

PROVA D'ESAME DI RICERCA OPERATIVA

(Prof. Fasano Giovanni)

Università Ca'Foscari Venezia - Sede di via Torino

15 gennaio 2018

Regole per l'esame: la violazione delle seguenti regole comporta il ritiro dell'elaborato e l'allontanamento dello studente dall'aula

- È necessario rispondere alle domande e risolvere gli esercizi usando **esclusivamente** i fogli distribuiti dal docente.
 - Ogni risposta/calcolo deve essere opportunamente **motivata/o** dallo studente.
 - È necessario **scrivere** Nome-Cognome-Matricola sul presente foglio e su **ciascun foglio** contenente le risposte dello studente (i fogli privi di tale informazione saranno cestinati e non considerati per la valutazione). In aggiunta, è necessario indicare (**SI/NO**) se il voto della Prova Intermedia (29 Novembre 2017) deve essere considerato dal docente.
 - Il **tempo complessivo** per la prova è di
 - **1h 10'** : per gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia;
 - **2h 15'** : per gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia.
 - È necessario **risolvere** gli esercizi e **rispondere** alle domande, secondo le seguenti modalità:
 - gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **solo** gli/alle esercizi/domande con (**);
 - gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **tutti** gli/le esercizi/domande;
 - È **vietato** parlare durante la prova.
 - È **vietato** usare durante la prova: testi, appunti, note, dispense, dispositivi cellulari, tablets, palmari, calcolatori/calcolatrici programmabili.
 - Durante la prova **non è possibile** allontanarsi dall'aula.

Nome: .

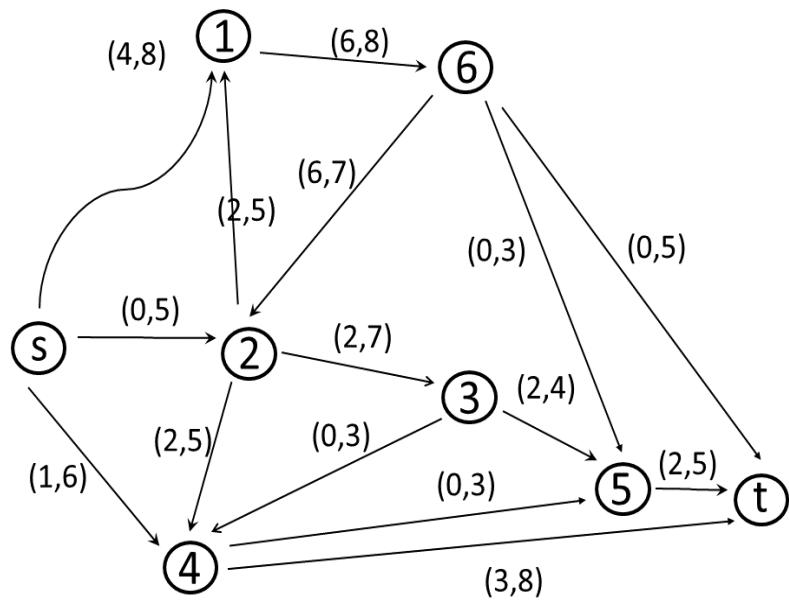
Cognome: .

Matricola: : : : : :

Considerare la Prova Intermedia: SI NO

Esercizio 1 (***)

Dato il seguente grafo: verificare se il vettore di flusso è ammissibile, calcolare il massimo valore del flusso per il nodo 's', ed indicare un taglio a capacità minima del grafo.



SOLUZIONE:

Dopo una facile verifica si nota che per ciascun nodo il flusso entrante coincide con quello escente. Inoltre i vincoli sulla capacità di ciascun arco sono soddisfatti, pertanto deduciamo che il vettore di flusso assegnato è ammissibile. Il valore del flusso iniziale f_0 risulta

$$f_0 = 5.$$

È possibile considerare i seguenti cammini aumentanti ed i relativi valori del flusso corrispondenti:

- $P_1 = \{s, 1, 6, t\}$, con $\delta^+ = 2$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 2$, da cui $f_1 = f_0 + \delta = 7$
- $P_2 = \{s, 4, t\}$, con $\delta^+ = 5$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 5$, da cui $f_2 = f_1 + \delta = 12$
- $P_3 = \{s, 2, 3, 5, t\}$, con $\delta^+ = 2$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 2$, da cui $f_3 = f_2 + \delta = 14$
- $P_4 = \{s, 2, 6, t\}$, con $\delta^+ = 3$, $\delta^- = 6$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 3$, da cui $f_4 = f_3 + \delta = 17$
- $P_5 = \{s, 1, 2, 6, 5, t\}$, con $\delta^+ = 1$, $\delta^- = 2$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 1$, da cui $f_5 = f_4 + \delta = 18$.

Inoltre un taglio a capacità minima è dato dal seguente:

$$W = \{s, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad \bar{W} = \{t\},$$

che dopo un facile controllo soddisfa infatti la condizione

$$F(W, \bar{W}) = C(W, \bar{W}).$$

Esercizio 2

Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, e si supponga che valga la relazione $f(\lambda x + 2\mu y) = \lambda f(x) + 2\mu f(y)$, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si mostri *esplicitamente* se tale funzione risulta lineare.

SOLUZIONE:

Per definizione la funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ risulta lineare se soddisfa le seguenti due proprietà:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) & \forall x, y \in \mathbb{R}^n \\ f(\alpha x) &= \alpha f(x) & \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Verifichiamo ora la linearità della funzione assegnata. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, sostituendo $\eta = 2\mu$ si ha $f(\lambda x + \eta y) = \lambda f(x) + \eta f(y)$. Pertanto, per $\lambda = 1$ ed $\eta = 1$ (ovvero $\mu = 1/2$) si ottiene $f(x+y) = f(x) + f(y)$, mentre per $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\eta = 0$ (ovvero $\mu = 0$) risulta $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Pertanto la funzione data risulta lineare.

Esercizio 3

Siano date: la funzione $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $f_1(x) = 3|x|$, la funzione $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $f_2(x) = -\ln(x)$ e la funzione $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $f_3(x) = -4x - 7$. Si dica se la funzione $h(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$ risulta convessa sull'insieme $A = [2, 4]$.

SOLUZIONE:

Intanto si noti che per ogni $x \in A$ le funzioni $f_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ sono definite. Inoltre risulta $f_1(x) = \|x\|_2$, pertanto per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e per ogni $\lambda \in [0, 1]$ è $\|\lambda x + (1 - \lambda)y\|_2 \leq \|\lambda x\|_2 + \|(1 - \lambda)y\|_2 = \lambda\|x\| + (1 - \lambda)\|y\|$, quindi $f_1(x)$ è convessa su A . Inoltre $-f_2(x) = \ln(x)$ è chiaramente concava per $x > 0$, pertanto anche $f_2(x)$ risulta convessa su A . Infine $f_3(x)$ è una funzione lineare e quindi risulta anch'essa convessa su A . In conclusione, $h(x)$ è convessa su A in quanto somma (i.e. combinazione conica con coefficienti positivi unitari) di funzioni convesse su A .

Esercizio 4

Si dica se la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = -5|x|$ ammette derivata direzionale rispettivamente in $x = -1$, $x = 0$ e $x = +2$. Sia poi data la funzione $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, con

$$g(z) = \left(\frac{z_1 z_2}{z_3} \right)^2 \ln(z_4).$$

Si dica (argomentandolo) se ammette derivata direzionale nel punto di coordinate $\bar{z} = (1, 1, 1, 1)^T$, lungo la direzione $d = (1, 1, 0, 1)^T$, ed in caso di risposta affermativa si calcoli tale derivata direzionale.

SOLUZIONE:

La funzione $f(x)$ ammette senz'altro derivata direzionale in $x = -1$ e $x = +2$, in quanto in intorno di tali punti la funzione diventa rispettivamente $f(x) = 5x$ e $f(x) = -5x$. Invece per $x = 0$ la $f(x)$ non risulta continuamente differenziabile, pertanto non ammette ivi derivata direzionale. La funzione $g(z)$ è continuamente differenziabile in un intorno del punto \bar{z} , pertanto esiste in tale punto la sua derivata direzionale $D(g, d)$ lungo d . Infine è

$$\nabla g(z) = \begin{pmatrix} 2 \left(\frac{z_1 z_2}{z_3} \right) \frac{z_2}{z_3} \ln(z_4) \\ 2 \left(\frac{z_1 z_2}{z_3} \right) \frac{z_1}{z_3} \ln(z_4) \\ -2 \left(\frac{z_1 z_2}{z_3} \right) \frac{z_1 z_2}{z_3^2} \ln(z_4) \\ \left(\frac{z_1 z_2}{z_3} \right)^2 \frac{1}{z_4} \end{pmatrix},$$

con $\nabla g(\bar{z}) = (0 \ 0 \ 0 \ 1)^T$, ed in \bar{z} si ha $D(g, d) = \nabla g(\bar{z})^T d = 1$.

Esercizio 5

Si determini in \mathbb{R}^3 il numero massimo (possibile) di vertici del seguente poliedro. Successivamente, si determinino tali vertici (se esistono).

$$\begin{cases} x_1 + x_3 \geq 2 \\ x_1 \geq 3 \\ x_2 - x_3 \geq 0 \\ -x_1 - x_2 \leq 0 \end{cases}$$

SOLUZIONE:

Essendo $n = 3$ ed $m = 4$, il massimo numero possibile di vertici del poliedro sarà non superiore a

$$\frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{4!}{3!1!} = 4.$$

Consideriamo pertanto i seguenti 4 casi:

(I) escludiamo il primo vincolo e consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

che fornisce il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

il quale non soddisfa il primo vincolo. Pertanto il punto P_1 NON può essere vertice del poliedro.

(II) escludiamo il secondo vincolo e consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

che non fornisce alcun punto, in quanto risulta un sistema lineare INCOMPATIBILE.

(III) escludiamo il terzo vincolo e consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 = 3 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

che fornisce il punto

$$P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

il quale non soddisfa il terzo vincolo. Pertanto il punto P_2 NON può essere vertice del poliedro.

(IV) escludiamo il quarto vincolo e consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 = 3 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

che fornisce il punto

$$P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

il quale soddisfa il quarto vincolo. Inoltre si ha per il determinante dei vincoli attivi in P_3

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Pertanto il punto P_3 rappresenta l'unico vertice del poliedro assegnato.

Esercizio 6 (***)

Si risolva il seguente esercizio di Knapsack binario in \mathbb{R}^6 , con il metodo del B&B.

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 \\ \text{s.t. } & x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 + x_6 \leq 2 \\ & x \in \{0, 1\}^6. \end{aligned} \tag{K_0}$$

SOLUZIONE:

In (K_0) possiamo senz'altro assegnare facilmente il valore di alcune variabili (i.e. $x_2 = 1 - y_2$, $y_2 \in \{0, 1\}$, in quanto è presente con segno negativo sia nella funzione obiettivo che nel vincolo; $x_4^* = 1$, in quanto ha segno negativo nel vincolo e segno positivo nella funzione obiettivo; $x_6^* = 0$, in quanto ha segno positivo nel vincolo e coefficiente nullo nella funzione obiettivo), ottenendo in particolare il problema equivalente

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + y_2 + x_3 + 2x_5 \\ \text{s.t. } & x_1 + 2y_2 + 3x_3 + x_5 \leq 5 \\ & x_1, y_2, x_3, x_5 \in \{0, 1\}. \end{aligned} \tag{\tilde{K}_0}$$

Quest'ultimo problema ammette la soluzione (ammissibile) intera corrente $\hat{x} = 0$, con $f(\hat{x}) = 0$. Creiamo la lista dei problemi aperti $\mathcal{L} = \{(\tilde{K}_0)\}$ ed estraiamone l'unico problema (\tilde{K}_0) . Consideriamo il suo rilassamento lineare, si provvede ora ad ordinare in modo decrescente i rapporti dei coefficienti delle restanti 4 variabili (x_1, y_2, x_3 e x_5), i.e.

$$\frac{3}{1} \geq \frac{2}{1} \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3},$$

e di conseguenza si passa a risolvere (riordinando le variabili) il problema rilassato

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_5 + y_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_5 + 2y_2 + 3x_3 \leq 5, \\ & 0 \leq x_1, y_2, x_3, x_5 \leq 1. \end{aligned}$$

Essendo $h = 3$, risulta per la soluzione rilassata di (\tilde{K}_0)

$$x_1^{(0)} = 1, \quad x_5^{(0)} = 1, \quad y_2^{(0)} = 1, \quad x_3^{(0)} = \frac{5 - (1 + 1 + 2)}{3} = 1/3,$$

cui corrisponde un valore della funzione obiettivo superiore al valore $f(\hat{x})$. Pertanto chiudiamo (\tilde{K}_0) , effettuiamo un *Branching* e dividiamo (\tilde{K}_0) nei 2 sottoproblemi (settando rispettivamente $x_3 = 0$ e $x_3 = 1$)

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_5 + y_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_5 + 2y_2 \leq 5 \\ & x_1, y_2, x_5 \in \{0, 1\}, \end{aligned} \tag{\tilde{K}_1}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_5 + y_2 + 1 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_5 + 2y_2 \leq 2 \\ & x_1, y_2, x_5 \in \{0, 1\}, \end{aligned} \tag{\tilde{K}_2}$$

ed aggiorniamo la lista $\mathcal{L} = \{(\tilde{K}_1), (\tilde{K}_2)\}$. Estraiamo il primo problema che ammette la soluzione rilassata (coincidente con una soluzione intera) $x^{(1)} = (1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0)^T$ con $f(x^{(1)}) = 6$. Pertanto chiudiamo (\tilde{K}_1) ed aggiorniamo $\hat{x} = (1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0)^T$, con $f(\hat{x}) = 6$. Poi estraiamo da \mathcal{L} anche (\tilde{K}_2) che ammette anch'esso soluzione rilassata coincidente con una soluzione intera, data da $x^{(2)} = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0)^T$, con $f(x^{(2)}) = 6$. Pertanto chiudiamo anche (\tilde{K}_2) ma senza aggiornare di nuovo l'ottimo corrente \hat{x} . Per la soluzione finale si ha

$$x^* = (1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0)^T.$$

Domanda Scritta 1

Si dimostri che considerate le funzioni $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, convesse sull'insieme convesso C , allora la combinazione conica di tali funzioni è ancora una funzione convessa su C .

Domanda Scritta 2 (*)**

Si descriva una formulazione di PL del problema di massimo flusso su un grafo orientato, includendo vincoli di capacità e di equilibrio ai nodi. Si dimostri poi che tale formulazione risulta sempre ammissibile ed il problema di massimo flusso ammette soluzione finita.