

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»
Кафедра информатики

Отчет по лабораторной работе №16
Метод сеток решения волнового уравнения

Выполнил: студент гр. 153505
Власенко Т.П.

Руководитель: доцент
Анисимов В.Я.

Минск 2023

1. Цель работы

- изучить метод разностных аппроксимаций для волнового уравнения, составить алгоритмы решения волнового уравнения методом сеток, применимым для организации вычислений на ПЭВМ;
- составить программы волнового уравнения по разработанным алгоритмам;
- получить численное решение волнового уравнения.

2. Краткие теоретические сведения

Волновое уравнение

Рассмотрим смешанную задачу для волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (2.63)$$

$$u(x, 0) = \rho(x), \quad u'_t(x, 0) = q(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.64)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.65)$$

где $f(x, t)$, $\rho(x)$, $q(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, причем $\rho(0) = \rho(1) = q(0) = q(1) = 0$.

Будем предполагать, что задача (2.63) – (2.65) имеет единственное решение $u(x, t) \in C_4(\bar{D})$, $\bar{D} = \{(x, t): 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T\}$ – замкнутый прямоугольник.

Разностная схема.

Будем использовать сетки, построенные на замкнутом прямоугольнике \bar{D} в лабораторной работе №14, и соответствующие обозначения сеточных

функций. Заменяем в уравнении (2.63) частную производную u''_{tt} приближенно второй разностной производной в направлении t , а частную производную u''_{xx} второй разностной производной в направлении x и, заменив u на y , приходим к разностному уравнению

$$\frac{y_k^{v+1} - 2y_k^v + y_k^{v-1}}{\tau^2} + \Lambda y_k^v = f_k^v, \quad (2.66)$$

$k = 1, 2, \dots, N-1$, $v = 1, 2, \dots, M-1$. Шаблон разностного уравнения (2.66) показан на рис. 2.9.

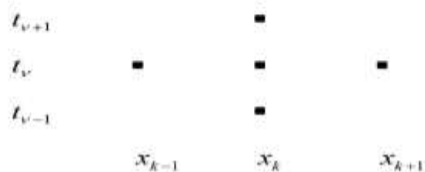


Рис. 2.9

Это уравнение можно разрешить явно относительно y_k^{v+1} . Но для того, чтобы находить значения разностного решения на $(v+1)$ -м слое, требуется иметь уже вычисленные значения искомого решения на двух предыдущих слоях. Поэтому нужно получить разностное решение сначала отдельно на слоях, отвечающих значениям $v=0$ и $v=1$. В этом нам помогут начальные условия.

Прежде всего, используя первое начальное условие (2.64), задаем

$$y_k^0 = \rho_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (2.67)$$

Кроме того, полагаем при $k = 1, 2, \dots, N-1$

$$y_k^1 = \rho_k + \tau q_k + \frac{\tau^2}{2} (f_k^0 - \Lambda \rho_k). \quad (2.68)$$

Правая часть формулы (2.68) аппроксимирует многочлен Тейлора $u(x_k, 0) + \tau u'_t(x_k, 0) + \frac{\tau^2}{2} u''_{tt}(x_k, 0)$, поскольку согласно (2.64) $u(x_k, 0) = \rho_k$, $u'_t(x_k, 0) = q_k$, а из уравнения (2.63) для частных производных решения задачи (2.63) –

(2.65) вытекает связь $u''_{tt}(x_k, 0) = f(x_k, 0) + u''_{xx}(x_k, 0)$. Наконец, согласно краевым условиям (2.65) имеем

$$y_0^v = 0, \quad y_N^v = 0, \quad v = 0, 1, \dots, M. \quad (2.69)$$

Теперь разностная схема (2.63) – (2.65) полностью определена. Эта схема явная трехслойная (см. шаблон на рис. 2.7), условно устойчивая в некоторых естественных нормах.

Если $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$, причем $\tau/h \leq c < 1$, $c = \text{const}$, то решение у разностной схемы (2.66) сходится к рассматриваемому решению u задачи (2.63) – (2.65) в следующем смысле:

$$\|u - y\|_h = O(h^2 + \tau^2). \quad (2.70)$$

где $\|u - y\|_h = \max_{0 \leq v \leq M} \left(h \sum_{k=1}^{N-1} (u_k^v - y_k^v)^2 \right)^{1/2}$.

Схема (2.66) имеет второй порядок точности и по h , и по τ .

Понятие о методе прямых.

Если в задаче (2.63) – (2.65) ввести дискретность только по x , то мы приходим к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 y_k}{dt^2} - \frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{h^2} = f(x_k, t), \quad (2.71)$$

где $k = 1, 2, \dots, N-1$

с начальными условиями

$$y_k(0) = p_k, \quad y'_k(0) = q_k, \quad (2.72)$$

причем $y_0(t) \equiv y_N(t) \equiv 0$.

При сделанном предположении относительно гладкости решения задачи (2.63) – (2.65) имеем

$$\|u - y\|_h = O(h^2), \quad (2.73)$$

где $\|u - y\|_h = \max_{0 \leq t \leq T} \left(h \sum_{k=1}^{N-1} (u(x_k, t) - y_k(t))^2 \right)^{1/2}$, $y_1(t), y_2(t), \dots, y_{N-1}(t)$ – решение

задачи Коши (2.63) – (2.65). Данный метод называется *методом прямых*,

поскольку приближенное решение задачи (2.63) – (2.65) ищется на прямых $x = x_k, k = 1, 2, \dots, N-1$, расположенных в плоскости xt . Разностный же метод часто называется *методом сеток*.

Вариант 7

Задание 1.

Параметр	9-2
L , см	18
Δu , см	0,2
E , Н/м ²	$120 \cdot 10^9$
ρ , кг/м ³	$5,9 \cdot 10^3$

Продольные колебания $u(x,t)$ тяги описываются уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad (2.73)$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.74)$$

где E – модуль упругости, ρ – плотность материала стержня. Тяга имеет длину L и закреплена на концах. Захватив тягу в центре (см. рис. 2.10),



Рис. 2.10

ее деформируют так, что продольное перемещение становится равным Δu :

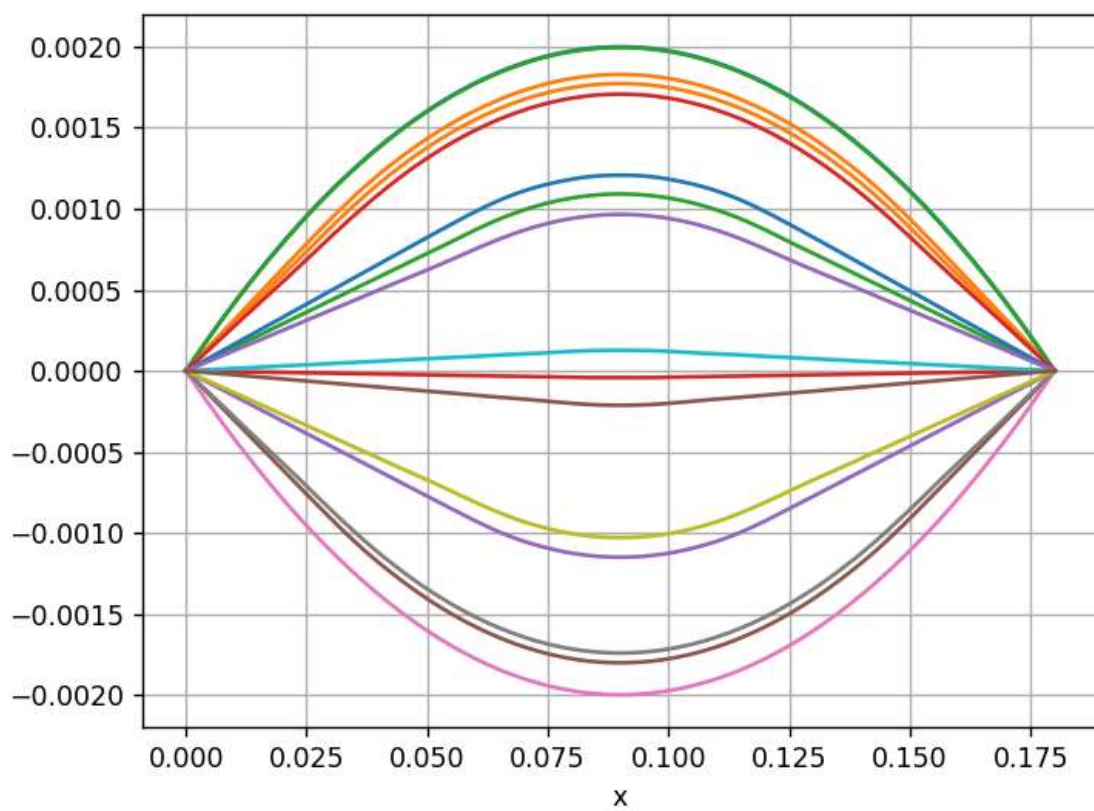
$$u(x,0) = -\frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Затем тяга освобождается.

Рассчитайте колебания $u(x,t)$ при заданных в таблице 2.12 параметрах.

Рассчитайте колебания $u(x,t)$ при заданных параметрах.

$$L = 18 \text{ см}, \quad \Delta u = 0.2 \text{ см}, \quad E = 120 \cdot 10^9 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, \quad \rho = 5.9 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$



Задание 2 (набор параметров 2).

Колебания тонкой пластины (см. рис.2.11) без учета потерь на трение описываются нормированным волновым уравнением вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$$

где $u(x, y, t)$ – деформация пластины, x, y – координаты, t – время.

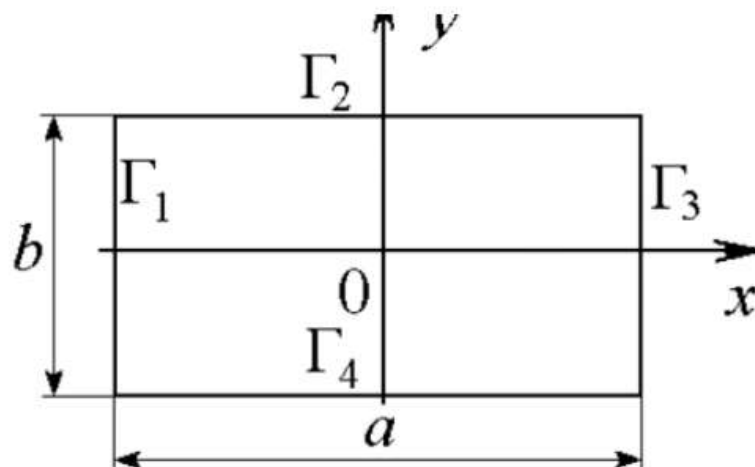
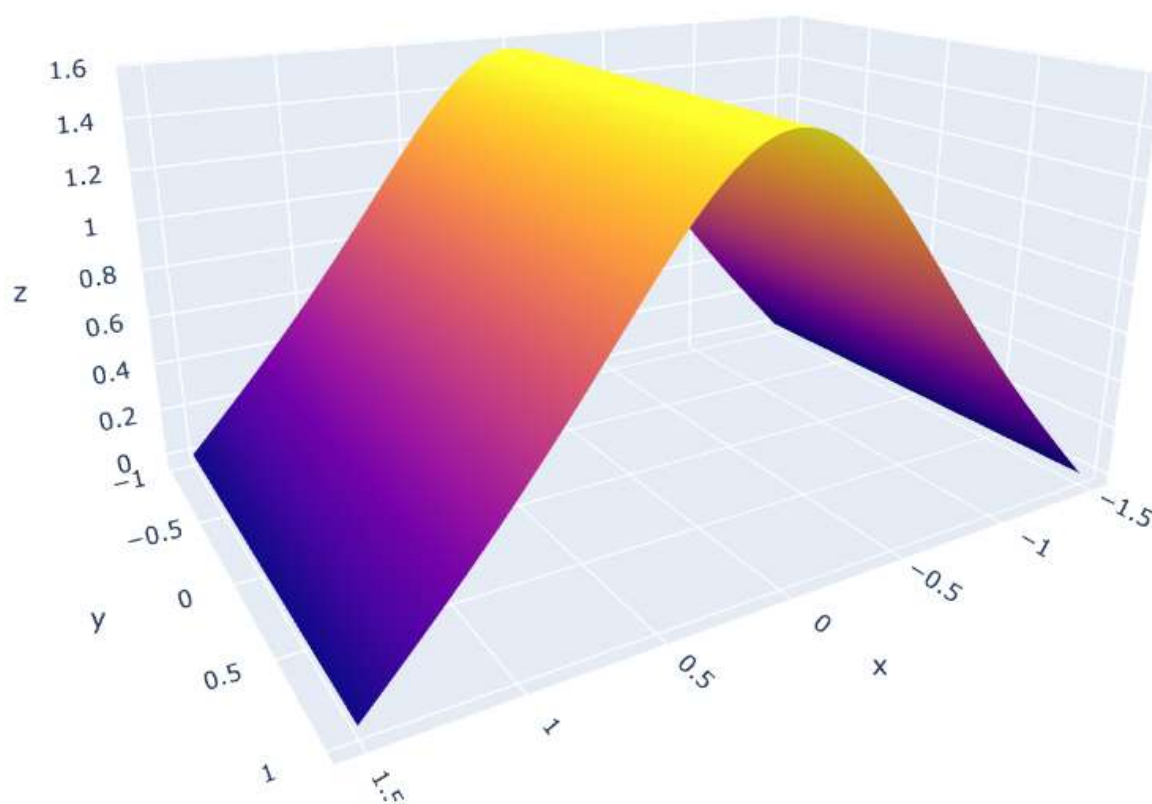


Рис.2.11

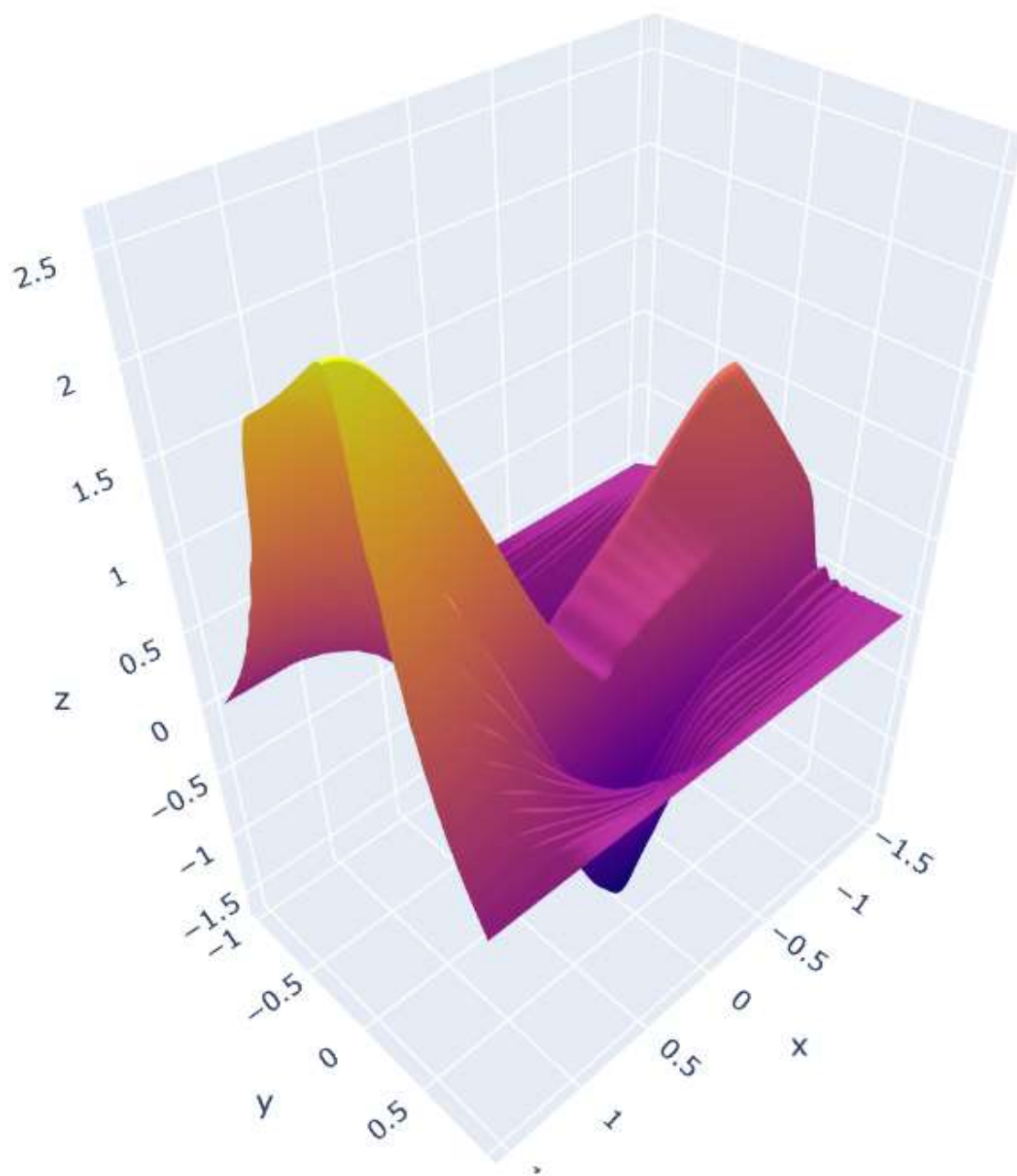
Рассчитать колебания пластины при заданных в таблице размерах a и b , граничных $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$, и начальных $u(x, y, 0)$ и $\frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t}$ условиях.

Параметр		Значение	
		10-3	10-4
a , см		3	2
b , см		2	3
Граничные условия	Γ_1	$\partial u / \partial n = 0$	
	Γ_2	$u = 0$	
	Γ_3	$\partial u / \partial n = 0$	
	Γ_4	$u = 0$	
$u(t=0)$		$\text{tg} \left[\cos \left(\frac{\pi y}{b} \right) \right]$	
$\partial u / \partial t _{t=0}$		$\exp \left[\sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \right] \sin \left(\frac{2\pi y}{b} \right)$	

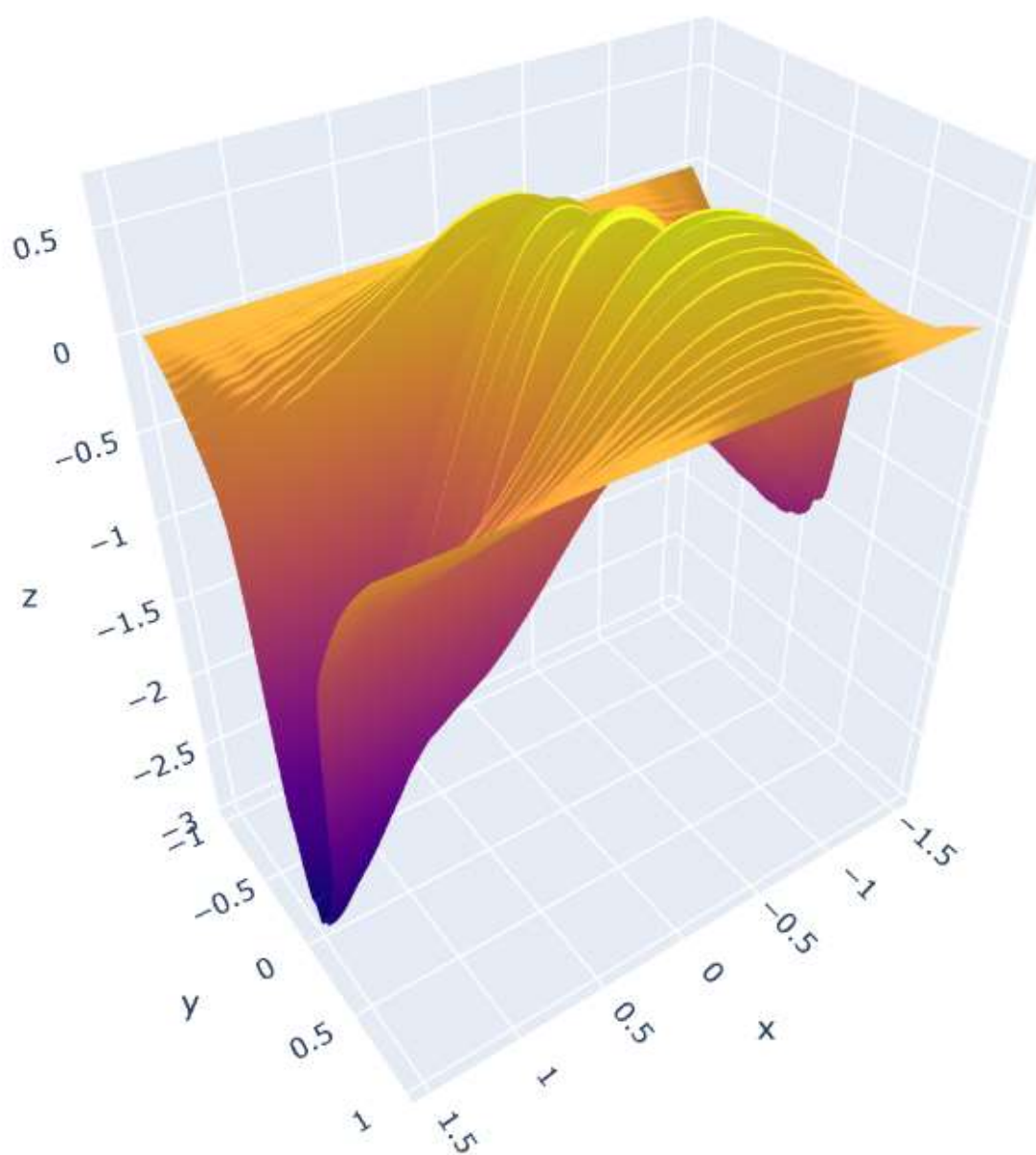
Колебания пластины в момент времени $t = 0$.



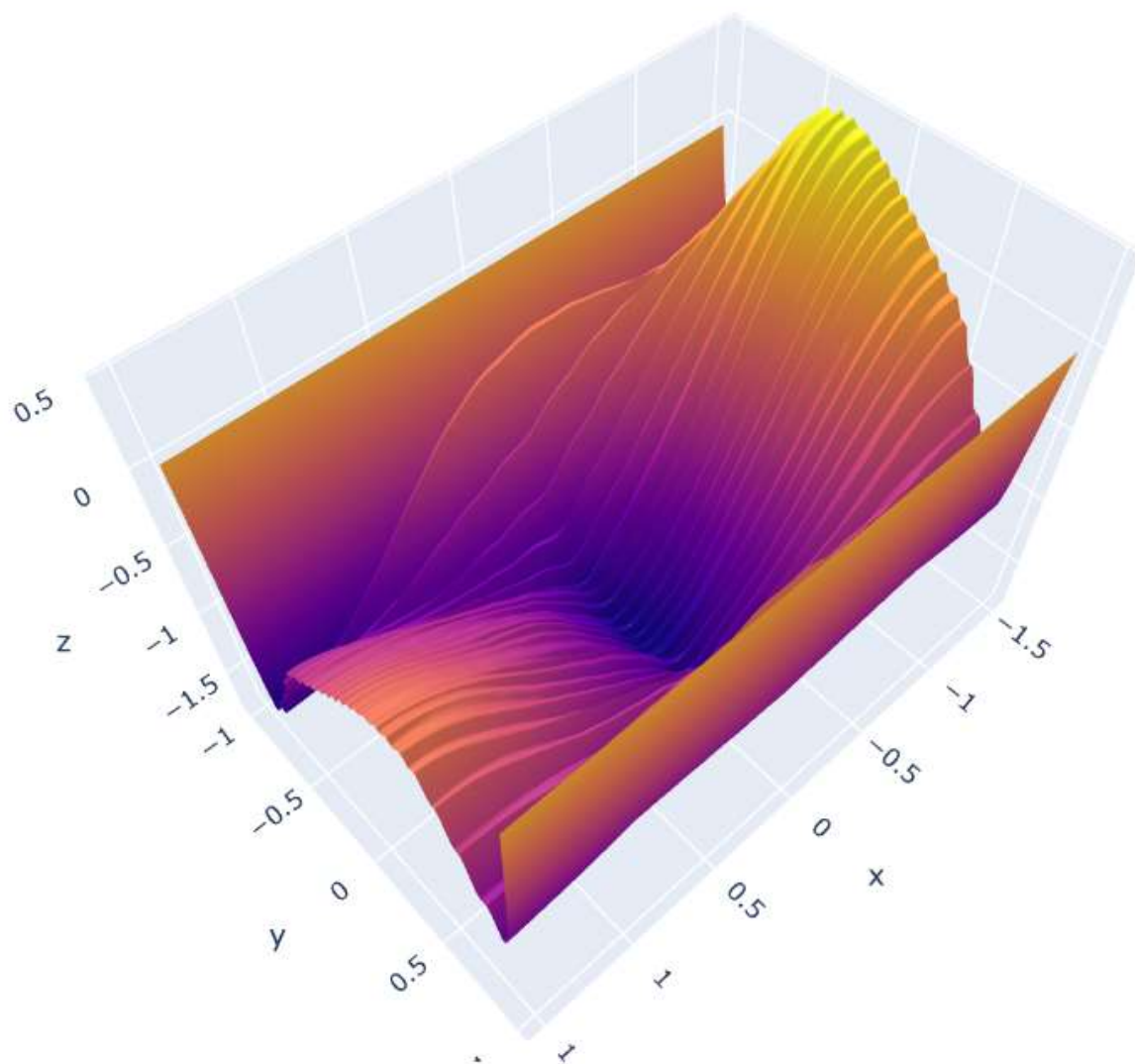
Колебания пластины в момент времени $t = 1$.



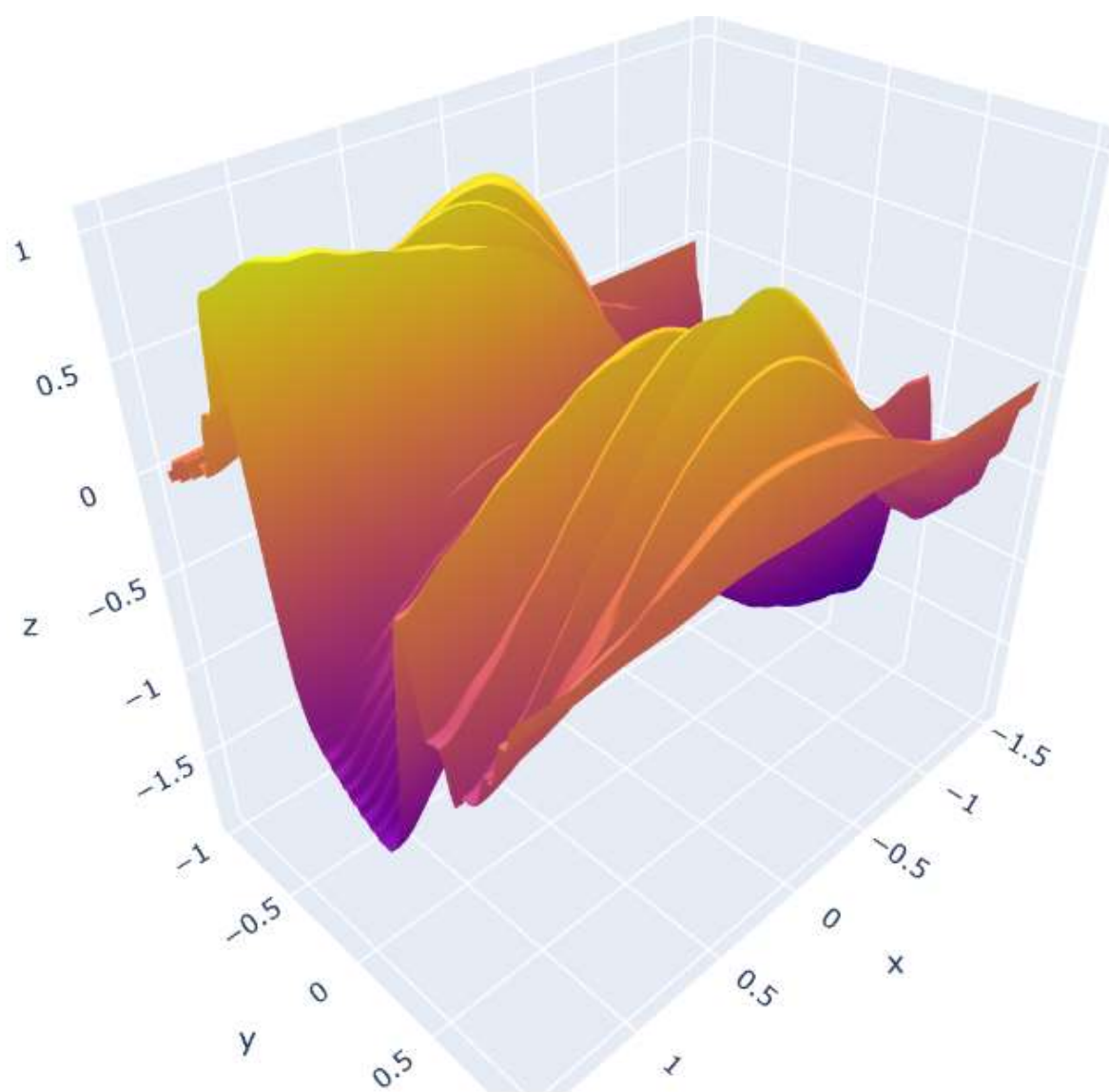
Колебания пластины в момент времени $t = 2$.



Колебания пластины в момент времени $t = 3$.



Колебания пластины в момент времени $t = 4$.



3. Выводы

Таким образом, в ходе выполнения лабораторной работы, был изучен метод разностных аппроксимаций для волнового уравнения методом сеток, составлен алгоритмы (и соответствующие реализации) для решения волнового уравнения методом сеток, применимым для организации вычислений на ПЭВМ. Также данные методы были закреплены на примере решения задач по нахождению колебаний тяги и тонкой пластины из волнового уравнения.