

# APPUNTI DI CONTROLLO DEI SISTEMI MECCANICI

*Ad maiora*



# INDICE

<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
<b>1 Modellistica di sistemi meccanici</b>	<b>6</b>
1.1 Bilancio di Potenza . . . . .	6
1.1.1 Step di convenzione . . . . .	6
1.1.2 Motore Riduttore Carico . . . . .	6
1.1.3 Perdite di potenza in trasmissione . . . . .	7
1.2 Attrito . . . . .	8
1.2.1 Attrito Secco: . . . . .	9
1.2.2 Attrito Viscoso . . . . .	9
<b>2 Dimensionamento e Scelta dei Riduttori</b>	<b>10</b>
2.1 Step di Dimensionamento . . . . .	10
2.1.1 Normativa: . . . . .	10
2.1.2 Valutazioni su Riduttore . . . . .	12
2.2 Esercizio di Dimensionamento . . . . .	14
2.2.1 Step di risoluzione . . . . .	14
2.2.2 Tabella . . . . .	14
2.2.3 Valutazioni su riduttore . . . . .	15
2.3 Rapporto di Trasmissione Ottimo . . . . .	16
2.3.1 Valutazioni sulla Coppia . . . . .	16
2.3.2 Energia Elettrica Assorbita . . . . .	17
2.3.3 Velocità del Motore . . . . .	18
2.3.4 Limite alla Conoscenza dei Valori . . . . .	18
<b>3 Dimensionamento e Scelta di Viti a Ricircolo di Sfere</b>	<b>20</b>
3.1 Parametri di scelta . . . . .	20
3.1.1 Dinamica . . . . .	20
3.1.2 Velocità limite delle sfere . . . . .	21
3.1.3 Velocità critica della vite . . . . .	22
3.1.4 Vincoli su passo e diametro della vite . . . . .	23
3.1.5 Rigidezza nelle Viti . . . . .	23
3.1.6 Verifica Statica . . . . .	24
3.1.7 Gioco Assiale . . . . .	25
3.2 Passo ottimo . . . . .	25
<b>4 Pianificazione del Moto</b>	<b>27</b>
4.1 Formulazione delle principali leggi di Moto . . . . .	27
4.1.1 Parametrizzazione . . . . .	27
4.1.2 Scalatura delle leggi . . . . .	28
4.1.3 Rampa di posizione . . . . .	28
4.1.4 Trapezoidale in velocità . . . . .	28
4.1.5 Trapezoidale in Accelerazione . . . . .	29
4.1.6 Polinomiale di Terzo Grado . . . . .	30
4.1.7 Polinomiale di Quinto Grado . . . . .	30
4.1.8 Polinomiale di Settimo Grado . . . . .	30
4.1.9 Leggi Trigonometriche . . . . .	31
4.2 Composizione di Leggi di Moto . . . . .	31
4.2.1 Tratti a Velocità Costante Imposta . . . . .	32
4.2.2 Passaggio Esatto per N Punti Intermedi . . . . .	32
4.2.3 SPLine . . . . .	33

<b>5 Controllo del Moto per Trasmissione Rigida Senza Gioco</b>	<b>35</b>
5.1 Anello di Velocità . . . . .	35
5.1.1 Modello Semplificato 1 . . . . .	35
5.1.2 Modello semplificato 2 . . . . .	38
5.1.3 Feedforward . . . . .	42
5.2 Anello di Posizione . . . . .	43
5.2.1 Controllore P . . . . .	44
<b>6 Controllo del Moto per Trasmissione Elastica</b>	<b>46</b>
6.1 Modello Newtoniano . . . . .	46
6.1.1 Ricettanza, Mobilità, Inertanza . . . . .	46
6.2 Architetture di controllo . . . . .	48
6.2.1 Controllo Co-Locato vs non Co-Locato . . . . .	48
6.2.2 Trasmissibilità . . . . .	49
6.2.3 Attrito . . . . .	49
6.3 Controllo Co-Locato di Velocità . . . . .	50
6.3.1 Rapporto di inerzia nullo . . . . .	50
6.3.2 Rapporto di inerzia non nullo . . . . .	51
6.4 Anello di Posizione . . . . .	56
6.4.1 Controllo Co-Locato . . . . .	56
6.4.2 Controllo Non Co-Locato . . . . .	57
<b>7 Controllo del Moto in presenza di Gioco</b>	<b>59</b>
7.1 Problema del gioco . . . . .	59
7.1.1 Rapporto di inerzia . . . . .	59
7.1.2 Acceleration Feedback . . . . .	60
7.1.3 Load Observer . . . . .	60
7.1.4 Esercizio di controllo di un sistema con gioco . . . . .	61
7.2 Autotuning . . . . .	61
<b>A Controlli Automatici</b>	<b>62</b>
A.1 Trasformata di Laplace . . . . .	62
A.1.1 Proprietà . . . . .	62
A.1.2 Funzione di Trasferimento . . . . .	62
A.2 Diagrammi di Bode . . . . .	62
A.3 Sistemi del Secondo Ordine . . . . .	63
A.3.1 Risposta al gradino . . . . .	63
A.3.2 Effetto dello smorzamento . . . . .	63
A.4 Luogo delle radici . . . . .	64
A.4.1 Step . . . . .	64
A.4.2 Proprietà extra . . . . .	65
A.4.3 Esempio . . . . .	65
A.5 Criteri di Stabilità . . . . .	65
A.5.1 Criterio Stabilità BIBO . . . . .	65
A.5.2 Criterio di Stabilità dei Poli della funzione di trasferimento . . . . .	65
A.5.3 Criterio di Routh-Hurwitz . . . . .	66
A.5.4 Criterio di Bode . . . . .	66
A.5.5 Criterio di Nyquist . . . . .	66
<b>B Meccanica delle Vibrazioni</b>	<b>68</b>
B.1 Oscillatore Semplice Smorzato . . . . .	68
B.1.1 Soluzione omogenea (Risposta Libera) . . . . .	68
B.1.2 Soluzione particolare (Risposta Forzata) . . . . .	68
B.2 Sbilanciamento Statico . . . . .	69
B.3 Vibrazioni Torsionali . . . . .	69
B.4 Decremento Logaritmico . . . . .	70
B.5 Analisi Modale . . . . .	70
B.5.1 Criterio di Normalizzazione . . . . .	70
B.5.2 Oscillatore Modale . . . . .	71

# INTRODUZIONE

Nel seguente file sono presenti gli appunti del corso di Controllo di Sistemi Meccanici relativi all'anno accademico 2024-2025.

---

Volevo innanzitutto fare un ringraziamento speciale al mio editor per il prezioso aiuto a scovare refusi e errori nelle formule, e un ringraziamento a tutti i ragazzi del corso LM IMC per gli  $n \rightarrow \infty$  momenti di supporto e aiuto senza i quali avrei capito meno di metà di quanto qui esposto.

---

L'esame è composto da esercizi e teoria, tuttavia, a differenza di altri corsi, sono pressoché interscambiabili. La parte di esercizi si compone di diversi punti, molti dei quali domande tipiche, alcune sono invece sottigliezze o aspetti apparentemente di secondaria importanza. Conta molto giustificare le scelte effettuate. Le formule utili per gli esercizi che possono essere ricavate, per esempio quelle dei  $C_V, C_A, \tau_{opt}, \dots$  conviene impararle a memoria, il tempo a disposizione non è sufficiente per poterle ricavare. La parte di teoria dovrebbe essere più tranquilla, come verifica delle conoscenze in cui è fattibile aumentare il voto rispetto quanto preso nella parte di esercizi.

Ogni esame dura 3 ore, gli esercizi sono a punteggio, quindi cerca di fare rapporto punteggio su 32 per capire quanto tempo impiegare per ciascun esercizio. I primi punti sono i più facili (di solito) e valgono di più, non conviene lasciare un esercizio completamente in bianco.

Esame 1:

- Pianificazione del moto: Continuità fino al jerk; primo tratto da 0 a punto con velocità costante non nulla (polinomiale grado 7); terzo tratto con passaggio per punti;
- Controllo: Ricavare i parametri del sistema dato grafico; sintonizzazione del controllo;
- Dimensionamento: Vite a ricircolo di sfere su piano inclinato; moto con legge triangolare in velocità simmetrica; scelta del motore obbligata dal calcolo della pulsazione naturale flessionale della vite (occorreva sapere a memoria come ricavarla, incluso il modulo di Joung dell'acciaio, i coefficienti di rigidezza per appoggio incastro e incastro incastro, ecc)

Orale 1:

1. Domande su qualcosa sbagliato nello scritto
2. Motore collegato a vite a ricircolo di sfere con un carico traslante che vibra, come risolvere? (domanda per il 30)
3. Acceleration Feedback, Load observer
4. Variazione di fase al variare di  $\rho$
5. Luogo delle radici di controllo di posizione non collocato
6. Come cambia il luogo delle radici di controllo di posizione collocato al variare di  $K_{pv}$  e come cambia  $\omega_{bv}$

Esame 2:

- Pianificazione del moto: Legge tra punto e punto con velocità di partenza e arrivo non nulle, con continuità di accelerazione (polinomiale di grado 3), da disegnare con buona precisione;
- Controllo: Dato grafico di funzione di trasferimento di anello di corrente e Gvm, ricavare i parametri, sintesi controllore, valutazioni su filtri;

- Dimensionamento: Motore, riduttore, ruote coniche, carico; legge di moto trapezoidale in velocità non simmetrica con periodo di sosta; dinamica; dimensionamento riduttore; calcolo dell'errore statico di posizionamento del carico noti i vari giochi e la coppia statica; ricavare antirisonanza e risonanza del sistema.

C'è una regola per cui dalla prima volta in cui provi l'esame hai l'anno accademico corrente per provare l'esame con punti fino a 32, oltre l'anno accademico il conteggio punti arriva a 30. Non portare a casa la bruttacopia, anche se è solo un foglio bianco.

I miei migliori auguri di buon esame.

# 1 MODELLISTICA DI SISTEMI MECCANICI

In seguito saranno esposti una serie di modelli utili per diversi aspetti fisici presenti nei sistemi meccanici.

## 1.1 Bilancio di Potenza

Per studiare i sistemi meccanici viene utilizzato il bilancio di potenza, per cui vi sia variazione di energia cinetica.

$$\sum_i W_i = \frac{dE_c}{dt}$$

La somma delle potenze (erogate e assorbite) dalle forze esterne è uguale alla derivata nel tempo dell'energia cinetica dell'intero sistema.

**Potenza:** La potenza nel caso di forza e velocità applicate in un punto di moto cartesiano è:  $W_i = \pm F_i \cdot v_{i\parallel}$ , dove il segno è scelto in base alla concordanza o discordanza dei segni delle convezioni<sup>1</sup> dei segni di forza e velocità tangente; Nel caso di coppia e velocità angolari applicate rispetto un asse di rotazione è:  $W_i = \pm C_i \cdot \dot{\theta}_i$ , dove anche in questo caso il segno viene scelto in base alla concordanza o discordanza dei segni delle convenzioni di coppia e velocità angolare.

**Energia Cinetica:** L'energia cinetica nella formula è quella totale del sistema che è pari alla sommatoria delle singole energie cinetiche.

### 1.1.1 Step di convenzione

In seguito sono esposti i passi tipici da effettuare quando si vuole scegliere una convenzione in un sistema:

1. Convenzione di positività di  $C_m$
2. Convenzione di velocità degli alberi, con  $\dot{\theta}_m$  concorde a  $C_m$
3. Di conseguenza al punto 2 determinare  $\dot{\theta}_c$  in base al riduttore e in particolare se sia invertente o meno
4. Introduzione del rapporto di trasmissione  $\tau_r = \frac{\dot{\theta}_c}{\dot{\theta}_m}$ , per cui, considerando il rapporto costante vale anche  $\tau_r = \frac{\ddot{\theta}_c}{\ddot{\theta}_m}$
5. Infine scelgo la convenzione per la coppia di carico  $C_c$ , che tendenzialmente sarà opposta alla convenzione di velocità  $\dot{\theta}_c$ .

### 1.1.2 Motore Riduttore Carico

Esempio classico di sistema meccatronico, in prima approssimazione valutato con idealità di riduttore (senza gioco, senza perdite di potenza, momento di inerzia nullo) e momento di inerzia del carico costante.



Figura 1.1: Schema ideale

- $J_c$ : momento di inerzia del carico rispetto il suo asse di rotazione<sup>2</sup>
- $J_m$ : momento di inerzia del motore rispetto il suo asse di rotazione
- $C_m$ : coppia erogata dal motore, considerata come coppia esterna perché "applicata" dallo statore al rotore
- $C_c$ : coppia applicata al carico.

<sup>1</sup>Quando si parla di convenzioni si intende una scelta arbitraria di segni che potrebbe o meno rappresentare il verso fisico della grandezza rappresentata.

<sup>2</sup>NB: L'asse attorno cui viene calcolato il momento di inerzia va sempre specificato!!

**Bilancio potenza:** La potenza delle forze esterne del sistema è data dalla potenza erogata dal motore e quella assorbita dal carico:  $\sum_i W_i = C_m \dot{\theta}_m - C_c \dot{\theta}_c = (C_m - C_c \tau_r) \dot{\theta}_m$ . L'energia cinetica è data dalla somma delle singole energie cinetiche, quindi contributo di inerzia del motore e del carico:  $E_c = \frac{1}{2} (J_m + J_c \tau_r^2) \dot{\theta}_m^2 = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}_m^2$ . La derivata della energia cinetica diventa quindi  $\frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2} J_{eq} \frac{d\dot{\theta}_m^2}{dt} = J_{eq} \dot{\theta}_m \ddot{\theta}_m$ . Considerando quindi che solitamente del carico sono note o ricavabili le specifiche, determino la coppia erogata dal motore, a seguito di semplificazioni:

$$C_m = (J_m + J_c \tau_r^2) \ddot{\theta}_m + C_c \tau_r$$

**Trasmissioni in serie:** Nel caso vi fossero nel sistema trasmissioni in serie quanto detto sopra sarebbe ancora valido, la differenza sostanziale si vedrebbe nel momento di inerzia equivalente. Nel caso di un riduttore avente in serie un sistema vite madrevite, su cui è posato un carico da traslare, si otterebbe  $J_{eq} = J_m + J_v \tau_r^2 + M \tau_r^2 \tau_v^2$ , in questo caso inoltre il carico non sarebbe una coppia, bensì una forza:  $C_m = J_{eq} \ddot{\theta}_m + F_r \tau_r \tau_v + C_a \tau_r$ .

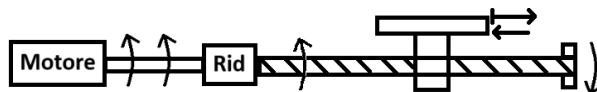


Figura 1.2: Schema trasmisioni in serie

### 1.1.3 Perdite di potenza in trasmissione

Una trasmissione reale avrà una certa perdita di potenza legata a fenomeni di attrito, che possono essere raggruppati in un unico contributo:  $\sum_i W_i - W_p = \frac{dE_c}{dt}$ , con  $W_p > 0$ . Inoltre è possibile definire un rendimento:  $\eta = \frac{|W_{out}|}{W_{in}}$ .

**Fattori critici per rendimento:** I fattori che influenzano maggiormente il rendimento sono:

- Tipo di trasmissione, quindi il tipo di geometria e di strisciamento superficiale
- Stato delle superfici: tipo di materiale, rugosità, lubrificazione, trattamenti superficiali, pulizia
- Condizioni operative come temperatura, coppia/forza/velocità trasmessa

Nonostante ciò a catalogo è tipico trovare un unico valore, tendenzialmente la condizione migliore, nominale.

**Verso del flusso di potenza:** Il riduttore ha un verso preferenziale per cui il rendimento è migliore, ed è cosa comune nei casi in cui vi sia una differenza di velocità. Per rotismi epicloidalì il rendimento migliore è quello da riduttore; per viti madreviti, quello migliore è da rotazione a traslazione. Esiste una relazione empirica tra rendimento preferenziale e non:

$$\eta_{\text{non preferenziale}} = \begin{cases} 2 - \frac{1}{\eta_{\text{pref}}} & \text{se } \eta_{\text{pref}} \geq 0.5 \\ 0 & \text{se } \eta_{\text{pref}} \leq 0.5 \end{cases}$$

**Irreversibilità:** Rendimento nullo significa irreversibilità del moto, si parla di irreversibilità quando la potenza trasmessa ha un'unica direzione possibile. Questo può essere un fenomeno voluto, es crick della macchina o vite di tenuta in una struttura, o meno.

**Motore Riduttore Carico, Moto Diretto:** A differenza di quanto visto in precedenza, in questo caso la potenza che entra nel riduttore e quella che esce non è la stessa, una parte della potenza in ingresso  $W_{in}$  sarà dissipata per effetti di attrito unificati all'interno di  $W_p$ . Noto che  $W_p = (1 - \eta_r) W_{in}$  (valida sia per moto diretto sia per moto retrogrado), considerando la potenza sia erogata dal motore il riduttore vede in ingresso una potenza  $W_{in} = C_m \dot{\theta}_m - J_m \dot{\theta}_m \ddot{\theta}_m$ , mentre la potenza di uscita dal riduttore, quindi quella che arriva al carico, è data da  $W_{out} = W_{in} - W_p$ , infine, a seguito di semplici passaggi, a partire dal bilancio di potenza:  $C_m \dot{\theta}_m - J_m \dot{\theta}_m \ddot{\theta}_m - W_p^{dir} - J_c \dot{\theta}_c \ddot{\theta}_c - C_c \dot{\theta}_c = 0$ , si ottiene la seguente espressione della coppia del motore:

$$C_m = \left( J_m + J_c \frac{\tau_r^2}{\eta_r^{dir}} \right) \ddot{\theta}_m + C_c \frac{\tau_r}{\eta_r^{dir}}$$

In cui è chiaro come il rendimento vada a influenzare unicamente i termini a valle del riduttore, e come, essendo  $0 < \eta_r^{dir} < 1$ , vada ad aumentare la coppia che il motore deve erogare, come atteso.

**Motore Riduttore Carico, Moto Retrogrado:** In modo simile al caso di moto diretto, nel moto retrogrado la potenza in ingresso al riduttore è data da  $W_{in} = -C_c\dot{\theta}_c - J_c\dot{\theta}_c\ddot{\theta}_c$ , mentre la potenza di uscita è  $W_{out} = W_{in} - W_p^{retr}$ , a partire dal bilancio di potenze, a seguito di manipolazioni, si ottiene la seguente espressione della coppia del motore:

$$C_m = (J_m + J_c\tau_r^2\eta_r^{retr})\ddot{\theta}_m + C_c\tau_r\eta_r^{retr}$$

In cui è evidente che l'attrito vada ad aiutare il motore a frenare il carico, come atteso.

**Caso Moto Retrogrado, Riduttore Irreversibile:** Nel caso in cui  $\eta_r^{retr} = 0$ , l'attrito del riduttore va ad annullare il carico visto dal motore (a meno dell'inerzia del rotore stesso), si parla quindi di carico autofrenante.



Figura 1.3: Schemi di moto diretto (sx) e retrogrado (dx)

**Moto Diretto vs Retrogrado:** Per distinguere tra i due casi occorre valutare il carico, in particolare determinare se assorbe o eroga potenza:

$$\begin{cases} -C_c\dot{\theta}_c - J_c\dot{\theta}_c\ddot{\theta}_c < 0 \text{ il carico assorbe potenza: moto diretto} \\ -C_c\dot{\theta}_c - J_c\dot{\theta}_c\ddot{\theta}_c > 0 \text{ il carico eroga potenza: moto retrogrado} \end{cases}$$

**Rendimento generalizzato:** Per semplificare l'utilizzo del rendimento negli esercizi, in cui è facile avere situazioni di continuo scambio tra modo diretto e retrogrado, è opportuno introdurre un rendimento generalizzato, che vada quindi a rappresentare i possibili casi con scrittura più compatta, evitando quindi di scrivere le stesse espressioni due volte. Viene quindi definito:

$$\eta_r = \begin{cases} \eta_r^d \text{ se e solo se moto diretto } -C_c\dot{\theta}_c - J_c\dot{\theta}_c\ddot{\theta}_c < 0 \\ \frac{1}{\eta_r^r} \text{ se moto retrogrado o condizioni statiche } -C_c\dot{\theta}_c - J_c\dot{\theta}_c\ddot{\theta}_c \geq 0 \end{cases}$$

Questo andrebbe utilizzato all'interno della espressione della coppia del motore come fosse rendimento di moto diretto, sostituendo l'opportuno valore in base al caso:

$$C_m = \left( J_m + J_c \frac{\tau_r^2}{\eta_r} \right) \ddot{\theta}_m + C_c \frac{\tau_r}{\eta_r}$$

**Rendimento per trasmissioni serie:** Riprendendo il caso visto in sezione 1.1.2 pagina 7 di riduttore con in serie un sistema vite madrevite, facendo considerazioni simili al caso a singolo stadio, considerando un bilancio di potenze in cui vengano introdotti gli effetti delle perdite per ciascuno dei riduttori, a seguito di semplici di manipolazioni si ottiene l'espressione:

$$C_m = \left( J_m + J_v \frac{\tau_r^2}{\eta_r^d} + M \frac{\tau_r^2 \tau_v^2}{\eta_r^d \eta_{v-mv}^d} \right) \ddot{\theta}_m + F_r \frac{\tau_r \tau_v}{\eta_r^d \eta_{v-mv}^d} + C_a \frac{\tau_r}{\eta_r^d}$$

Questa soluzione è compatibile con quanto atteso, quindi che la potenza richiesta al motore aumenti con l'aumentare dell'attrito nel riduttore in condizioni di moto diretto. In modo del tutto simile si ottiene la coppia del motore in condizione di moto retrogrado:

$$C_m = \left( J_m + J_v \tau_r^2 \eta_r^d + M \tau_r^2 \tau_v^2 \eta_r^d \eta_{v-mv}^d \right) \ddot{\theta}_m + F_r \tau_r \tau_v \eta_r^d \eta_{v-mv}^d + C_a \tau_r \eta_r^d$$

## 1.2 Attrito

L'attrito è sempre resistente e si oppone al moto. Un classico modello detto Coulombiano di attrito lo divide in 3 termini:

1. Secco o Coulombiano: Legato ad attrito tra superfici rugose caratterizzate da "micro-incastri". Ha due possibili regimi:

- (a) Statico, in assenza di moto relativo
  - (b) Dinamico, in presenza di moto relativo
2. Viscoso
3. Aerodinamico: Proporzionale a velocità al quadrato e a area della sezione, solitamente in impianti industriali è trascurabile, anche se ci sono applicazioni in cui va tenuto da conto.

### 1.2.1 Attrito Secco:

Una forza normale alla superficie permette di mantenere il contatto e genera una forza parallela alla velocità e verso opposto, seguendo questa convenzione è definita la forza di attrito dinamico coulombiano:  $F_{Coul}^d = N f_{Coul}^d \text{sign}(v)$ . Il coefficiente di attrito dinamico dipende da: materiale; stato superficiale (rugosità, pulizia, lubrificazione). Il coefficiente di attrito dinamico NON dipende da: area di contatto; velocità relativa<sup>3</sup>.

**Attrito Statico Coulombiano:** A partire dalle condizioni statiche serve una forza maggiore per rompere il legame tra le superfici, quindi è corretto aspettarsi  $f_{Coul}^s > f_{Coul}^d$ . In questo caso la forza si "adatta" alla forza da vincere, ed è caratterizzata da un termine massimo, l'espressione rappresentativa è una disequazione:  $|F_{Coul}| \leq f_{Coul}^s N$ . La forza esterna che tende a spostare il corpo, tenuto fermo dall'attrito, inizierà a muoversi non appena  $F_{ext} > |F_{Coul}^s|$ , momento oltre il quale l'attrito passerà dall'essere statico all'essere dinamico.

**Catalogo:** Nel caso di guide a strisciamento ci si può aspettare un attrito superiore a quello necessario per guide a sfere, perché tendenzialmente l'attrito legato al rotolamento è inferiore a quello di strisciamento. Tuttavia costruttivamente le sfere devono essere mantenute in posizione e al sicuro dalle polveri e per fare ciò è necessario utilizzare delle guarnizioni di tenuta, che aggiungono quindi una forza resistenze che a seconda del caso specifico potrebbe essere deleteria. Nel caso di attuatori lineari a cinghia l'attrito a vuoto è legato soprattutto al precarico della cinghia stessa, questo porterà ad avere una coppia di no load derivata da un modello di attrito Coulombiano. Anche in questo caso l'utilizzo di sfere permette di ridurre l'attrito rispetto lo strisciamento. In qualunque sia l'applicazione, tendenzialmente, aumentare la taglia<sup>4</sup> comporta un aumento di attrito.

### 1.2.2 Attrito Viscoso

L'attrito viscoso è legato alla viscosità del lubrificante, quindi alla resistenza di taglio, ossia allo scorrimento del fluido, ed è legato a una differenza di velocità, prendendo una convenzione con attrito viscoso di verso opposto alla velocità, si può scrivere come:  $F_v = f_v \dot{x}$ . A basse velocità l'attrito viscoso è trascurabile, diventa molto rilevante ad alte velocità; il discriminante per determinare quando sia trascurabile o meno dipende dal coefficiente di attrito viscoso e dall'applicazione.

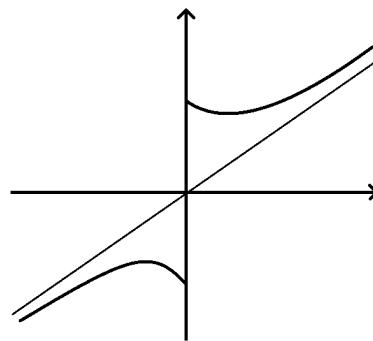


Figura 1.4: Somma degli effetti di attrito

<sup>3</sup>Ci sarà una minima dipendenza, tuttavia sarà relativamente ridotta rispetto altri fenomeni.

<sup>4</sup>La taglia è la coppia/forza erogabile.

## 2 DIMENSIONAMENTO E SCELTA DEI RIDUTTORI

Con dimensionamento di riduttori si intende la valutazione di aspetti strutturali. La scelta dei riduttori invece coinvolge valutazioni differenti quali dinamiche, di controllo e come si relazionano.

**Come mai i riduttori?** La scelta di utilizzare riduttori è legata a diversi aspetti:

1. Adattamento del campo operativo di motore e carico. Solitamente i motori hanno coppie minori di quelle che sono richieste al carico, mentre possono fornire velocità molto superiori quelle di operazione, in questi casi il riduttore permette di ridurre la velocità e di ottenere una maggior coppia.
2. Ottimizzazione del sistema. Un riduttore opportunamente scelto permette di ridurre costi, ingombro, consumo energetico e facilitare il controllo
3. Facilita il controllo. Un riduttore ben scelto permette di linearizzare la dinamica del sistema. Per esempio avendo un carico di momento di inerzia variabile con la posizione, l'uso del riduttore permette di vedere dal motore una  $J_{eq} = J_m + J_c \tau_r^2 \simeq J_m$ , quindi un momento di inerzia minore e circa costante.

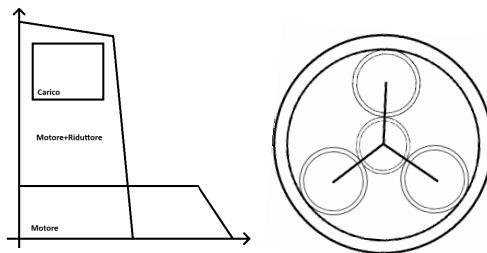


Figura 2.1: Campo operativo (sx), Schema riduttore epicicloidale (dx)

**Riduttori Epicicloidali:** Il riduttore più impiegato nell'industria è quello epicicloidale, questa tipologia è caratterizzata da: buona riduzione; compattezza in termini di rapporto coppia volume; buona distribuzione delle forze; non è invertente; alberi di ingresso e uscita sono coassiali (permettendo una maggior facilità di layout).

**Parametri Progettuali:** I parametri di progetto di un riduttore noti sono quelli del carico ( $J_c, C_c$ ) e legge oraria ( $\theta_c(t), \dot{\theta}_c(t), \ddot{\theta}_c(t)$ ); quelli ignoti sono quelli di motore ( $J_m, C_m$ ) e riduttore ( $\tau_r, J_r, \eta_r$ ). Perciò nel caso di motore riduttore, carico una formulazione più utile, e solitamente usata per determinare la coppia del motore è:

$$C_m = (J_m + J_r) \frac{\ddot{\theta}_c}{\tau_r} + (C_c + J_c \dot{\theta}_c) \frac{\tau_r}{\eta_r}$$

Il momento di inerzia del riduttore è unione di diversi contributi, ed è fondamentale capire quale sia l'albero a cui è riportato (di solito quello veloce).

### 2.1 Step di Dimensionamento

Per il dimensionamento del riduttore la prima cosa da fare è determinare la taglia, cioè la coppia erogabile  $C_r$ . Dipende da considerazioni "strutturali" di tipo normativo<sup>1</sup> e valutazioni di tipo dinamico (vibrazioni).

#### 2.1.1 Normativa:

Il dimensionamento è basato su coppia e velocità, verificando in base al duty cycle la potenza trasmessa dal riduttore per un dato ciclo di riferimento ripetitivo. In particolare in base al duty cycle vi sono due categorie:

- Regime Intermittente per  $< 60\%$ , per cui occorrono valutazioni su coppia e velocità massime;
- Regime Continuativo per  $> 60\%$ , per cui occorrono valutazioni su coppia e velocità massime e medie.

In particolare le valutazioni per coppie e velocità massime andranno effettuate per punti di maggior criticità, ossia la coppia all'albero lento, la velocità all'albero veloce.

<sup>1</sup>Non nel senso di legalmente vincolante, più come modo tipico di fare il dimensionamento.

### Coppia albero lento

All'albero lento ho la coppia maggiore, quindi è il punto critico. Definisco  $T_2$  coppia (torque) dell'albero lento (2) la risultante delle coppie applicate sull'albero lento (es coppia e coppia dell'inerzia di carico). Di  $T_2$  è tutto noto, perciò si può procedere subito a questo conto, il cui valore risultante va confrontato con il valore di massima coppia erogata all'albero lento:

$$1.2 \cdot \max(|T_2(t)|) \cdot f_s < T_{2,B}$$

dove:

- 1.2 è un fattore di sicurezza legato alle incertezze di conoscenza dei parametri, valori tipici possono essere [20% ÷ 35%]
- $f_s$  è un fattore di servizio, valore a catalogo che viene interpretato in modo diverso da ciascun costruttore
- $T_{2,B}$  è la coppia massima, è un valore a catalogo e caratterizza la taglia del riduttore. La "B" sta per Bound, in italiano Limite.

**Coppia Media:** Per determinare la coppia media si fa una media cubica ponderata lo spazio di moto che rappresenti la fatica a ciclo variabile, gli effetti termici, calcolata come:

$$T_{2,media} = \sqrt[3]{\frac{\int_0^{T_{ciclo}} |T_2^3(t)\dot{\theta}_c(t)| dt}{\int_0^{T_{ciclo}} |\dot{\theta}_c(t)| dt}}$$

Anche per questa si va ad applicare un fattore di sicurezza rispetto il punto di funzionamento ottimale  $1.2 \cdot T_{2,media} < T_{2,nom}$ .

**Catalogo:** Da catalogo COBRA è chiaro come indipendentemente dal numero di stadi la coppia rimanga simile, ed è proprio perché è quella che definisce la taglia. Inoltre la maggior parte dei parametri sono simili all'interno di un'unica taglia. Per forti riduzioni (1/10 e 1/100) si nota come le coppie  $T_{2,B}$  e  $T_{2,N}$  siano differenti tra loro, questo perché la geometria delle ruote saranno molto diverse portando ad avere un ingranamento qualitativamente peggiore.

**Coppia di Arresto:** La coppia di arresto  $T_{2,not}$  è la massima coppia che il riduttore può sopportare in caso di arresto di emergenza (circa 100 volte in vita)<sup>2</sup>.

### Velocità all'albero veloce

Il limite di velocità massima è legato a problemi di sbilanciamento (vedi B.2), ruotando crea una forzante armonica pari alla velocità di rotazione e cresce con velocità e sbilanciamento. Deve valere  $\max(\dot{\theta}_m(t)) < n_{1,max}$  massima velocità ammissibile, cui aggiungere un fattore di sicurezza. Diventa problematica non appena  $\dot{\theta} \simeq \omega_{N,flessionale}$ . Un aspetto da non sottovalutare è la presenza di eventuali sovraelongazioni nella forma d'onda di velocità legate a controllo reale. Aumentare la taglia aumenta la massa e la dimensione, perciò aumenta lo sbilanciamento e quindi cala  $n_{1,max}$ .

**Velocità media all'albero veloce:** La velocità media deve essere limitata per limitare fenomeni termici e  $T_{2,media}$ . La velocità media è data dallo spazio totale percorso (in assoluto) su tempo ciclo totale, questo permette di considerare i momenti di arresto marcia in cui il riduttore va a raffreddarsi. La velocità media dev'essere inferiore al valore a catalogo  $v_{media} < n_{1,N}$ . Anche in questo caso si utilizza un coefficiente di sicurezza del 20%. Alcuni costruttori tuttavia usano convenzioni differenti per determinare la velocità media, prestare attenzione alla definizione a catalogo. Aumentare la taglia aumenta la massa, quindi l'attrito, ossia il calore generato perciò cala anche la  $n_{1,N}$ , ma in modo poco marcato.

### Rapporto di riduzione

Le velocità sono critiche all'albero veloce, tuttavia  $\dot{\theta}_m = \frac{\dot{\theta}_c}{\tau_r}$  di cui a noi è nota solo la velocità del carico. Questo è coerente con il tipo di dimensionamento voluto, perché lo studio di  $\tau_r$  si associa ad ulteriori ragionamenti, il vincolo legato a quell'espressione sarà usato per fare una ottimizzazione vincolata.

**Velocità massima all'albero veloce:**  $n_{1,max} > \max(\dot{\theta}_m(t))$ , che in termini di rapporto di velocità diventa  $\tau_r > \frac{\max(\dot{\theta}_c)}{n_{1,max}}$ .

<sup>2</sup>NB: La coppia di arresto non è quella da usare per la frenata all'interno del ciclo operativo!

**Velocità media all'albero veloce:**  $n_{1,N} > \frac{\dot{\theta}_m^{media}}{\dot{\theta}_c^{media}}$ , che in termini di rapporto di velocità diventa  $\tau_r > \frac{n_{1,N}}{n_{1,N}}$ .

**Velocità limite:** Tuttavia anche in queste ultime disequazioni è nota la velocità di carico, per le velocità limite bisogna considerare di aver già determinato la coppia, quindi la taglia del riduttore, da cui posso determinare dei valori di velocità limite che saranno abbastanza simili a quelli poi usati effettivamente.

**Se la taglia di quel costruttore non ha valori che vadano bene?** Se la taglia del costruttore disponibile ha valori di velocità che non sono compatibili con quelli richiesti: per la velocità media c'è poco da fare, nel senso che è determinata dalla legge oraria, cioè dal tipo di funzionalità richiesta e variarla significa non dare al cliente ciò che ha richiesto. Potrebbe essere possibile modificare il coefficiente di sicurezza di modo da rientrare nella taglia inferiore di riduttore disponibile, ma va fatto coscienti del significato delle implicazioni: la velocità media, moltiplicata la coppia media  $T_{2,media}$ , è la potenza media  $W_{media}$ , usata per fare valutazioni termiche, che devono essere rispettate. Per la velocità massima invece c'è più margine di scelta perché il coefficiente di sicurezza è maggiore.

## 2.1.2 Valutazioni su Riduttore

Ci sono diversi aspetti strutturali da considerare per la scelta di un riduttore.

### Dimensione dei vari stadi in un multistadio:

In un riduttore multistadio le dimensioni dei singoli stadi non sono le stesse, perché le coppie che devono sopportare sono differenti, perciò non è esattamente come considerare due singolo stadio.

#### Massa

La massa del riduttore è proporzionale alla taglia e al numero di stadi. In generale maggiore massa comporta un maggior costo, nonostante ciò l'uso di multistadio può portare un calo del costo del motore e quindi dell'energia (vedi lezione su  $\tau$  ottimo).

#### Momento di inerzia dell'albero veloce

All'interno di una stessa taglia i valori di inerzia sono molto simili perché le ruote hanno modulo di denti e sezioni sugli alberi simili se non identici, quindi la massa nonché l'inerzia saranno circa uguali. Le differenze sono legate alle dimensioni delle ruote quindi satelliti e sole, dove il sole porta ad avere un momento di inerzia leggermente maggiore, quindi  $J_{1/10} < J_{1/3}$ . Tra le varie taglie invece il momento di inerzia aumenta in modo è più che lineare, quasi quadratico. A parità di taglia, per diverso numero di stadi, nonostante la massa aumenti nel multistadio, il momento di inerzia cala, perché va considerata l'inerzia equivalente all'albero veloce, quindi:  $J_r = J_{1st} + J_{2st}\tau_{1st}^2$ .

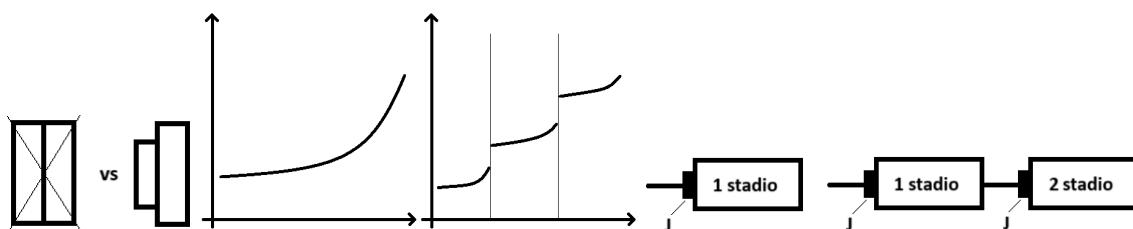


Figura 2.2: Riduttori bistadio (sx); Grafici inerzia (centro); Schema equivalente inerzia (dx)

#### Rendimento

Il rendimento varia con l'aumentare del numero di stadi, perché  $\eta_r = \prod_i \eta_i$ , valori tipici sono:

- 1 stadio: 96% ÷ 98%
- 2 stadio: 94% ÷ 95%
- 3 stadio: 90% ÷ 92%

I valori vengono presi in condizioni nominali, il rendimento è una curva che dipende dal punto di lavoro.

#### Rigidezza

In condizioni ideali bloccare l'albero veloce comporta il blocco dell'albero lento, tuttavia in condizioni reali presenterà una variazione circa lineare di tipo elastico (soprattutto nella zona di lavoro), a cui si va ad aggiungere una componente non lineare legata al gioco. Perciò può essere introdotto un nuovo modello per il

riduttore che consideri la rigidezza reale considerandolo come una molla. Il sistema passa ad avere due gradi di libertà, non è più valida l'espressione  $\dot{\theta}_m \neq \frac{\dot{\theta}_c}{\tau_r}$ , ma diventerà, considerando  $T(s)$  funzione di trasferimento:

$$s\theta_c(s) = s\theta_m\tau_r T(s)$$

Nel caso multistadio la rigidezza da considerare è una rigidezza equivalente data dalla serie, perciò sarà minore delle rigidezze dei singoli stadi:  $K_r = \frac{1}{\frac{k_2}{k_1} + \frac{1}{k_2}} < k_1, k_2$ .

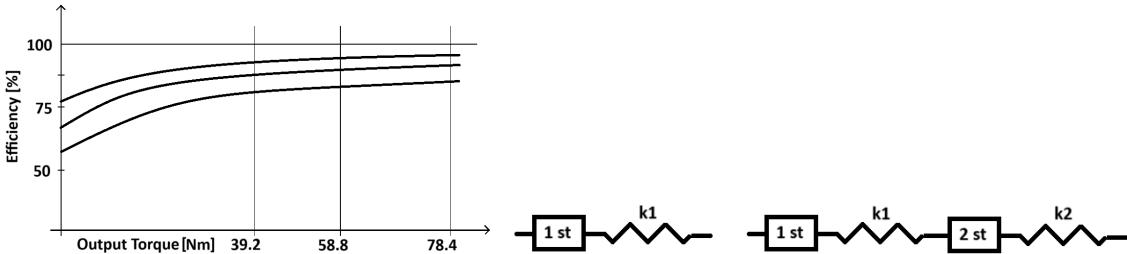


Figura 2.3: Caratteristica esempio rendimento sx; Schema equivalente rigidezza dx

**Cataloghi:** Nei cataloghi la rigidezza è definita all'albero lento, perché permette di fare calcoli più semplici in termini di deformazione vista dal carico. Nel caso del costruttore visto a lezione  $k = R_d$ , si nota come aumenti con la taglia in modo circa lineare, perché aumentare la sezione e massa del riduttore aumenta la resistenza torsionale.<sup>3</sup>

### Gioco

Il gioco (o backlash) nei riduttori è lo spazio tra dente e dente nella circonferenza primitiva. Il gioco è legato alla dimensione del vano della ruota e dalla dimensione del dente, dipende soprattutto dalla tolleranza che ha la lavorazione. Si misura in arcmin, dove  $1' = \frac{1}{60}$ . Può portare a una ridotta precisione, accuratezza o a micro-urti causa di vibrazioni o usura.

Nei cataloghi il gioco viene valutato all'albero lento (2) per dare un'idea di quanto possa influenzare lo spostamento nel carico, tuttavia agiscono diversi fattori.<sup>4</sup>

**Posizioni dei denti:** Ci sono due possibilità di contatto tra i denti, in entrambi i casi avviene in un punto, che varia istante per istante, e che garantisce lo scambio di forze, quindi è presente l'accoppiamento e vale  $J_{eq} = J_m + \tau_r^2 J_c$ . Tuttavia è possibile che non vi sia alcun contatto tra i denti, in questo caso non ci sarebbe né scambio di forze né accoppiamento, in questa condizione vale  $J_{eq} = J_m$ , complicando il controllo, perché può risultare essere elemento di instabilità o di semplice stabilità.

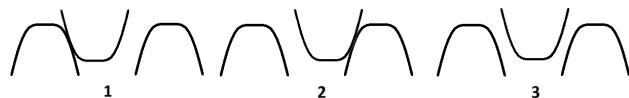


Figura 2.4: 1 - Contatto sx; 2 - Contatto dx; 3 - No contatto

**Multistadio:** Il gioco nei riduttori multistadio viene calcolato come valore a catalogo a partire da uno spostamento sull'albero veloce, da riportare sull'albero lento noti i giochi dei singoli stadi, perciò  $\Delta\theta_{out} = \tau_1\tau_2\Delta\theta_{in} + \epsilon_2 + \tau_2\epsilon_1$ , ossia il gioco aumenta con l'aumentare degli stadi.

**Catalogo Wittenstein:** Confronto catalogo Wittenstein standard e alte performance. In alcuni dei riduttori ad alto performance viene raggiunto gioco nullo, tuttavia non è sempre la soluzione ideale perché non avere gioco significa mantenere un maggiore contatto, quindi aumenta l'attrito. Significa anche che deve aumentare la manutenzione per evitare che polveri si infilino tra le ruote e che vi sia una opportuna lubrificazione. Il valore del gioco viene proposto come diseguaglianza in cui il valore viene garantito sotto un massimo. La vita utile dei riduttori è determinata soprattutto dai cuscinetti che vanno sostituiti a determinati intervalli.

<sup>3</sup>Esistono riduttori epicicloidali con rigidezze particolarmente elevate sfruttando una rivisitazione dei riduttori epicicloidali classici, vedi: Galaxie della Wittenstein e Cyclodrive della Sumimoto.

<sup>4</sup>Non è detto che il gioco effettivo sia quello di catalogo, perché c'è dipendenza anche dal controllo. Occorreranno fare approfondite valutazioni in un secondo momento.

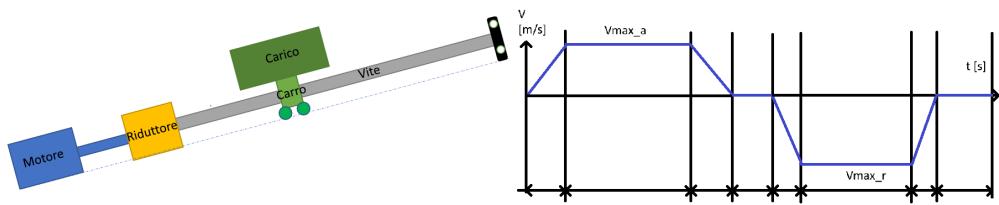
### Riduttori epicicloidali di nuovo tipo

L'obiettivo di riduttori epicicloidali di nuova tipologia è quello di ottenere ridotto (nullo) gioco e elevata rigidezza.

- Cyclodrive:  $\tau_r \downarrow$ , gioco 0,  $T_2 \uparrow$ ,  $K \uparrow$ , rapporto coppia volume buono,  $\eta_r \downarrow$  rendimento inferiore ai normali epicicloidali, per progetti di fascia alta.
- Harmonic Drive:  $\tau_r \downarrow$ , gioco 0,  $\eta_r \downarrow$ , rigidezza  $\downarrow$  rigidezza ridotta perché il moto è trasmesso da una parte flessibile che ingranà su una fissa. Utilizzata nella robotica collaborativa in cui le velocità sono ridotte e la flessibilità è una specifica.
- Galaxie Drive:  $\tau_r \downarrow\downarrow$ ,  $K \uparrow\uparrow$ ,  $T_2$ , gioco 0,  $\eta_r \uparrow$ , per progetti di fascia alta.

## 2.2 Esercizio di Dimensionamento

Si consideri il sistema in esame formato da motore, riduttore, vite, madrevite, carico e con una legge di moto come in figura.



Dati:  $p = 60\text{mm}$   $\alpha = 25^\circ$   $J_v = 0.0029\text{kgm}^2$   $f_{cou\_din} = 0.15$   $f_{cou\_st} = 0.2$   $M_c = 70\text{Kg}$   $M_t = 600\text{Kg}$   $\eta = 0.9$   $J_m = 2.5\text{Kgcm}^2$

Figura 2.5: Esercizio 1 dimensionamento: schema e legge oraria

**Utilizzo di F:** Al posto di considerare le forze come singole, considero di unire tutti le forze come unico contributo. Questo permette di mantenere una buona coerenza dei segni.

**Rendimento:** Viene utilizzato il rendimento generalizzato, dove  $\eta_v^d = 0.9$ , quindi  $\eta_v^r \simeq 2 - \frac{1}{\eta_v^d} = \frac{1}{1.125}$ , ossia

$$\begin{cases} \eta_v^d = 0.9 & \text{se } -\dot{x}F_a < 0 \\ \frac{1}{\eta_v^r} = 1.125 & \text{se } -\dot{x}F_a \geq 0 \end{cases}$$

### 2.2.1 Step di risoluzione

- Convenzioni di segno (intanto raggruppando le forze applicate su uno stesso punto)
- Modello (cinematico, dinamico)
- Manipolazione algebrica del modello per evidenziare  $T_2$  ed eventualmente le forze che vanno a determinare il tipo di moto (diretto vs retrogrado)
- Analisi di ogni fase
- Valutazione del duty cycle
- Definizione  $T_2$ , scelta taglia
- Calcolo limitazioni alla scelta di  $\tau_r$
- Scelta di  $\tau_r$

### 2.2.2 Tabella

Per aiutarsi nella esecuzione dei passaggi è consigliato l'utilizzo di una tabella in cui siano distinte le varie tipologie operative divise per le rispettive durate di modo da schematizzare l'esercitazione.

$\Delta t [s]$	0.4	1.2	0.4	0.4	0.3	0.9	0.3	0.6	Max
$\dot{x} [m/s]$	>0	0.75	>0	0	<0	-1	<0	0	1
$\ddot{x} [m/s^2]$	1.875	0	-1.875	0	-3.333	0	3.333	0	
$M [Kg]$	670	670	670	670	70	70	70	70	
$M\ddot{x} [N]$	1256.3 <sup>R</sup>	0	-1256.3 <sup>M</sup>	0	-233.3 <sup>R</sup>	0	233.3 <sup>M</sup>	0	
$F_{p,\parallel} [N]$	2774.9	2774.9	2774.9	2774.9	289.9	289.9	289.9	289.9	
$F_{cou} [N]$	892.6	892.6	892.6	-892.6*	-93.3	-93.3	-93.3	-93.3	
$\Delta F_{cou}^s [N]$	(297.5)	-	-	-297.5	(-31.1)	-	-	-31.1	
$F_{A,medi} [N]$	4929.8	3667.5	2411.3	1587.7	-36.7	196.7	430	165.6	
$F_{A,pk} [N]$	5221.3	D	D	"R"	-67.8	D	R	"R"	
Flusso $W$									
$\dot{\theta}_v [rpm]$		750		0		-1000		0	
$\dot{\theta}_v [rd/s]$	196.3	0	-196.3	0	-34.9	0	34.9	0	
$J_v \ddot{\theta}_v [Nm]$	0.57	0	-0.57	0	-1.01	0	1.01	0	
$T_2 [Nm]$	52.8	38.9	25	17	-1.4	2.1	5.6	1.8	
$T_{2,pk} [Nm]$	(56)								56

Tabella 2.1: Tabella riassuntiva per i calcoli effettuati

**Incremento di Attrito:** Con  $\Delta F_{cou}$  si intende l'incremento di attrito legato alla differenza tra attrito statico e dinamico; nota bene che  $\Delta F_{cou} + F_{cou} \leq F_{motrice}$ : l'incremento potrà al massimo far sì che l'oggetto rimanga fermo, non può metterlo in moto.

**Attrito di Primo Distacco:** L'attrito statico è di primo distacco interviene quando si passa da arresto a moto, tuttavia il tempo di applicazione dell'attrito è trascurabile rispetto il ciclo di lavoro, perciò può influenzare il valore di picco di forza<sup>5</sup>, ma non la media. Questi casi conviene segnarli in tabella mettendo il valore dentro parentesi tonde.

**Verifica segni:** Per verificare di aver utilizzato tutte le convezioni corrette conviene partire dai segni dell'inerzia, valutare in base alla legge oraria quale sia il segno dell'inerzia resistente e quale dell'inerzia motrice, e infine estendere quanto ricavato alle altre forze, quindi verificare che le forze resistenti e motrici siano concordi coi segni delle rispettive inerzie. Nell'esempio occorrerà valutare il segno dell'inerzia resistente e motrice nelle condizioni di salita e discesa.

### 2.2.3 Valutazioni su riduttore

I parametri da ricavare per il riduttore sono:

- Duty cycle  $\delta = 78\%$
- Limite di coppia applicabile in modo continuativo  $T_{2,B} = T_2^{\max, \text{richiesta}} f_s \cdot 1.2 = 74Nm$
- Coppia nominale richiesta  $T_{2,N} = \sqrt[3]{\frac{\sum_{i=1}^3 |T_{2,i}^3 \Delta t_i \dot{\theta}_{v,i}|}{\sum_{i=1}^3 |\Delta t_i \dot{\theta}_{v,i}|}} \cdot 1.2 = 39Nm$ , dove nelle fasi ad accelerazione costante viene considerata la velocità media nel tratto

Con questi valori posso andare a catalogo e scegliere una taglia; risulta HPS75 (o superiore), che ha  $n_{1,max} = 6000rpm$  e  $n_{1,N} = 2500 \div 3000$ .

**Rapporto di trasmissione minimo per velocità massima:** Ottenuta la velocità è possibile ricavare il valore minimo di rapporto di trasmissione da utilizzare per garantire la velocità massima:  $\tau_{R,min} = \frac{\dot{\theta}_{R,max}}{n_{1,max}} 0.8 = \frac{1}{4.8}$ , perciò le scelte disponibili sono limitate a  $\tau = \frac{1}{4}$ .

**Rapporto di trasmissione minimo per velocità media:** Nota la velocità media richiesta al carico posso ottenere la velocità media richiesta in uscita dal riduttore  $\dot{\theta}_{v,media} = \frac{\dot{x}_{media} \frac{60}{2\pi}}{\tau_v} = 533rpm$ , da cui ottengo un rapporto di trasmissione minimo di  $\tau_{R,min} = \frac{\dot{\theta}_{v,media}}{\dot{x}_{media}} 0.8 = 3.75 < 4$ , ossia il limite è eccessivamente stringente.

**Rivalutazione coefficiente di sicurezza:** Facendo l'esercizio ci si accorge che utilizzando un coefficiente di sicurezza del 20% non si trova un riduttore tra quelli a disposizione perché la velocità media richiesta è troppo elevata. L'unica opzione<sup>6</sup> è modificare il coefficiente di sicurezza. Facendo una valutazione di potenze

<sup>5</sup>Questo non andrà a influenzare la scelta del motore perché i motori brushless tendono ad avere coppie di spunto alte a sufficienza per garantire il primo distacco.

<sup>6</sup>Vedi quanto detto a pagina 12

media richiesta:  $W_{media}^{richiesta} = T_{2,media}^R \dot{\theta}_{media}^R = 32.7 \cdot 533 = 17430 Nmrpm$  contro la potenza media nominale del riduttore con rapporto di riduzione di  $\tau = \frac{1}{4}$ ,  $W_N = T_{2,N} n_{1,N} \tau_R = 60 \frac{2500}{4} = 37500 Nmrpm$ . Si osserva come in questo caso la  $T_{2,media}$  è circa la metà di quella nominale, perciò termicamente il rischio è minimo, quindi è possibile abbassare il coefficiente di sicurezza relativo alla velocità media e scegliere  $\tau = \frac{1}{4}$ .

## 2.3 Rapporto di Trasmissione Ottimo

Per ricavare il rapporto di trasmissione ottimo si utilizza una ottimizzazione a cui vanno associati ragionamenti aggiuntivi.

Nel caso di sistema motore + riduttore + carico vale la solita relazione  $C_m = (J_m + J_r) \frac{\ddot{\theta}_c}{\tau_r} + \tau_r \frac{T_2}{\eta_r}$ , dove  $(J_m + J_r) \frac{\ddot{\theta}_c}{\tau_r}$  è il contributo relativo l'albero veloce mentre  $\tau_r \frac{T_2}{\eta_r}$  è quello relativo l'albero lento.

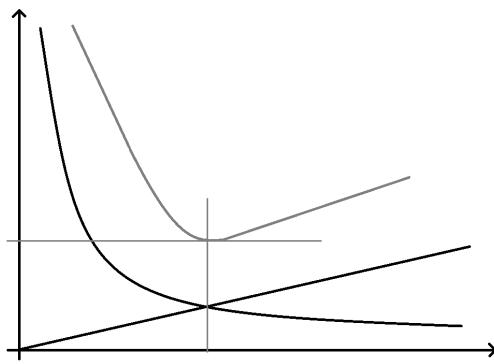


Figura 2.6: Rapporto di trasmissione ottimo

Per quell'espressione di coppia del motore è possibile ricavare il valore ottimo di rapporto di trasmissione  $\tau_{opt}$  di  $\tau_r$  tale che  $\min \{C_m\}$ , ossia  $\frac{\partial C_m}{\partial \tau_r} = 0$ , per cui vale:

$$\tau_{opt} = \sqrt{\eta_r \frac{J_m + J_r \ddot{\theta}_c}{T_2}}$$

Per cui è importante notare che  $\eta_r, T_2, \ddot{\theta}_c$  sono tempo dipendenti, perciò anche il valore ottimo. In termini matematici ha senso, tuttavia per il progetto occorre avere un numero. Delle grandezze temporali vanno considerati dei valori "medi" in particolare i valori RMS.

### 2.3.1 Valutazioni sulla Coppia

Parto dal considerare la coppia del motore RMS  $C_m^{RMS} = \sqrt{\frac{\int_0^{T_c} C_m^2(t) dt}{T_c}}$ , scelta perchè minimizzare  $C_m$  significa minimizzare la taglia e quindi il costo di un motore.

#### Caratteristica

Dalla tipica caratteristica del motore PMSM (brushless) sono evidenti le zone di lavoro continuativo e intermittente. Si può definire inoltre la  $T_{CS}$  ossia la Coppia Continuativa di Stallo (Torque Continuos Stall) punto per velocità nulla e coppia non nulla massima affinchè funzioni in regime continuativo. Inoltre la  $T_{CS}$  definisce la taglia del motore.

$T_{CS}$  ha implicazioni per diversi parametri:

- Massa cresce linearmente. In base alla famiglia, quindi alla tecnologia costruttiva, ci sono diverse curve.
- Costo cresce linearmente. In base alla famiglia, quindi alla tecnologia costruttiva, ci sono diverse curve.
- Inerzia cresce più che linearmente, quasi quadraticamente. In base alla geometria dell'albero quindi dal raggio e dalla lunghezza l'inerzia aumenta. La relazione è  $J_{cilindro} = \frac{1}{2} \rho L \pi R^4$
- Attrito cresce linearmente<sup>7</sup>

<sup>7</sup>Guardare analisi di catalogo Parker.

**Relazione Coppia di Stallo e Coppia RMS:** Nella fase di dimensionamento di un motore si devono unire la curva caratteristica del motore e ciclo di riferimento, quindi verificare che il ciclo di lavoro sia composto da punti interni l'area di lavoro e che  $(C_m^{RMS}, \dot{\theta}_m^{RMS})$  sia interno all'area di lavoro continuativa. Quest'ultima si traduce in  $C_m^{RMS} < T_{CS}$  e quindi  $\min\{C_m^{RMS}\}$  implica  $\min\{T_{CS}\}$ .

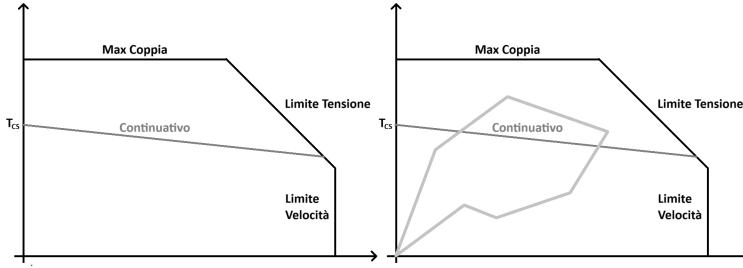


Figura 2.7: Caratteristica di PMSM con ciclo di lavoro

### Riformulazione con grandezze RMS

Se si utilizzano le grandezze RMS la riformulazione risulta  $\tau_{opt} = \sqrt{\frac{J_m + J_r}{(T_2/\eta_r)^{RMS}} \ddot{\theta}_c^{RMS}}$ . Considerando un rendimento alto, e che comunque il valore ottenuto dovrà essere adattato a quelli presenti nel catalogo disponibile, si può omettere il rendimento, si ottiene quindi un'espressione indicativa per la scelta del  $\tau_r$ :

$$\tau_{opt} = \sqrt{\frac{J_m + J_r}{T_2^{RMS}} \ddot{\theta}_c^{RMS}}$$

### Vincoli

Finora l'analisi non considerava i vincoli sulla scelta di rapporto di trasmissione.

**Rapporto di Trasmissione Minimo:** A limiti in termini di  $n_{1,max}, n_{1N}$  si associa un vincolo di rapporto di trasmissione minimo  $\tau_{min}$ , valori inferiori sono esclusi, questo potrebbe includere anche  $\tau_{opt}^l$ , libero; in questo caso  $\tau_{opt}^{vinc} = \tau_{min}$  ossia il rapporto di trasmissione ottimo del sistema vincolato diventa il rapporto di trasmissione minimo<sup>8</sup>.

**Rapporto di Trasmissione Massimo:** I vincoli di rapporto di trasmissione massimo sono legati a diversi aspetti.

1. Risoluzione del trasduttore di posizione del motore riportato al carico, in particolare, detta  $\delta\theta_m$  risoluzione lato motore,  $\delta\theta_c = \delta\theta_m \tau_r$  ossia  $\tau_r$  piccolo permette di aumentare la risoluzione del carico, a discapito però di un calo della ripetibilità (precisione).
2. Propagazione dell'errore di posizionamento del motore, in particolare detto  $\epsilon_m$  errore di posizione lato motore, riportato al carico diventa  $\epsilon_c = \epsilon_m \tau_r$ , perciò migliora per  $\tau_r$  piccolo.
3. Limite superiore al rapporto di inerzia  $\rho$  che è il rapporto tra la sommatoria dei momenti di inerzia lato carico riportati al motore su la sommatoria dei momenti di inerzia dell'albero motore. Nel caso in esame di motore riduttore e carico sarebbe<sup>9</sup>  $\rho = \frac{J_c \tau_r^2}{J_m + J_r}$ . Per  $\rho$  grande diventa più complicato il controllo del sistema in presenza di gioco o elasticità, viene quindi posto un  $\rho_{max}$  che si traduce in una limitazione del  $\tau_r$ .

In modo del tutto simile al caso di  $\tau_{min}$ , anche il  $\tau_{max}$  potrebbe essere tanto stringente da escludere il valore  $\tau_{opt}^l$ , libero, quindi se come in precedenza fosse necessario escluderlo occorrerebbe considerare un rapporto di trasmissione ottimo vincolato  $\tau_{opt}^v = \tau_{max}$ .

### 2.3.2 Energia Elettrica Assorbita

L'energia elettrica assorbita è pari a  $E_m = \int_0^{T_c} v(t)i(t)dt$ , considerando  $i(t) = \frac{C_m}{K_T}$  e  $v(t) = Ri(t) + K_B \dot{\theta}_m$ , facendo opportune sostituzioni e manipolazione, si ottiene:

$$E_m = \frac{R}{K_T^2} T_c (C_m^{RMS})^2 + \frac{K_B}{K_T} \int_0^{T_c} C_m \dot{\theta}_m dt$$

<sup>8</sup>In modo simile a quanto visto per l'esercizio a pagina 14.

<sup>9</sup>Nota bene che in realtà  $J_r$  andrebbe ripartita tra contributi di albero lento e albero veloce, tuttavia non sono noti.

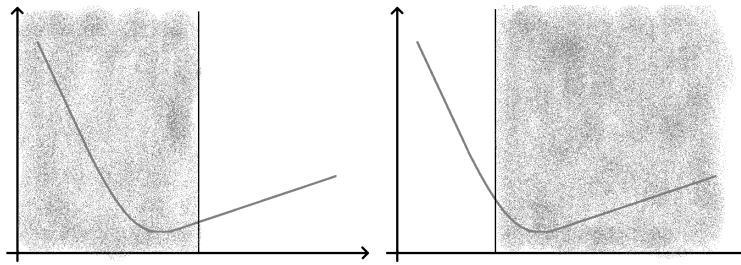


Figura 2.8: Rapporti di trasmissione: minimo sx, massimo dx

Dove il primo dei due contributi tendenzialmente è dominante; occorre tuttavia tenere conto del secondo contributo che dipende dalla velocità e che quindi potrebbe diventare più rilevante. Da queste valutazioni si trova che  $\min \{C_m^{RMS}\}$  è simile a  $\min \{E_m\}$ , ma il rapporto di trasmissione ottimo per l'energia tendenzialmente è maggiore di quello per la coppia, perciò conviene utilizzare  $\tau_r >$  maggiori.

### 2.3.3 Velocità del Motore

La velocità del motore è inversamente proporzionale al rapporto di trasmissione, quindi per ottenere velocità inferiori conviene utilizzare  $\tau_r >$  maggiori. Per velocità di motore elevate aumenta la coppia legata all'attrito viscoso; inoltre per velocità elevate  $K_T$  è ridotto, perciò la produzione di coppia richiede maggior corrente, quindi maggiori costi in termini di convertitori.

#### Attrito viscoso

Il contributo dell'attrito viscoso si vede all'albero veloce  $C_m = (J_m + J_r) \frac{\ddot{\theta}_c}{\tau_r} + f_v \frac{\dot{\theta}_c}{\tau_r}$ , che quindi rientra nell'espressione del rapporto di trasmissione ottimo<sup>10</sup>  $\tau_{opt} = \sqrt{\frac{[(J_m + J_r) \ddot{\theta}_c + f_v \dot{\theta}_c]^{RMS}}{(T_2 / \eta_r)^{RMS}}}$ , dove  $\dot{\theta}_m$  "alta" porta a  $\tau_r$  "bassi", quindi l'effetto di attrito è maggiore per la zona sinistra del grafico. Vengono favoriti  $\tau_r$  maggiori.

#### Costante di Coppia

A parità di taglia del motore, una velocità maggiore porta ad avere  $K_T$  inferiore, perciò il costo della coppia in termini di corrente è superiore. Vengono favoriti  $\tau_r$  maggiori. Occorre quindi scegliere opportunamente la velocità massima al carico (valutazioni su legge di moto) e il rapporto di trasmissione.

#### Numero di Stadi

La scelta del numero di stadi porta ad una serie di valutazioni su rigidezza, gioco, rendimento, inerzia e costo. In generale la scelta tende comunque a favorire  $\tau_r$  maggiori anche in questo caso.

### 2.3.4 Limite alla Conoscenza dei Valori

Nella formula del rapporto di trasmissione ottimo  $\tau_{opt} = \sqrt{\frac{J_m + J_r}{(T_2 / \eta_r)^{RMS}}} \ddot{\theta}_c^{RMS}$ , dei parametri presenti:

- $T_2, \ddot{\theta}_c^{RMS}$  sono indipendenti da  $\tau_r$
- $\eta$  è dipendente da  $\tau_r$ , ma se le differenze sono ridotte si può trascurare
- $J_r$  dipende dalla  $\tau_r$ , tuttavia la dipendenza maggiore la ha per la taglia, quindi scelta quella si può scegliere un valore medio o significativo
- $J_m$  dipende da  $T_{CS}$ , che a sua volta dipende da  $C_m^{RMS}$  che è legata a  $\tau_r$

Questo problema ha per soluzioni: Utilizzo di metodi di stima; Esperienza; Iterazioni utilizzando buon senso.

<sup>10</sup>Nota bene che  $RMS\{A + B\} \leq RMS\{A\} + RMS\{B\}$ .

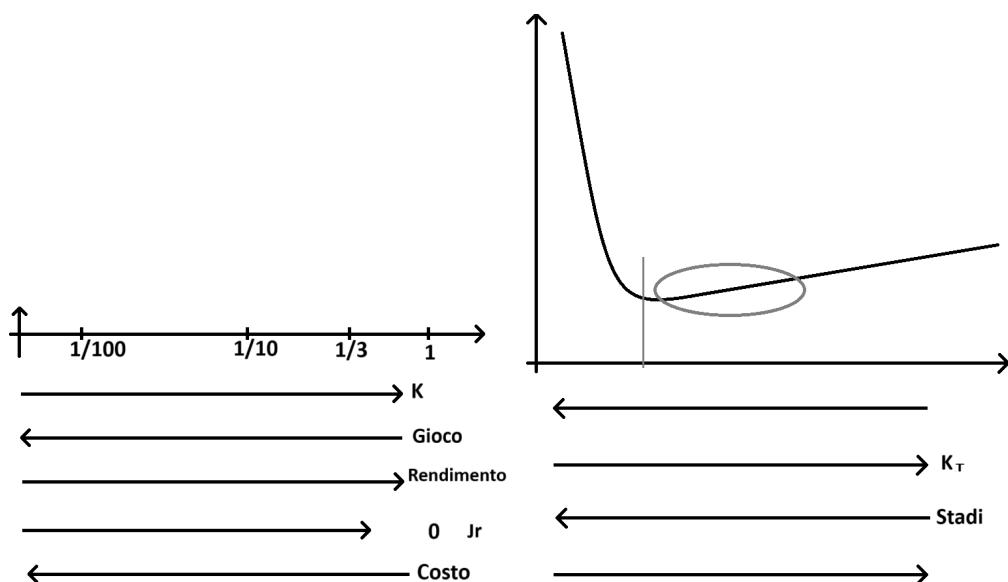


Figura 2.9: Valutazioni per numero di stadi sx; Riepilogo dx

# 3 DIMENSIONAMENTO E SCELTA DI VITI A RICIRCOLO DI SFERE

I riduttori vite madrevite classici sono a strisciamento e questa caratteristica li rende particolarmente soggetti all'attrito, quindi a ridotto rendimento e irreversibilità del moto. Queste sono caratteristiche desiderabili per strutture, meno per organi in moto, si fa largo la necessità di rendimenti superiori, quindi vengono utilizzate tecnologie differenti.

La principale delle tecnologie alternative è quella di riduttori a vite a ricircolo di sfere in cui lo spostamento viene trasmesso dalle sfere che rotolando permettono di avere ridotto attrito, quindi rendimento maggiore, indicativamente  $\eta_{R \rightarrow T} \simeq 0.97 \simeq \eta_{T \rightarrow R}$ .

Le sfere sono poste all'interno di gole su cui possono scorrere, presenti al posto dei denti nella vite e madrevite, chiamata in questo contesto chiocciola.

**Configurazioni cinematiche:** In termini di cinematica le viti a ricircolo di sfere sono equivalenti alle viti-madreviti a strisciamento, in particolare vale ancora  $\tau_v = \frac{p}{2\pi} = \frac{\Delta x_{rel}}{\Delta \theta_{rel}}$ , dove gli spostamenti sono considerati relativi. In seguito sono rappresentate le varie combinazioni di movimenti assoluti.

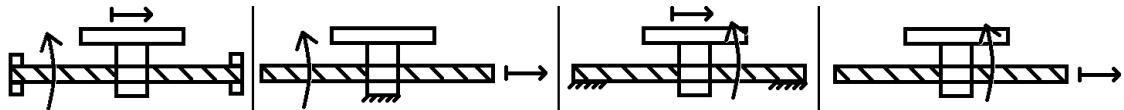


Figura 3.1: 4 possibili configurazioni rotazione-traslazione relative

## 3.1 Parametri di scelta

La scelta di viti a ricircolo di sfere non è banale perché ha dipendenza da un alto numero di combinazioni possibili di diametri viti e sfere, passo della vite, vite utile, numero di principi e tipologia di materiali.

**Numero di principi:** Con numero di principi si intendono i singoli percorsi indipendenti di ricircolo delle sfere. All'interno di un passo della vite potrebbe esserci sufficiente spazio per inserire un ulteriore ricircolo di sfere, così nasce una vite a due principi.

### 3.1.1 Dinamica

Similmente a come visto per i riduttori si vanno a definire la forza applicata sul carico:  $C_m = \left( J_m + J_v + M \frac{\tau_v^2}{\eta_v} \right) \ddot{\theta}_m + F \frac{\tau_v}{\eta_v}$ , da cui, a seguito di opportuna manipolazione, si ottiene:  $C_m = (J_m + J_v) \frac{\ddot{x}}{\tau_v} + \frac{\tau_v}{\eta_v} (M \ddot{x} + F)$ , dove:

$$F_a = M \ddot{x} + F$$

risultante delle forze assiali applicate alla chiocciola (equivalente a  $T_2$  dei riduttori).

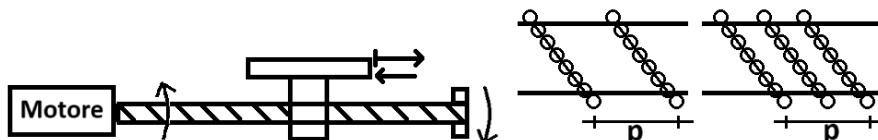


Figura 3.2: Schema motore e vite a ricircolo di sfere sx; Uno vs Due principi dx

### Forza assiale media

Anche in questo caso nel regime stazionario si fanno valutazioni sulla media, e in modo simile a  $T_{2,media}$  si ottiene:

$$F_{a,media} = \sqrt[3]{\frac{\int_0^{T_{ciclo}} |F_a^3(t)| \dot{x}_c(t) dt}{\int_0^{T_{ciclo}} |\dot{x}_c(t)| dt}}$$

E anche in questo caso per moto ad andamento trapezoidale l'integrale diventerà una sommatoria.

### Capacità di Carico Dinamico

Per capacità di carico dinamico  $C_D[N]$  si intende nei cataloghi la forza assiale applicata alla chiocciola che garantisce con probabilità di sopravvivenza del 90% la vita utile di  $10^6$  giri relativi vite-chiocciola.

**Migliorare la probabilità:** Per migliorare la probabilità occorre utilizzare un fattore di affidabilità  $< 1$  che vada a penalizzare il valore a catalogo. Si tratta di valori ricavati statisticamente, non hanno significato di coefficiente di sicurezza.

**Utilizzo di CCD in verifica:** Noti  $C_D$ ,  $F_{a,media}$ , volendo calcolare la vita utile della chiocciola per il 90% di probabilità di sopravvivenza si utilizza la formula di Wohler:  $C_D^3 10^6 = F_{a,media}^3 L_N$ , con  $L_N$  vita utile in termini di numero di rotazioni.

**Utilizzo di CCD in dimensionamento:** Noto  $F_{a,media}$ , data dalla specifica in termini di giri sulla vita utile  $L_N^{des}$  desiderata, è possibile calcolare  $C_D$  idoneo a garantire la vita desiderata al  $x\%$  invertendo la formula e utilizzando un opportuno fattore di affidabilità.

**Vita utile in ore:** Solitamente non è nota la vita utile in numero di giri relativi, è più comodo passare in ore di lavoro, quindi

$$L_H = L_N \frac{1}{\dot{\theta}_v} \frac{1}{60} [h] = L_N \frac{p}{3600 \cdot \dot{x}_{media}}$$

che si traduce in una CCD richiesta:

$$C_{D,rich} \geq F_{a,media} \sqrt[3]{\frac{L_H^{des} \dot{x}^{des} \cdot 3600}{p \cdot 10^6}} \cdot f_s$$

**Fattore di Shock/Servizio:** Alla CCD in esame va moltiplicato un fattore di shock o servizio  $f_s$ , i cui valori possono cambiare tra  $1.2 \div 3$ , se possibile conviene utilizzare un modello elasto-dinamico per avere una idea delle forze in gioco e evitare di sovrardimensionare la chiocciola.

**Dipendenze della CCD richiesta:** La CCD è dipendente direttamente da velocità traslante e vita utile, mentre è inversamente dipendente dal passo  $p \downarrow, C_D \uparrow$ . La dipendenza inversa del passo risulta chiara immaginando che i passi minori portano a un maggior numero di giri relativi a pari velocità.

**Dipendenze della CCD:** Il carico dinamico sulla chiocciola dipende principalmente dal volume delle sfere e dal materiale delle stesse, quindi maggiore lo spazio disponibile alle sfere meglio è, perciò aumenta con il diametro delle viti  $d_v$ , con l'utilizzo di sfere di raggio maggiore e l'utilizzo di viti a più principi. Come regola generale conviene avere meno sfere più grandi che tenderanno a raggiungere un volume complessivo maggiore, inoltre garantiscono una maggior resistenza.

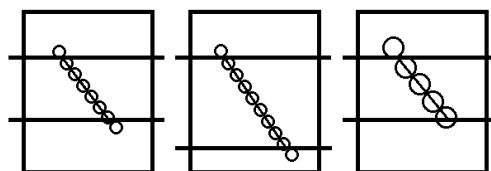


Figura 3.3: Dipendenza volume sfere

#### 3.1.2 Velocità limite delle sfere

Durante il moto le sfere ruotano tra le due gole di vite e chiocciola, ma in questo movimento vanno anche a strisciare tra loro. Per velocità elevate risulta un aumento di riscaldamento e un aumento usura legato alla formazione di particolato di sfere. La relazione da verificare è  $v_{sfere} = \dot{\theta}_v \frac{d}{2} < v_{lim}$  dove  $d$  è la distanza tra centri delle due sfere opposte, e con velocità limite specifica della chiocciola.

Nei cataloghi non si tiene conto della velocità della sfera, ma del doppio, e viene chiamata "D × n" =  $\dot{\theta}_v \cdot d$ , quindi il limite diventa:  $d \cdot \dot{\theta}_v < "D \times n"_{lim} \alpha = S$ , con  $\alpha \simeq 0.8$  fattore di sicurezza.

#### Sfere di Acciaio e Ceramica

In alternativa alle sfere solo di acciaio, esistono viti a ricircolo di sfere in cui sono alternate sfere di acciaio e di ceramica. In particolare le seconde oltre a essere costruite con un volume leggermente inferiore, hanno una massa inferiore, perciò quando vengono messe in movimento le sfere di acciaio quelle di ceramica vanno in contro-rotazione, così facendo il contatto tra sfere vede anch'esso rotazione, mentre permane lo strisciamento sui punti di contatto tra sfere ceramiche e gola. Questa configurazione permette di raggiungere velocità limite della singola sfera "D × n"  $_{lim}$  molto superiori, anche doppi.

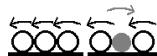


Figura 3.4: Viti a ricircolo di sfere acciaio acciaio (sx) vs acciaio e ceramica (dx)

### Vincolo 1 su p,d

A partire da  $d \cdot \dot{\theta}_v \leq S = "D \times n"_{lim} \alpha$ , sostituendo la velocità della vite con la velocità del carico traslante, ed esplicitando il passo della vite, si ottiene una relazione di vincolo per passo e diametro della vite:

$$p \geq \frac{\dot{x}_{max} 2\pi}{S} \cdot d = \frac{\dot{x}_{max} [\frac{m}{s}]}{S [m \cdot rpm]} \cdot d$$

Nota bene che  $\dot{x}_{max}$  solitamente non è un dato progettuale, è possibile sceglierlo entro limiti termici/strutturali.

### 3.1.3 Velocità critica della vite

La vite è naturalmente sbilanciata, ruotando crea una forzante armonica alla frequenza della velocità di rotazione  $\dot{\theta}_v$ , che di valori prossimi alla velocità naturale flessionale  $\omega_{N,flex}$  porta ad avere forti vibrazioni. Per ridurre gli effetti delle vibrazioni si possono adottare due soluzioni.

#### Viti smorzate

Per limitare le vibrazioni è possibile utilizzare viti con un'anima in elastomero che vada a smorzare le vibrazioni, inoltre essendo al centro del diametro della vite non andrà a comprometterne la rigidità. Valori tipici di smorzamento di viti smorzate sono  $\xi \simeq 0.3 \div 0.5$ , contro i  $\xi \simeq 0.0x$  di viti normali.

#### Limitare la velocità di rotazione

Per evitare di ottenere sulla vite vibrazioni elevate basta evitare di passare per frequenze naturali, cioè  $\dot{\theta}_v < \omega_{N,flex}(x)$ , dove  $\omega_{N,flex}(x)$  è dipendente dalla posizione in cui si trova la chiocciola, perché questa solitamente scorre su di una guida in modo da evitare sia la vite a dover sopportare il peso del carico, e quindi va ad aumentare la rigidezza localmente. Il problema risulta complicato.

**Applicazioni velocità in funzione di x:** Noto il modello elastodinamico della vite, o effettuate opportune misurazioni, è possibile ottenere l'andamento della pulsazione naturale per le varie posizioni della chiocciola  $x$ , quindi è possibile variare la velocità massima della vite in funzione di  $x$ . Non semplice.

**Approccio conservativo:** In alternativa è possibile utilizzare un approccio conservativo in cui si va a limitare la velocità della vite alla minore delle pulsazioni naturali flessionali  $\dot{\theta}_v < \omega_{N,flex}^{min}$ . Non è la soluzione ottimale.

Considerando la massa della sola vite<sup>1</sup> la pulsazione naturale flessionale vale:

$$\omega_{N,flex} = K_v \sqrt{\frac{E \cdot I_f}{M_v \cdot L^3}}$$

con  $K_v$  coefficiente legato al tipo di vincolo;  $E$  modulo di Joung del materiale;  $I_f = \frac{\pi}{64} d^4$  momento di inerzia;  $M_v$  massa della vite;  $L$  lunghezza della vite.

**Coefficiente di vincolo:** Il coefficiente di vincolo dipende dal tipo di vincolo presente all'estremo della vite, può essere: libero; appoggio; incastro<sup>2</sup>. Queste tre possibilità risultano in 4 combinazioni:

- Incastro + Libero:  $K_v = 3.5$
- Appoggio + Appoggio:  $K_v = \pi^2$
- Appoggio + Incastro:  $K_v = 15.4$ , soluzione preferita.
- Incastro + Incastro:  $K_v = 22.4$ , questa è la soluzione col coefficiente maggiore. Tuttavia se la vite si riscalda e quindi si dilata, tende a spiancare; inoltre richiede montaggio preciso.

<sup>1</sup>Carico e madrevite andranno a gravare sulla guida.

<sup>2</sup>Nota bene non è un incastro di tipo strutturale, è un incastro solo in termini flessionali, non necessariamente andrà a limitare la rotazione della vite.

**Vincolo 2 su p,d:** A partire dalla disequazione  $\dot{\theta}_v^{max} \leq \omega_{N,flex}^{min} \alpha$ , con  $\alpha \simeq 0.6 \div 0.8$  coefficiente di sicurezza che considera come l'ampiezza inizi a salire prima del valore esatto di pulsazione naturale, sostituisco i vari elementi, effettuo qualche manipolazione e si ottiene:

$$p \geq \frac{8\pi L^2 \dot{x}^{max} \sqrt{\rho}}{K_v \alpha \sqrt{E}} \cdot \frac{1}{d}$$

Disequazione per cui risulta evidente la dipendenza inversa tra passo e diametro; quindi che per velocità superiori il vincolo peggiora; che per lunghezze superiori il vincolo peggiora quadraticamente; che per coefficienti di vincoli inferiori il vincolo peggiora. Solitamente nei datasheet sono presenti i valori di velocità critica  $N_c$  per i vari diametri, da cui si ottiene la disequazione:

$$p \geq \frac{\dot{x}^{max} \left[ \frac{m}{s} \right] 60}{N_c [\text{rpm}]}$$

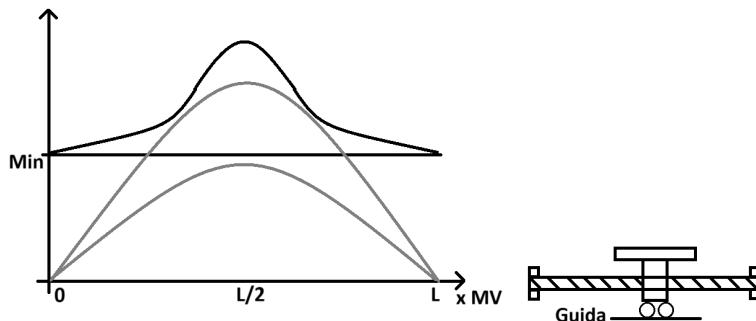


Figura 3.5: Frequenza naturale flessionale in funzione di posizione della chiocciola

### 3.1.4 Vincoli su passo e diametro della vite

Andando a unire i due vincoli ricavati:  $p \geq \frac{\dot{x}^{max} 2\pi}{S} d$  e  $p \geq \frac{8\pi L^2 \dot{x}^{max} \sqrt{\rho}}{K_v \alpha \sqrt{E}} \cdot \frac{1}{d}$ , la curva ottenuta sarà come in figura. Va evidenziato il forte limite per diametri ridotti.

#### Esempio

Fosse richiesto un  $C_D$  "basso", e quindi occorra utilizzare  $d$  "piccoli". In questo caso utilizzare viti acciaio e ceramica non ha senso, perché andrebbe a influenzare unicamente valori di diametro superiori. In questo caso utilizzare vincoli più rigidi potrebbe aiutare, perché porterebbero ad un aumento del numero di punti utilizzabili, tuttavia occorre valutare se i valori aggiuntivi possano essere utilizzati nell'applicazione in esame o meno.

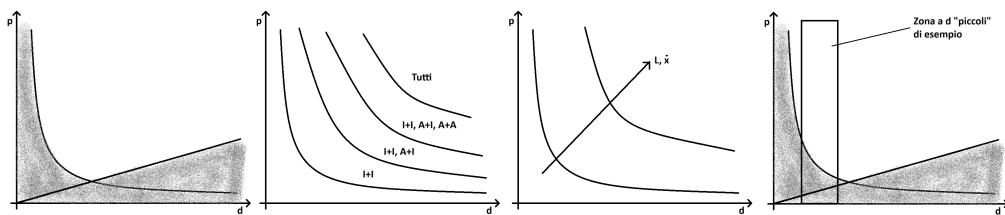


Figura 3.6: 1-3 relative a vincolo e dipendenze, 4 relativa all'esempio

### 3.1.5 Rigidezza nelle Viti

Il moto assiale del carico porta a vibrazioni nel sistema, che possono causare problemi di precisione e accuratezza nel moto del carico. Un sistema reale ha infiniti modi di vibrare, tuttavia la conoscenza dei parametri è tale per cui una semplificazione con un modello a 2gdl è comparabile con risultati con modelli a più gdl.

### Modello a 2gdl

Concentro tutte l'elasticità nel punto di traslazione della chiocciola, mentre considero il resto del sistema come rigido, occorre valutare una  $K_{eq}$  e  $M_{eq}$ , in cui sono considerati i vari contributi:

$$K_{eq} = \left[ \frac{1}{K_{ass,vite}} + \frac{1}{K_{tors,vite}} \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 + \frac{1}{K_{ass,chiocciola}} + \frac{1}{K_{ass,cuscinetti}} + \frac{1}{K_{ass,giunto}} \right]^{-1}$$

$$\simeq \left[ \frac{1}{K_{ass,vite}} + \frac{1}{K_{tors,vite}} \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right]^{-1}$$

Dove i contributi più rilevanti sono tendenzialmente i primi due, che sono dipendenti da  $p$ ,  $d$  quindi non necessitano del catalogo.

### Rigidezza Torsionale

La rigidezza torsionale è data da  $K_{torsionale} = \frac{GI_p}{L_{vite}}$  con  $I_p = \frac{\pi}{32}d^4$  momento di inerzia polare,  $G$  modulo elastico tangenziale. Non dipende molto dalla chiocciola, perciò si considera come costante al variare della posizione.

### Rigidezza Assiale

La rigidezza assiale è data da  $K_{assiale} = \frac{EA}{L_{assiale}}$ , con  $A$  sezione della vite. In questo caso l'effetto della chiocciola NON è trascurabile. In particolare a seconda del tipo di vincolo sulla vite cambia sensibilmente.

**Caso unico vincolo assiale:** Se sulla vite è posto un unico vincolo assiale (AA,AI,IL), allora un estremo è libero di muoversi assialmente, perciò non sarà interessato dalla rigidezza assiale. In questo caso la lunghezza assiale è determinata dalla distanza tra motore e chiocciola. In termini di rigidezza minima questa si verifica per lunghezza assiale massima, ossia quando la chiocciola è posta in prossimità dell'estremo assialmente libero. Mentre varrà per  $L_{assiale} = 0 \rightarrow K_{assiale} = \infty$ .

**Caso doppio vincolo assiale:** Se sulla vite è posto un doppio vincolo assiale (II), allora entrambi gli estremi saranno interessati dalla rigidezza assiale. In questo caso la vite viene divisa in due molle equivalenti poste in parallelo, di lunghezze  $x$  (posizione della chiocciola),  $L_v - x$  (resto della vite)<sup>3</sup>:  $K_{ass,vite}(x) \simeq \frac{EA}{x} + \frac{EA}{L_v - x}$ . La rigidezza ha massimo in corrispondenza di  $K_{ass,vite}^{\max}(x=0, L_v) \rightarrow \infty$ , nota bene che se questa rigidezza è infinita, nel calcolo della rigidezza equivalente per il modello a 2gdl i parametri prima ritenuti trascurabili non potranno più esserlo. La rigidezza ha minimo in corrispondenza del punto medio della vite per cui si ottiene  $K_{ass,vite}^{\min} = \frac{4EA}{L_v}$ .

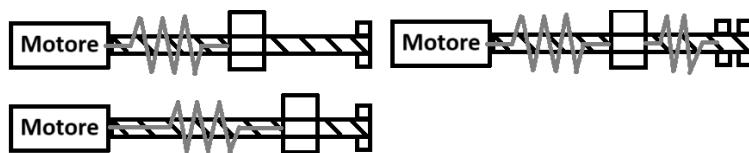


Figura 3.7: Rigidezza per vincoli assiali: unico a sx, doppio a dx

**Usare rigidezza equivalente:** Il valore di  $K_{eq}$  di per sè non crea problemi, tuttavia considerando il modello a 2 gdl e considerando il motore incastrato, si otterrà una pulsazione di antirisonanza  $\omega_z = \sqrt{\frac{K_{eq}}{M_{eq}}}$  relativa alla funzione di trasferimento data da  $\frac{\Theta(s)}{C_m(s)}$ . La massa equivalente è data da  $M_{eq}(d) \simeq M_{carico} + M_{chiocciola} + \frac{M_{vite}}{3}$ ; la rigidezza è funzione di  $K_{eq}(p, d, x)$ , perciò  $\omega_z(p, d, x)$ , e la pulsazione di antirisonanza ha implicazioni sulla banda passante  $\omega_{bv} \leq \omega_z \cdot [50\% \div 70\%]$ , quindi su inseguimento del riferimento.

**Rappresentazioni in grafico p,d:** In termini di grafico passo, diametro: per  $d$  piccoli,  $K_{ass}$  è minore quindi più critico; per  $p$  grandi diventa più rilevante l'effetto torsionale perché una torsione per passo grande implica un grande spostamento assiale.

### 3.1.6 Verifica Statica

Per verificare staticamente una vite si utilizzano due verifiche:

- Deformazione statica della vite, legata a forza peso;

<sup>3</sup>In realtà la lunghezza assiale considera non la lunghezza totale della vite ma da vincolo a vincolo, tuttavia è spesso una buona approssimazione.

- Instabilità al carico di punta, ossia deformazione legata a forza di compressione sulla vite, di tipo euleriano.

Tuttavia le verifiche statiche sono meno severe delle verifiche dinamiche, il vincolo che si può trovare in termini di diametro minimo esclude una area di grafico già esclusa dalla velocità critica della vite.

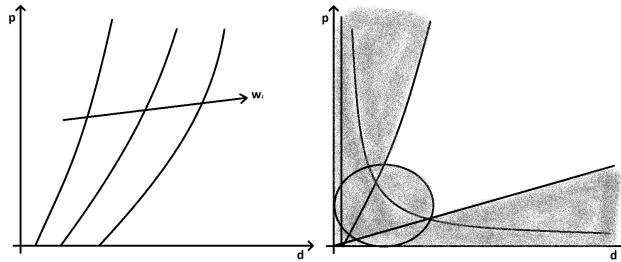


Figura 3.8: Rappresentazione vincolo p,d per antirisonanza sx, grafico di tutti i vincoli dx

### 3.1.7 Gioco Assiale

Prima ancora della scelta di p, d è opportuno scegliere il gioco, che tipicamente è indipendente da p,d perciò nei cataloghi è in sezione a sè stante. Il problema del gioco è legato alla grandezza delle gole rispetto le sfere, questo comporta forze che non sono esattamente assiali, ma hanno componente normale.

**Soluzione 1:** Utilizzo di sfere maggiorate, che vadano a occupare più spazio all'interno delle gole, tuttavia questo comporta un aumento dell'attrito e maggior richiesta di manutenzione.

**Soluzione 2:** Utilizzo di Precarico o Shift di passo. Per lo shift di passo viene introdotto un certo  $\Delta$  in un passo, tale per cui le forze normali si annullino. Per poter il precarico occorre utilizzare una chioddiola apposita che, tramite una molla regolabile, forza il contatto delle sfere con le gole. Questi metodi, però, aumentano di conseguenza l'attrito, perciò il carico dinamico viene fissato non oltre il 10% di  $C_D$ , il cui calcolo va modificato di conseguenza:  $C_D \geq \frac{f_a F_a}{0.9} \sqrt[3]{\frac{L_N}{10^6}}$ . In alcuni casi il sistema è precaricato per configurazione, per esempio quando la vite è posta verticalmente.



Figura 3.9: Gioco nelle viti fig 1,2; precarico fig 3,4

## 3.2 Passo ottimo

Le stesse valutazioni fatte per i riduttori (vedi 2.3, a pagina 16) si possono trasporre alle viti a ricircolo di sfere, per cui si parlerà di  $p_{opt} = 2\pi \sqrt{\frac{(J_m + J_r) \ddot{x}_{RMS}}{(F_a/\eta_r)^{RMS}}}$ .

**Effetto del Diametro:** Il diametro entra nel calcolo dell'inerzia, in particolare, sostituendo la massa  $J_v = \frac{1}{2} L \rho \pi \frac{d^4}{16} = \alpha d^4$ , perciò  $p_{opt} = 2\pi \sqrt{\frac{(J_m + \alpha d^4) \ddot{x}_{RMS}}{(F_a/\eta_r)^{RMS}}}$ , ossia il passo della vite varia circa quadraticamente con il diametro.

**Stima coppia del motore per diversi passi e diametri:** Quando dovesse essere necessario fare valutazioni di varie tipologie di viti aventi diverse combinazioni di passi e diametri, per evitare di fare tutti i conti ogni volta, è possibile sfruttare la diseguaglianza triangolare per cui  $RMS(a+b) \leq RMS(a) + RMS(b)$ . Nel caso in esame, al variare del diametro cambia  $J_v$ , mentre col passo varia  $\tau_v$ , per cui la diseguaglianza triangolare risulta essere:

$$C_m^{RMS} \leq (J_m + J_v) \frac{\ddot{x}_{RMS}}{\tau_v} + \tau_v \frac{F_A^{RMS}}{\eta}$$

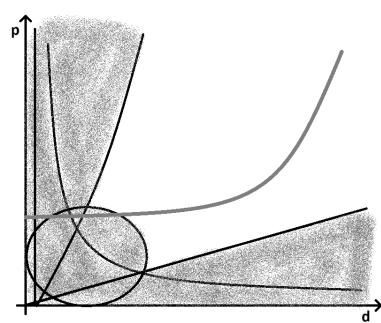


Figura 3.10: Passo Ottimo Libero e Vincoli

# 4 PIANIFICAZIONE DEL MOTO

Pianificazione del moto significa scegliere la legge di moto, ossia *La relazione matematica che esprime il moto in termini di posizione, velocità e accelerazione di un asse, motore o carico, in funzione di un parametro indipendente.*

- Tempo,  $t[s]$
- Posizione di un altro asse,  $q[m]$ 
  - Virtuale: camme elettroniche come clock di macchine
  - Reale
    - \* 2 assi meccanicamente accoppiati: camme meccaniche
    - \* 2 assi accoppiati solo con controllo: camme elettriche

**Scelta delle Leggi di Moto** Le specifiche in termini di legge di moto sono tendenzialmente poche, legate a: tempo di ciclo, spazio percorso, velocità minima, massima; a partire dalle quali va fatta una ottimizzazione consci di non poter ottenere una legge di moto perfetta.

**Criteri di Scelta** La scelta del tipo di legge di moto viene effettuata a partire da alcune caratteristiche progettuali:

1. Minimizzazione di velocità massima o RMS
2. Minimizzazione di accelerazione massima o RMS
3. Minimizzazione dell'energia
4. Minimizzazione della potenza
5. Garantire realizzabilità della legge di moto in termini dinamici<sup>1</sup>

In generale la scelta dipende da progetto a progetto, tuttavia conviene cercare di avere focus su un parametro in particolare, perché diversi di questi risultano tra loro in trade off. Per esempio scegliere una forma d'onda di velocità triangolare senza riposo limita l'accelerazione massima al valore RMS, tuttavia questo potrebbe non permettere una buona scelta del motore per il quale non si andrebbe ad utilizzare la zona di lavoro intermittente.

## 4.1 Formulazione delle principali leggi di Moto

Le leggi di moto si dividono in due categorie: Punto-Punto (PP), quando le specifiche sono su punto di inizio e fine o Con specifiche su punti o tratti intermedi. All'interno della tipologia Punto-Punto c'è un sottogruppo per cui la velocità iniziale e finale sono sulle detto Rest-to-Rest (RtR). In seguito verranno analizzati alcune leggi di moto del caso PP, con particolare attenzione ai sottocasi RtR.

Di particolare interesse è il moto simmetrico, ossia avente funzione velocità simmetrica rispetto  $\frac{T}{2}$ .

### 4.1.1 Parametrizzazione

Per successive analisi conviene introdurre una normalizzazione dei tempi di accelerazione  $\lambda_A = \frac{t_A}{T}$  e deaccelerazione  $\lambda_D = \frac{t_D}{T}$ , tenendo conto che per ciascuno vale  $0 < \lambda < 1$  e  $0 < \lambda_A + \lambda_D < 1$ .

**Parametri di merito:** A partire dalla parametrizzazione si possono ricavare per i vari parametri di progetto dei valori indipendenti da  $h$  alzata e  $T$  periodo di lavoro. L'utilizzo di questi valori permette di semplificare la scelta della legge di modo fornendo delle figure di merito confrontabili, da porter tabellare.

- $C_V$  coefficiente di velocità massima, con velocità massima  $v_{max} = \frac{h}{T} C_V$
- $C_{A+}$  coefficiente di accelerazione massima, con accelerazione massima  $a_{max} = \frac{h^2}{T^2} C_{A+}$
- $C_{A-}$  coefficiente di decelerazione massima, con decelerazione massima  $a_{min} = \frac{h^2}{T^2} C_{A-}$

---

<sup>1</sup>In termini di banda passante di motore, controllo, di spettro della legge di moto e vibrazioni.

- $C_A^{RMS}$  coefficiente di accelerazione RMS, con accelerazione RMS  $a^{RMS} = \frac{h}{T^2} C_A^{RMS}$
- $C_J$  coefficiente di jerk massimo, con jerk massimo  $j_{max} = \frac{h}{T^3} C_J$

Per poter ricavare dei valori generici è sufficiente ricavare la grandezza di cui interessa il coefficiente, considerando un'alzata di 1 metro in un periodo di 1 secondo.

#### 4.1.2 Scalatura delle leggi

A partire dalle leggi di moto utilizzate è possibile scalarle in relazione alle richieste della specifica applicazione. Guardando velocità, accelerazioni, jerk massimi e accelerazione RMS, si può cogliere come la variazione di alzata  $h$  provoca una variazione lineare del coefficiente (raddoppiare l'alzata porta a raddoppiare il coefficiente). Mentre la variazione del tempo dipende in modo inversamente proporzionale con grado pari all'ordine della derivata in esame (dimezzare il tempo porta a raddoppiare la velocità, ma a quadruplicare le accelerazioni).

#### 4.1.3 Rampa di posizione

Una rampa (limitata) di posizione è una legge di moto che descrive una funzione continua, ma non derivabile<sup>2</sup>; da questa legge di posizione si ottiene una velocità discontinua e accelerazione che tende all'infinito, cosa tuttavia irrealizzabile, perché richiederebbe motore a coppia infinita.

#### 4.1.4 Trapezoidale in velocità

Una forma trapezoidale in velocità risulta in una funzione posizione continua e derivabile, di velocità continua ma non derivabile, quindi accelerazione discontinua, ma finita. Nel caso di traiettoria RtR  $v_{fin} = 0 = \int_{t_{in}}^{t_{fin}} \ddot{q} dt$ , ossia le aree sottese dalla funzione accelerazione devono essere uguali.

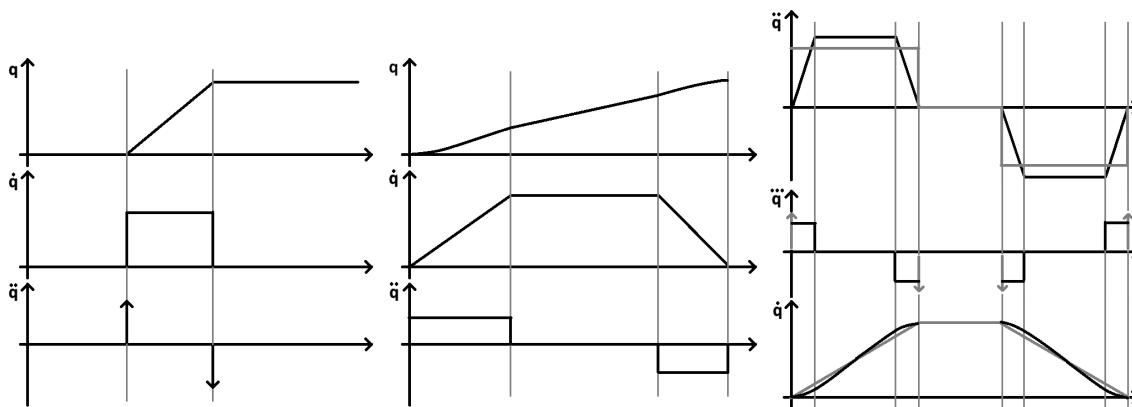


Figura 4.1: Rampa Posizione sx; Trapezoidale Velocità centro; Trapezoidale Accelerazione dx

#### Grandezze significative (RtR)

La velocità massima ottenibile si può determinare integrando la funzione di velocità, o più semplicemente facendo valutazioni geometriche sul trapezio, da cui si ottiene  $V_{max} = \frac{h}{\frac{\tau_A}{2} + t_C + \frac{\tau_D}{2}}$ . Possono essere ricavate di conseguenza l'accelerazione  $|A| = \frac{V_{max}}{t_A}$  e la decelerazione  $|D| = \frac{V_{max}}{t_D}$ . Vale inoltre  $\frac{|A|}{|D|} = \frac{t_D}{t_A}$ .

**Velocità con parametrizzazione:** La velocità massima ottenibile diventa  $V_{max} = \frac{h}{T} \frac{1}{1 - \frac{\lambda_A}{2} - \frac{\lambda_D}{2}}$ , dove  $v_{media} = \frac{h}{T}$  ed è indipendente dalla traiettoria, viene definito  $C_v = \frac{1}{1 - \frac{\lambda_A}{2} - \frac{\lambda_D}{2}}$ .

**Accelerazione con parametrizzazione:** L'accelerazione ottenuta diventa  $A = \frac{h}{T^2} \frac{1}{\lambda_A} \frac{1}{1 - \frac{(\lambda_A + \lambda_D)}{2}}$ , dove  $a = \frac{h}{T^2}$  rappresenta l'equivalente valore in caso di moto con accelerazione costante, da cui viene definito  $C_{A+} = \frac{1}{\lambda_A} \frac{1}{1 - \frac{(\lambda_A + \lambda_D)}{2}}$ . In modo del tutto simile, associata alla decelerazione  $D$ , viene definito  $C_{A-} = \frac{1}{\lambda_D} \frac{1}{1 - \frac{(\lambda_A + \lambda_D)}{2}}$ .

<sup>2</sup>Nel senso che la derivata destra e sinistra non coincidono in corrispondenza di punti di inizio e fine della rampa. Si considerano in seguito la velocità e l'accelerazione come funzioni derivate da funzione definita a tratti.

**Accelerazione RMS:** L'accelerazione RMS si ottiene calcolando l'integrale usando le valutazioni geometriche per l'accelerazione e ricordando il legame tra  $|D|$  e  $|A|$ , da cui si può ricavare l'espressione finale  $\ddot{q}^{RMS} = \frac{h}{T^2} C_A \sqrt{\lambda_A + \frac{\lambda_D^2}{\lambda_D}}$ , in cui viene definito  $C_A^{RMS} = C_A \sqrt{\lambda_A + \frac{\lambda_D^2}{\lambda_D}}$ . Analizzando la funzione si ottiene un minimo assoluto per  $\lambda_A = \lambda_D = \frac{1}{3}$ , valori in corrispondenza dei quali si ottiene un moto simmetrico (equamente distribuito tra accelerazione, velocità costante e decelerazione).

**Potenza meccanica:** Nel moto trapezoidale in velocità i punti più critici in termini di velocità sono per termine di fase di accelerazione e inizio fase di decelerazione, per cui si hanno  $\max(\ddot{q})$  e  $\max(\dot{q})$ , che portano ad avere, nel caso inerziale,  $\max(W_M)$  proporzionale a  $\max(\ddot{q}) \cdot \max(\dot{q})$ . A partire dalla potenza massima, si può definire il coefficiente di potenza massima come  $C_W = C_V C_A = \frac{1}{\lambda(1-\lambda)(1-\gamma)}$  nel caso di moto simmetrico.

### Legge trapezoidale con moto simmetrico, RTR

Nel caso di legge trapezoidale con moto simmetrico, vale  $\lambda_A = \lambda_D := \lambda \in (0, 1/2]$ , i coefficienti diventano:  $C_V = \frac{1}{1-\lambda}$ ;  $C_A = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{1-\lambda}$ ;  $C_A^{RMS} = C_A \sqrt{2\lambda}$ .

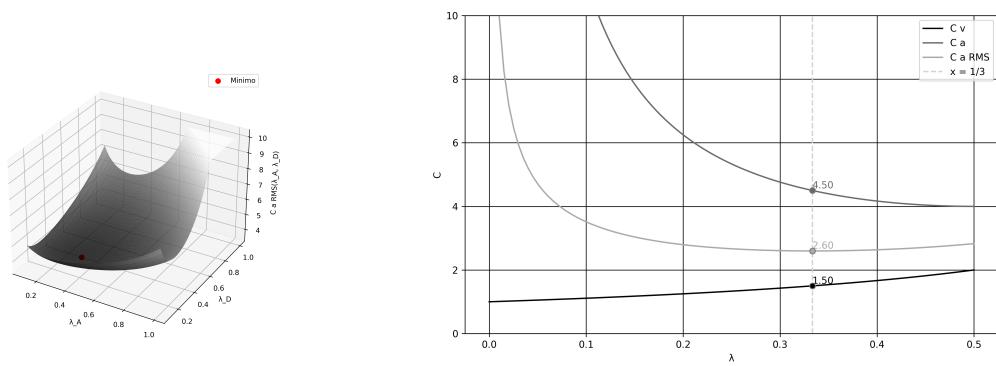


Figura 4.2: Coeff accelerazione RMS sx; Coeff per caso moto simmetrico dx

In questo caso risulta chiaro come ci sia un trade-off tra velocità e accelerazione. Una prima scelta sensata (da cui partire per poi affinare la ricerca) potrebbe essere  $\lambda = \frac{1}{3}$ , valore per cui si ha il minimo di coefficiente di accelerazione RMS, un basso coefficiente di accelerazione e un valore abbastanza basso di coefficiente di velocità, infine è anche prossimo all'ottimo energetico.

**Simmetria vs Assimetria:** Quando c'è una disparità tra forze esterne in accelerazione e decelerazione (es ascensore o piano inclinato), conviene utilizzare una legge assimetrica al posto di una simmetrica per distribuire meglio le due aree. In modo del tutto equivalente si può utilizzare l'espressione ottenuta per il caso simmetrico anche per il caso assimmetrico introducendo un  $\lambda_m = \frac{\lambda_A + \lambda_B}{2}$ .

### 4.1.5 Trapezoidale in Accelerazione

A partire da una legge trapezoidale in velocità, considero di fare una legge trapezoidale in accelerazione che abbia la stessa velocità massima, questo influenza la scelta dei raccordi<sup>3</sup>. Infatti per ottenere la stessa velocità massima le aree delle due accelerazione deve essere uguale; a seguito di semplici valutazioni geometriche si può ricavare l'accelerazione massima per la trapezoidale in accelerazione come  $A_m = \frac{h}{T^2} \frac{1}{\lambda(1-\lambda)(1-\gamma)}$ , dove  $\gamma = \frac{t_R}{t_A}$  ossia il tempo di raccordo normalizzato al tempo totale di accelerazione. In questa legge di moto l'accelerazione risulta continua, cosa che aumenta la semplicità realizzativa, vengono ridotte le vibrazioni, ma aumentano l'accelerazione massima e RMS.

#### Jerk

Il jerk è la derivata nel tempo dell'accelerazione. Un jerk finito porta ad avere accelerazione continua, si parla in questi casi di legge di moto dolci; un jerk infinito porta ad avere un'accelerazione discontinua, si parla quindi di leggi non dolci. Anche per il jerk si può definire il coefficiente di jerk massimo  $\ddot{q} = \frac{h}{T^3} C_J$ . Nel caso di trapezoidale in accelerazione  $C_J = \frac{C_A}{\lambda\gamma}$

<sup>3</sup>Nel caso in figura i raccordi sono lineari, tuttavia potrebbero essere polinomiali, esponenziali, sinusoidali, ecc nel caso debbano essere modificati i coefficienti o migliorato lo spettro della legge di moto.

#### 4.1.6 Polinomiale di Terzo Grado

Si parla in generale di polinomiale per intendere una funzione polinomiale in posizione di un certo ordine.

Nel caso di terzo grado la legge di moto è definita dalle seguenti equazioni.

$$\begin{cases} q(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + a_3(t - t_0)^3 \\ \dot{q}(t) = a_1 + 2a_2(t - t_0) + 3a_3(t - t_0)^2 \\ \ddot{q}(t) = 2a_2 + 6a_3(t - t_0) \end{cases}$$

Per definire univocamente il polinomio sono necessarie 4 condizioni, che solitamente sono:

$$\begin{cases} q(t_0) = q_{in} \\ q(t_0 + T) = q_{fine} \\ \dot{q}(t_0) = \dot{q}_{in} \\ \dot{q}(t_0 + T) = \dot{q}_{fine} \end{cases}$$

E a partire dalle quali è possibile ottenere i coefficienti  $a_0, a_1, a_2, a_3$ .

Nel caso di polinomiale di terzo grado avente  $h = 1$ ,  $T = 1$ ,  $t_0 = 0$  le espressioni della legge di moto, per  $t \in [0, T]$ , diventano:

$$\begin{cases} q(t) = 3t^2 - 2t^3 \\ \dot{q}(t) = 6t + 6t^2 \\ \ddot{q}(t) = 6 - 12t \\ \dddot{q}(t) = -12 !!! \end{cases}$$

Prestare estrema attenzione al calcolo del jerk, perché per leggerezza si potrebbe scrivere  $\ddot{q}(t) = -12$ , tuttavia sarebbe scorretto, perché nei punti di estremo l'accelerazione non è nulla, ciò significa che le tangenti destra e sinistra sono diverse, per quei valori il jerk è infinito.

Per quanto riguarda i coefficienti tenere da conto che la polinomiale di terzo grado ha il valore minimo per quanto riguarda i coefficienti di accelerazione RMS di tutte le leggi di moto classiche. I valori sono:  $C_V = 1.5$ ,  $C_A = 6$ ,  $C_A^{RMS} = 3.4$ ,  $C_J = \infty$

#### 4.1.7 Polinomiale di Quinto Grado

La polinomiale di quinto grado utilizza 6 coefficienti, quindi il problema per essere ben posto richiede 6 condizioni al contorno. In modo del tutto simile al caso della polinomiale di terzo grado in generale sono  $q_{in}$   $q_{fine}$   $\dot{q}_{in}$ ,  $\dot{q}_{fine}$ ,  $\ddot{q}_{in}$ ,  $\ddot{q}_{fine}$ . Posizione, velocità sono continue e derivabili, l'accelerazione è solo continua, il jerk è finito ma discontinuo.

Considerando la condizione RtR e usando la normalizzazione, considero gli step di creazione dei grafici:

1. Punti per velocità e accelerazioni nulle
2. Determinazione massimo velocità in  $t = 1/2$
3. Tracciamento della velocità
4. Valutazioni sulle tangenti di accelerazione agli istanti iniziali e finali: per un polinomio di terzo grado<sup>4</sup> ci sono 2 punti a tangente nulla e devono essere in corrispondenza dei valori di massimo e minimo<sup>5</sup>
5. Tracciamento dell'accelerazione
6. Tracciamento del jerk a partire da punti notevoli dell'accelerazione e soprattutto valutazioni su punti di discontinuità presenti nei punti iniziali e finali (legate a considerazione su accelerazione di cui sopra)
7. Tracciamento della posizione prestando attenzione alle tangenti nulle iniziali e finali.

#### 4.1.8 Polinomiale di Settimo Grado

Nel polinomio di settimo grado i coefficienti sono 8 e quindi le condizioni da imporre sono 8. In questo caso posizione, velocità, accelerazione sono continue e derivabili, il jerk è continuo ma non derivabile.

<sup>4</sup>Che è quello che si ottiene in accelerazione, avendo derivato due volte un polinomio di quinto grado.

<sup>5</sup>Non è possibile porre a tangenti nulle i valori iniziali e finali perché altrimenti l'accelerazione dovrebbe rimanere costante.

**Grado Terzo vs Quinto, Settimo:** Esaminando la tabella dei coefficienti e in particolare confrontando il polinomio di quinto e settimo grado con quello di terzo grado si può notare come la miglior dolcezza venga ripagata con un peggioramento dei coefficienti di velocità e accelerazione. Questo perché il maggior numero di radici può portare ad avere punti di massimo e minimo all'interno dell'intervallo temporale in esame, peggiorando drasticamente tutte le caratteristiche di velocità, accelerazione e consumo energetico.

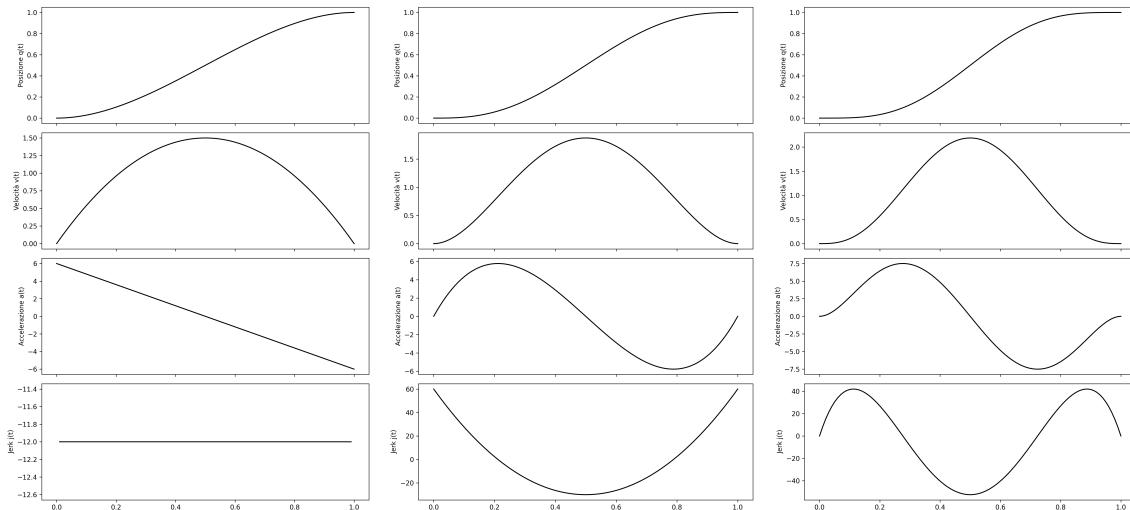


Figura 4.3: Polinomiali (RtR) grado 3 (sx), 5 (centro), 7 (dx)

#### 4.1.9 Leggi Trigonometriche

Quando nelle leggi vengono utilizzati seni e coseni. I risultati sono molto comparabili con leggi polinomiali. Sono definite in RtR, possono essere però adattate per condizioni iniziali e finali differenti.

**Cicloidale:** La legge cicloidale o sinusoidale in accelerazione è una legge molto dolce, che però ha coefficienti di velocità e accelerazione alti. Risulta paragonabile con la polinomiale di quinto grado.

**Armonica:** La legge armonica viene definita come mezzo periodo di una legge cosinusoidale, in velocità e accelerazione ha valori buoni. In particolare rispetto la polinomiale di terzo grado vede un miglioramento dell'accelerazione massima, che risulta nuovamente all'istante iniziale.

**Raccordi:** A partire dalla legge armonica, che risente della ridotta dolcezza legata al jerk infinito, è possibile modificare la legge introducendo un raccordo sinusoidale<sup>6</sup>

## 4.2 Composizione di Leggi di Moto

In modo simile a come fatto per i raccordi, è possibile a partire da specifiche di progetto, comporre diverse leggi di moto. Per semplicità di formulazione in casi generici si utilizzano leggi polinomiali almeno in prima istanza (sarebbe più complicato determinare condizioni iniziali di velocità e accelerazione non nulle per leggi più complesse).

Per la corretta formulazione occorre seguire i seguenti step:

1. Scrivere esplicitamente le condizioni
2. Contare le condizioni
3. Identificare il grado del polinomio (in relazione al numero di condizioni)
4. Calcolo dei coefficienti del sistema

**Disaccoppiamento** Potrebbe essere possibile risolvere i sotto-problemi separatamente se sono disaccoppiati tra loro. Non è vero in generale, perché i sotto-problemi possono essere tra loro accoppiati.

<sup>6</sup>I raccordi tendenzialmente non sono lineari. La durata del raccordo in applicazioni pratiche è T/8.

### 4.2.1 Tratti a Velocità Costante Imposta

Nell'esempio in figura vengono distinte quattro zone, ciascuna delle quali vede associata una legge di moto. Questo è uno di quei casi particolari in cui le leggi di moto possono essere ricavate separatamente (per questo nella risoluzione la zona4 viene affrontata prima della zona3). L'accelerazione, per questo esempio, basta non sia infinita, ossia la velocità dev'essere continua (potrebbe non essere derivabile nel dominio)<sup>7</sup>.

**Zona 1:** Condizione di velocità, posizione, per tempi iniziale e finale:  $q(t_0) = P_0$ ,  $q(t_1) = P_1$ ,  $\dot{q}(t_0) = 0$ ,  $\dot{q}(t_1) = v$ , per  $t \in [t_0, t_1]$ ; le condizioni sono 4, perciò la polinomiale sarà di terzo grado; a partire dalle condizioni è possibile ricavare i coefficienti della polinomiale.

**Zona 2:** Tratto a velocità costante:  $q(t) = P_1 + v(t - t_1)$ , per  $t \in [t_1, t_2]$

**Zona 4:** Tratto di sosta<sup>8</sup>:  $q(t) = P_0$ , per  $t \in [t_3, t_4]$ .

**Zona 3:** Tratto di ritorno: condizione di velocità, posizione, per tempi iniziale e finale:  $q(t_2) = P_2$ ,  $q(t_3) = P_0$ ,  $\dot{q}(t_2) = v$ ,  $\dot{q}(t_3) = 0$ , per  $t \in [t_2, t_3]$ ; le condizioni sono 4, perciò la polinomiale sarà di terzo grado.

#### Tracciamento qualitativo dei grafici

Per il tracciamento dei grafici conviene partire dalle tangenti nei punti di interesse (inizio, fine, congiungimento a tratti noti). Occorre prestare attenzione alle cuspidi in posizione. Bisogna fare attente valutazioni sui valori di velocità iniziali e finali (in questo caso non sono richiesti a 0), e se sia o meno continua (in questo caso no). Occorre fare opportune valutazioni sul grafico tracciato in velocità per determinare l'andamento dell'accelerazione che deve necessariamente essere coerente, valutando se sia continua o meno (in questo caso no).

#### Punto di massimo di posizione

Nel definire le leggi di moto per i vari tratti è possibile che in posizione vi sia sovraelongazione quando si dovesse avere un'inversione di velocità, ad esempio per ritornare ad un punto iniziale, o comunque precedente. Il problema legato alla sovraelongazione è che non è noto a priori il valore massimo di posizione, nè il tempo cui avviene. Pensando in ottica di ritorno alla posizione di partenza, di solito questa viene effettuata nel minor tempo possibile, portando quindi ad avere nelle peggiori condizioni in termini di velocità e accelerazione, anche un massimo di posizione.

**Scelta punto di inversione:** Per risolvere questo problema occorre impostare il punto di inversione in termini di tempo e posizione. Fatto ciò si divide la zona in cui è presente l'inversione in due, una prima in cui si arriva fino al massimo e una seconda in cui dal massimo si vada a scendere. In particolare la seconda di queste due zone aggiuntive, noto che l'inversione viene effettuata per velocità nulla (per massimo della funzione posizione), e sempre in condizione di ritorno alla posizione precedente, è nelle condizioni di RtR, per cui è possibile ottimizzare la legge andando a scegliere la legge di moto più adatta all'applicazione.

**Scelta del tempo di inversione:** La scelta di tempo di inversione è determinato dalla necessità di ridurre le velocità e accelerazioni massime e RMS, cosa fattibile per le valutazioni sulla zona che segue il punto di inversione. C'è tuttavia da notare che per la zona precedente il punto di inversione, invece, non è detto ci sia una condizione tanto favorevole, per tempi lunghi e polinomiali di grado elevato potrei avere l'insorgere di massimi/minimi relativi/assoluti in prossimità della posizione di inversione. Per scongiurare quest'evenienza è sufficiente limitare il tempo di posizione di inversione, oltre a questo limitare il tempo di sovraelongazione permette di dedicare più tempo alla discesa.

### 4.2.2 Passaggio Esatto per N Punti Intermedi

Per la risoluzione di un problema in cui sia richiesto il passaggio esatto per un numero di punti intermedi si utilizza il metodo **S.P.Line**, Smooth Path Line, per via dell'accelerazione continua che viene richiesta, quindi perché la legge è dolce.

#### Condizioni

Per la posizione sono definite dalle specifiche del problema, per N punti sono  $2(N - 1)$  condizioni. Per la velocità è richiesta la continuità per punti intermedi, perciò le leggi  $i$ ,  $i + 1$  devono necessariamente avere rispettivamente velocità finale e iniziale uguali  $\dot{q}_i(t_{i+1}) = \dot{q}_{i+1}(t_{i+1})$  (il problema è accoppiato perché non sono noti i valori intermedi di velocità), le condizioni sono  $N - 2$ . Sono inoltre necessarie le condizioni iniziali e finali di velocità, sono quindi 2 condizioni. Per l'accelerazione è richiesta continuità nei punti intermedi quindi le leggi  $i$ ,  $i + 1$  devono avere rispettivamente accelerazioni finali e iniziali uguali  $\ddot{q}_i(t_{i+1}) = \ddot{q}_{i+1}(t_{i+1})$ ,

<sup>7</sup>HMW: Capire cosa cambia per accelerazione continua e per accelerazione, jerk continuo (tipiche richieste da esame).

<sup>8</sup>Attenzione a non complicarsi inutilmente la vita andando a scrivere leggi polinomiali quando basta semplicemente scrivere posizione uguale a costante.

sono quindi  $N - 2$  condizioni. Sommando tutto si ottengono  $4(N - 1)$  condizioni, ciò significa che avrò  $N - 1$  polinomi di grado 3.

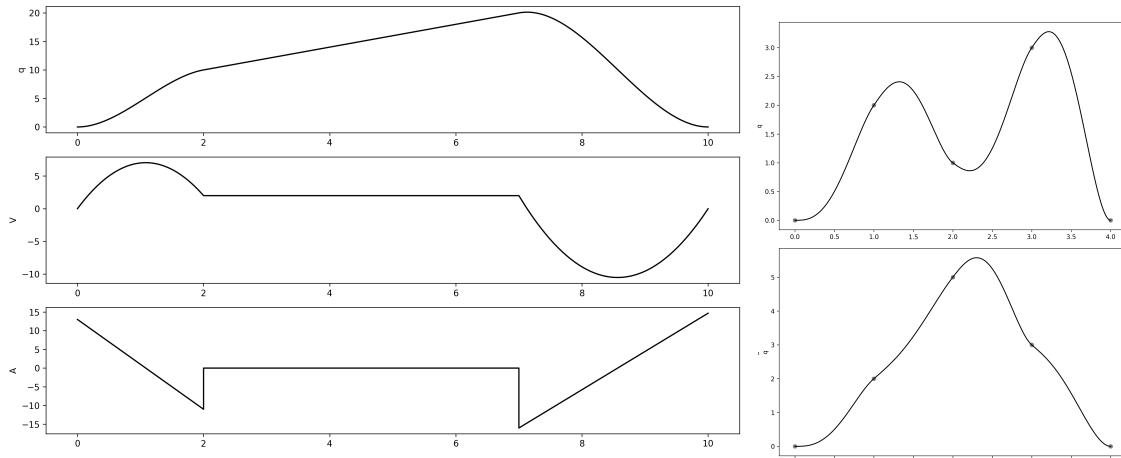


Figura 4.4: Es tratti a velocità costanti (sx); Spostamento punto SPLLine (dx)

### Soluzione

Per risolvere il problema è necessario esplicitare TUTTE le condizioni, questo perché in velocità e accelerazione ci sono accoppiamenti tra le singole leggi polinomiali. Così facendo viene evidenziato il sistema lineare, che è facile da risolvere:

$$\left[ \begin{array}{c} \dots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} a_{0,i} \\ a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ a_{3,i} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{3,n-1} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Termini} \\ \text{Noti} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\}$$

**Senso fisico dell'accoppiamento:** Avere un accoppiamento significa che la matrice di cui sopra non è a blocchi. Significa anche che modificare la posizione o il tempo di un punto va a modificare TUTTI gli altri polinomi.

### 4.2.3 SPLLine

La Smooth Path Line permette di creare leggi di moto polinomiali per costruire una legge di moto a partire da specifiche in termini di passaggio obbligato per punti in posizione e tempo. In generale viene richiesta continuità di posizione e velocità in ogni punto, se poi fosse richiesta continuità di accelerazione unicamente per punti interni si potrà utilizzare una SPLLine cubica (perché  $4 * N - 1$  condizioni). Se però volessimo imporre accelerazione continua anche nei punti di estremo, ossia  $\ddot{q}_i(t_1) = A_{in}$  e  $\ddot{q}_{n-1}(t_n) = A_{fin}$ , quindi ci fossero due condizioni aggiuntive, il primo e l'ultimo polinomio dovranno essere di quarto grado; si parla in questo caso di **SPLLine 434** (usata anche in Robotica Industriale).

**Sintesi:** La SPLLine permette di avere una legge dolce, perché avente jerk finito. Tuttavia possono essere presenti sovraelongazioni in posizione (anche se tendenzialmente limitate perché il grado di SPLLine tendenzialmente è ridotto). E non c'è controllo su velocità e accelerazioni massime e RMS.

### Soluzioni

La presenza di sovraelongazioni in posizione può essere critica. Ci sono diverse possibili soluzioni:

- Introduzione di punti intermedi atti a forzare una determinata forma alla legge di moto
- Imposizione di velocità e/o accelerazione nulla nel punto di massimo desiderato, andando a spezzare in due la SPLLine proprio nel punto di massimo
- Spostaento dei tempi, che permette di ridurre sovraelongazione e di modificare velocità e accelerazioni

### Esempi SPLine con tratti intermedi a velocità imposta

Nel primo caso vanno utilizzate due SPLine, perché c'è disaccoppiamento dovuto dai tratti a velocità costante centrale e finale. Se per esempio il punto P8 che è anche quello inferiore dovesse avere una sovraelongazione critica, potrei pensare di far terminare lì la SPLine, impostare condizioni finali di velocità, accelerazione nulla e terminare la legge con la RtR preferita.

Nel secondo caso, rimuovere il tratto a velocità imposta finale, fa sì che non vi sia disaccoppiamento, quindi dalla zona di lavoro 3 si prosegue con la zona di lavoro 1, perciò è opportuno fare un'unica SPLine che iniziano e finiscono nel tratto a velocità costante. Anche in questo caso, se guardando la legge vi fossero punti critici per sovraelongazione potrei andare a separare in due SPLine imponendo sul punto critico velocità e accelerazioni nulle.

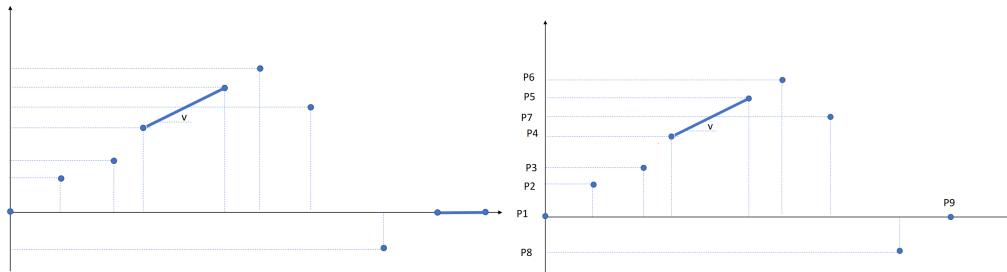


Figura 4.5: Esercizi 1 sx; 2 dx

# 5 CONTROLLO DEL MOTO PER TRASMISSIONE RIGIDA SENZA GIOCO

Nell'industria i controllori sono di tipo P, PI, quindi le valutazioni saranno su questi. Il modello di riferimento è quello classico del sistema motore, riduttore, carico a cui si aggiunge l'espressione base del motore:

$$\begin{cases} C_m(t) = J\ddot{\theta}(t) + f\dot{\theta}(t) + C_e(t) \\ C_m(t) = K_T i(t) \end{cases}$$

Che trasformata in Laplace diventa:

$$\begin{cases} C_m(s) = (Js^2 + fs)\theta(s) + C_e(s) \\ C_m(s) = K_T I(s) \end{cases}$$

In cui sono state raggruppate tutte le varie inerzie, coefficienti di attrito e coppie legate a forze esterne. Il sistema è a 1gdl.

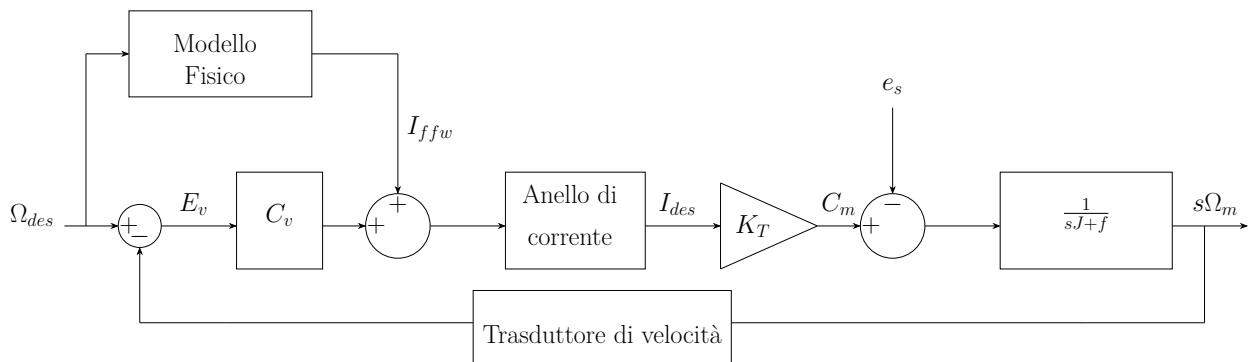
**Schema Multi-Anello:** In un sistema motore, riduttore, carico ci sono solitamente diversi anelli di controllo. Partendo dall'interno verso l'esterno ci sono gli anelli di: (tensione)<sup>1</sup> corrente, velocità e posizione.

**Anello di corrente:** L'anello di corrente è indipendente dalla meccanica; dipende dall'elettrica, dall'elettronica e dal controllo. Ha anche bande passanti caratteristiche ad alta frequenza [kHz].

**Anello di posizione:** L'anello di posizione dipende: anello di velocità; trasduttore di posizione; controllo di posizione. In applicazioni tipiche ha banda passante inferiore a 50Hz.

**Feedback vs Feedforward:** Nella trattazione classica dei controlli si tende a valutare soprattutto il sistema con feedback (catena chiusa), però tende a limitare le prestazioni. Un approccio più flessibile utilizza un feedback ben sintonizzato e un feedforward (catena aperta) basato sulla conoscenza (approssimata) del sistema fisico e del modello, che si traduce in una stima (nota a priori) di corrente<sup>2</sup> richiesta per la movimentazione.

## 5.1 Anello di Velocità



L'anello di velocità dipende da: anello di corrente; meccanica; trasduttori di velocità; controllore di velocità. Tipicamente ha bande passanti sul centinaio di [Hz].

### 5.1.1 Modello Semplificato 1

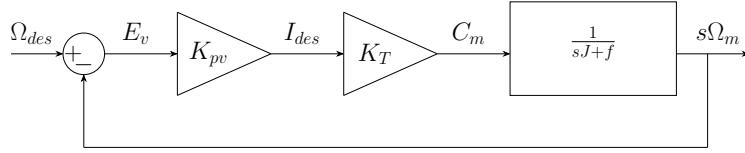
Lo schematico in figura è quello completo, tuttavia in prima analisi conviene fare delle approssimazioni:

- Coppie esterne vengono trascurate (valido per sovrapposizione degli effetti)
- Non utilizzo feedforward

<sup>1</sup>Nominato, ma non viene esaminato.

<sup>2</sup>Nel caso dell'anello di velocità.

- Trasduttore ideale, la misura non ha ritardi o errori, è come se il blocco relativo fosse 1
- Anello di corrente ideale, la corrente erogata, è come se il blocco relativo fosse 1



### Controllo proporzionale

Considerando il modello semplificato e l'utilizzo di un controllo di tipo proporzionale, ottengo che la funzione di trasferimento del sistema a catena chiusa è

$$W(s) = \frac{K_{pv}K_T}{K_{pv}K_T + f} \frac{1}{1 + s \frac{J}{f + K_{pv}K_T}}$$

dove  $\tau = \frac{J}{f + K_{pv} + K_T}$  è la costante di tempo<sup>3</sup>.

**Banda passante:** In un sistema del primo ordine la banda passante è data da  $\omega_B = \frac{1}{\tau}$ , tuttavia considerando trascurabile l'attrito risulta  $\omega_B \approx \frac{K_{pv}K_T}{J}$ . Quest'ultima relazione permette facilmente di sintonizzare il controllore invertendo  $K_{pv} = \frac{\omega_B J}{K_T}$ .

**Errore a regime:** Per un sistema del primo ordine il guadagno in continua/regime è dato da  $\frac{K_{pv}K_T}{K_{pv}K_T + f} < 1$ , che è necessariamente minore di 1, ossia l'errore a regime non è nullo. Questo è molto negativo. Non potendo impostare un guadagno proporzionale infinito, occorre necessariamente valutare un controllore di altro tipo che permetta di ottenere un errore a regime nullo, di modo da avere un guadagno in continua unitario.

### Controllo Proporzionale Integrale

Un controllore PI è del tipo  $C_V(s) = K_{pv} \frac{1+sT_{iv}}{sT_{iv}}$ , per cui il sistema a catena chiusa diventa

$$W_v(s) = \frac{K_{pv}K_T(1 + sT_{iv})}{s^2T_{iv}J + sT_{iv}(f + K_{pv}K_T) + K_{pv}K_T}$$

Come era voluto, il sistema così ottenuto ha guadagno in continua unitario. Però aumenta il numero di poli, diventa di secondo ordine<sup>4</sup> e viene aggiunto uno zero reale, che ha anch'esso forti implicazioni. Tuttavia il grado relativo rimane 1.

**Effetto dello zero reale:** Per valutare bene l'effetto dello zero nel sistema a catena chiusa adotto una parametrizzazione:

$$\frac{1 + \frac{s}{\alpha\xi\omega_n}}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + 1}$$

Utilizzare  $\alpha$  permette di valutare dove si trova lo zero rispetto i poli del sistema

$$\begin{cases} \alpha \gg 1 & \text{zero in alta frequenza} \\ \alpha \approx 1 & \text{zero vicino ai poli} \\ \alpha \ll 1 & \text{zero in bassa frequenza} \end{cases}$$

In particolare si nota come la presenza dello zero vada a incrementare la sovraelongazione.

**La sovraelongazione dipende da  $\xi$  e dalla posizione dello zero.** Di seguito un immagine con relazione tra picco di sovraelongazione  $M_p$  e posizione dello zero  $\alpha$ .

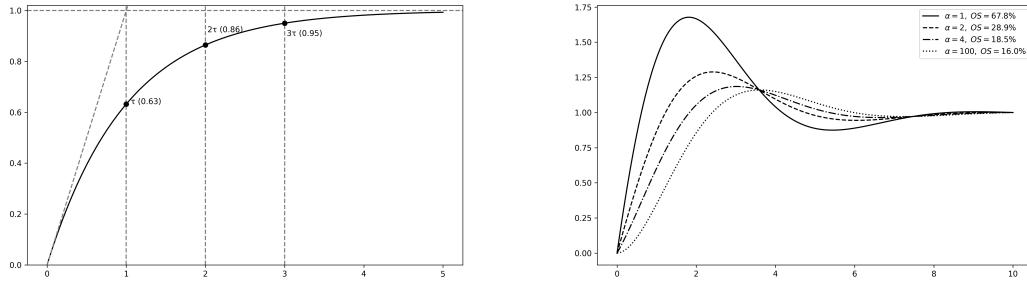
**Scomposizione sovraelongazione poli e zero:** A partire dal sistema a catena chiusa, vado a scomporre la componente legata al sistema del secondo ordine dal resto, cioè un sistema del secondo ordine derivato  $H(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + 1} + \frac{1}{\alpha\xi\omega_n} \frac{s}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + 1}$ , che nel tempo diventa  $h(t) = h_{2ord}(t) + \frac{1}{\alpha\xi\omega_n} \frac{dh_{2ord}(t)}{dt}$ .

Nella risposta al gradino avrò una componente legata alla risposta al gradino del sistema del secondo ordine e una componente legata alla risposta all'impulso<sup>5</sup> del sistema del secondo ordine.

<sup>3</sup>Nota bene: si può parlare di costanti di tempo solo per sistemi del primo ordine.

<sup>4</sup>Passando da un primo a un secondo ordine occorre fare attenzione per una serie di implicazioni; fare riferimento a quanto presente in appendice A.3.

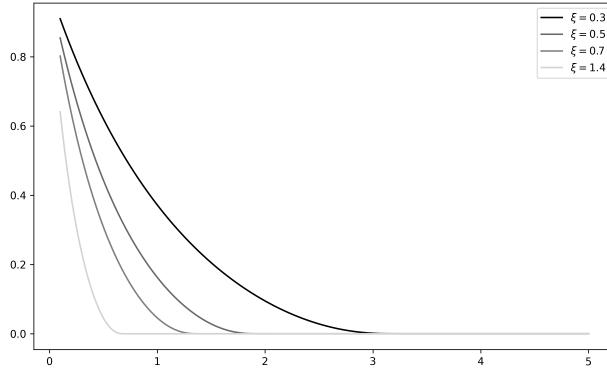
<sup>5</sup>Impulso che è la derivata del gradino.


 Figura 5.1: Risposta al gradino di sistema di ordine 1 (sx);  $M_p(\alpha)$  in risposta al gradino (dx)

- Se cala lo smorzamento, a parità del resto, la sovraelongazione aumenta per effetto dello zero:  $\downarrow \xi \uparrow M_p$
- Se  $\alpha \gg 1$  l'effetto legato allo zero diventa trascurabile
- Se  $\alpha \ll 1$  l'effetto legato allo zero è tanto più severo tanto è minore lo smorzamento

Quindi per attenuare la sovraelongazione conviene:

- Posizionare gli zeri ad alta frequenza  $\gg \xi \omega_n$
- Se  $\xi \ll 1$  aumenta la sensibilità allo zero quindi lo zero va portato ancora a più alta frequenza
- Se non è possibile intervenire su  $\alpha, \xi$ , occorre intervenire sulla legge di moto


 Figura 5.2: Relazione tra  $\alpha$  e  $M_p$ 

**Banda passante:** La banda passante di un sistema con controllore proporzionale è data da  $\omega_{b,v} = \frac{K_{pv} K_T}{J}$ . Riscrivendo la funzione di trasferimento per il controllore PI come visto per sistemi massa molla smorzatore  $W(s) = \frac{K_{pv} K_T (1+sT_{iv})}{s^2 M_{eq} + sC_{eq} + K_{eq}}$ , si ottengono come poli del sistema  $S_{1,2} = \frac{-C_{eq} \pm \sqrt{C_{eq}^2 - 4M_{eq}K_{eq}}}{2M_{eq}}$ . Il fattore di smorzamento vale  $\xi = \frac{C_{eq}}{2\sqrt{M_{eq}K_{eq}}} = \frac{\sqrt{T_{iv}}}{2} \sqrt{\frac{K_{pv} K_T}{J}}$ , dove la banda passante del sistema valeva per controllore proporzionale  $\omega_{b,v} = \frac{K_{pv} K_T}{J}$ , quindi  $\xi = \frac{\sqrt{\omega_{b,v} T_{iv}}}{2}$ . Lo zero del PI è in corrispondenza di  $\frac{1}{T_{iv}}$ , invertendo l'espressione di  $\xi$ , si può riscrivere  $\frac{1}{T_{iv}} = \frac{\omega_{b,v}}{4\xi_{des}^2}$ , ossia effettuando una opportuna scelta di fattore di smorzamento ( $\xi \in [0.7 \div 1.4]$  circa), la banda passante è ad un fattore 4 rispetto lo zero del PI, ossia la pulsazione di banda passante si ha quando l'effetto dell'integrale è già esaurito, quindi vale ancora la relazione della banda passante ricavata per controllore P:

$$\omega_{b,v} = \frac{K_{pv} K_T}{J}$$

**Approccio tipico alla risoluzione:** Dati limiti e specifiche sulla banda, si definisce una banda passante desiderata, si ricava il coefficiente proporzionale  $K_{pv}$ , vanno aggiunte specifiche sullo smorzamento, quindi si ricava  $T_{iv}$ .

### Legge di Moto

A leggi di moto più dolci si associano sovraelongazioni legate allo zero più trascurabili. A leggi di moto non dolci si associano sovraelongazioni legate allo zero maggiori.

L'utilizzo della finestratura (tempo finito) e la discontinuità in accelerazione, portano ad avere infinite armoniche. Tutto ciò che viene attenuato dalla banda passante comporta distorsione della legge nel tempo, tendendo ad addolcire la legge, eliminando le discontinuità. Questo effetto è più rilevante per leggi non dolci. Tuttavia, in una RtR, perdere armoniche porta a non ottenere arresto all'istante finale.

**Esempi:** In termini di leggi di moto la risposta al gradino è non dolce, perciò gli effetti delle sovraelongazioni sono particolarmente acuti.

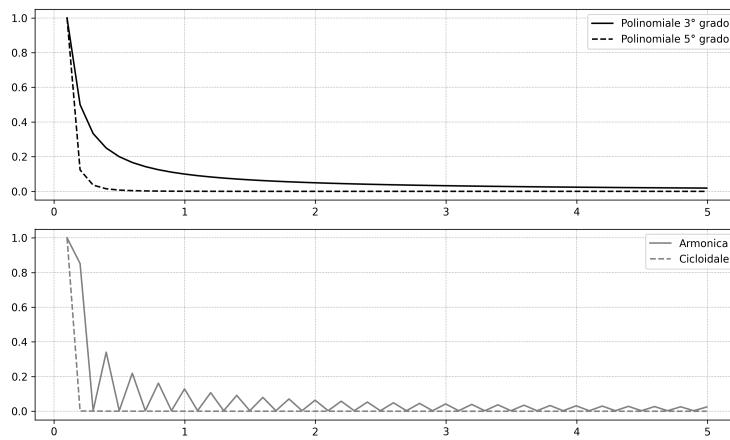


Figura 5.3: FFT delle principali leggi di moto

**Riduzione del tempo di moto:** La riduzione del tempo di moto peggiora gli effetti di distorsione perché: le armoniche aumentano di frequenza, perciò è più facile vengano attenuate; inoltre le singole armoniche vedono un incremento in termini di ampiezza  $\propto \frac{1}{T^2}$ .

### 5.1.2 Modello semplificato 2

A partire dal modello semplificato 1, vado a considerare anche l'anello di corrente e il trasduttore. La funzione di trasferimento del sistema a catena aperta diventa:  $L_v(s) = C_v(s)W_I(s)K_T\frac{1}{sJ+f}H_{T_v}(s)$ .

In prima approssimazione considero di introdurre i due elementi come sistemi del primo ordine:  $W_I(s) = \frac{1}{\omega_I + 1}$  e  $H_{T_v}(s) = \frac{1}{\omega_{T_v} + 1}$ .

Un tipico ordine di grandezza è  $\frac{f}{J} < \frac{1}{T_{iv}} << \omega_{tv} < \omega_I$ , la pulsazione del trasduttore di velocità e la quella dell'anello di corrente potrebbero essere scambiati.

Un aspetto da tenere bene a mente è la relazione di proporzionalità quasi lineare tra sovraelongazione e fattore di smorzamento<sup>6</sup>:  $\uparrow \mathbf{m}_\phi \leftrightarrow \uparrow \xi$ .

**Valutazione su margine di fase:** Dalla stabilità di Bode, noti i due strumenti del margine di fase e margine di guadagno, sapendo che portano a fare ragionamenti simili, per semplicità di trattazione verrà utilizzato il margine di fase<sup>7</sup>. In generale conviene cercare di tenersi lontano da margini di fase bassi (cui si associano smorzamenti equivalenti bassi), preferendo margini maggiori. La zona da preferire in questo modello è quella compresa tra  $\frac{1}{T_{iv}}$  e  $\min(\omega_{tv}, \omega_I)$  in cui il margine di fase tende a  $90^\circ$ . Assolutamente da evitare è la zona terminale, oltre  $\omega_I$  avente margine di fase negativo.

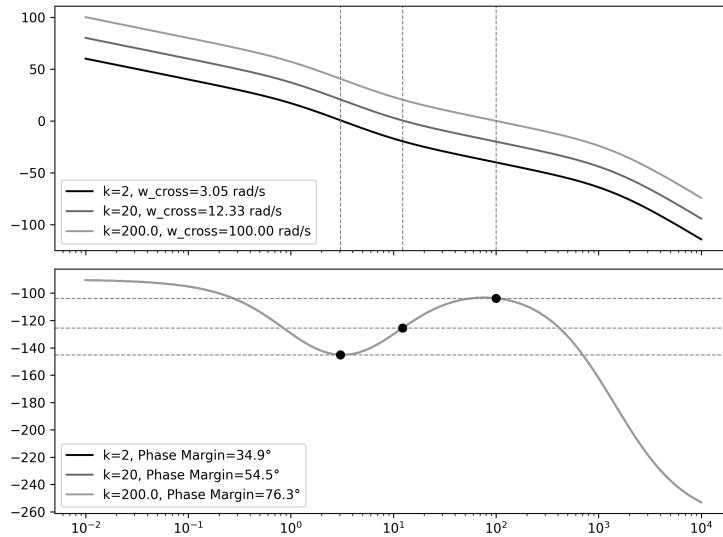
### Effetto di $K_{pv}$

Fissato<sup>8</sup>  $T_{iv}$ , variare  $K_{pv}$  porta a traslazione della curva del modulo (la fase resta invariata), perciò varia la pulsazione di attraversamento  $\omega_a$  e quindi varia la stabilità del sistema a catena chiusa.

<sup>6</sup> $\xi \simeq \frac{m_\phi^\circ}{100^\circ}$

<sup>7</sup>Vedi appendice A.5.4

<sup>8</sup>Viene fatto unicamente per fare delle valutazioni,  $K_{pv}, T_{iv}$  vanno scelti in combinazione.

Figura 5.4: Modulo e fase di  $L_v(s)$ 

**Logica di sintesi del controllore:** La scelta di  $K_{pv}$  viene effettuata in modo tale da avere  $\omega_a \in \left[ \frac{1}{T_{iv}}, \omega_{tv} \right]$  e  $\max(m_\phi) \simeq 90^\circ$ , cercando di migliorare la robustezza. Si potrebbe privilegiare velocità di risposta e quindi valutare margini di fase minori.

#### Stima di pulsazione di attraversamento per massimizzazione margine di fase

Per la stima della pulsazione di attraversamento in corrispondenza del massimo margine di fase conviene utilizzare un modello semplificato, che permette di ottenere una buona precisione del calcolo, anche trascurando l'anello di corrente.

**1 - Trascurando l'anello di corrente:** Considerando  $W_I(0) = 1, \omega_I \rightarrow \infty$  e fissato  $T_{iv}$ , si ottiene che la zona di interesse,  $\left[ \frac{1}{T_{iv}}, \omega_{tv} \right]$ , è simmetrica in fase (perché parte da  $-180^\circ$  e termina in  $-180^\circ$ ), perciò è possibile calcolare la pulsazione di attraversamento ottima utilizzando il metodo dell'ottimo geometrico<sup>9</sup>  $\omega_{a,opt} = \sqrt{\frac{1}{T_{iv}}\omega_{tv}}$ .

**2 - Considerando l'anello di corrente:** Considerare l'anello di corrente porta differenze solo per frequenze "alte", per  $\omega > \frac{1}{T_{iv}}$ , in particolare calano il valore massimo del margine di fase e la pulsazione cui si verifica. Unisco le pulsazioni ad alta frequenza in un unico contributo equivalente  $T_{eq} = \frac{1}{\omega_{tv}} + \frac{1}{\omega_I}$ . Questo valore può essere utilizzato per valutare la pulsazione di attraversamento ottima  $\omega_{a,opt} = \sqrt{\frac{1}{T_{iv}}\frac{1}{T_{eq}}}$ , che sarà paragonabile a quanto ottenuto nel caso precedente.

**3 - Considerando il tempo di campionamento dell'anello di velocità:** Il controllore dell'anello di velocità ragiona in tempo discreto, tuttavia il sistema di interesse è quello fisico che lavora in tempo continuo. Tuttavia tra i due mondi c'è un legame, in particolare passando da tempo discreto a tempo continuo si va ad introdurre un ritardo, che può essere approssimato con una funzione del tipo<sup>10</sup>  $H_{zoh}(s) \simeq \frac{1}{1+s\frac{T_c}{2}}$ . In modo simile al precedente si può definire un contributo equivalente  $T_{eq} = \frac{1}{\omega_{tv}} + \frac{1}{\omega_I} + \frac{T_c}{2}$ , da cui, come prima  $\omega_{a,opt} = \sqrt{\frac{1}{T_{iv}}\frac{1}{T_{eq}}}$ , che sarà paragonabile a quanto ottenuto nel caso 1.

**4 - Trasduttore modellato con 2 poli reali:** Un ulteriore affinamento consiste nel modellare il trasduttore come fosse a 2 poli reali coincidenti, quindi  $T_{eq} = \frac{1}{\omega_{tv}} + \frac{1}{\omega_{tv}} + \frac{1}{\omega_I} + \frac{T_c}{2}$ , da cui ricavare un  $\omega_{a,opt}$  paragonabile con quanto ottenuto nel caso 1.

#### Considerazioni su banda passante

Considero un sistema avente  $m_\phi = 90^\circ$  e fdt del trasduttore unitaria, per definizione di margine di fase  $\angle L_v(j\omega_a) = -90^\circ$  e  $|L_v(j\omega_a)| = 1$  o in modo equivalente  $L_v(j\omega_a) = -j$ , perciò la fdt del sistema in catena

<sup>9</sup>La fase è simmetrica nell'intervallo, tuttavia l'asse delle ascisse è logaritmico, perciò non si può fare una media come metà della somma dei valori di estremo.

<sup>10</sup>Il ritardo in Laplace è rappresentato con un esponenziale, che tuttavia è scomodo da utilizzare, si utilizza quindi una forma approssimata.

chiusa  $W(j\omega_a) = \frac{L_v(j\omega_a)}{1+L_v(j\omega_a)}$ , sostituendo la fdt del sistema a catena aperta appena ottenuto e calcolando il modulo si ottiene  $|W(j\omega_a)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = -3dB$  ossia  $\omega_a = \omega_{b,v}$ .

Quello esaminato è un caso costruito ad hoc, e  $\omega_a$  e  $\omega_{b,v}$  sono legati a fenomeni fisici differenti, tuttavia, numericamente sono valori confrontabili. In generale il margine di fase sarà  $< 90^\circ$  perciò, intuitivamente, cala lo smorzamento, appare un picco di risonanza<sup>11</sup> che porta a un incremento della banda passante.

Tipicamente le pulsazioni sono legate dalla relazione:  $\omega_a < \frac{K_{pv} K_T}{J} < \omega_{b,v}$  e da attraversamento a banda passante può esserci un 20% ÷ 50% di incremento, tuttavia, per semplificazione:

$$\omega_a \simeq \frac{K_{pv} K_T}{J} \simeq \omega_{b,v}$$

**Sintesi euristica del controllore:** Quest'ultima espressione viene utilizzata per la sintesi euristica del controllore per andare a massimizzare il margine di fase; valgono:

$$\begin{cases} \omega_{b,v}^{des} \simeq \frac{1}{4\varepsilon_{des}^2} \\ K_{pv} \simeq \frac{\omega_{b,v}^{des} J}{K_T} \\ \frac{1}{T_{iv}} \simeq \frac{\omega_{b,v}^{des}}{4\varepsilon_{des}^2} \end{cases}$$

Con possibilità di scelta dello smorzamento:

$$\begin{cases} \xi \simeq 0.7 \text{ per sintonizzazione aggressiva con alta dinamica} \\ \xi = 1 \text{ per sintonizzazione standard} \\ \xi > 1 \text{ per sintonizzazione conservativa} \end{cases}$$

In termini partici la scelta dello smorzamento viene effettuato mediante uno slider software che modifica  $\xi$ , per quel valore calcola  $K_{pv}, T_{iv}$  infine va portato in macchina e aggiustato sul caso reale.

### Problema del trasduttore

Trascurando l'anello di corrente e il campionamento<sup>12</sup>, per  $\xi_{des} = 1$ , vale  $T_{eq} = \frac{1}{\omega_{tv}}$ , da cui  $\omega_{b,v}^{des} \simeq \frac{\omega_{tv}}{4}$ . La velocità non viene misurata direttamente, si ottiene per derivazione della posizione, tipicamente ottenuta con encoder o resolver. Dal momento che la posizione viene ricavata quantizzando, nella misura entra rumore bianco con componenti ad alta frequenza che vengono amplificate dal derivatore; risulta necessario applicare un filtro passa basso, la cui banda passante va a definire  $\omega_{tv}$ .

Il rumore è legato al cablaggio e alla risoluzione, in particolare diminuire la risoluzione permette di diminuire il rumore (a discapito di un peggioramento della ripetibilità della misura).

**Encoder reali:** Gli encoder classici con doppie piste hanno 3 tipologie di modalità per ottenere risoluzioni differenti: "1×" per cui  $\frac{360^\circ}{N_t}$ ; "2×" per cui  $\frac{360^\circ}{2N_t}$ ; "4×" per cui  $\frac{360^\circ}{4N_t}$ . In alternativa esistono encoder sin/cos composti da doppia pista "standard" e altre due: una sinusoidale, una cosinusoidale di semiperiodi pari a 1 tacca, che permettono di sapere all'interno della tacca dove si trova. La risoluzione in questo caso è dettata dal numero di bit utilizzati, ma si può arrivare fino a 0.0001 arcmin, avere risoluzioni così basse permette di ottenere  $\omega_{tv}$  molto elevate<sup>13</sup>, perciò conviene cercare la risoluzione maggiore, non tanto per la posizione, quanto per la velocità.

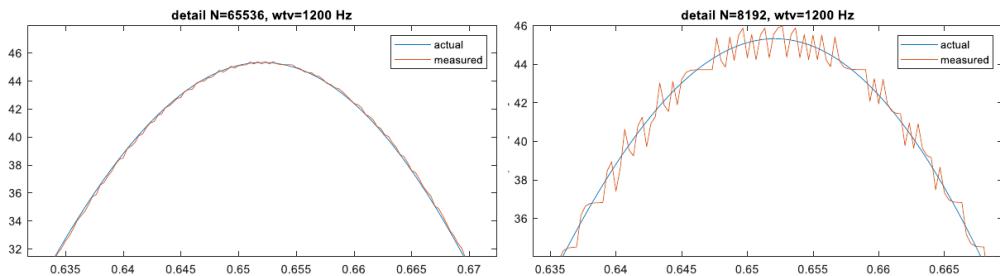


Figura 5.5: Rumore per due encoder filtrati con stesso pb

<sup>11</sup>Lo smorzamento influenza maggiormente zona di risonanza in catena chiusa, meno la catena aperta.

<sup>12</sup>Se li considerassimo  $\omega_{b,v}^{des} < \frac{\omega_{tv}}{4}$ .

<sup>13</sup>Anche in questo caso vale il teorema di Shannon, vedi appendice A per cui  $\omega_{tv} > \frac{2\pi f_c}{2}$

**Effetto del rumore:** Il rumore che si inserisce nel ramo di feedback ritorna nel ramo di andata dove viene moltiplicato per  $K_{pv}$  (che potrebbe amplificare il rumore), filtrato dall'anello di corrente, ma non in modo sostanziale, in seguito viene moltiplicato per  $K_T$ , per cui il rumore diventa un disturbo di coppia, che va al sistema meccanico, dove eccita le risonanze e il motore vibra nel gioco<sup>14</sup>, che viene "eccitato".

Prendendo gli stessi encoder di prima, ma cercando di ottenere **parità di rumore**, quindi filtrando maggiormente per quello avente minor risoluzione e di conseguenza aumentandone il ritardo, si nota come  $K_{pv} = \frac{\omega_{b,v}^{des} J}{K_T}$  ossia **maggiore la banda passante, maggiore l'amplificazione del rumore**. Nell'esempio precedente i valori sono  $K_{pv} = 1.3$  per  $\omega_{b,v} = 136 \left[ \frac{rad}{s} \right]$  e  $K_{pv} = 6.6$  per  $\omega_{b,v} = 660 \left[ \frac{rad}{s} \right]$ .

1. Potrebbe andare bene lavorare con encoder più risoluto anche se l'amplificazione è elevata
2. Potrebbe andare meglio usare l'encoder poco risoluto, alzando  $\uparrow \omega_{tv}$  e  $\uparrow$  rumore di velocità, mantenendo i guadagni limitati
3. Potrebbe andare meglio usare l'encoder molto risoluto, abbassando  $\downarrow \omega_{tv}$  e  $\downarrow$  rumore di velocità, mantenendo un'alta frequenza del polo del trasduttore di velocità

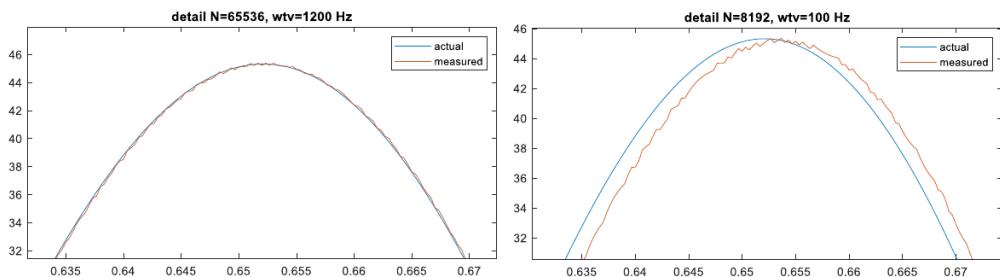
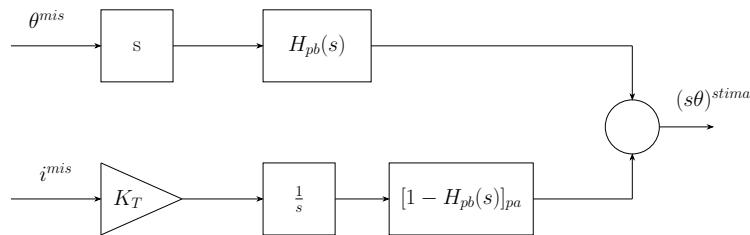


Figura 5.6: Ritardo per due encoder con stesso rumore

### Stimatore di velocità

Derivando la posizione si ottiene una stima di velocità, che però è ottenuta utilizzando un filtro passa basso, perciò la stima è buona a bassa frequenza. Se però si partisse da un valore di accelerazione, lo si integrasse, filtrasse con un filtro passa alto, si otterebbe una stima di corrente buona ad alta frequenza. L'accelerazione non viene misurata direttamente, ma si può ricavare a partire da misure di corrente (che sono influenzate dalla banda passante di corrente, che però è elevata); valgono:  $C_m = K_T i = J\ddot{\theta} + C_e$ , da cui  $\ddot{\theta} = \frac{K_T i - C_e}{J}$  in cui l'unico elemento non noto è la coppia legata alle forze esterne  $C_e$ .  $C_e$  si potrebbe stimare, oppure si può assumere sia in bassa frequenza, quindi filtrando con un passa alto (come anticipato è già presente un passa alto, perciò si utilizza quello) si può attenuare. Così facendo si ottiene una stima a ridotto rumore, ritardo e con  $\omega_{tv} \simeq \frac{2\pi f_c}{2}$



### Variazione dell'inerzia

Tarato il controllore per  $J = J_{nom}$  e ottenuto  $K_{pv}$  tale che  $\max(m_\phi)$ , variare l'inerzia può creare problemi. Se nel sistema con quel controllore l'inerzia dovesse aumentare:  $\downarrow \omega_{b,v}^r = \frac{K_{pv} K_T}{\uparrow J}$ , perciò  $\uparrow t_r$  e considerando  $\omega_{b,v} \simeq \omega_a$ ,  $\downarrow \omega_a$  ossia  $\downarrow m_\phi$  e  $\downarrow \xi$ . L'abbassamento del fattore di smorzamento introduce oscillazioni in bassa frequenza. Se nel sistema con quel controllore l'inerzia dovesse diminuire:  $\uparrow \omega_{b,v}^r = \frac{K_{pv} K_T}{\downarrow J}$ , perciò  $\downarrow t_r$  e  $\uparrow \omega_a$ , tuttavia l'aumento della pulsazione di attraversamento porta questa ad avvicinarsi a  $\omega_{tv}$ , e questo porta a  $\downarrow m_\phi$  e  $\downarrow \xi$ .

<sup>14</sup>Immagino il rotore che vibra quindi si muove di poco in senso orario fino a colpire l'estremo superiore del gioco e poi in senso antiorario in cui va a colpire l'estremo inferiore.

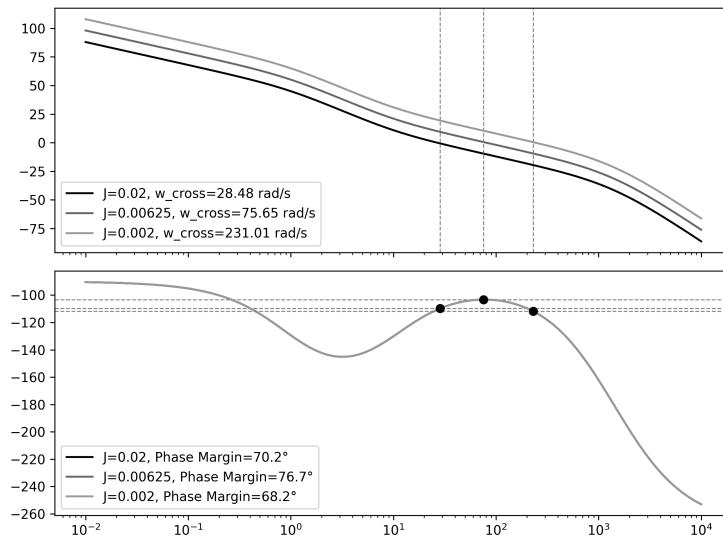


Figura 5.7: Inerzia variabile e variazione dei parametri

**Gestione della variazione di inerzia con controllore "fisso":** Per gestire la variazione di inerzia con un controllore a guadagno costante, si cerca di fare una taratura a partire da un valore di inerzia o massimo o minimo, di modo tale da assicurarsi un range di funzionamento.

### 5.1.3 Feedforward

Il feedforward aggiunto al sistema ad anello chiuso, permette di intervenire sulla  $\omega_{b,v}$  in relazione al tempo di moto e alle specifiche di inseguimento. Ha una serie di vantaggi:

- Sfrutta la conoscenza a priori
- Non necessita dell'errore per dare un comando
- Utile in transitorio
- Se il sistema è BIBO stabile e senza saturazione o altre non linearità, non lo destabilizza (perché opera in catena aperta)

**Il guadagno di feedforward di velocità va impostato a 1,** al controllo va passata la legge di moto com'è, di modo da poter ridurre i coefficienti del feedback e far andare il motore alla velocità progettata. Mentre il guadagno di feedforward di accelerazione che va all'anello di coppia/corrente è il fattore di conversione tra accelerazione e coppia/corrente.

#### Costruttori

Nei controllori industriali, per la taratura del feedforward, sono utilizzate diverse funzioni, ciascuna legata ad un termine della dinamica inversa: Inerzia; Attrito; Forze costanti; Cogging Torque del motore.

Rexroth utilizza una compensazione a coppia costante, questo permette di mantenere fisso un carico sollevato. Se il carico fosse frenato, venisse scollegato il freno, collegato il motore, ma non ci fosse il feedforward, il feedback prima lascerebbe che l'oggetto scenda, per rialzarlo solo ottenuto un certo errore. Col feedforward invece, con un'opportuna sincronizzazione freno motore, è possibile mantenere fisso il carico.

Kollmorgen invece utilizza un riferimento di velocità per fare una compensazione di attrito e attrito viscoso.

Rockwell infine utilizza un sistema di compensazione di attrito con modello a punti di lavoro in base alla velocità, permettendo una buona stima anche per sistemi a bassa velocità e soggetti ad attrito statico.

#### Compensazione Cogging Torque

La cogging torque è una coppia resistente che varia con  $\theta$ , che è problematica a basse velocità e per motori costruiti in modo approssimativo. Possibili soluzioni sono l'aumento del guadagno per permettere di mantenere la velocità costante oppure la compensazione in feedforward.

**Costruttori:** Kollmorgen fa un auto-taratura tramite misura puntuale di valore di coppia in riferimento alla posizione, salva tutto in una tabella e compensa in feedforward. Un altro costruttore crea una funzione coseno con molteplicità pari al numero di espansioni polari e la porta in feedforward.

### Compensazione di forze d'Inerzia (feedforward di Accelerazione)

Per compensare le forze di inerzia si cerca di fare  $iffw = \frac{J\ddot{\theta}^{des}}{K_T}$ . Nel feedforward non è un problema fare la derivata, perché è il riferimento (potrebbe essere analitica), sicuramente non ci sono problemi di rumore. Non si fa una compensazione totale del feedforward (circa un 50 ÷ 70%  $J_{reale}$ ), perché si predilige il feedback (dove si cerca di avere un guadagno "abbastanza alto"). La scelta del coefficiente del feedforward porta a errori di posizione:

- Guadagno alto: il feedforward diventa la componente predominante, la posizione risulta in anticipo;
- Guadagno basso: il feedforward è una componente poco rilevante, la posizione risulta in ritardo;
- Guadagno giusto: non ha sovraelongazione, assomiglia al riferimento di velocità.

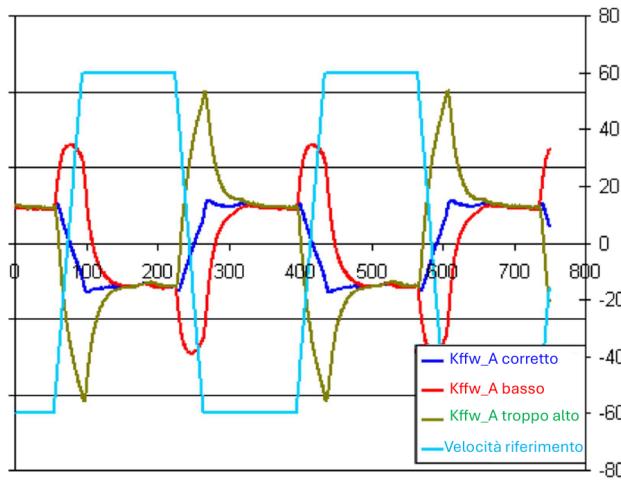
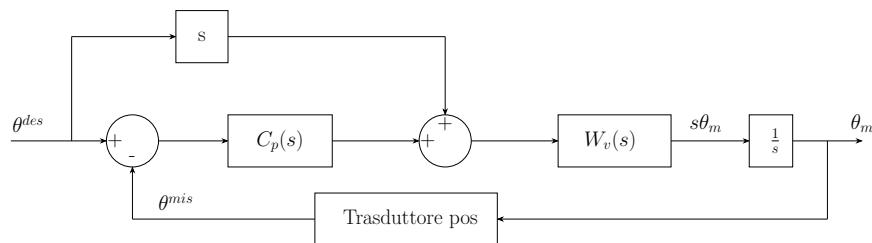


Figura 5.8: Errore di posizione per vari coefficienti di feedforward

**Inerzia variabile:** Nel caso di inerzia variabile, il feedforward viene tarato su  $J_{min}$  (eventualmente per un certo fattore), così che la compensazione sia minima.

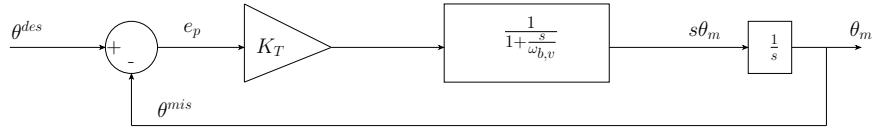
## 5.2 Anello di Posizione

Per il calcolo della velocità desiderata va fatto il calcolo col feedback, ma va aggiunto il contributo del feedforward, perché va tenuto conto il progetto della legge di moto di velocità, aggiunto col feedforward.  $\Omega^{des}(s) = C_p(s)E_p(s) + s\theta^{des}$  dove  $C_p$  è il controllore di posizione, mentre  $E_p = \theta^{des} - \theta^{mis}$  è l'errore di posizione.



**Ipotesi semplificative:** Per l'anello di posizione si faranno due ipotesi semplificative: viene trascurato il trasduttore di posizione (perché  $\omega_{tp} \geq \omega_{tv} \gg \omega_{b,v} > \omega_{b,p}$ , verranno fatte valutazioni più avanti (vedi 5.2.1) su questo proposito); viene semplificato l'anello di velocità, considerando di aver ben sintonizzato l'anello di velocità (quindi scelto un buon smorzamento)  $W_v(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_{b,v}}}$ , modello che è ben rappresentato in bassa

frequenza con PI ( $W_v(0) = 1$  e  $\xi \simeq 1$ ); viene trascurato il feedforward di velocità, che però è presente, per focalizzarsi sul feedback.



### 5.2.1 Controllore P

La funzione ad anello chiuso di posizione è data da  $W_p(s) = \frac{\theta_m(s)}{\theta_{des}(s)} = \frac{K_{pp}\omega_{b,v}}{s^2 + s\omega_{b,v} + K_{pp}\omega_{b,v}}$ . Questa funzione ha  $W_p(0) = 1$ , l'errore a regime è nullo con ingresso costante/a gradino, e l'errore a regime è nullo con legge rest to rest in posizione. Per questo motivo è sufficiente un controllore proporzionale<sup>15</sup>. Questo è possibile perché c'è un integrale fisico tra velocità e posizione.

Analisi dei poli:  $\omega_{n,p} = \sqrt{K_{pp}\omega_{b,v}}$  e  $\xi_p = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_{b,v}}{K_{pp}}}$ , valgono:  $\uparrow K_{pp} \rightarrow \begin{cases} \uparrow \omega_{n,p} \\ \downarrow \xi_p \end{cases}$  il coefficiente proporzionale va dimensionato per limitare la sovraelongazione in posizione e  $\uparrow \omega_{b,v} \rightarrow \begin{cases} \uparrow \omega_{n,p} \\ \uparrow \xi_p \end{cases}$  ossia l'effetto è benefico, per questo è fondamentale una buon sintonizzazione dell'anello di velocità.

Privilegiare la sovraelongazione di posizione porta ad un peggioramento di  $\omega_{b,p}$  che possono venire compensati in feedforward di velocità, che va direttamente all'anello di velocità e quindi non risente della ridotta  $\omega_{b,p}$ .

#### Sintonizzazione

Per effettuare la sintonizzazione dell'anello di posizione vengono considerati  $\xi_p^{des} = 1 \div 1.5$  e l'anello di velocità ben sintonizzato, perciò valgono<sup>16</sup>:

$$\begin{cases} K_{pp} = \frac{\omega_{b,v}}{4(\xi^{des})^2} \\ \omega_{b,p} \simeq \frac{\omega_{n,p}}{\xi} 0.65 \\ \omega_{n,p} = \sqrt{K_{pp}\omega_{b,v}} \end{cases}$$

Unendo la prima e la terza:  $\omega_{n,p} = \frac{\omega_{b,v}}{2\xi_p}$ , mentre unendo tutte:

$$\omega_{b,p} \simeq \frac{0.65}{2} \frac{\omega_{b,v}}{\xi_p^2} \simeq \begin{cases} \frac{\omega_{b,v}}{3} & \text{se } \xi_p = 1 \\ \frac{\omega_{b,v}}{6} & \text{se } \xi_p = 1.4 \end{cases}$$

Per cui si verifica come  $\omega_{b,p} \ll \omega_{b,v}$ .

#### Costruttori

Lenze: Propongono soluzioni per anello di corrente, velocità, posizione e utilizza una logica come quella esaminata nel corso. Propongono  $\xi_v = 1$  e  $\xi_p = 1.4$  come valori default. Inoltre permettono di variare il guadagno  $K_{pp}$  per le basse velocità (serve per il gioco).

Rockwell: Utilizzano uno stesso smorzamento per velocità e posizione, permettono di settare  $\xi \in [0.8; 1.5]$ , utilizzano, come visto sopra la scalatura per determinare  $\omega_{b,p}$  a partire da  $\omega_{b,v}$ . Propongono un controllo PI in posizione, ma l'azione integrale è posta a 0 di default.

Danaher/Kollmorgen: Permette di impostare i guadagni per i feedforward di velocità e accelerazione. Ricordare di impostare quello di velocità a 1.

Kollmorgen: Permette di effettuare gain scheduling:  $K_{p,v}(\theta, \dot{\theta})$ ,  $T_{i,v}(\theta, \dot{\theta})$ ,  $K_{pp}(\theta, \dot{\theta})$ .

Beckhoff/Bosch: Pone un filtro in serie al feedforward di velocità, che può servire solo per leggi molto brusche come gradini e rampe (da non utilizzare). E anche un filtro in serie al feedforward di accelerazione, che però potrebbe servire per leggi brusche aventi gradini/rampe di accelerazione.

Bosch: Implementano una funzione di saturazione della corrente, nel caso in cui ci fosse un qualche tipo di problema che porta ad un incremento della temperatura di motore, che viene monitorata o stimata. In

<sup>15</sup>Aggiungere un integrale tende a introdurre problemi, ha senso solo se le forze esterne sono elevate e non prevedibili o non compensabili in feedforward.

<sup>16</sup> $\omega_b = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{2 - 4\xi^2 + 4\xi^4}} \simeq \frac{\omega_{n,p}}{\xi} 0.65$

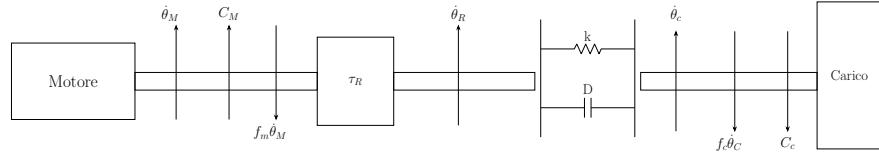
quei casi viene interrotta l'esecuzione della legge di moto, perciò è un evento che deve verificarsi il meno possibile.

B&R: Effettuano un anticipo del feedforward per cercare di compensare una bassa  $\omega_b, v$  o una bassa frequenza di campionamento della posizione. Tuttavia occorre prestare attenzione che questo non faccia partire prima del previsto il motore.

**Alternative di Feedforward di Accelerazione:** Per effettuare il feedforward di accelerazione ci sono diversi approcci:

- "Classico": approccio didattico per cui  $A^{des} = s^2\theta^{des}$ . Questo è l'approccio più sicuro, tuttavia non è coerente con  $\Omega^{des}$  in cui è presente anche la parte di feedback
- Beckhoff/Bosch:  $A^{des} = s\Omega^{des} = s^2\theta^{des} + sK_{pp}(\theta^{des} - \theta^{mis})$  ossia deriva la velocità di riferimento all'anello di velocità, quindi con feedback e feedforward. Questo approccio è coerente con  $\Omega^{des}$ , tuttavia è sbagliato perché è presente la derivata della misura ossia viene introdotto rumore direttamente all'anello di corrente, inoltre introduce un anello indesiderato e difficile da analizzare per la presenza del feedback, che può portare a instabilità.
- Beckhoff/Bosch v2: Un approccio intermedio tra quelli precedenti considera un fattore di ripartizione per i due fenomeni  $A^{des} = \alpha s^2\theta^{des} + (1 - \alpha)s\Omega^{des}$ , empiricamente si ottiene ridotto rumore e sovraelongazione per effetto del feedforward per  $\alpha \in [0.7; 0.8]$ .

# 6 CONTROLLO DEL MOTO PER TRASMISSIONE ELASTICA



**Inerzia del riduttore:** L'inerzia del riduttore andrebbe divisa in componenti e separarle per albero lento e veloce; tuttavia viene descritta a catalogo da un unico dato  $J_R$ . Occorre utilizzare un modello approssimato, che consideri l'inerzia del carico alta e permetta di trascurare  $\tau_R^2 J_{out}$ , dove  $J_{out}$  è l'inerzia della trasmissione verso l'uscita, da cui:  $J_C + J_{out} \simeq J_C$  e  $J_M + J_{sole} \simeq J_C + J_R$  con  $J_R = J_{sole} + \tau_R^2 J_{out} \simeq J_{sole}$ .

## 6.1 Modello Newtoniano

La forza visco-elastică è data da  $R = -k(\theta_C - \theta_R) - D(\dot{\theta}_C - \dot{\theta}_R)$  con  $k$  rigidezza e  $D$  fattore di smorzamento. Lato carico vale  $J_C \ddot{\theta}_C = R - C_C - f_c \dot{\theta}_C$ , da cui:  $J_C \ddot{\theta}_C + D\dot{\theta}_C + k\theta_C + f_c \dot{\theta}_C = k\tau_R \dot{\theta}_M + D\tau_R \dot{\theta}_M - C_C$ . Lato motore, ricordando  $\theta_R = \tau_R \theta_M$ , vale  $J_M \ddot{\theta}_M = C_M - f_m \dot{\theta}_M - \tau_R D \dot{\theta}_C + \tau_R k \theta_C$ . Da queste passando a Laplace:

$$\begin{cases} (J_C s^2 + Ds + k)\theta_c(s) = (Ds + k)\theta_M(s)\tau_R \\ (J_M s^2 + \tau_R^2 Ds + \tau_R^2 k)\theta_M(s) = C_m(s) + \tau_R(Ds + k)\theta_c(s) \end{cases}$$

A partire da queste espressioni è possibile ricavare le varie funzioni di trasferimento che andranno poi a definire il sistema. Ognuna di queste verrà scritta nella forma "fisica" (con  $D, k, J$ ) e nella forma classica dei controlli (con  $\xi$  e  $\omega$ ), che sono definiti:

- $\omega_p = \sqrt{\frac{kJ}{J_k J_c}}$
- $\xi_p = \frac{D\sqrt{JJ_k J_c}}{2\sqrt{JJ_k J_c k}}$
- $\omega_z = \sqrt{\frac{k}{J_c}}$
- $\xi_z = \frac{D}{2\sqrt{J_c k}}$

Dove  $J = J_M + \tau_R^2 J_c$ .

**Trasmissibilità:** La trasmissibilità è la funzione di trasferimento che lega posizione angolare del motore  $\theta_M$  e la posizione angolare del carico  $\theta_c$ . Se in un sistema rigido vale esattamente il rapporto di trasmissione  $\tau$ , considerando la rigidezza e lo smorzamento che caratterizzano qualsiasi riduttore, diventa:

$$T(s) := \frac{\theta_c(s)}{\theta_M(s)} = \tau \frac{Ds + k}{J_c s^2 + Ds + k} = \tau \frac{\frac{2\xi_z}{\omega_z} s + 1}{\frac{s^2}{\omega_p^2} + \frac{2\xi_p}{\omega_p} s + 1}$$

### 6.1.1 Ricettanza, Mobilità, Inertanza

La ricettanza è la relazione che lega posizione in uscita e coppia in ingresso; di nostro interesse c'è la mobilità, che relaziona la velocità e la coppia; mentre l'inertanza lega accelerazione e coppia. Considerando in ingresso la coppia del motore e in uscita la posizione/velocità/accelerazione del motore, si ottengono le seguenti espressioni:

- $\frac{\theta_M(s)}{C_M(s)} = \frac{1}{s^2} \frac{J_c s^2 + Ds + k}{J_M J_c s^2 + D J s + k J}$
- $\frac{s\theta_M(s)}{C_M(s)} = \frac{1}{s} \frac{J_c s^2 + Ds + k}{J_M J_c s^2 + D J s + k J} := G_{vm}(s)$

$$\bullet \frac{s^2 \theta_M(s)}{C_M(s)} = \frac{J_c s^2 + Ds + k}{J_M J_c s^2 + D J s + k J}$$

Riscrivendo la mobilità nella forma controllistica classica si ottiene:  $G_{vm}(s) = \frac{1}{s J} \frac{\frac{s^2}{\omega_z^2} + \frac{2\xi_z}{\omega_z} s + 1}{\frac{s^2}{\omega_p^2} + \frac{2\xi_p}{\omega_p} s + 1}$ .

Si può anche riscrivere la mobilità con la velocità del carico in uscita e la coppia del motore in ingresso, da quanto appena scritto su  $G_{vm}(s)$  basta moltiplicare la trasmissibilità da cui si ottiene  $G_{vc}(s) = G_{vm}(s)T(s) = \tau \frac{1}{s} \frac{Ds + k}{J_M J_c s^2 + D J s + k J}$ .

**Analisi poli-zeri della Mobilità:** Importante da notare come i poli delle mobilità, lato carico e motore, siano gli stessi. Gli zeri della mobilità lato motore sono due, questo comporta la presenza di antirisonanza<sup>1</sup>. Invece la mobilità lato carico ha un solo zero reale, perciò non ha antirisonanza.

**Antirisonanza G<sub>vm</sub>:** L'antirisonanza di  $G_{vm}(s)$  ha frequenza naturale del sistema aggiunto, ottenuto bloccando il rotore del motore da cui si ottiene (in modo del tutto simile a quanto visto in meccanica delle vibrazioni)  $\omega_z = \sqrt{\frac{k}{J_c}}$ . Per ricavarla sperimentalmente basta mantenere frenato il motore, applicare una sollecitazione impulsiva al carico, misurare le vibrazioni e utilizzare il decremento logaritmico, per cui misuro il periodo di oscillazione, da cui ricavo la pulsazione di oscillazione (smorzata)  $\omega_{z,d} = \omega_z \sqrt{1 - \xi_z^2}$ , misuro diversi picchi così da poter determinare lo smorzamento  $\xi_z$  e la pulsazione  $\omega_z$ <sup>2</sup>.

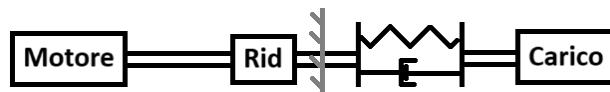


Figura 6.1: Schema equivalente per verifica su antirisonanza

**Relazione poli-zeri G<sub>vm</sub>:** Ricordando rapporto di inerzia  $\rho = \frac{\tau_R^2 J_c}{J_m} > 0$ , in  $G_{vm}(s)$  esiste una relazione tra pulsazione del polo e pulsazione dello zero e per smorzamento del polo e smorzamento dello zero:

$$\begin{cases} \omega_p = \omega_z \sqrt{1 + \rho} \\ \xi_p = \xi_z \sqrt{1 + \rho} \\ \omega_z < \omega_p \\ \xi_z < \xi_p \end{cases}$$

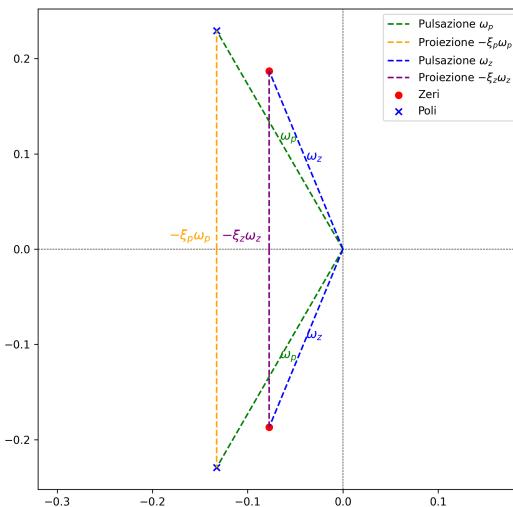


Figura 6.2: Rappresentazione su piano complesso di poli e zeri di  $G_{vm}$

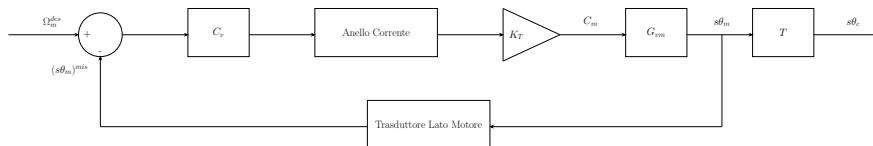
<sup>1</sup>Vedi B.5.2

<sup>2</sup>Vedi B.4

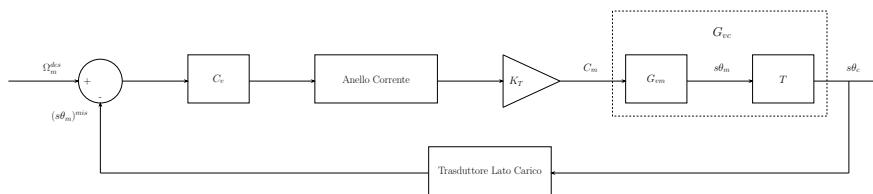
## 6.2 Architetture di controllo

Ci sono diverse tipologie di controllo in base alla grandezza misurata (o stimata) e grandezza attuata e se sono riferite entrambe allo stesso sistema (entrambi motori oppure una moto l'altra carico) o all'utilizzo di controllo SISO o MIMO.

**Controllo Co-Locato:** Con controllo co-locato si intende un controllo in cui misura e grandezza attuata sono al motore; il carico si trova all'esterno del loop ed è in catena aperta.



**Controllo non Co-Locato:** Con controllo non co-locato si intende un controllo in cui misura e grandezza attuata sono differenti, in particolare la misura è effettuata al carico mentre la grandezza attuata è al motore; il carico si trova all'interno del loop.



**Controllo di stato:** Nel controllo di stato, lavorando in MIMO, permette di scegliere entrambe le grandezze di misura, risultando in un controllo migliore. Tuttavia nell'industria sono solitamente difficilmente praticabili.

### 6.2.1 Controllo Co-Locato vs non Co-Locato

Per valutare quale controllo utilizzare vado a studiare intanto il controllo Co-Locato e in particolare l'inertanza (per semplicità di analisi)  $sG_{vm}(s)$  e la mobilità  $G_{vm}(s)$ . Per il tracciamento si consiglia di studiare gli asintoti e quindi tracciare la funzione di trasferimento collegandoli. Si notano in particolare  $m_\phi > 90^\circ$  e, non arrivando mai a  $-180^\circ$ , vale anche  $m_a = \infty$ . Questo è un ottimo segnale in termini di stabilità del sistema.<sup>3</sup>

$$G_{vm} = \frac{1}{sJ} \frac{\frac{s^2}{\omega_z^2} + \frac{2\xi_z}{\omega_z} s + 1}{\frac{s^2}{\omega_p^2} + \frac{2\xi_p}{\omega_p} s + 1}$$

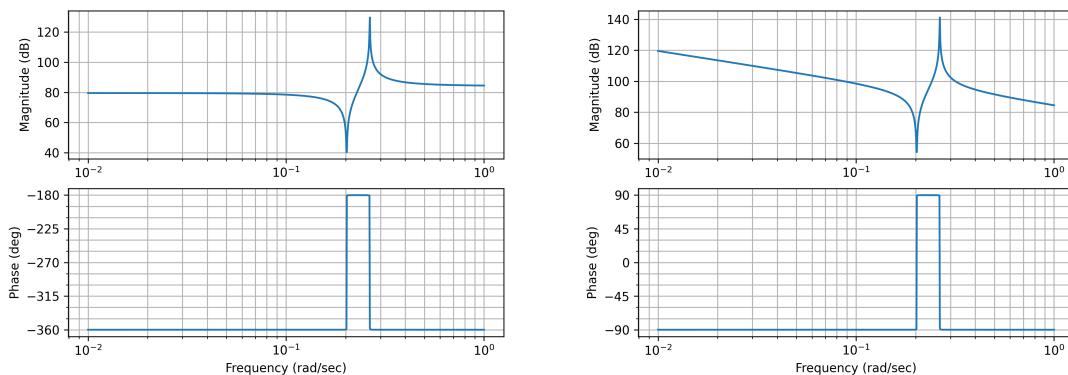


Figura 6.3: Inertanza  $sG_{vm}$  sx e mobilità  $G_{vm}$

<sup>3</sup>In fase, variazione tra  $-360^\circ \rightarrow -180^\circ$  equivale alla variazione  $0^\circ \rightarrow 180^\circ$  vista in aula

**Controllo non Co-Locato:** Per quanto riguarda il controllo non Co-Locato, facendo lo stesso ci si accorge di come la mobilità, complessivamente sia un sistema con polo del secondo ordine, inoltre il polo agisce prima dello zero, quindi in un certo tratto la fase potrebbe andare al di sotto dei  $-180^\circ$ . Come risulta più chiaro dal grafico, questo aspetto ha conseguenze sulla stabilità del sistema: **Non si può fare un controllo non co-locato in velocità.**

$$G_{vc} = \frac{1}{sJ} \frac{\frac{2\xi_z}{\omega_z} s + 1}{\frac{s^2}{\omega_p^2} + \frac{2\xi_p}{\omega_p} s + 1}$$

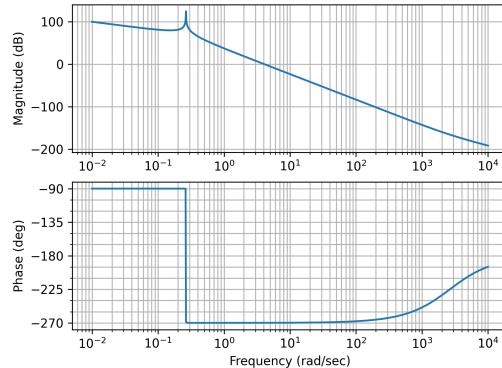


Figura 6.4: Mobilità  $G_{vc}$

**Luogo delle radici:** Valutazioni simili possono essere fatte utilizzando il luogo delle radici<sup>4</sup>.

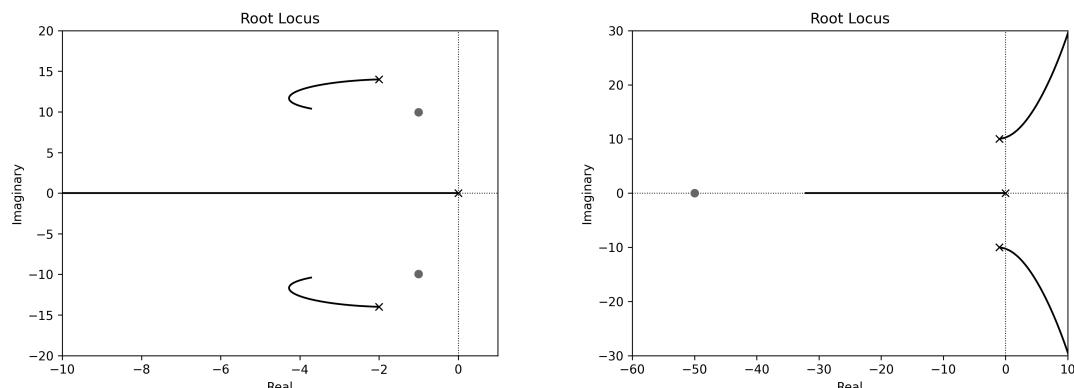


Figura 6.5: Controlli di velocità: Co-Locato sx; Non Co-Locato dx

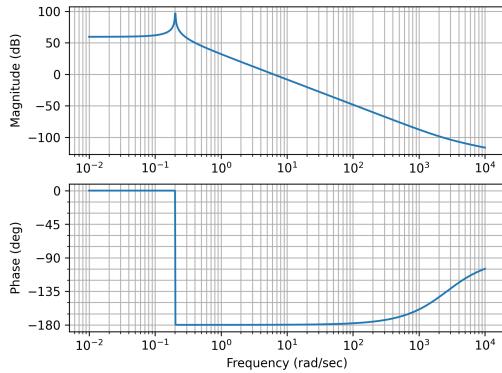
### 6.2.2 Trasmissibilità

A completamento dell'analisi, si può studiare anche la trasmissibilità  $T(s) = \tau \frac{1 + \frac{2\xi_z}{\omega_z} s}{1 + \frac{2\xi_z}{\omega_z} s + \frac{s^2}{\omega_z^2}}$ . Da notare come ad alta frequenza (come visto in Meccanica delle Vibrazioni) vi sia la zona di non trasmissione del moto, con modulo fortemente attenuato e ritardo. Il moto relativo di motore e carico è "grande".

### 6.2.3 Attrito

L'attrito ha implicazioni in tutto il sistema, volessi fare un'analisi rigorosa dovrei ricalcolare gli smorzamenti e le pulsazioni. Per un analisi approssimata invece è sufficiente considerare come l'attrito vada ad

<sup>4</sup>Vedi A.4 per le regole di tracciamento, noi lavoreremo in modo qualitativo, quindi senza valutare esattamente gli asintoti, gli angoli di uscita o il passaggio per l'asse immaginario.

Figura 6.6: Trasmissibilità  $T(s)$ 

agire principalmente sul sistema rigido, quindi soprattutto per basse frequenze, si ottiene quindi il modello:

$$G_{vm}(s) \simeq \frac{1}{sJ+f} \frac{\frac{s^2}{\omega_z^2} + \frac{2\xi_z}{\omega_z} s + 1}{\frac{s^2}{\omega_p^2} + \frac{2\xi_p}{\omega_p} s + 1}.$$

A differenza del precedente, al posto di avere un integrale in ingresso c'è un filtro passa basso, che in alta frequenza si comporta esattamente come un integrale.

In senso fisico, l'attrito è legato al moto assoluto (più rilevante in bassa frequenza), mentre l'attrito viscoso è maggiormente legato al moto relativo (più rilevante in alta frequenza).

### 6.3 Controllo Co-Locato di Velocità

Valutato come il controllo da utilizzare in velocità sia quello Co-Locato, considero due casi:

$$\frac{\omega_p}{\omega_z} = \frac{\xi_p}{\xi_z} = \sqrt{1+\rho} \rightarrow \begin{cases} \rho \rightarrow 0, \text{ allora } \omega_p \simeq \omega_z, \xi_p \simeq \xi_z \text{ cancellazione fisica polo-zero} \\ \rho >> 0, \text{ allora } \omega_p >> \omega_z, \xi_p >> \xi_z \text{ poli zeri ben distinti} \end{cases}$$

Dal luogo delle radici è possibile verificare come, col variare di  $K_{pv}$ , varino:

- la lunghezza del vettore che collega origine e punti del luogo, che corrisponde alla variazione di pulsazione dei poli del sistema a catena chiusa  $W_v$
- l'angolo del vettore, che corrisponde alla variazione di fattore di smorzamento del polo di  $W_v$
- la proiezione del vettore sull'ascissa, che corrisponde a  $|\Re(W_v)|$

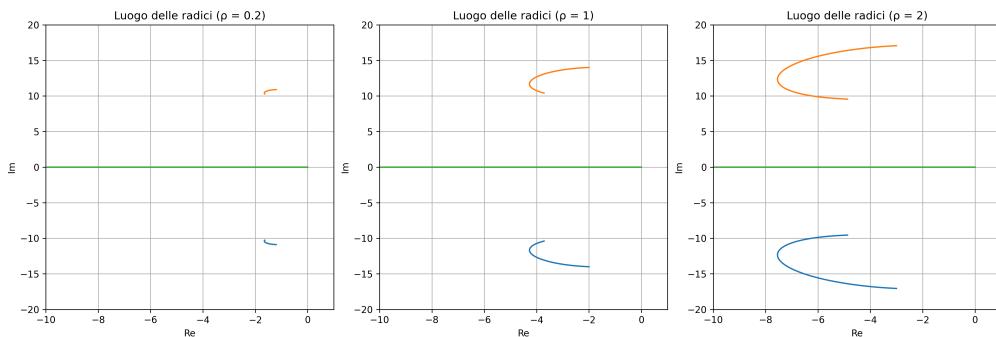
**Significato fisico:**  $\rho \simeq 1$  significa motore e carico di massa paragonabili. Il motore percepisce oscillazioni del carico, può quindi attivarsi per cercare di limitarle.  $\rho \rightarrow 0$  significa motore di massa tanto maggiore a quella del carico. Il controllo viene visto come semplificato perché qualsiasi problematica di carico non viene percepita dal motore. Soluzione per questo caso è quella di utilizzare un controllo in controllo di stato (se possibile) oppure scegliere una legge di moto dolce standard o ad hoc (in particolare leggi di moto dolci ad hoc per  $\rho \rightarrow 0$  si vedranno in laboratorio).

**Relazione smorzamento massimo di  $W_v$  e rho:** Sussiste una relazione tra il massimo smorzamento dei poli di  $W_v$  e  $\rho$ :  $\xi_{max} = \xi_p + \frac{\sqrt{1+\rho}}{2} - 1$ . Questa relazione (non da sapere a memoria) evidenzia come lo smorzamento massimo dei poli di  $W_v$  sia maggiore di quello dei poli a catena aperta, ed è legato a quanto visto per il luogo delle radici in cui è evidente la dipendenza tra  $\rho$  e  $\alpha$ .

#### 6.3.1 Rapporto di inerzia nullo

Per  $\rho \rightarrow 0$  il controllo di motore è equivalente al controllo di un asse rigido, avente  $\omega_{bv}$  elevata. La banda elevata può portare il motore ad eccitare il carico, se comandato con legge di moto non dolce.

Considero l'errore di posizione al carico:  $e_c(t) = \theta_c^{des}(t) - \theta_c^{mis}(t)$  considerando  $\tau = 1$ , solo per semplificare il ragionamento, e  $\theta_c^{mis} = \theta_c$  ossia che il motore venga controllato bene (ipotesi realistica, considerando che sto lavorando con un equivalente asse rigido)  $e_c(t) = \theta_M^{des}(t) - \theta_c(t)$ , passando in Laplace si ottiene

Figura 6.7: Controllo Co-Locato per vari  $\rho$ 

$$E(s) = \theta_M(s) - \theta_c(s) = \theta_M(s)(1 - T(s)) = \theta_M(s) \frac{\frac{s^2}{\omega_z^2}}{\frac{\omega_z^2}{\omega_z^2} + \frac{2\xi_z}{\omega_z} s + 1}, \text{ da cui si ottiene la formulazione:}$$

$$E(s) = \frac{A_M(s)}{\omega_z^2} \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_z^2} + \frac{2\xi_z}{\omega_z} s + 1}$$

In cui viene evidenziata la relazione tra errore in posizione motore-carico e accelerazione del motore. Questo ha conseguenze sulla scelta della legge di moto perché avere accelerazione maggiore (a parità di altro), è associato ad accelerazioni maggiore. Inoltre viene evidenziato l'effetto della pulsazione dello zero  $\omega_z$  che va ad abbattere l'errore di posizione.

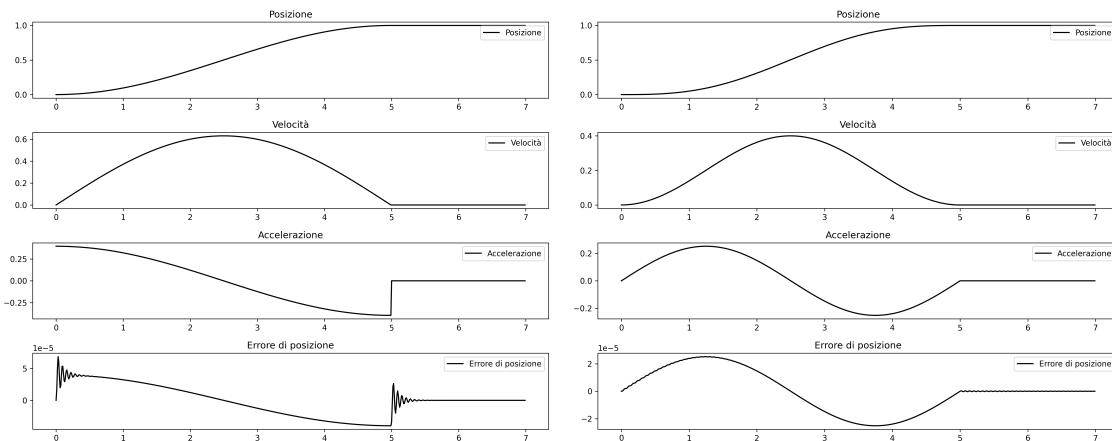


Figura 6.8: Legge Armonica sx; Sinusoidale in accelerazione dx

### 6.3.2 Rapporto di inerzia non nullo

Per  $\rho > 0$  il controllo collocato permette di controllare indirettamente anche il carico. Questo va diviso in più casi:

1. Risonanza in "bassa" frequenza:  $\omega_p \ll \omega_{tv}, \omega_I$
2. Risonanza in "media" frequenza:  $\omega_z \simeq \omega_p \simeq \omega_{tv} \simeq \omega_I$
3. Risonanza in "alta" frequenza:  $\omega_z >> \omega_{tv}, \omega_I$

**Risonanza in alta frequenza:** Nel caso di risonanza in alta frequenza (circa un  $\times 2$  tra  $\omega_z$  e  $\omega_{tv}, \omega_I$ ) non possono essere misurate le oscillazioni dal trasduttore e il motore non può né eccitare né controllare le vibrazioni ad alta frequenza. Questo è il caso di un **equivalente sistema rigido** in cui le risonanza e antirisonanza sono filtrate da trasduttore e anello di corrente, perciò  $G_{vm}(s) \simeq \frac{1}{sJ}$  e l'anello aperto ha funzione di trasferimento  $L(s) \simeq \frac{1}{sJ} C_v K_T H_{trasd} W_I$ .

### Risonanza in bassa frequenza

Nel caso di risonanza in bassa frequenza (circa un  $\times 3; 4$  tra  $\omega_z$  e  $\omega_{tv}, \omega_I$ ) considero intanto il sistema senza gli effetti di trasduttore e anello di corrente che agiscono solo ad alta frequenza, interviene prima l'effetto **legato alla trasmissione elastica**. Per facilitare la realizzazione pratica si può considerare la relazione  $\omega_z < \omega_p \ll \omega_\pi$ , perché la pulsazione di attraversamento si verifica, nel controllo collocato, per effetto di trasduttore e anello di corrente.

**Valutazione sulla catena aperta:** La funzione di trasferimento in catena aperta, dove entrano mobilità, costante di coppia, controllo di velocità, trasduttore e anello di corrente:  $L_v(s) = G_{vm}K_T C_v(s) H_{tv}(s) W_I(s)$  Guardando il Bode dell'anello aperto e confrontandolo con lo stesso sistema in cui vengano trascurati trasduttore e anello di velocità ci si accorge di come abbiano influenza solo in alta frequenza.

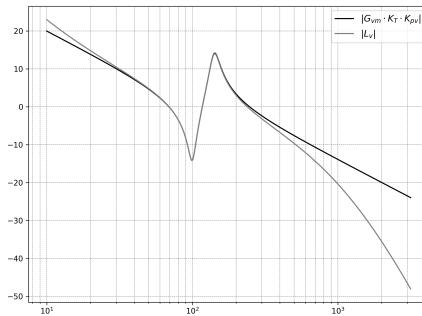


Figura 6.9: Effetto di trasduttore e anello di corrente su anello aperto  $L_v$

**Valutazione sulla catena chiusa:** La funzione di trasferimento in catena chiusa è  $W_v(s) \simeq \frac{G_{vm}C_vK_T}{1+G_{vm}C_vK_T}$ , i poli del sistema possono essere analizzati col luogo delle radici (i poli possono essere variati con il  $K_{pv}$ ), mentre gli zeri del sistema sono legati a  $G_{vm}C_v$  che ha una coppia di zeri aventi  $\xi_z, \omega_z$ , per cui l'antirisonanza della catena chiusa è la stessa di  $G_{vm}$  e uno zero reale  $s = -\frac{1}{T_{iv}}$ .

**Con controllore PI:** Abbiamo visto come il controllo di velocità convenga venire effettuato con controllore PI, di seguito il luogo delle radici in questo caso. A differenza del luogo delle radici con proporzionale si notano il polo nullo e lo zero sull'asse reale.

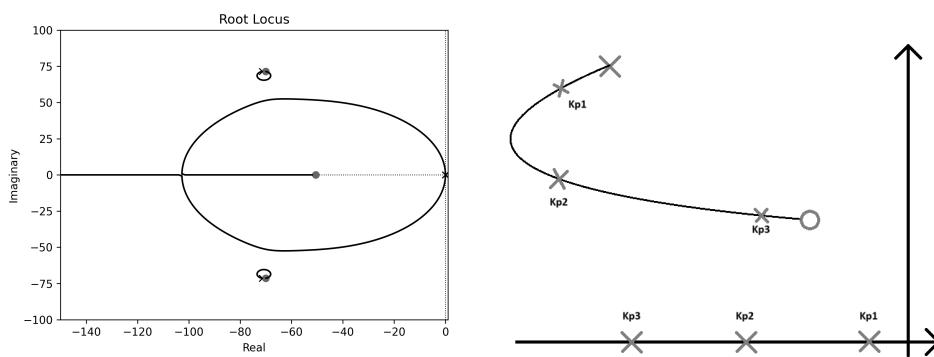


Figura 6.10: Controllo Collocato con controllore PI sx; guadagni  $K_{pv1}, K_{pv2}, K_{pv3}$  dx

**Tipici approcci di progetto:** Fissato  $\omega_{bv}^{des} \simeq [0.5 \div 0.7]\omega_z$ , calcolo, approssimando il sistema ad un sistema rigido<sup>5</sup>:  $K_{pv} \simeq \frac{\omega_{bv}^{des} J}{K_T}$  e  $\frac{1}{T_{iv}} \simeq \frac{\omega_{bv}^{des}}{4\xi_{des}^2}$  con smorzamento del polo del sistema a catena chiusa  $\xi_{des} \geq 1$  (perché non conviene rischiare avendo trasmissione elastica). Alternativamente è possibile partire considerando il luogo delle radici, e cercare  $K_{pv}$  tale che siano massimizzati  $\xi_{poli}$  o  $\mathbb{R}(\text{poli})$ . I due metodi portano a  $K_{pv}$  paragonabili e nella zona di ottimo. Tenendo a mente che rimane da garantire<sup>6</sup>  $\omega_{bv} > \frac{1}{4\xi^2}$ .

**Scelta del guadagno:** Per quanto riguarda  $K_{pv}$ , ci sono le seguenti tipologie di situazioni:

<sup>5</sup>Perchè considero di lavorare prima di risonanza e antirisonanza.

<sup>6</sup>Vedi 5.1.2 per condizioni per sistema con trasmissione rigida.

- $K_{pv,1}$  guadagno "basso": Un basso guadagno porta ad avere  $\omega_{bv}$  "bassa" perché viene fatta una scelta di parte reale non ottima, che porta ad uno smorzamento non ottimale<sup>7</sup>
- $K_{pv,2}$  guadagno "ottimale": Un guadagno ottimale è associato ad una scelta di  $\xi$  massimo, quindi parte reale massima e  $\omega_{bv} < \omega_z$
- $K_{pv,3}$  guadagno "alto": Un guadagno alto porta ad avere una cancellazione polo zero, quindi una buona compensazione dell'antirisonanza

**Valutazioni sul carico:** Il picco di risonanza della trasmissibilità "compensa" il picco di antirisonanza di  $W_v$ , lato carico si ottiene un  $\omega_{bv}$  maggiore. Bisogna quindi prestare attenzione a utilizzare guadagni troppo elevati (caso  $K_{pv,3}$ ) perché, sebbene il motore possa beneficiarne, potrebbe portare ad avere una eccessiva compensazione, causata dalla trasmissibilità, lato carico, portando ad avere in uscita picchi di risonanza. Per guadagno ottimale, invece, avere  $\omega_{bv} < \omega_z$ , permette alla trasmissibilità di compensare bene l'antirisonanza, quindi lato carico si ottiene una buona risposta con una banda passante "grande".

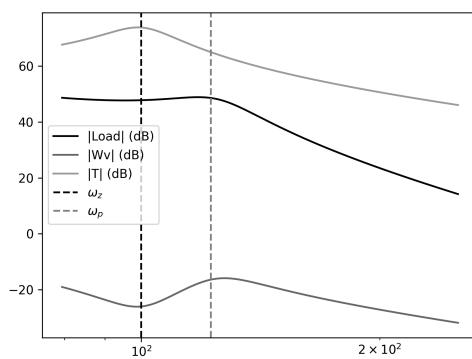


Figura 6.11: Effetto di compensazione dell'antirisonanza

**Risposta al gradino per vari guadagni:** La risposta al gradino per un sistema che abbia impostato un guadagno  $K_{pv,2}$  "ottimo"<sup>8</sup> ha una sovraelongazione dovuta allo zero a causa della scelta del gradino come legge di moto, ma carico e motore mantengono andamenti simili. La risposta al gradino per un sistema che abbia impostato un guadagno  $K_{pv,3}$  "troppo elevato" vede grandi oscillazioni sia al motore sia al carico, che potrebbero avere andamenti differenti e peggiori al carico.

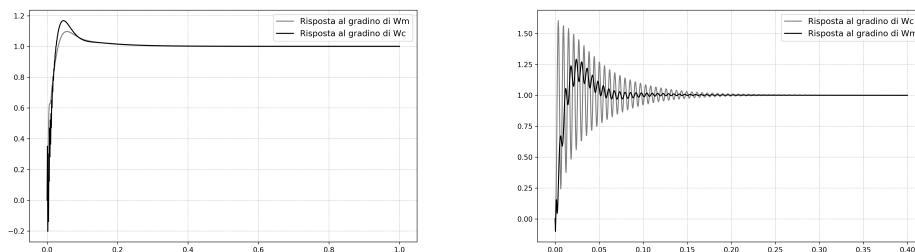


Figura 6.12: Risposte al gradino  $K_{p2}$  sx,  $K_{p3}$  dx (inversione colori per questioni grafiche)

### Risonanza in media frequenza

Avere risonanza in media frequenza significa  $\omega_z, \omega_p \simeq \omega_{tv}, \omega_I, \omega_\pi$ . Questo caso è il più complicato da gestire perché non esiste una regola euristica, il sistema non è né sufficientemente rigido da poter fare l'analisi come visto nel capitolo precedente, né sufficientemente elastico per poter considerare la risonanza in bassa

<sup>7</sup>Per valutare la stabilità col luogo delle radici si considera la distanza dall'asse immaginario (più distante più stabile) in combinazione col valore di  $\alpha$ , quindi di  $\xi$ .

<sup>8</sup>Nè troppo elevato, per cui lato carico si ottenga picco di risonanza per eccesso di compensazione, nè troppo ridotto, per cui si ottenga una bassa banda passante

frequenza. La causa di questa complessità è legata alla presenza, in prossimità di  $\omega_p$ , di una serie di poli che portano in catena aperta,  $L_v$ , a perdita repentina di fase, portando ad avere in uno degli attraversamenti margine di fase negativo, ossia ad avere sistema instabile.

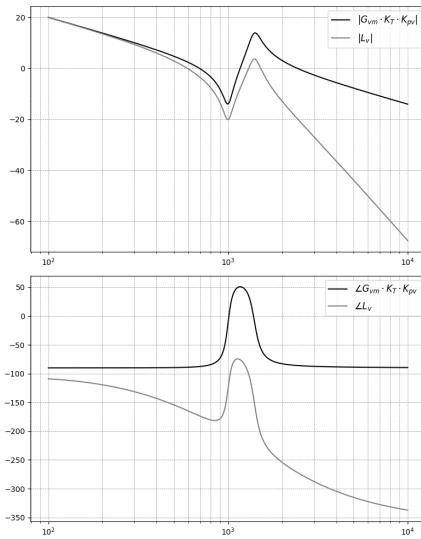


Figura 6.13: Effetto trasduttore e anello di corrente su anello aperto  $L_v$

**Soluzioni:** Ci sono diverse possibili soluzioni attuabili, che considerano il controllo, il progetto e la meccanica.

- i. Riduzione del guadagno  $\downarrow K_{pv}$ : Questo permette di abbassare il modulo di  $L_v$  andando a "eliminare" le pulsazioni di attraversamento indesiderate. Tuttavia "eliminare" la risonanza richiede guadagni molto bassi, che portano ad avere banda passante bassa  $\downarrow \omega_{bv}$ , compensabile con leggi di moto dolci e feedforward. In alternativa, volendo essere meno conservativi, è possibile tarare sul sistema<sup>9</sup> il valore di  $K_{pv}$  tale che si ottenga l'attraversamento in un punto in cui il margine di fase sia sufficiente, portando ad avere una banda passante maggiore. Questo secondo approccio però è rischioso, perché il cambio di fase può essere molto rapido e variazioni minime del guadagno possono avere conseguente disastrose sul sistema.
- ii. Aumento di  $\omega_{tv}$ , scelta di trasduttore con risoluzione maggiore: Il trasduttore è solitamente l'elemento critico, perciò sceglierne uno con risoluzione maggiore permette di spostare la frequenza di taglio del filtro. Scegliere encoder sin/cos, in combinazione con una  $K_{pv}$  "bassa" (rispetto quello che avrei per un sistema rigido), permette di considerare l'amplificazione del rumore trascurabile. **Attenzione:** utilizzare uno stimatore di velocità che non consideri l'elasticità, potrebbe portare a problemi soprattutto in stima di accelerazione dove lo stimatore lavora in alta frequenza.
- iii. Aumento di  $\omega_I$ : Solitamente il trasduttore è l'elemento critico in questi sistemi, tuttavia migliorare il trasduttore potrebbe portare l'anello di corrente ad essere il nuovo elemento critico.
- iv. Aumento della rigidezza del riduttore: La rigidezza del riduttore influenza le pulsazioni di antirisonanza  $\omega_z = \sqrt{\frac{k}{J_c}}$  e risonanza  $\omega_p = \sqrt{\frac{k}{J_c}} \sqrt{1 + \rho}$ , tuttavia la presenza della radice porta ad un minor effetto, un aumento considerevole di rigidezza (comunque difficile da ottenere), non porta grandi benefici al sistema.
- v. Rapporto di inerzia minore,  $\downarrow \rho$ : Utilizzare  $\downarrow \rho$  fa sì che vi sia cancellazione polo-zero  $\omega_z, \omega_p$  in  $G_{vm}, L_v$ , risultando in una perdita di pulsazioni di attraversamento indesiderate, o comunque in uno spostamento in frequenza degli attraversamenti, lontano da fase critica. **Nel caso di risonanza in media frequenza, lavorare con rapporto di inerzia ridotto è spesso il modo più semplice per facilitare il controllo lato motore. Occorre poi fare una pianificazione del moto ad hoc per il carico.** Come fare a variare il rapporto di inerzia  $\rho = \frac{\tau_R^2 J_c}{J_M}$ :

<sup>9</sup>Vedi autotuning

- a) Se possibile diminuendo l'inerzia lato carico, prestando attenzione che  $J_c$  influenza  $\rho$ , ma anche  $\omega_z$  e  $\omega_p$
  - b) Diminuendo il rapporto di trasmissione  $\downarrow \tau_R$ , tenendo conto che questo porta a perdita dell'ottimo in termini di coppia, velocità, energia e che i riduttori multistadio sono caratterizzati da maggior  $\uparrow$  gioco e ridotta rigidezza  $\downarrow k$ . Potrebbe avere senso utilizzare riduttori di nuovo tipo, vedi 2.1.2.
  - c) Utilizzo di volano lato motore di modo da aumentare il denominatore, però così facendo aumenta la taglia del motore, il progetto risulta sovradimensionato, e soprattutto aggiungere alberi e una massa porta ad aggiunta di risonanza e antirisonanza meccanica.
  - d) Utilizzo di motori ad alta inerzia, sono costruttivamente differenti rispetto i motori tradizionali, hanno un raggio maggiore e lunghezza minore, così  $J_M \uparrow \propto R^4$  (perché si considera a parità di densità volumetrica). Questa è una alternativa al volano, risulta comunque inefficiente.
  - e) Modifica virtuale di  $\rho$  con tecniche di controllo fornite dal costruttore:
    - i. Load observer (Rockwell, Bechoff)
    - ii. Acceleration Feedback (Kollmorgen)
  - vi. Utilizzo di filtri tra controllo di velocità e anello di corrente: In modo del tutto simile al caso con trasmissione rigida, i filtri possono essere consideranti all'interno del  $T_{eq} = \frac{1}{\omega_{tv}} + \frac{1}{\omega_I} + \frac{T_c}{2} + \dots + \frac{1}{\omega_{b,filtro}}$ , e dato che anche in questo caso si può considerare  $\omega_{bv} \simeq \frac{T_{eq}}{4}$ , considerando il fattore 4 che li lega, dovrà valere:
 
$$\omega_{b,filtro} > \omega_{bv} \cdot 4$$
- a) Passa basso: Il più semplice, tuttavia occorre tener conto della perdita di fase associata. Per valutarne l'efficacia occorre conoscere il tipo di filtro passa basso utilizzato e soprattutto l'ordine del filtro, che ha conseguenze positive in modulo, perché va a attenuare il picco di risonanza, ma negative in fase, che potrebbe portare ad instabilità.
  - b) Filtri notch: Vedi in seguito
  - c) Reti anticipatrici: Porta aumento di fase, che però si associa ad una amplificazione del modulo, perciò va a spostare l'attraversamento per pulsazioni superiori, dove la fase è peggiore, e amplifica rumore e disturbi.
  - d) BIQUAD: Vedi in seguito

**Filtro Notch:** Il filtro notch serve ad attenuare una specifica pulsazione, l'idea è quella di fare una cancellazione polo zero con  $G_{vm}$ , di modo da poter scegliere lo smorzamento del polo complessivo. Nella pratica  $\xi_p, \xi_d$  diventano parametri di ottimizzazione del controllo. La funzione di trasferimento associata al filtro è  $F(s) = \frac{\frac{s^2}{\omega_p^2} + \frac{2\xi_p}{\omega_p} s + 1}{\frac{s^2}{\omega_p^2} + \frac{2\xi_d}{\omega_p} s + 1}$ :

- Richiede conoscenza di  $\omega_p$
- Ha fase negativa per  $\omega < \omega_p$
- Richiede di avere  $\omega_p$  poco variabile (per esempio, non è adatto per viti a ricircolo di sfere in cui la pulsazione varia con la posizione della chiocciola)
- Fissato  $\xi_p$ , aumentare  $\xi_d$  porta ad un aumento dell'attenuazione e allargamento della banda di attenuazione, ma anche ad un maggior disturbo in fase
- Fissato  $\xi_d$ , vengono mantenute costante l'attenuazione e l'entità del disturbo in fase, aumentare  $\xi_p$  porta ad allargamento della banda di attenuazione e allargamento del disturbo di fase
- Fissato  $\xi_d$  che mantiene fissata la larghezza di banda di attenuazione, aumentare  $\xi_p$  porta a riduzione dell'attenuazione e riduzione del disturbo in fase

**Biquadratici:** L'idea dei filtri Biquadratici o BIQUAD è quella di implementare un filtro che sia l'inverso della mobilità di modo da cancellare poli e zeri  $F(s) = \frac{1}{G_{vm}(s)}$ . Lato motore funziona molto bene, il controllo richiesto è quello per trasmissione rigida, tuttavia lato carico è presente il picco di risonanza legato alla presenza della trasmissibilità in catena aperta. Richiede precisa sintonizzazione; aggiungere una risonanza nel filtro è rischioso se la sintonizzazione non è perfetta, perché potrebbe amplificare rumore bianco a quella frequenza. Tuttavia potrebbe essere interessante se pensato come un "filtro notch a 4 parametri".

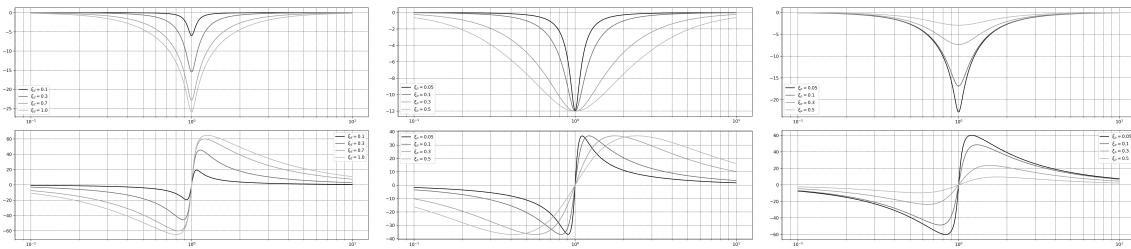


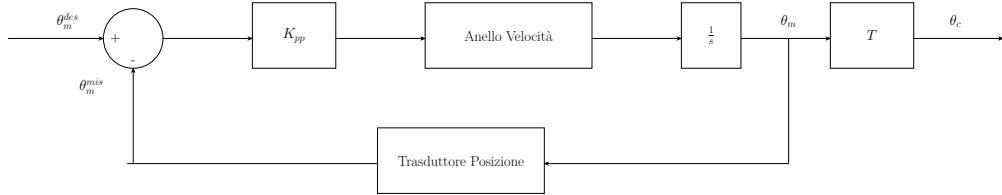
Figura 6.14: Filtri notch:  $\xi_p$  costante sx,  $\frac{\xi_d}{\xi_p}$  costante centro,  $\xi_d$  costante dx

**Filtri su Feedforward:** Il filtro sul feedforward non modifica il margine di fase, né la pulsazione di attraversamento, mentre rimuove le componenti armoniche di accelerazione prossime a  $\omega_p$  che potrebbero eccitare risonanza in caso di legge non dolce. Resta importante la scelta della banda passante del filtro, perché il feedforward lavora soprattutto alle alte frequenze, perciò tagliare prima non permetterebbe un opportuno funzionamento.

## 6.4 Anello di Posizione

L'anello di posizione è l'anello più esterno del controllo, richiede perciò che l'anello di velocità sia stato ben sintonizzato, perché non ha modo di portare rimedio a problemi negli anelli più interni, anzi, semmai li peggiora.

### 6.4.1 Controllo Co-Locato



Per una analisi semplificativa considero di trascurare: trasduttore di posizione, feedforward, anello di corrente e trasduttore di velocità. Valuto i poli e gli zeri utilizzando il luogo delle radici, considerando che i poli di  $L_p$  sono i poli di  $W_v$  e il polo in  $s = 0$  dovuto all'integrazione fisica; mentre gli zeri sono gli zeri di  $W_v$ , che sono anche gli zeri di  $L_v$ .

I poli di  $L_p$  sono i poli della catena chiusa, tra i poli di  $L_v$  e  $W_v$  c'è il controllore, perciò occorre effettuare un'opportuna scelta del guadagno di modo che i poli reali non diventino complessi coniugati.

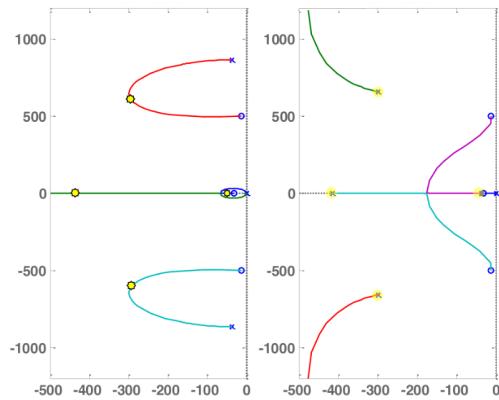


Figura 6.15: Luogo delle radici: velocità sx; posizione dx

**Analisi dei poli, scelta del guadagno:** Il polo reale dell'integrale  $s = 0$  per aumento del  $K_{pp}$  si muove verso lo zero reale, perciò, tanto più alto il guadagno, tanto più veloce diventa. Tuttavia i poli reali "ereditati" dal controllo di velocità, per aumento di  $K_{pp}$  tenderebbero agli zeri dell'antirisonanza, quindi a diventare

complessi coniugati, quindi a introdurre una bassa risonanza in bassa frequenza, motivo per cui è importante limitare il guadagno. Per la scelta del guadagno si può utilizzare la formulazione empirica  $K_{pp}^{co} = \frac{\omega_{bv}}{4\xi_{des}^2}$ , con  $\xi \in [1; 1.5]$ , mentre nel caso di risonanza in bassa o media frequenza è preferibile utilizzare  $\xi \simeq 1.4$ , da cui  $K_{pp}^{co} \simeq \frac{\omega_{bv}}{8}$ .

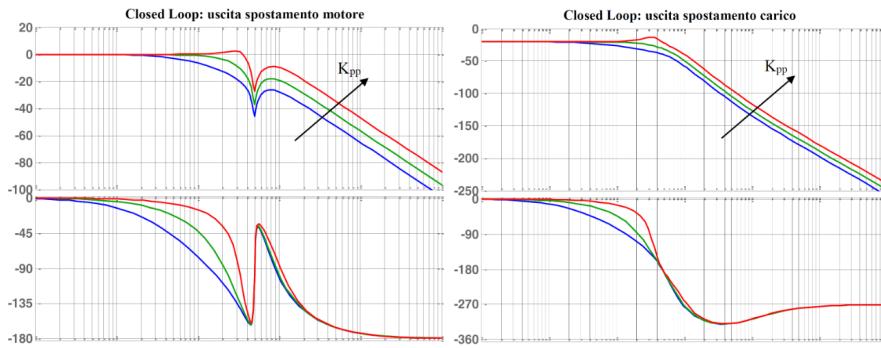
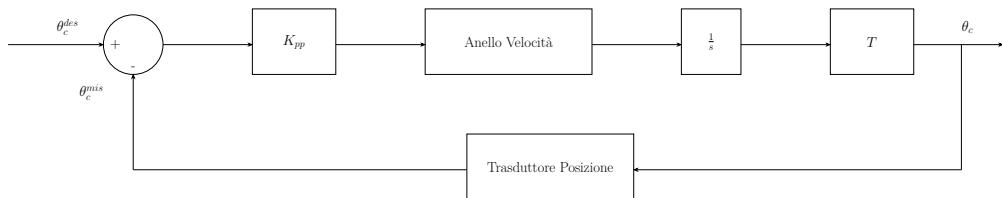


Figura 6.16: Anello chiuso posizione: lato motore sx; lato carico dx

#### 6.4.2 Controllo Non Co-Locato



I poli di  $L_p$  sono i 4 poli di  $W_v$ , 2 reali 2 complessi coniugati, il polo reale in  $s = 0$  dovuto all'integrazione fisica e i 2 poli della trasmissibilità, che sono anche gli zeri complessi coniugati di  $W_v$ . Gli zeri di  $L_p$  sono i 3 zeri di  $W_v$ , 2 complessi coniugati e uno reale, e lo zero della trasmissibilità.

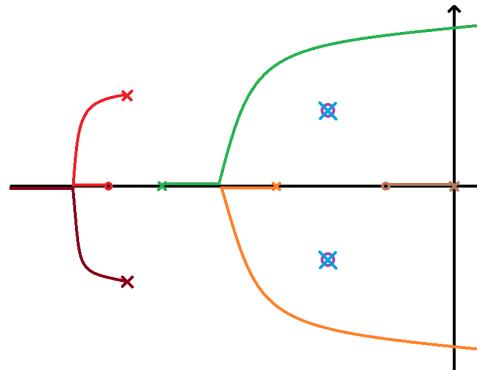


Figura 6.17: Luogo delle radici di anello di posizione non collocato

**Analisi controllo Non CoLocato, scelta guadagno:** Per l'analisi del tipo di controllo si utilizza il luogo delle radici. Si vede come l'antirisonanza si cancelli con la risonanza in trasmissibilità; i due poli complessi coniugati tendono all'asse reale per  $K_{pp}$  elevati; polo reale in  $s = 0$  tende a zero reale; infine, e parte più critica di questo controllo, i due poli reali tendono all'instabilità per  $K_{pp}$  elevati. In modo simile al precedente, considero di dividere il controllo con un  $K_{pp}^{co}$  tra  $E_p^{\text{carico}}$ ,  $\Omega_{des}^{\text{carico}}$  e  $\frac{1}{\tau}$  tra  $\Omega_{des}^{\text{carico}}$ ,  $\Omega_{des}^{\text{mot}}$ , risultando quindi in  $K_{pp}^{nc} = K_{pp}^{co} \frac{1}{\tau}$ . Attenzione che questo non significa che il guadagno è alzato dal riduttore, perché quel  $\frac{1}{\tau}$  va a elidersi con il  $\tau$  della trasmissibilità.

### CoLocato vs Non CoLocato

Il controllo di tipo CoLocato è incondizionatamente stabile<sup>10</sup>; il controllo Non CoLocato invece tende all'instabilità per  $K_{pp}$  elevati. Per  $K_{pp}$  bassi i due hanno comportamenti molto simili, perciò in potenziali applicazioni si può usare uno o l'altro in base alle condizioni operative.

**Condizione di disturbo al carico:** Il controllo di tipo Non CoLocato è da utilizzare nel caso di forze di disturbo al carico rilevanti.

Partendo dall'equazione della dinamica lato carico  $J_c \ddot{\theta}_c = k(\theta_c - \theta_m \tau_R) + D(\dot{\theta}_c - \dot{\theta}_m \tau_R) - C_c - f_c \dot{\theta}_c$ , considerando condizioni statiche, rapporto di trasmissione unitario, si ottiene  $C_c = k(\theta_c - \theta_m)$ . Applicando un gradino di coppia di carico, si ottiene che a regime vale  $\theta_c - \theta_m = \frac{C_c}{k}$ , ossia motore e carico non avranno la stessa posizione finale.

Con controllo di tipo colocato questa differenza non viene percepita, perché il motore verrà correttamente portato al suo valore finale, mentre il carico sarà ad una posizione non nota e scorretta. Con il controllo non collocato invece, misurando la posizione del carico, questa sarà corretta, e il motore andrà a compensare la differenza.

La scelta tra i due quindi è legata a valutazione del tipo  $\frac{C_c^{\text{attesa}}}{K^{\text{stimata}}} <$  precisione desiderata lato carico, se viene rispettata questa disegualanza si può utilizzare un controllo collocato, altrimenti occorre usare uno non collocato.

**Quando NON usare controllo non collocato:** Il controllo non collocato è legato a margine di fase minore e necessità di opportune scelte, dimensionamento, implementazione<sup>11</sup> di trasduttori lato carico, perciò meno di forze di disturbo al carico elevate, non è conveniente rispetto un CoLocato.

Il controllo non collocato va evitato in caso di gioco elevato, perché avere gioco significa avere una zona di incertezza in cui non si può sapere esattamente dov'è il carico; però il controllo tenderebbe ugualmente alla posizione desiderata, ma se l'incertezza è tale da portare il carico fuori dalla zona di incertezza, questo tenterebbe di riportarlo in posizione desiderata, ma con alto errore, quindi alta compensazione, quindi tenderebbe a uscire dalla zona di incertezza lato opposto, portando a oscillazione di posizione del carico oltre la zona di incertezza. Fenomeno peggiorato per  $K_{pp}$  elevato. Risolvere questa problematica richiede utilizzo di guadagni variabili con la velocità e in particolare ulteriormente ridotti per basse velocità, quindi prossimi a regime.

<sup>10</sup>Teoricamente, in pratica ci sono delle dinamiche finora ignorate che renderanno instabile il controllo per  $K_{pp}$  eccessivamente elevati.

<sup>11</sup>L'encoder richiede installazione accurata, deve essere installato utilizzando un elemento rigido, altrimenti si potrebbe aggiungere risonanza e antirisonanza indesiderata nella misura.

# 7 CONTROLLO DEL MOTO IN PRESENZA DI GIOCO

Il gioco è caratterizzato da una variazione dell'inerzia equivalente legata a cambio di segno di  $T_2$  (questo non si verifica in ogni situazione, vedi 3.1.7). Motore e carico possono essere accoppiati per fianco destro o sinistro perciò  $J_{eq} = J_m + \tau^2 J_c$ ; motore e carico possono essere disaccoppiati  $J_{eq} = J_m$ .

## 7.1 Problema del gioco

Il problema legato alla variazione di inerzia è il seguente:

$$\begin{cases} \text{Accoppiati: } J_{eq} = J_m(1 + \rho) \rightarrow \omega_{bv}^{min} \simeq \frac{K_{pv} K_T}{J_m(1 + \rho)} \\ \text{Disaccoppiati: } J_{eq} = J_m \rightarrow \omega_{bv}^{max} \simeq \frac{K_{pv} K_T}{J_m} \end{cases}$$

Ossia passando da carico e motore accoppiati a disaccoppiati, per  $K_{pv}$  costante, la banda passante varia di un fattore  $1 + \rho$ , l'aumento di banda passante è associato a avvicinamento a  $\omega_I, \omega_{tv}$ , che potrebbe portare a calo di margine di fase, e instabilità.

Il gioco è caratterizzato da passaggio imprevedibile da motore carico accoppiati e disaccoppiati, e il cambio tende ad autoalimentarsi, si instaura un ciclo limite di oscillazione non armonica permanente. Questo problema affligge controllo collocato e non collocato.

**Guadagno di velocità:** Per limitare gli effetti legati al gioco occorre fare **riduzione di  $K_{pv}$** , che va dimensionato in modo da ottenere  $\omega_{bv}^{max} < \omega_{bv}^{lim}$  o comunque tale da garantire un certo margine di fase<sup>1</sup> anche per c-m disaccoppiati.

### 7.1.1 Rapporto di inerzia

Il problema del gioco viene semplificato quando viene effettuata la **riduzione del rapporto di inerzia**, perché porta ad una minore differenza di inerzia tra c-m disaccoppiati/accoppiati, quindi ad avere bande passanti e margini di fase simili. Tuttavia la scelta di  $\rho$  non dovrebbe portare a utilizzo di riduttori con alto rapporto di trasmissione e gioco elevato.<sup>2</sup>

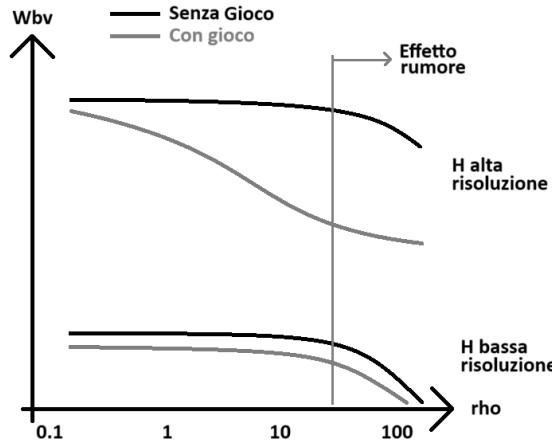


Figura 7.1: Effetto del gioco:  $\omega_{bv}(\rho)$

**Effetto del rumore:** Per  $\rho \rightarrow 0$  il gioco è poco rilevante, perché il motore non vede il carico. Le curve calano per  $\rho$  elevati perché portano ad aumentare il  $K_{pv}$  associato, che è quello che fa aumentare gli effetti del rumore. Tuttavia **non c'è una relazione diretta tra  $\rho$  e aumento del rumore, la causa è l'inerzia totale  $J$ , infatti, il calcolo del guadagno per l'anello di posizione è  $K_{pv} = \frac{J\omega_{bv}^{des}}{K_T}$** , dove facilmente ci si rende conto di questa relazione. Abbassare  $\rho$  aumentando l'inerzia potrebbe peggiorare gli effetti del rumore.

<sup>1</sup>La scelta del margine di fase non dovrebbe essere eccessivamente conservativa,  $m_\phi = 20^\circ$ , serve per evitare l'autoalimentazione, dovrebbe servire un numero ridotto di volte per ciclo.

<sup>2</sup>Indagare come mai la curva con trasduttore ad alta risoluzione e con gioco fornita dal costruttore sia troppo conservativa.

**Rapporto di trasmissione ottimo:** Riprendendo il rapporto di trasmissione ottimo come visto in 2.3, si ottiene, utilizzando una logica diversa, un valore che funziona bene anche per il controllo, dato che porta ad avere  $\rho$  ridotto<sup>3</sup>.

### 7.1.2 Acceleration Feedback

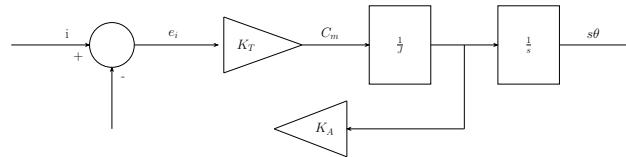


Figura 7.2: Acceleration feedback

Acceleration Feedback è una tecnica che consiste nel retroazionare l'accelerazione e portarla al motore come corrente, così facendo la relazione tra accelerazione e corrente diventa  $\frac{s^2\theta}{i} = \frac{K_T}{J + K_T K_A}$ , ossia viene aumentata virtualmente l'inerzia lato motore di una quantità  $K_T K_A$ , da cui si ottiene un rapporto di inerzia virtuale minore, quindi meno sensibile al gioco,  $\rho^{\text{virtuale}} = \frac{s^2 J_c}{J_m + K_T K_A}$ .

Tuttavia la misura di accelerazione non è possibile. L'accelerazione può essere stimata a partire dalla misura di posizione utilizzando una doppia derivata e opportuno filtro (il filtro è fondamentale perché la derivata va a amplificare il rumore) oppure utilizzando stimatori complessi (Kalman). In entrambi i casi occorre una misura della posizione molto precisa, inoltre i risultati comunque non sono particolarmente efficaci.

### 7.1.3 Load Observer

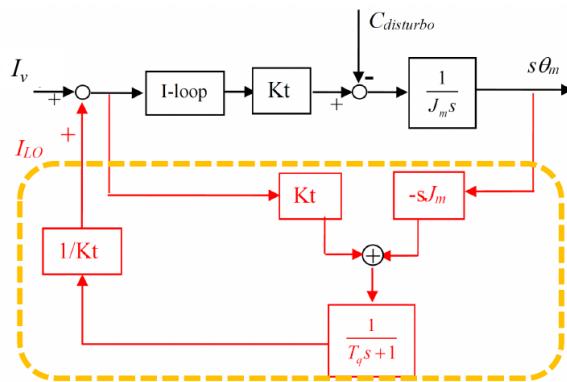


Figura 7.3: Load observer, schema implementativo

Load Observer è una tecnica che considera il sistema ideale composto dal solo motore, mentre le non idealità vengono consensate in un contributo di coppia di disturbo (gioco e elasticità della trasmissione e attrito). Se questo contributo di disturbo fosse determinabile, potrebbe essere cancellato (in feedback o eventualmente in feedforward), il sistema ottenuto sarebbe quello ideale solo motore, il carico non viene visto.

Non vedere il carico è il maggior difetto, rimanendo in catena aperta è fondamentale effettuare una opportuna scelta della legge di moto. Tuttavia significa anche che  $\rho^{\text{virtuale}} \rightarrow 0$ , quindi non c'è sensibilità a gioco, risonanza e antirisonanza virtuali si elidono quindi non c'è sensibilità all'elasticità.

Anche in questo caso è fondamentale la misura di accelerazione, che però ha tutta una serie di problematiche (vedi 7.1.2).

**Stima della corrente:** In ingresso al motore viene aggiunta una corrente  $i_{LO}$  tale da generare una coppia uguale e opposta alla coppia di disturbo, in modo si elidano.

$$\begin{cases} C_m = K_T i \\ C_m = J_m \ddot{\theta}_m + C_{\text{disturbo}} \end{cases} \rightarrow C_{\text{disturbo}} = C_m - J_m \ddot{\theta}_m = K_T i - J_m \ddot{\theta}_m \rightarrow i_{LO} = \frac{K_T i - J_m \ddot{\theta}_m}{K_T}$$

<sup>3</sup>Il motivo non è trasparente, ma intuitivamente la soluzione migliore è quella in cui il motore non ha carico sia in termini meccanici sia in termini di controllo.

### 7.1.4 Esercizio di controllo di un sistema con gioco

Dati  $J_m = 0.001 \text{kgm}^2$ ,  $K_T = 1 \text{Nm/A}$ ,  $\rho = 9$ ,  $\omega_i = 5 \text{kHz}$ ,  $\omega_{tv} = 700 \text{Hz}$ , Frequenza di campionamento dell'anello di velocità  $8 \text{kHz}$ . Si voglia progettare un controllo tale per cui quando il carico sia disaccoppiato venga garantito un  $m_\phi \simeq 30^\circ$  e che garantisca un margine di fase migliore quando accoppiato.

In condizione di disaccoppiamento deve valere<sup>4</sup>  $\omega_{bv}^{\text{dis}} = \omega_a^{\text{dis}} \simeq \frac{K_{pv} K_T}{J_m}$ .

In generale gli aumenti di inerzia causano calo di margine di fase perché provocano uno spostamento della pulsazione di attraversamento che si avvicina all'integrale. Perciò il PI va progettato per carico accoppiato (da carico disaccoppiato ad accoppiato l'inerzia aumenta, inoltre è anche la condizione di lavoro desiderata):  $\frac{1}{T_{iv}} \simeq \frac{\omega_{bv}^{\text{acc}}}{4\xi^2}$  con  $\omega_{bv}^{\text{acc}} = \omega_a^{\text{acc}} \simeq \frac{K_{pv} K_T}{J} = \frac{K_{pv} K_T}{J_m(1+\rho)}$ .

Nel caso disaccoppiato  $m_\phi^{\text{dis}} = \pi - \frac{\pi}{2} + \tan^{-1}(\omega_a^{\text{dis}} T_{iv}) - \tan^{-1}\left(\omega_a^{\text{dis}} \frac{J}{f}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_a^{\text{dis}}}{\omega_{tv}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_a^{\text{dis}} T_c}{2}\right)$ , considerando un attrito trascurabile, e raccogliendo i termini di trasduttore e anello di corrente in un periodo equivalente  $m_\phi^{\text{dis}} \simeq \tan^{-1}(\omega_a^{\text{dis}} T_{iv}) - \tan^{-1}(\omega_a^{\text{dis}} T_{eq})$ . Sostituendo la formula per la sintesi del PI, considerando  $\frac{\omega_a^{\text{dis}}}{\omega_a^{\text{acc}}} \simeq 1 + \rho$  e in fine sostituendo  $\omega_a^{\text{dis}}$  nella seconda arcotangente si ottiene:  $m_\phi = \tan((1 + \rho)4\xi^2) - \tan\left(\frac{K_{pv} K_T}{J_m} T_{eq}\right) \geq m_{\phi, \text{minima}}$ .

Da questa espressione è possibile ricavare il guadagno massimo per l'anello di velocità, con  $\xi = 1$ :

$$K_{pv} \leq \tan\left\{\omega_{\phi, \text{minima}} - \tan((1 + \rho)4\xi^2)\right\} \frac{J_m}{K_T T_{eq}}$$

Infine è possibile determinare il polo del PI del controllo di velocità  $\frac{1}{T_{iv}} \simeq \frac{\omega_a^{\text{acc}}}{4\xi^2} \simeq \frac{K_{pv} K_T}{J} \frac{1}{4\xi^2}$ .

## 7.2 Autotuning

Con Autotuning si intendono le tecniche di sintonizzazione automatica del controllo a partire da misure sperimentali. Step:

1. Misura di  $L_v(j\omega)$ , utilizzata per cercare  $K_{pv}$  che soddisfi  $m_\phi$  e  $m_a$  desiderati o minimi
2. Calcolo dell'integrale  $\frac{1}{T_{iv}}$  (noi l'abbiamo visto con metodi empirici)
3. Misura di  $W_v(j\omega)$
4. Verifica dell'utente che potrebbe utilizzare dei filtri per cercare eventualmente di migliorare quanto ottenuto
5. Misura di  $L_p(j\omega)$ , utilizzata per sintonizzare  $K_{pp}$
6. Misura di  $W_p(j\omega)$

Occorre prestare attenzione che l'autotuning si basa sulle misure, questo significa che occorre prestare attenzione a una serie di aspetti: scelta di un opportuno numero di misure, encoder sufficientemente risoluto, applicazione di eccitazione di giusta intensità e durata, e come questi devono essere adattati considerando la presenza di gioco.

Attenzione che un controllo ottenuto per autotuning non viene migliorato utilizzando filtri in caso di sistema rigido o con risonanza in bassa frequenza, a meno che non vi siano modi di vibrare di media o alta frequenza che causano problemi in bassa frequenza, in quel caso potrebbero essere utilizzati dei filtri notch (quando i modi di vibrare sono pochi) o dei filtri passa basso.

<sup>4</sup>Notare che l'inerzia è solo del motore quando carico disaccoppiato.

# A CONTROLLI AUTOMATICI

Ripasso di controlli automatici con focus su: Trasformata di Laplace; Diagrammi di Bode; Sistemi del secondo ordine; Luogo delle radici; Criteri di stabilità; Analisi di sistemi nel tempo e in frequenza.

**Teorema di Shannon:** Per campionare correttamente (senza perdita di informazioni) un segnale, è sufficiente campionarlo con una frequenza di campionamento pari almeno al doppio della massima frequenza del segnale (tale frequenza viene anche detta frequenza di Nyquist):  $f_c \geq 2f_{max}$ .

## A.1 Trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace bilatera del segnale  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  è la funzione  $X : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $s \mapsto X(s) := \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$ , per ogni  $s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$  per cui l'integrale converge. Si denota come  $\mathcal{L}(x(t)) = X(s)$ .

### A.1.1 Proprietà

Principali proprietà della trasformata di Laplace.

- Traslazione in t:  $\mathcal{L}(x(t + \beta)) = e^{s\beta}X(s)$
- Traslazione in s:  $\mathcal{L}(e^{s_0 t}x(t)) = X(s - s_0)$
- Cambio di scala:  $\mathcal{L}(x(at)) = \frac{1}{|a|}X(\frac{s}{a})$
- Derivata in s:  $\mathcal{L}(tx(t)) = -\frac{dX(s)}{ds}$
- Convoluzione:  $\mathcal{L}(v(t) * w(t)) = V(s)W(s)$
- Integrazione in t:  $\mathcal{L}\left(\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau\right) = \frac{X(s)}{s}$
- Antritrasformata di Laplace:  $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t}d\omega$
- Derivata in t:  $\mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = sX(s)$

### A.1.2 Funzione di Trasferimento

Per un sistema LTI, la funzione di trasferimento  $H(s)$  è definita come il rapporto della trasformata di Laplace dell'uscita  $Y(s)$  e dell'ingresso  $X(s)$  del sistema, assumendo condizioni iniziali nulle:  $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ .

## A.2 Diagrammi di Bode

Per rappresentare le risposte armoniche si utilizza una coppia di diagrammi detti di Bode:

1.  $|G(j\omega)|$  funzione di  $\omega$
2.  $\arg(G(j\omega))$  funzione di  $\omega$

Sono diagrammi semilogaritmici (anche logaritmici) utili per rappresentare ampi intervalli di pulsazioni e quindi permettono di osservare facilmente amplificazioni e attenuazioni.

### Decibel

Il decibel, adimensionale perché indica rapporti di grandezze equivalenti dimensionalmente, è definito per le ampiezze come  $G_{dB} = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$ . Il decibel è usato nei diagrammi di Bode per rappresentare le ampiezze delle risposte in esame.

### Fasi

Le fasi  $\arg(1 + j\omega\tau) = \arctan \omega\tau$ ,

### Regole di tracciamento

Nel caso di ampiezze:

1. Costanti: rette orizzontali
2. Poli: Per ogni ordine n hanno pendenza di  $-n \cdot 20dB$  per decade
3. Zeri: Per ogni ordine n hanno pendenza di  $+n \cdot 20dB$  per decade

Nel caso di fasi:

1. Costanti: 0rd
2. Poli: Per ogni ordine n hanno pendenza di  $-n \cdot \frac{\pi}{4}$  per decade, per una durata totale di due decadì
3. Zeri: Per ogni ordine n hanno pendenza di  $n \cdot \frac{\pi}{4}$  per decade, per una durata totale di due decadì

## A.3 Sistemi del Secondo Ordine

I sistemi del secondo ordine si definiscono come  $G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ , dove  $\omega_n$  è la frequenza naturale dei poli e  $\xi$  è il fattore di smorzamento. Ha per radici  $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$ , dove: per  $\xi < 1$  i due poli sono complessi coniugati; per  $\xi = 1$  i due poli sono coincidenti; per  $\xi > 1$  i due poli sono reali distinti.

### A.3.1 Risposta al gradino

Parametri tipici della risposta al gradino sono:

- $t_{rise}$ , tempo di salita, definito come il tempo impiegato per passare dal 10% al 90% del valore finale<sup>1</sup>;
- $M_p$  massima sovraelongazione come incremento, in percentuale, sul valore finale;
- $t_{settling}$ , tempo di assestamento, definito come il tempo per arrivare e permanere all'interno di una certa banda entro l'1% del valore finale.

### A.3.2 Effetto dello smorzamento

Lo smorzamento interviene in diverso modo sulla dinamica di un sistema in base al valore che assume. In particolare vengono distinte tre regioni:

1.  $\xi > 1$  sistema sovrasmorzato, non presenta oscillazioni o sovraelongazione
2.  $\xi = 1$  sistema criticamente smorzato, è quanto più veloce il sistema può rispondere in assenza di oscillazioni
3.  $\xi < 1$  sistema sottosmorzato, presenta oscillazioni e sovraelongazione

**Massima sovraelongazione:** La massima sovraelongazione in un sistema del secondo ordine dipende unicamente dal valore dello smorzamento. Un valore che va tenuto a mente è  $\xi \simeq 0.7$  per cui si ottiene  $M_p = 5\%$ .

**Tempo di assestamento:** Nei libri, solitamente, è presente una relazione del tipo  $t_s \propto \frac{1}{\xi\omega_n}$ , tuttavia non tiene conto della non monotonia di  $t_s$  al variare di  $\xi$ . In particolare, risulta più corretto:

$$\begin{cases} t_s \propto \frac{1}{\omega_n} & \downarrow \text{ se } \uparrow \omega_n \\ \propto \frac{1}{\xi} \text{ fino a } 0.7, \text{ oltre } 0.7 & \propto \xi \end{cases}$$

In questo modo risulta chiaro come convenga operare per pulsazioni naturali alte, e per sovraelongazioni  $\xi \in [0.7; 1.4]$ .

<sup>1</sup>Tuttavia permette di sapere solo ciò che accade negli istanti iniziali. Un sistema con un buon tempo di risposta potrebbe divergere e non avremmo modo di rendencene conto guardando solo questo tempo.

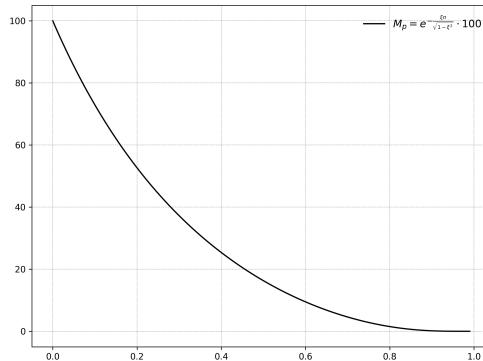


Figura A.1: Influenza del fattore di smorzamento nella sovraelongazione

## A.4 Luogo delle radici

Strumento che consente di valutare graficamente l'andamento delle radici del denominatore di una funzione di trasferimento ottenuta mettendo in retroazione il blocco di andata costituito da  $G(s)$  e blocco proporzionale  $K$ , e il blocco di retroazione 1. Definito  $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ , monico e coprimo; il polinomio caratteristico del sistema in retroazione unitaria è dato da  $D(s) + KN(s) = 0$ , e rappresenta i poli di  $W(s) = \frac{KN(s)}{D(s)+KN(s)}$ . Al variare di  $K$ , con il luogo delle radici, è possibile analizzare la posizione dei poli del sistema a catena chiusa  $W(s)$ .

### A.4.1 Step

- i. Funzione di trasferimento del sistema ad anello aperto: Scrivere la funzione di trasferimento del sistema ad anello aperto  $G(s)H(s)$ , dove:  $G(s)H(s) = N(s)D(s)$ ;  $N(s)$ : numeratore del sistema;  $D(s)$ : denominatore del sistema. Questa funzione è solitamente espressa in termini di poli e zeri del sistema.
- ii. Trovare i poli e gli zeri: Determinare i poli (tali che  $D(s) = 0$ ) e gli zeri (tali che  $N(s) = 0$ ) del sistema ad anello aperto. I poli (disegnati solitamente con una "x") determinano le posizioni iniziali delle traiettorie del luogo delle radici, mentre gli zeri (disegnati solitamente con un "o") ne determinano le destinazioni finali.
- iii. Determinare la quantità di traiettorie: Il numero di rami (traiettorie del luogo delle radici) è uguale al numero di poli del sistema ad anello aperto. Ogni ramo inizia da un polo del sistema e tende verso uno zero del sistema, o verso l'infinito se ci sono più poli che zeri.
- iv. Trovare l'asse reale coinvolto nel luogo delle radici: Determinare i tratti dell'asse reale che fanno parte del luogo delle radici. Un segmento sull'asse reale fa parte del luogo delle radici se alla sua destra ci sono un numero dispari di poli e zeri.
- v. Determinare i punti di separazione e arrivo (Asintoti): Se ci sono più poli che zeri, calcolare gli asintoti delle traiettorie del luogo delle radici, che indicano dove i rami tendono all'infinito. Gli asintoti possono essere trovati con: Angoli degli asintoti =  $\frac{(2k+1)\pi}{n-m}$  Dove  $n$  è il numero di poli,  $m$  è il numero di zeri;  $k = 0, 1, 2, \dots$ , di cui devono essere indagati tutti i valori fino a quando non si giunga ad una ripetizione degli angoli. Il punto di intersezione con l'asse reale è dato da:  $\sigma_a = \frac{\sum \text{Poli} - \sum \text{Zeri}}{n-m}$
- vi. Trovare i punti di rottura (breakaway) sull'asse reale: Se due o più rami si uniscono o si separano sull'asse reale, questo avviene in punti detti punti di rottura. Per determinare tali punti, risolvere la derivata della funzione caratteristica del sistema:  $\frac{d(1+KG(s)H(s))}{ds} = 0$ , o in modo empirico calcolando  $\sum_1^m \frac{1}{\sigma - z_i} = \sum_1^n \frac{1}{\sigma - p_i}$  dove  $z_i$  è lo zero e  $p_i$  il polo, questo restituisce la coordinata sull'asse reale del punto studiato.
- vii. Calcolare gli angoli di partenza e arrivo: Determinare l'angolo di partenza per i rami che si staccano dai poli complessi e l'angolo di arrivo per quelli che si avvicinano agli zeri complessi. Questi angoli sono calcolati con le equazioni basate sulla posizione relativa di poli e zeri complessi rispetto al polo o allo zero in questione.

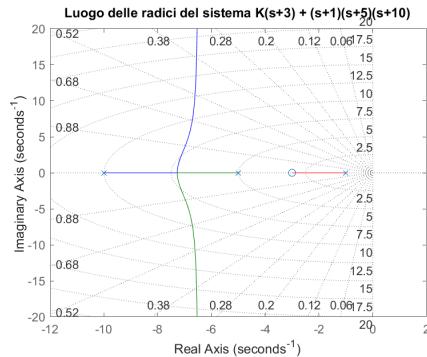
- viii. Determinare i punti di intersezione con l'asse immaginario (criterio di Routh-Hurwitz): Verificare se i rami del luogo delle radici attraversano l'asse immaginario. Questo può essere fatto utilizzando il criterio di Routh-Hurwitz per trovare i valori di  $K$  per cui il sistema ha poli con parte reale nulla (ossia poli puramente immaginari).
- ix. Tracciare il luogo delle radici: Con tutte le informazioni raccolte, tracciare il diagramma del luogo delle radici:
- Parti dai poli ad anello aperto.
  - Disegna i rami lungo l'asse reale e seguendo gli asintoti.
  - Mostra come i rami si avvicinano agli zeri o tendono all'infinito.
  - Indica chiaramente i punti di rottura, intersezioni con l'asse immaginario e altri dettagli chiave.

#### A.4.2 Proprietà extra

- Per trovare un punto nel luogo della radici, noti gli angoli tra ciascuno zero e quel punto  $\theta_z$ , e tra angoli tra ciascun polo e quel punto  $\theta_p$ :  $\sum \theta_z - \sum \theta_p = -180$ .
- Lo smorzamento nel diagramma corrisponde a un angolo  $\theta = \cos^{-1}(\psi)$ .
- Sussiste una relazione tra il guadagno ad anello aperto e  $K_{\text{tot}} = \frac{1}{|G_{\text{open}}H|} = \frac{\pi L_{p,i}}{\pi L_{z,i}}$  con  $L_p$  e  $L_z$  lunghezze dei poli/zeri, ossia distanza tra polo/zero e punto di interesse. Se non ci sono poli o zeri, vanno posti a 1.

#### A.4.3 Esempio

Per esempio fare il luogo delle radici di  $G(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+5)(s+10)}$  risulta nel seguente grafico:



### A.5 Criteri di Stabilità

Per lo studio dei sistemi è importante conoscerne la stabilità, ossia se il sistema reagisce in modo controllato ad un dato ingresso. Ci sono diversi tipi di criteri di stabilità alcuni sono grafici, altri analitici.

#### A.5.1 Criterio Stabilità BIBO

Con stabilità BIBO si intende che il sistema abbia una risposta limitata ad un ingresso limitato. Nota bene, questa stabilità non implica stabilità asintotica.

#### A.5.2 Criterio di Stabilità dei Poli della funzione di trasferimento

In un sistema lineare rappresentato da una funzione di trasferimento  $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$  con  $N(s)$  e  $D(s)$  coprimi, la stabilità dipende dalla posizione dei poli. Questo criterio è necessario ma non sufficiente.

- Per un sistema causale e stabile, tutti i poli devono avere una parte reale negativa, cioè devono trovarsi nel semipiano sinistro del piano complesso  $\Re(s) < 0$ .
- Se anche un solo polo ha una parte reale positiva  $\Re(s) > 0$ , il sistema è instabile.
- Se i poli si trovano sulla linea immaginaria pura  $\Re(s) = 0$ , il sistema è marginalmente stabile, cioè risponderà con oscillazioni permanenti e costanti.

### A.5.3 Criterio di Routh-Hurwitz

Il criterio di Routh-Hurwitz permette di verificare la stabilità di un sistema senza calcolare esplicitamente i poli della funzione di trasferimento. Si basa sullo sviluppo di una tabella chiamata tabella di Routh:

Supposto di avere un polinomio caratteristico  $P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$  con  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  coefficienti reali. La tabella di Routh si costruisce come segue:

- Prima riga: Inserisci i coefficienti degli elementi di grado pari, a partire da  $a_n$
- Seconda riga: Inserisci i coefficienti degli elementi di grado dispari, partendo da  $a_{n-1}$
- Righe successive: Gli elementi delle righe successive si calcolano utilizzando i coefficienti delle righe precedenti. Ogni elemento della riga  $i+2$  si calcola con la formula:  $R_{i+2,j} = \frac{R_{i,1}R_{i+1,j+1} - R_{i+1,1}R_{i,j+1}}{R_{i+1,1}}$  dove  $R_{i,j}$  rappresenta l'elemento nella riga  $i$  e colonna  $j$  della tabella.
- Continua a costruire la tabella fino ad avere una riga per ogni grado di  $s$  (fino a  $s^0$ ).

#### Condizione di Stabilità:

Il criterio di Routh-Hurwitz stabilisce che il sistema è stabile se e solo se tutti i termini della prima colonna della tabella di Routh hanno lo stesso segno (positivi o negativi). Ogni cambio di segno nella prima colonna corrisponde a un polo con parte reale positiva, quindi a un segno di instabilità.

### A.5.4 Criterio di Bode

Per il criterio di Bode, può essere analizzata la stabilità di un sistema tramite due parametri principali, il margine di fase  $m_\phi$  e il margine di guadagno  $m_a$ .

Un sistema è stabile se  $m_\phi > 0, m_a > 0$ .

1. **Margine di fase:** la differenza in gradi tra la fase del sistema e  $-180^\circ$  alla frequenza di attraversamento del guadagno unitario (o nullo in dB)  $\omega_a$ :  $m_\phi = \pi + \angle L(j\omega_a)$ . Indica quanto ritardo in fase il sistema può sopportare prima di diventare instabile.
2. **Margine di guadagno:** il rapporto di guadagno necessario per portare il sistema ad attraversare il punto critico, ossia per  $\omega_\pi$  tc  $\angle L(j\omega_a) = -\pi$ :  $m_a = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} = -|L(j\omega_\pi)|_{dB}$ . Indica l'incremento in termini di guadagno che un elemento del sistema può sopportare prima di diventare instabile.

### A.5.5 Criterio di Nyquist

Il criterio di Nyquist è un metodo grafico utilizzato per analizzare la stabilità dei sistemi con retroazione (feedback) attraverso un'analisi della risposta in frequenza. Il criterio di Nyquist si applica tipicamente ai sistemi descritti dalla funzione di trasferimento ad anello aperto  $L(s)$ , data dal prodotto del guadagno dell'impianto  $G(s)$  e del guadagno del controllore  $H(s)$ ,  $L(s) = G(s)H(s)$ .

#### Diagramma di Nyquist

Per applicare il criterio, si costruisce il diagramma di Nyquist, ovvero la curva tracciata nel piano complesso  $\mathbb{C}$  dalla funzione  $L(i\omega)$  al variare della frequenza  $\omega$  da 0 a  $+\infty$  (e poi da  $+\infty$  a  $-\infty$ , se necessario). Questa curva rappresenta la risposta in frequenza del sistema in catena aperta, con la parte reale di  $L(i\omega)$  sull'asse x e la parte immaginaria sull'asse y.

#### Stabilità

Per determinare la stabilità del sistema a ciclo chiuso, il criterio di Nyquist si basa su un'analisi del numero di avvolgimenti del diagramma di Nyquist attorno al punto -1 nel piano complesso. Questo punto rappresenta la condizione critica in cui la retroazione positiva (instabilità) potrebbe prevalere, rendendo instabile il sistema a ciclo chiuso.

Numeri di avvolgimenti: Conta il numero di volte che il diagramma di Nyquist avvolge il punto -1 nel piano complesso, considerando il senso di rotazione.

Relazione con i poli instabili: Per la stabilità a ciclo chiuso, il numero di avvolgimenti attorno a -1 deve essere tale da compensare eventuali poli a parte reale positiva nel sistema a ciclo aperto.

Il criterio di Nyquist afferma che il numero di avvolgimenti netti N della curva di Nyquist attorno al punto -1 (contati in senso antiorario come positivi e in senso orario come negativi) deve soddisfare la relazione  $N = P - Z$ , dove:

- N è il numero di avvolgimenti netti del diagramma attorno al punto -1

- $P$  è il numero di poli a ciclo aperto di  $L(s)$  nel semipiano destro (ovvero i poli a parte reale positiva, che renderebbero instabile il sistema a ciclo chiuso)
- $Z$  è il numero di zeri a ciclo chiuso di  $1 + L(s)$  nel semipiano destro (equivalente al numero di poli instabili del sistema a ciclo chiuso)

Per garantire la stabilità del sistema a ciclo chiuso, il numero  $Z$  deve essere zero, ossia non ci devono essere poli a ciclo chiuso con parte reale positiva.

Sistema stabile: Se il sistema a ciclo aperto non ha poli a parte reale positiva  $P = 0$ , allora la stabilità a ciclo chiuso è garantita se il diagramma di Nyquist non avvolge il punto -1. Sistema con poli instabili: Se il sistema a ciclo aperto ha poli a parte reale positiva  $P > 0$ , allora il diagramma di Nyquist deve avvolgere il punto -1 un numero di volte pari a  $P$  per garantire la stabilità a ciclo chiuso.

# B MECCANICA DELLE VIBRAZIONI

Ripasso di Meccanica delle Vibrazioni con focus su: oscillatore semplice smorzato, analisi modale di sistemi a più gradi di libertà.

## B.1 Oscillatore Semplice Smorzato

L'oscillatore semplice smorzato è un modello di corpo, avente una certa massa  $m$ , vincolato tramite un elemento elastico  $k$  e un elemento viscoso  $c$  a telaio.

Per un sistema così fatto è possibile scrivere le 3 equazioni della dinamica:

- Equazione di Equilibrio:  $F(t) + F_e(t) + F_v(t) = m\ddot{x}(t)$
- Equazione di Legame:  $F_e(t) = -kx(t)$  e  $F_v(t) = -c\dot{x}(t)$
- Equazione di Moto:  $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$

La soluzione generale dell'equazione differenziale definita dalle equazioni del sistema è dato da soluzione omogenea e soluzione particolare:  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ .

### B.1.1 Soluzione omogenea (Risposta Libera)

La soluzione di  $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0$ , cui si associa il polinomio caratteristico  $\lambda^2m + \lambda c + k = 0$  è la soluzione omogenea dell'equazione differenziale. Dividendo per la massa si ottengono rispettivamente il fattore di smorzamento e la pulsazione naturale del sistema:  $\epsilon = \frac{c}{2\sqrt{km}}$  e  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Le radici del polinomio omogeneo associato sono  $\lambda_{1,2} = \epsilon\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\epsilon^2 - 1}$ , che per i vari  $k > 0, m > 0, c > 0$  permettono di distinguere vari casi:

1.  $\epsilon > 1$ : Sistema sovrasmorzato, permette di ritornare alla condizione di equilibrio,  $x_1(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$
2.  $\epsilon = 1$ : Sistema criticamente smorzato, permette di ritornare alla condizione di equilibrio il più velocemente possibile senza oscillazioni,  $x_1(t) = (A_1 + tA_2)e^{-\omega_n t}$
3.  $0 < \epsilon < 1$ : Sistema sottosmorzato, ritorna alla condizione di equilibrio, ma con oscillazioni,  $x_1(t) = C e^{-\epsilon\omega_n t} \sin(\omega_d t + \Phi)$
4.  $\epsilon = 0$ : Sistema non smorzato, non c'è ritorno alla condizione di equilibrio,  $x_1(t) = B_1 \cos(\omega_n t) + B_2 \sin(\omega_n t)$

La soluzione omogenea ha significato di risposta libera del sistema, ossia in condizione di forzante nulla.

### B.1.2 Soluzione particolare (Risposta Forzata)

La soluzione di  $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$ , per una certa forzante  $F(t)$  è la soluzione particolare dell'equazione differenziale. In base al tipo di forzante cambia la soluzione particolare. Possibili forzanti sono:

1.  $F(t) = F_0$  Costante
2.  $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$  Armonica
3.  $F(t + T) = F(t)$  Periodica
4.  $F(t)$  Generica

#### Forzante Costante

La forzante costante rappresenta la risposta al gradino di forza di ampiezza  $F_0$ , la soluzione particolare di questa forzante è  $x_2(t) = \frac{F_0}{k}$ , ed indica la posizione raggiunta a regime.

### Forzante Armonica

La soluzione particolare, per forzante armonica  $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ , ha risposta che dipende dalla frequenza della forzante. Per studiare questa soluzione si passa al campo delle frequenze (ipotesi isofrequenziale) e si utilizza la Frequency Responce Function  $\frac{x_0 e^{i\phi}}{F_0}$ , il cui modulo è  $\left| \frac{x_0 e^{i\phi}}{F_0} \right| = \frac{1}{k \sqrt{\left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left( 2\epsilon \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}}$ .

Per la FRF si possono andare a verificare condizioni limite:

- Quasi Statica:  $\phi \simeq 0$ ,  $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 0$ , in questo caso l'effetto dello smorzatore è irrilevante
- Zona di Risonanza<sup>1</sup>:  $\phi \simeq -\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$ , in questa condizione forza e velocità hanno la stessa direzione, l'energia in ingresso nel sistema può essere tale da portare a rottura il sistema
- Zona Sismografica:  $\phi \simeq -\pi$ ,  $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$ , in questo caso la massa è come se fosse sospesa,  $x_0 = \frac{F_0}{m\omega^2}$

### Forzante Periodica

Una forzante periodica può essere scomposta, tramite serie di Fourier, in una serie di componenti armoniche di periodo multiplo del periodo della fondamentale. La soluzione particolare in questo caso è  $x_2(t) = \frac{A_0}{k} + \sum \left| \frac{x_0 e^{i\phi}}{F_0} \right|_{\omega=m\bar{\omega}} A_m \cos \left( m\bar{\omega}t + \alpha_m + \angle \frac{x_0 e^{i\phi}}{F_0} \right)_{\omega=m\bar{\omega}}$

### Forzante Generica, Risposta Impulsiva

Teorema: *La trasformata della risposta impulsiva corrisponde alla risposta in frequenza di un oscillatore semplice all'ingresso armonico.* Questo significa che la risposta in frequenza all'impulso è la FRF:  $H(i\omega) = \frac{X(i\omega)}{F(i\omega)} = \frac{x_0 e^{i\phi}}{F_0}$ . Questo permette di ricavare la FRF a partire da misure con shaker elettrodinamici o martello strumentale.

## B.2 Sbilanciamento Statico

Viene definito sbilanciamento statico  $s = mr$ , con  $m$  la massa e  $r$  il raggio tra il centro di massa e il centro geometrico, ed è il decentramento di massa rispetto il centro geometrico. La massa quando soggetta a forzante armonica può portare ad alte vibrazioni e quindi a rottura. La massa è soggetta ad una forza centrifuga  $F_c = m\omega^2 r$ , dove  $\omega$  è la velocità angolare, questa forza è composta da due componenti che dipendono dall'istante temporale considerato  $F(t) = F_c \sin(\omega t)$ . La componente forzante da tenere presente è quella che si scarica su molla e smorzatore<sup>2</sup>  $F_{||} = sw^2 \sin(\omega t)$ . Passando ai vettori complessi è possibile

ricavare il modulo di  $|x_0 e^{i\phi}| = \frac{s}{M} \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{\left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left( 2\epsilon \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}}$ .

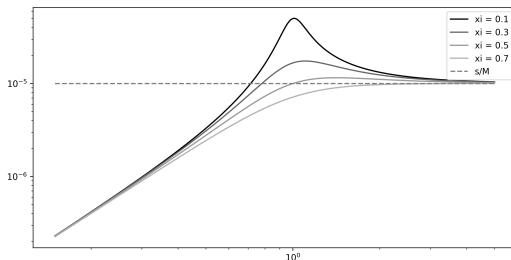


Figura B.1: Sbilanciamento statico  $s = 10^{-3}$ ,  $M = 100$ ,  $\omega_n = 1000$

## B.3 Vibrazioni Torsionali

Si parla di vibrazioni torsionali per un volano collegato ad un estremo di un albero e soggetto ad una coppia  $T(t)$  che provoca una rotazione  $\theta(t)$ . Considerando l'albero privo di massa, assimilabile ad una molla

<sup>1</sup>Tecnicamente la risonanza si ha per  $\omega_r = \omega_n \sqrt{(1 - 2\epsilon^2)}$ , che solitamente è vicino alla pulsazione naturale, ma non sono la stessa cosa.

<sup>2</sup>L'altra componente si scarica sulle guide.

torsionale di rigidezza  $k_T \left[ \frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \right] = \frac{I_p^O G}{L}$  dove  $I_p^O = \frac{\pi d^4}{32}$  è il momento di inerzia polare,  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  modulo elastico tangenziale. Per la viscosità viene introdotto  $c_T \left[ \frac{\text{Nm s}}{\text{rad}} \right]$ . A questo punto è possibile riportarsi al modello classico di oscillatore semplice smorzato considerando l'inerzia al posto della massa, la rigidezza torsionale e la viscosità torsionale; valgono:  $\omega_n = \sqrt{\frac{k_T}{I_p^O}}$  e  $\epsilon = \frac{c_T}{2\sqrt{k_T I_p^O}}$ .

## B.4 Decremento Logaritmico

Il metodo del decremento logaritmico, dedicato a sistemi ad 1gdl oppure aventi  $\xi \ll 1$ , permette, a partire da misure sperimentali, di ricavare pulsazione naturale e smorzamento di un certo sistema.

Considerando una risposta nel tempo del tipo:  $x(t) = e^{-\xi\omega_n t} (B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t))$ , è possibile fare il rapporto tra due picchi, considerando il periodo di oscillazione pari a  $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$ , che risulta:  $\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-\xi\omega_n T_d}}{e^{-\xi\omega_n (\bar{t}+T_d)}} = e^{-\xi\omega_n T_d}$ .

Il decremento logaritmico è il logaritmo del rapporto appena definito, per cui, noto  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ , sostituendo, si ottiene:

$$\delta = \ln \left( \frac{x_1}{x_2} \right) = \xi \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Per valori di  $\xi \ll 1$ , vale  $\xi \simeq \frac{\delta}{2\pi}$ . Utilizzando due picchi non adiacenti, per migliorare la precisione di misura, si ottiene:  $\xi \simeq \frac{\delta}{2n\pi}$

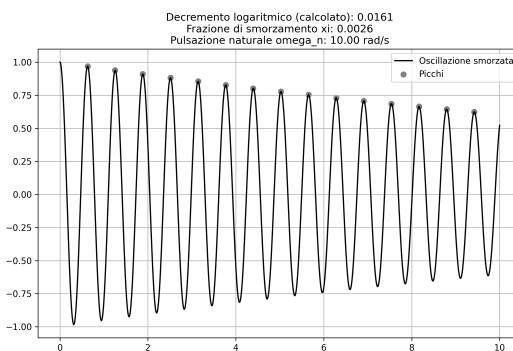


Figura B.2: Esempio calcolo decremento logaritmico

## B.5 Analisi Modale

L'analisi modale consiste nel disaccoppiare le variabili nel sistema di equazioni differenziali. A partire da un sistema  $[M] \{ \ddot{x}(t) \} + [c] \{ \dot{x}(t) \} + [K] \{ x(t) \} = \{ F(t) \}$ , ignorando l'effetto dello smorzamento, considerando forza esterna nulla, diventa  $[M] \{ \ddot{x}(t) \} + [K] \{ x(t) \} = 0$ . Imponendo una soluzione sincrona del tipo  $\{ x(t) \} = \{ u \} f(t)$ , con  $\{ u \}$  costante nel tempo, e  $f(t)$  che introduce la stessa dipendenza dal tempo per tutti i gdl, significa risolvere  $[M] \{ u \} \ddot{f}(t) + [K] \{ u \} f(t) = \{ 0 \}$ . Passando per vettori complessi, manipolando in modo da evidenziare la parte in frequenza<sup>3</sup> e quella costante, si ottiene il problema agli autovalori della matrice della dinamica  $[D]$ :  $\gamma \{ u \} = [D] \{ u \}$ , dove  $[D] = [M]^{-1} [K]$  e  $\gamma = \omega^2$ . Questo significa risolvere  $[(D) - \gamma I] = 0$ , che non è di soluzione banale.

### B.5.1 Criterio di Normalizzazione

Per semplificare i calcoli si utilizza un criterio di normalizzazione che permette di ottenere una chiara separazione dei modi (a discapito però del significato fisico).

$$\bullet \quad \{ u \}_i^\top [M] \{ u \}_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

<sup>3</sup>Avendo imposto una stessa dipendenza da  $f(t)$  per tutti i gdl i vari  $e^{i(\omega t + \phi)}$  si semplificano tra loro.

- K-ortogonalità  $\{u\}_i^\top [K] \{u\}_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \omega_i^2 & \text{se } i = j \end{cases}$

### B.5.2 Oscillatore Modale

Definita la matrice modale  $[U]$  formata da colonne di autovettori  $\{u\}$ , valgono

- $[U]^\top [M] [U] = [I]$
- $[U]^\top [K] [U] = [\Omega] = \text{diag}(\omega^2)$

Nota bene, per criterio di normalizzazione che  $[U]^\top [M] = [U]^{-1}$ , ossia  $\|U\| \neq 0$  cioè gli autovalori della matrice della dinamica sono linearmente indipendenti quindi formano una base. Questo significa che  $\{x(t)\} = \eta_1(t) \{u\}_1 + \dots + \eta_n(t) \{u\}_n = [U] \{\eta(t)\}$ , che sostituito in  $[M] \{\ddot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{F(t)\}$ , porta ad un nuovo sistema  $\{\ddot{\eta}(t)\} + [\Omega] \{\eta(t)\} = \{L(t)\} = [U]^\top \{F(t)\}$ . Questo nuovo sistema è un oscillatore modale equivalente di massa unitaria che si sposta di  $\eta_i(t)$  e ha una molla equivalente di rigidità  $\omega_i^2$  e forza applicata sulla massa di ampiezza  $l_i(t)$ . Per vedere una forma modale occorre fare una evoluzione libera del sistema con condizioni iniziali pari a uno degli autovalori.

#### Con Smorzamento

Nell'oscillatore modale, aggiungere lo smorzamento significa studiare  $\ddot{\eta}_j(t) + 2\epsilon_j \omega_j \dot{\eta}_j(t) + \omega_j^2 \eta_j(t) = l_i(t)$ .

#### Forzante armonica

Nel caso fossero applicate forzanti armoniche per i vari gdl, aventi stessa pulsazione  $\omega$ , ma ampiezze  $F_j$  e fasi  $\phi_j$  differenti, è possibile passare allo studio di oscillatori modali, che possono essere studiati con vettori complessi, e da cui in seguito a opportune manipolazioni si ottiene:  $\eta_j(i\omega) = \frac{1}{\omega_j^2 - (\frac{\omega}{\omega_j})^2 + 2\epsilon_j \frac{\omega}{\omega_j}} l_j(i\omega)$ . Dal-

l'oscillatore modale è possibile tornare all'oscillatore semplice:  $\{x(i\omega)\} = [U] \{\eta(i\omega)\} = [U] [T(i\omega)] \{L(i\omega)\}$ , dove  $[T(i\omega)]$ , infine sostituendo  $\{L(i\omega)\} = [U]^\top \{F(i\omega)\}$  e definita la matrice delle risposte in frequenza  $[H(i\omega)] = [U] [T(i\omega)] [U]^\top$ , si ottiene  $\{x(i\omega)\} = [H(i\omega)] \{F(i\omega)\}$ . Vale inoltre  $[H(i\omega)] = \sum_{j=1}^n [H_j(i\omega)] = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\omega_j^2 - (\frac{\omega}{\omega_j})^2 + i2\epsilon_j \frac{\omega}{\omega_j}} \{u\}_j \{u\}_j^\top$ .

#### Antirisonanza

Con antirisonanza si intendono quelle pulsazioni di un sistema, non smorzato, a più gradi di libertà, tali per cui uno degli elementi della matrice delle risposte in frequenza  $[H(i\omega)]$  è nullo. Il numero di pulsazioni di antirisonanza è pari a  $n$  gdl - 1.

Nel caso di sistema a 2 gdl in figura  $x_1(i\omega) = h_{11}(i\omega)F_1(i\omega) + h_{12}(i\omega)F_2(i\omega)$ , per  $h_{11}(i\omega), F_2(i\omega) = 0$  è come se la massa 1, su cui viene applicata una forzante  $F_1(i\omega) \neq 0$ , non si muovesse, quindi fosse, virtualmente, a telaio.

Nel caso di sistemi smorzati non si ha attraversamento per l'asse delle ascisse, quindi non si ha antirisonanza.

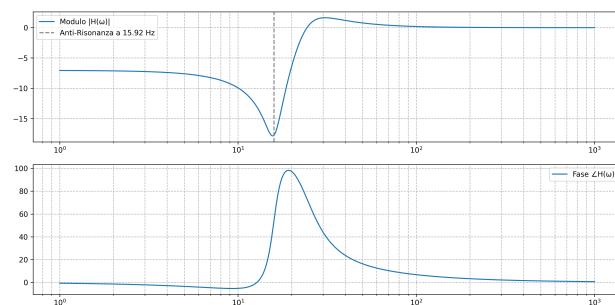


Figura B.3: Esempio di antirisonanza