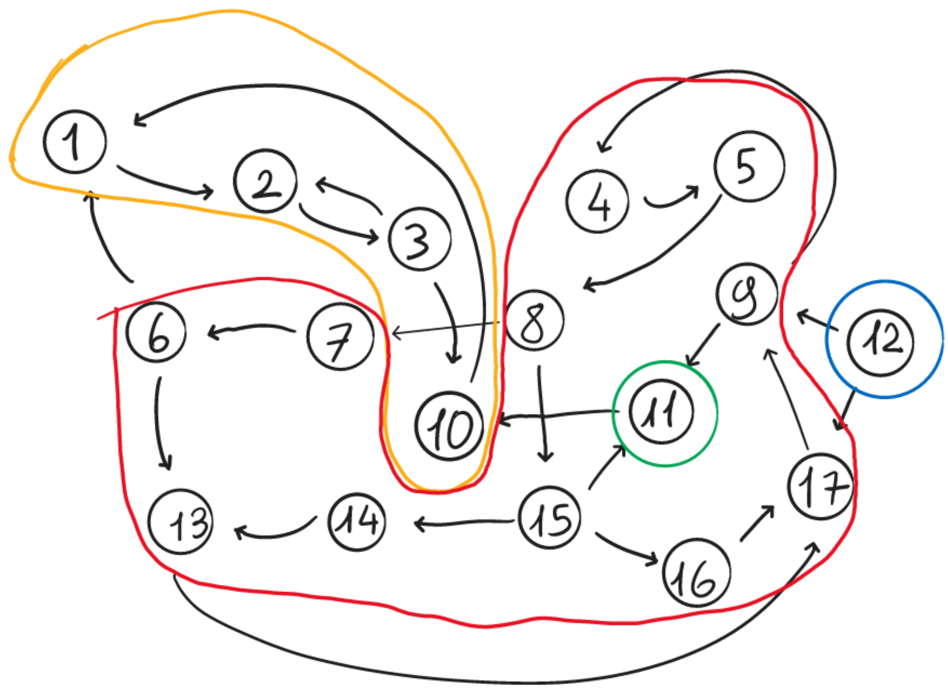
Esercitazione 2

Tiziano Marzocchella [655205]

A.A. 2022/2023

1 Esercizio 1



- SSC_1: $\{1, 2, 3, 10\}$
- SSC_2: $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 16, 17\}$
- SSC_3: $\{11\}$
- SSC_4: $\{12\}$

2 Esercizio 2

A) Dato un grafo $G = (V, E)$ che rappresenta le amicizie su Facebook, prendendo due persone in $V = FB$ p_1 e p_2 possiamo sempre individuare un *path* da p_1 a p_2 di lunghezza ≤ 6

B)

$$FB \times FB \subseteq \bigcup_{i=1}^{6} FBFriends^i$$

3 Esercizio 3

$$\begin{aligned}
& R \cap R^{op} \subseteq Id_A && \{\text{Definizione di } \subseteq\} \\
\iff & \forall (a,b) \in A \times A \text{ se } (a,b) \in R \cap R^{op} \text{ allora } (a,b) \in Id_A && \{\text{Definizione di } \cup\} \\
\iff & \forall (a,b) \in A \times A \text{ se } (a,b) \in R \wedge (a,b) \in R^{op} \text{ allora } (a,b) \in Id_A && \{\text{Definizione di } .^{op}\} \\
\iff & \forall (a,b) \in A \times A \text{ se } (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \text{ allora } (a,b) \in Id_A && \{\text{Definizione di } Id\} \\
\iff & \forall (a,b) \in A \times A \text{ se } (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \text{ allora } a = b && \{\text{Definizione di anti-simm.}\} \\
\iff & \text{R è anti-simmetrica}
\end{aligned}$$

4 Esercizio 4

L'enunciato è falso. Un controesempio è
$A = \{a, b, c\}$
$R = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$
$R^* = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (c, a), (a, c), (c, b), (b, a)\}$

5 Esercizio 5

a) Falso. Un controesempio è il grafo G non riflessivo.

$$G = (\{a, b, c\}, \{(a, b), (b, c)\})$$

b) False. Un controesempio è il grafo G non transitivo.

$$G = (\{a, b, c\}, \{(a, b), (b, c)\})$$

c) Vero. Per dimostrare questo fatto dobbiamo dimostrare che E^* sia riflessiva, transitiva e anti-simmetria, dalla definizione di ordinamento parziale. E^* è la chiusura riflessiva e transitiva di E, quindi per definizione è riflessiva e transitiva.
Manca quindi da dimostrare che E^* sia anti-simmetrica, quindi l'implicazione

$$(x, y), (y, x) \in E^* \implies x = y$$

Prese due coppie del tipo (x, y) e $(y, x) \in E^*$, per definizione di chiusura transitiva e riflessiva, se G è un DAG allora esiste un path da x a y, e viceversa. Quindi se x fosse diverso da y avremmo un ciclo da x a x e quindi G non potrebbe essere un DAG.

6 Esercizio 6

1. Vero. Ogni nodo sorgente per definizione avrà grado di ingresso uguale a 0. Quindi considerando il DAG $H = (V, E^{op})$ abbiamo che tutti gli archi connessi ai nodi sorgenti sono invertiti, di conseguenza i nodi sorgenti avranno grado di uscita e entrata invertiti, quindi diventano pozzi.

2. Vero. Stessa dimostrazione del punto 1, ma considerando i pozzi.

3. Falso. Un controesempio è

$$G = (\{a, b\}, \{(a, b)\}) \quad H = (\{a, b\}, \{(b, a)\})$$

4. Vero. Se posso seguire gli archi in E per arrivare da y a x in H, allora certamente posso seguire la stessa sequenza di archi invertiti in E^{op} per arrivare da x a y in G.
   Se esiste un walk da x a y in G ciò significa che posso seguire una sequenza di archi in E per arrivare da x a y in G, allora certamente posso seguire la stessa sequenza di archi invertiti in E^{op} per arrivare da y a x in H.

5. Vero. G è DAG se e solo se E^* è ordinamento parziale, quindi mi basta dimostrare che $(E^{op})^*$ sia ordinamento parziale.
   Per la legge di distributività di * su $.^{op}$

$$(E^{op})^* = (E^*)^{op}$$

   ma allora considerando che per ipotesi di DAG E^* è ordinamento parziale, devo dimostrare che la relazione opposta di E^* ordinamento parziale sia a sua volta ordinamento parziale.
   Considerando una relazione di ordinamento parziale, che quindi è riflessiva transitiva e anti-simmetrica, devo verificare che queste tre proprietà siano mantenute facendo la relazione opposta.

   - Riflessività: invertendo le coppie del tipo (a, a) ottengo esattamente le stesse coppie
   - Transitività: prese due coppie qualsiasi $(a, b), (b, c)$ per transitività ho anche la coppia (a, c). Ma invertendo tutte e tre le coppie, ottengo $(c, b), (b, a)e(c, a)$ quindi mantengo la transitività.
   - Anti-simmetria: se la relazione non contiene coppie del tipo $(a, b), (b, a)$ con $a \neq b$, allora invertendo tutti gli archi non potrò mai ottenere tali coppie.

   Verificate queste proprietà, possiamo dire che $(E^*)^{op}$ è ordinamento parziale, e che quindi $(E^{op})^*$ è ordinamento parziale.

7 Esercizio 7

1. $P(n) : mult2(n, m) = mult2(n) + mult(m)$
   Caso base: Per ogni $m \in \mathbb{N}$ vale

$$\begin{aligned}
P(0) &= mult2(0 + m) && \{\text{calcolo}\} \\
&= mult2(m) && \{\text{calcolo}\} \\
&= 0 + mult2(m) && \{\text{clausola base mult2}\} \\
&= mult2(0) + mult2(m)
\end{aligned}$$

Passo induttivo: Per ogni $m \in \mathbb{N}$ vale

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ vale che } P(n) \implies P(n+1)$$

$$\begin{array}{ll}
mult2(n+1+m) = & \{\text{calcolo}\} \\
= mult2(n+m+1) = & \{\text{clausola induttiva mult2}\} \\
= 2 + mult2(n+m) = & \{\text{ipotesi induttiva}\} \\
= 2 + mult2(n) + mult2(m) & \{\text{clausola induttiva mult2 al contrario}\} \\
= mult2(n+1) + mult2(m) &
\end{array}$$

2. $Q(n) : sum(n, f; mult2(n, m)) = mult2(sum(n, f))$
Caso base: Per ogni $f \in Fun(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ vale $Q(0)$

$$\begin{array}{ll}
sum(0, f; mult2) = mult2(sum(0, f)) & \{\text{clausola base di sommatoria}\} \\
(f; mult2)(0) = mult2(f(0)) &
\end{array}$$

Passo induttivo: Per ogni $f \in Fun(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ vale $Q(n) \implies Q(n+1)$

$$\begin{array}{ll}
sum(n+1, f; mult2) & \\
= mult2(sum(n+1, f)) & \{\text{clausola induttiva sommatoria}\} \\
= mult2(f(n+1) + sum(n, f)) & \{\text{P(n)}\} \\
= mult2(f(n+1)) + mutl2(sum(n, f)) & \{\text{ipotesi induttiva}\} \\
= mult2(f(n+1)) + sum(n, f; mult2) & \{\text{g(f(x)) = (f;g)(x)}\} \\
= (f; mult2)(n+1) + sum(n, f; mult2) & \{\text{clausola induttiva sommatoria}\} \\
= sum(n+1, f; mult2) &
\end{array}$$