Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»
Кафедра информатики

Отчет по лабораторной работе №14
Аппроксимация граничных условий второго рода в методе конечных разностей на примере уравнения теплопроводности

Выполнил:
студент гр. 153505
Власенко Тимофей Павлович

Руководитель:
Доцент
Анисимов Владимир Яковлевич

Минск 2023

Содержание

Цель работы

Ознакомиться с наиболее часто применяемыми способами аппроксимации граничных условий второго рода (граничных условий (ГУ) Неймана) в методе конечных разностей (на примере ГУ для одномерного нестационарного уравнения теплопроводности). Разработать соответствующие алгоритмы и программные реализации для решения поставленной задачи.

Теоретические сведения

Задачи, которые будут использоваться для анализа свойств численных решений с ГУ второго рода, формулируются так: в стержне длиной L с *теплоизолированной* боковой поверхностью торец $x = 0$ *поддерживается* при *постоянной* температуре T_0 (ГУ первого рода), а торец $x = 1$ – *теплоизолирован* (ГУ второго рода); температуропроводность материала стержня постоянна и равна a; в начальный момент времени $t = 0$ стержень нагрет до температуры $T_{нач}(x)$ (координата x отсчитывается от левого торца стержня (рис. 2.4)). Найти распределение температуры по стержню в любой момент времени, т. е. найти функцию $T(x, t)$ для $0 < x \leq L$ и $t > 0$.

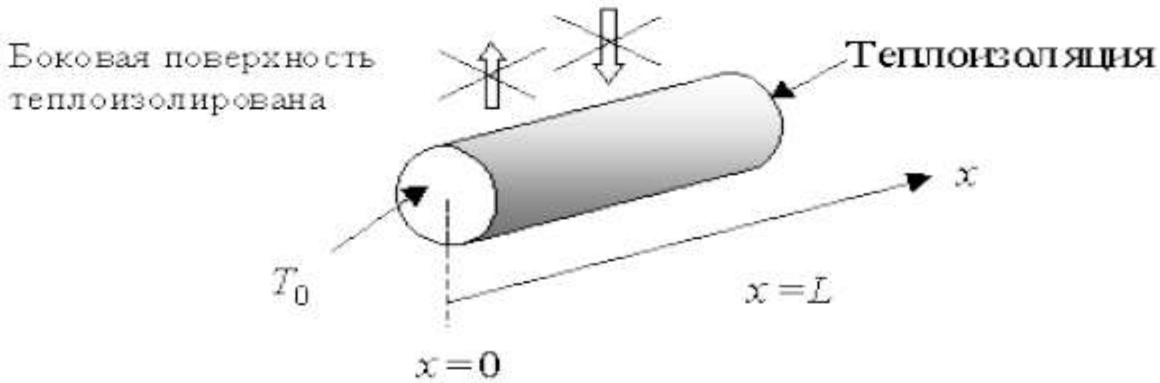


Рис. 2.4.

Стержень круглого сечения нарисован условно – сечение может иметь любую форму, и если боковая поверхность теплоизолирована, то температура любой точки стержня может зависеть только от координаты x и не будет зависеть от координаты поперек стержня).

Искомая функция $T(x,t)$ является решением одномерного уравнения теплопроводности, которое в безразмерных координатах имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\ 0<x<1,\ 0<t\le T.$$

Граничные условия:

$$T(0,t)=T_0,\ \ \frac{\partial T(1,t)}{\partial x}=0,\text{ для }0<t\le T$$

(на границе $x = 0$ граничное условие первого рода, а при $x = 1$ – второго).

Начальные условия: $T(x,0) = T_{нач}(x)$ при $0<x<1$.

Способы реализации ГУ второго рода

Методы конечных разностей, применяемые для численного решения задач с граничными условиями второго (и третьего) рода, не имеют *никаких принципиальных отличий* от методов, применяемых для задач с ГУ первого рода. Для решения поставленной задачи методом конечных разностей необходимо представить граничное условие второго рода в «естественном» для этого метода виде, т. е. с использованием численного решения (величин T_i^n). Иными словами, производную в граничном условии надо заменить ее разностной аппроксимацией, а это можно сделать многими способами. Рассмотрим только два способа реализации ГУ второго рода, которые будут использованы в расчетах. При рассмотрении используем ту же равномерную сетку, что и в лабораторной работе №13.

ЗАДАНИЕ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №14

ЗАДАЧА1. Найти приближенное решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \;\; a < x < b, \;\; 0 < t \le T, \\ u(a,t) = g_1(t), \;\; \dfrac{\partial u}{\partial t}(b,t) = g_2(t), \;\; 0 < t \le T, \\ u(x,0) = \varphi(x), \;\; a \le x \le b, \end{cases}$$

используя явную и неявную разностные схемы. Исходные данные указаны в табл. 2.9. Изобразить графики зависимости приближенного решения от x при $t = 0,\ 2\tau, 4\tau, \ldots T$.

№	a	b	k	T	$\varphi(x)$	$g_1(t)$	$g_2(t)$	$f(x,t)$
7	0	1	2	0.02	0	0	$\sin(10t)$	$x\,(1-x)$

Общая постановка задачи

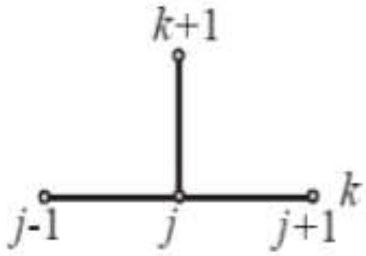
Дано следующее уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x), x \in [a, b], t \in [0, T]$$

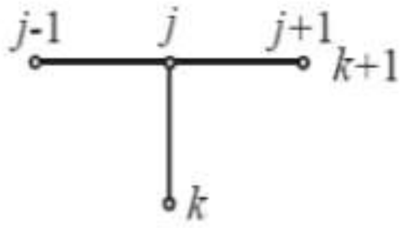
Зададим оператор L:

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Для аппроксимации оператора L с помощью явной схемы используем следующие точки:



шаблон явной схемы



шаблон неявной схемы

Обозначим для удобства точки следующим образом:

$$x_{j,k} = (x, t)$$

Тогда, обозначив разность

$$x_{j,k} - x_{j-1,k} = h$$

А

$$x_{j,k+1} - x_{j,k} = \tau$$

Получаем:

$$x_{j-1,k} = (x - h, t)$$

$$x_{j+1,k} = (x + h, t)$$

1. Явная схема

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(x, t+\tau) - u(x, t)}{\tau}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + y(x-h, t)}{h^2}$$

Таким образом результат оператора Lu:

$$Lu = \frac{u(x, t+\tau) - u(x, t)}{\tau} - \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + y(x-h, t)}{h^2}$$

Теперь давайте выразим отсюда $u(x, t+\tau)$:

$$u(x,t+\tau) = u(x,t) + \tau(\frac{u(x+h,t)}{h^2} - 2\frac{u(x,t)}{h^2} + \frac{u(x-h,t)}{h^2})$$

Итого приведя слагаемые:

$$u(x,t+\tau) = \frac{\tau}{h^2}u(x-h,t) + (1-\frac{2\tau}{h^2})u(x,t) + \frac{\tau}{h^2}u(x+h,t)$$

2. Неявная схема

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(x,t+\tau)-u(x,t)}{\tau}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x+h,t+\tau)-2u(x,t+\tau)+y(x-h,t+\tau)}{h^2}$$

Таким образом результат оператора Lu:

$$Lu = \frac{u(x,t+\tau)-u(x,t)}{\tau} - \frac{u(x+h,t+\tau)-2u(x,t+\tau)+y(x-h,t+\tau)}{h^2}$$

Теперь давайте выразим отсюда $u(x,t)$:

$$u(x,t) = u(x,t+\tau) - \tau(\frac{u(x+h,t+\tau)}{h^2} + 2\frac{u(x,t+\tau)}{h^2} - \frac{u(x-h,t+\tau)}{h^2})$$

Итого приведя слагаемые:

$$u(x,t) = -\frac{\tau}{h^2}u(x-h,t+\tau) + (1+\frac{2\tau}{h^2})u(x,t+\tau) - \frac{\tau}{h^2}u(x+h,t+\tau)$$

Левая разность

Используем аппроксимацию производной:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x_n,\tau_N)-u(x_{n-1},\tau_N)}{h}$$

Тогда:

$$g_2(\tau_N) = \frac{u(x_n,\tau_N)-u(x_{n-1},\tau_N)}{h}$$

И

$$u(x_n,\tau_N) = u(x_{n-1},\tau_N) + hg_2(\tau_N)$$

Центральная разность

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x_{n+1},\tau_N)-u(x_{n-1},\tau_N)}{2h}$$

Тогда:

$$g_2(\tau_N) = \frac{u(x_{n+1},\tau_N)-u(x_{n-1},\tau_N)}{2h}$$

И

$$u(x_{n+1},\tau_N) = u(x_{n-1},\tau_N) + 2hg_2(\tau_N)$$

Формула для явной схема с учётом константы:

$$u(x,t+\tau) = \frac{c\cdot\tau}{h^2}u(x-h,t) + (1-\frac{c\cdot\tau}{h^2})u(x,t) + \frac{c\cdot\tau}{h^2}u(x+h,t) + \tau f(x), c - const$$

Первый метод

Правое краевое условие задано следующим образом:

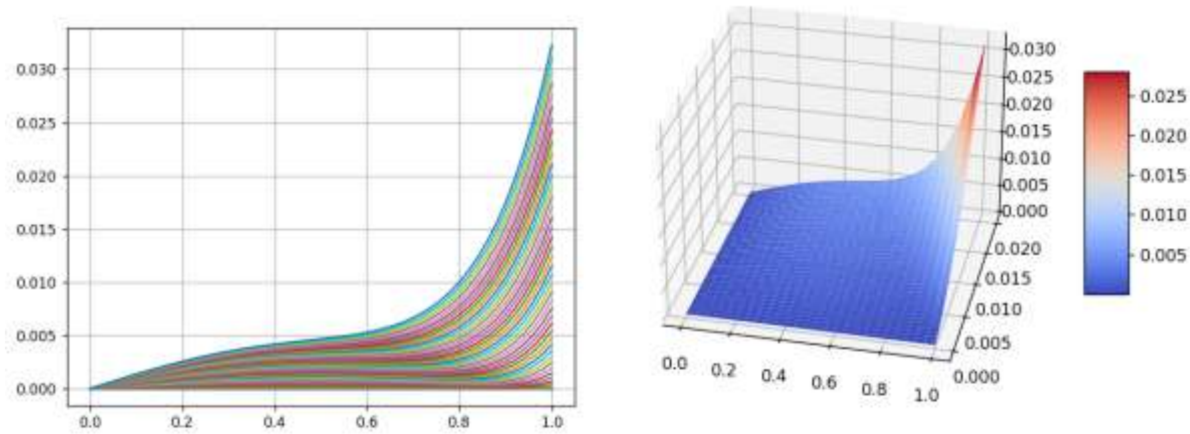
$$\frac{\partial u}{\partial x}(b,t) = g_2(t)$$

Для первого метода правое краевое условие будем аппроксимировать по формуле:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_N^n - T_{n-1}^n}{h}$$

Таким образом:

$$T_N^n = hg_2(t) + T_{N-1}^n$$



Правое граничное условие будем аппроксимировать по обычной формуле при помощи добавления фиктивных узлов. Для этого аппроксимируем граничное условие следующим образом:

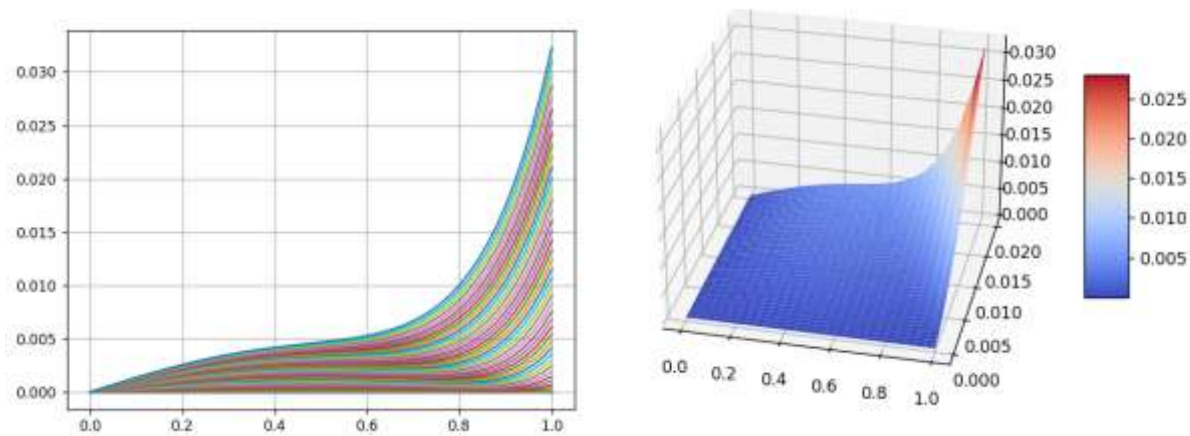
$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{N+1}^n - T_{N-1}^n}{2h}$$

Отсюда выразим фиктивный узел:

$$T_{N+1}^n = 2hg_2(t) + T_{N-1}^n$$

Подставив это в нашу исходную формулу получим:

$$u(b, t+\tau) = \frac{c \cdot \tau}{h^2} u(b-h, t) + (1 - \frac{c \cdot \tau}{h^2}) u(b, t) + \frac{c \cdot \tau}{h^2}(2hg_2(t) + T_{N-1}^n) + \tau f(x), c - const$$



2. Неявная схема

Для каждой строки матрицы (кроме первой - заполняется начальным условием) необходимо решить систему линейных уравнений (каждый текущий член, зависит от следующего):

$$u(x,t)+\tau f(t)=-\frac{c\tau}{h^2}u(x-h,t+\tau)+(1+\frac{2c\tau}{h^2})u(x,t+\tau)-\frac{c\tau}{h^2}u(x+h,t+\tau)$$

$c = const$

Таким образом для нахождения решения можно заполнить матрицу коэффициентов и затем на каждом новом временном слое находить новый вектор свободных членов, т.е матрица будет иметь вид:

$10\dots.$

$k_1k_2k_3\dots.$

$0k_1k_2k_3\dots$

....

$0.\dots\dots-11$'

Взависимости от способа будут отличаться последние строки в нашей матрице коэффициентов и векторе свободных членов)

$$u(x,t)+\tau f(t)=-\frac{c\tau}{h^2}u(x-h,t+\tau)+(1+\frac{2c\tau}{h^2})u(x,t+\tau)-\frac{c\tau}{h^2}u(x+h,t+\tau)$$

$c = const$

Первый способ

Правое краевое условие задано следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(b,t)=g_2(t)$$

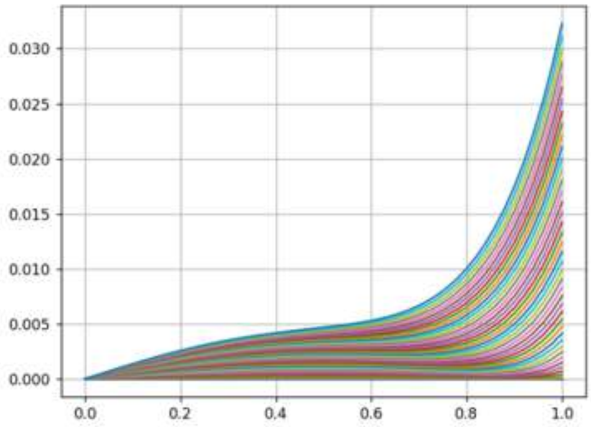
Для первого метода правое краевое условие будем аппроксимировать по формуле:

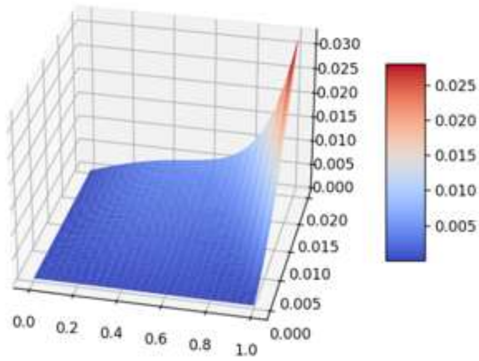
$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{T_N^n-T_{n-1}^n}{h}$$

Таким образом:

$$-T_{N-1}^n+T_N^n=hg_2(t)$$

Таким образом коэффициенты в последней строке матрицы коэффициентов $-1, 1$, а в векторе свободных членов последний элемент $= hg_2(t)$





Второй способ

Правое граничное условие будем аппроксимировать по обычной формуле при помощи добавления фиктивных узлов. Для этого аппроксимируем граничное условие следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{N+1}^n - T_{N-1}^n}{2h}$$

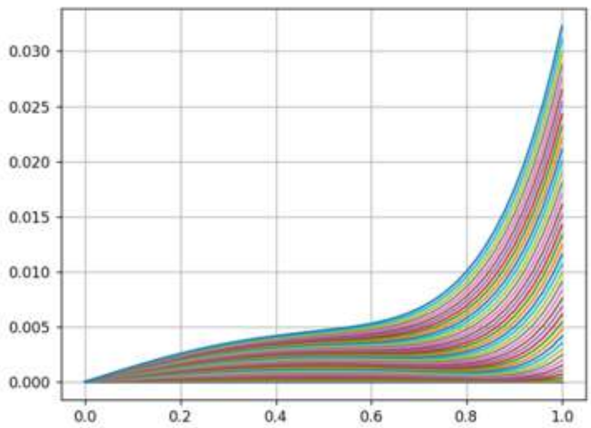
Отсюда выразим фиктивный узел:

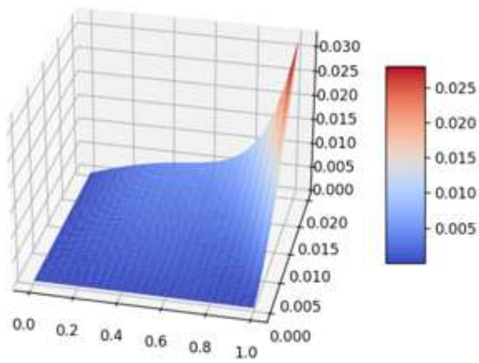
$$T_{N+1}^n = 2hg_2(t) + T_{N-1}^n$$

Подставив это в нашу исходную формулу получим:

$$-\frac{2c \cdot \tau}{h^2}u(b-h,t) + (1 + \frac{c \cdot \tau}{h^2})u(b,t) = -\frac{c \cdot \tau}{h^2}2hg_2(t) + \tau f(x) + u(b,t), c - const$$

Отсюда соответственно и берём последнюю строку для матрицы коэффициентов и последний элемент в матрице свободных членов





Фиксированное t:

Явная:

	N	N h	t	s(t=t_n1)	s(t=t_n2)	max|t=t_n1|	max|t=t_n2|
0	80.0	0.0125	0.000078	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1	40.0	0.0250	0.000078	0.001063	0.001418	0.001858	0.002472
2	20.0	0.0500	0.000078	0.000524	0.000699	0.000936	0.001247
3	10.0	0.1000	0.000078	0.000258	0.000344	0.000471	0.000628
4	5.0	0.2000	0.000078	0.000132	0.000176	0.000241	0.000321

Неявная:

	N	N h	t	s(t=t_n1)	s(t=t_n2)	max|t=t_n1|	max|t=t_n2|
0	80.0	0.0125	0.000078	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1	40.0	0.0250	0.000078	0.001088	0.001451	0.001857	0.002471
2	20.0	0.0500	0.000078	0.000548	0.000730	0.000934	0.001245
3	10.0	0.1000	0.000078	0.000277	0.000370	0.000468	0.000624
4	5.0	0.2000	0.000078	0.000142	0.000189	0.000234	0.000312

Фиксированное h:

Явная:

	N	N h	t	s(t=t_n1)	s(t=t_n2)	max|t=t_n1|	max|t=t_n2|
0	100.0	0.031623	0.000500	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00
1	200.0	0.031623	0.000250	7.276515e-08	9.488010e-08	2.863107e-07	3.730689e-07
2	400.0	0.031623	0.000125	3.599320e-08	4.695894e-08	1.415820e-07	1.845702e-07
3	800.0	0.031623	0.000063	1.790244e-08	2.336295e-08	7.040917e-08	9.180781e-08
4	1600.0	0.031623	0.000031	8.928059e-09	1.165280e-08	3.511049e-08	4.578624e-08

Неявная:

	N	N h	t	s(t=t_n1)	s(t=t_n2)	max|t=t_n1|	max|t=t_n2|
0	100.0	0.031623	0.000500	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00
1	200.0	0.031623	0.000250	6.899722e-08	9.009356e-08	2.753966e-07	3.591959e-07
2	400.0	0.031623	0.000125	3.484830e-08	4.548007e-08	1.391555e-07	1.814204e-07
3	800.0	0.031623	0.000063	1.751437e-08	2.285167e-08	6.995247e-08	9.117843e-08
4	1600.0	0.031623	0.000031	8.780106e-09	1.145418e-08	3.507128e-08	4.570790e-08

2. Определение порядков сходимости

Найти приближенное решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), a < x < b, 0 < t \le T, \\ u(a,t) = g_1(t), \dfrac{\partial u}{\partial t}(b,t) = g_2(t), 0 < t \le T, \\ u(x,0) = \varphi(x), a \le x \le b \end{cases}$$

используя явную и неявную разностные схемы. Изобразить графики приближенного решения от x при $t = 0, 2\tau, 4\tau, \ldots, T$.

$$a = -1, b = 1, k = 0.5, T = 0.4, \varphi(x) = 1 - x^2, g_1(t) = 0, g_2(t) = 0, f(x,t) = x$$

$$\tau \le 0.5\left(\frac{h^2}{k}\right)$$

Далее представлены четыре группы расчётов, каждая из которых содержит:

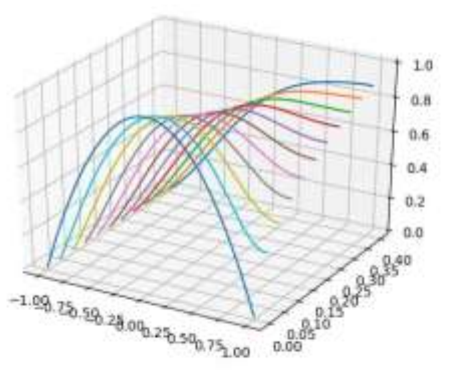
1) график численного решения;
2) таблица результатов для фиксированного h и графики зависимости ошибки численного решения от τ в точках $t1, t2$;
3) таблица результатов для фиксированного τ и графики зависимости ошибки численного решения от h в точках $t1, t2$;
4) таблица результатов для $\tau = \frac{h^2}{6}$ относительно h (для вычисления численной ошибки с помощью нормы вектора были взяты два численных решения с параметрами h и $h/2$ соответственно);
5) таблица результатов для $\tau = \frac{h^2}{6}$ относительно τ (для вычисления численной ошибки с помощью нормы вектора были взяты два решения с параметрами τ и $\tau/2$ соответственно);

Явная разностная схема, способ 1

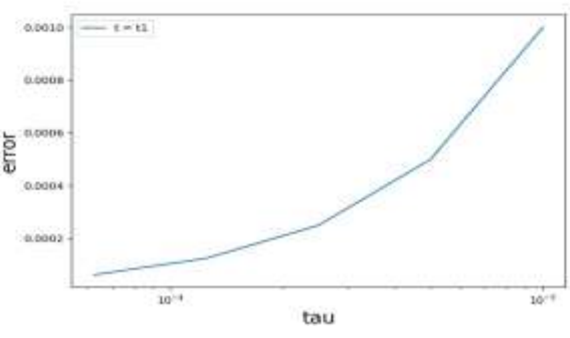
1)

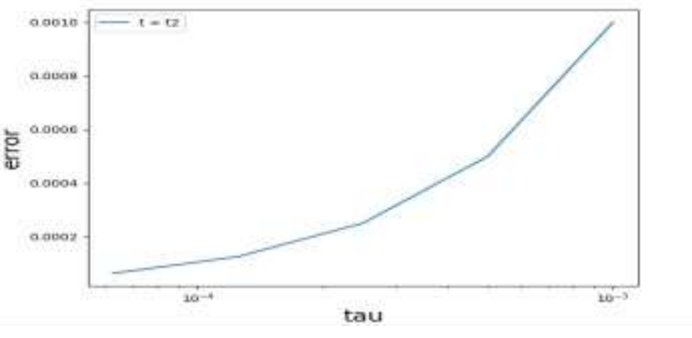
h is fixed

N	tau	s(t=t1)	s(t=t2)	max(t=t1)	max(t=t2)
10	0.001	0.00038700650685126486	0.0002749440881246961	0.0008120308516950114	0.0007365632771283437
10	0.0005	0.00015326469109307512	0.00013728740927946117	0.0004055657182453487	0.0003679477257432229
10	0.00025	7.657288446692509e-05	6.859767576791365e-05	0.0002026705094466503	0.00018389044979671976
10	0.000125	3.827159931139668e-05	3.428734671240627e-05	0.00010130717722789395	9.19243798306324e-05
10	6.25e-05	1.9132091686616116e-05	1.714080254870063e-05	5.0646570614709674e-05	4.595697982556768e-05



2)

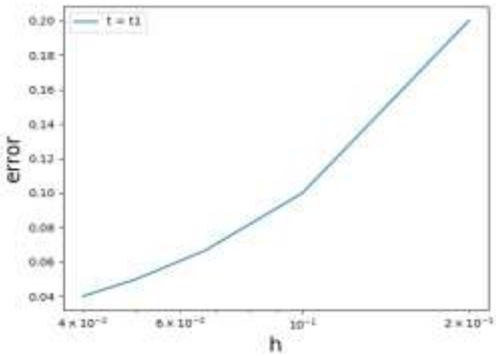


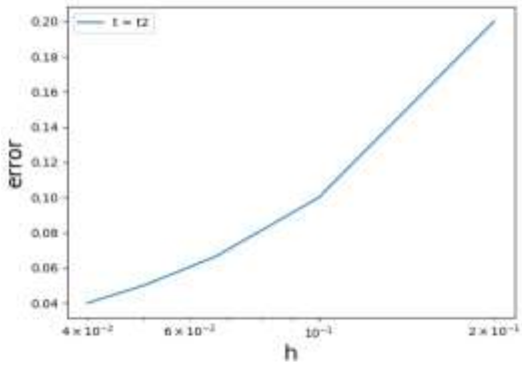


3)

tau is fixed

N	tau	s(t=t1)	s(t=t2)	max(t=t1)	max(t=t2)
10	0.0001	0.02232776496464563	0.02097215946436662	0.07033146450865713	0.0650963478242006
20	0.0001	0.010225010354726166	0.009849883934528701	0.03516167302944795	0.03301444784254148
30	0.0001	0.006560495210788867	0.006376444796348767	0.023411428833146397	0.02207708786449336
40	0.0001	0.00481570655051968	0.004702673335625906	0.01753961756439082	0.016575428323512886
50	0.0001	0.003799973377958915	0.0037216331614318967	0.014020321358624743	0.013266624760978618





4)

tau is h ^ 2 / 6 (relative to tau)

N	tau	s(t=t1)	s(t=t2)	max(t=t1)	max(t=t2)
10	0.006666666666666668	0.0021701298591937433	0.0019301758917704304	0.005691212793177414	0.0051194549669036915
20	0.001666666666666667	0.0005270243554810439	0.00047337825500420937	0.001458465799263009	0.0013199255824297706
30	0.0007407407407407407	0.00023143899922898372	0.0002085931207889649	0.000654093724658078	0.0005928583681026334
40	0.00041666666666666675	0.00013019291559511695	0.00011748383542544166	0.0003720539684579638	0.00033712262747775945
50	0.0002666666666666667	8.300340935828374e-05	7.507992551908135e-05	0.00023884845036536984	0.00021676674034787347

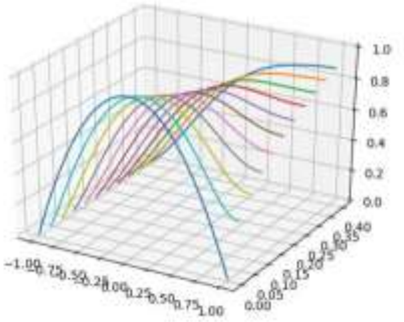
5)

tau is h ^ 2 / 6 (relative to h)

N	tau	s(t=t1)	s(t=t2)	max(t=t1)	max(t=t2)
10	0.006666666666666668	0.023078209185750855	0.02164923836770511	0.07300481294301142	0.06742479490286757
20	0.001666666666666667	0.010280875876994134	0.009904598247676004	0.03543418491868766	0.03325926561576287
30	0.0007407407407407407	0.006566455616072411	0.006382319304078477	0.023433092661378496	0.022096619059286504
40	0.00041666666666666675	0.004819980804589413	0.004707235577100525	0.017568567235161536	0.016601863639107095
50	0.0002666666666666667	0.003800813313374935	0.003723607718768515	0.014023614580895738	0.013279271175574148

Явная разностная схема, способ 2

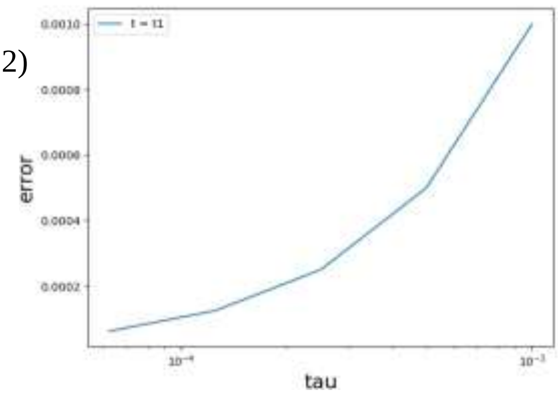
1)

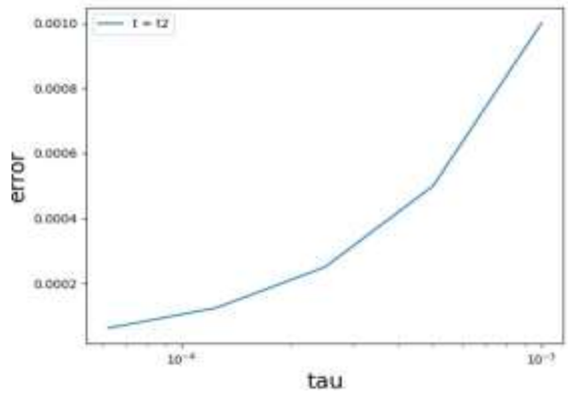


h is fixed

N	tau	s(t=t1)	s(t=t2)	max(t=t1)	max(t=t2)
10	0.001	0.0002947329398658626	0.00030189341994316	0.0009245152034947357	0.00092586322072713
10	0.0005	0.00014690113354109548	0.00015051390542008299	0.00046092186392809875	0.00046172235818403573
10	0.00025	7.333472675286786e-05	7.514916833320345e-05	0.00023012787310383587	0.0002305596449835301
10	0.000125	3.6638464775359906e-05	3.7547689920797634e-05	0.00011498078132893275	0.00011520453615554427
10	6.25e-05	1.8312015413506463e-05	1.876712788989101e-05	5.746961550323615e-05	5.758345856782254e-05

2)

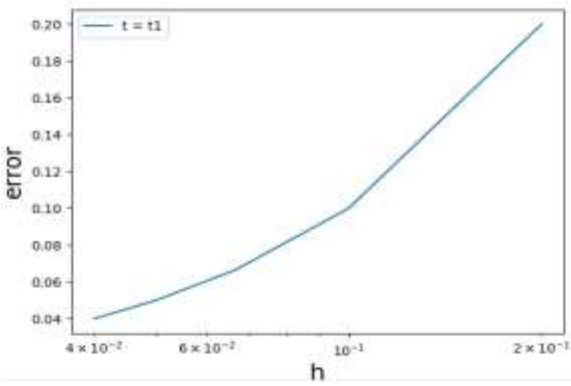


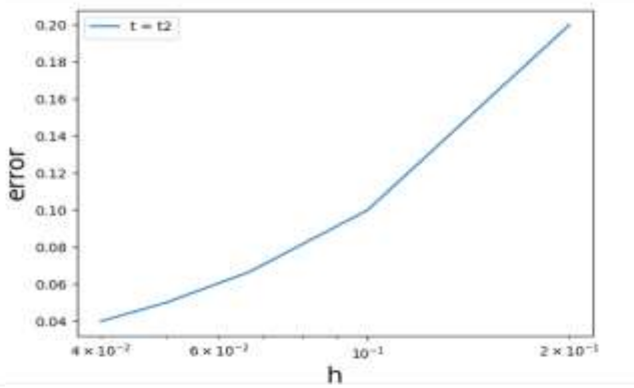


tau is fixed

3)

N	tau	s(t=t1)	s(t=t2)	max(t=t1)	max(t=t2)
10	0.0001	0.00887453228291472	0.008523117574677698	0.0271430868573293	0.025303948272109966
20	0.0001	0.002097787647787466	0.0020565315513540517	0.006727114975333848	0.006417545002232683
30	0.0001	0.0010363100694397174	0.0010238535561392283	0.00346755093363732	0.003331770401217571
40	0.0001	0.0007165611476286597	0.0007131432349764097	0.0024975588889454854	0.0024164541761874103
50	0.0001	0.0006033483871992516	0.0006044081625520095	0.002179873151161027	0.0021219024264740316





4)

tau is h ^ 2 / 6 (relative to tau)

N	tau	s(t=t1)	s(t=t2)	max(t=t1)	max(t=t2)
10	0.006666666666666668	0.0020242251575428895	0.0020659341044427182	0.006376098918170259	0.006361473880297325
20	0.001666666666666667	0.0009762778248665547	0.0010060946732337386	0.0035263482594363182	0.003527525783571961
30	0.0007407407407407407	0.0006486265921357033	0.0006673148615851272	0.0024484395350847787	0.0024400003951191573
40	0.00041666666666666675	0.00048478432576116743	0.000498423204548376	0.0018728888120412845	0.0018631023693642668
50	0.0002666666666666667	0.0003874731967448594	0.0003979502705141397	0.0015155161569860853	0.0015060516453005599

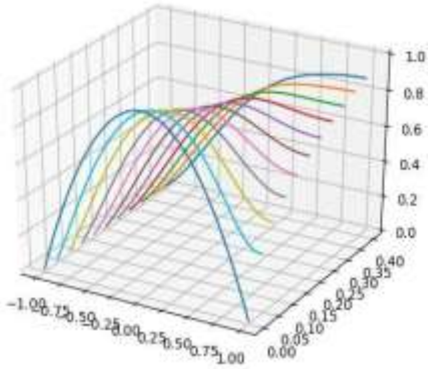
5)

tau is h ^ 2 / 6 (relative to h)

N	tau	s(t=t1)	s(t=t2)	max(t=t1)	max(t=t2)
10	0.006666666666666668	0.014070948429956057	0.013688259200533525	0.04421386883902362	0.04203002370136438
20	0.001666666666666667	0.004228668640233348	0.004206046198650432	0.014461557376987955	0.014041411891160371
30	0.0007407407407407407	0.0022799093090288846	0.0022840912418356676	0.008142363814722997	0.007947915658965465
40	0.00041666666666666675	0.0015158895380905418	0.001524949410752767	0.005567029938502777	0.0054478169961657
50	0.0002666666666666667	0.0011217215607691642	0.0011314249735777427	0.0041927393119389755	0.004111470834998854

Неявная разностная схема, способ 1

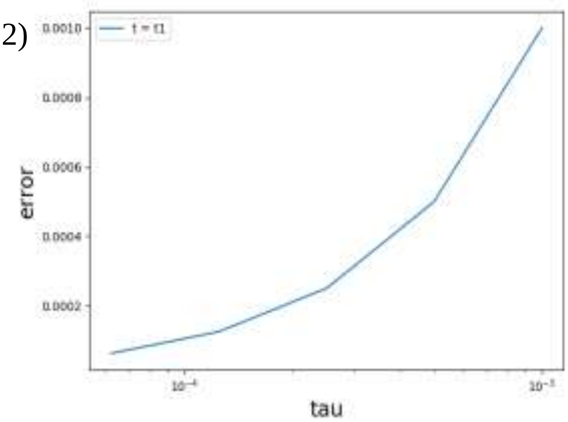
1)

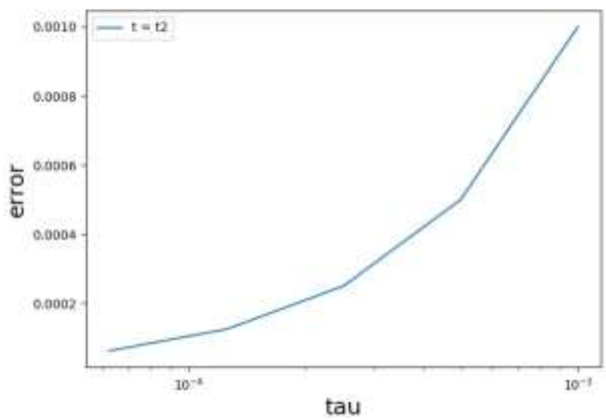


h is fixed

N	tau	s(t=t1)	s(t=t2)	max(t=t1)	max(t=t2)
10	0.001	0.0001280559789098916	0.00012765423476952434	0.00026130400959778477	0.0002537655771561731
10	0.0005	6.415032283811075e-05	6.392038645716996e-05	0.0001308730372051592	0.00012703736279795486
10	0.00025	3.210578041328567e-05	3.1983516570736594e-05	6.54916807145689e-05	6.3557204251663e-05
10	0.000125	1.6060549327230333e-05	1.5997589819966142e-05	3.2759618380007718e-05	3.178821744476146e-05
10	6.25e-05	8.032189991988663e-06	8.00025288173509e-06	1.6383252175011798e-05	1.589651069988651 2e-05

2)

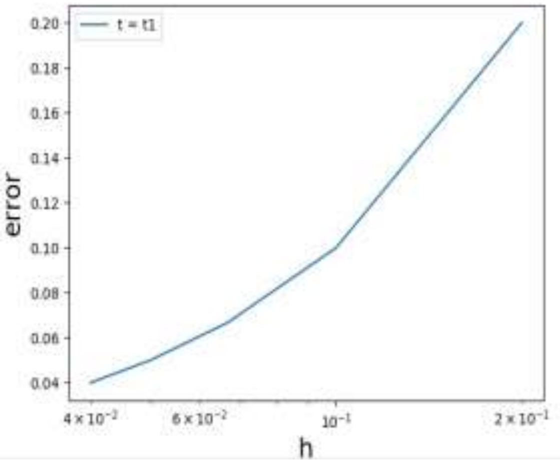


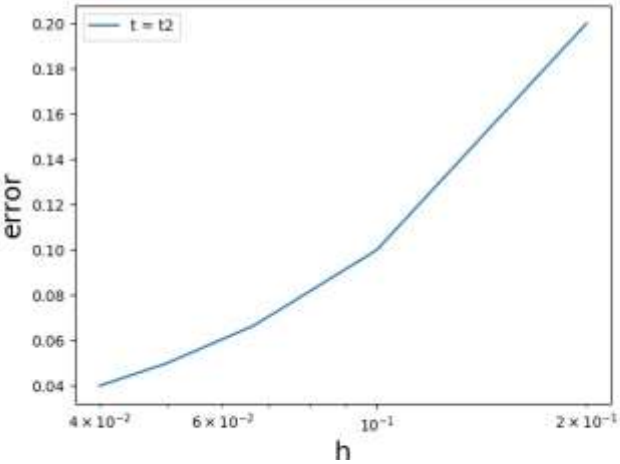


3)

tau is fixed

N	tau	s(t=t1)	s(t=t2)	max(t=t1)	max(t=t2)
10	0.0001	0.022325315371178166	0.020969478863979686	0.0703320911587616	0.06509558704443752
20	0.0001	0.010222993429886747	0.009847953273761183	0.03515984357230317	0.033012582125315215
30	0.0001	0.006559036811231439 5	0.00637506424342199	0.02340990114778796	0.02207561171136385
40	0.0001	0.004814573725847887	0.004701605321414782	0.017538362448533462	0.016574237467488206
50	0.0001	0.003799049167067539 6	0.003720763646918946	0.014019265558951277	0.013265632277976613





4)

tau is h ^ 2 / 6 (relative to tau)

N	tau	s(t=t1)	s(t=t2)	max(t=t1)	max(t=t2)
10	0.006666666666666668	0.0008345000894701012	0.000836484885800814	0.001718917244147411	0.001682221518156224
20	0.001666666666666667	0.0002199777194051042	0.00021504108162647505	0.0005338627530897533	0.0004996921768247731
30	0.0007407407407407407	9.586963902627748e-05	9.374897690356685e-05	0.0002450306112863343	0.00022856490167511012
40	0.00041666666666666675	5.318586186951822e-05	5.202805154615043e-05	0.00014018313617170097	0.00013052389158973998
50	0.0002666666666666667	3.3660053496053995e-05	3.296541558724429e-05	9.029225742007707e-05	8.411216732018278e-05

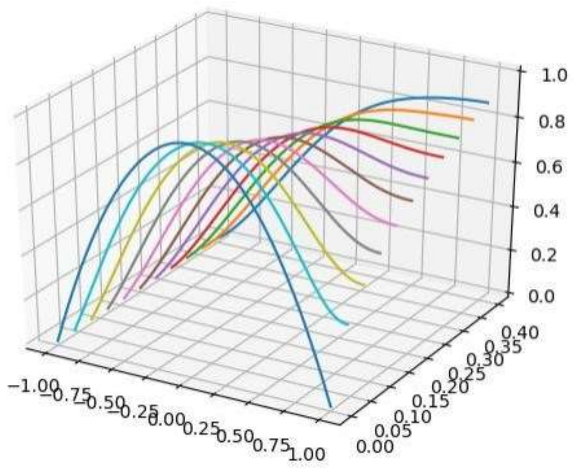
5)

tau is h ^ 2 / 6 (relative to h)

N	tau	s(t=t1)	s(t=t2)	max(t=t1)	max(t=t2)
10	0.006666666666666668	0.022928609267316418	0.021475977727513175	0.07311512058916003	0.06741141200791945
20	0.001666666666666667	0.010247089067182167	0.009872250594878137	0.035403862047910795	0.03322818070101152
30	0.0007407407407407407	0.006555643306785441	0.006372085096234603	0.023421770581085966	0.02208567757696578
40	0.00041666666666666675	0.004815252314335032	0.004702778549658225	0.01756332958671103	0.016596894249176763
50	0.0002666666666666667	0.003798348119614328	0.003721286735722125	0.014020798341724539	0.013276621786494358

Неявная разностная схема, способ 2

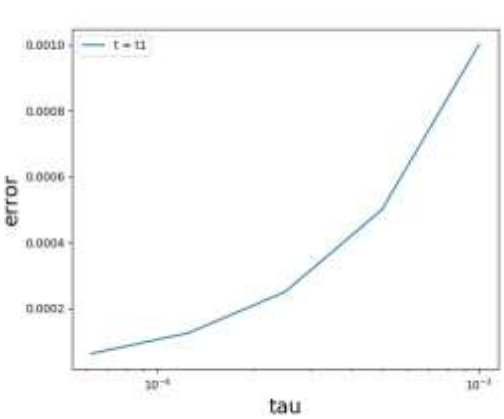
1)

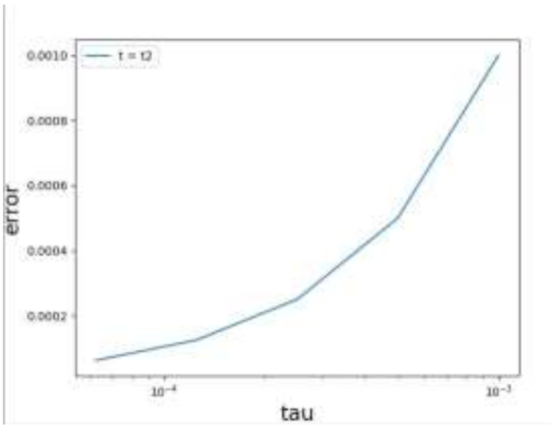


h is fixed

N	tau	s(t=t1)	s(t=t2)	max(t=t1)	max(t=t2)
10	0.001	0.00015331560718774177	0.00014464775998410942	0.00043038168661330145	0.00038295370978558285
10	0.0005	7.67471122461252e-05	7.2390484403382e-05	0.00021519640722988953	0.00019142587934906086
10	0.00025	3.839576555421421e-05	3.6211858658904046e-05	0.00010759825152378832	9.569952598320608e-05
10	0.000125	1.9203420339156723e-05	1.811007919864427e-05	5.379896833823672e-05	4.7846326059586275e-05
10	6.25e-05	9.603092689002386e-06	9.056076523775846e-06	2.689942351458141e-05	2.392229336223295e-05

2)

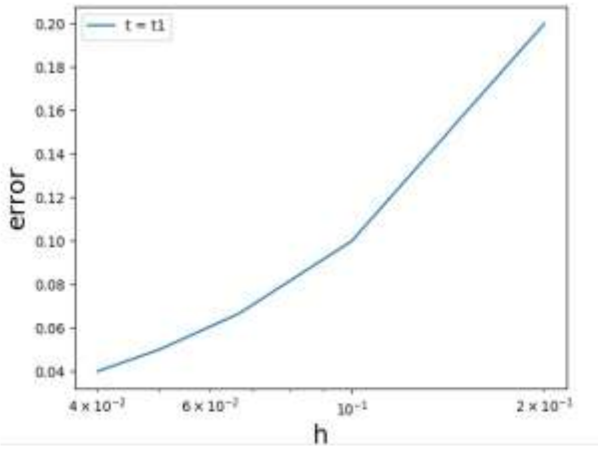


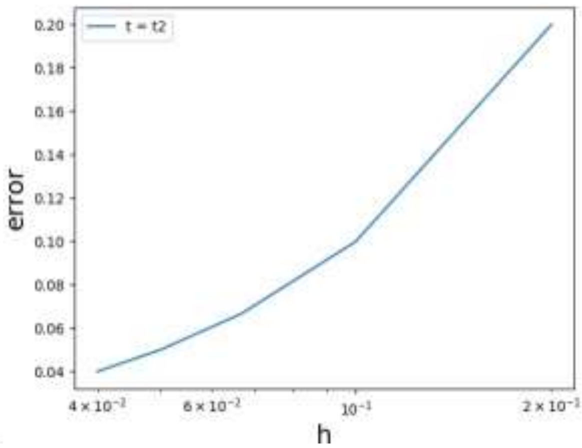


3)

tau is fixed

N	tau	s(t=t1)	s(t=t2)	max(t=t1)	max(t=t2)
10	0.0001	0.006793481662939857	0.006213294526644681	0.019883195798532094	0.017260181422194654
20	0.0001	0.0015134019230472388	0.001416508865694076	0.004390347684857576	0.0039017667024444647
30	0.0001	0.000654842122525536	0.0006157022447113154	0.001917996641113584	0.0017153694896152594
40	0.0001	0.00036379938089417004	0.0003427648712719128	0.0010764600971308047	0.0009664845814670864
50	0.0001	0.0002311534137320327	0.00021805087376582363	0.0006894991547048979	0.0006180750965107951





4)

tau is h ^ 2 / 6 (relative to tau)

N	tau	s(t=t1)	s(t=t2)	max(t=t1)	max(t=t2)
10	0.006666666666666668	0.0010318695672252717	0.0009694392684915095	0.002984915977470137 3	0.0026490457609487095
20	0.001666666666666667	0.00021862805814610074	0.00021258677045 88596	0.0006047716169270134	0.0005571494115418352
30	0.0007407407407407407	9.384893932294333e-05	9.1744903946925e-05	0.0002610114221947013	0.00024190922315769914
40	0.00041666666666666675	5.2017678770265675e-05	5.092915655581399e-05	0.00014605404087600464	0.0001354941014478639
50	0.0002666666666666667	3.296896566573253e-05	3.2326798699112085e-05	9.301933810551555e-05	8.645051398137316e-05

5)

tau is h ^ 2 / 6 (relative to h)

N	tau	s(t=t1)	s(t=t2)	max(t=t1)	max(t=t2)
10	0.006666666666666668	0.007201817639171631	0.006497730651950642	0.022001624993831348	0.018793528973881257
20	0.001666666666666667	0.0015261734990409538	0.0014261533478459392	0.004471601958399296	0.0039629869599971945
30	0.0007407407407407407	0.0006553065058645665	0.0006160447067800023	0.0019235317919299444	0.001718922958491853
40	0.00041666666666666675	0.00036440959394685866	0.0003432374643647867	0.0010880416271685147 3	0.0009695648495708 92
50	0.0002666666666666667	0.0002311879485976 7705	0.00021823180690469794	0.0006899653118268012	0.000619278672276069

Выводы

Таким образом, в ходе выполнения лабораторной работы, были рассмотрены два наиболее часто применяемых способа аппроксимации граничных условий второго рода на примере ГУ для одномерного нестационарного уравнения теплопроводности.

Также были разработаны соответствующие алгоритмы и программные реализации для решения поставленной задачи, найдено приближенное решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Исходя из полученных данных, можно судить о сходимостях методов по h и по τ как о близких к квадратичным.