Лабораторная работа №3.1
Обыкновенные ДУ 1-го порядка
Власенко Тимофей, 153505
Вариант 7

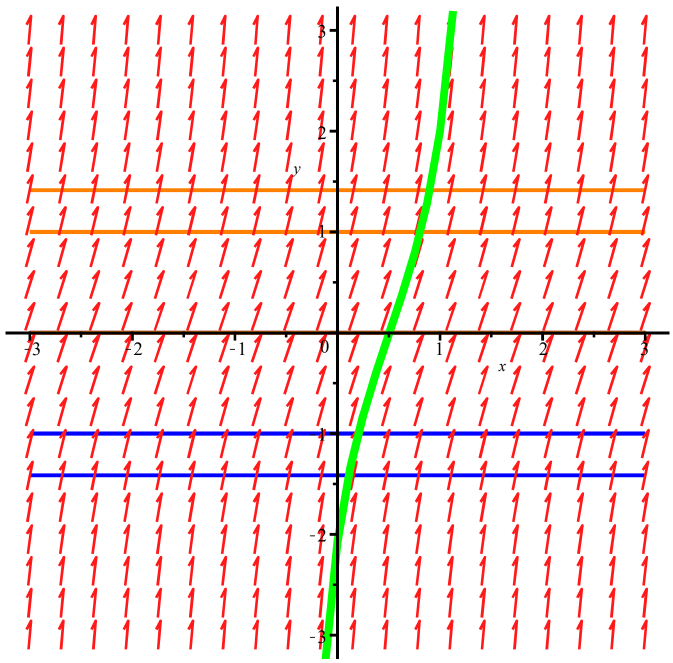
Задание1 (для данного ДУ методом изоклин построить интегральную кривую, проходящую через точку M)

> $de\_plot := DETools[DEplot](diff(y(x), x) = 3 + y(x)\^{}2, y(x), x = -3 .. 3, y(x) = -3 .. 3, [y(1) = 2], linecolor = green) :$

> isoclines_neg := plots[implicitplot]$\left(\left[seq\left(subs\left(k = i, y = -\sqrt{k-3}\right), i = 3..5\right)\right], x = -3..3, y = -3..3, color = blue\right)$:

> isoclines_pos := plots[implicitplot]$\left(\left[seq\left(subs\left(k = i, y = \sqrt{k-3}\right), i = 3..5\right)\right], x = -3..3, y = -3..3, color = coral\right)$:

> $plots[display](isoclines\_neg, isoclines\_pos, de\_plot);$



Задание2

2.1 (найти линию, проходящую через точку M_0, и обладающую тем свойством,

что в любой ее точке M нормальный вектор MN с концом на оси Oy имеет длину, равную a, и образует острый угол с положительным направлением оси Oy.)

M0(12,3), a=13

> $dsolve\left(\frac{x^2}{diff(y(x),x)^2}+x^2=a^2\right)$

$$y(x) = -\frac{(a-x)\ (a+x)}{\sqrt{(a-x)\ (a+x)}} + \_C1,\ y(x) = \frac{(a-x)\ (a+x)}{\sqrt{(a-x)\ (a+x)}} + \_C1 \qquad \textbf{(2.1.1)}$$

> $f1 := subs\left(a=13,\ y(x)=-\frac{(a-x)\ (a+x)}{\sqrt{(a-x)\ (a+x)}}+\_C1\right);$
> $f2 := subs\left(a=13,\ y(x)=\frac{(a-x)\ (a+x)}{\sqrt{(a-x)\ (a+x)}}+\_C1\right);$

$$f1 := y(x) = -\frac{(13-x)\ (13+x)}{\sqrt{(13-x)\ (13+x)}} + \_C1$$
$$f2 := y(x) = \frac{(13-x)\ (13+x)}{\sqrt{(13-x)\ (13+x)}} + \_C1 \qquad \textbf{(2.1.2)}$$

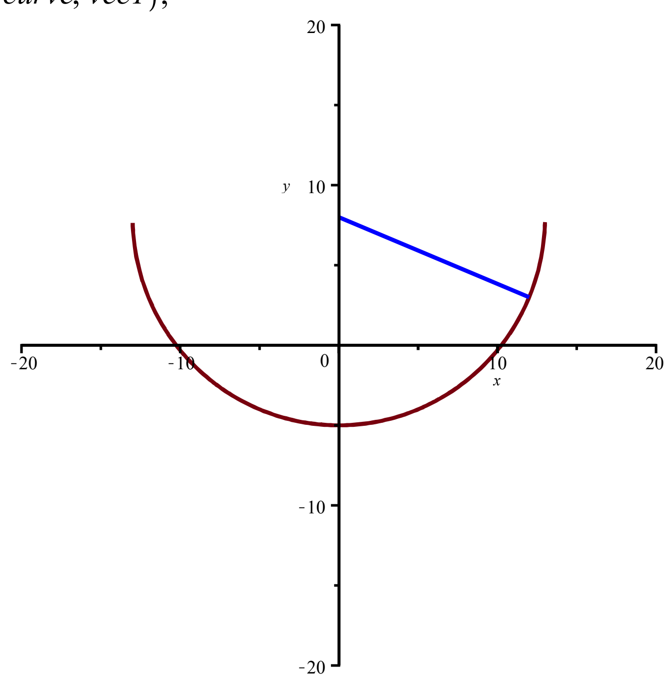
> $C1 := simplify\left(subs\left(y(x)=3,\ x=12,\ y(x)+\mathrm{sqrt}\left(13^2-x^2\right)\right)\right);$
> $C2 := simplify\left(subs\left(y(x)=3,\ x=12,\ y(x)-\mathrm{sqrt}\left(13^2-x^2\right)\right)\right);$

$$C1 := 8$$
$$C2 := -2 \qquad \textbf{(2.1.3)}$$

> $curve := plot\left(-\mathrm{sqrt}\left(13^2-x^2\right)+C1,\ x=-20..20,\ y=-20..20\right):$

> $vec1 := plot([0,\ 12],\ [8,\ 3],\ color=blue):$

> $plots[display](curve,\ vec1);$



2.2 (найти линию, проходящую через точку M_0, и обладающую тем свойством,

что в любой ее точке М касательный вектор MN с концом на оси Ох имеет проекцию на ось Ох, обратно пропорциональную абсциссе точки М . Коэффициент пропорциональности равен а.)

M0(-1,1/e), a = 1/2

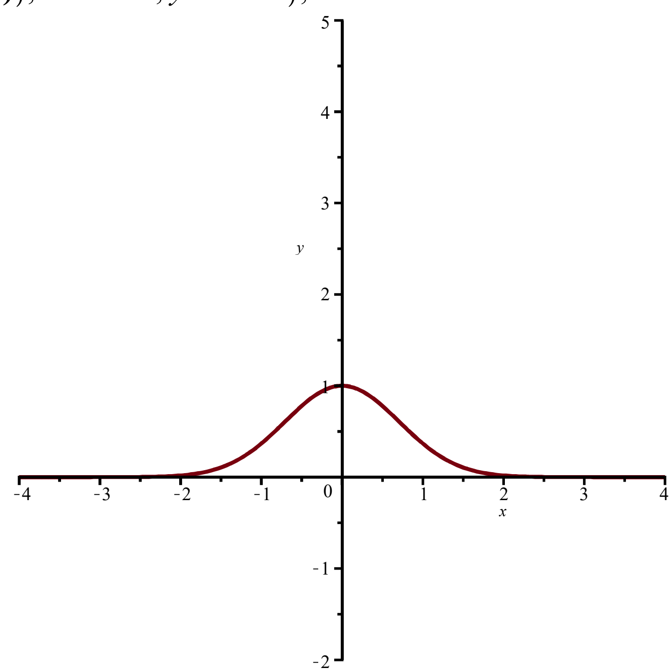
> $dsolve\left(\left\{diff(y(x), x) = -2\cdot y(x)\cdot x, y(-1) = \frac{1}{\mathrm{e}}\right\}\right)$

$$y(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{\mathrm{e}\,\mathrm{e}^{-1}} \qquad (2.2.1)$$

> $simplify(\mathbf{(2.2.1)})$

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \qquad (2.2.2)$$

> $plot(rhs(\mathbf{(2.2.2)}), x = -4..4, y = -2..5);$



Задание3 (найти общий интеграл уравнения)

> $de1 := diff(y(x), x) = \frac{4\cdot(3\cdot x + 8\cdot y(x) + 11)}{31\cdot x + y(x) + 32}$

$$de1 := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, y(x) = \frac{4\,(3\,x + 8\,y(x) + 11)}{31\,x + y(x) + 32} \qquad (3.1)$$

> $dsolve(de1)$

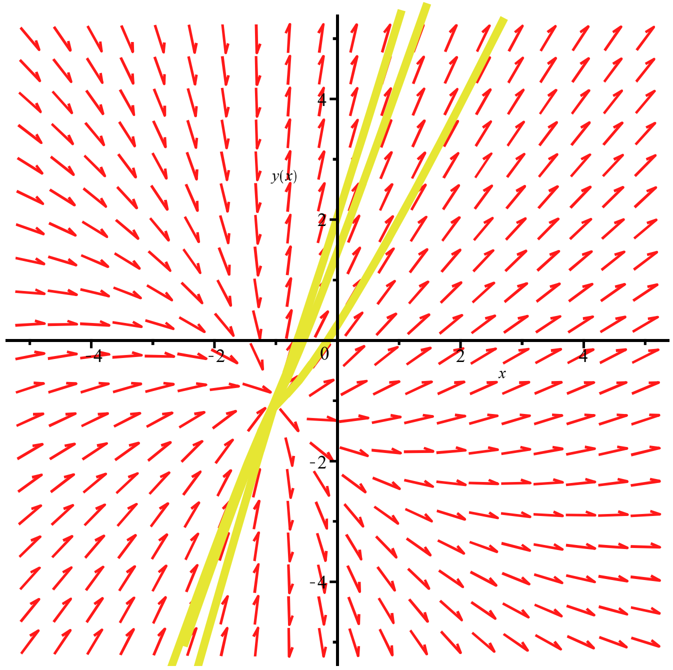
$$4\ln\left(-\frac{y(x) + 4 + 3\,x}{x + 1}\right) - 5\ln\left(\frac{-y(x) + 3 + 4\,x}{x + 1}\right) - \ln(x + 1) - \_C1 = 0 \qquad (3.2)$$

> $solve([3\cdot x + 8\cdot y + 11 = 0, 31\cdot x + y + 32 = 0])$

$$\{x = -1, y = -1\} \qquad (3.3)$$

> $DETools[DEplot](de1, y(x), x = -5..5, y = -5..5, [y(-1.01) = -1.01, y(-0.99) = -0.99, y($

$-0.5) = -0.5])$



> $A := matrix([[31-\lambda, 1], [12, 32-\lambda]])$

$$A := \begin{bmatrix} 31-\lambda & 1 \\ 12 & 32-\lambda \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.4)}$$

> $(solve(linalg[det](A) = 0))$

$$35, 28 \quad \textbf{(3.5)}$$

> *# особая точка - неустойчивый уузел*

Задание4 (найти решение задачи Коши)

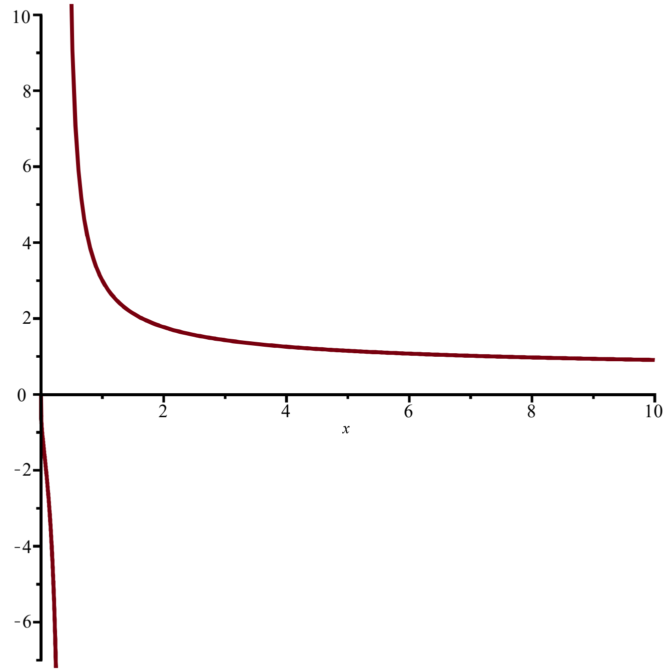
> $de2 := 3\cdot(diff(y(x), x)\cdot x + y(x)) = y(x)^2\cdot\ln(x)$

$$de2 := 3\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)x + 3\,y(x) = y(x)^2\ln(x) \quad \textbf{(4.1)}$$

> $dsolve(\{de2, y(1) = 3\})$

$$y(x) = \frac{3}{\ln(x)+1} \quad \textbf{(4.2)}$$

> $y1\_3\_plot := plot(rhs(\textbf{(4.2)}), discont = true)$



Задание 5(решить ДУ. Построить несколько интегральных кривых)

#5.1

> $de3 := \sinh\left(\frac{d}{dx}(y(x))\right) - 2\cdot\frac{d}{dx}(y(x));$

$$de3 := \sinh\left(\frac{d}{dx}\, y(x)\right) - 2\,\frac{d}{dx}\, y(x) \quad (5.1)$$

> $dsolve(de3, y(x));$

$$y(x) = RootOf(-\sinh(\_Z) + 2\,\_Z)\, x + \_C1 \quad (5.2)$$

$\frac{d}{dx}(y) = t$

$$0 = t \quad (5.3)$$

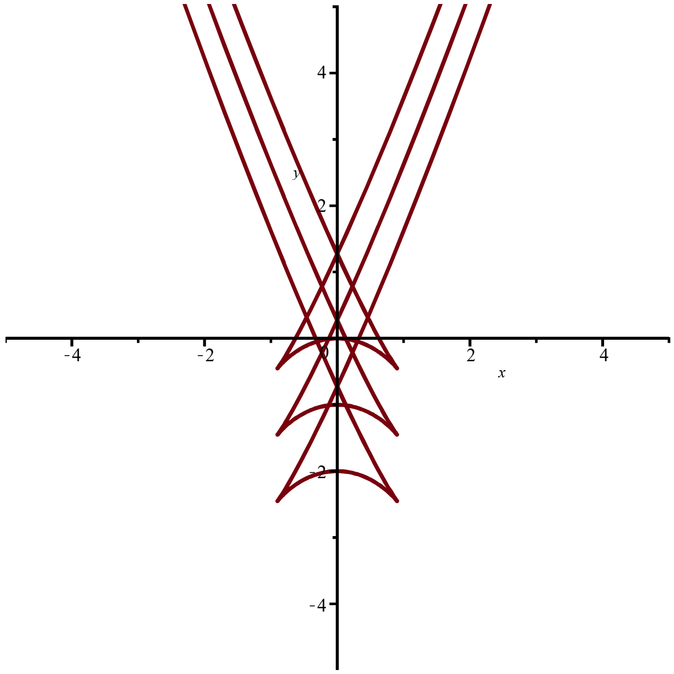
> $new\_de3 := \sinh(t) - 2\cdot t;$

$$new\_de3 := \sinh(t) - 2\, t \quad (5.4)$$

> $solution\_Y := int(diff(new\_de3, t)\cdot t, t);$

$$solution\_Y := \sinh(t)\, t - \cosh(t) - t^2 \quad (5.5)$$

> $curve3 := plot([new\_de3, solution\_Y - 1, t = -5\,..5], x = -5\,..5, y = -5\,..5):$
$curve4 := plot([new\_de3, solution\_Y, t = -5\,..5], x = -5\,..5, y = -5\,..5):$
$curve5 := plot([new\_de3, solution\_Y + 1, t = -5\,..5], x = -5\,..5, y = -5\,..5):$
$plots[display](curve3, curve4, curve5);$



#5.2

> $de4 := y = \frac{d}{dx}(y(x)) \cdot \ln\left(\frac{d}{dx}(y(x))\right) - \frac{d}{dx}(y(x));$

$$de4 := y = \left(\frac{d}{dx}\, y(x)\right) \ln\left(\frac{d}{dx}\, y(x)\right) - \frac{d}{dx}\, y(x) \tag{5.6}$$

$\mathbf{\frac{d}{dx}(y) = t}$

$$0 = t \tag{5.7}$$

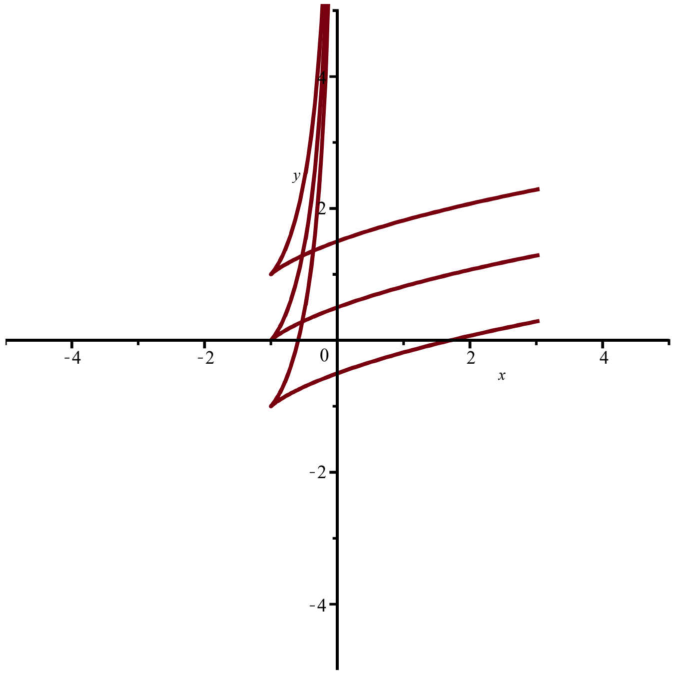
> $new\_de4 := t \cdot \ln(t) - t;$

$$new\_de4 := t \ln(t) - t \tag{5.8}$$

> $solution\_X := int\left(\frac{diff(new\_de4, t)}{t}, t\right);$

$$solution\_X := \frac{\ln(t)^2}{2} \tag{5.9}$$

> $curve3 := plot([new\_de4, solution\_X - 1, t = -5\,..5], \mathrm{x} = -5\,..5, \mathrm{y} = -5\,..5):$
$curve4 := plot([new\_de4, solution\_X, t = -5\,..5], \mathrm{x} = -5\,..5, \mathrm{y} = -5\,..5):$
$curve5 := plot([new\_de4, solution\_X + 1, t = -5\,..5], \mathrm{x} = -5\,..5, \mathrm{y} = -5\,..5):$
$plots[display](curve3, curve4, curve5);$



Задание 6(найти все решения уравнения)

> $solution := dsolve\left(y(x) = x \cdot diff(y(x), x) - 2 \cdot diff(y(x), x)^2 + 2, y(x)\right);$

$$solution := y(x) = \frac{x^2}{8} + 2, y(x) = -2\_C1^2 + \_C1\, x + 2 \quad \textbf{(6.1)}$$

> #особое
> $S := rhs(solution[1]);$

$$S := \frac{x^2}{8} + 2 \quad \textbf{(6.2)}$$

> #общее
> $G := rhs(solution[2]);$

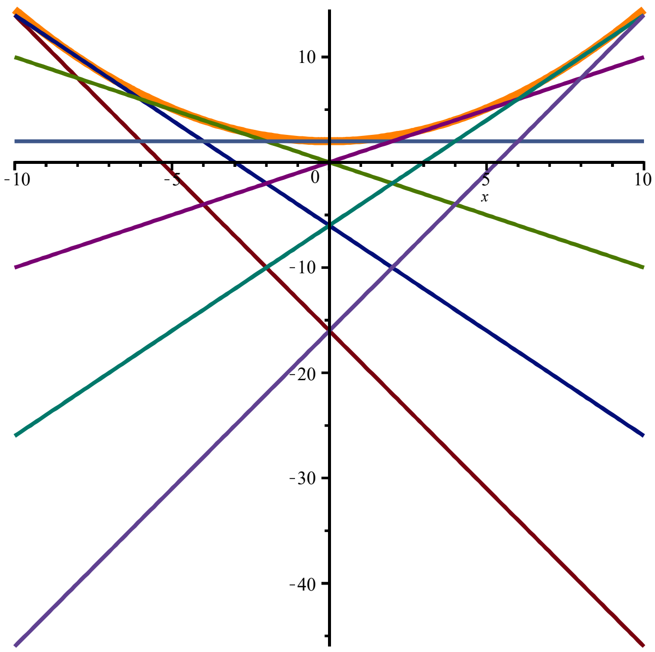
$$G := -2\_C1^2 + \_C1\, x + 2 \quad \textbf{(6.3)}$$

> $curves := seq(subs(\_C1 = i, G), i = -3 ..3);$

$$curves := -3x - 16, -2x - 6, -x, 2, x, 2x - 6, 3x - 16 \quad \textbf{(6.4)}$$

> $S\_plot := plot(S, color = coral, thickness = 3):$
> $curves\_plot := plot([curves]):$

> $plots[display](S\_plot, curves\_plot);$



На графике видно, что кривая $\frac{x^2}{8} + 2$ является огибающей