

1 Esercizio 1

1. Dimostrazione per induzione della proprietà $P : \forall n \in \mathbb{N}. f(n) < 1$
Caso base, $P(0)$ è vera:

$$\begin{aligned} P(0) &\implies f(0) < 1 \\ &\implies \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

Passo induttivo, $P(n) \implies P(n+1)$:

$$f(n) < 1 \implies f(n+1) < 1$$

$$\begin{aligned} (f(n+1) < 1) &\equiv \{\text{Clausola induttiva di } f\} \\ (\frac{1}{2-f(n)} < 1) &\equiv \{\text{Calcolo}\} \end{aligned}$$

$$(\frac{1}{2-f(n)} < \frac{1}{2-1}) \equiv \{\text{Per osservazione(1) e ipotesi induttiva, } f(n) < 1 < 2\}$$

2. Dimostrazione per induzione della proprietà $P : \forall n \in \mathbb{N}. f(n) \geq \frac{1}{2}$
Caso base, $P(0)$ è vera:

$$\begin{aligned} P(0) &\implies f(0) \geq \frac{1}{2} \\ &\implies \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Passo induttivo, $P(n) \implies P(n+1)$:

$$f(n) < 1 \implies f(n+1) < 1$$

$$\begin{aligned} \left(f(n+1) \geq \frac{1}{2}\right) &\equiv \{\text{Clausola induttiva di } f\} \\ \left(\frac{1}{2-f(n)} \geq \frac{1}{2}\right) &\equiv \{\text{Calcolo}\} \\ \left(\frac{1}{2-f(n)} \geq \frac{1}{2-0}\right) &\equiv \{\text{Per osservazione(1) e ipotesi induttiva, } 0 < f(n) < 2\} \\ &() \end{aligned}$$

2 Esercizio 2

$$\begin{aligned} R &\in \text{Rel}(A, A) \\ R^{op} \cap Id_A &= (R \cap Id_A)^{op} & \{id - op\} \\ R^{op} \cap Id_A^{op} &= (R \cap Id_A)^{op} & \{\text{distributività di } .^{op} \text{ su } \cap\} \\ (R \cap Id_A)^{op} &= (R \cap Id_A)^{op} \end{aligned}$$

3 Esercizio 3

$$A = \{a, b\} \quad R = \{(a, b) \quad R; R = \emptyset\}$$

4 Esercizio 4

$$R \in \text{Rel}(A, A)$$

$$R^{op} \cap Id_A = (R \cap Id_A)^{op}$$

$$R^{op} \cap Id_A^{op} = (R \cap Id_A)^{op}$$

$$(R \cap Id_A)^{op} = (R \cap Id_A)^{op}$$

$$\{id - op\}$$

$$\{\text{distributività di } .^{op} \text{ su } \cap\}$$