Mg. Ing. Sergio Laboret
Cátedra Sistemas de Control II
Departamento de Electrónica

Sistemas de control 2

Clase 8

Control de Sistemas no lineales por realimentación

En general, el objetivo principal de un sistema de control es hacer que algunas salidas de interés *y(t)* se comporten de forma deseada mediante la manipulación de algunas entradas *u(t)* que son las variables manipulables, manteniendo los estados acotados

Regulación
Mantener algunas variables de interés *y(t)* lo más cercanas posibles a algún valor de consigna *R* (Set Point), el cual se mantiene constante al menos durante intervalos de tiempo considerables,
Esto se debe lograr ante la presencia de perturbaciones y manteniendo los estados acotados, es decir el objetivo implícito primario es la estabilización

Seguimiento (Tracking)
Mantener el error de control lo mas pequeño posible nulo ante una señal de entrada que varia continuamente, por ejemplo seguir una trayectoria

Realimentacion

En la mayoría de los casos se requiere el uso de realimentación, puede bastar con la salida o ser necesarios además los estados

Puede darse el caso en que algunos estados no sean medibles en cuyo caso se emplean observadores o estimadores de estados totales o parciales, esto agrega una dinámica extra al sistema que es la del observador, la cual debe ser mas rápida.

Restricciones

Muchas veces las variables de entrada están restringidas por la naturaleza física del actuador y/o por problemas de costos

Se deben adoptar soluciones de compromiso, lo cual da lugar a la formulación del problema de control óptimo, el cual pretende minimizar un funcional de costo que incluye dicho compromiso entre error de las salidas (calidad) y magnitud de las acciones de control (costo)

Incertidumbre

Se debe mantener dentro de ciertos límites de tolerancia el desempeño deseado ante la presencia de incertidumbres en el modelo matemático del sistema, lo cual lleva a la formulación de problemas de control robusto

Estabilización y regulación por linealización local

Realimentación estática de estados.

Sea el sistema

$$\dot{x} = f(x,u)$$

Con la ley de control $u = \gamma(x)$

Se debe encontrar ***u*** tal que el origen del sistema de lazo cerrado

$$\dot{x} = f(x,\gamma(x))$$

Sea asintóticamente estable.

Una vez resuelto este problema, se puede estabilizar el sistema con respecto a un punto ***p*** arbitrario mediante traslación del origen con el cambio de variables

$$z = x - p$$

p no tiene que ser necesariamente un punto de equilibrio del sistema a lazo abierto

Realimentación de la salida

$$\dot{x} = f(x,u)$$

$$y = h(x,u)$$

Con la ley de control

$$u = \gamma(y)$$

Tal que el sistema de lazo cerrado sea asintóticamente estable

La información de la salida puede no ser suficiente por lo que a menudo es necesario implementar a un observador o estimador de estados basado en la entrada y la salida, del cual resulta la ley de control

$$u = \gamma(y, x_M, \tilde{x})$$

$$\dot{\tilde{x}} = g(y, \tilde{x})$$

x_M Variables de estado medibles

$\tilde{x}$ Variables de estado estimadas

Incrementa la dinámica del sistema y lo hace variante en el tiempo

Diseño por linealización

Se linealiza el sistema no lineal alrededor del origen mediante la Jacobiana, y se diseña un control lineal estabilizante para el modelo obtenido según las técnicas clásicas de asignación de polos o por Lyapunov.

La estabilidad alcanzada en el sistema no lineal será local, aunque se puede en muchos casos estimar la región de atracción y la validez de éste procedimiento está garantizada por el Método Indirecto de Lyapunov

Ejemplo: Estabilización local por linealización

Se desea estabilizar usando realimentación el origen del sistema escalar

$$\dot{x} = x^2 + u$$

El sistema lineal equivalente en el origen es

$$\dot{x} = u$$

Usando la ley de control lineal $u = -kx$

$$\dot{x} = -kx + x^2$$

Por Lyapunov con

$$V = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow \dot{V} = x\dot{x} = x(-kx + x^2) = x^2(x-k)$$

El sistema es AE y su región de atracción es $x < k$

Usando una ley de control no lineal $u = -kx - x^2$

$$\dot{x} = -kx$$

Y el origen es ahora GAE,

Esta cancelación del termino no lineal es muy útil, pero funciona bien solamente si se conoce el modelo exacto del sistema, supóngase que el modelo real fuera

$$\dot{x} = (1+a)x^2 + u \quad a \to 0$$

$|a|$ Es la cota del error de modelado. La ley de control no lineal no cancela ahora exactamente el término cuadrático quedando

$$\dot{x} = -kx + ax^2$$

$$V = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow \dot{V} = x\dot{x} = x(-kx + ax^2) = x^2(ax - k)$$

Lo que no garantiza Globalidad de la región de atracción en el caso de que ***a*** fuera positivo, pero al ser ***a*** pequeño aumenta la región de atracción respecto de la ley lineal siendo ahora

$$x < k / a$$

Ejemplo: Regulación del péndulo por linealización y realimentación de estados.

Sea la ecuación del péndulo forzado

$$\ddot{\theta} = -asen\theta - b\dot{\theta} + cT$$

$$a = g / l > 0 \quad b = k / ml^2 \geq 0 \quad c = 1 / ml^2 > 0$$

T es el torque aplicado al péndulo. Usando el torque como entrada de control, se pretende estabilizar al péndulo en un ángulo

$$\theta = \delta$$

Tomando como variables de estado el error y su derivada

$$x_1 = \theta - \delta, x_2 = \dot{\theta}$$

Resultan las ecuaciones

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -asen(x_1 + \delta) - bx_2 + cT$$

Para que tenga un PE en el origen, el par debe tener una componente estática que compense el efecto gravitatorio es decir la variable de control debe ser

$$u = T - T_f \Rightarrow T = u + T_f$$
$$T_f = a \cdot sen(\delta) / c$$

Reemplazando T queda el sistema con un PE en el origen

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -a\left[sen(x_1 + \delta) - sen\delta\right] - bx_2 + cu$$

Calculando la Jacobiana en el origen resultan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a\cos\delta & -b \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}$$

El par A,B es controlable $Rank\left[B, AB\right] = 2$

Se puede realizar estabilización local mediante los autovalores

$$u = -Kx = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} x$$

$$\left|\lambda I - (A - BK)\right| = \left|\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ a\cos\delta + k_1 c & \lambda + k_2 c + b \end{bmatrix}\right|$$

$$\left|\lambda I - (A - BK)\right| = \lambda^2 + (b + k_2 c)\lambda + a\cos\delta + k_1 c$$

La condicion para estabilidad es que los coeficientes sean positivos

$$a\cos\delta + k_1 c > 0 \Rightarrow k_1 > -a\cos(\delta)/c$$

$$b + k_2 c > 0 \Rightarrow k_2 > -b/c$$

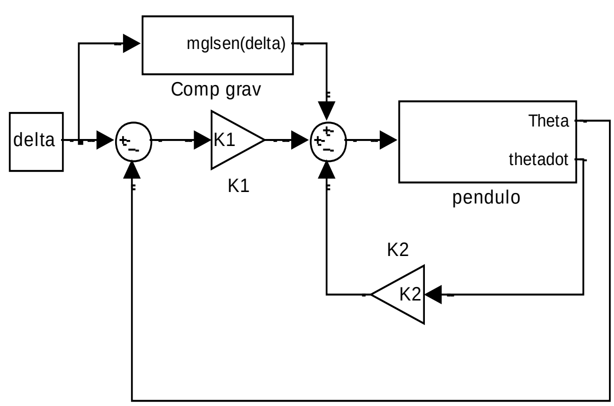
Resultando el torque de control

$$T = a \cdot sen(\delta)/c - k_1(\theta-\delta) - k_2\dot{\theta}$$

$$= mgl \cdot sen(\delta) - k_1(\theta-\delta) - k_2\dot{\theta}$$

El sistema puede verse como un control de lazo cerrado por realimentación de estados con una componente de pre alimentación
(feedforward)

Los valores de K se pueden obtener por asignación de polos, una asignación de polos posible sería un polo doble en -2 con lo que



$$\lambda_{1,2} = -2 \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 4$$

$$= \lambda^2 + (b + k_2 c)\lambda + a\cos\delta + k_1 c$$

Luego para la asignacion

$$k_1 = \left[4 - a\cos\delta\right]/c \quad k_2 = (4-b)/c$$

Con valores $m = l = k = 1, g = 10 \qquad \delta = \pi / 2$

Resultan $a = 10 \quad b = 1 \quad c = 1$

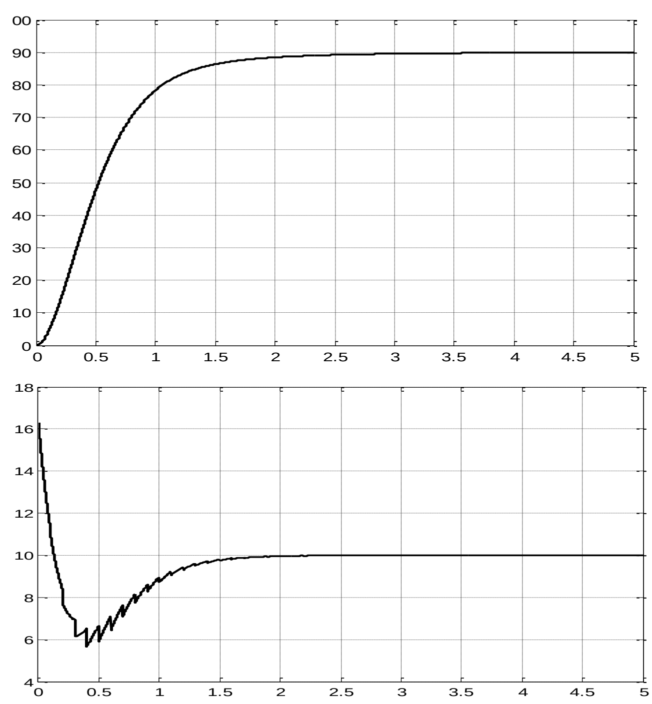
Por la asignación de polos

$$k_1 = 4 \qquad k_2 = 3$$

Lego el torque es

$$T = 10 \cdot sen(\delta) - 4(\theta - \delta) - 3\dot{\theta}$$

Como la Matriz A depende de la referencia los valores de K obtenidos solo serán válidos para ese Set Point



En el diseño se supuso que algunos parámetros son exactamente conocidos, pero en realidad el controlador tiene la forma

$$T = \tilde{m} g \tilde{l} \cdot sen(\delta) - k_1(\theta - \delta) - k_2 \dot{\theta}$$

Donde $\tilde{m}, \tilde{l}$

son los valores ***nominales*** de los parámetros, al diferir estos de los valores reales puede darse una sobre o sub compensación del efecto gravitatorio, lo cual puede causar errores de régimen considerables, pues se desplaza el punto de equilibrio deseado

Regulación Vía Control Integral

En el caso anterior se redujo el problema de regulación a uno de estabilización mediante corrimiento del punto de equilibrio deseado al origen

Aunque este enfoque es adecuado cuando se conocen los parámetros del sistema con exactitud, puede no ser aceptable si existen perturbaciones de los valores nominales de los parámetros del modelo.
Se presentara un esquema de realimentación de estados, el agregado de acción integral, que permitirá regulación robusta frente a perturbaciones paramétricas.

Sea el sistema

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$y = h(x)$$

Se desea diseñar un sistema tal que se acerque asintóticamente una referencia constante

$$t \to \infty \Rightarrow y \to y_R$$

Se pretende estabilizar el sistema a lazo cerrado en un PE tal que $y = y_R$

para ello debe cumplirse que existen x_f, u_f

Tales que $f(x_f, u_f) = 0$

$h(x_f) - y_R = 0$

Para que el PE pueda existir

Sea el error de seguimiento $e = y - y_R$

Se aumenta el sistema con la integral del error quedando

$$\dot{x} = f(x,u)$$
$$\dot{\sigma} = e = h(x) - y_R$$

Tomando la acción de control como

$$u = K_1 x + K_2 \sigma$$

Con K1 y K2 matrices del modelo lineal ampliado

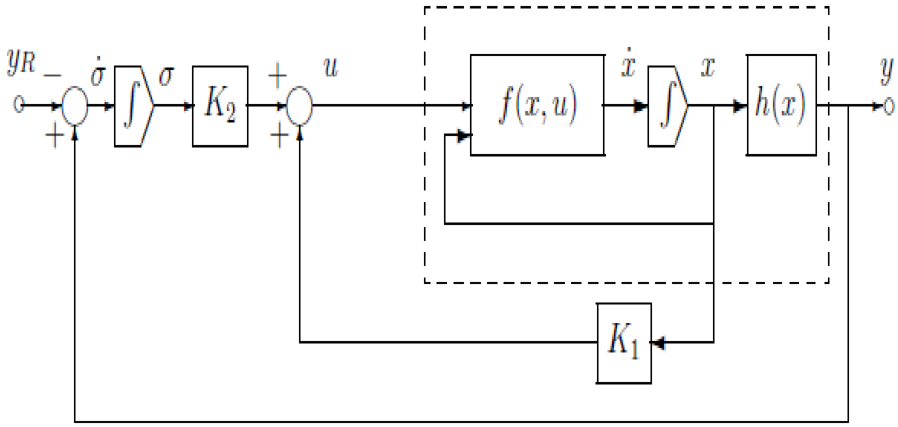
$$\dot{\zeta} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \nu \qquad \zeta = \begin{bmatrix} x - x_f \\ \sigma - \bar{\sigma} \end{bmatrix}, \nu = u - u_f$$

Siendo ahora un control dinámico que no necesita un término feedforward

$$u = K_1 x + K_2 \sigma$$
$$\dot{\sigma} = e = h(x) - y_R$$

El sistema de lazo cerrado

$$\dot{x} = f(x, K_1 x + K_2 \sigma)$$
$$\dot{\sigma} = e = h(x) - y_R$$



Ejemplo Regulación del péndulo por Acción integral.
En el ejemplo anterior se mostró la ecuación del péndulo, el cual se desea estabilizar en un ángulo

$$\delta$$

Tomando como estados, entrada y salida

$$x_1 = \theta - \delta = e$$
$$x_2 = \dot{\theta}$$
$$u = T$$
$$y = e$$

Resulta el sistema dinámico

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -asen(x_1 + \delta) - bx_2 + cu$$
$$y = e = x_1$$

Para que el error se anule debe ser $y_R = 0$

luego el equilibrio deseado es

$$x_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, u_f = \frac{a}{c} sen\delta$$

Las matrices A y B ya fueron calculadas, luego resulta el modelo linealizado

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a\cos\delta & -b \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrices del sistema ampliado serán

$$A_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a\cos\delta & -b & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_a = \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{bmatrix}$$

El nuevo par es controlable y se puede hacer asignación de polos como en el ejemplo anterior, pudiéndose elegir ahora una ganancia adicional, resultando el torque de entrada al sistema

$$T = k_1(\theta - \delta) + k_2\dot{\theta} + k_3\sigma$$
$$\dot{\sigma} = \theta - \delta$$

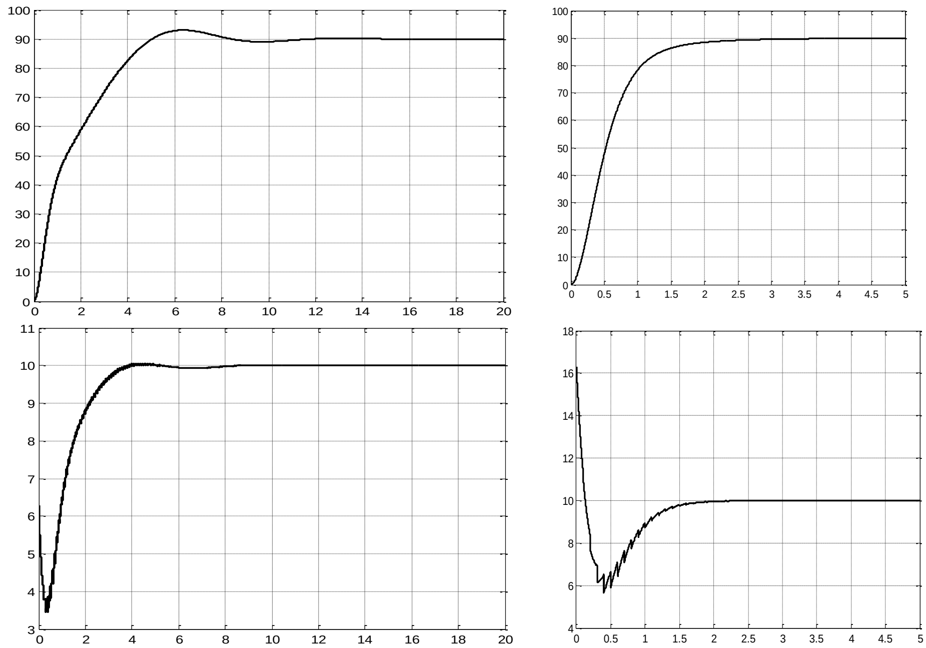
Que no es otra cosa que un PID en la forma PI+D, ya que

$$T = k_1 e + k_3\int_0^t e(\tau)d\tau + k_2\dot{\theta}$$

No requiere un torque estático y es más robusto frente a incertidumbre paramétrica, si bien la acción integral puede tornarlo más lento y potencialmente más oscilatorio

Con los valores del ejemplo anterior y con

$$k_1 = k_2 = k_3 = 4$$



Mas, leve sobrepaso, acción de control mas suave

Control por Ganancia Tabulada

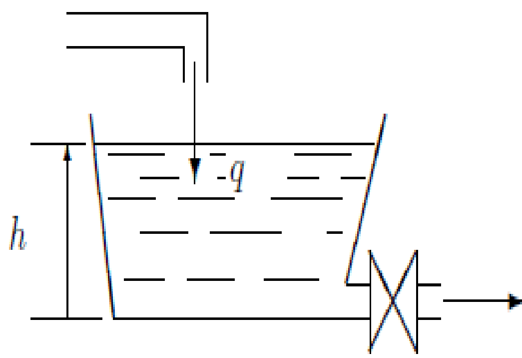
La principal limitación del control por linealización es que sólo se puede garantizar que el Control cumple su objetivo localmente alrededor de un único PE, o punto de operación (PO).

Una forma de extender la validez del control por linealización a un conjunto de POs es usar control por ganancia tabulada (“gain scheduling”).

Este enfoque asume que se puede representar el sistema mediante un modelo parametrizado por ciertas variables, llamadas variables de tabulación (“scheduling variables”), de modo que cuando estas variables asumen un valor constante obtenemos un PO.

- Se linealiza el sistema alrededor de distintos POs de interés, obteniéndose una familia de modelos lineales para la cual se diseña una familia de controladores lineales.
- Se implementa un único controlador cuyos parámetros son cambiados acorde a los valores que toman las variables de tabulación, que deberán monitorearse continuamente.

Ejemplo 4: Control de nivel por ganancia tabulada
El sistema de nivel de un tanque



Tomado el nivel del tanque como VE y salida

$$x = y = h$$

Y el caudal de entrada como variable de control

$$u = q$$

Se obtiene el modelo de estado

$$\dot{x} = \frac{1}{\beta(x)}\left(u - c\sqrt{2x}\right) \triangleq f(x,u)$$

El objetivo de control es que el nivel siga a una referencia y_R

Sea un punto de operación genérico tal que $y_R = \alpha = Cte$

Para que la salida se mantenga en ese punto es necesario que la acción de control valga

$$\left.\dot{x}\right|_{x=\alpha} = 0 \Rightarrow \bar{u}(\alpha) = c\sqrt{2\alpha}$$

El punto de operación es

$$PO(\alpha) = \left[\bar{x} = \alpha \quad \bar{u} = c\sqrt{2\alpha}\right]^T$$

Linealizando alrededor del PO se obtiene el modelo lineal parametrizado

$$\dot{x}_\delta = a(\alpha)x_\delta + b(\alpha)u_\delta$$

Donde

$$x_\delta = x - \alpha \qquad a(\alpha) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{PO} = \frac{-c\sqrt{2\alpha}}{2\alpha\beta(\alpha)}$$

$$u_\delta = u - \bar{u}(\alpha) \qquad b(\alpha) = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{PO} = \frac{1}{\beta(\alpha)}$$

Sea el control PI

$$u_\delta = K_1 e + K_2\sigma$$

$$\dot{\sigma} = y - y_R = e = x_\delta - r_\delta \qquad r_\delta = y_R - \alpha$$

El sistema lineal a lazo cerrado es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_\delta \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(\alpha) + K_1 b(\alpha) & K_2 b(\alpha) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\delta \\ \sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_1 b(\alpha) \\ -1 \end{bmatrix} r_\delta$$

Su polinomio característico es

$$s^2 - \left[a(\alpha) + K_1 b(\alpha)\right]s - K_2 b(\alpha)$$

Igualando con un sistema de segundo orden

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n{}^2$$

Resultan

$$K_1(\alpha) = -\frac{2\xi\omega_n + a(\alpha)}{b(\alpha)} \qquad K_2(\alpha) = -\frac{\omega_n{}^2}{b(\alpha)}$$

Es decir las 2 ganancias son variables

si se reparametriza el controlador PI

$$u_\delta = K_1 e + K_2 \sigma = K\left(e + \frac{1}{T}\sigma\right) \qquad K = K_1, T = \frac{K_1}{K_2}$$

$$K(\alpha) \simeq -\frac{2\xi\omega_n + a(\alpha)}{b(\alpha)} \qquad T \simeq -\frac{2\xi + a(\alpha)}{\omega_n{}^2}$$

Y si se asume que la parte real de los polos de lazo cerrado es mucho mayor que el de lazo abierto, lo que significa un sistema mas rápido

$$\left|a(\alpha)\right| << 2\xi\omega_n \quad K(\alpha) \simeq -\frac{2\xi\omega_n}{b(\alpha)} \qquad T \simeq -\frac{2\xi}{\omega_n}$$

Con lo que basta solo cambiar la ganancia K

El control real por ganancia tabulada se obtiene cuando se reemplazan los puntos de operación por la variable tabuladora

$$y_R$$

Resumen del método.

En base al ejemplo 3, se pueden resumir los pasos a seguir para diseñar un control por ganancia tabulada

1. Linealizar el modelo no lineal alrededor de una familia de POs parametrizada por las variables de tabulación.
2. Diseñar una familia parametrizada de controladores lineales que consigan el desempeño deseado para la familia de modelos lineales en cada PO.
3. Construir un control por ganancia tabulada tal que, en cada PO,

- El control genere un valor estático que dé error estático nulo

- La linealización del sistema no lineal a lazo cerrado en cada PO sea la misma que la de la conexión en realimentación del modelo lineal parametrizado y el correspondiente control lineal.

Verificar por simulación el desempeño no local del control por ganancia tabulada para el modelo no lineal.

El paso 2 puede conseguirse resolviendo el problema de diseño en un número finito de POs usando la misma estructura de control para todos ellos pero permitiendo que los parámetros del controlador cambien

Con valores numéricos y suponiendo que la sección es uniforme (tanque cilíndrico) haciendo por simplicidad

$$\beta(\alpha) = 1, c = 1, 0.2 < \alpha < 1$$

Resulta el sistema $\dot{x} = \left(u - \sqrt{2x}\right)$

Que linealizado da $\dot{x}_\delta = -\frac{1}{\sqrt{2\alpha}} x_\delta + u$

$$a(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \Rightarrow -1.6 < a(\alpha) < -0.707$$

Se pretende que el sistema de lazo cerrado tenga valores

$$\xi = 1, \omega_n = 1 \Rightarrow \mathrm{Re}\left\{p_{1,2}\right\} = -1$$

Lo que supondría un tiempo de establecimiento de 4 seg sin sobrepaso

No cumple las condiciones de simplificación del PI, luego será

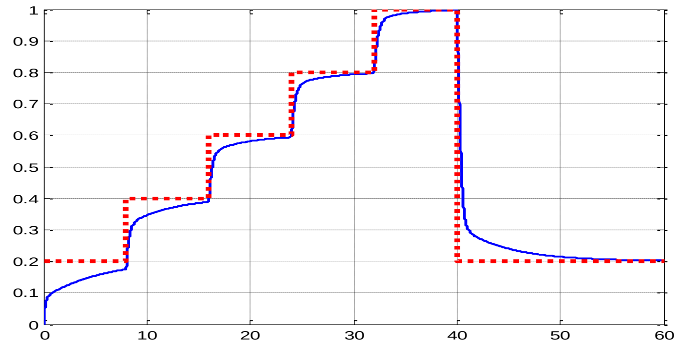
$$u(t) = -\left(2e(t) + \frac{1}{\sqrt{2y_R}} e(t) + \int_0^t e(\tau) d\tau \right)$$

Donde el término tabulado es $K_T(y_R) = \frac{1}{\sqrt{2y_R}}$

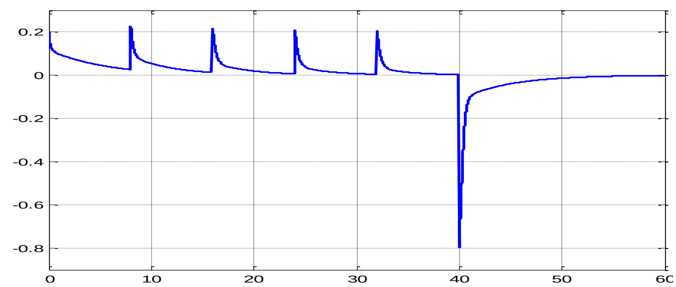
hay que tener en cuenta que la variable de control por ser un caudal tiene la restricción de no ser negativa

Resultados de simulación para varios escalones de referencia incrementados de 0.2 en 0.2 hasta 1 y luego bajado a 0.2

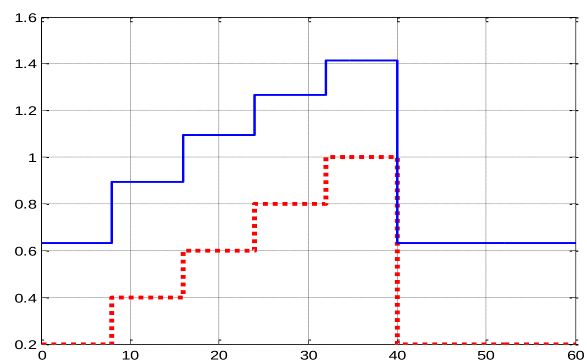
Salida



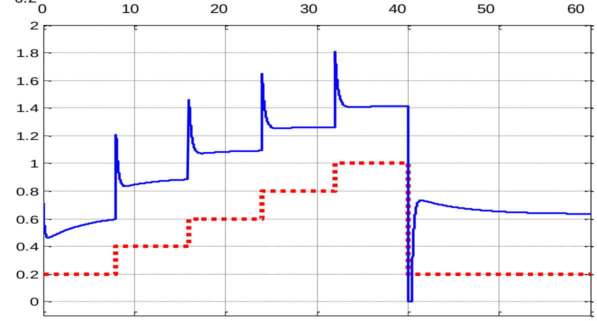
Error



Ganancia Tabulada



Acción Control



Linealización Exacta por Realimentación

Sea el sistema ***afin a la ley de control*** definido como

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$y = h(x)$$

El problema consiste en plantear qué condiciones se necesitan para que exista una realimentación de estados

$$u = \alpha(x) + \beta(x)\upsilon$$

Que transformen al sistema no lineal a una forma lineal equivalente.

Esta linealización no se refiere a la “Jacobiana” aproximada del sistema, sino que convierte exactamente al sistema en lineal en la nueva variable υ

Posiblemente sea necesario un cambio de variables invertible llamado Difeomorfismo $z = T(x)$

Linealización Entrada-Estado
Se pude introducir la idea de linealización exacta por realimentación de estados a través del péndulo.

Ejemplo: Linealización del péndulo
En un ejemplo anterior a través de la asignación de estados

$$x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$$

Se obtuvo el sistema de ecuaciones

$$\dot{x}_1 = x_2$$

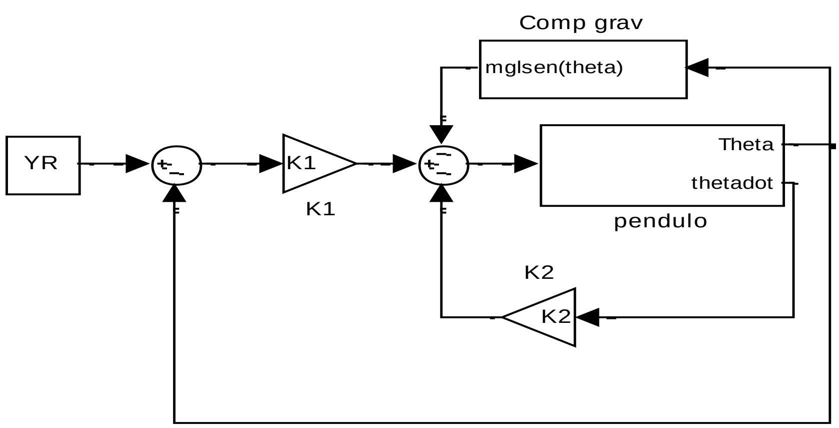
$$\dot{x}_2 = -a\left[sen(x_1\right] - bx_2 + cu$$

Eligiendo la ley de control
$$u = \frac{a}{c}\left[sen(x_1)\right] + \frac{\upsilon}{c}$$

Para cancelar el término no lineal de la segunda ecuación y obtener el sistema lineal en la nueva variable de entrada

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -bx_2 + \upsilon$$
$$y = x_1$$

De esta manera, el problema se reduce al control de un sistema lineal, un esquema se muestra en la figura y no debe confundirse con la **prealimentación** del ejemplo 2 y se conoce como P+D con compensación de gravedad



Sea el error de seguimiento

$$e = y - y_R$$

Y el controlador P+D
$$\upsilon = k_1 e - k_2 \dot{\theta}$$

Luego la ley completa de control sería

$$u = mgl\left[sen(\theta)\right] + \frac{1}{c}\left(k_1 e + k_2\dot{\theta}\right)$$

Las matrices del sistema linealizado con los valores el ejemplo visto son

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cos esta técnica las matrices A y B son constantes y en el caso de prealimentacion variaban con el punto de trabajo.

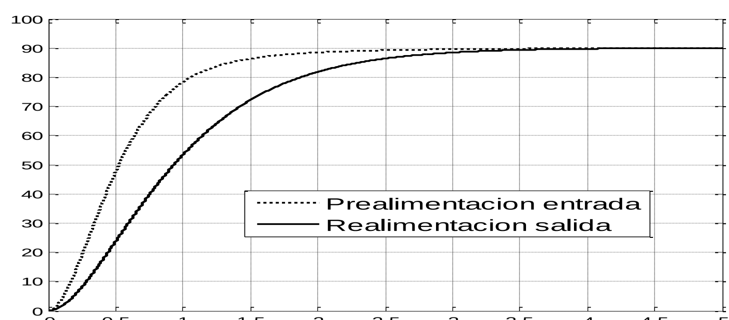
Por asignación de polo doble en -2 mediante la orden Acker de Matlab

A=[0 1;0 -1],B=[0;1]
K=acker(A,B,[-2 -2]

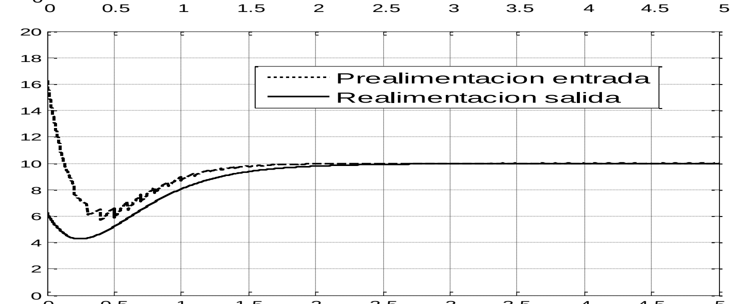
$$\upsilon = -4e - 3\dot{\theta}$$

Este control se conoce como P+D con compensación de gravedad.

Salidas



Torques



En el caso de Prealimentacion de la referencia la respuesta es más rápida a expensas de un mayor esfuerzo de control

Conveniencia de la Linealización

La técnica de linealización se basa en la cancelación de los términos no lineales del sistema

- Simplifica el problema de diseño del controlador no lineal general a un controlador no lineal que cancele alinealidades y luego uno lineal cuyos parámetros se determinan mediante las técnicas convencionales de asignación de polos o similares con relativa facilidad.
- Sin embargo, no siempre es buena idea cancelar alinealidades, dado que puede haber alinealidades “convenientes” desde el punto de vista de desempeño del sistema, se Ilustrará la idea con un ejemplo.

Ejemplo: Sistema inestable cancelación alinealidad

Sea el sistema inestable en el origen

$$\dot{x} = ax - bx^3 + u \qquad a, b > 0$$

Si se utiliza la ley de control linealizante y estabilizante

$$u = -(\gamma + a)x + bx^3 \qquad \gamma > 0$$

Resulta el sistema de lazo cerrado lineal $\dot{x} = -\gamma x$

Pero esta ley de control cancela el término $-bx^3$

Que provee “amortiguamiento no lineal” al sistema.
Este término garantiza, a pesar de que el origen del sistema a lazo abierto sea inestable, que las soluciones del sistema sean acotadas.

Alternativamente usando el control lineal estabilizante

$$u = -(\gamma + a)x$$

Resulta el sistema de lazo cerrado no lineal

$$\dot{x} = -\gamma x - bx^3$$

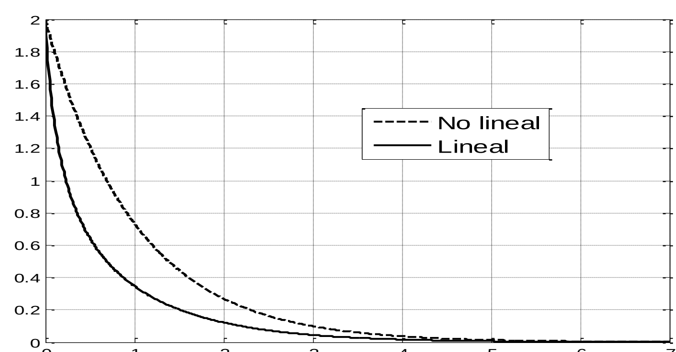
Cuyo origen es globalmente asintóticamente estable y sus trayectorias se aproximan al origen más rápido que las de

$$\dot{x} = -\gamma x$$

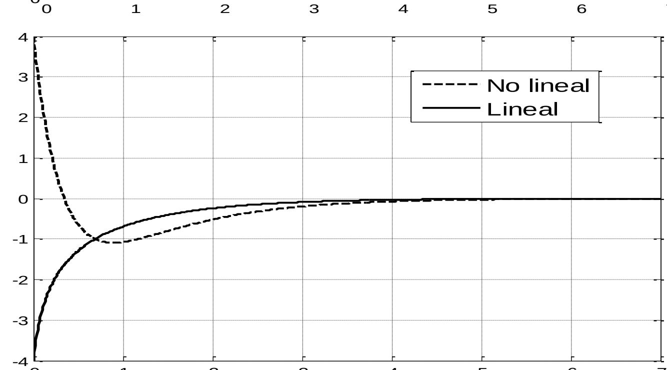
Además, el control lineal es más simple de implementar y requiere menos esfuerzo de control, tal cual puede apreciarse en la figura

La linealización es una herramienta poderosa, pero, no hay que perder de vista, dado el ejemplo anterior, que no siempre es la alternativa más adecuada

Salidas



Acciones control



Seguimiento

El objetivo de control ahora es diseñar la entrada de control de forma que algunas salidas deseadas

$$y(t)$$

Sigan una señal de referencia

$$y_R(t)$$

no necesariamente constante manteniendo los **estados acotados**

- Es más difícil que la regulación a una referencia constante
- En la mayoría de los casos no hay un seguimiento perfecto debido a las dinámicas involucradas en los procesos y la naturaleza de las referencias a seguir.

Se puede pedir que dicho seguimiento sea **asintótico**, es decir

$$e(t) = y - y_R(t) \to 0, t \to \infty$$

Lo cual funciona para referencias “suaves” pero muchas veces es imposible para cierto tipo de señales con cambios abruptos,

Se puede pedir alternativamente que el error este acotado

$$\left\| e(t) \right\| < \varepsilon, \forall t \geq T$$

El problema de seguimiento se puede reformular entonces como un problema de hallar la entrada ***u*** que provea la estabilización (asintótica o no) del error de seguimiento cuya dinámica vectorial es

$$\dot{e}(t) = f(e, Y_R, u)$$

Acción Integral

Tal como en los sistemas lineales la acción integral sobre el error mejora la capacidad de seguimiento a costa de aumentar el orden del sistema y volverlo más oscilatorio, se tratará el tema a través de un ejemplo

Ejemplo: Mejora de seguimiento con Acción Integral

Sea el sistema del ejemplo anterior

$$\dot{x} = ax - bx^3 + u$$

Se desea siga a una referencia

$$x_R(t)$$

Con la ley de control linealizante y estabilizante

$$u = bx^3 - ax + \upsilon$$

Luego el sistema linealizado corresponde a un integrador puro

$$\dot{x} = \upsilon$$

Sea ahora la ley de control proporcional (P) sobre el error

$$\upsilon = -\gamma e = -\gamma(x - x_R)$$

$$\dot{e} = -\lambda e - \dot{x}_R$$

Supóngase una referencia **constante**

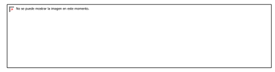
$$x_R = C \qquad \dot{x}_R = 0$$

$$\dot{e} = -\lambda e$$

Es asintóticamente estable y el error converge a $e_{ss} = 0$

Si fuera una referencia lineal (rampa)

$$x_R = Ct \qquad \dot{x}_R = C$$



Es estable y el error converge a $\quad e_{ss} = -\dfrac{C}{\lambda}$

Sea ahora la ley de **control Proporcional Integral (PI)** sobre el error

$$\upsilon = -\gamma e - k\int_0^t e(\tau)d\tau$$

Luego el sistema en términos del error resulta

$$\dot{e} = -\lambda e - k\int_0^t e(\tau)d\tau - \dot{x}_R$$

Derivando se obtiene

$$\ddot{e} = -\lambda\dot{e} - ke - \ddot{x}_R$$

Para la referencia lineal (rampa)

$$\ddot{x}_R = 0$$

$$\ddot{e} = -\lambda\dot{e} - ke$$

Asintóticamente estable, error nulo

$$t \to \infty \Rightarrow \ddot{e} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda\dot{e} = -ke \Rightarrow \dot{e} = 0 \Rightarrow e = 0$$

Para la referencia cuadrática (Parábola)

$$\ddot{x}_R = C$$

$$\ddot{e} = -\lambda\dot{e} - ke - C$$

$$t \to \infty \Rightarrow \ddot{e} = 0 \Rightarrow \lambda\dot{e} = -ke - C \Rightarrow \dot{e} = 0$$

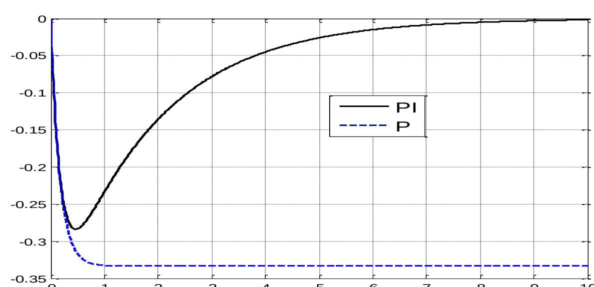
$$ke = -C \Rightarrow e = \frac{-C}{k}$$

Aquí el sistema es estable y con error de régimen acotado

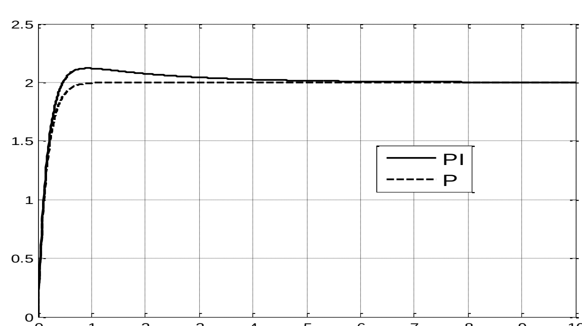
Esto es compatible con la teoría de sistemas lineales en el cual el integrador aumente el tipo de sistema en 1 que como el original era tipo 1 el realimentado es de tipo 2

Rampa

Error

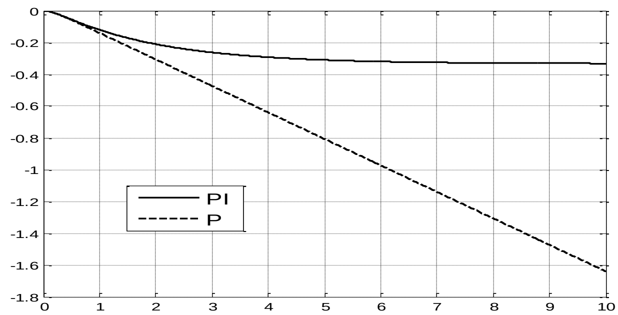


Salida controlador lineal

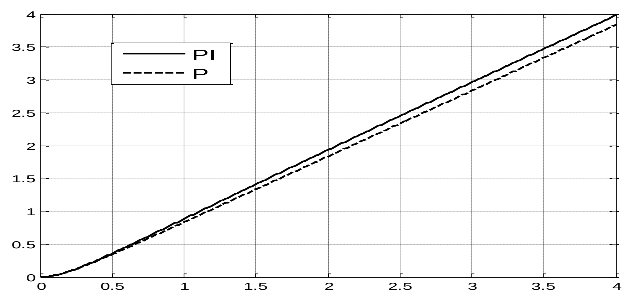


Parabola

Error



Salida controlador lineal



Seguimiento de trayectorias no suaves

En general es difícil seguir trayectorias con derivadas discontinuas con valores de error nulo o bajo, se ilustrará con un ejemplo para una trayectoria lineal a tramos repetitiva

Ejemplo 8: Seguimiento del péndulo linealizado a una referencia lineal a tramos

A modo de conclusión se ilustrará la capacidad de seguimiento del péndulo linealizado por realimentación de la salida frente a una secuencia de referencia lineal a tramos.

En el ejemplo se obtuvo para el modelo linealizado

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

El cual tiene un autovalor (polo) de lazo abierto en el origen, luego es un sistema de tipo 1 que sigue sin error a un escalón y con error finito a una rampa

Se diseñó de forma que los autovalores estén en -2

Se obtuvo que el tiempo de respuesta al escalón es aproximadamente de 3.5 segundos.

Se calculara el error de la respuesta a una rampa

$$y_R(t) = Ct$$

La función de transferencia del sistema linealizado es

$$F(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s(s+1)}$$

Incorporando el controlador PD

$$C(s) = k_1 E(s) - sk_2 y(s)$$

Resulta para lazo abierto la función

$$G(s) = \frac{k_1}{s\left[s + (1 + k_2)\right]}$$

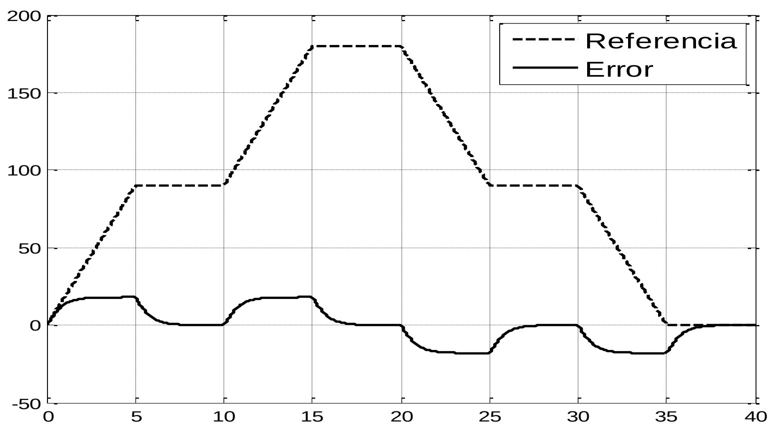
Luego su constante de error a la rampa es

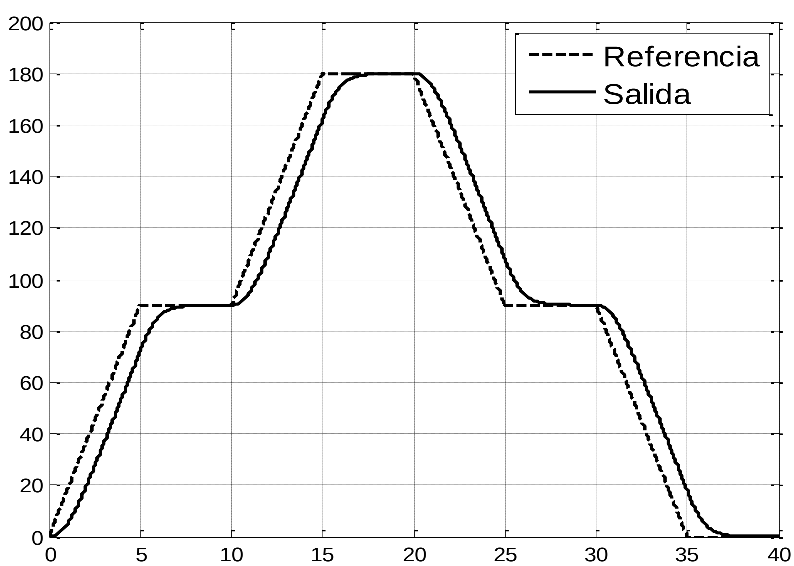
$$Kv = \lim_{s \to 0} sG(s) = \frac{k_1}{1 + k_2}$$

Y el error en estado estacionario será

$$e_{ss} = C\frac{1 + k_2}{k_1}$$

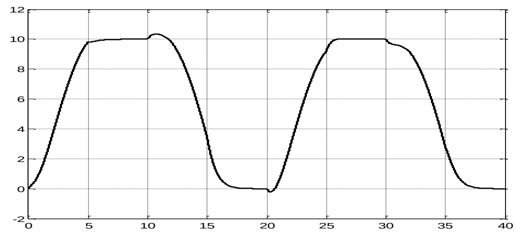
Se simuló su comportamiento para una señal que es combinación de rampas lineales y constantes que cambian cada 5 segundos como se muestra obteniéndose los resultados que se muestran



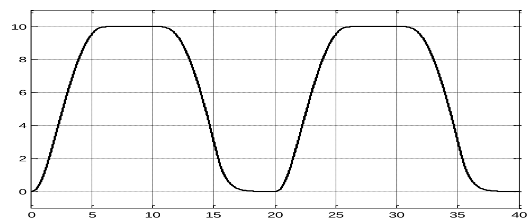


Torques

Total



Comp
Gravedad



Cont Lineal