Universidad Nacional de Córdoba
Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales

Mg. Ing. Sergio Laboret
Sistemas de Control 2
Departamento de Electrónica

Sistemas de control 2
Clase 6

Estabilidad en sentido de Lyapunov

Introducción

- Juega un rol central en teoría de sistemas e ingeniería, ya que un sistema inestable en general es no deseado, excepto que se busque una solución periódica (oscilador) el cual es inestable pero su salida y estados están acotados
- Existen distintos tipos de definiciones de estabilidad
- La vista hasta ahora es la denominada ***en sentido entrada/salida***, se dice que es estable en sentido BIBO si para toda entrada acotada la salida permanece acotada:

$$\forall u \,/\, |u(t)| < M \Rightarrow |y(t)| < N$$

- No siempre garantiza estabilidad de los estados, ya que puede haber algunos de ellos que crezcan sin control y no ser observables a la salida.

- Ante la posibilidad de múltiples equilibrios en los sistemas no lineales hay que *analizar la estabilidad de cada uno de ellos*, por ello no se pude hablar de estabilidad del sistema sino de cada equilibrio.
- Para analizar la estabilidad de un equilibrio hay que **perturbarlo** ligeramente, es decir la condición inicial no debe ser el equilibrio (ya que permanecería en el) sino un punto en un entorno del mismo.
- En esta sección por simplicidad se supondrá el origen del espacio de estados como equilibrio
- Siempre es posible llevar un equilibrio al origen mediante una traslación de coordenadas, supóngase el sistema

$$\dot{z} = g(z), g(\overline{z}) = 0$$

Haciendo una traslación

$$x = z - \overline{z} \Rightarrow \dot{x} = \dot{z} = f(z - \overline{z})$$
$$\Rightarrow \dot{x} = f(x), f(0) = 0$$

Lo cual puede repetirse para cada equilibrio, el problema entonces pasa a ser determinar la estabilidad del origen.

Ejemplo: Traslación del Péndulo

El péndulo, cambiando la notación se representa por

$$\dot{z}_1 = z_2 = g_1(z_1, z_2)$$
$$\dot{z}_2 = -z_2 - sen(z_1) = g_2(z_1, z_2)$$

Con equilibrios en $\begin{bmatrix}2k\pi & 0\end{bmatrix}^T$ $\begin{bmatrix}(2k+1)\pi & 0\end{bmatrix}^T$

Se trasladará a ***0*** el equilibrio en

$$\overline{z} = \begin{bmatrix} \pi & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 - \pi \\ z_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = -x_2 - sen(x_1 + \pi) = -x_2 + sen(x_1) = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

Que tiene como equilibrio al origen y sus equivalentes geométricos

Definiciones de estabilidad según Lyapunov

Sea el sistema $\dot{x} = f(x)$

Con equilibrio en el **origen** y ***f* Lipschitz**, con lo cual tiene solución única la cual que parte de la condición inicial

$$x_0$$

y se denota como $s(t, x_0)$

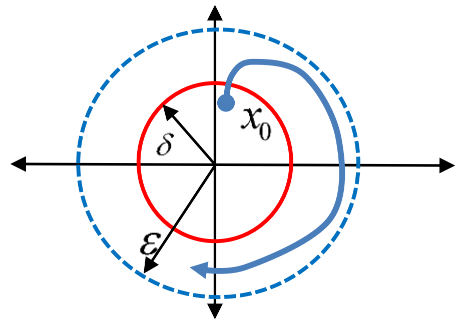
Estabilidad

Se dice que el origen es **estable (E)** en sentido de Lyapunov si

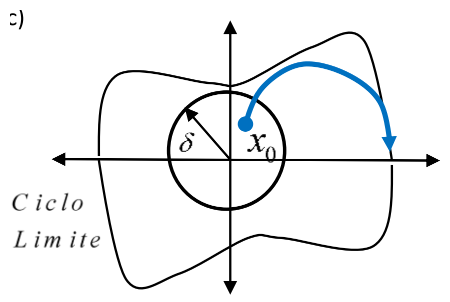
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \,/\, \|x_0\| < \delta$$

$$\Rightarrow \|s(t, x_0)\| < \varepsilon, \forall t \ge 0$$

Es posible mantener la solución **arbitrariamente cerca** del origen con sólo elegir el punto inicial lo **suficientemente cercano**



Solución acotada no garantiza estabilidad, como por ejemplo el oscilador de Van der Pol, en el cual las trayectorias convergen a un ciclo limite



La estabilidad es una propiedad *local*, es decir en una vecindad del origen

Un oscilador armónico (péndulo sin fricción o red LC) es ***estable*** en este sentido

El equilibrio es **inestable** si no es estable

Estabilidad Asintótica

Se dice que el origen es A**sintóticamente Estable (AE)** si

- Es Estable
- Es Atractivo

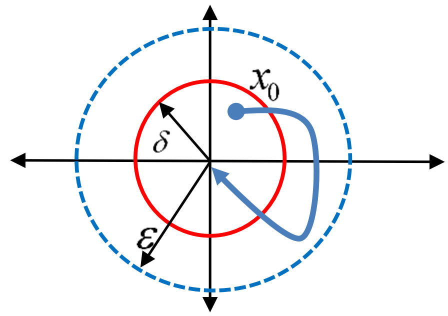
$$\exists \delta_1 > 0 \,/\, \|x_0\| < \delta_1 \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \|s(t, x_0)\| = 0, \forall t \geq 0$$

Significa que las trayectorias tienden asintóticamente al origen

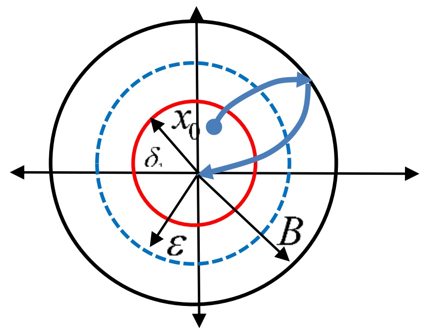
Un sistema lineal marginalmente estable no es asintoticamente estable

Dominio de a<tracción

$$B_{\delta_1} = \left\{ x \in \Re^n : \|x\| < \delta_1 \right\}$$



Si el dominio de **atracción** es todo el espacio de estados es globalmente atractivo, para ello el sistema debe tener un equilibrio ***único.***



Que la solución tienda al origen asintóticamente no significa necesariamente estabilidad

Estabilidad Asintótica Global
Se dice que el origen es Globalmente **Asintóticamente Estable (GAE)** si

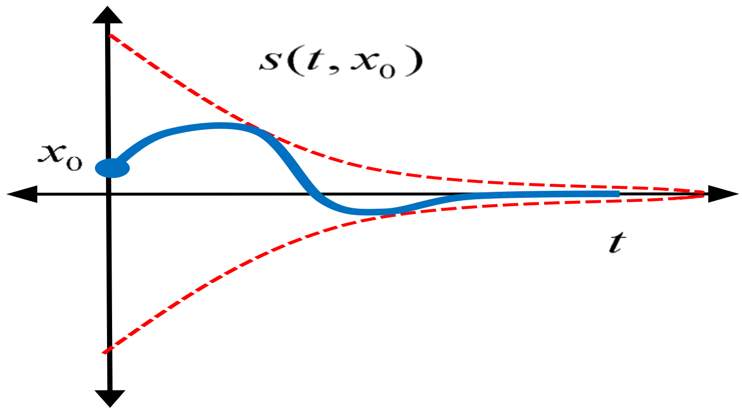
- Es Estable
- Es Globalmente Atractivo

La estabilidad asintótica asegura convergencia pero nada dice de la velocidad de la misma, para establecer una cota de dicha convergencia se define

Estabilidad Exponencial
Se dice que el origen es **Exponencialmente Estable (EE)** si

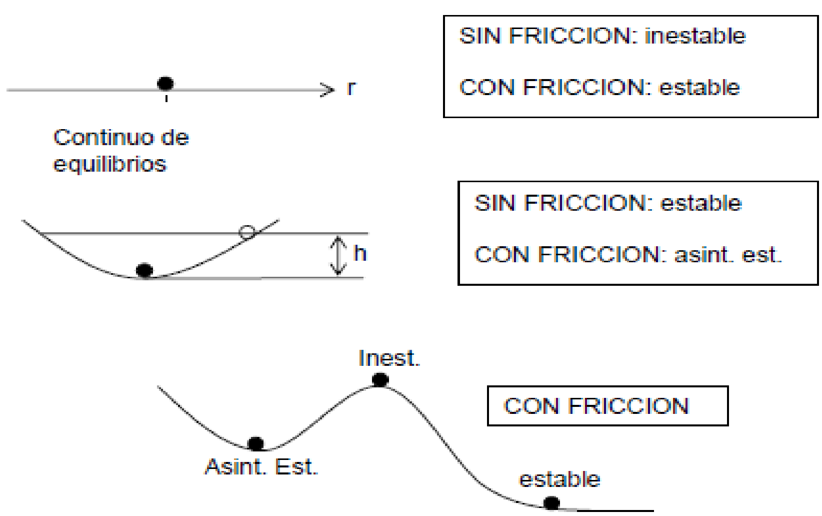
$$\exists \alpha, \beta, \delta > 0 / \|x_0\| < \delta$$
$$\Rightarrow \|s(t, x_0)\| < \alpha \|x_0\| e^{-\beta t},$$
$$\forall t \geq 0, \forall \delta \in B_\delta \subset \Re^n$$

Esta definición proporciona además una medida de la velocidad de convergencia, aunque es más difícil de probar

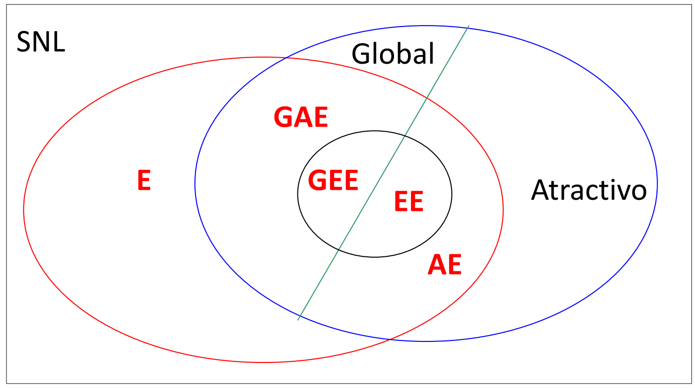


Si el dominio de **atracción** es todo el espacio de estados es **Globalmente Exponencialmente Estable (GEE)**
Si un sistema lineal es estrictamente estable es **GEE**

Interpretación intuitiva de las definiciones de estabilidad



Relaciones entre los tipos de estabilidad



- Determinar estabilidad a partir de la definición a menudo exige conocer la solución del sistema o bien una buena estimación de su comportamiento, lo cual se torna engorroso ya que muchas veces la solución es imposible de determinar

- Para ellos existen varios métodos que no requieren la solución explicita

Método indirecto de Lyapunov

Se puede determinar estabilidad o inestabilidad linealizando el sistema alrededor de un equilibrio y analizando su comportamiento mediante los autovalores de la Jacobiana

- No es posible definir el rango de validez de la aproximación.

- Hay casos en que el método falla

- Una ventaja es que no hace falta trasladar el equilibrio al origen

- La mayor utilidad de este método reside en su facilidad para probar inestabilidad.

Sea $\dot{x} = f(x) \qquad f(0) = 0$

Se puede escribir en un entorno del origen como

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0} + fos(x) \simeq Ax$$

Donde A es la matriz Jacobiana y *fos(x)* los términos de orden superior

Teorema: Sistema Linealizado

- Si los autovalores de A son todos a **parte real negativa** el origen del sistema no lineal es asintóticamente estable
- Si existe al menos un autovalor de A a **parte real positiva** el origen del sistema no lineal es inestable
- Si no hay autovalores de A a parte real positiva ni nulos, pero hay al menos uno sobre el eje ***jw*** el método falla y los términos de orden superior deciden la estabilidad.

Ejemplo: Sistema con origen inestable

Sea:

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_2 + x_1 x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 - x_2^{\;2}$$

Linealizando alrededor del origen

$$A = \begin{bmatrix} 1+x_2 & -1+x_1 \\ 0 & -1-2x_2 \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Calculando los autovalores

$$|\lambda I - A| = \left|\begin{bmatrix} \lambda-1 & 1 \\ 0 & \lambda+1 \end{bmatrix}\right| = (\lambda-1)(\lambda+1) = 0$$

Hay uno a parte real positiva y es inestable

Ejemplo: Fallo del método indirecto

Sea el sistema no lineal

$$\dot{x} = -y + xy^2 = f(x, y)$$

$$\dot{y} = x - x^2 = g(x, y)$$

Los equilibrios son

$$E_1 = \begin{bmatrix} x = 0 \\ y = 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} x = 1 \\ y = 1 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} x = 1 \\ y = 0 \end{bmatrix}$$

La Jacobiana es

$$A = \begin{bmatrix} y^2 & 2y - 1 \\ 1 - 2x & 0 \end{bmatrix}$$

Valuando en el origen

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Autovalores $\lambda_{1,2} = \pm j$

Imaginarios puros: el método **no decide**

Método directo de Lyapunov

- Se basa en hallar una función que represente la "energía" del sistema y luego analizar si decrece o se mantiene constante en el tiempo.

- Los teoremas de estabilidad de Lyapunov dan condiciones **suficientes** para estabilidad de puntos de equilibrio sin resolver las ecuaciones del sistema

Funciones Real valuadas y definición de funciones

Para aplicar el método directo es preciso conocer la definición de funciones real valuadas que le asignan al estado x del sistema un valor real V que generalmente se asocia a la *Energía* (real o ficticia)
Una función real valuada es una función tal que

$$V : \Re^n \rightarrow \Re \,/\, x \in \Re^n \rightarrow V(x) \in \Re$$

Localmente definida positiva

Una función V(x) es localmente definida positiva ***(ldp)*** si es continuamente diferenciable en un entorno *B* de radio *r* del origen y además

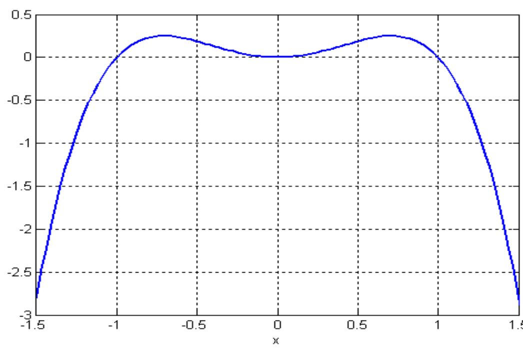
$$1) V(0) = 0$$

$$2) V(x) > 0, \forall x \neq 0, x \in B = \{x : \|x\| \leq r\}$$

Ejemplo

$$V(x) = x^2 - x^4$$

Es cero en el origen
Positiva en el (-1,1)
Negativa fuera de este intervalo
Es ***ldp***



Semidefinida positiva

Para ser ***sdp*** se le permite ser nula en un entorno del origen

$$1) V(0) = 0$$

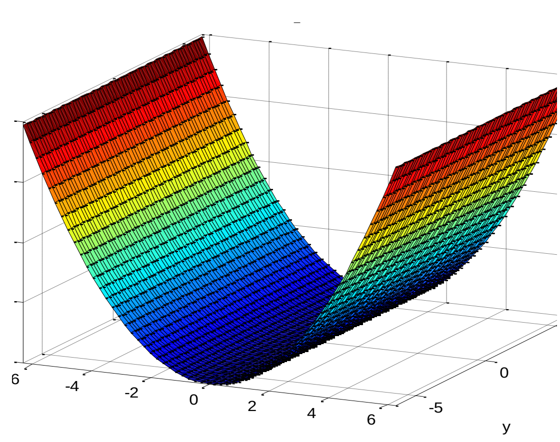
$$2) V(x) \geq 0, \forall x \neq 0, x \in B = \{x : \|x\| \leq r\}$$

Ejemplo

$$V(x_1, x_2) = x_2{}^2$$

Se hace nula en todo el eje

Es semidefinida positiva



Definida positiva

Una función V(x) es definida positiva ***(dp)*** si es continuamente diferenciable en todo el espacio de estados y además

$$1) V(0) = 0$$

$$2) V(x) > 0, \forall x \neq 0$$

$$3) \exists r > 0 \,/\, \underset{\|x\| \geq r}{\text{infimo}}\, V(x) > 0$$

La última condición evita que pueda tender a cero cuando la norma del estado tiende a infinito, lo cual en términos de energía significaría que estados muy grandes tendrían energía muy baja.

Radialmente no acotada (RNA)

Una función V(x) es RNA si y solo si

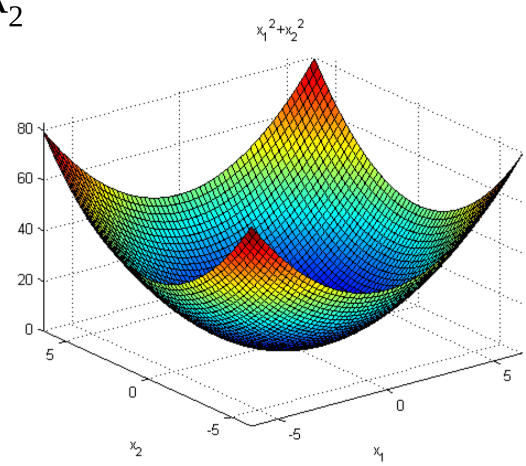
$$\|x\| \to \infty \Rightarrow V(x) \to \infty$$

Si es RNA satisface la exigencia 3) para ser definida positiva y puede ser más fácil de probar, pero no todas las que cumplen dicha exigencia son RNA

Ejemplo

$$V(x_1, x_2) = x_1^{\,2} + x_2^{\,2}$$

Continuamente diferenciable
Nula en el origen
Positiva para todo el plano
Crece indefinidamente con la norma de x: es RNA,
Es definida positiva



Definida negativa

Una función es definida negativa si es definida positiva $-V(x)$

Semi definida negativa

Una función es definida negativa si es semi definida positiva $-V(x)$

No definida

Una función es ***no definida*** si no cumple las condiciones anteriores.
Ejemplo

$$V(x_1, x_2) = 1 + x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}$$

Es cont. dif. y siempre positiva pero no es función de Lyapunov, ya que no se anula en 0

Función de Lyapunov

$$V[x(t)] : \Re_+ \to \Re^n \to \Re$$

Para ser candidata de Lyapunov debe ser continuamente diferenciable en x y al menos **localmente definida positiva**

Cálculo de la derivada temporal en las trayectorias

Al ser una función compuesta, aplicando la regla de la cadena para derivar V respecto de *t*

$$\dot{V}[x(t)] = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \ldots.. \frac{\partial V}{\partial x_n}\dot{x}_n$$

Y remplazando las derivadas de *x* respecto de t

Las cuales son las trayectorias del sistema, se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \ldots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{matrix} f_1(x_1 \ldots . x_n) \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1 \ldots . x_n) \end{matrix}$$

$$\dot{V}[x(t)] = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x_1 \ldots. x_n) + \ldots.. \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(x_1 \ldots. x_n)$$

Permite calcular la derivada temporal de V *sin resolver el sistema*

$$V[x(t)] = V[x(0)] + \int_0^t \dot{V}[x(\tau)] d\tau$$

Teoremas de estabilidad

Se mostraran teoremas que permiten dar condiciones suficientes para los distintos tipos de estabilidad

Teorema de estabilidad de Lyapunov

El origen es **estable** (E) si existe una función de Lyapunov, localmente definida positiva y r>0 tal que

$$\dot{V}(x) \leq 0, \forall x / \|x\| \leq r$$

La derivada temporal de V evaluada en las trayectorias del sistema debe ser ***semidefinida negativa*, es decir la energía no crece**

Teorema de estabilidad asintótica

El origen es **asintóticamente estable (AE)** si

$$\dot{V}(x) < 0, \forall x / \|x\| \leq r$$

La derivada temporal de V evaluada en las trayectorias del sistema debe ser ***definida negativa*, es decir la energía decrece**

El conjunto

$$B_r = \{x : \|x\| \leq r\}$$

se denomina dominio de atracción

Teorema de estabilidad asintótica global

- El dominio de atracción sea todo el espacio de estados (por lo que el sistema no puede tener otro equilibrio)
- V **radialmente no acotada**, sino puede darse el fenómeno de tiempo de escape finito

$$\dot{V}(x) < 0, \forall x \in \Re^n \qquad \begin{array}{l} \lim V(x) \to \infty \\ \|x\| \to \infty \end{array}$$

Ejemplo: Ecuación de Lienard

Dada la siguiente ecuación genérica de segundo orden:

$$\ddot{y}(t) + f[y(t)]\dot{y}(t) + g[y(t)] = 0$$

Se verá qué condiciones deben cumplir *f* y *g* para que sea: E, AE o GAE

Tomando VE

$$\begin{array}{ll} x_1 = y & \dot{x}_1 = x_2 \\ x_2 = \dot{y} & \dot{x}_2 = -f[x_1]x_2 - g[x_1] \end{array}$$

Definiendo la candidata de Lyapunov

$$V(x) = \frac{{x_2}^2}{2} + \int_0^{x_1} g(\sigma)d\sigma$$

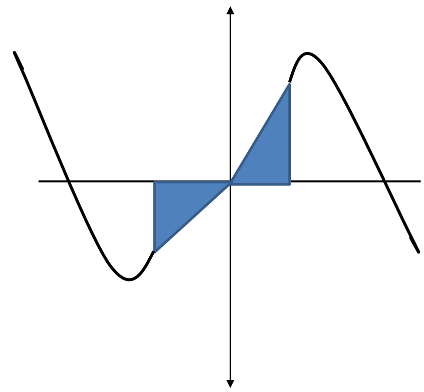
Imponiendo a ***g*** la condición de que

$$\sigma g(\sigma) > 0, \forall \sigma \neq 0 \exists[-\sigma_0.\sigma_0], g(0) = 0$$

La función pasa por el origen y está en el primer y tercer cuadrante al menos en un entorno, lo que asegura como se muestra que

$$\int_0^{x_1} g(\sigma)d\sigma > 0 \forall x_1 \neq 0$$

Luego *V(x)* es **definida positiva** en el intervalo, es candidata de Lyapunov, Calculando la derivada en las trayectorias



$$\dot{V}(X) = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2$$

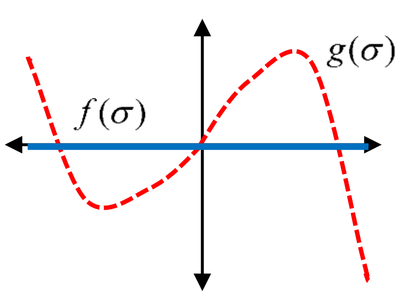
Como $\frac{\partial V}{\partial x_1} = g(x_1)$ $\frac{\partial V}{\partial x_2} = x_2$

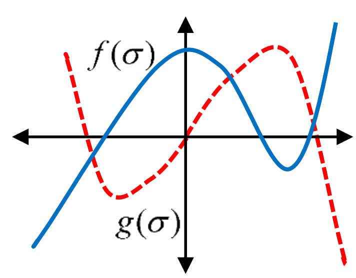
Reemplazando e introduciendo las trayectorias $\dot{V}(X) = g(x_1)\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2$

$$\dot{V}(X) = g(x_1)x_2 - x_2{}^2 f(x_1) - g(x_1)x_2 = -x_2{}^2 f(x_1)$$

Su definición sólo depende del signo de *f*, entonces:

- ***f* no negativa** en un entorno del origen : **Estable**
- ***f* estrictamente positiva** en un entorno del origen: **AE**





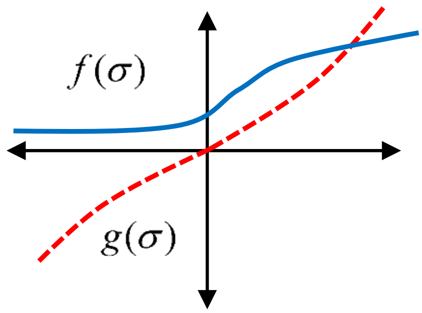
g: línea de puntos, ***f***: línea continua

- ***f* estrictamente positiva** en un entorno del origen

$$\sigma g(\sigma) > 0, \forall \sigma \neq 0, g(0) = 0$$

$$g(\sigma) \to \infty \quad |\sigma| \to \infty$$

GAE



- Abarca muchos sistemas de segundo orden y las condiciones impuestas sobre las funciones son bastante débiles

Velocidad de convergencia

Es deseable establecer una cota para la convergencia, para ello se dispone de los siguientes teoremas:

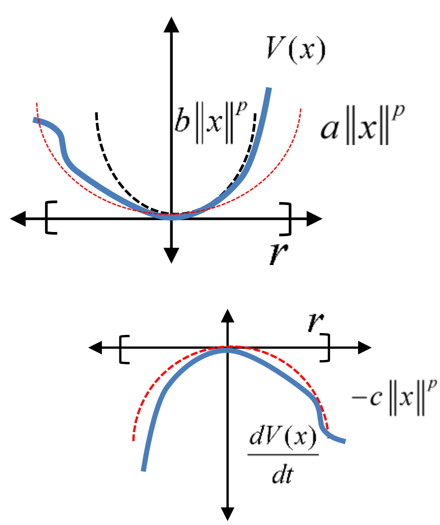
Teorema de estabilidad exponencial

El origen es EE si existen constantes

$$a, b, c, r > 0, \ p \geq 1$$

$$a\|x\|^p \leq V(x) \leq b\|x\|^p$$
$$\forall x / \|x\| \leq r$$

$$\dot{V}(x) \leq -c\|x\|^p$$
$$\forall x / \|x\| \leq r$$



Teorema de estabilidad exponencial global
Si lo anterior se cumple para todo el espacio de estados es GEE

- No es sencillo probar estabilidad exponencial y menos aún determinar la velocidad de convergencia

Teoremas de inestabilidad

- Es más difícil probar inestabilidad que estabilidad por este método
- Hay varios teoremas para determinarla
- El más fácil de utilizar es el siguiente:

Teorema de inestabilidad de Chetaev
El origen es **inestable** si existe V continuamente diferenciable

$$V(0)=0 \qquad \dot{V}(x)>0$$

Existen puntos x_0

arbitrariamente cercanos al origen donde $V(x_0)>0$

- No basta con que la derivada temporal sea localmente definida positiva
- No se le pide a la función de Lyapunov que sea definida positiva

Ejemplo: Equilibrio Inestable en el origen
Sea el sistema con equilibrio en el origen definido por

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_2 + x_1 x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 - x_2^{\,2}$$

Con la candidata de Lyapunov $V(x_1,x_2)=(2x_1-x_2)^2-x_2^{\,2}$

La cual es continuamente diferenciable, V(0)=0 y asume valores positivos arbitrariamente cerca del origen, cuando

$$x_2 = 0 \Rightarrow V(x_1, 0) = (2x_1)^2 > 0$$

Cumple la condición 2), calculando la derivada

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 2(2x_1 - x_2)(2\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - 2x_2\dot{x}_2$$

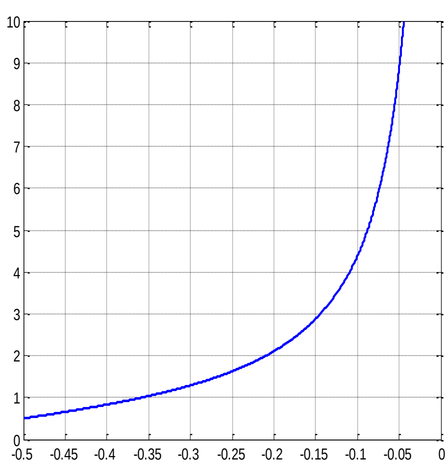
$$= \left[(2x_1 - x_2)^2 + x_2^{\ 2}\right](1 + x_2)$$

$$\left[(2x_1 - x_2)^2 + x_2^{\ 2}\right] > 0, \forall x_1, x_2 \neq 0$$

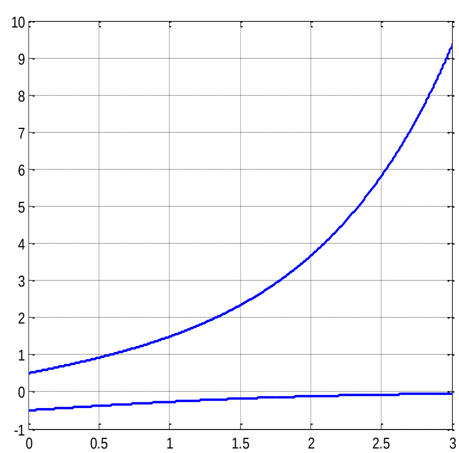
$$(1 + x_2) > 0, x_2 > -1$$

Es **localmente definida positiva** (condición 1): el origen **es inestable**

Plano de fases



Evolución de las variables



Ventajas y desventajas del método

- Se puede concluir sobre la estabilidad sin resolver el sistema

- Se debe buscar una función de Lyapunov adecuada
- Solo da condiciones suficientes
- Si la función elegida falla no se puede concluir nada
- Algunas funciones dan más información que otras

Ejemplo 6: Péndulo con fricción y energía ficticia

$$\ddot{\theta} + \dot{\theta} + sen\theta = 0$$

Con $$V = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\dot{\theta} + \theta\right)^2 + 2(1 - \cos\theta)$$

Localmente definida positiva. aplicando Lyapunov se obtiene

$$\dot{V} = \dot{\theta}\ddot{\theta} + \dot{\theta}\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2 + \theta\ddot{\theta} + \theta\dot{\theta} + 2\dot{\theta}sen\theta$$

$$\dot{V} = 2\dot{\theta}(-\dot{\theta} - sen\theta) + \dot{\theta}^2$$
$$+\theta(-\dot{\theta} - sen\theta) + \theta\dot{\theta} + 2\dot{\theta}sen\theta$$

$$\dot{V} = -2\dot{\theta}^2 - 2\dot{\theta}sen\theta + \dot{\theta}^2 - \theta\dot{\theta} - \theta sen\theta$$
$$+\theta\dot{\theta} + 2\dot{\theta}sen\theta = -\left(\dot{\theta}^2 + \theta sen\theta\right)$$

Que es localmente definida negativa: AE
Su dominio de atracción es

$$|\theta| < \pi$$

Si se tomara la energía física (potencial + cinética)

$$V = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + (1-\cos\theta)$$

$$\dot{V} = \dot{\theta}\ddot{\theta} + sen(\theta)\dot{\theta} = \dot{\theta}(-\dot{\theta} - sen\theta) + \dot{\theta}sen\theta$$

$$= -\dot{\theta}^2 \leq 0$$

Semidefinida negativa: solo se puede concluir estabilidad

Definición de Matrices y formas cuadraticas

Una forma cuadrática es una aplicación

$$q : \Re^n \rightarrow \Re \,/\, x \in \Re^n \rightarrow q \in \Re$$

$$q(x_1, x_2, \ldots x_n) = a_{11}x_1^{\;2} + a_{22}x_2^{\;2} + \ldots . a_{nn}x_n^{\;2}$$
$$+2a_{12}x_1x_2 + \ldots 2a_{n-1}x_{n-1}x_n$$

caso especial de función real valuada del apartado anterior. Se puede expresar como una forma matricial

$$q(x_1, x_2, \ldots x_n) = x^T Ax$$

Donde la matriz asociada es Simétrica

$$A = A^T \Rightarrow a_{ij} = a_{ji}$$

Toda matriz simétrica representa una forma cuadrática y toda forma cuadrática tiene una matriz simétrica asociada.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ .. & .. & .. \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

La ***definición de una matriz*** coincide con la de su forma cuadrática asociada, pero para simplificar el cálculo existen otros criterios más sencillos de utilizar, sobre todo si el orden es elevado y la matriz no es diagonal, es decir existen los productos cruzados

Criterio de los autovalores

Los autovalores son las raíces de la ecuación característica

$$P(\lambda) = |\lambda I - A| = 0$$

Al ser simetrica seran reales y en base a ellos se puede obtener la definición de la matriz

- Definida positiva si y sólo si son todos positivos
- Definida negativa si y sólo si son todos negativos.
- Semidefinida positiva si y sólo si son todos positivos o nulos.
- Semidefinida negativa si y sólo si son todos negativas o nulos.
- Indefinida si y sólo si hay positivos, negativos y/o nulos

Requiere obtener las raíces de una ecuación de orden n
Para n>2 se puede usar la orden **eig()** de Matlab o el criterio de Routh Hurwitz sobre

$P(\lambda)$ Observando la primera fila del arreglo sera

- Definida positiva si hay **n** cambios de signo y no se anula ninguna fila
- Definida negativa si no hay cambios de signo y no se anula ninguna fila
- Semidefinida positiva hay **m<n** cambios de signo y se anulan **n-m** filas
- Semidefinida negativa no hay cambios de signo y se anula alguna fila
- Indefinida si hay m<n cambios de signo

Criterio de los menores principales (Sylvester)

Sea M_i El menor principal **i-esimo** de A que es el determinante que se obtiene a partir de una submatriz de A formada con las ***i*** primeras filas y columnas

Luego el criterio de Sylvester es

- Definida Positiva $M_i > 0, \forall i$
- Definida Negativa $(-1)^i M_i > 0, \forall i$
- Semidefinida Positiva

$$M_i > 0, i = 1, \ldots, n-1 \qquad M_n = |A| = 0$$

- Semidefinida Negativa

$$(-1)^i M_i > 0, i = 1, \ldots, n-1 \qquad M_n = |A| = 0$$

- Indefinida en caso contrario

Sistemas lineales Invariantes

Sistema LIT $\dot{x} = Ax$

Candidata de Lyapunov $V = x^T P x \quad P = P^T > 0$

Simétrica y definida positiva, calculando la derivada

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T A^T P x + x^T P A x$$

$$= x^T \left(A^T P + PA \right) x = x^T Q x$$

$$Q = \left(A^T P + PA \right) = Q^T < 0$$

Smétrica y definida negativa o semidefinida negativa

Dada P simétrica y **dp, Q** puede no ser **dn** o **sdn** aunque el sistema sea estable, por ello es más conveniente elegir

$$Q = Q^T < 0$$

Definida negativa y despejar P de la ecuación de Lyapunov

$$A^T P + PA = Q$$

E sistema es estable si $$P = P^T > 0$$

Métodos para construir funciones de Lyapunov

Se presentan algunos métodos sugeridos para hallar la función de Lyapunov que, si bien no funcionan en todos los casos, son generalmente los primeros en intentarse

Función cuadrática

Para un sistema de segundo orden la opción más intuitiva es proponer una cuadrática general de la forma

$$V(x_1, x_2) = a{x_1}^2 + b x_1 x_2 + c{x_2}^2$$

La cual será Definida Positiva si

y

$$a > 0 \qquad 4ac - b^2 > 0$$

Luego se calcula la derivada y se tratan de obtener los valores de los coeficientes para los cuales V es definida positiva y su derivada (semi) definida positiva simultáneamente

Método del Gradiente Variable

Sea $V(x)$ una función escalar de **x** y

$$g(x) = \left[\partial V / \partial x\right]^T$$

como se vio la derivada temporal de V se puede poner como

$$\dot{V}(x) = g(x)^T f(x)$$

La idea es tratar de encontrar *g(x)* tal que sea el gradiente de una función definida positiva *V(x)* y tal que

$$\dot{V}(x) : dp$$

g(x) es el gradiente de una función escalar sí y solo sí su Jacobiana

$$J = \left[\partial g / \partial x \right]$$

Es simétrica, es decir

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}, \forall i, j = 1, 2.....n$$

Bajo esta restricción, se elige *g(x)* tal que

$$g(x)^T f(x)$$

sea **definida negativa**

Una forma usual de definir la función es

$$g(x) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Con los $a_{i,j}(x)$ indeterminados, luego se calcula

$$J = \left[\partial g / \partial x \right]$$

Se imponen las condiciones de simetría y se determina

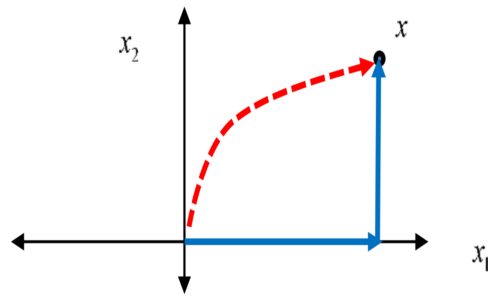
$$\dot{V}(x) = g(x)^T f(x)$$

Y se deducen las condiciones de los coeficientes para que sea definida negativa. Por último se calcula

$$V(x)=\int_0^x g(y)dy=\int_0^x \sum_{i=1}^{n} g_i\left(y_i\right)dy_i$$

Y se verifica que sea definida positiva

Como la integral de un gradiente no depende del camino, se puede integrar a lo largo de los ejes como se indica



$$V(x)=\int_0^{x_1} g_1(y_1,0....0)dy_1+\int_0^{x_2} g_2(x_1,y_2,0....0)dy_2$$

$$+....\int_0^{x_n} g_n(x_1,x_2,..y_n)dy_n$$

Ejemplo: Función de Lyapunov por gradiente variable

Sea el sistema no lineal

$$\dot{x}_1=-2x_1$$
$$\dot{x}_2=-2x_1+2x_1x_2^{\,2}$$

Se plantea

$$g_1(x)=a_{11}(x)x_1+a_{12}(x)x_2$$
$$g_2(x)=a_{21}(x)x_1+a_{22}(x)x_2$$

Por la condición de simetría

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2}=\frac{\partial g_2}{\partial x_1}$$

Eligiendo

$$a_{11}=a_{22}=1, a_{12}=a_{21}=0 \qquad g_1(x)=x_1, g_2(x)=x_2$$

Luego

$$\dot{V}(x)=g^T(x)f(x)=g_1f_1+g_2f_2=x_1f_1+x_2f_2$$

Incorporando las trayectorias

$$\dot{V}(x) = -2x_1^{\,2} - 2x_2^{\,2} + 2x_1x_2^{\,3} = -2x_1^{\,2} - 2x_2^{\,2}(1 - x_1x_2)$$

es **localmente definida negativa** en la región

$$(1 - x_1x_2) > 0$$

que comprende un entorno del origen, ahora se debe calcular V por integración

$$V(x) = \int_0^{x_1} g_1(y_1)dy_1 + \int_0^{x_2} g_2(x_1, y_2)dy_2$$

$$= \int_0^{x_1} y_1 dy_1 + \int_0^{x_2} y_2 dy_2 = \frac{x_1^{\,2} + x_2^{\,2}}{2}$$

Que es definida positiva

Luego el origen es **Localmente asintóticamente estable**

Método de Krasovskii

Se basa en proponer una función de Lyapunov similar a la de los sistemas lineales, a cual es definida positiva por naturaleza

$$V(x) = f^T(x) f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x)_i^{\,2}$$

Se puede simplificar el cálculo de la derivada teniendo en cuenta que

$$\dot{f}(x) = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} = A(x) f(x) \qquad A(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

La matriz Jacobiana del sistema, resultando finalmente

$$\dot{V} = f^T \dot{f} + \dot{f}^T f = f^T A f + f^T A^T f = f^T (A + A^T) f$$

Si la matriz $A + A^T$ es definida negativa en una vecindad del origen entonces es asintóticamente estable y si es semidefinida negativa es estable.

- Se transforma el problema en calcular la Jacobiana y obtener los autovalores o los menores principales de una matriz de orden n
- Aplicar este método no es lo mismo que estudiar la estabilidad por linealización, ya que aquí la Jacobiana no se valúa en ningún punto y por lo tanto

$$A + A^T$$

puede ser función de las variables de estado

Ejemplo Aplicación del método de Krasovskii

Sea el sistema

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 = f_1$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2{}^3 = f_2$$

La Jacobiana resulta

$$A(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1-3x_2{}^2 \end{bmatrix}$$

Luego como A es simétrica

$$A^T + A = 2A = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -2-6x_2{}^2 \end{bmatrix}$$

Y los menores principales son

$$M_1(x_1, x_2) = -6 < 0$$

$$M_2(x_1, x_2) = \det \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -2-6x_2{}^2 \end{bmatrix}$$

$$= (12 + 36x_2{}^2) - 4 = (8 + 36x_2{}^2) > 0$$

Definida negativa el origen es **asintóticamente estable.**

- **La complejidad algebraica se reduce mucho cuando se puede aplicar este método.**

Utilizando el criterio de los autovalores

$$P(\lambda) = \left|\lambda I - (A^T + A)\right| = \left\|\begin{bmatrix} \lambda + 6 & -2 \\ -2 & \lambda + 2 + 6{x_2}^2 \end{bmatrix}\right\| = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + (8 + 6{x_2}^2)\lambda + (4 + 36{x_2}^2) = 0$$

Cuadrática con todos los coeficientes positivos y no nulos, lo que implica autovalores a parte real negativa: definida negativa