Математическое моделирование управляемого движения твёрдого тела

Титов Александр Геннадиевич

14 июня 2019

«Прикладная математика и информатика»

Постановка задачи оптимального управления движением твёрдого тела

Угловое движение твердого тела

$$2\dot{\overline{\lambda}} = \overline{\lambda} \circ \overline{\omega}_Y \tag{1}$$

Краевые условия

$$\overline{\lambda}(0) = \overline{\lambda}^0, \ \overline{\lambda}(T) = \overline{\lambda}^T \tag{2}$$

Минимизируемый функционал

$$I = \int_0^T (\alpha_1 \omega_1^2 + \alpha_2 \omega_2^2 + \alpha_3 \omega_3^2) dt \tag{3}$$

Решение задачи с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина

С помощью принципа максимума Понтрягина задача оптимальной переориентации твердого тела сведена к краевой задаче.

Система ОДУ с краевыми условиями

$$\begin{cases} 2\dot{\overline{\lambda}} = \overline{\lambda} \circ \overline{\omega}, \\ \dot{\overline{p}} = \overline{p} \times \overline{\omega} \end{cases} \quad \overline{\lambda}(0) = \overline{\lambda}^0, \ \overline{\lambda}(T) = \overline{\lambda}^T \tag{4}$$

7 уравнений, для которых нужно решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_0 = -\frac{1}{2}\lambda_1\omega_1 - \lambda_2\omega_2 - \lambda_3\omega_3, \\ \dot{\lambda}_1 = \frac{1}{2}\lambda_0\omega_1 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2, \\ \dot{\lambda}_2 = \frac{1}{2}\lambda_0\omega_2 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3, \\ \dot{\lambda}_3 = \frac{1}{2}\lambda_0\omega_3 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{p}_1 = p_2\omega_3 - p_3\omega_2, \\ \dot{p}_2 = p_1\omega_3 - p_3\omega_1, \\ \dot{p}_3 = p_1\omega_2 - p_2\omega_1. \end{cases} \tag{5}$$

Алгоритм численного решения

1. Для полученной системы из 7 дифференциальных уравнений решаем задачу Коши с начальным условием $\overline{\lambda}^0$ и начальным приближением $p = (p_{10}, p_{20}, p_{30})$ - получаем $\overline{\lambda}^T_{прибл.}$.
2. Ищем корни уравнений, определенных $F(p_{10}, p_{20}, p_{30}) = 0$ с начальным приближением p_{10}, p_{20}, p_{30}, итерационным методом Ньютона и на каждой итерации получаем вектор-невязок решения задачи Коши, вычисляемый по формуле $vect[\tilde{\overline{\lambda}}^T_{прибл.} \circ \overline{\lambda}^T] = (0, 0, 0)$.
3. Вычисляем угловую скорость по формуле $\omega_1 = \dfrac{p_1}{4\alpha_1}, \ \omega_2 = \dfrac{p_2}{4\alpha_2}, \ \omega_3 = \dfrac{p_3}{4\alpha_3}$.
4. Вычисляем минимизируемый функционал по формуле $I = \int\limits_0^T (\alpha_1 \omega_1^2 + \alpha_2 \omega_2^2 + \alpha_3 \omega_3^2) dt$.

Пример численного решения для поворота на малый угол, когда α_1 и α_3 фиксированы

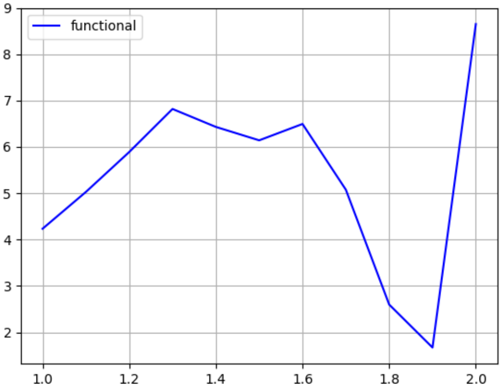

Рисунок 1. $\alpha_2 \in [1, 2]$, угол в 5°

Пример численного решения для поворота на малый угол, когда α_1 и α_3 фиксированы

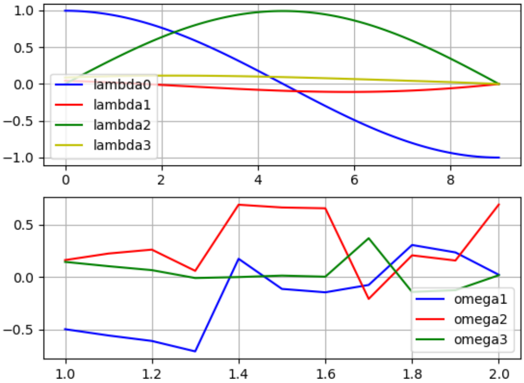

Рисунок 2. $\alpha_2 \in [1, 2]$, угол в 5°

Пример численного решения для поворота на большой угол, когда α_1 и α_3 фиксированы

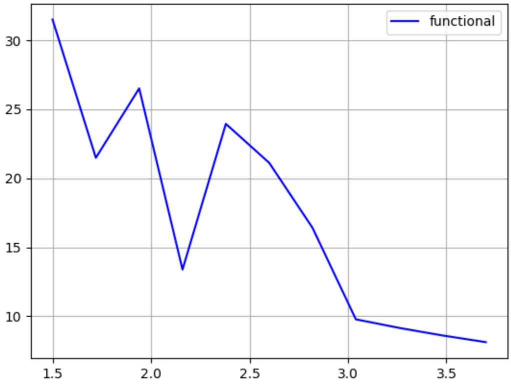

Рисунок 3. $\alpha_2 \in [1.5, 3.7]$, угол в 50°

Пример численного решения для поворота на большой угол, когда α_1 и α_3 фиксированы

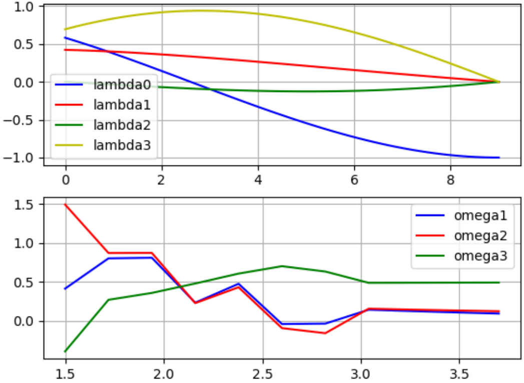

Рисунок 4. $\alpha_2 \in [1.5, 3.7]$, угол в 50°

База данных для хранения графиков


```
_id: ObjectId("5cdb03f13ba0381f20caf7c0")
date: "14-05-2019/22-07"
data: Object
  bvp_solution: Array
    0: 0.568927391439924
    1: 1.8510090579758844
    2: 6.8926010599356315
  ivp_solution: Array
    0: -0.9999999840614905
    1: -7.851193653540811e-12
    2: 9.844472459441533e-12
    3: -8.563101616676505e-12
    4: 0.5689273892967905
    5: -1.8510090741394443
    6: 6.892601062773771
charts: Binary('gANjUElMLlBuZ0ltYWdlUGx1Z2luClBuZ0ltYWdlRmlsZQpxACmBcQFdcQIofXEDKFgDAAAAZHBpcQRLZEtkhnEFWAgAAABTb2Z0...')
```


Рисунок 5. Пример документа с результатами

Спасибо за внимание!