

## Capítulo 3

### Sistemas de Segundo Orden

#### Introducción

Los sistemas de segundo orden son importantes en el estudio de sistemas no lineales debido a que:

- Las trayectorias de las soluciones se pueden representar en un plano
- Su Interpretación geométrica es fácil ya que tiene asociado un campo vectorial en  $\mathbb{R}^2$
- Existen técnicas de análisis específicas como el plano de fases y teoremas sobre CL

#### Representación y trayectorias

El Sistema puede representarse como:

$$\dot{x}_1(t) = f_1[x_1(t), x_2(t)]$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2[x_1(t), x_2(t)]$$

Las trayectorias ya fueron definidas en el capítulo 1 y en este caso pueden representarse en un plano denominado plano de estados eliminando el tiempo que pasa a ser un parámetro en la trayectoria, según se ejemplifica en la figura 1.

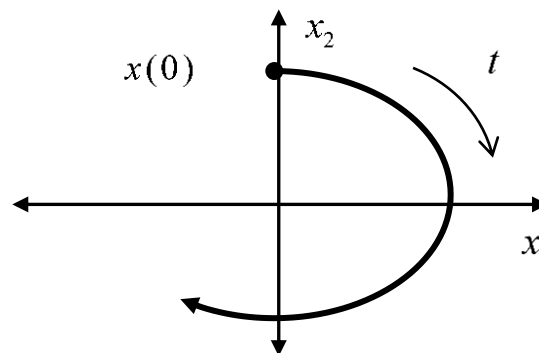


Figura 1: Trayectoria en el plano de estados

#### Plano de estados y de fases

Si en la ecuación  $\ddot{x}(t) = g[x(t), \dot{x}(t)]$  se hace la asignación de estados

$$x_1(t) = x(t)$$

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t)$$

Resulta la representación en variables de fase y el correspondiente plano de fases

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = g[x_1(t), x_2(t)]$$

Su campo vectorial asociado es

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ g(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

Y la divergencia se reduce a

$$\nabla f = \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2}$$

Estudiando el campo vectorial y su divergencia se puede determinar cualitativamente el comportamiento del sistema cerca de un punto, si las trayectorias se alejan, convergen o permanecen cerca de él indefinidamente

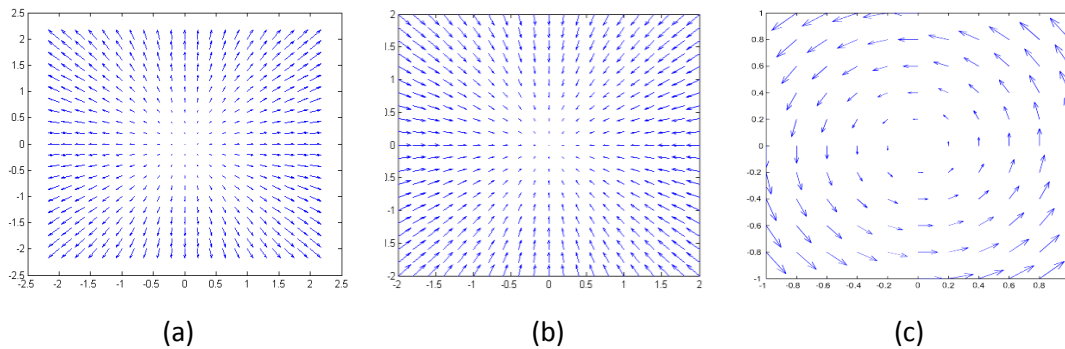


Figura 1 : Divergencia del campo vectorial (a) Positiva (b) Negativa (c) Nula

### Cambio de coordenadas

A veces es más útil trabajar en coordenadas polares, para las cuales se tiene

$$x_1 = r \cos \varphi \quad x_2 = r \cdot \sin \varphi$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1}$$

Derivando respecto del tiempo resulta por regla de a cadena

$$\dot{r} = \frac{1}{r} (x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2) \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{r^2} (x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1)$$

### Ejemplo: Análisis de plano de estados en coordenadas polares

Sea el sistema

$$\dot{x}_1 = -x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

El cual tiene un punto de equilibrio en el origen

$$x_1 = x_2 = 0$$

y un continuo sobre el círculo unitario

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

Pasando a coordenadas polares

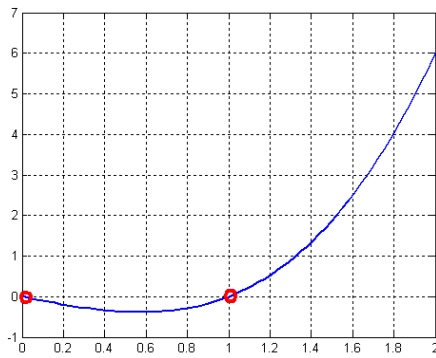
$$\dot{r} = \frac{1}{r} (-x_1^2(1 - r^2) - x_2^2(1 - r^2))$$

$$\dot{r} = \frac{1}{r} \left( -(x_1^2 + x_2^2)(1 - r^2) \right) = -r(1 - r^2)$$

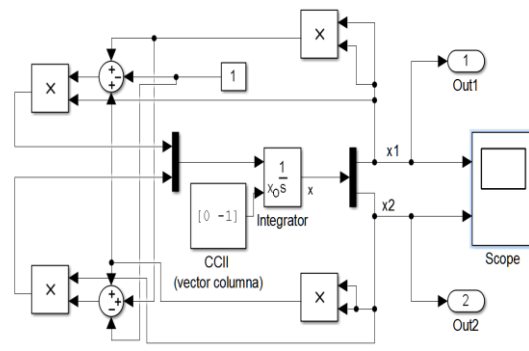
La cual es negativa para  $0 < r < 1$ , luego toda solución que empiece dentro de círculo unitario  $x_1^2 + x_2^2 < 1$  disminuirá en valor absoluto y tenderá al origen

Si arranca en el círculo unitario  $r = 1$  o en el origen  $r = 0$  permanece allí pues son equilibrios

Si por el contrario arranca fuera  $x_1^2 + x_2^2 > 1$  crece sin límites

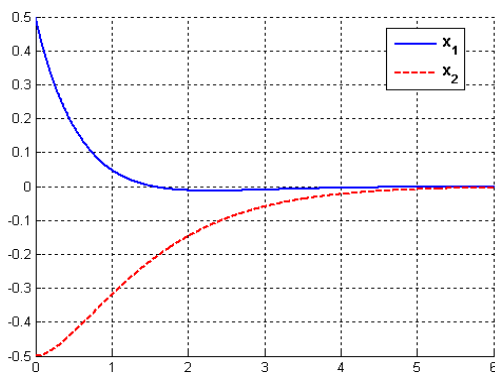


(a)

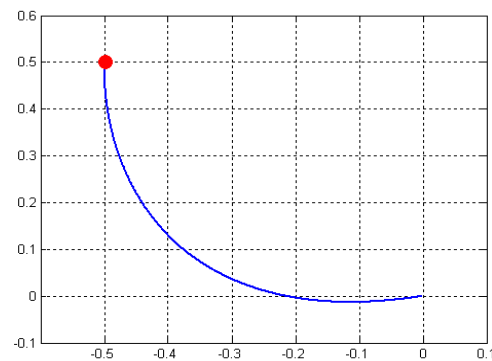


(b)

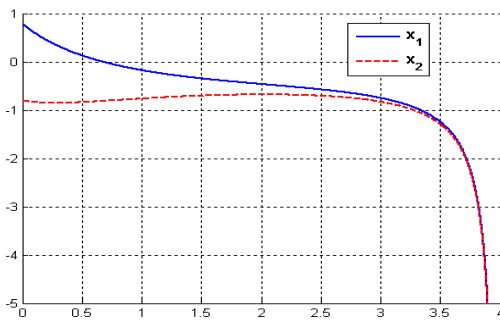
Figura 2 Ejemplo 1 (a) derivada del módulo (b) diagrama simulación vectorial



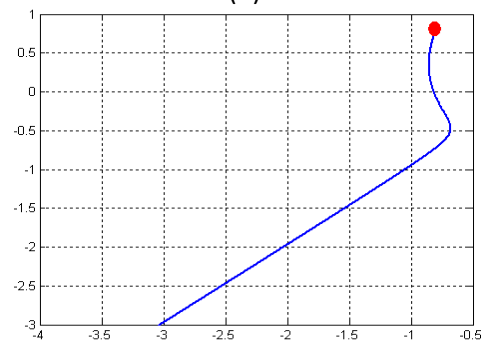
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3: Resultados ejemplo 1. Con CCI dentro del círculo unitario (a) Variables de estado (b) Plano de estados. Con CCI fuera, (c) Variables de estado, (d) Plano de estados

## Reconstrucción del tiempo en el plano de fases

$$\dot{x}_1(t) = \frac{dx_1}{dt} = x_2(t) \Rightarrow dt = \frac{1}{x_2} dx_1$$

Integrando entre 2 puntos A y B del plano de fases

$$t_B - t_A = \int_A^B dt = \int_{x_1(A)}^{x_1(B)} \frac{1}{x_2} dx_1$$

Es decir la integral bajo la curva de  $1/x_2$  en función de  $x_1$ . Como  $t$  siempre es positivo y creciente si  $x_2$  cambiara de signo, se debe particionar el intervalo de integración para cada cambio de signo como se representa en la figura 2

$$t_D - t_A = \int_{x_1(A)}^{x_1(B)} \frac{1}{x_2} dx_1 - \int_{x_1(B)}^{x_1(C)} \frac{1}{x_2} dx_1 + \int_{x_1(C)}^{x_1(D)} \frac{1}{x_2} dx_1$$

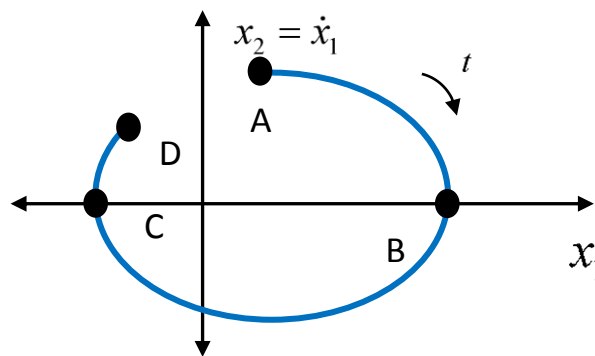


Figura 4: Cálculo del tiempo en el plano de fases

### Ejemplo 2: Determinación del tiempo

Sea el oscilador LC ya visto, tomando variables de fase

$$x_1(t) = Vc, x_2(t) = \dot{x}_1(t)$$

Resulta para el sistema

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\dot{x}_1 / LC = -\omega^2 \dot{x}_1$$

Integrando por variables separables el plano de fases es una elipse

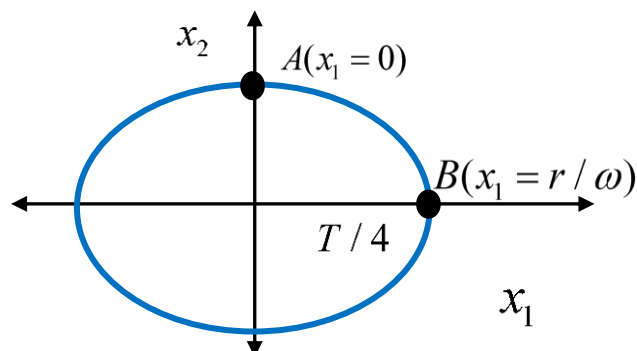


Figura 5 Plano de fases oscilador LC

$$\omega^2 x_1^2 + x_2^2 = r^2 \Rightarrow x_2 = \sqrt{r^2 - \omega^2 x_1^2}$$

Para calcular el tiempo que demora en recorrer un ciclo (período), por simetría como se muestra en la figura 5 basta integrar la función  $1/x_2$  en  $\frac{1}{4}$  de vuelta (puntos A y B)

$$t = 4 \int_0^{r/\omega} \frac{1}{x_2} dx_1 = 4 \int_0^{r/\omega} \frac{dx_1}{\sqrt{r^2 - \omega^2 x_1^2}} = \frac{4}{\omega} \operatorname{sen}^{-1} \left( \frac{y}{r} \right) \Big|_0^r = \frac{4}{\omega} \operatorname{sen}^{-1}(1) = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC}$$

Donde se hizo la sustitución  $y = \omega x_1$

Claramente el periodo y por ende la frecuencia de oscilación **no dependen de la CCII**, y sólo de los valores de L y C, pero la amplitud si

### Análisis con el plano de fases

#### Ejemplo 3: Control todo/nada de un satélite

Sea el sistema que se muestra en la figura 6 que corresponde al regulador todo/nada (Bang Bang) de un satélite, el cual se modela como un doble integrador debido a la falta de fricción y su ecuación es:

$$\ddot{\theta} = u$$

Donde  $u$  es el torque aplicado y vale

$$u(\theta) = \begin{cases} -U & \theta > 0 \\ U & \theta < 0 \end{cases}$$

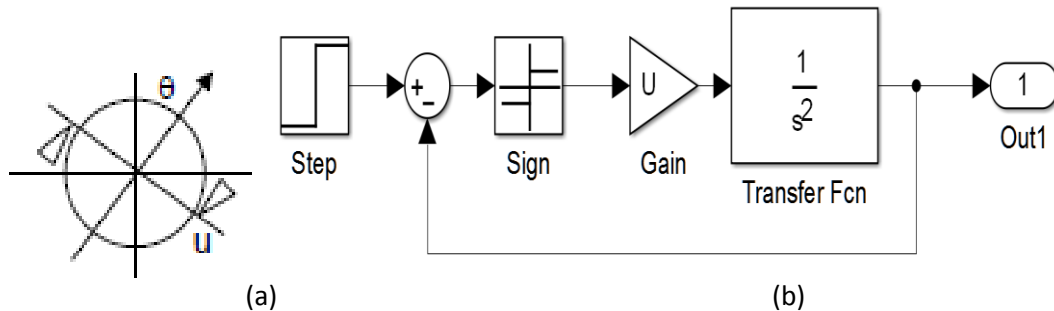


Figura 6: Control todo nada satélite (a) esquema (b) Diagrama control

Tomando estados resulta

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta \Rightarrow \dot{x}_1 = x_2 \\ x_2 &= \dot{\theta} \Rightarrow \dot{x}_2 = u \end{aligned}$$

Caso  $\theta > 0$  (semiplano derecho)

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -U \Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{U}{x_2} \Rightarrow x_2^2 = -2Ux_1 + c_1 \\ x_2 &= \pm \sqrt{c_1 - 2Ux_1} \end{aligned}$$

Luego las ramas de la raíz van hacia la izquierda y el centro está a la derecha pues

$$c_1 = x_1|_{x_2=0} > 0$$

Caso  $\theta < 0$  (semiplano izquierdo)

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= U \Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{U}{x_2} \Rightarrow x_2^2 = 2Ux_1 + c_1 \\ x_2 &= \pm \sqrt{2Ux_1 + c_1} \end{aligned}$$

En este caso las ramas de la raíz van hacia la derecha y el centro está a la izquierda pues

$$c_1 = x_1|_{x_2=0} < 0$$

Combinando las trayectorias resulta como se observa en la figura 7 la presencia una trayectoria cerrada y por ende de oscilaciones, no es un ciclo limite pues depende de la condición inicial

Si ahora se realimenta también la velocidad quedando la ley de control

$$u(\theta) = \begin{cases} -U & \dot{\theta} + a\theta > 0 \\ U & \dot{\theta} + a\theta < 0 \end{cases}$$

Con

$$a > 0$$

Tiene una componente proporcional más una derivativa que aportará amortiguamiento al sistema y su esquema de simulación se muestra en la figura 7.

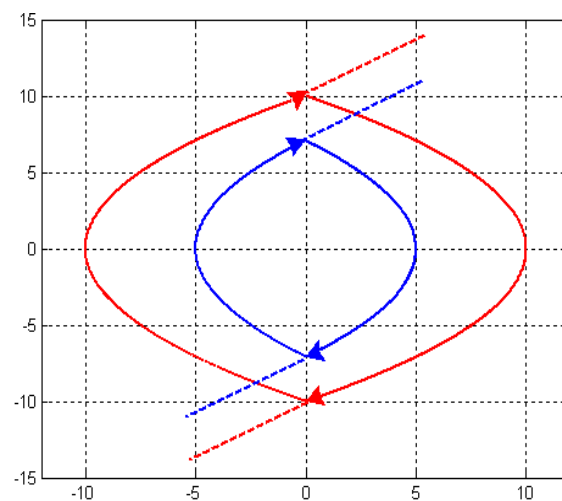


Figura 7: Esquema y Trayectorias control todo nada satélite

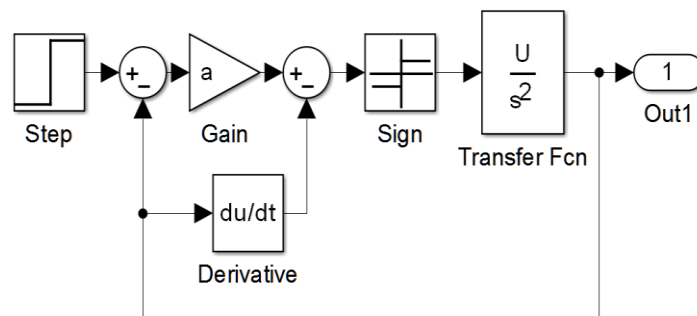


Figura 8: Control PD todo nada satélite

Ahora la línea de conmutación para  $u$  estará en una recta definida por

$$\dot{\theta} + a\theta = 0 \Rightarrow x_2 = -ax_1$$

Resultando las trayectorias mostradas en la figura 9 que van tendiendo origen, pero queda permanentemente oscilando muy cerca de él, esto se conoce como *chattering*. Esta Puede verse como una versión rudimentaria del llamado Control de modo deslizante (Sliding Mode control)

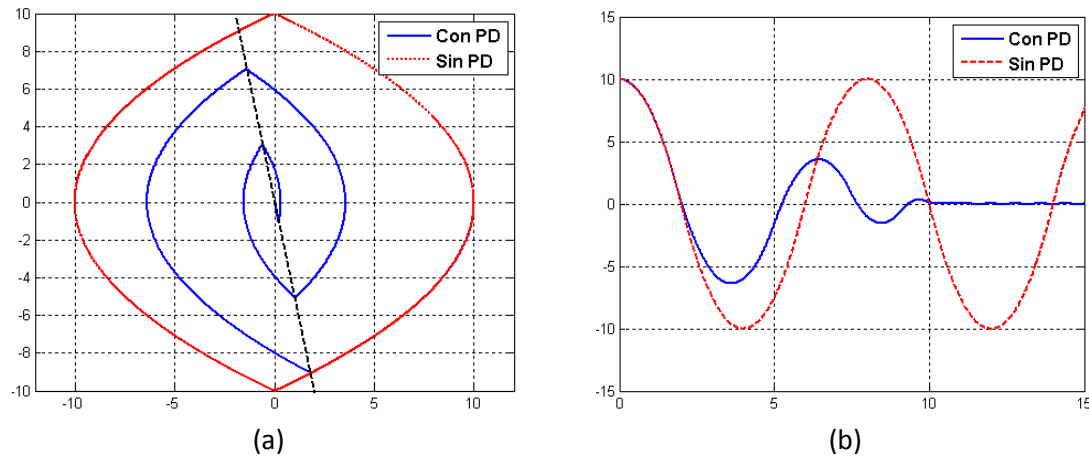


Figura 9: control todo nada satélite con y sin PD (a) Trayectorias y línea conmutación (b) error

## Sistemas Lineales de 2º orden

Es útil repasar el retrato de fase de sistemas lineales de segundo orden como herramienta para estudiar el comportamiento local del sistema no lineal alrededor de un equilibrio y así clasificarlos. Además sirve como método (con algunas limitaciones) para estudiar la estabilidad por linealización.

Considérese el sistema de segundo orden:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \text{ con } A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Se puede obtener la llamada forma canónica de Jordan mediante la transformación de similitud

$$z(t) = Tx(t)$$

Con  $T$  matriz de los autovectores de  $A$ , resultando para el sistema transformado

$$\dot{z}(t) = T\dot{x}(t) = TAx(t) = (TAT^{-1})z(t) = Jz(t)$$

Donde  $J$  es la matriz de Jordan, que puede ser Diagonal si los autovalores son reales distintos. Luego la solución del sistema transformado es:

$$z(t) = e^{Jt} z(0)$$

y para  $x(t)$

$$x(t) = T^{-1} e^{Jt} Tx(0)$$

## Formas de la matriz de Jordan

### Autovalores distintos de cero

a) Reales distintos  $J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$  forma diagonal

- **Nodo** estable si ambos son Negativos
- **Nodo** inestable si ambos son Positivos
- Punto **Silla** si son de distinto signo

b) Reales repetidos  $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

- **Nodo** estable si son Negativos
- **Nodo** inestable si son Positivos

c) Complejos conjugados  $J = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$  con  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$

- **Foco** estable si  $\alpha < 0$
- **Foco** inestable  $\alpha > 0$
- **Centro** si  $\alpha = 0$

Los retratos de fase se muestran en la figura 11

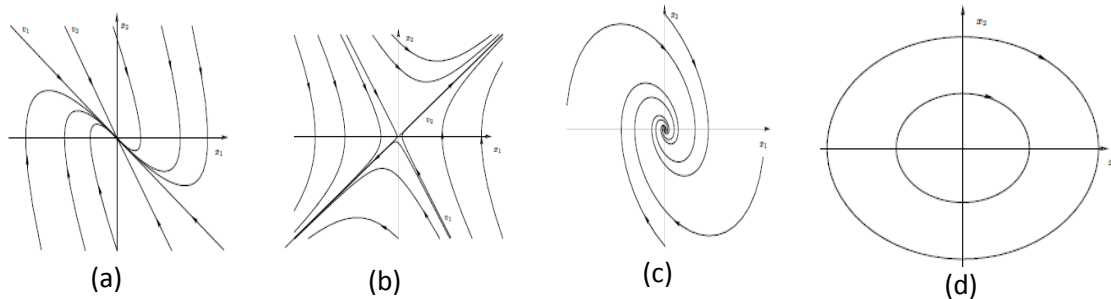


Figura 11: Retratos de fase con autovalores no nulos (a) Nodo (b) Silla (c) Foco (d) Centro

### Algún autovalor nulo

Aquí hay un continuo de equilibrios

a) Un autovalor nulo  $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$  corresponde a un sistema con integrador puro

- El conjunto de equilibrios es una recta
- Se puede asimilar a un **nodo** inestable
- Las trayectoria convergen a la recta si  $\lambda < 0$  y divergen si  $\lambda > 0$

b) Ambos nulos  $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  corresponde a un doble integrador

- El conjunto de equilibrios es todo el plano
- Las trayectoria son paralelas a una recta y no convergen

### Actividad Matlab 3:

Hallar los retratos de fase de los sistemas lineales  $\dot{x} = Ax$  con matrices A:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Partiendo de distintas CCII y superponiendo los dibujos

### Teoremas sobre ciclos limites

Los teoremas enunciados a continuación sólo valen para sistemas de segundo orden.

### Teorema de Bendixson

Supóngase  $D \subset \mathbb{R}^2$  un dominio simplemente conexo (sin huecos) y que se cumple que la divergencia del campo vectorial asociado

$$\nabla f = \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2}$$



No es idénticamente nula sobre cualquier subdominio de  $D$  y no cambia de signo en  $D$ . Entonces  **$D$  no contiene trayectorias cerradas** y por ende tampoco ciclos límites. Este teorema da condiciones **suficientes para la ausencia** de ciclos límites, es decir si no se cumple no se puede asegurar nada.

### Teorema de Poincaré

Si en una región  $D \subset \mathbb{R}^2$  **existe una trayectoria cerrada (posible CL)** se cumple que  **$N=S+1$** , donde  $N$  es la cantidad de nodos, centros y focos y  $S$  el número de puntos silla rodeado por la trayectoria.

Este teorema da una condición necesaria para la existencia de CL y lamentablemente no existe una condición necesaria y suficiente para la existencia de CL.

### Aplicaciones

#### Ejemplo 3: Sistema predador presa de Volterra

Las ecuaciones simplificadas del sistema son

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_1x_2 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = x_2 - x_1x_2 = f_2(x_1, x_2)$$

Siendo  $x_1$  la población de “predadores” y  $x_2$  la de “presas”. Los puntos de equilibrios cumplen

$$f_1(x_1, x_2) = -x_1 + x_1x_2 = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_2 - x_1x_2 = 0$$

Con lo que se tiene

$$\bar{x}_A = \begin{pmatrix} x_{1A} \\ x_{2A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{x}_B = \begin{pmatrix} x_{1B} \\ x_{2B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = x_2 - 1 \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = x_1 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -x_2 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 1 - x_1$$

Como la matriz Jacobiana es

$$A = \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{array} \right) \bigg|_{x=\bar{x}} = \left( \begin{array}{cc} x_2 - 1 & x_1 \\ -x_2 & 1 - x_1 \end{array} \right) \bigg|_{x=\bar{x}}$$

Valuando en los equilibrios

$$\bar{x}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Autovalores reales y de distinto signo: Silla

$$\bar{x}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} \lambda_1 = j \\ \lambda_2 = +j \end{cases}$$

Autovalores imaginarios puros: Centro

Aplicando Bendixson

$$\nabla f(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = (x_2 - 1) + (1 - x_1) = (x_2 - x_1)$$

Hay 3 zonas posibles para el signo

$$x_2 = x_1 \Rightarrow \nabla f(x) = 0$$

$$x_2 > x_1 \Rightarrow \nabla f(x) > 0$$

$$x_2 < x_1 \Rightarrow \nabla f(x) < 0$$

Esto es, sobre la recta

$$x_2 = x_1 \quad \nabla f(x) = 0$$

Y por encima o debajo de ella cambia el signo, hay una región simplemente conexa como en la figura 11 (a) donde no se cumple el teorema, en ella no se puede asegurar la ausencia de CL.

Se aplicará Poincaré para analizar donde puede haber un CL (si lo hay)

- En una región rodeando al origen y no al (1,1)  $S=1$   $N=0$ , no puede haber CL
- En una región rodeando a ambos  $S=1$   $N=1$ , tampoco
- En una región rodeando al (1,1) y no al origen  $S=0$   $N=1$  entonces  $N=S+1$ , puede haber un CL en esta región, la cual que se muestra en la figura 11 (b)

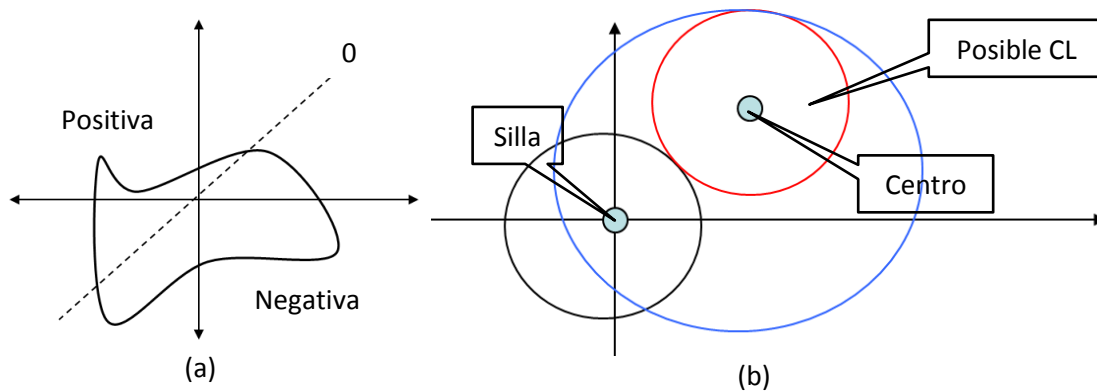


Figura 11: Sistema de Volterra (a) Signos divergencia, (b) Lugares de posibles CL

Las trayectorias simuladas con Matlab se ven en la figura 12 (a) donde se observa que no tiene un ciclo límite pero si un continuo de trayectorias cerradas y por ende soluciones periódicas dependientes de las CCII

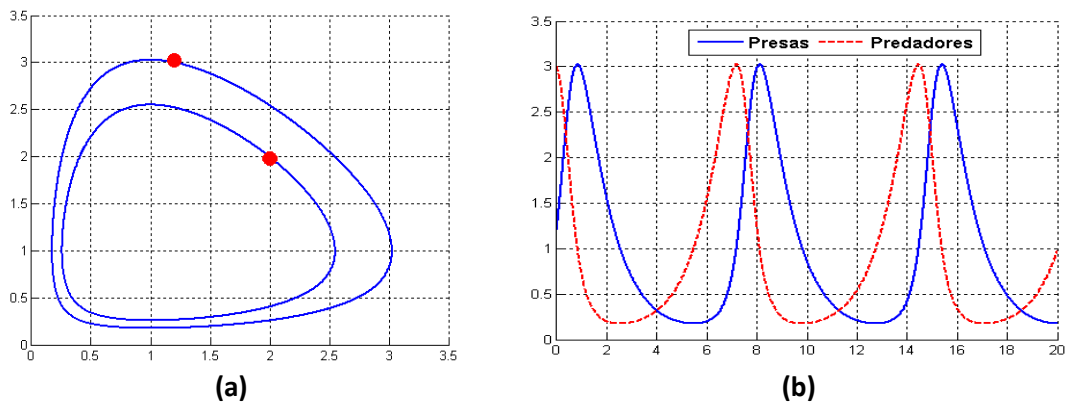


Figura 12: Sistema Presa Predador de Volterra (a) Trayectorias (b) Evolución temporal

Simulando el sistema con Simulink se obtienen las variables en el tiempo como se muestra en la figura 12 (b)

### Ejemplo 5: Ecuación de Van der Pol

$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = -c(x_1^2 - 1)x_2 - x_1 = f_2(x_1, x_2)$$

$$f_1(x_1, x_2) = x_2 \Rightarrow \frac{\delta f_1}{\delta x_1} = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = -c(x_1^2 - 1)x_2 - x_1 \Rightarrow \frac{\delta f_2}{\delta x_2} = -c(x_1^2 - 1)$$

$$\nabla f(x) = \frac{\delta f_1}{\delta x_1} + \frac{\delta f_2}{\delta x_2} = -c(x_1^2 - 1)$$

Existen tres posibilidades según:

$$|x_1| = 1 \Rightarrow \nabla f(x) = 0$$

$$|x_1| > 1 \Rightarrow \nabla f(x) < 0$$

$$|x_1| < 1 \Rightarrow \nabla f(x) > 0$$

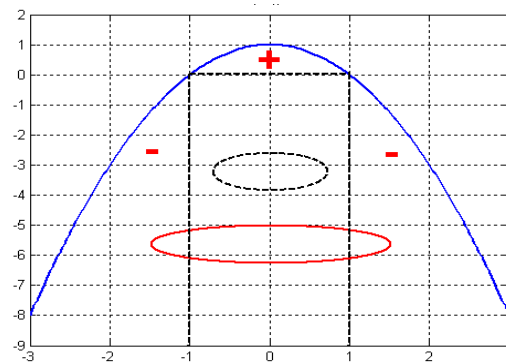


Figura 13: Divergencia y lugares de posibles CL Van der Pol

No es idénticamente cero en ningún subdominio (una línea en  $\mathbb{R}^2$  no lo es), luego para una región como la que se muestra en la figura 13 en línea continua hay cambio de signo: posible CL

#### Ejemplo 6: Péndulo con fricción

$$ml^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

Se usará la expresión simplificada

$$\ddot{\theta} + \dot{\theta} + \sin\theta = 0$$

Tomando variable de fase  $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$  resulta

$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 - \sin(x_1) = f_2(x_1, x_2)$$

Sus equilibrios son

$$x_2 = 0, \sin(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = k\pi$$

Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\cos(x_1) \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1$$

Como la matriz Jacobiana es

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x_1) & -1 \end{pmatrix}$$

Cuando  $k = 2l(\text{par}) \Rightarrow \cos(x_1) = 1$  y cuando  $k = (2l+1)(\text{impar}) \Rightarrow \cos(x_1) = -1$

$$J|_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Foco estable

$$J|_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Uno positivo y otro negativo: Silla

Calculando la divergencia

$$\nabla f(x) = \frac{\delta f_1}{\delta x_1} + \frac{\delta f_2}{\delta x_2} = -1$$

Cumple el teorema de Bendixson en todo el plano, **no puede haber ciclo limite**

### Ejemplo 7: Péndulo sin fricción

En este caso lo único que cambia es que  $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0$

$$J|_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm j \quad \text{Centro}$$

$$J|_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1 \quad \text{Silla}$$

La divergencia es ahora

$$\nabla f(x) = \frac{\delta f_1}{\delta x_1} + \frac{\delta f_2}{\delta x_2} = 0$$

Es idénticamente nula, no cumple el teorema de Bendixson en todo el plano, posible CL. Por Poincaré en una región rodeando a cualquier punto,  $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ , pero no a  $0, \pm \pi, \pm 3\pi, \dots$ .  $N=1$  y  $S=0$ , luego cumple que  $N=S+1$ , por lo que si hubiera un CL estará en estas zonas geoméricamente equivalentes, de hecho solo hay oscilaciones armónicas, pero con los teoremas anteriores no es posible afirmarlo ni negarlo.

### Ejemplo 8: Oscilador a resistencia negativa

Considérese el circuito que se muestra en la figura 13, el cual puede corresponder al circuito de baja señal del oscilador con diodo túnel polarizado en el punto de equilibrio  $Q_2$

El mismo tiene una característica estática corriente vs tensión  $i = h(v)$  no lineal

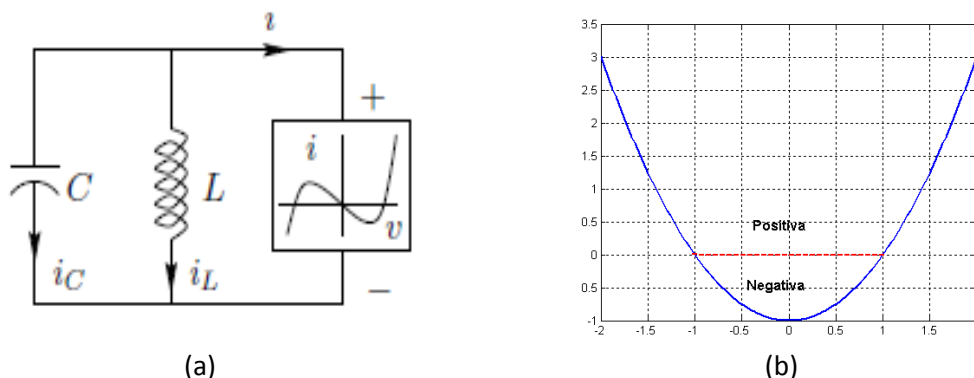


Figura 14: Oscilador a diodo túnel (a) Circuito (b) derivada de la característica  $v-i$

Aplicando Kirchoff la suma de las corrientes salientes es nula

$$i_c + i_L + i = 0$$

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} \int v dt + h(v) = 0 \Rightarrow LC \frac{dv}{dt} + \int v dt + Lh(v)$$

Derivando con respecto al tiempo se obtiene la ecuación

$$CL \frac{d^2v}{dt^2} + v + Lh'(v) \frac{dv}{dt} = 0$$

Normalizando en tiempo haciendo

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}$$

Por lo cual

$$t = \tau \sqrt{LC} \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \sqrt{LC}$$

Y llamando

$$\dot{v} = \frac{dv}{d\tau} = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \sqrt{LC} \frac{dv}{dt}$$

$$\ddot{v} = \frac{d\dot{v}}{d\tau} = \frac{d\dot{v}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \sqrt{LC} \frac{d\dot{v}}{dt} = LC \frac{d^2v}{dt^2}$$

Reemplazando las derivadas

$$\ddot{v} + \sqrt{L/C} h'(v) \dot{v} + v = 0$$

Llamando

$$\varepsilon = \sqrt{L/C}$$

Se obtiene

$$\ddot{v} + \varepsilon h'(v) \dot{v} + v = 0$$

Tomando  $x_1 = v, x_2 = \dot{v}$  resultan

$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = -\varepsilon h'(v) x_2 - x_1 = f_2(x_1, x_2)$$

Equilibrio único en el origen

$$x_2 = 0, x_1 = 0$$

La jacobiana en el origen es

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Los autovalores son

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm j \Rightarrow \text{Centro}$$

Tomando la divergencia

$$\nabla f(x) = \frac{\delta f_1}{\delta x_1} + \frac{\delta f_2}{\delta x_2} = -\varepsilon h'(v)$$

Como  $\varepsilon > 0$  si  $h'(v)$  que representa la resistencia dinámica, tiene la forma mostrada en la figura 12(b), la divergencia es positiva en un entorno del origen, luego nula y luego negativa a medida que se aleja, por Bendixson no se puede asegurar la ausencia de CL en un entorno del origen ya que no cumple las condiciones

Aplicando Poincare en una zona rodeando al origen hay un centro, luego se cumple que  $N=S+1$  por lo que puede haber un CL. En cualquier zona que no lo incluya no se cumple, por lo que si hay un CL tiene que estar en torno al origen.

Un análisis intuitivo muestra la existencia de ciclo límite, la ecuación puede verse como un sistema de segundo orden con amortiguamiento

$$\xi(v) = \varepsilon h'(v)$$

Si  $h'(v)$  es como se muestra en la figura 13, hay una zona cercana al origen donde es negativo lo que implica oscilaciones crecientes, a medida que la amplitud aumenta se entra en una zona en que es positiva, lo que implica oscilaciones decrecientes, lo cual hace presumir que habrá oscilaciones de amplitud constante (CL), es decir será un oscilador

En particular si  $h(v)$  es, o se aproxima a la forma

$$i = h(v) = -v + \frac{1}{3}v^3 \Rightarrow h'(v) = v^2 - 1$$

Se obtiene la ecuación de Van Der Pol

$$\ddot{v} + \varepsilon(1 - v^2)\dot{v} + v = 0$$

Estos tipos de osciladores ya sea con diodo Túnel o Dunn son muy usados en las frecuencias del rango de microondas.