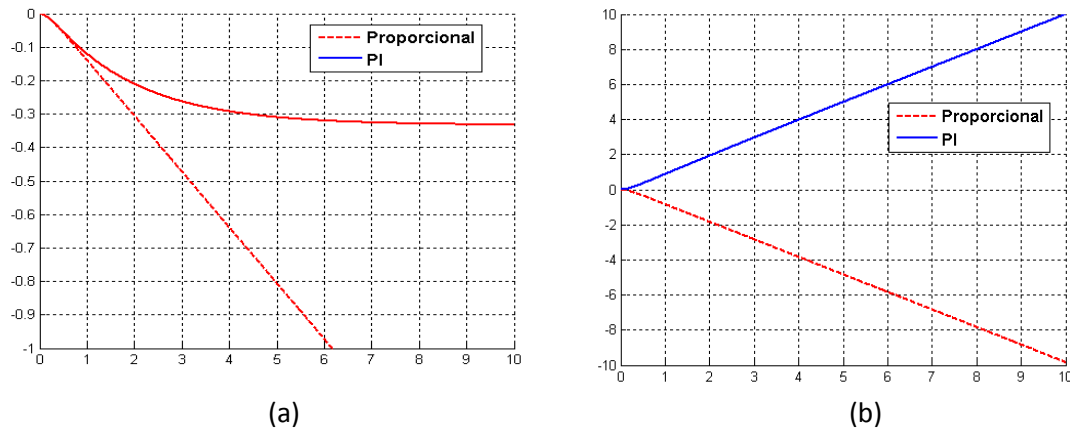


Figura 17: Resultados simulación Parábola (a) Error (b) Salida controlador lineal

Seguimiento de trayectorias no suaves

En general es difícil seguir trayectorias con derivadas discontinuas con valores de error nulo o bajo, se ilustrará con un ejemplo para una trayectoria lineal a tramos repetitiva.

Ejemplo 8: Seguimiento del péndulo linealizado a una referencia lineal a tramos

A modo de conclusión se ilustrará la capacidad de seguimiento del péndulo linealizado por realimentación de la salida de la figura 18 frente a una secuencia de referencia $y_R(t)$ lineal a tramos. En el ejemplo 5 se obtuvo para el modelo linealizado

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} C = [1 \quad 0]$$

El cual tiene un autovalor (polo) de lazo abierto en el origen, luego es un sistema de tipo 1 que sigue sin error a un escalón y con error finito a una rampa si se usa en la configuración de la figura 12 y las constantes ya calculadas en el ejemplo 5 en el cual se diseñó de forma que los autovalores estén en -2 y de la figura 19 (a) se obtuvo que el tiempo de respuesta al escalón es aproximadamente de 3.5 segundos. Se calculará el error de la respuesta a una rampa de pendiente C

$$y_R(t) = Ct$$

La función de transferencia del sistema linealizado es

$$F(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s(s+1)}$$

Incorporando el controlador PD

$$C(s) = k_1 E(s) - sk_2 y(s)$$

Resulta para lazo abierto la función

$$G(s) = \frac{k_1}{s[s + (1 + k_2)]}$$

Luego su constante de error a la rampa es

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{k_1}{1 + k_2}$$

Y el error en estado estacionario será

$$e_{ss} = C \frac{1 + k_2}{k_1}$$

Se simuló su comportamiento para una señal que es combinación de rampas lineales y constantes que cambian cada 5 segundos como se muestra en la figura 20 (a), obteniéndose los resultados que se muestran en la figura 18, donde puede observarse que el error está acotado. En dicha figura también se muestra el torque de control, el cual puede

descomponerse en una componente para compensar el efecto gravitatorio y otro dado por el controlador lineal, según la figura 19

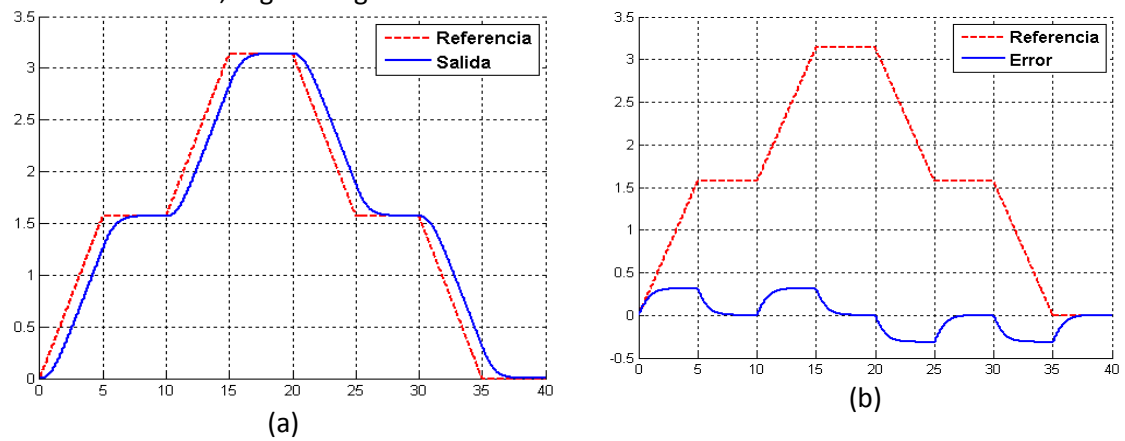


Figura 18: Resultados simulación seguimiento en Grados (a) Salida (b) Error

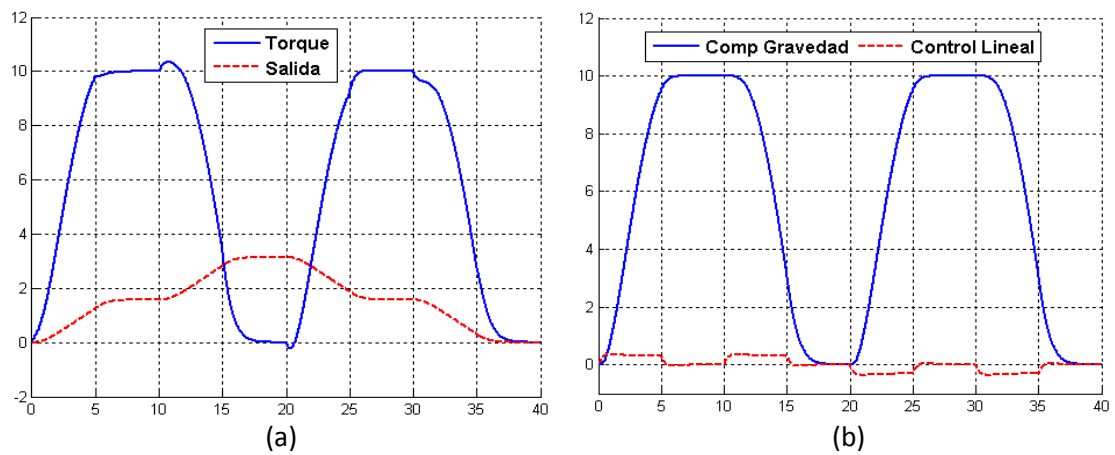


Figura 19: Torques de control (a) total (b) compensador gravedad y controlador lineal