

Capítulo 1

Introducción a los sistemas no lineales

Control de Sistemas No Lineales

La teoría de sistemas de control se ocupa del análisis y el diseño de componentes interactuantes de un sistema en una configuración que brinde un comportamiento deseado, ya sea de seguimiento de una referencia o rechazo a perturbaciones.

En algunos casos el sistema a controlar puede considerarse lineal e invariante en el tiempo (LIT) con lo que se pueden analizar y diseñar sistemas mediante las poderosas técnicas de transformada de Lapace y/o variables de estado lineal. Esto es válido generalmente en un determinado rango de excursión de las variables alrededor de un punto de operación, un ejemplo clásico sería un transistor en modo amplificador clase A, el cual es lineal para pequeñas señales de entrada a partir de su punto de polarización, pero si las señales superan ciertos límites se produce un fenómeno de saturación que trunca la onda senoidal produciendo el conocido “recorte”.

Lamentablemente en general los sistemas dinámicos son No Lineales ya que no cumplen las condiciones de homogeneidad y aditividad, e incluso algunos son variantes en el tiempo con lo cual el análisis y el diseño se hacen más complicados. En este trabajo se tratará sólo con sistemas autónomos o invariantes y además causales: evolucionan desde $t=0$ con t positivo.

Por otro lado un sistema de control no lineal, ya sea que la no linealidad esté presente en el proceso a controlar (inherente), o bien introducida por conveniencia o necesidad en el controlador, permite obtener una gama más amplia de comportamientos dinámicos, es decir muchas veces un controlador no lineal funciona mejor que uno lineal, de hecho los PID comerciales usan algoritmos no lineales para evitar, por ejemplo, el conocido fenómeno de “windup” del integrador, fenómeno que se da en presencia de saturación del actuador.

Por ello es que es necesario conocer algunas de las técnicas aplicadas a sistemas no lineales, sobre todo en lo que se refiere a estabilidad, ciclos límites y otros fenómenos como frecuencias extrañas (aliasing), las cuales son muy frecuentes en electrónica, de hecho un amplificador es un sistema no lineal con una realimentación inherente a través de fenómenos internos y por ende potencialmente inestable, un oscilador es un sistema en el cual se provoca ex profeso un ciclo límite de amplitud y frecuencia bastante exactas, un mezclador en RF hace uso de sus características no lineales para obtener frecuencias sumas y/o diferencias de 2 entradas generando varias frecuencias y filtrando convenientemente las de interés, etc.

Modelado

El Modelado de sistemas dinámicos no lineales generalmente conduce a ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs).

Sea una ODE de orden n escrita en forma normal

$$\dot{x}(t) = F\left(x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t), u(t)\right), y = G(x, u) \text{ donde } x^{(i)}(t) = \frac{d^i x(t)}{dt^i}$$

Dicha ecuación, puede simularse como en la figura 1.a mediante una cadena de sucesivos integradores y luego construyendo las funciones F y G .

Asignando variables de estado, la ecuación escalar se puede expresar como n ODEs de primer orden acopladas entre sí, como muestra la figura 1.b resultando para un sistema no lineal autónomo un modelo vectorial de la forma:

$$\dot{x}(t) = f(x, u)$$

Sujeto a la condición inicial $x(0) = x_o$ y es *causal*: o sea evoluciona para $t \geq 0$

Donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}^p$ es el vector de entradas y f es un vector columna de n funciones de las n variables de estados y las p entradas

$$f = \begin{Bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x, u) \end{Bmatrix}$$

A veces se puede considerar también una ecuación de salida

$$y = h(x, u)$$

Donde $y \in \mathbb{R}^m$ es un vector de variables de interés, o variables que se desea observar o medir.

A menudo la entrada $u(t)$ no aparece explícitamente ya sea porque es nula o porque fue especificada como una función del estado $u = \lambda(x)$, lo que sería un control por realimentación de estados, según puede verse en la figura 1.c En este caso la ecuación de estado es una ecuación no forzada:

$$\dot{x}(t) = f(x, \lambda(x)) = f(x)$$

Siendo la de salida

$$y(t) = h(x, \lambda(x)) = h_\lambda(x)$$

La salida y estados del nuevo sistema dependerán solo de la condición inicial $x(0) = x_o$

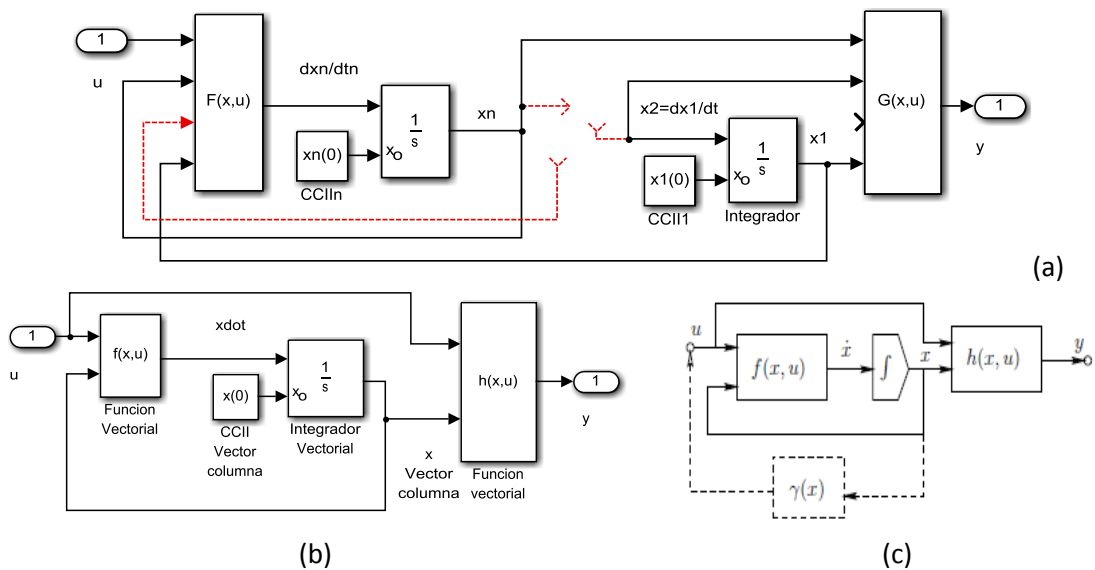


Figura 1: Sistema no lineal, esquemas de simulación (a) escalar, (b) vectorial, (c) realimentado

Linealización

Muchas veces es conveniente linealizar un SNL alrededor de un punto de operación para analizar su comportamiento local simplificado, e incluso analizar estabilidad de algún equilibrio, con algunas limitaciones según se verá más adelante.

Sea $y = F(x)$ para el punto de operación x_0, y_0 , el teorema de Taylor permite expresar y como serie de potencias

$$y = F(x) = F(x_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$

Si la variación es pequeña pueden despreciarse los términos de orden superior quedando

$$y \approx F(x_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x_0} (x - x_0) = y_0 + C(x - x_0)$$

Luego llamando $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$ en función de los incrementos se obtiene

$$\Delta y \approx \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x_0} \Delta x = C \Delta x$$

Gráficamente equivale a aproximar una curva por la recta tangente en el punto x_0, y_0

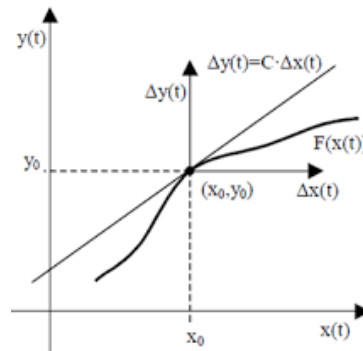


Figura 2: Linealización por la pendiente de la tangente de la curva

En base la extensión del teorema a n dimensiones se puede linealizar el sistema vectorial $\dot{x} = f(x)$ alrededor de un punto \bar{x} como $\dot{x} = J(\bar{x})(x - \bar{x})$

Donde J es una matriz de $n \times n$, la cual se denomina Jacobiano y se define como:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x = \bar{x}}$$

Es conveniente aclarar que la matriz J varía según el punto seleccionado, excepto que el sistema sea lineal en cuyo caso es la matriz constante A

Ejemplo 1: Linealización

Sea el sistema

$$\ddot{x} = -x^2 + 3x$$

Obtener los puntos de equilibrio (puntos donde se anulan las derivadas) y linealizar el sistema en los mismos

Tomando VE

$$x_1 = x \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{x}$$

$$x_2 = \dot{x} \Rightarrow \dot{x}_2 = \ddot{x}$$

Resulta el sistema

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = x_2$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) = -x_1^2 + 3x_1$$

Para los equilibrios $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$

$$x_2 = 0, -x_1^2 + 3x_1 = 0 = x_1(3 - x_1) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

Son equilibrios

$$\bar{x}_A = \begin{bmatrix} \bar{x}_{1A} \\ \bar{x}_{2A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{x}_B = \begin{bmatrix} \bar{x}_{1B} \\ \bar{x}_{2B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculando las derivadas parciales

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 3 - 2x_1, \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0$$

Y valuando resulta

$$J_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } J_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Espacio de estados y Trayectorias

El espacio de estados es un hiperplano formado por las n variables de estado como ejes coordenados y una trayectoria es la curva que determina la evolución del sistema eliminando el tiempo en las ecuaciones, el cual pasa a ser un parámetro en las trayectorias.

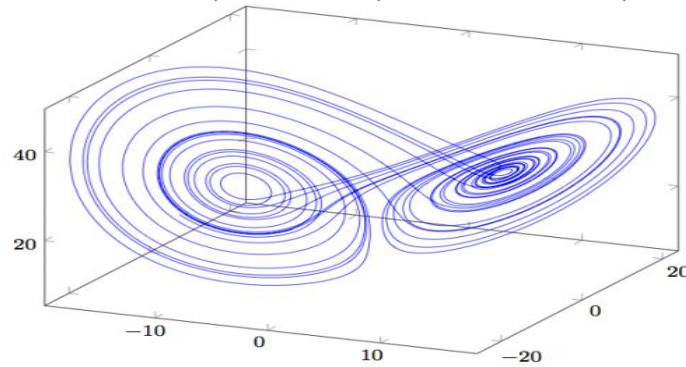


Figura 4 Trayectorias del sistema de Lorenz (caótico)

En el caso de que las variables de estado sean las sucesivas derivadas de una variable se denomina espacio de fases, y si la dimensión es 2 se denomina plano de fases. El espacio de estados o fases (Phase Portrait) brinda mucha información sobre el sistema y permite establecer conclusiones importantes en temas como, por ejemplo, la estabilidad.

Plano de Fase

Dado el sistema de segundo orden en forma de variables de fase

$$\dot{x}_1 = x_2(x)$$

$$\dot{x}_2 = f(x)$$

Si se hace

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{\frac{dx_2}{dt}}{\frac{dx_1}{dt}} = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{1}{f(x)}$$

Se elimina el tiempo y puede obtenerse la derivada en función de la variable

Ejemplo 2: Obtención de una trayectoria sencilla

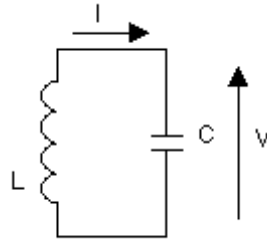


Figura 4: Circuito LC sin perdidas

Supóngase el circuito ideal de la figura 4 y con el capacitor inicialmente cargado con una tensión V_0 , un análisis de Kirchoff a la malla muestra que

$$Vc + L \frac{di}{dt} = 0$$

Y por propiedad del capacitor

$$Vc = V_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

Tomando VE resulta

$$x_1 = Vc$$

$$x_2 = i$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{L} Vc \quad \frac{dVc}{dt} = \frac{1}{C} i$$

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C} x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{L} x_1$$

Dividiendo entre si

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{\frac{dx_2}{dt}}{\frac{dx_1}{dt}} = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{C}{L} \frac{x_1}{x_2}$$

Con lo cual

$$Lx_2 dx_2 + Cx_1 dx_1 = 0$$

Integrando resulta

$$Lx_2^2 + Cx_1^2 = r^2$$

Ecuación de una elipse donde por la condición inicial planeada

$$x_2(0) = 0 \Rightarrow x_1^2(0) = r^2 \Rightarrow r = V_0$$

Para valores infinitesimalmente espaciados de la CCII hay un continuo de trayectorias cerradas, es decir oscilaciones sostenidas en el tiempo cuya amplitud depende de la carga inicial y la frecuencia de L y C, esto se conoce como oscilación armónica y se muestran en la figura 5. Las curvas indican que la energía del circuito se mantiene constante e igual a la inicial, aparte $\omega = 1/\sqrt{LC}$ es la pulsación de la oscilación, y su período es $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

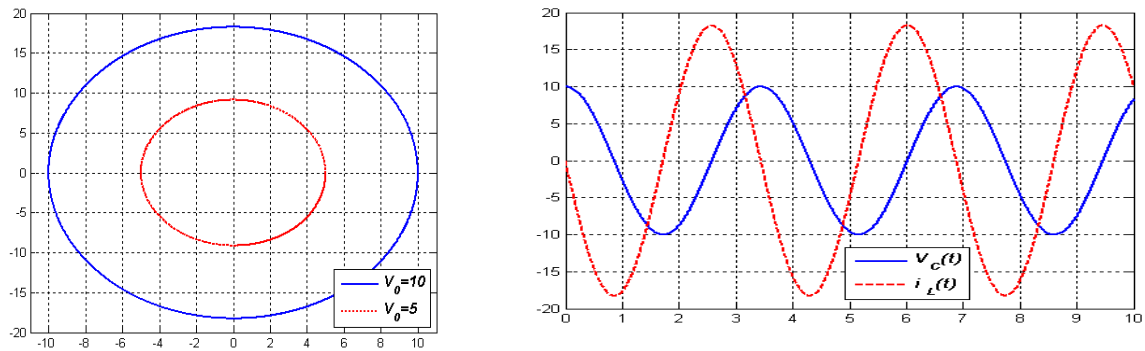


Figura 5 Oscilador armónico con $L = 0.3, C = 1$ (a) Trayectorias , (b) evolución temporal

Puntos de equilibrio

Un punto de equilibrio o punto singular \bar{x} es un punto en el espacio de estados que cumple que, si el sistema parte inicialmente de ese estado permanece en el indefinidamente, dando lugar a una solución constante la cual es una solución periódica trivial, es decir:

Si

$$x(0) = \bar{x} \Rightarrow x(t) = \bar{x}, \forall t$$

Para ello es necesario que las derivadas se anulen es decir los puntos de equilibrio son aquellos que cumplen $f(\bar{x}) = 0$, con lo cual puede haber uno, varios aislados o un continuo de ellos, cabe acotar que en un sistema lineal $\dot{x}(t) = Ax$ puede haber un único equilibrio en el origen (o un continuo si la matriz A es singular)

Esto establece una diferencia importante, ya que en un sistema no lineal no se puede hablar de *estabilidad del sistema* sino de *estabilidad de cada equilibrio*

Ejemplo 2: múltiples equilibrios

Sea el Péndulo simple mostrado en la figura 6, el cual sirve para modelar, por ejemplo, articulaciones robóticas en el plano vertical y otros sistemas

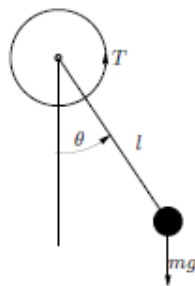


Figura 6 Péndulo simple

Dicho sistema tiene 2 variables de estado: su posición angular θ y su velocidad $\dot{\theta}$

Tomando la relación de fuerzas que actúan sin un torque externo aplicado resulta la ecuación

$$ml^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgl\sin(\theta) = 0$$

Despejando la derivada de más alto orden

$$\ddot{\theta} = -a\sin\theta - c\dot{\theta}$$

Donde $a = g/l > 0$ $c = b/ml^2 > 0$

Tomando como variables de estado $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$ resultan las ecuaciones

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -asen(x_1) - cx_2$$

Debe ser

$$x_2 = \dot{\theta} = 0$$

$$asen(x_1) = asen(\theta_1) = 0$$

Lo que se cumple para $\theta = k\pi, \dot{\theta} = 0$

Posee 2 estados de equilibrio principales (que en realidad son infinitos pero geoméricamente equivalentes)

1. cuando está abajo y quieto: $\theta = 2k\pi, \dot{\theta} = 0$
2. cuando está arriba y quieto: $\theta = (2k+1)\pi, \dot{\theta} = 0$

Pero solo el equilibrio 1) es estable, ya que al 2) si bien en condiciones ideales permanecería en él, bastaría una perturbación infinitesimal en su condición para que caiga al 1) o quede oscilando permanentemente si no hubiera fricción, o sea si $b = 0$

Ejemplo 2: Equilibrios dependientes de un parámetro

Sea el oscilador a diodo túnel que se muestra en la figura 7 con su circuito y característica del diodo

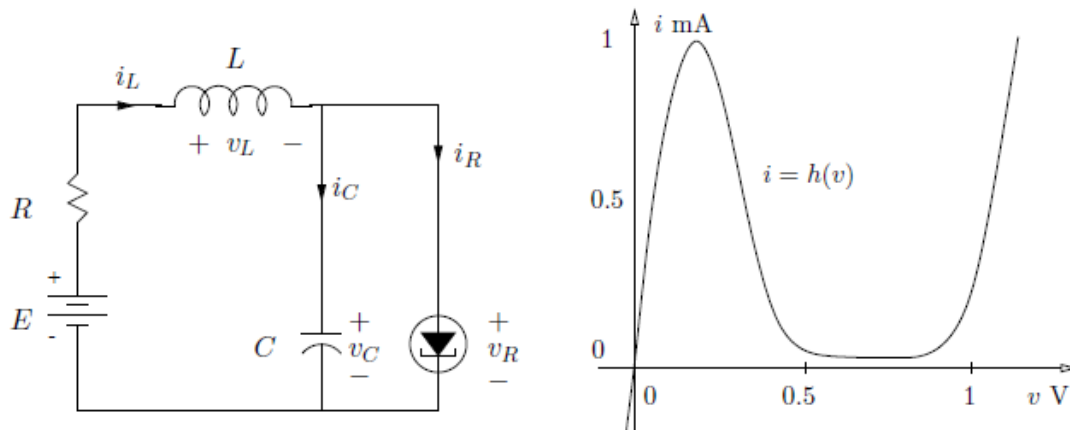


Figura 7 Oscilador a diodo tunel

Tomando como variables de estado

$$x_1 = V_C, x_2 = i_L$$

Y aplicando Kirchoff

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C}(-h(x_2) + x_2)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L}(-x_1 - Rx_2 + E)$$

Los PE son las raíces de

$$h(x_1) = \frac{E}{R} - \frac{1}{R}x_1$$

Observando el circuito se obtiene que

$$V_C = V_R$$

$$h(V_R) = \frac{E}{R} - \frac{1}{R} V_R = \frac{E - V_R}{R}$$

En condiciones de régimen cuando

$$I_R = 0 \Rightarrow V_R = E$$

Y cuando

$$V_R = 0 \Rightarrow I_R = \frac{E}{R}$$

Es la ecuación de una recta llamada recta de carga (como sucede en la polarización de transistores por ejemplo) de pendiente $-1/R$ que se superpone con la característica del diodo como en la figura, es decir que según el valor de E/R puede haber tres puntos de equilibrio o uno como se muestra en la figura, en particular si el circuito se polariza en el punto

Q_2 la resistencia dinámica $\frac{dI_R}{dV_R} < 0$ y el circuito funcionara como oscilador a Resistencia

Negativa

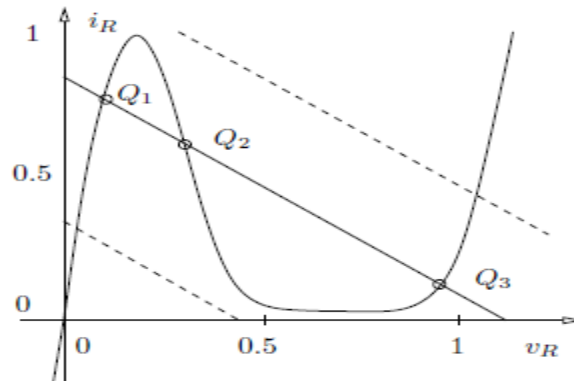


Figura 7: Puntos posibles de equilibrio del oscilador a diodo túnel

Ejemplo 3: Continuo de equilibrios

Servo de posición: Sea un sistema rotacional inercial con momento de inercia J y rozamiento B y sin fuerza elástica de restitución ni torque externo actuante y que parte de un estado de posición y velocidad angular determinado, la ecuación dinámica según la ley de Newton rotacional es:

$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} = 0$$

Tomando los estados como la posición y la velocidad

$$x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$$

Resulta

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -\frac{B}{J} x_2$$

y en forma matricial

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -B/J \end{bmatrix} x$$

Y evidentemente la matriz es singular y tiene un autovalor en 0, por lo tanto hay un continuo de equilibrios en $x_2 = \dot{\theta} = 0$ es decir en cualquier posición con velocidad nula el sistema permanece en esa posición

Ciclo Límite

Es una trayectoria cerrada en el espacio de estados que debe estar *aislada*, es decir no puede haber otra en una vecindad, lo que lo diferencia de las oscilaciones armónicas y debe dar una solución periódica en el tiempo no trivial, es decir no puede ser un equilibrio.

Propiedades:

- Si la solución comienza en el ciclo límite permanece en él indefinidamente.
- Si la solución comienza en una vecindad del ciclo límite puede converger a él (atractivo) o alejarse (repulsivo).

Efecto de los ciclos límites:

Un ciclo límite en general es algo no deseable si hay componentes mecánicos involucrados que pueden sufrir desgaste o rotura.

También muchas veces las fluctuaciones de la salida no son toleradas por las especificaciones de diseño.

Algunas veces se toleran ciclos límites si son de baja frecuencia, en aras de la simplicidad del controlador, como por ejemplo en algunos electrodomésticos con control todo/nada con histéresis como heladeras, aires acondicionados, etc.

Otras veces, sobre todo en electrónica, se buscan ciclos límites expresos como en el caso de osciladores donde se buscan amplitudes y frecuencias constantes e independientes de las condiciones iniciales, de estos hay de realimentación, de relajación y de resistencia negativa.

Otras veces se producen inherentemente debido al principio de funcionamiento como en el control por modulación de ancho de pulso (PWM), en general los componentes electrónicos toleran bien ciclos límites incluso de frecuencias altas.

Existen en el control no lineal técnicas para determinar la presencia o ausencia de ciclos límites, como así para determinar si son repulsivos o atractivos e incluso calcular aproximadamente su frecuencia y amplitud. Sin embargo dichas técnicas no son generales y están limitadas por la configuración del sistema o su orden.

Ejemplo 5: Ciclo límite

Sea el sistema conocido como oscilador de Van der Pol, definido por la ODE

$$m\ddot{x} + 2c(x^2 - 1)\dot{x} + kx = 0 \quad \text{Con } m, c, k > 0$$

Se analizarán sus equilibrios, se determinará de manera intuitiva si tiene un ciclo límite y se simulará para obtener su plano de fases

Equilibrios: Haciendo $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$ resulta en VE

$$\dot{x}_1 = x_2 = 0$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{2c}{m}(x_1^2 - 1)x_2 + \frac{k}{m}x_1 = 0$$

De la primera ecuación $x_2 = 0$ luego en la segunda $\frac{k}{m}x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ con lo que el único equilibrio es el origen

Ciclo límite: La ecuación de definición puede asimilarse a un sistema de segundo orden

$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$ Solo que aquí el término de amortiguamiento b es no lineal y depende de x

Siendo $b(x) = 2c(x^2 - 1)$ aquí pueden presentarse 3 casos:

- $|x| > 1 \Rightarrow b(x) > 0$ Si el módulo del estado x aumenta el amortiguamiento es positivo lo que implica oscilaciones decrecientes

- $|x| < 1 \Rightarrow b(x) < 0$ Si el modulo del estado x disminuye el amortiguamiento es negativo lo que implica oscilaciones crecientes
- $|x| = 1 \Rightarrow b(x) = 0$ Si el modulo del estado x es unitario el amortiguamiento es nulo lo que implica oscilaciones sostenidas

Lo anterior lleva a deducir que hay un ciclo límite alrededor del origen.

Para simular el sistema hay que despejar la derivada de más alto orden:

$$\ddot{x} = -2\frac{c}{m}(x^2 - 1)\dot{x} - \frac{k}{m}x$$

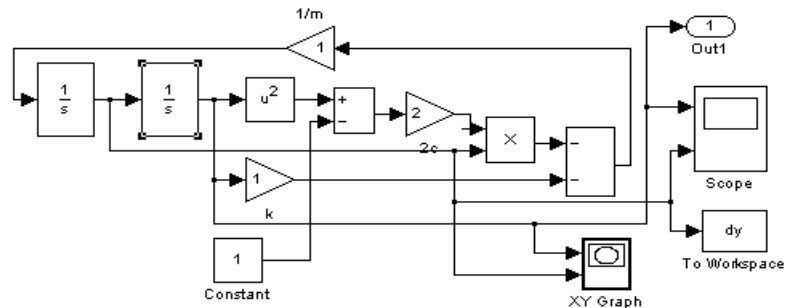


Figura 7: Diagrama de simulación del oscilador de Van der Pol

En la figura 7 se muestra el esquema de simulación y en la 8 resultados con $\frac{c}{m} = 1, \frac{k}{m} = 1$

para 3 condiciones iniciales distintas del origen, donde se observa que siempre convergen al ciclo límite y la solución temporal para una condición cercana al origen

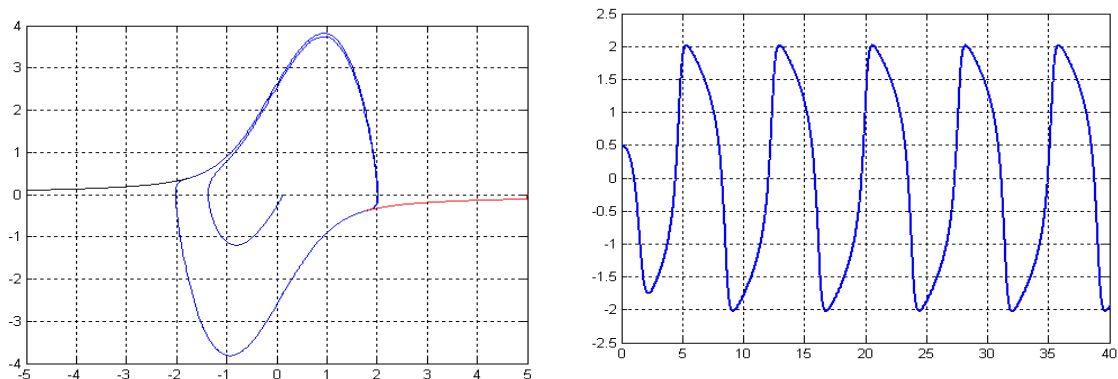


Figura 7: Plano de fase y salida en el tiempo del oscilador de Van der Pol

Otros comportamientos:

Cambio de ganancias y constantes de tiempo

Ejemplo 6: Vehículo Submarino

Un modelo simplificado responde a la ecuación

$$\dot{v} + |v|v = u(t)$$

Donde v es la velocidad y u la propulsión, analizando el sistema en régimen de velocidad constante se nota que para 2 entradas se tiene que:

$$u = 1 \quad 0 + |v_s|v_s = 1 \Rightarrow v_s = 1$$

$$u = 10 \quad 0 + |v_s|v_s = 10 \Rightarrow v_s = \sqrt{10}$$

Es decir la ganancia varía con la amplitud de la entrada, simulando el sistema mediante la ecuación reordenada $\dot{v} = -|v|v + u$ y sometido a dos ondas cuadradas de amplitud 1 y 10 se

obtienen los resultados de la figura 9 donde además puede verse que las constantes de tiempo de subida y bajada son distintas e incluso dependen de la amplitud de la entrada

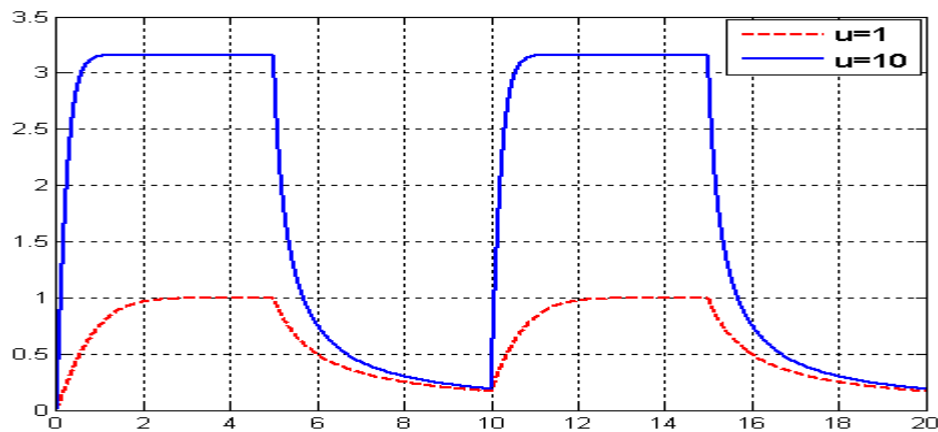


Figura 9 Velocidad del vehículo submarino

Tiempo de escape finito

Cuando un sistema lineal es inestable la salida (o algún estado) tienden a infinito cuando t tiende a infinito, en el caso de SNL puede darse el mismo caso para un tiempo *finito* llamado tiempo de escape, esto es una cuestión puramente matemática, ya que ningún sistema físico puede hacerlo, pero significa que alguna variable se haga demasiado grande en un tiempo corto, lo cual es indeseable

Dependencia de la CCII

En un sistema no lineal el tipo de comportamiento puede tener una alta dependencia de la condición inicial, es decir condiciones iniciales cercanas dan respuestas disímiles.

Ejemplo 7: Tiempo de escape finito y dependencia de las CCII

Sea el sistema

$$\dot{x} = -x + x^2, x(0) = x_0$$

Cuyos equilibrios se calculan cómo $f(x) = -x + x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x = 0, x = 1$ es decir tiene 2 equilibrios

Un análisis cuantitativo muestra que

- Si $x_0 < 0$ la derivada será positiva o sea x crecerá, pero a medida que va creciendo y acercándose al -1 el término cuadrático perderá importancia frente al lineal y el crecimiento se desacelerará por lo que la solución se acercara asintóticamente a $x = 0$
- Si $0 < x_0 < 1$ la derivada será negativa porque el término lineal es mayor que el cuadrático y se acercara asintóticamente a $x = 0$
Esto permitiría concluir que el equilibrio en el origen es estable
- Si $x_0 > 1$ el término cuadrático predominara haciendo que la derivada sea positiva y crezca cada vez más, lo que indica un posible escape al infinito y además que el equilibrio en 1 es inestable

Se verá ahora la solución exacta obtenida mediante el código de Matlab simbólico:

```
syms x x0  
dsolve('Dx=-x+x^2','x(0)=x0')  
1/(1-exp(t)*(-1+x0)/x0)
```

$$x(t) = \frac{1}{1 - \frac{e^t(-1+x_0)}{x_0}}$$

Simplificando resulta

$$x(t) = \frac{x_0}{x_0 - e^t(-1 + x_0)}$$

La cual puede verificarse que es solución, con un poco de trabajo algebraico resulta una expresión más compacta

$$x(t) = \frac{x_0}{x_0 + e^t - x_0 e^t} \frac{e^{-t}}{e^{-t}} = \frac{x_0 e^{-t}}{x_0 e^{-t} + 1 - x_0} = \frac{x_0 e^{-t}}{1 - x_0 + x_0 e^{-t}}$$

Que es un cociente de funciones, el numerador está acotado y no es cero para t finito: $x_0 e^{-t} \leq x_0, \forall t \geq 0$, o sea si hay tiempo de escape debe anularse el denominador

$$1 - x_0 + x_0 e^{-te} = 0 \Rightarrow e^{-te} = \frac{x_0 - 1}{x_0} \Rightarrow e^{te} = \frac{x_0}{x_0 - 1}$$

Luego

$$te = \log \left[\frac{x_0}{x_0 - 1} \right]$$

Pero como te debe ser positivo por definición, la condición es que $x_0 > 1$

Simulando el sistema se tienen las posibles soluciones según la CI, donde se puede apreciar el tiempo de escape finito, como se muestra en la figura 8

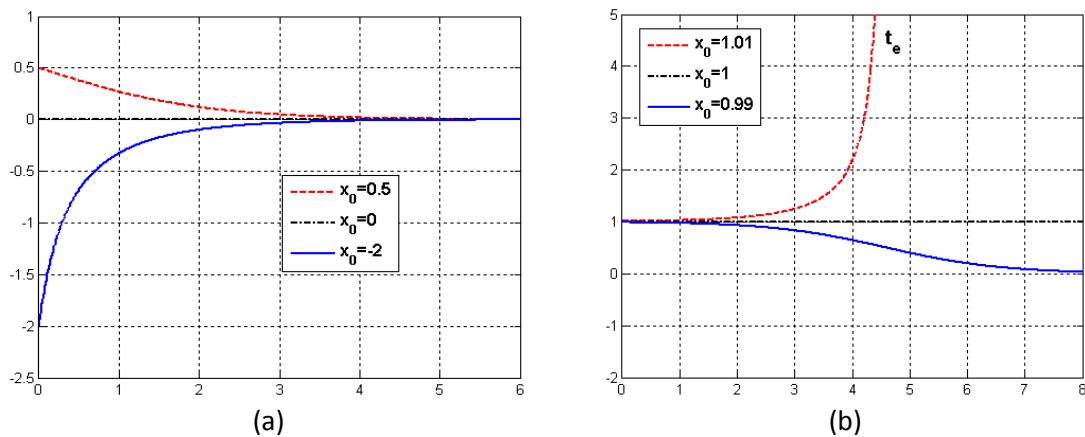


Figura 10: Salidas del ejemplo 7 (a) CCII cercana al 0 (a) CCII cercana al 1

Saltos de resonancia

Supóngase el caso de un sistema masa resorte amortiguador como se muestra en la figura

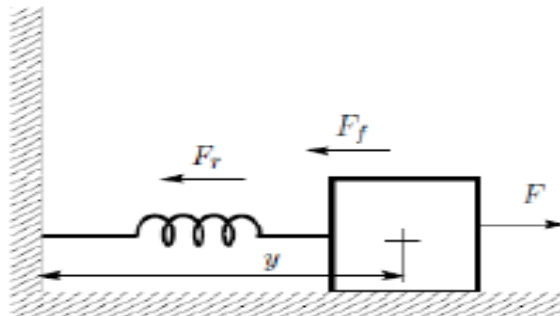


Figura 11: Masa resorte amortiguador

Cuya fuerza de restitución debida al resorte no es constante sino que varía con la elongación y se puede poner como

$$Fr = ky + k_N y^3$$

Y se somete a una fuerza externa periódica

$$F = P \cos \omega t$$

Siendo el rozamiento lineal $Ff = b\dot{y}$ la ecuación queda entonces

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky + k_N y^3 = P \cos \omega t$$

Que se conoce como ecuación Duffing forzada

En la figura se muestra la respuesta en frecuencia con con valores

$$m = 1, k = 0.5, b = 0.2, P = 1$$

$$k_N = \{0, 0.5, 2\}$$

Y se observa que el pico de resonancia se va corriendo a la derecha conforme aumenta el valor del termino no lineal

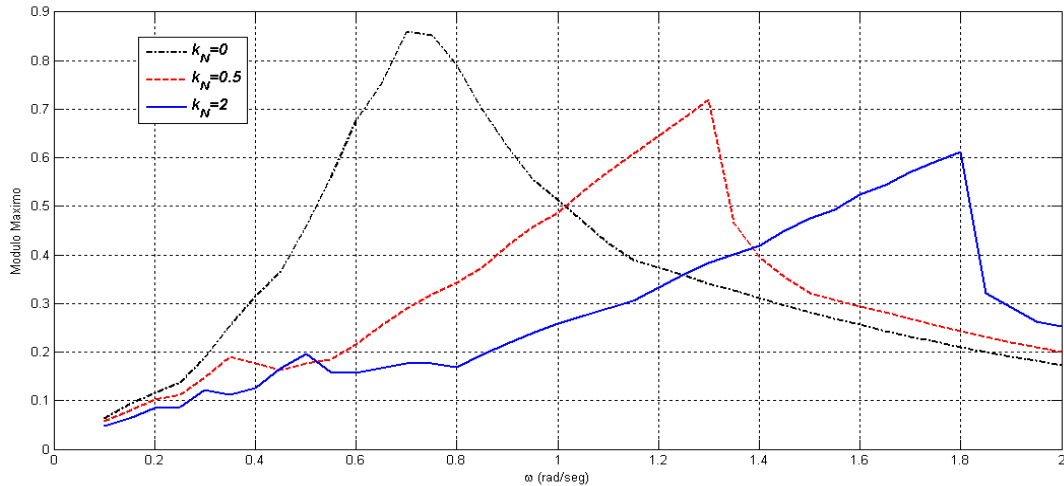


Figura 12 : respuesta en frecuencia Duffing

Aliasing

Cuando entran a un elemento no lineal componentes de determinadas frecuencias se produce la aparición de frecuencias que originalmente no estaban en las entradas, tal fenómeno se lo denomina *aliasing* y es una característica de los sistemas no lineales que en algunos casos puede ser muy útil

Ejemplo 8: Modulación en amplitud

Es un sistema usado en telecomunicaciones para trasladar el espectro (y por ende la información) de una señal de baja frecuencia (Banda Base) a una de más alta frecuencia (RF) de modo que pueda ser transmitida eficientemente por un transmisor de potencia y una antena. Supóngase el multiplicador de la figura 13

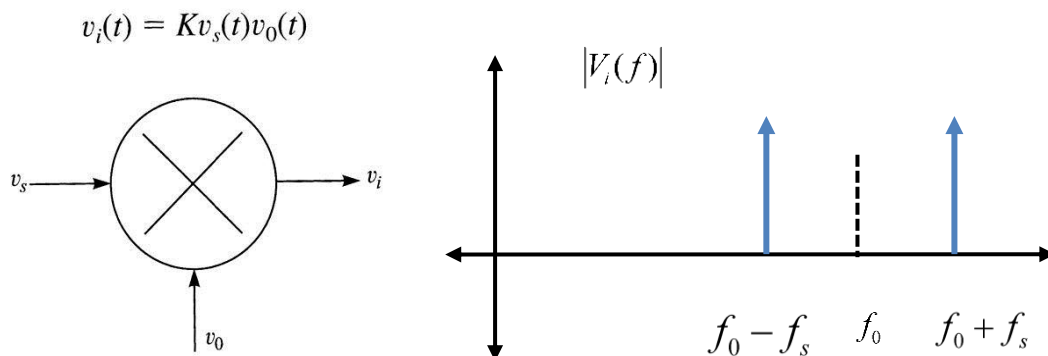


Figura 13: Multiplicador y espectro de modulo

Y sean las señales

$$v_s(t) = A \sin(2\pi f_s t) \quad v_0(t) = B \sin(2\pi f_0 t)$$

Con $f_0 \gg f_s$

Sus transformadas de Fourier son

$$V_s(f) = \frac{A}{2j} (\delta(f - f_s) - \delta(f + f_s)) \quad V_0(f) = \frac{B}{2j} (\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0))$$

La multiplicación en el tiempo es una convolucion en frecuencias

$$V_0(f) = K (V_0(f) * V_s(f)) = K \int_{-\infty}^{\infty} V_0(\lambda) V_s(f - \lambda) d\lambda$$

Convolucionar con un impulso es trasladar a donde está centrado el impulso, luego aparecerá un espectro de modulo como se muestra en la figura 14, del cual con el adecuado filtrado pasa banda se puede recuperar la señales de frecuencia suma y resta, teniendo en cuenta que difieren en $2f_s$, es decir si f_s es baja, más selectivo tendrá que ser el filtro (mayor orden)

Ejemplo 9: Mezclador

Sea el Modulador ya visto y las señales

$$v_s(t) = \sin(200t) \quad v_0(t) = \sin(1000t)$$

Se desea extraer las componente de suma y de diferencia

$$\omega_{Suma} = 1200 \quad \omega_{Dif} = 800$$

Con el adecuado filtrado pasa banda se puede recuperar la señales de frecuencia suma y resta, teniendo en cuenta que difieren en $2f_s$, es decir si f_s es baja, más selectivo tendrá que ser el filtro (mayor orden)

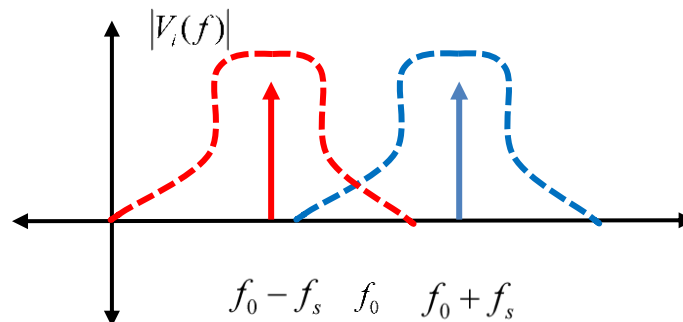


Figura 14: Espectro de módulo de salida y filtrado

Para la separación se implementaran con Matlab filtros Butterworth Pasa Banda de 4to orden y de ancho de banda 100 centrados en las frecuencias suma y diferencia

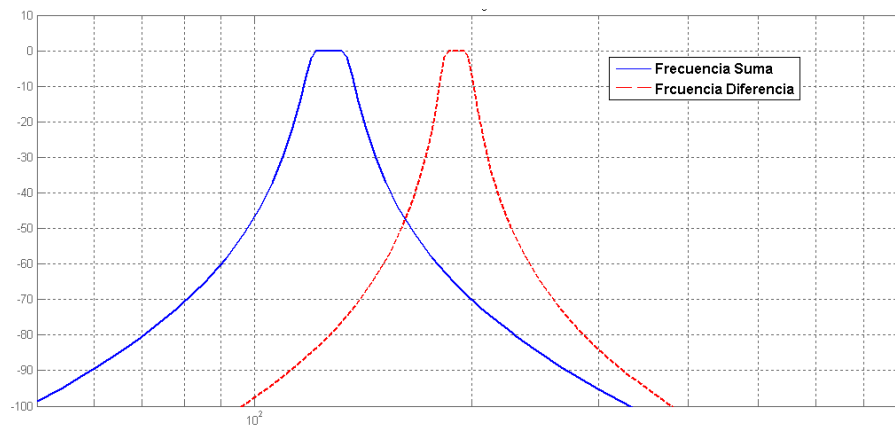


Figura 15: Diagramas de Bode filtros del mezclador

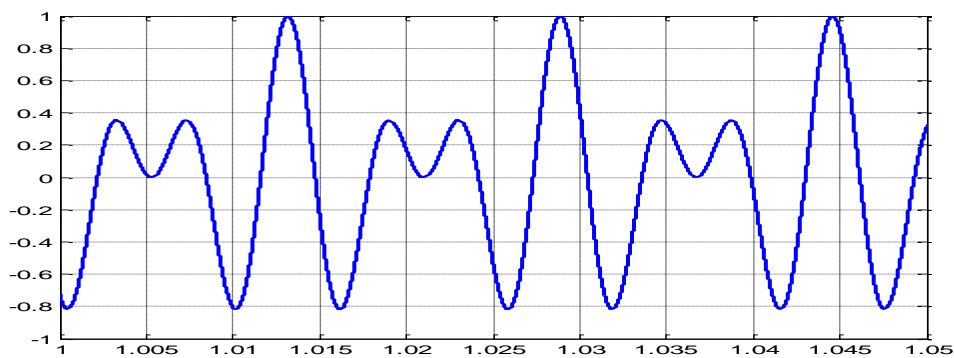


Figura 17: Salida multiplicador

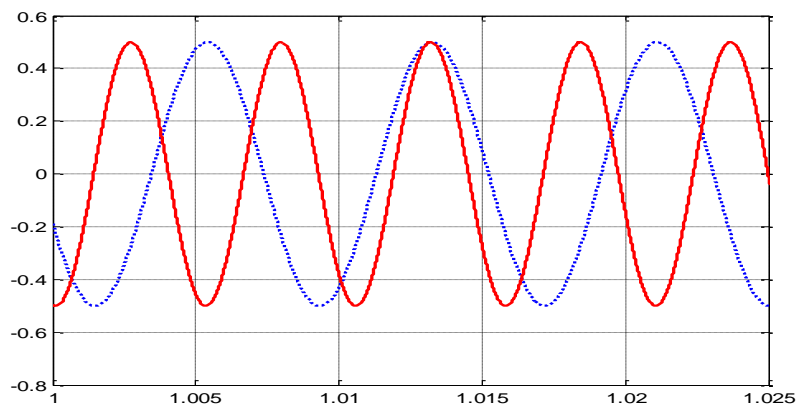


Figura 18: Salidas suma y diferencia

Este principio se utiliza en el mezclador de receptores de radio y TV para trasladar el espectro de una señal de alta frecuencia (RF) modulada ya sea en amplitud o frecuencia, mediante su multiplicación con la proveniente de un oscilador local (F0), a una frecuencia fija, llamada frecuencia intermedia (FI), en la cual es mucho más fácil el filtrado, esto facilita enormemente la sintonía pues existen filtros resonantes mecánicos o piezoeléctricos muy selectivos para frecuencias fijas, por ejemplo 455 KHz para AM y 10.7 MHz para FM

Sistemas lineales a tramos (Estructura variable)

Hay sistemas no lineales que están compuestos por una parte lineal y una alinealidad estática cuyo comportamiento depende del valor de la variable de entrada, e incluso de su historia. Un caso típico es la inclusión de un amplificador con saturación, en cuyo caso ante una entrada $x(t)$ su salida será

$$y(t) = \begin{cases} Kx(t) & -X_{sat} \leq x(t) \leq X_{sat} \\ K \cdot X_{sat} & x(t) > X_{sat} \\ -K \cdot X_{sat} & x(t) < -X_{sat} \end{cases}$$

Para analizar este tipo de sistemas se parte de la condición inicial regida por la ecuación dinámica lineal correspondiente, al cambiar la estructura se procede con la ecuación lineal siguiente tomando como condición inicial la final del paso previo y así sucesivamente hasta llegar a una situación de régimen si la hubiera.

En esta situación la condición inicial y la final coinciden al culminar el ciclo.

Esta técnica es sumamente utilizada en electrónica cuando hay elementos que actúan idealmente como conmutadores (Diodos, Transistores, Tiristores, etc)

Ejemplo 8: Integrador puro realimentado mediante relé con histéresis

Este es un caso que se suele encontrar en muchos sistemas domésticos, al relé todo/nada se le incorpora una banda de histéresis a fin de controlar tanto el error como la frecuencia de conmutación, el cual se muestra en la figura 19 donde M es la salida a nivel alto, $-M$ a nivel bajo y $2T$ el ancho de histéresis. El relé funciona de la siguiente manera: cuando la entrada es negativa está a nivel bajo ($-M$), a partir que crece pasa a nivel alto (M) cuando llega al valor positivo T , lo mismo ocurre cuando es positiva y decreciente al llegar a $-T$ pasa al nivel bajo ($-M$), es un dispositivo con memoria, es decir la salida depende del valor de la entrada y de su valores anteriores, y su esquema se muestra en la figura 8.

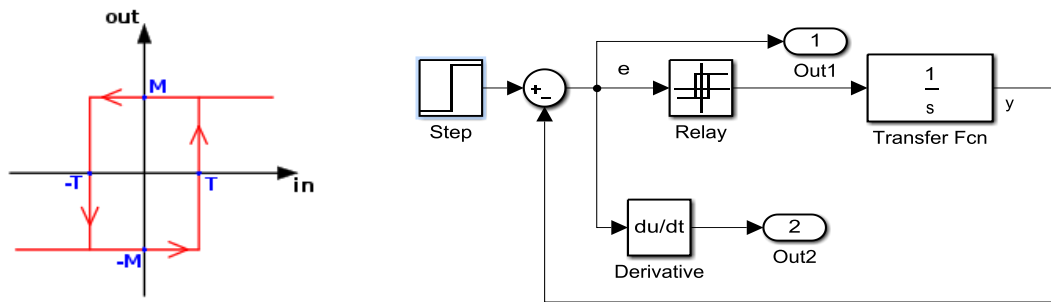


Figura 19: Relé con histéresis y sistema realimentado con relé

Supóngase el sistema realimentado de la figura 11, integrador puro y un relé con histéresis, las ecuaciones del error de dicho sistema para una referencia escalón son:

$$e(t) < T \quad \dot{e} = +M$$

$$e(t) > -T \quad \dot{e} = -M$$

Supóngase que la salida es menor que la referencia, es decir el error es positivo y tiene un valor inicial $e(0) = e_0$, la salida del relé será entonces $+M$ con lo que la solución será para este tramo $e(t) = e_0 - M \cdot t$ lo cual disminuirá el error hasta que en un instante t_1 cambiara de signo y llegara a ser $-T$, aquí el relé conmuta y el sistema cambia de estructura ya que ahora la salida del relé conmuta a $-M$, con lo cual la nueva solución será $e(t) = -T + M \cdot t$ con lo cual subirá y al llegar a $+T$ en un instante t_2 de nuevo cambia siendo la solución a $e(t) = T - M \cdot t$ y a partir de ese instante se alternarán ciclos positivos y negativos del error constituyendo un ciclo límite, de amplitud acotada por el ancho de histéresis $2T$ y frecuencia determinada por M y T , siendo

$$f = \frac{M}{4T} (\text{Hz})$$

Los resultados se muestran en la figura 20.

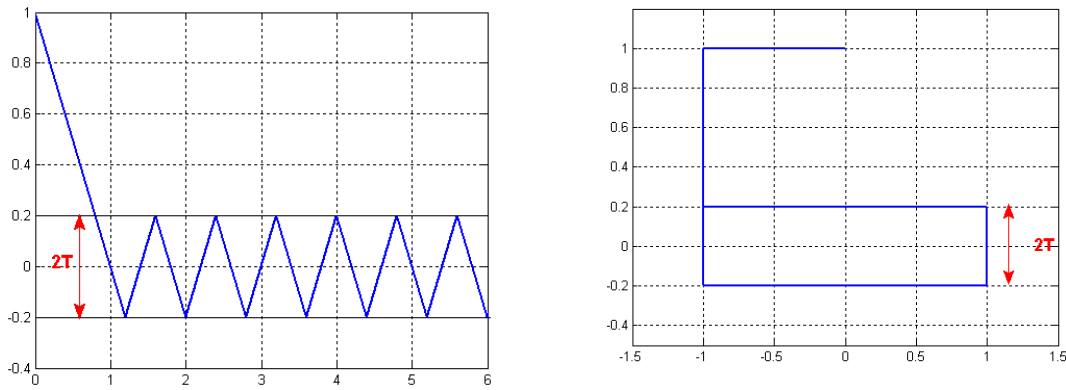


Figura 20: Evolución del error y plano de fase (girado) del sistema de la figura 8 con $T=1$ $M=0.2$

Equivalencia de sistemas no lineales

Algunos sistemas son equivalentes a otros en el sentido de que se rigen por las mismas ecuaciones, solo que cambia el sentido físico de las variables, esto permite extrapolar conclusiones sobre las características de la respuesta

Péndulo Físico

Existe una equivalencia entre el péndulo físico que se muestra en la figura 21 y el simple

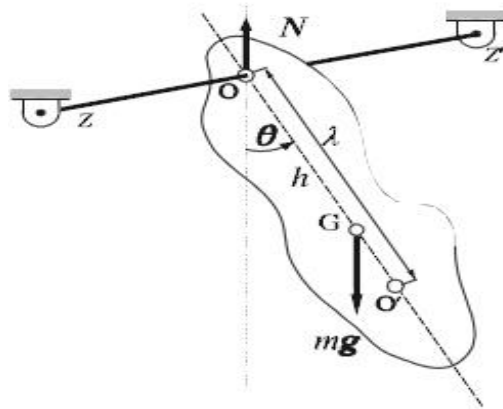


Figura 21: Péndulo físico

La ecuación es

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgh\sin(\theta) = 0$$

Donde

J Momento de Inercia calculado a partir del eje de rotación O

h Distancia del Centro de masas G a al eje de rotación O

m Masa

b Rozamiento

Comparada con la del péndulo simple

$$ml^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgl\sin(\theta) = 0$$

Basta sustituir

$$h = l \quad J = ml^2$$

El Péndulo Físico es muy importante porque modela articulaciones robóticas rígidas sometidas a la acción de la gravedad, es decir que trabajen en un plano no horizontal

En cuyo caso al existir un torque τ aplicado sobre la articulación la ecuación se transforma en

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgh \cdot \sin(\theta) = \tau$$