

# RICERCA OPERATIVA A.A. 2018-2019: II APPELLO

(Prof. Fasano Giovanni)

Università Ca'Foscari Venezia - Sede di via Torino

23 gennaio 2019

## Regole per l'esame: la violazione delle seguenti regole comporta il ritiro dell'elaborato e l'allontanamento dello studente dall'aula

- È necessario rispondere alle domande e risolvere gli esercizi usando **esclusivamente** i fogli distribuiti dal docente.
- Ogni risposta/calcolo deve essere opportunamente **motivata/o** dallo studente.
- È necessario **scrivere** Nome-Cognome-Matricola sul presente foglio e su **ciascun foglio** contenente le risposte dello studente (i fogli privi di tale informazione saranno cestinati e non considerati per la valutazione). In aggiunta, è necessario indicare (**SI/NO**) se il voto della Prova Intermedia (7 Novembre 2019) deve essere considerato dal docente.
- Il **tempo complessivo** per la prova è di
  - **1h 20'** : per gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia;
  - **2h 15'** : per gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia.
- È necessario **risolvere** gli esercizi e **rispondere** alle domande, secondo le seguenti modalità:
  - gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **solo** gli/alle esercizi/domande con (\*\*\*)
  - gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **tutti** gli/le esercizi/domande;
- È **vietato** parlare durante la prova.
- È **vietato** usare durante la prova: testi, appunti, note, dispense, dispositivi cellulari, tablets, palmari, calcolatori/calcolatrici programmabili.
- Durante la prova **non è possibile** allontanarsi dall'aula.

Nome: . . . . .

Cognome: . . . . .

Matricola: . . . . .

Considerare la Prova Intermedia: ☐ SI ☐ NO

## Esercizio 1

La banca Trading Limited s.p.a. ha pianificato la creazione di 4 *fondi di investimento*, a ciascuno dei quali possono essere assegnati 95 *asset* diversi, nel rispetto di alcune specifiche imposte dalla CONSOB. Ciascun asset può essere assegnato a ciascuno dei 4 fondi di investimento in multipli di 3 possibili *package* (in Euro) prefissati, come indicato nella seguente tabella:

	fondo $i$ -simo
package 1	20
package 2	150
package 3	1800

Le specifiche imposte dalla CONSOB possono riassumersi come segue:

1. al fondo  $i$ -simo ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) possono essere assegnati multipli del package 1 relativi all'asset  $j$ -simo, per un ammontare non superiore a 10000 Euro;
2. a ciascun fondo non possono essere assegnati meno di 35 packages, ed il valore complessivo dei packages assegnati ai fondi non può eccedere i 200000 Euro;
3. se al primo fondo si assegna l'asset 5 nel package 2, allora l'asset 5 non può essere assegnato al fondo 2 nel package 3, e viceversa;
4. se si assegna l'asset 4 nel package 3 al fondo  $i$ -simo, allora la banca deve pagare un costo aggiuntivo pari a 20000 Euro;
5. per problemi legati a politiche governative per il trading, deve valere almeno uno dei seguenti vincoli:
  - al fondo 3 deve essere assegnato l'asset 7 nel package 1;
  - al fondo 2 deve essere assegnato l'asset 9 nel package 2.

Considerato che per assegnare un qualsiasi package (di qualsiasi asset) al fondo  $i$ -simo ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) si deve pagare un costo di transazione pari a 20 Euro, si formuli un modello di PL/PLI per la minimizzazione dei costi complessivi per creare i quattro fondi, dal quale si evinca il numero di ciascun tipo di package dell'asset  $h$ -simo, assegnati al fondo  $i$ -simo.

### SOLUZIONE:

$x_{hji}$  = numero di packages di tipo  $h$ -simo ( $h = 1, 2, 3$ ),  
relativi all'asset  $j$ -simo ( $j = 1, \dots, 95$ ), assegnati al fondo  $i$ -simo ( $i = 1, 2, 3, 4$ )

$$y_{hji} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_{hji} > 0, \quad h = 1, 2, 3; \quad j = 1, \dots, 95; \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$\alpha, \beta \in \{0, 1\}$$

$$\min \quad 20 \sum_{h=1}^3 \sum_{j=1}^{95} \sum_{i=1}^4 x_{hji} + 20000 \sum_{i=1}^4 y_{34i}$$

$$y_{hji} \geq \frac{x_{hji}}{M}, \quad M \gg 1, \quad h = 1, 2, 3, \quad j = 1, \dots, 95, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$20x_{1ji} \leq 10000, \quad j = 1, \dots, 95, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$\sum_{h=1}^3 \sum_{j=1}^{95} x_{hji} \geq 35, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$\sum_{j=1}^{95} \sum_{i=1}^4 (20x_{1ji} + 150x_{2ji} + 1800x_{3ji}) \leq 200000,$$

$$y_{251} = 1 - y_{352},$$

$$-y_{173} \leq -1 + \alpha M,$$

$$-y_{292} \leq -1 + \beta M,$$

$$\alpha + \beta \leq 1$$

$$x_{hji} \geq 0, \text{ intera,} \quad h = 1, 2, 3, \quad j = 1, \dots, 95, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

---

## Esercizio 2

Data la funzione  $f(x) = a \ln\left(\frac{b}{x}\right)$ , con  $a, b$  parametri reali e  $b > 0$ , applicando esplicitamente la definizione di funzione convessa, si dica per quali valori dei parametri  $a, b$  risulta  $f(x)$  convessa sul proprio dominio.

### **SOLUZIONE:**

Si osservi che per la definizione di funzione convessa sull'insieme  $C \subseteq \mathbb{R}$  si deve avere

$$f[\lambda x + (1 - \lambda)y] \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

per ogni  $x, y \in C$  e per ogni  $\lambda \in [0, 1]$ . Nel caso dell'esercizio, scelto  $C = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$  (che risulta un insieme convesso) si ha per  $x, y \in C$

$$f[\lambda x + (1 - \lambda)y] = a \ln \left[ \frac{b}{\lambda x + (1 - \lambda)y} \right] = a \ln(b) - a \ln[\lambda x + (1 - \lambda)y]$$

e

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) = \lambda a \ln \left( \frac{b}{x} \right) + (1 - \lambda)a \ln \left( \frac{b}{y} \right) = a \ln(b) - a [\lambda \ln(x) + (1 - \lambda) \ln(y)].$$

Quindi imponendo la condizione di convessità per  $f(x)$  nel suo dominio, considerando che  $\ln(x)$  è una funzione strettamente concava su  $C$ , la  $f(x)$  sarà convessa su  $C$  se e solo se  $a \geq 0$  e  $b > 0$ .

---

**Esercizio 3** (\*\*\*)

Si determini per quali valori del parametro  $a \in \mathbb{R}$  il seguente poliedro in  $\mathbb{R}^3$  ammette un unico vertice. Si calcoli poi (se definito), tale vertice per  $a = 0$ .

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 \leq 5 \\ 4ax_1 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + ax_3 \leq 2. \end{cases}$$

**SOLUZIONE:**

Preventivamente calcoliamo il determinante della matrice che ha per coefficienti i coefficienti delle tre uguaglianze/disuguaglianze del poliedro

$$\det(A), \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 4a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} = 2(2a^2 + 2a + 1).$$

Da quest'ultima relazione segue che tale determinante non si annulla per nessun valore reale del parametro  $a$ . Pertanto vi saranno sempre nel poliedro 3 vincoli linearmente indipendenti, suggerendo che per qualsiasi valore reale del parametro  $a$  vi sarà sempre un unico punto di vertice che risolve il sistema lineare

$$Ax = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

ovvero il punto  $x^* = (5/2 \ 1/2 \ 2)^T$ .

---

**Esercizio 4** (\*\*\*)

Si risolva il seguente esercizio di Knapsack binario in  $\mathbb{R}^6$ , con il metodo del B&B.

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 \\ & x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 + x_6 \leq 4 \\ & x \in \{0, 1\}^6. \end{aligned} \tag{K_0}$$

**SOLUZIONE:**

In  $(K_0)$  possiamo senz'altro assegnare facilmente il valore di alcune variabili (i.e.  $x_2 = 1 - y_2$ ,  $y_2 \in \{0, 1\}$ , in quanto è presente con segno negativo sia nella funzione obiettivo che nel vincolo;  $x_4^* = 1$ , in quanto ha segno negativo nel vincolo e segno positivo nella funzione obiettivo;  $x_6^* = 0$ , in quanto ha segno positivo nel vincolo e coefficiente nullo nella funzione obiettivo), ottenendo in particolare il problema equivalente

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + y_2 + x_3 + 2x_5 \\ & x_1 + 2y_2 + 3x_3 + x_5 \leq 7 \\ & x_1, y_2, x_3, x_5 \in \{0, 1\}. \end{aligned} \tag{\tilde{K}_0}$$

Quest'ultimo problema ammette la soluzione intera corrente  $\hat{x} = 0$ , con  $f(\hat{x}) = 0$ . Creiamo la lista dei problemi aperti  $\mathcal{L} = \{(\tilde{K}_0)\}$  ed estraiamone l'unico problema  $(\tilde{K}_0)$ . Consideriamo il suo rilassamento lineare, si provvede ora ad ordinare in modo non decrescente i rapporti dei coefficienti delle restanti 4 variabili  $(x_1, y_2, x_3 \text{ e } x_5)$ , i.e.

$$\frac{3}{1} \geq \frac{2}{1} \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3},$$

e di conseguenza si passa a risolvere (riordinando le variabili) il problema rilassato

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_5 + y_2 + x_3 \\ & x_1 + x_5 + 2y_2 + 3x_3 \leq 7, \\ & 0 \leq x_1, y_2, x_3, x_5 \leq 1. \end{aligned}$$

Essendo  $h = 4$ , risulta per la soluzione rilassata di  $(\tilde{K}_0)$

$$x_1^{(0)} = 1, x_5^{(0)} = 1, y_2^{(0)} = 1, x_3^{(0)} = 1,$$

che coincide anche con la soluzione intera di  $(\tilde{K}_0)$ . Pertanto, siccome  $f(x^{(0)}) = 7 > f(\hat{x})$ , aggiorniamo l'ottimo corrente con  $\hat{x} = (1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0)^T$  e  $f(\hat{x}) = 7$ , che rappresenta anche la soluzione finale, in quanto la lista dei problemi aperti risulta vuota.

---

**Esercizio 5** (\*\*\*)

Dato il problema di PL in  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \max & x_1 + x_2 \\ & 0 \leq x_1 \leq 1 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 1, \end{cases}$$

risolverlo graficamente, calcolando esplicitamente la soluzione numerica (se esiste).

**SOLUZIONE:**

Dopo facili passaggi si nota che il poliedro ammissibile non è un politopo ed ammette i soli due vertici di coordinate

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mentre le curve di livello della funzione obiettivo sono parallele alla bisettrice del II e IV quadrante. Pertanto la soluzione esiste unica e coincide con il punto di vertice  $v_2$ .

---

**Domanda Scritta 1**

Dato l'insieme convesso  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  e la funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , si dimostri che  $\nabla f(x^*)^T(x - x^*) \geq 0$ , per ogni  $x \in C$ , è condizione necessaria affinché  $x^* \in C$  sia punto di minimo locale del problema  $\min_{x \in C} f(x)$ .

---

**Domanda Scritta 2 (\*\*\*)**

Si dia prima la definizione di poliedro, poi si dia la definizione di vertice per un poliedro. Infine, si diano condizioni necessarie e sufficienti affinché il punto  $v$  sia vertice del poliedro  $P$ .

---

**Domanda Scritta 3 (\*\*\*)**

Data la funzione  $f(x) = c^T x + \bar{c}$ , con  $c \in \mathbb{R}^n$  e  $\bar{c} \neq 0$ , si dimostri che il vettore  $c$  è ortogonale alle curve di livello della funzione, ed è orientato nel verso in cui la funzione cresce.