

Algunas funciones heurísticas

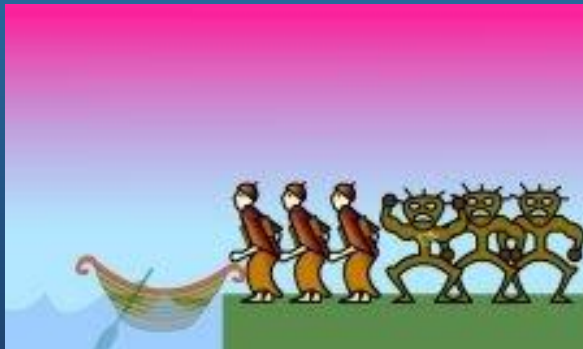
Abraham Sánchez L.

FCC/BUAP

Grupo MOVIS

Misioneros y caníbales

- En la orilla de un río hay 3 misioneros y 3 caníbales y todos ellos pretenden cruzar al otro lado. El barco que se utiliza para cruzarlos sólo tiene capacidad para dos personas, por lo que alguien debe de estar regresando siempre a la orilla inicial mientras quede gente sin cruzar. Además, si en alguna ocasión y en cualquiera de las orillas se encuentran un número mayor de caníbales que de misioneros, los primeros se comerán a los segundos.
- 1. ¿Cómo representarías los estados?
- 2. ¿Cuáles serían los operadores?
- 3. ¿Qué heurísticas existen para este problema? ¿Son admisibles?



Representación de estados, I

- Se podría indicar la posición del barco, junto con el numero de misioneros y caníbales que hay en cada lado.
- O bien, se podría pensar que, dado que el número de personas en el extremo final puede calcularse a partir de los que hay en el inicial, basta con indicar la posición de la barca y los misioneros y caníbales que quedan en el extremo inicial.
- Sin embargo, la primera aproximación permite describir más fácilmente las precondiciones y efectos de los operadores, por lo que mantenemos la representación inicial.
- Además, el espacio de estados tiene el mismo tamaño e idéntica semántica con ambas representaciones.
- Formalmente, por lo tanto, un estado es una terna (M_i, C_i, B, M_d, C_d) en la que:

Representación de estados, II

$\text{Barco} \in [i, d]$ indica la posición del barco, por lo que toma el valor i si está en el lado inicial, o d si está en el final.

$M_i, C_i, M_d, C_d \in [0, \dots, 3]$ indican el número de misioneros y caníbales que quedan en el extremo inicial y final del río, respectivamente.

- De esta manera, el estado inicial se representa como $(3, 3, i, 0, 0)$ y el final como $(0, 0, d, 3, 3)$.

Operadores, I

- El conjunto de operadores se muestra en siguiente Tabla.
- Se proponen 5 operadores. Cada uno de ellos consiste en transportar personas de la orilla x a la orilla y : Pasa-1C(x, y) transporta 1 caníbal desde la orilla x hasta la orilla y ; Pasa-2M(x, y) transporta 2 misioneros desde x hasta y ; y así sucesivamente.
- Las precondiciones de cada operador se dividen en tres grupos de requisitos.
- El primer grupo (primera columna de precondiciones) hace referencia a que para transportar a una persona desde x , esa persona debe estar en x . Así, el operador Pasa-1M1C(x, y) requiere que en x haya al menos un caníbal y un misionero.
- El segundo grupo de condiciones (segunda columna) hace referencia a la posición del barco: para todos los operadores, el barco debe estar en la posición de origen.

Operadores, II

- El tercer grupo de condiciones evita que los caníbales se coman a los misioneros, evitando hacer movimientos que dejen a más caníbales que misioneros en cualquier orilla.
- En la tabla también se incluyen las postcondiciones del operador, que suele incluir el cambio en la posición de la barca, así como el cambio en el número de caníbales y misioneros en cada orilla.

Operador	Precondiciones	Postcondiciones
Pasa-1C(x, y)	$Cx \geq 1 \quad B = x \quad My \geq Cy + 1 \vee My = 0$	$B = y, \quad Cx = Cx - 1, \quad Cy = Cy + 1$
Pasan-2C(x, y)	$Cx \geq 2 \quad B = x \quad My \geq Cy + 2 \vee My = 0$	$B = y, \quad Cx = Cx - 2, \quad Cy = Cy + 2$
Pasa-1M(x, y)	$Mx \geq 1 \quad B = x \quad (Mx \geq Cx + 1 \vee Mx = 1) \wedge$ $My \geq Cy - 1$	$B = y, \quad Mx = Mx - 1, \quad My = My + 1$
Pasan-2M(x, y)	$Mx \geq 2 \quad B = x \quad (Mx \geq Cx + 2 \vee Mx = 2) \wedge$ $My \geq Cy - 2$	$B = y, \quad Mx = Mx - 2, \quad My = My + 2$
Pasan-1M1C(x, y)	$Mx \geq 1, Cx \geq 1 \quad B = x \quad My \geq Cy$	$B = y, \quad Mx = Mx - 1, \quad My =$ $My + 1, \quad Cx = Cx - 1, \quad Cy = Cy + 1$

Heurísticas, I

- En este caso, vamos a obtener las heurísticas por relajación del problema original. Para dicha relajación, partimos de las precondiciones expuestas en la Tabla anterior.
- Estas precondiciones se pueden relajar fácilmente teniendo en cuenta los tres tipos de precondiciones definidas anteriormente:
 1. Eliminar el primer grupo de precondiciones. Si eliminamos ese primer grupo de condiciones, se obtiene un problema relajado que no parece ser mucho más fácil de resolver que el problema original, por lo que no tiene mucho sentido.
 2. Eliminar el segundo grupo de precondiciones. Al eliminar el segundo grupo de condiciones, el problema resultante es más fácil que el original, puesto que se puede asumir que hay infinitos barcos tanto en un lado como en otro.

Heurísticas, II

Este problema tiene una solución muy sencilla, que es asumir que siempre viajan un caníbal y un misionero juntos, con el operador $\text{Pasan-1M1C}(i, d)$. Por lo tanto, la heurística resultante de este problema relajado es:

$$h_1(n) = \frac{Ci + Mi}{2}$$

asumiendo que en el estado n se cumplen los requisitos definidos por el grupo de precondiciones 3.

3. Al eliminar el tercer grupo de condiciones, obtenemos un problema relajado en el que los caníbales nunca se comen a los misioneros. Entonces, en cada viaje de ida y vuelta, podemos transportar a una persona (dado que la otra tendrá que volver para llevar el barco). Por lo tanto, la heurística resultante sería:

$$h_2(n) = 2 \times (Ci + Mi) - \text{orilla}(n)$$

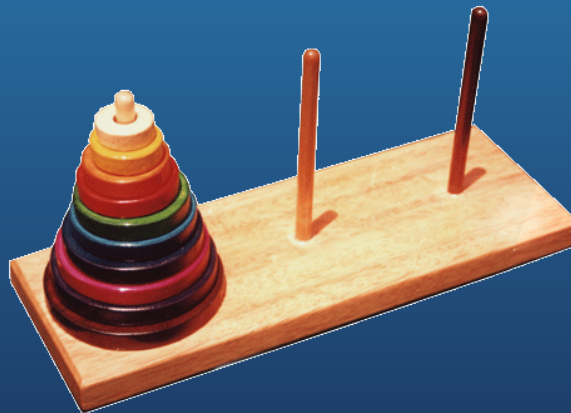
Heurísticas, III

donde $orilla(n) = 1$ si en el estado n el barco está en la orilla i ($B = i$), y $orilla(n) = 0$ si el barco está en la orilla final ($B = d$).

- Una cuarta posibilidad sería eliminar el grupo de condiciones 2 y 3 a la vez. Sin embargo, como hemos visto anteriormente, este problema es equivalente a eliminar sólo el grupo de condiciones 2.
- Las dos heurísticas son admisibles, puesto que son resultado de relajar el problema original.
- Para decidir qué heurística elegir, h_2 o h_3 , estudiamos cuál es la más informada, puesto que será la que, siendo admisible, tendrá un valor más cercano a h .
- Se observa fácilmente que la más informada es h_2 , puesto que $h_2(n) \geq h_3(n)$, sea cual sea el valor de C_i y de M_i para el estado n . Por lo tanto, elegimos $h_2(n)$.

Torres de Hanoi

- En algún lugar cercano a Hanoi existe un monasterio cuyos monjes dedican su vida a una importante tarea. En su patio hay tres altos postes. Sobre estos postes se encuentra un conjunto de sesenta y cuatro discos, cada uno de los cuales tiene un hueco en el centro y diferente radio. Cuando se fundó el monasterio, todos los discos estaban en uno de los postes, de forma que cada disco descansaba sobre el inmediatamente más grande. El trabajo de los monjes consiste en mover todos los discos hacia otro poste. Sólo puede moverse un disco a la vez y todos los discos deben estar ensartados en alguno de los postes. Además, en ningún momento un disco puede situarse sobre otro de tamaño menor. El tercer poste puede utilizarse, por supuesto, como lugar de colocación temporal de los discos. ¿Cuál es la forma más rápida de que los monjes cumplan su misión?.



Representación de estados, I

- Un estado puede representarse como una lista con los discos que hay en cada uno de los postes.
- En el caso de tres postes, tenemos una lista con tres sub-listas. Cada disco viene representado con un identificador que indica además su diámetro.

Estado: (P_1, P_2, P_3) , donde $P_i (i = 1, 2, 3)$ es una lista de valores entre 1 y 64

Estado inicial: $((64, 63, 62, \dots, 5, 4, 3, 2, 1) \ () \ ())$

Estado final: $((\ () \ (64, 63, 62, ?, 5, 4, 3, 2, 1))$

- Existe un único operador, $\text{Mover}(P_i, P_j)$ que mueve un disco del poste P_i al poste P_j , por lo que $i, j \in [1, 2, 3], i \neq j$.
- Las precondiciones del operador son:

Representación de estados, II

1. $P_i \neq []$
2. $(P_j = []) \vee (\text{para } P_i = [x|L_i], P_j = [y|L_j], x \geq y)$
 - Donde L_i y L_j contienen la lista de discos que hay en P_i y P_j respectivamente, pero eliminando el primer disco.
 - Los efectos del operador $\text{Mover}(P_i, P_j)$, donde $P_i = [x|L_i]$, $P_j = [y|L_j]$, son:

$$P_i = [L_i]$$

$$P_j = [x|y|L_j]$$

Heurísticas, I

- Para generar una heurística, obtenemos un problema relajado a partir del original, simplemente eliminando alguna precondition del operador Mover.
- En este caso, no tiene sentido eliminar la precondition 1, puesto que eso añadiría más discos a nuestro problema, así que eliminamos sólo la precondition 2.
- Al eliminar esta segunda precondition, resolver el problema es muy sencillo. Por ejemplo, si se supone la situación inicial, en la que todos los discos están en el primer poste, sólo hay que ir moviendo todos los discos uno a uno al poste intermedio, y de ahí nuevamente uno a uno al definitivo.
- Esto produce dos movimientos por cada disco que no esté colocado correctamente en el poste adecuado, excepto para el último (que puede ir directamente al poste final sin pasar por el intermedio). Para otros estados distinto al inicial, esta forma de resolver el problema es, al menos, una cota inferior, asegurando que la heurística es admisible para todos los estados del problema original.
- Esto nos genera la siguiente heurística:

Heurísticas, II

$$h_1(n) = 2 \times \|P_1\| + 2 \times \|P_2\| - 1 \rightarrow h(n) = 2 \times (\|P_1\| + \|P_2\|) - 1$$

donde el estado n es $(P_1P_2P_i)$, $\|P_1\|$ es el número de elementos en el poste P_1 , y $\|P_2\|$ es el número de elementos en el poste P_2 .

- Para ser exactos, a la heurística anterior habría que restarle 1 por cada poste en el que haya discos (es decir, si los dos postes tienen discos, se le resta 2, y si sólo uno de ellos tiene discos, se le resta 1). Si no se tiene en cuenta este detalle, la heurística se puede simplificar a $h_2(n) = (\|P_1\| + \|P_2\|)$.
- Sin embargo, esta heurística sólo es válida si asumimos que los discos colocados en el poste final están, en verdad, bien colocados (desde el de mayor tamaño, al de menor, con diferencias de 1 en el diámetro de cada disco colocado).
- En caso contrario, la heurística debería penalizar también los discos colocados en el tercer poste, haciendo que:

Heurísticas, III

$$h_3(n) = 2 \times (\|P_1\| + \|P_2\| + \|P_3\|) - 1$$

- Aún así, el valor de esta heurística todavía no corresponde con el valor real del costo óptimo del problema relajado.
- Sin embargo, todas las heurísticas descritas están menos informadas que la del problema relajado, y subestiman el costo.
- Por lo tanto, son también admisibles, aunque menos informadas.
- Otra posible relajación de este problema es la resultante de eliminar la restricción de que sólo hay tres postes. Es decir, podemos asumir que hay tantos postes intermedios como sean necesarios.
- Con esta relajación, obtenemos la misma heurística definida anteriormente.