Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»
Кафедра информатики

Отчет по лабораторной работе №13
Метод сеток решения одномерного нестационарного уравнения теплопроводности

Выполнил:
студент гр. 153505
Власенко Т. П.

Руководитель:
доцент
Анисимов В. Я.

Минск 2023

Цель работы

- изучить метод разностных аппроксимаций для уравнения теплопроводности;
- составить алгоритм решения уравнения теплопроводности методом сеток, применимыми для организации вычислений на ПЭВМ;
- составить программы решения уравнения теплопроводности по разработанным алгоритмам;
- получить численное решение заданного уравнения теплопроводности

ЗАДАНИЕ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №13

Задача 1. Промоделировать стационарные процессы теплопроводности стержня в зависимости от входных данных задачи:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(K(x)\dfrac{du}{dx}\right) = f, \\ u(a) = U_A, \quad u(b) = U_B. \end{cases}$$

Порядок решения задачи:

1. Представить коэффициент теплопроводности *K(x)* в виде функции двух переменных *x* и *c*: *K(x)* = *K (x,c)*, где *c* −параметр.

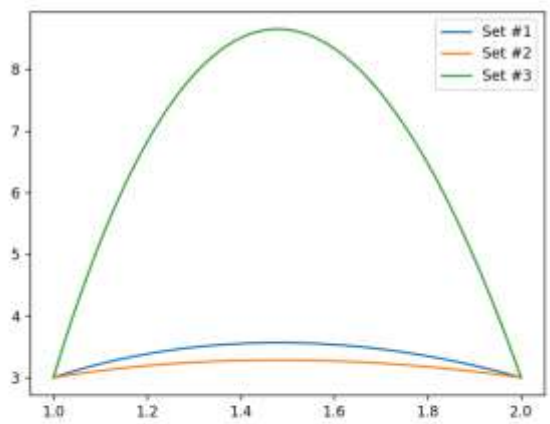
2. При заданных в индивидуальном варианте функциях *K(x)* (что соответствует *K(x,*1*))*, *f(x)* и значениях U_A, U_B найти аналитическое решение.

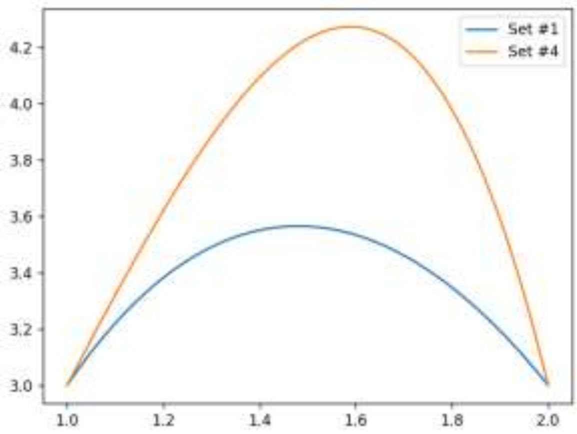
3. Изменяя значения параметра *c* в коэффициенте теплопроводности, найти решения задачи для наборов параметров 1−3 (табл. 2.5).

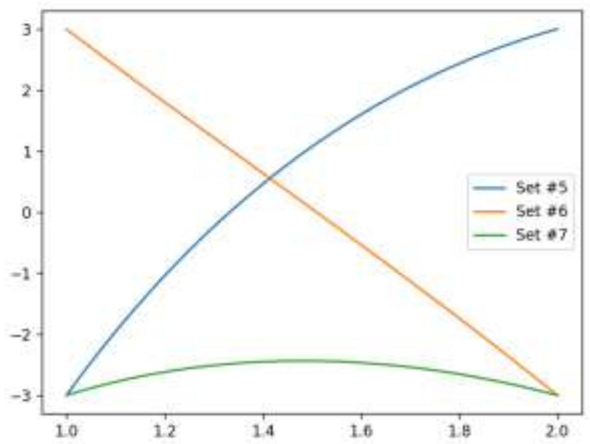
4. На одном чертеже построить графики найденных решений. Сравнить полученные результаты.

5. Аналогично п. 2, найти аналитическое решение для четвертого набора параметров. На одном чертеже построить графики решений для наборов один и четыре. Сравнить полученные результаты.

6. Изменяя граничные условия U_A, U_B, построить решения для наборов параметров 5−7.







Задача 2. Промоделировать стационарные процессы теплопроводности стержня в зависимости от входных данных задачи – переменного коэффициента теплопроводности *k(x)* и плотности источников тепла *f(x)*:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(k(x)\dfrac{du}{dx}\right) = f, \\ u(a) = U_A, \quad u(b) = U_B. \end{cases}$$

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ

Составить разностную схему второго порядка точности для решения указанной задачи.

1. Взять исходные данные из первого набора параметров для первой задачи.

2. Шаг сетки положить равным $h = (b-a)/150$.

3. Промоделировать процесс в зависимости от коэффициента теплопроводности *k(x):*

4а. Полагать, что стержень состоит из двух материалов с различными коэффициентами теплопроводности *k(x):*

$$k(x) = \begin{cases} k1, a \le x \le 0.5\cdot(b+a) \\ k2, 0.5(b+a) < x \le b \end{cases}, \text{ при} \quad \text{а) } k1 << k2; \qquad \text{б) } k1 >> k2.$$

4б. Пусть стержень состоит из трех материалов с различными свойствами:

$$k(x) = \begin{cases} k1,\ a \le x \le a+(b-a)/3, \\ k2,\ a+(b-a)/3 \le x \le a+2(b-a)/3, \\ k2,\ a+2(b-a)/3 < x \le b. \end{cases}$$

при а) $k1 < k2 < k1$; б) $k1 > k2 > k3$;

в) $k1 = k$, $k2 = 2k$, $k3 = k$; г) $k1 = 20k$, $k2 = k$, $k3 = 20k$.

5. Промоделировать процесс теплопроводности в зависимости от правой части – функции *f(x)*, предполагая, что *f(x)* – точечный источник

тепла. Задать точечный источник тепла можно следующим образом: $f(x) = c \cdot \delta(x - x0)$, где c − некоторая константа (мощность источника); $\delta(x)$ − дельта-функция; $x0$ − точка из отрезка $[a,b]$, в которой располагается источник.

Рассмотреть следующие варианты расположения источника:

а) точечный источник поставлен в середину отрезка $[a,b]$;

б) два одинаковых по мощности источника поставлены в разные точки отрезка, симметричные относительно середины отрезка;

в) два различных по мощности источника поставлены симметрично;

г) предложить свой вариант расположения источников.

тепла. Задать точечный источник тепла можно следующим образом: $f(x) = c \cdot \delta(x - x0)$, где c − некоторая константа (мощность источника); $\delta(x)$ − дельта-функция; $x0$ − точка из отрезка $[a,b]$, в которой располагается источник.

Рассмотреть следующие варианты расположения источника:

а) точечный источник поставлен в середину отрезка $[a,b]$;

б) два одинаковых по мощности источника поставлены в разные точки отрезка, симметричные относительно середины отрезка;

в) два различных по мощности источника поставлены симметрично;

г) предложить свой вариант расположения источников.

Вывод формул для задачи 2

Рассмотрим уравнение баланса, которое на любом отрезке $[a, b]$, где $0 < a < b < l$, имеет вид:

$$W(a) - W(b) - \int_a^b q(x)u(x)dx + \int_a^b f(x)dx = 0$$

$$W(x) = -k(x)u'(x)$$

$\int_a^b q(x)u(x)dx$ опустим, так как $q(x) = 0$

Введём:

$$x_n = nh, n = 0, 1, 2, \dots, N, Nh = l$$

А также промежуточные (потоковые) узлы:

$$x_{n+-0.5} = x_n + -0.5h$$

Запишем уравнение баланса на отрезке $[x_{n-0.5}, x_{n+0.5}]$:

$$W_{n-0.5} - W_{n+0.5} + \int_{x_{n-0.5}}^{x_{n+0.5}} f(x)dx = 0$$

Найдём $W_{n-0.5}, W_{n+0.5}$. Для этого проинтегрируем $u'(x) = -\frac{W(x)}{k(x)}$ на отрезке $[x_{n-1}, x_n]$:

$$u_{n-1} - u_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{W(x)}{k(x)} dx$$

Тогда при $x_{n-0.5} \le x \le x_{n+0.5}$:

$$W_{n-0.5} \approx -a_n \frac{y_n - y_{n-1}}{h}$$

$$a_n = (\frac{1}{h} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{k(x)})^{-1}$$

А

$$W_{n+0.5} \approx -b_n \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$$

$$b_n = (\frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x)})^{-1}$$

Также обозначим:

$$\varphi_n = \frac{1}{h} \int_{x_{n-0.5}}^{x_{n+0.5}} f(x) dx$$

Получим систему для решения

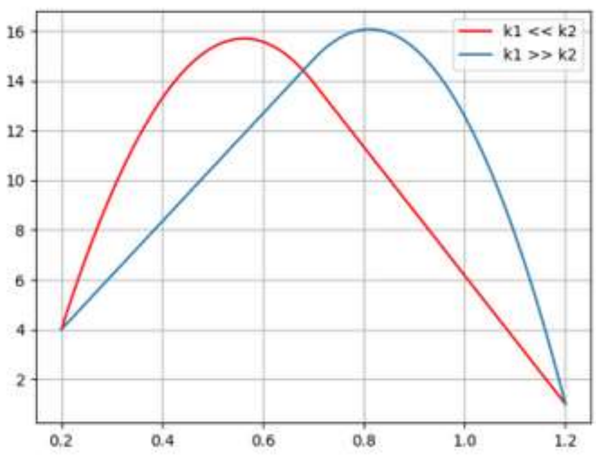
$$\frac{1}{h}(b_n \frac{y_{n+1} - y_n}{h} - a_n \frac{y_n - y_{n-1}}{h}) = -\varphi_n$$

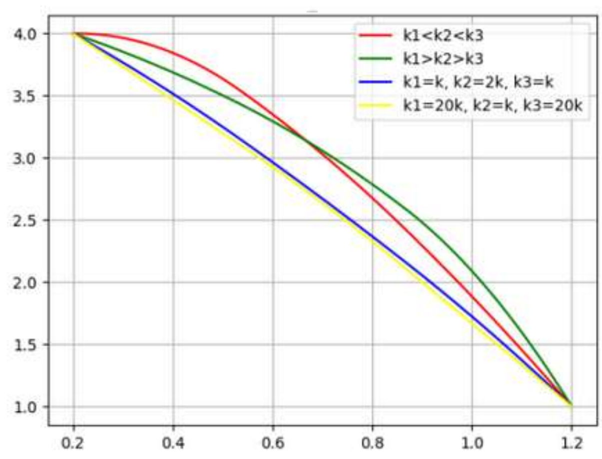
И $y_0 = g_1, y_N = g_2$

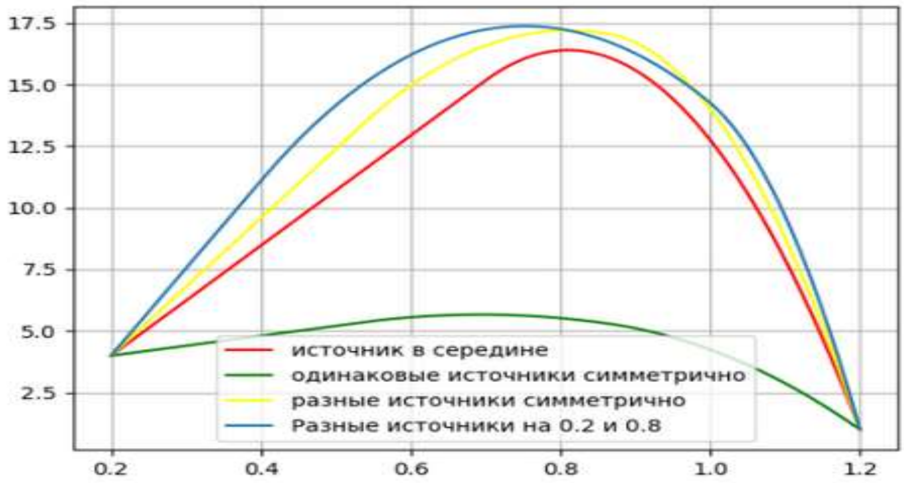
Итоговая формула

$$\frac{a_n}{h^2} y_{n-1} - \frac{a_n + b_n}{h^2} + \frac{b_n}{h^2} = -\varphi_n$$

Моделирование процесса теплопроводности с учетом правой части – функции $f(x)$, предполагая, что $f(x)$ – точечный источник тепла.






17.5
15.0
12.5
10.0
7.5
5.0
2.5
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
источник в середине
одинаковые источники симметрично
разные источники симметрично
Разные источники на 0.2 и 0.8

7	2.3.7, 2.4.7

Задача 3. Промоделировать нестационарные процессы теплопроводности в зависимости от входных данных задачи – коэффициента теплопроводности и начальной температуры:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x)(1-e^{-t}), & 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \\ u(0,t) = U_A, \quad u(l,t) = U_B, & 0 \le t \le T, \\ u(x,0) = \phi(x), & 0 \le x \le l. \end{cases}$$

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ

1. Найти приближенное решение задачи с шагами $\tau = 0.05$ и $h = 0.01$, используя явную разностную схему. Построить графики решений при значениях $t = 0,\ 5\tau,\ 20\tau,\ 200\tau$.

2. Экспериментально определить момент времени t, при котором происходит установление процесса (визуально).

3. Произвести анимацию процесса установления.

4. Исследовать, как влияет начальная температура на процесс установления, взяв другие функции $\phi(x)$ (согласованные с граничными условиями).

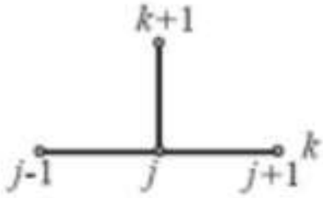
Дано следующее уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x), x \in [a, b], t \in [0, T]$$

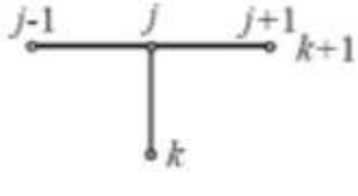
Зададим оператор L:

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Для аппроксимации оператора L с помощью явной схемы используем следующие точки:



шаблон явной схемы



шаблон неявной схемы

Обозначим для удобства точки следующим образом:

$$x_{j,k} = (x, t)$$

Тогда, обозначив разность

$$x_{j,k} - x_{j-1,k} = h$$

А

$$x_{j,k+1} - x_{j,k} = \tau$$

Получаем:

$$x_{j-1,k} = (x - h, t)$$
$$x_{j+1,k} = (x + h, t)$$
$$x_{j,k+1} = (x, t + \tau)$$

Используя эти точки можем аппроксимировать функции:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(x, t+\tau) - u(x,t)}{\tau}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + y(x-h,t)}{h^2}$$

Таким образом результат оператора Lu:

$$Lu = \frac{u(x, t+\tau) - u(x,t)}{\tau} - \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + y(x-h,t)}{h^2}$$

Теперь давайте выразим отсюда $u(x, t+\tau)$:

$$u(x, t+\tau) = u(x,t) + \tau(\frac{u(x+h,t)}{h^2} - 2\frac{u(x,t)}{h^2} + \frac{u(x-h,t)}{h^2})$$

Итого приведя слагаемые:

$$u(x, t+\tau) = \frac{\tau}{h^2}u(x-h,t) + (1 - \frac{\tau}{h^2})u(x,t) + \frac{\tau}{h^2}u(x+h,t)$$

Что в итоге?

Зная значения из нижниго слоя, можно найти значения на верхнем слое

Примечание для задачи 3

В задаче 3 есть $\frac{\partial}{\partial x}(k(x)\frac{\partial u}{\partial x})$.

В данном случае аппроксимировать будем следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}) = \frac{k(x+\frac{h}{2})u'(x+\frac{h}{2}) - k(x-\frac{h}{2})u'(x-\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}$$

Теперь аппроксимируя $\frac{\partial u}{\partial x}$ и выражая $u(x, t+\tau)$:

$$u(x,t+\tau)=\frac{k(x-\frac{h}{2})\tau}{h^2}u(x-h,t)+(1-\frac{(k(x-\frac{h}{2})-k(x+\frac{h}{2}))\tau}{h^2}u(x,t)$$
$$+\frac{k(x+\frac{h}{2})\tau}{h^2}u(x+h,t)$$

Примечание для задачи 4

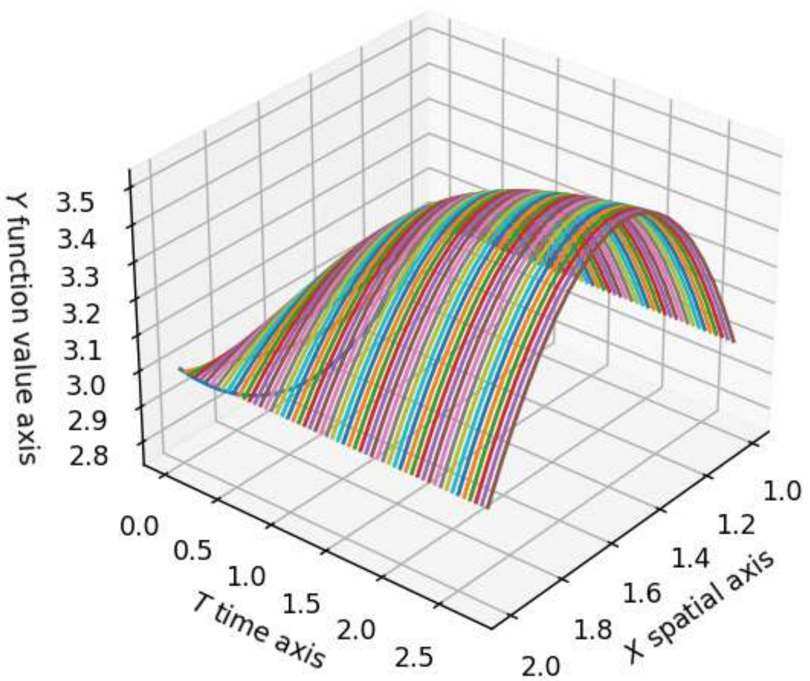
В задаче 4 перед $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ стоит *const*.

Несложно заметить, что таким образом при выводе эта константа окажется перед аппроксимацией данной производной и получится следующая формула:

$$u(x,t+\tau)=\frac{c\cdot\tau}{h^2}u(x-h,t)+(1-\frac{c\cdot\tau}{h^2})u(x,t)+\frac{c\cdot\tau}{h^2}u(x+h,t), c-const$$

№ задания	*k(x)*	*f(x)*	*a*	U_A	*b*	U_B
2.3.7	x	$3x+x^2$	1	3	2	3

Экспериментально выявленное время Т, при котором происходит установление процесса: **2.5 с.**



Задача 4. Промоделировать нестационарные процессы теплопроводности в зависимости от входных данных задачи. Найти приближенное решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \ a < x < b, \ 0 < t \le T, \\ u(a,t) = g_1(t), \ u(b,t) = g_2(t), \ 0 < t \le T, \\ u(x,0) = \varphi(x), \ a \le x \le b. \end{cases}$$

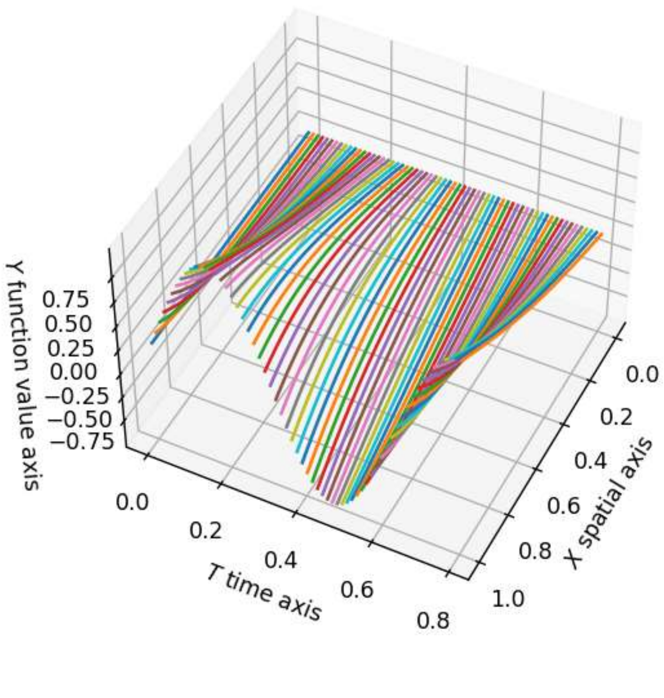
В задаче взять входные данные *ua, ub* из задачи 3. Использовать явную разностную схему. Взять $h = (b-a)/10$; шаг τ выбрать из условия устойчивости. Изобразить графики зависимости приближенного решения от x при $t = 0,\ 2\tau, 4\tau, \ldots T$.

УКАЗАНИЕ.

Условие устойчивости для явной разностной схемы имеет вид $\tau \le 0.5(h^2/k)$.

Таблица

Номер задания	a	b	k	T	$\varphi(x)$	$g_1(t)$	$g_2(t)$	$f(x,t)$
2.4.7	0	1	2	0.02	0	0	$\sin(10t)$	$x(1-x)$



Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы:

- Изучили метод разностных аппроксимаций для уравнения теплопроводности
- Составили программы решения уравнения теплопроводностипо разработанным алгоритмам
- Получили численное решение заданного уравнения теплопроводности

Задания

- Первое задание было направлено на изучение функций, описывающих функцию теплопроводности.
- Вторая задача направлена на изучение поведения решения в зависимости от функции теплопроводности.
- Третья и четвертая задачи иследуют нестационарное уравнение теплопроводности.