Mg. Ing. Sergio Laboret
Cátedra Sistemas de control II
Departamento de Electrónica

Capítulo 4

Estabilidad en sentido de Lyapunov

Introducción

Determinar la estabilidad juega un rol central en teoría de sistemas e ingeniería. Existen distintos tipos de problemas de estabilidad en los sistemas dinámicos.
Frecuentemente se suele definir la estabilidad de un sistema en sentido entrada/salida y se dice que es estable en sentido BIBO si para toda entrada acotada la salida permanece acotada:

$$\forall u \,/\, |u(t)| < M \Rightarrow |y(t)| < N$$

Sin embargo esta definición para un modelo del tipo externo o "caja gris" no siempre garantiza estabilidad de los estados, ya que puede haber algunos de ellos que crezcan sin control y no ser observables a la salida.
Ante la posibilidad de múltiples equilibrios en los sistemas no lineales hay que analizar la estabilidad de cada uno de ellos, por ello no se puede hablar de estabilidad del sistema sino de cada equilibrio.
Para analizar la estabilidad de un equilibrio hay que **perturbarlo** ligeramente, es decir la condición inicial no debe ser el equilibrio (ya que permanecería en el) sino un punto en un entorno del mismo.
En esta sección por simplicidad se supondrá el origen del espacio de estados como equilibrio, ya que siempre es posible llevar un equilibrio al origen mediante una traslación de coordenadas, supóngase que el sistema

$$\dot{z} = g(z), g(\overline{z}) = 0$$

Haciendo una traslación

$$x = z - \overline{z} \Rightarrow \dot{x} = \dot{z} = f(z - \overline{z}) \Rightarrow \dot{x} = f(x), f(0) = 0$$

Lo cual puede repetirse para cada equilibrio, el problema entonces pasa a ser determinar la estabilidad del origen.

Ejemplo 1 : Traslación del Péndulo
El péndulo, cambiando la notación se representa por

$$\dot{z}_1 = z_2 = g_1(z_1, z_2)$$
$$\dot{z}_2 = -z_2 - sen(z_1) = g_2(z_1, z_2)$$

Con equilibrios en

$$\begin{bmatrix} 2k\pi & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} (2k+1)\pi & 0 \end{bmatrix}^T$$

Se trasladará a ***0*** el equilibrio en $\overline{z} = \begin{bmatrix} \pi & 0 \end{bmatrix}^T$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 - \pi \\ z_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = -x_2 - sen(x_1 + \pi) = -x_2 + sen(x_1) = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

Que tiene como equilibrio al origen y sus equivalentes geométricos

Definiciones de estabilidad **según Lyapunov**

Sea el sistema

$$\dot{x} = f(x)$$

Con equilibrio en el **origen** y ***f* Lipschitz**, con lo cual tiene solución única, la cual que parte de la condición inicial x_0 y se denota como $s(t, x_0)$

Estabilidad

Se dice que el origen es **estable (E)** en sentido de Lyapunov si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 / \|x_0\| < \delta \Rightarrow \|s(t, x_0)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$$

Es decir que es posible mantener la solución **arbitrariamente cerca** del origen con sólo elegir el punto inicial lo **suficientemente cercano** lo cual se grafica en la figura 1 a
El hecho de que la solución este acotada no garantiza estabilidad, como por ejemplo el oscilador de Van der Pol, en el cual las trayectorias convergen a un ciclo limite lo cual se muestra en la figura 1 c
Que la solución tienda al origen asintóticamente tampoco significa necesariamente estabilidad como en la figura 1 d
Un oscilador armónico (péndulo sin fricción o red LC) es ***estable*** en este sentido
La estabilidad es una propiedad *local*, es decir en una vecindad del origen
El equilibrio es **inestable** si no es estable

Estabilidad Asintótica

Se dice que el origen es A**sintóticamente Estable (AE)** si

a) Es Estable
b) Es Atractivo, es decir

$$\exists \delta_1 > 0 / \|x_0\| < \delta_1 \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \|s(t, x_0)\| = 0, \forall t \geq 0$$

- Significa que las trayectorias tienden asintóticamente al origen como muestra la figura 1 b
- Atractivo no necesariamente significa que sea estable como se ejemplifica en la figura 1 c
- Un sistema lineal marginalmente estable no es asintóticamente estable

Dominio de atracción

$$B_{\delta_1} = \left\{ x \in \Re^n : \|x\| < \delta_1 \right\}$$

Si el dominio de **atracción** es todo $\Re^n$ es globalmente atractivo, para ello el sistema debe tener un equilibrio ***único.***

Estabilidad Asintótica Global
Se dice que el origen es Globalmente A**sintóticamente Estable (GAE)** si

a) Es Estable
b) Es Globalmente Atractivo

La globalidad es una propiedad de la atractividad, no de la estabilidad, *no existe globalmente estable*

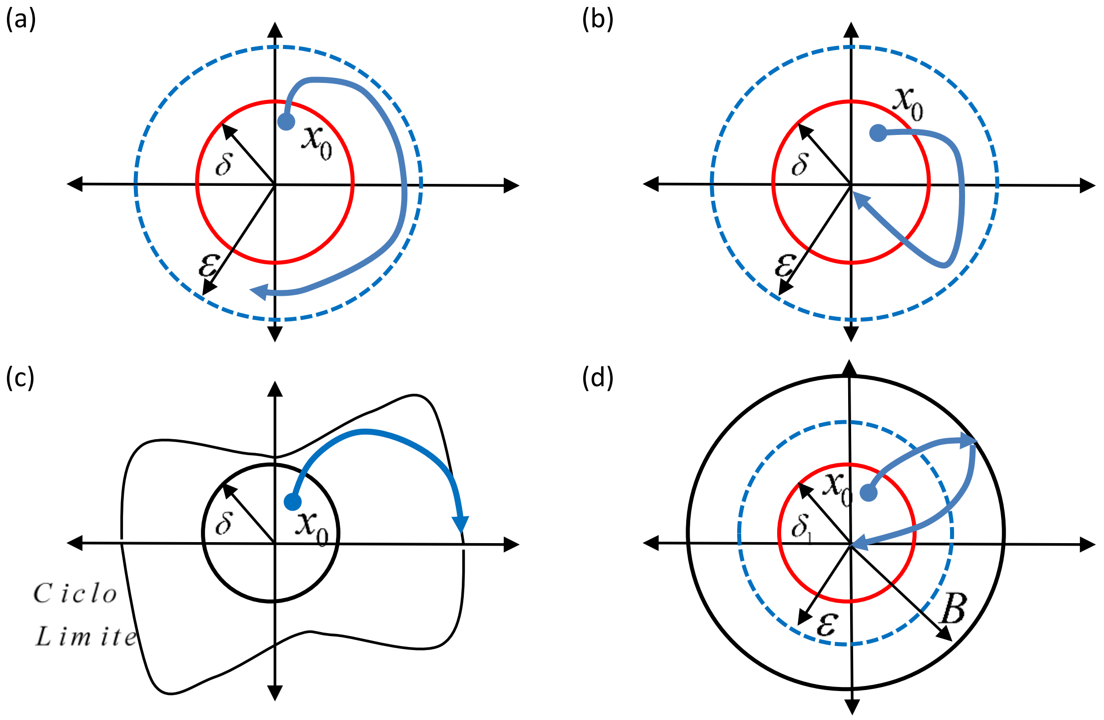


Figura 1: a) Estable, b) AE c) Solución acotada pero inestable d) Atractivo no estable

La estabilidad asintótica asegura convergencia pero nada dice de la velocidad de la misma, para establecer una cota de dicha convergencia se define

Estabilidad Exponencial

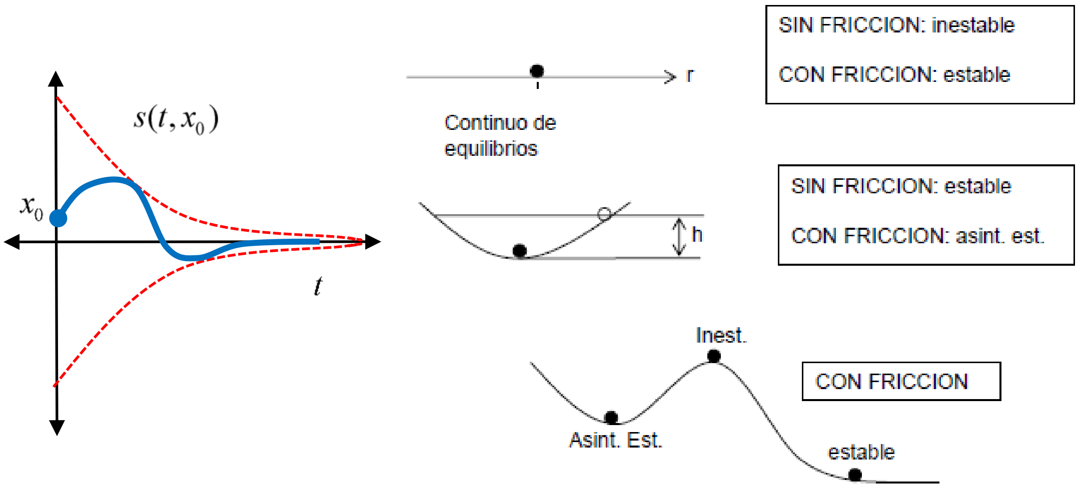
Se dice que el origen es **Exponencialmente Estable (EE)** si

$$\exists \alpha, \beta, \delta > 0 / \|x_0\| < \delta \Rightarrow \|s(t, x_0)\| < \alpha \|x_0\| e^{-\beta t}, \forall t \geq 0, \forall \delta \in B_\delta \subset \Re^n$$

Esta definición proporciona además una medida de la velocidad de convergencia, aunque es más difícil de probar y puede verse esquemáticamente en la figura 2(a).

Si el dominio de atracción es $\Re^n$ es **Globalmente Exponencialmente Estable (GEE)**

Si un sistema lineal es estrictamente estable es GEE



(a) **(b)**

Figura 2: a) estabilidad exponencial b) explicación gráfica estabilidad

En la figura 2(b) se muestra una interpretación intuitiva de las definiciones de estabilidad y en la 3 las relaciones entre ellas, según sus propiedades en forma de diagrama de Venn, recuérdese que la estabilidad es una propiedad local y la atracción puede ser local o global.

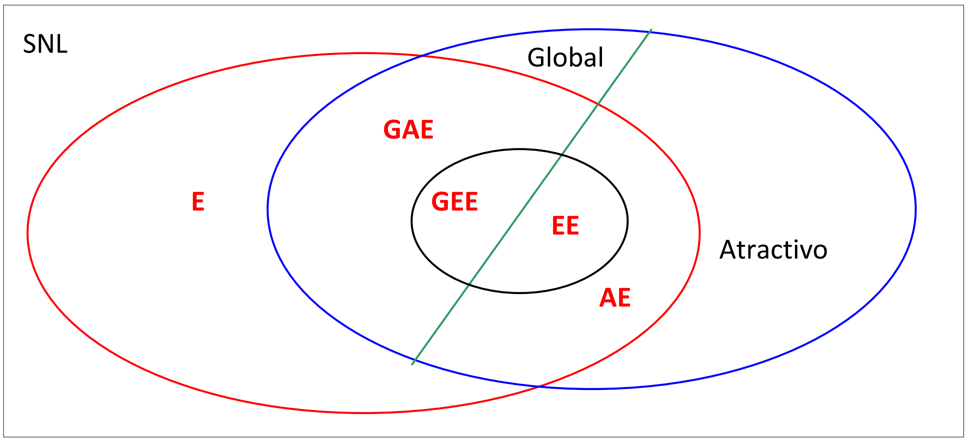


Figura 3: Relaciones entre los tipos de estabilidad

Ejemplo: Probar que si es EE es AE
Hay que mostrar que el equilibrio es a) estable y b) atractivo

a) Por la condición de estabilidad exponencial $\exists \alpha, \beta, \delta > 0$ tal que
$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|s(t, x_0)\| < \alpha \|x_0\| e^{-\beta t}$ como $e^{-\beta t} \leq 1, \forall t \geq 0 \Rightarrow \|s(t, x_0)\| < \alpha \|x_0\|$
entonces haciendo $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{\alpha}$ $\|x_0)\| < \delta \Rightarrow \|s(t, x_0)\| < \alpha \dfrac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon \;\; \forall t \geq t_0$: **estable**

b) Además $\alpha \|x_0\| e^{-\beta t} \to 0 \Rightarrow \|s(t, x_0)\| \to 0$ con $t \to \infty$: **atractivo**

Observaciones

- Determinar estabilidad a partir de la definición a menudo exige conocer la solución del sistema o bien una buena estimación de su comportamiento, lo cual se torna engorroso ya que muchas veces la solución es imposible de determinar
- Para ellos existen varios métodos que no requieren la solución explicita
- Frecuentemente se suele emplear la notación $"\geq 0"$ $("\leq 0")$ para indicar que una función es localmente definida positiva o negativa y $"> 0"$ $("< 0")$ para indicar que es definida positiva o negativa, pero es sólo una cuestión de notación, no tiene que ver con el signo en sí de la función.

Método indirecto de Lyapunov

Se puede determinar estabilidad o inestabilidad linealizando el sistema alrededor de un equilibrio y analizando su comportamiento local por los autovalores de la Jacobiana, pero

- No es posible definir el rango de validez de la aproximación.
- En ocasiones el método falla
- Una ventaja es que no hace falta trasladar el equilibrio al origen
- La mayor utilidad de este método reside en su facilidad para probar inestabilidad.

Sea $\dot{x} = f(x)$ con $f(\overline{x}) = 0$ se puede escribir en un entorno del equilibrio $\overline{x}$ como

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x = \overline{x}} + fos(x) \simeq Ax$$

Donde A es la matriz Jacobiana y $fos(x)$ los términos de orden superior

Teorema: Sistema Linealizado

- Si los autovalores de A son todos a **parte real negativa** el equilibrio del sistema no lineal es asintóticamente estable
- Si existe al menos un autovalor de A **parte real positiva** el equilibrio del sistema no lineal es inestable
- Si no hay autovalores de A a parte real positiva, pero hay al menos uno sobre el eje $j\omega$ el método falla y los términos de orden superior deciden la estabilidad.

Ejemplo 7: Sistema con origen inestable del ejemplo 4
Sea:

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_2 + x_1 x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 - {x_2}^2$$

Linealizando alrededor del origen

$$A = \begin{bmatrix} 1 + x_2 & -1 + x_1 \\ 0 & -1 - 2x_2 \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Calculando los autovalores

$$|\lambda I - A| = \left| \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \right| = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

Indica que hay uno a parte real positiva y es inestable

Ejemplo 8: Estabilidad por Linealizacion
Sea el sistema no lineal

$$\dot{x} = -y + xy^2 = f(x, y)$$
$$\dot{y} = x - x^2 = g(x, y)$$

Los equilibrios son

$$E_1 = \begin{bmatrix} x = 0 \\ y = 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} x = 1 \\ y = 1 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} x = 1 \\ y = 0 \end{bmatrix}$$

Luego la Jacobiana es

$$A = \begin{bmatrix} y^2 & 2y - 1 \\ 1 - 2x & 0 \end{bmatrix}$$

Valuando en el origen

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda_{1,2} = \pm j$$

Imaginarios puros: (centro) el método **no decide**
Obsérvese que se puede poner como

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} xy^2 \\ -x^2 \end{bmatrix}$$

Donde

$$fos = \begin{bmatrix} xy^2 \\ -x^2 \end{bmatrix}$$

Son los términos de orden superior que deciden la estabilidad

Para los otros equilibrios

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Complejos a parte real positiva: f**oco** inest**able**

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda_{1,2} = \pm 1$$

Un autovalor a parte real positiva y uno negativa (silla): **inestable**

Una alternativa al cálculo directo de los autovalores para órdenes superiores es el conocido método de Routh Hurwitz haciendo

$$|\lambda I - A| = P(\lambda) = 0$$

- Si los coeficientes de $P(\lambda)$ no son todos del mismo signo o alguno es nulo será inestable

Si no se cumple lo anterior se realiza el arreglo de Routh sobre el polinomio $P(\lambda)$ y mirando la columna principal, si:

- No hay cambios de signo ni se anula ninguna fila los autovalores serán todos negativos: AE
- Hay algún cambio de signo alguno será positivo: IN
- No hay cambios de signo pero se anula una fila habrá imaginarios puros: NO DECIDE

Método directo de Lyapunov

El llamado método directo de Lyapunov se basa en calcular una función que represente la "energía" del sistema y luego analizar si decrece o se mantiene constante en el tiempo.
Los teoremas de estabilidad de Lyapunov dan condiciones **suficientes** para estabilidad de puntos de equilibrio sin resolver las ecuaciones del sistema. Se tratarán a continuación dichos teoremas para sistemas estacionarios.

Función de Lyapunov

Una función de Lyapunov es una función real valuada de los estados, que a su vez son un vector de funciones del tiempo y generalmente representa la energía (real o ficticia) del sistema

$$V[x(t)] : \Re_+ \to \Re^n \to \Re$$

Para ser candidata de Lyapunov debe ser continuamente diferenciable en x y al menos **localmente definida positiva**

Cálculo de la derivada temporal en las trayectorias

Al ser una función compuesta, aplicando la regla de la cadena para derivar V respecto de *t*

$$\dot{V}[x(t)] = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \dots\dots \frac{\partial V}{\partial x_n}\dot{x}_n$$

Y remplazando las derivadas de *x* respecto de *t*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{matrix} f_1(x_1 \dots x_n) \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x_1 \dots x_n) \end{matrix}$$

Las cuales son las trayectorias del sistema, se obtiene

$$\dot{V}[x(t)] = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x_1 \dots x_n) + \dots\dots \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(x_1 \dots x_n)$$

En notación abreviada sería el producto interno del gradiente de *V* y *f*

$$\dot{V}[x(t)] = (\nabla V)\bullet f(x_1 .... x_n)$$

Lo cual permite calcular la derivada temporal de V sin resolver el sistema, y por ende

$$V[x(t)] = V[x(0)] + \int_0^t \dot{V}[x(\tau)]d\tau$$

Teoremas de estabilidad

Basado en el concepto anterior se mostraran teoremas que permiten dar condiciones suficientes para los distintos tipos de estabilidad

Teorema de estabilidad de Lyapunov

El origen $x = 0$ es **estable** si existe una función de Lyapunov, localmente definida positiva y r>0 tal que

$$\dot{V}(x) \leq 0, \forall x / \|x\| \leq r$$

Esto significa que la derivada temporal de V evaluada en las trayectorias del sistema debe ser ***semidefinida negativa***

Teorema de estabilidad asintótica

El origen $x = 0$ es AE si además se cumple que

$$\dot{V}(x) < 0, \forall x / \|x\| \leq r$$

Es decir la derivada temporal es ***definida negativa***

El conjunto $B_r = \{x : \|x\| \leq r\}$ se denomina dominio de atracción

Teorema de estabilidad asintótica global

Se debe cumplir además que el dominio de atracción sea todo el espacio de estados (por lo que el sistema no puede tener otro equilibrio) y que V sea **radialmente no acotada**, sino puede darse el fenómeno de tiempo de escape finito.

$$\dot{V}(x) < 0, \forall x \in \Re^n$$

$$\lim_{\|x\| \to \infty} V(x) \to \infty$$

Ejemplo 2 : Ecuación de Lienard

Dada la siguiente ecuación genérica de segundo orden:

$$\ddot{y}(t) + f[y(t)]\dot{y}(t) + g[y(t)] = 0$$

Se verá qué condiciones deben cumplir *f* y *g* para que sea: E, AE o GAE

$$\begin{aligned} x_1 &= y & \dot{x}_1 &= x_2 \\ x_2 &= \dot{y} & \dot{x}_2 &= -f[x_1]x_2 - g[x_1] \end{aligned}$$

Definiendo la candidata de Lyapunov

$$V(x) = \frac{{x_2}^2}{2} + \int_0^{x_1} g(\sigma)d\sigma$$

Imponiendo a g la condición de que $\sigma g(\sigma) > 0, \forall \sigma \neq 0 \exists [-\sigma_0 . \sigma_0], g(0) = 0$ la función pasa por el origen y está en el primer y tercer cuadrante al menos en un entorno, lo que asegura

$$\int_0^{x_1} g(\sigma)d\sigma > 0 \forall x_1 \neq 0$$

Luego *V(x)* es **definida positiva** en el intervalo $[-\sigma_0.\sigma_0]$ o sea es Candidata de Lyapunov. Calculando la derivada en las trayectorias

$$\dot{V}(X) = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2$$

Como

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = g(x_1) \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = x_2$$

Reemplazando e introduciendo las trayectorias

$$\dot{V}(X) = g(x_1)\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2$$

$$\dot{V}(X) = g(x_1)x_2 - x_2{}^2 f(x_1) - g(x_1)x_2 = -x_2{}^2 f(x_1)$$

Su definición sólo depende del signo de *f*, entonces:

- $\sigma g(\sigma) > 0, \forall \sigma \neq 0 \exists [-\sigma_0.\sigma_0], g(0) = 0$ y además f es **no negativa** en un entorno del origen : **Estable**
- $\sigma g(\sigma) > 0, \forall \sigma \neq 0 \exists [-\sigma_0.\sigma_0], g(0) = 0$ y f es **estrictamente positiva** en un entorno del origen: **AE**
- $\sigma g(\sigma) > 0, \forall \sigma \neq 0, g(0) = 0$ y $g(\sigma) \to \infty$ con $|\sigma| \to \infty$ hace que *V* sea radialmente no acotada y si f es **estrictamente positiva** para todo x_1 : **GAE**

Como puede verse es un caso que abarca muchos sistemas de segundo orden y las condiciones impuestas sobre las funciones son bastante débiles y se esbozan en la figura 4, donde puede observarse que no se les pide ningún tipo de **definición,** ni siquiera simetría, solo para GAE que *g* sea radialmente no acotada para que su integral diverja en el infinito.

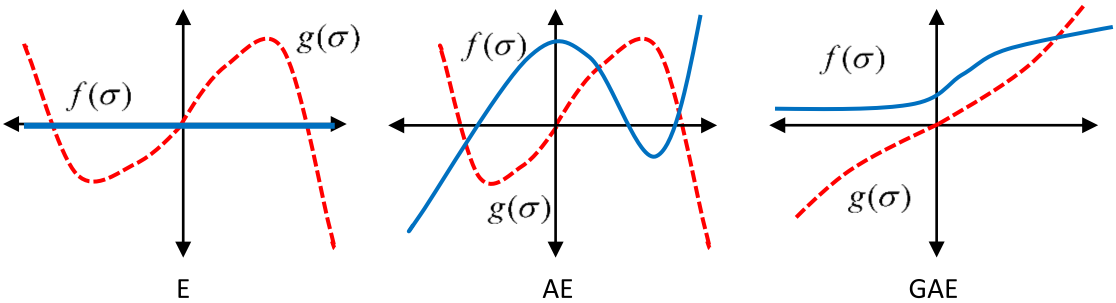


Figura 4 : Ejemplos de funciones *f* (trazo continuo) y *g* (discontinuo) para la ecuación de Lienard y las distintas condiciones de estabilidad

Una condición necesaria (no suficiente) sería que $f(x_1) = b \geq 0$ y $g(x_1) = ksen(x_1), k \geq 0$ con lo que se demostraría estabilidad del péndulo sin fricción ($b = 0$) o EA con fricción ($b > 0$), obviamente no se puede mostrar GAE ya que el seno solo cumple la condición impuesta a *g* en $(-\pi, \pi)$ lo cual es consistente con la física del problema.

Velocidad de convergencia

A menudo es deseable establecer una cota para la convergencia, para ello se dispone de los siguientes teoremas:

Teorema de estabilidad exponencial

El origen es EE si existen constantes $a,b,c,r > 0,\ p \geq 1$ tales que

$$a\|x\|^p \leq V(x) \leq b\|x\|^p \quad \forall x / \|x\| \leq r$$

$$\dot{V}(x) \leq -c\|x\|^p \quad \forall x / \|x\| \leq r$$

Teorema de estabilidad exponencial global

Si lo anterior se cumple $\forall x \in \Re^n$ es GEE

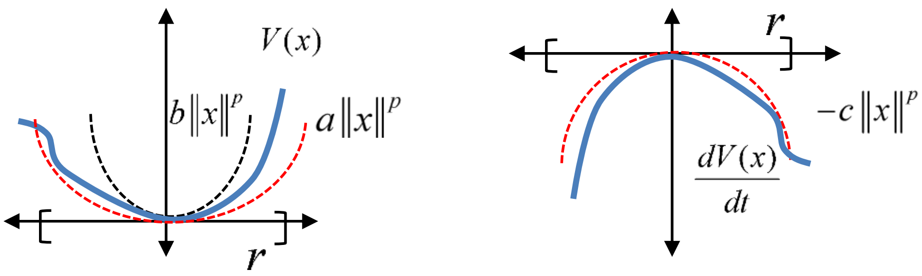


Figura 5 : Condiciones equilibrio EE

Lema: Principio de comparación

Sea $w(t)$ función continua real y $\alpha \in \Re$ entonces si

$$\dot{w}(t) + \alpha w(t) \leq 0 \Rightarrow w(t) \leq w(0)e^{-\alpha t}$$

Si $V(x)$ y $\dot{V}(x)$ cumplen las condiciones de EE (local o global), también cumplen

$$\dot{V}(x) \leq -\frac{c}{b}V(x)$$

Y la velocidad de convergencia aplicando el principio de comparación es :

$$\|x(t)\| \leq \left(\frac{b}{a}\right)\|x(0)\|e^{-\frac{c}{b}t}$$

Es importante aclarar que no es sencillo probar estabilidad exponencial y menos aún determinar la velocidad de convergencia.

Ejemplo 3 : Velocidad de convergencia

Sea el sistema

$$\dot{x}(t) + c(x) = 0 \text{ bajo la condición } xc(x) > 0, \forall x \in \Re$$

Sea $V(x) = x^2 = \|x\|_2^2$ luego $\dot{V}(x) = 2x\dot{x} = -2xc(x)$ bajo la condición impuesta a $c(x)$ es GAE

Si además e impone la condición $xc(x) \geq x\alpha x = \alpha x^2$ entonces

$$\dot{V}(x) \leq -2\alpha x^2 = -2\alpha\|x\|_2^2$$

Lo cual satisface las condiciones de EE, luego

$$\dot{V} \leq -2\alpha V \Rightarrow \quad \dot{V} + 2\alpha V \leq 0 \Rightarrow V(t) \leq V(0)e^{-2\alpha t}$$

$$\|x(t)\|_2^2 \leq \|x(t)\|_2^2 e^{-2\alpha t}$$

Teoremas de inestabilidad

En general es más difícil probar inestabilidad que estabilidad por este método y si bien hay varios teoremas para determinarla el más fácil de utilizar es el siguiente:

Teorema de inestabilidad de Chetaev

El origen $x=0$ es **inestable** si existe V continuamente diferenciable, $V(0)=0$ y

1) $\dot{V}(x)>0$

2) Existen puntos x_0 arbitrariamente cercanos al origen donde $V(x_0)>0$

- No basta con que la derivada temporal sea localmente definida positiva
- No se le pide a la función de Lyapunov que sea definida positiva

Ejemplo 4 : Equilibrio Inestable en el origen

Sea el sistema con equilibrio en el origen definido por

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_2 + x_1 x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 - x_2^{\ 2}$$

Con la candidata de Lyapunov

$$V(x_1,x_2) = (2x_1 - x_2)^2 - x_2^{\ 2}$$

La cual es continuamente diferenciable, V(0)=0 y asume valores positivos arbitrariamente cerca del origen, cuando

$$x_2 = 0 \Rightarrow V(x_1,0) = (2x_1)^2 > 0$$

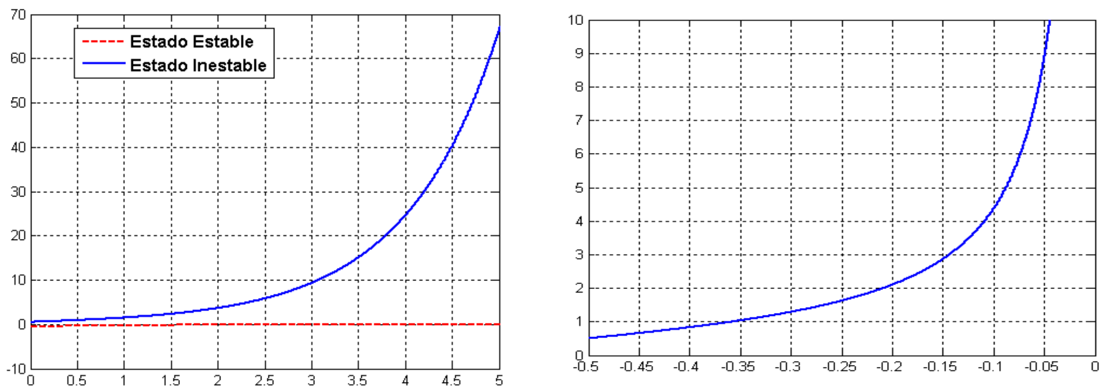
Cumple la condición 2), calculando la derivada

$$\dot{V}(x_1,x_2) = 2(2x_1 - x_2)(2\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - 2x_2\dot{x}_2 = \left[(2x_1 - x_2)^2 + x_2^{\ 2}\right](1+x_2)$$

El factor $\left[(2x_1 - x_2)^2 + x_2^{\ 2}\right] > 0, \forall x_1, x_2 \neq 0$

Y el factor $(1+x_2) > 0, x_2 < -1$

Es localmente definida positiva, cumple condición 1) el origen es inestable
En la figura 6 se muestran los resultados de simulación, donde se ve que un estado es estable y el otro no



(a) (b)

Figura 6: Sistema del ejemplo 4 (a) Evolución temporal (b) Plano de estados

Conjunto Invariante

Un conjunto M es un conjunto invariante si

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \forall t \geq 0$$

Es decir toda trayectoria que comienza en M permanece en M
Ejemplos

- Puntos de equilibrio
- Dominio de atracción de un PE
- Ciclo Límite

Teorema de conjunto invariante local (LaSalle)

Sea V(x) funcion escalar continuamente difrenciable. Asúmase que

$$\exists l > 0 / \Omega = \{x / V(x) < l\} \quad y \quad \dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in \Omega$$

Y sea

$$R \subset \Omega / R = \{x / \dot{V}(x) = 0\}$$

Y M el mayor conjunto invariante en R, entonces

$$x(0) \in \Omega \Rightarrow x(t) \to M, t \to \infty$$

El teorema de LaSalle relaja el requisito del teorema de Lyapunov de que la derivada de V sea definida negativa para probar estabilidad asintótica y además:

- Da una estima de la región de atracción
- Se puede usar en casos donde exista un conjunto de equilibrio en lugar de un PE
- La función V (x) no tiene que ser definida positiva, ***no hace falta que se anule en el origen.***

Teorema de conjunto invariante global

Sea V(x) continuamente diferenciable y **radialmente no acotada** y $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in \Re^n$ Y sea

$$R \subset \Omega / R = \{x / \dot{V}(x) = 0\}$$

Y M el mayor conjunto invariante en R, entonces

$$x(t) \to M, t \to \infty$$

Todas las soluciones convergen a M

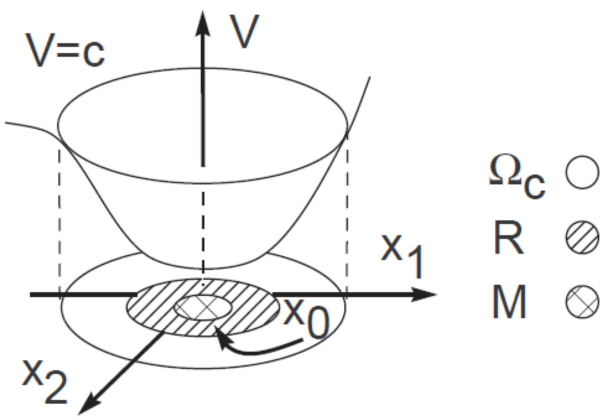


Figura 7 : Ilustración del conjunto invariante

Ejemplo 5: Péndulo con fricción y energías físicas

$\ddot{\theta} + \dot{\theta} + sen\theta = 0$ con $V = K + P = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + (1 - \cos\theta)$ localmente definida positiva.

Aplicando Lyapunov se obtiene

$$\dot{V} = \dot{\theta}\ddot{\theta} + \dot{\theta}sen\theta = \dot{\theta}(-\dot{\theta} - sen\theta) + \dot{\theta}sen\theta = -\dot{\theta}^2$$

Semidefinida negativa: sólo se puede concluir estabilidad.

Ahora bien, el conjunto R donde $\dot{V} = 0$ es el eje θ, pero no es un invariante ya que si

$$\dot{\theta} = 0, \theta > 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = -sen\theta < 0 \quad \dot{\theta} = 0, \theta < 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = -sen\theta > 0$$

En ambos casos habría aceleración que lo llevaría hacia el origen como muestra la figura 8 , por lo tanto es el único conjunto invariante y el equilibrio es AE.

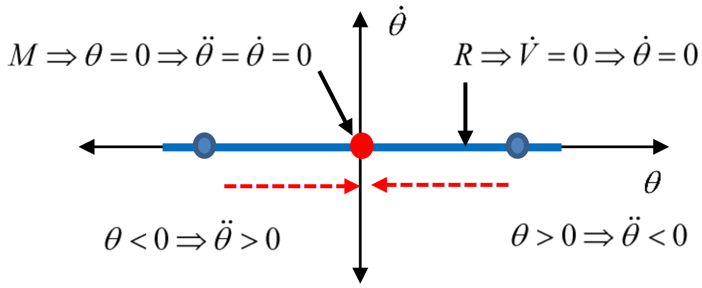


Figura 8: Conjunto invariante del péndulo con ficción

Ventajas y desventajas del método

- Se puede concluir sobre la estabilidad sin resolver el sistema
- Se debe buscar una función de Lyapunov adecuada
- Solo da condiciones suficientes
- Si la función elegida falla no se puede concluir nada
- Algunas funciones dan más información que otras

Ejemplo 6: Péndulo con fricción y energía ficticia

$$\ddot{\theta} + \dot{\theta} + sen\theta = 0$$

Con

$$V = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\dot{\theta} + \theta\right)^2 + 2(1 - \cos\theta)$$

Localmente definida positiva. aplicando Lyapunov se obtiene

$$\dot{V} = \dot{\theta}\ddot{\theta} + \dot{\theta}\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2 + \theta\ddot{\theta} + \theta\dot{\theta} + 2\dot{\theta}sen\theta$$

$$\dot{V} = 2\dot{\theta}(-\dot{\theta} - sen\theta) + \dot{\theta}^2 + \theta(-\dot{\theta} - sen\theta) + \theta\dot{\theta} + 2\dot{\theta}sen\theta$$

$$\dot{V} = -2\dot{\theta}^2 - 2\dot{\theta}sen\theta + \dot{\theta}^2 - \theta\dot{\theta} - \theta sen\theta + \theta\dot{\theta} + 2\dot{\theta}sen\theta = -\left(\dot{\theta}^2 + \theta sen\theta\right)$$

Que es localmente definida negativa: AE

Su dominio de atracción es

$$|\theta| < \pi$$

Si se tomara la energía física (potencial + cinética)

$$V = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + (1 - \cos\theta)$$

$$\dot{V} = \dot{\theta}\ddot{\theta} + sen(\theta)\dot{\theta} = \dot{\theta}(-\dot{\theta} - sen\theta) + \dot{\theta}sen\theta = -\dot{\theta}^2 \le 0$$

Semidefinida negativa: solo se puede concluir estabilidad

Sistemas lineales Invariantes

Para los sistemas LIT $\dot{x} = Ax$ se tiene una candidata de Lyapunov de la forma $V = x^T Px$

Con $P=P^T>0$ simétrica y definida positiva, calculando la derivada

$$\dot{V}=\dot{x}^T Px+x^T P\dot{x}=x^T A^T Px+x^T PAx=x^T\left(A^T P+PA\right)x=x^T Qx$$

Con $Q=\left(A^T P+PA\right)=Q^T<0$ simétrica y definida negativa o semidefinida negativa

Cabe aclarar que dada P simétrica y **dp, Q** puede no ser **dn** o **sdn** aunque el sistema sea estable, por ello es más conveniente elegir $Q=Q^T<0$ definida negativa y despejar P de la ecuación de Lyapunov $A^T P+PA=Q$ si $P=P^T>0$ el sistema es estable.

Matlab cuenta con la función Lyap() para resolver esta ecuación

Métodos para construir funciones de Lyapunov

Se presentan algunos métodos sugeridos para hallar la función de Lyapunov que, si bien no funcionan en todos los casos, son generalmente los primeros en intentarse.

Función cuadrática

Para un sistema de segundo orden la opción más intuitiva es proponer una cuadrática general de la forma

$$V(x_1,x_2)=ax_1^{\,2}+bx_1x_2+cx_2^{\,2}$$

La cual será

- Definida Positiva si $a>0 \quad 4ac>b^2$
- Semidefinida Positiva si $a>0 \quad 4ac\geq b^2$

- Definida Negativa si $a<0 \quad 4ac<b^2$
- Semidefinida Negativa si $a<0 \quad 4ac\leq b^2$

Luego se calcula $\dot{V}$ y se tratan de obtener los valores de los coeficientes para los cuales V es DP y $\dot{V}$ DN simultáneamente

Ejemplo Función cuadrática

Sea el sistema

$$\dot{x}_1=-x_1-x_2$$

$$\dot{x}_2=x_1-x_2^{\,3}$$

Demostrar que el origen es AE mediante la candidata cuadrática

$$V(x_1,x_2)=ax_1^{\,2}+bx_1x_2+cx_2^{\,2}$$

Derivando

$$\dot{V}(x_1,x_2)=2ax_1\dot{x}_1+b\left(x_2\dot{x}_1+x_1\dot{x}_2\right)+2cx_2\dot{x}_2$$

Reemplazando las trayectorias

$$\dot{V}(x_1,x_2)=2ax_1\left(-x_1-x_2\right)+b\left[x_2\left(-x_1-x_2\right)+x_1\left(x_1-x_2^{\,3}\right)\right]+2cx_2\left(x_1-x_2^{\,3}\right)$$

Distribuyendo

$$\dot{V}(x_1,x_2)=-2ax_1^{\,2}-2ax_1x_2-bx_2x_1-bx_2^{\,2}+bx_1^{\,2}-bx_1x_2^{\,3}+2cx_2x_1-2cx_2^{\,4}$$

Si

$$a,c>0$$

El primer término y el último son definidos negativos, para eliminar algunos términos indefinidos se puede hacer

$$b = 0$$

Con lo cual resulta

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -2ax_1^2 - 2ax_1x_2 + 2cx_2x_1 - 2cx_2^4$$

Si además se hace

$$a = c > 0$$

Se cumple que

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -2ax_1^2 - 2ax_2^4$$

Definida negativa y

$$V(x_1, x_2) = ax_1^2 + ax_2^2$$

Definida positiva, el origen es GAE

Método del Gradiente Variable

Sea $V(x)$ una función escalar de x y $g(x) = \left[\partial V / \partial x\right]^T$ como se vio la derivada temporal de V se puede poner como

$$\dot{V}(x) = g(x)^T f(x)$$

La idea es tratar de encontrar $g(x)$ tal que sea el gradiente de una función definida positiva $V(x)$ y tal que $\dot{V}(x)$ sea definida negativa. Se puede probar que $g(x)$ es el gradiente de una función escalar sí y solo sí su matriz Jacobiana

$$J = \left[\partial g / \partial x\right]$$

Es simétrica, es decir

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}, \forall i, j = 1, 2.....n$$

Bajo esta restricción, se elige $g(x)$ tal que $g(x)^T f(x)$ sea **definida negativa**. Una forma usual de definir la función es

$$g(x) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Con los $a_{i,j}(x)$ indeterminados, luego se calcula

$$J = \left[\partial g / \partial x\right]$$

A continuación se imponen las condiciones de simetría y se determina

$$\dot{V}(x) = g(x)^T f(x)$$

y se deducen las condiciones de los coeficientes para que sea definida negativa. Por último se calcula $V(x)$ mediante la integral

$$V(x)=\int_0^x g(y)dy=\int_0^x \sum_{i=1}^{n} g_i\left(y_i\right)dy_i$$

Y se verifica que sea definida positiva

Como la integral de un gradiente no depende del camino, se puede integrar a lo largo de los ejes como se indica en la figura 9

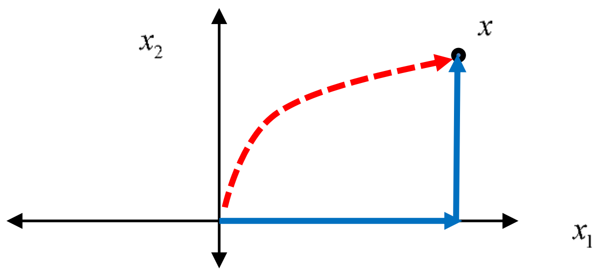


Figura 9: Caminos para calcular la integral de un gradiente

$$V(x)=\int_0^{x_1} g_1(y_1,0....0)dy_1+\int_0^{x_2} g_2(x_1,y_2,0....0)dy_2+....\int_0^{x_n} g_n(x_1,x_2,..y_n)dy_n$$

Ejemplo 9: Función de Lyapunov por gradiente variable

Sea el sistema no lineal

$$\dot{x}_1=-2x_1$$
$$\dot{x}_2=-2x_1+2x_1x_2^{\ 2}$$

Se plantea para $g(x)$

$$g_1(x)=a_{11}(x)x_1+a_{12}(x)x_2$$
$$g_2(x)=a_{21}(x)x_1+a_{22}(x)x_2$$

Por la condición de simetría

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2}=\frac{\partial g_2}{\partial x_1}$$

Aplicando la regla de la cadena

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2}=a_{12}+x_2\frac{\partial a_{12}}{\partial x_2}=a_{21}+x_1\frac{\partial a_{21}}{\partial x_1}=\frac{\partial g_2}{\partial x_1}$$

Eligiendo

$$a_{11}=a_{22}=1, a_{12}=a_{21}=0$$

Se obtiene

$$g_1(x)=x_1, g_2(x)=x_2$$

Luego

$$\dot{V}(x)=g^T(x)f(x)=g_1f_1+g_2f_2=x_1f_1+x_2f_2$$

Incorporando las trayectorias

$$\dot{V}(x)=-2x_1^{\ 2}-2x_2^{\ 2}+2x_1x_2^{\ 3}=-2x_1^{\ 2}-2x_2^{\ 2}(1-x_1x_2)$$

Luego $\dot{V}(x)$ es **localmente definida negativa** en la región $(1-x_1x_2)>0$ que comprende un entorno del origen, ahora se debe calcular V por integración

$$V(x)=\int_0^{x_1} g_1(y_1)dy_1+\int_0^{x_2} g_2(x_1,y_2)dy_2=\int_0^{x_1} y_1dy_1+\int_0^{x_2} y_2dy_2=\frac{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}}{2}$$

Que es definida positiva, luego el origen es **Localmente asintóticamente estable**

Método de Krasovskii

Se basa en proponer una función de Lyapunov similar a la de los sistemas lineales

$$V(x)=f^T(x)f(x)=\sum_{i=1}^{n} f(x)_i^{\,2}$$

La cual es definida positiva por naturaleza

Aquí se puede simplificar el cálculo de $\dot{V}$ teniendo en cuenta que:

$$\dot{f}(x)=\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}=A(x)f(x) \text{ con } A(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

La matriz Jacobiana del sistema, resultando finalmente

$$\dot{V}=f^T\dot{f}+\dot{f}^Tf=f^TAf+f^TA^Tf=f^T(A+A^T)f$$

Si la matriz $A+A^T$ es definida negativa en una vecindad Ω del origen, entonces es asintóticamente estable y si es semidefinida negativa es estable.

Con este método se transforma el problema en calcular la Jacobiana y obtener los autovalores o los menores principales de una matriz de orden n.

Debe observarse que aplicar este método no es lo mismo que estudiar la estabilidad por linealización, ya que aquí la Jacobiana no se valúa en ningún punto y por lo tanto $A+A^T$ puede ser función de las variables de estado.

Ejemplo 10: Aplicación del método de Krasovskii

Sea el sistema

$$\dot{x}_1=-3x_1+x_2=f_1$$

$$\dot{x}_2=x_1-x_2-x_2^{\,3}=f_2$$

La Jacobiana resulta

$$A(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -1-3x_2^{\,2}\end{bmatrix}$$

Luego como A es simétrica

$$A^T+A=2A=\begin{bmatrix}-6 & 2\\ 2 & -2-6x_2^{\,2}\end{bmatrix}$$

Usando el criterio de Sylvester, los menores principales son

$$M_1(x_1,x_2)=-6<0$$

$$M_2(x_1,x_2)=\det\begin{bmatrix}-6 & 2\\ 2 & -2-6x_2^{\,2}\end{bmatrix}=(12+36x_2^{\,2})-4=(8+36x_2^{\,2})>0$$

Cumple los requisitos para ser definida negativa el origen es **asintóticamente estable.**

Nótese que la complejidad algebraica se reduce mucho cuando se puede aplicar este método.

Utilizando el criterio de los autovalores

$$P(\lambda)=\left|\lambda I-(A^T+A)\right|=\left\|\begin{bmatrix}\lambda+6 & -2\\ -2 & \lambda+2+6x_2^{\,2}\end{bmatrix}\right\|=0$$

$$P(\lambda) = (\lambda + 6)(\lambda + 2 + 6{x_2}^2) - 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 6{x_2}^2\lambda + 6\lambda + 8 + 36{x_2}^2 - 4 = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + (8 + 6{x_2}^2)\lambda + (4 + 36{x_2}^2) = 0$$

Es una cuadrática con todos los coeficientes positivos y no nulos, lo que implica autovalores a parte real negativa: definida negativa