

PROVA D'ESAME DI RICERCA OPERATIVA

(Prof. Fasano Giovanni)

Università Ca'Foscari Venezia - Sede di via Torino

29 gennaio 2018

Regole per l'esame: la violazione delle seguenti regole comporta il ritiro dell'elaborato e l'allontanamento dello studente dall'aula

- È necessario rispondere alle domande e risolvere gli esercizi usando **esclusivamente** i fogli distribuiti dal docente.
- Ogni risposta/calcolo deve essere opportunamente **motivata/o** dallo studente.
- È necessario **scrivere** Nome-Cognome-Matricola sul presente foglio e su **ciascun foglio** contenente le risposte dello studente (i fogli privi di tale informazione saranno cestinati e non considerati per la valutazione). In aggiunta, è necessario indicare (**SI/NO**) se il voto della Prova Intermedia (29 Novembre 2017) deve essere considerato dal docente.
- Il **tempo complessivo** per la prova è di
 - **1h 15'** : per gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia;
 - **2h 30'** : per gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia.
- È necessario **risolvere** gli esercizi e **rispondere** alle domande, secondo le seguenti modalità:
 - gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **solo** gli/alle esercizi/domande con (*******);
 - gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **tutti** gli/le esercizi/domande;
- È **vietato** parlare durante la prova.
- È **vietato** usare durante la prova: testi, appunti, note, dispense, dispositivi cellulari, tablets, palmari, calcolatori/calcolatrici programmabili.
- Durante la prova **non è possibile** allontanarsi dall'aula.

Nome:

Cognome:

Matricola:

Considerare la Prova Intermedia: ☐ SI ☐ NO

Esercizio 1

È richiesto di minimizzare il costo di trasporto necessario per inviare 2 tipi di moto da strada a 4 concessionari. Il costo (Euro) di trasporto, per ciascuna moto verso ogni concessionario, è riassunto di seguito:

	concess. 1	concess. 2	concess. 3	concess. 4
Costo trasporto per ogni moto	25	29	40	42

Il trasporto delle moto deve avvenire rispettando alcune priorità commerciali. In particolare si ha che:

- le moto del secondo tipo che vanno inviate al concessionario 2 non possono eccedere la somma tra il doppio delle moto del primo tipo inviate al concessionario 4 più il triplo delle moto inviate al concessionario 2.
- ogni concessionario deve ricevere almeno 11 moto;
- per ogni tipo di moto, al concessionario 1 deve arrivare un numero di moto almeno pari ad $1/3$ delle moto che arrivano al concessionario 3;
- in totale vanno inviate 72 moto, di cui almeno 15 a ciascuno dei concessionari 1 e 2;
- se ad un concessionario vengono inviate più di 15 moto, va pagato (per quel concessionario) un costo aggiuntivo di 830 Euro.

Si formuli un modello di PL/PLI per la soluzione del problema di minimizzazione per l'invio delle moto ai concessionari.

SOLUZIONE:

Scelta variabili:

y_{ij} = numero di moto di tipo i -simo inviate al concessionario j -simo, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4$

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{se si inviano piu' di 15 moto al concessionario } j = 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

Funzione obiettivo:

$$\min \quad 25 \sum_{i=1}^2 y_{i1} + 29 \sum_{i=1}^2 y_{i2} + 40 \sum_{i=1}^2 y_{i3} + 42 \sum_{i=1}^2 y_{i4} + 830 \sum_{j=1}^4 z_j$$

Vincoli:

$$y_{22} \leq 2y_{14} + 3 \sum_{i=1}^2 y_{i2}$$

$$\sum_{i=1}^2 y_{ij} \geq 11, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

$$y_{i1} \geq \frac{1}{3} y_{i3}, \quad i = 1, 2$$

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 y_{ij} = 72$$

$$\sum_{i=1}^2 y_{i1} \geq 15$$

$$\sum_{i=1}^2 y_{i2} \geq 15$$

$$z_j \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^2 y_{ij} \right) - 15}{M}, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad M \gg 1$$

$$y_{ij} \geq 0, \text{ intera}, \quad i = 1, 2 \quad j = 1, 2, 3, 4$$

Esercizio 2

Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; sia f lineare e sia anche $f(x)f(y) \leq 0$, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$, con $x \neq y$. Allora si dimostri che $f^2(x)$ risulta convessa su \mathbb{R}^n .

SOLUZIONE:

Per definizione la funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ risulta lineare se soddisfa le seguenti due proprietà:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) & \forall x, y \in \mathbb{R}^n \\ f(\alpha x) &= \alpha f(x) & \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pertanto dalle precedenti relazioni si ha anche immediatamente

$$\begin{aligned} (a) \quad f^2(x+y) &= f^2(x) + f^2(y) + 2f(x)f(y) & \forall x, y \in \mathbb{R}^n \\ (b) \quad f^2(\alpha x) &= \alpha^2 f^2(x) & \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Inoltre, si ha anche per la (a) e l'ipotesi $f(x)f(y) \leq 0$, con $x \neq y$,

$$\begin{aligned} f^2[\alpha x + (1-\alpha)y] &= f^2(\alpha x) + f^2[(1-\alpha)y] + 2f(\alpha x)f[(1-\alpha)y] \\ &\leq f^2(\alpha x) + f^2[(1-\alpha)y]. \end{aligned} \tag{1}$$

Inoltre, per la (b) e limitandosi a considerare $\alpha \in [0, 1]$, con $x \neq y$, si ha

$$f^2(\alpha x) + f^2[(1-\alpha)y] = \alpha^2 f^2(x) + (1-\alpha)^2 f^2(y) \leq \alpha f^2(x) + (1-\alpha)f^2(y), \tag{2}$$

(l'ultima disuguaglianza è conseguenza della relazione $\alpha^2 \leq \alpha$, per ogni $\alpha \in [0, 1]$, e del fatto che il quadrato di un numero reale è una quantità non negativa). Similmente, per $x = y$ si ha

$$f^2[\alpha x + (1-\alpha)x] = f^2[x] = \alpha f^2(x) + (1-\alpha)f^2(x). \tag{3}$$

Pertanto le (1)-(3) dimostrano che $f^2(x)$ è convessa su \mathbb{R}^n .

Esercizio 3

Sia data la funzione $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, con

$$g(z) = \sqrt{z_1^2 z_2} \ln(3 - z_4).$$

Si dica (argomentandolo) per quali valori di z_1, z_2, z_3, z_4 la funzione g ammette derivata direzionale. Inoltre se ne calcoli la derivata direzionale nel punto di coordinate $\bar{z} = (1, 1, 1, 1)^T$, lungo la direzione $d = (2, 2, 2, 2)^T$.

SOLUZIONE:

La funzione $g(x)$ ammette senz'altro derivata direzionale nel caso in cui $z_2 > 0$ e $z_4 < 3$, in quanto ivi esiste sia la funzione che il suo gradiente. Inoltre, essendo anche $g(z) = |z_1|\sqrt{z_2}\ln(3 - z_4)$, per $\nabla g(z)$ si ha in un intorno del punto \bar{z}

$$\nabla g(z) = \begin{pmatrix} \sqrt{z_2}\ln(3 - z_4) \\ \frac{z_1}{2\sqrt{z_2}}\ln(3 - z_4) \\ 0 \\ -\frac{z_1\sqrt{z_2}}{3 - z_4} \end{pmatrix},$$

con $\nabla g(\bar{z}) = (\ln(2) \quad 1/2\ln(2) \quad 0 \quad -1/2)^T$, ed in \bar{z} si ha $D(g, d) = \nabla g(\bar{z})^T d = 3\ln(2) - 1$.

Esercizio 4

Si determini in \mathbb{R}^3 il numero massimo (possibile) di vertici del seguente poliedro. Successivamente, si determinino tali vertici (se esistono).

$$\begin{cases} -x_1 - x_3 \leq 1 \\ 4x_3 \leq -2 \\ x_3 + x_4 \geq +1 \\ x_3 - 2x_4 \leq 0 \end{cases}$$

SOLUZIONE:

Essendo $n = 3$ ed $m = 4$, il massimo numero possibile di vertici del poliedro sarà non superiore a

$$\frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{4!}{3!1!} = 4.$$

Consideriamo pertanto i seguenti 4 casi:

(I) escludiamo il primo vincolo e consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} 4x_3 = -2 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

che risulta essere incompatibile e quindi NON fornisce nessun possibile punto di vertice.

(II) escludiamo il secondo vincolo e consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} -x_1 - x_3 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

che fornisce il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

che però non soddisfa il secondo vincolo. Quindi P_1 NON può essere un vertice del poliedro.

(III) escludiamo il terzo vincolo e consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} -x_1 - x_3 = 1 \\ 4x_3 = -2 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

che fornisce il punto

$$P_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$

che però non soddisfa il terzo vincolo. Quindi P_2 NON può essere un vertice del poliedro.

(IV) escludiamo il quarto vincolo e consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} -x_1 - x_3 = 1 \\ 4x_3 = -2 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

che fornisce il punto

$$P_3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

il quale soddisfa senz'altro il quarto vincolo. Inoltre si ha per il determinante dei vincoli attivi in P_3

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Pertanto il punto P_3 rappresenta l'unico vertice del poliedro assegnato.

Esercizio 5 (*)**

Si descriva il metodo di Ford e Fulkerson per la soluzione di problemi di flusso massimo su grafi orientati.

Esercizio 6 (*)**

Si risolva l'esercizio di Knapsack binario in \mathbb{R}^6 di seguito riportato, usando il metodo del B&B.

$$\begin{aligned} \min \quad & -4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 \\ & 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 - x_6 \leq \frac{3}{2} \\ & x \in \{0, 1\}^6. \end{aligned} \tag{K_0}$$

SOLUZIONE:

Una volta trasformato il problema (K_0) in

$$\begin{aligned} \max \quad & +4x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\ & 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 - x_6 \leq \frac{3}{2} \\ & x \in \{0, 1\}^6. \end{aligned}$$

è possibile assegnare facilmente il valore di alcune variabili (i.e. $x_2^* = 0$, $x_3 = 1 - y_3$, con $y_3 \in \{0, 1\}$, $x_4 = 1 - y_4$, con $y_4 \in \{0, 1\}$, $x_6^* = 1$, in quanto x_2 è presente con segno negativo nella funzione obiettivo e segno positivo nel vincolo, x_3 e x_4 hanno segno negativo sia nel vincolo che nella funzione obiettivo, x_6 ha segno negativo nel vincolo e coefficiente nullo nella funzione obiettivo). Si ottiene quindi il seguente problema equivalente semplificato

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + y_3 + 2y_4 + 3x_5 - 3 \\ & 2x_1 + 3y_3 + y_4 + x_5 \leq \frac{13}{2} \\ & x_1, y_3, y_4, x_5 \in \{0, 1\}. \end{aligned} \quad (\tilde{K}_0)$$

Quest'ultimo problema ammette la soluzione (ammissibile) intera corrente $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{y}_3, \hat{y}_4, \hat{x}_5) = 0$, con $\hat{f}(\hat{x}) = -3$. Creiamo la lista dei problemi aperti $\mathcal{L} = \{(\tilde{K}_0)\}$ ed estraiamone l'unico problema (\tilde{K}_0). Consideriamo il suo rilassamento lineare, si provvede ora ad ordinare in modo decrescente i rapporti dei coefficienti delle restanti 4 variabili (x_1 , y_3 , y_4 e x_5), i.e.

$$\frac{3}{1} \geq \frac{4}{2} \geq \frac{2}{1} \geq \frac{1}{3},$$

e di conseguenza si passa a risolvere (riordinando le variabili) il problema rilassato

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_5 + 4x_1 + 2y_4 + y_3 - 3 \\ & x_5 + 2x_1 + y_4 + 3y_3 \leq \frac{13}{2} \\ & 0 \leq x_1, y_3, y_4, x_5 \leq 1. \end{aligned}$$

Essendo $h = 3$, risulta per la soluzione rilassata di (\tilde{K}_0)

$$x_5^{(0)} = 1, \quad x_1^{(0)} = 1, \quad y_4^{(0)} = 1, \quad y_3^{(0)} = \frac{\frac{13}{2} - (1 + 2 + 1)}{3} = 5/6,$$

cui corrisponde un valore della funzione obiettivo pari a $41/6 \approx 6.83$, quindi superiore al valore $f(\hat{x})$. Pertanto chiudiamo (\tilde{K}_0), effettuiamo un *Branching* e dividiamo (\tilde{K}_0) nei 2 sottoproblemi (settando rispettivamente $y_3 = 0$ e $y_3 = 1$)

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_5 + 4x_1 + 2y_4 - 3 \\ & x_5 + 2x_1 + y_4 \leq \frac{13}{2} \\ & x_1, y_4, x_5 \in \{0, 1\}, \end{aligned} \quad (\tilde{K}_1)$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_5 + 4x_1 + 2y_4 - 2 \\ & x_5 + 2x_1 + y_4 \leq \frac{7}{2} \\ & x_1, y_4, x_5 \in \{0, 1\}, \end{aligned} \quad (\tilde{K}_2)$$

ed aggiorniamo la lista $\mathcal{L} = \{(\tilde{K}_1), (\tilde{K}_2)\}$. Estraiamo il primo problema che ammette la soluzione rilassata (coincidente con una soluzione intera) $x^{(1)} = (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1)^T$ con $f(x^{(1)}) = 6$. Pertanto chiudiamo (\tilde{K}_1) ed aggiorniamo $\hat{x} = (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1)^T$, con $f(\hat{x}) = 6$. Poi estraiamo da \mathcal{L} anche (\tilde{K}_2) che ammette soluzione rilassata data da $x^{(2)} = (1 \ 0 \ 0 \ 1/2 \ 1 \ 1)^T$, non coincidente con una soluzione intera, con $f(x^{(2)}) = 6$. Pertanto chiudiamo anche (\tilde{K}_2) ma senza aggiornare questa volta l'ottimo corrente \hat{x} . Per la soluzione finale si ha pertanto

$$x^* = (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1)^T.$$

Domanda Scritta 1

Si dimostri che per una funzione convessa (in \mathbb{R}^n) ogni minimo locale è anche un minimo globale.

Domanda Scritta 2 (***)

Si enunci il Teorema Fondamentale della PL per problemi in cui il poliedro ammissibile risulta in forma standard.