Содержание

Часть I

Приложение функции нескольких переменных

1. Касательные к пространственным прямым и касательные к поверхностям

Определение 1.1 (Касательная к пространственным кривым). *Пусть L — гладкая пространственная кривая без особых точек или*

$$L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad t \in U(t_0) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$x(t), y(t), z(t) \in C'(U(t_0)) \quad (x'_t, y'_t, z'_t) \neq (0, 0, 0)$$

Геометрически выглядит следующим образом

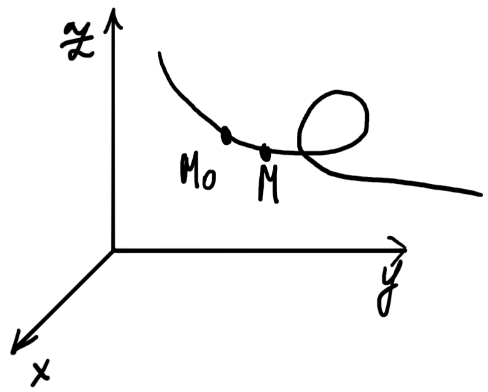


Рис. 1.

Обозначим

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \quad \text{при } t = t_0 \qquad \Delta t \neq 0,\ t = t_0 + \Delta t,\ \Delta t \in U(t_0)$$

Тогда уравнение касательной

$$MM_0 : \frac{x - x_0}{x(t_0 + \Delta t) - x_0} = \frac{y - y_0}{y(t_0 + \Delta t) - y_0} = \frac{z - z_0}{z(t_0 + \Delta t) - z_0}$$

Равенство выше является каноническим. Если разделить элементы на Δt и рассмотреть $\Delta t \to 0$ то получим следующее

$$l_0 : \frac{x - x_0}{x_0'} = \frac{y - y_0}{y_0'} = \frac{z - z_0}{z_0'}$$

Так как

$$\frac{x(t_0 - \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} \to x_t'(t_0) = x_0' \qquad \Delta t \to 0$$

l_0 — касательная к кривой L в точке M_0
l_0 — прямая линия в пространстве ${x_0'}^2 + {y_0'}^2 + {z_0'}^2 \neq 0$

Определение 1.2 (Касательная плоскость к поверхности). .
Пусть $S : F(x, y, z) = 0$ — *поверхность в пространстве.*
$F(x, y, z)$ — *непрерывная функ. в окрестности точки* $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$
Плоскость $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$, *где* $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ *называется касательная плоскость к* S *в точке* M_0 *если*

1) $M_0 \in \pi$

2) *Любая кривая линия* $L \subset S, M_0 \in L$ *гладкой кривой с касательным вектором* $\vec{\tau} \neq \vec{0}$ *выполняется условие*

$$\vec{n} \perp \vec{\tau}, \vec{n} = A, B, C \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{n}, \vec{\tau}) = 0$$

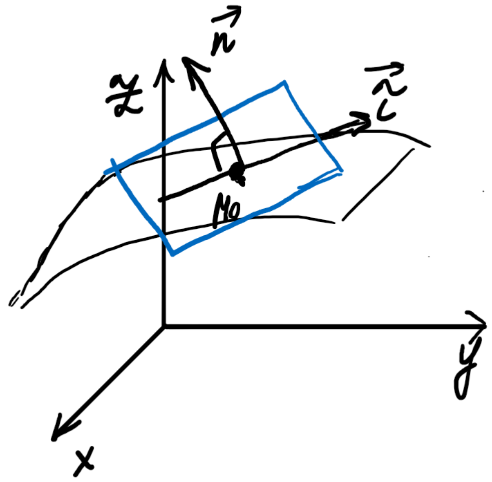


Рис. 2.

Теорема 1.1 (О существовании касательной плоскости). *Пусть*

$$F(x,y,z) \in C'(U(M_0)), \quad {F'_x}^2(M_0) + {F'_y}^2(M_0) + {F'_z}^2(M_0) \neq 0$$

Тогда для поверхности $S : F(x,y,z) = 0,\ M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$ *существует касательная плоскость*

$$\pi : F'_x(M_0)\,(X - x_0) + F'_y(M_0)\,(Y - y_0)s + F'_z(M_0)\,(Z - z_0) = 0$$

Доказательство.

$$L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in U(t_0) \quad x(t),\, y(t),\, z(t) \in C'(U(t_0))$$

$$x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0),\ z_0 = z(t_0), \quad M_0(x_0,\, y_0,\, z_0) \in L$$

$$\vec{\tau} = x'_t(t_0),\, y'_t(t_0),\, z'_t(t_0)$$

$$\vec{n} = F'_x(M_0),\, F'_y(M_0),\, F'_z(M_0)$$

Докажем, что скалярное произведение равно нулю

$L \subset S \Rightarrow \forall t \in U(t_0)\ F(x(t),\, y(t),\, z(t)) = 0$

Из дифференцируемости сложной функции получаем

$(F(x(t),\, y(t),\, z(t)))'_t = F'_x\, x'_t + F'_y\, y'_t + F'_z\, z'_t$

при $t = t_0$

$F'_x(M_0)\, x'_t(t_0) + F'_y(M_0)\, y'_t(t_0) + F'_z(M_0)\, z'_t(t_0) = 0 \ \Rightarrow\ (\vec{n}, \vec{\tau}) = 0$

$\Rightarrow\ \pi : F'_x(M_0)\,(X - x_0) + F'_y(M_0)\,(Y - y_0) + F'_z(M_0)\,(Z - z_0) = 0$

■

Определение 1.3 (Градиент). *Градиент функции F в точке M_0 обозначается так*

$$\{F'_x(M_0);\ F'_y(M_0);\ F'_z(M_0)\} = \operatorname{grad} F|_{M_0}$$

Теорема 1.2 (Существование касательной плоскости). .
Рассматривается случай явно заданной поверхности
Пусть $f(x,y) \in C'(U(N_0))$, $N_0(x_0,\, y_0)$.
Тогда для явно заданной поверхности $S : z = f(x,y)$ существует касательная плоскость в точке $M_0(x_0,\, y_0,\, z_0)$, где$z_0 = f(N_0)$ вида

$$\pi : Z - z_0 = f'_x(N_0)\,(X - x_0) + f'_y(N_0)\,(Y - y_0)$$

Доказательство.

$S : f(x,y) - z = 0,\ F = f(x,y) - z$
$F'_x = (f(x,y) - z)'_x = f'_x(N)$
Аналогично для других производных
$F'_y = f'_x(N);\ F'_z = -1;$
Т.к. мы задали явную функцию F, то по теореме 1 получаем
$\pi : f'_x(N_0)(X - x_0) + f'_y(N_0)(Y - y_0) + f'_z(N_0)(Z - z_0) = 0$
$\pi : f'_x(N_0)(X - x_0) + f'_y(N_0)(Y - y_0) - (Z - z_0) = 0$, примечание $z_0 = f(x_0, y_0)$
$\pi : Z = f'(x_0, y_0) + f'_x(N_0)(X - x_0) + f'_y(N_0)(Y - y_0)$

■

Определение 1.4 (Нормаль к поверхности). *Пусть* $S : F(x,y,z) = 0,\ (x,y,z) \in U(M_0)$ *гладкая поврхность.* $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$.
Тогда нормаль n *к поверхности* S *в точке* M_0 *называется прямая линия* n, $M_0 \in n$, $n \perp \pi$, *где* π *— касательная плоскость*

Замечание 1.1. *Если в условии определения* $\not\exists\ \operatorname{grad} F|_{M_0} \neq \overrightarrow{0}$, *то каноническое уравнение* n

$$n : \frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}$$

2. Экстремум функции нескольких переменных

Определение 2.1 (Экстремума ФНП). *Пусть функция* $u = f(M) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *— является функцией* n *- переменных определённых в некоторой окрестности* $U(M_0)$ *и* $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.
Тогда

1) M_0 *— точкой (локального) минимума функции* $f(M)$, *если*
   $\exists \delta > 0, \forall M \in U_\delta(M_0),\ f(M) \geqslant f(M_0)$

2) M_0 *— точкой (локального) максимума функции* $f(M)$, *если*
   $\exists \delta > 0, \forall M \in U_\delta(M_0),\ f(M) \leqslant f(M_0)$

3) M_0 *— точкой (локального) экстремума* $f(M)$, *если*
   $M_0 = \min f(M)$ *или* $M_0 = \max f(M)$

Определение 2.2 (Строгий экстремум функции нескольких переменных). *Пусть функция* $u = f(M) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *— является функцией* n *- переменных определённых в некоторой окрестности* $U(M_0)$ *и* $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$
Тогда

1) M_0 *— точкой строгого минимума функции* $f(M)$, *если*
   $\exists \delta > 0, \forall M \in \mathring{U}(M_0),\ f(M) > f(M_0)$

2) M_0 *— точкой строгого максимума функции* $f(M)$, *если*
   $\exists \delta > 0, \forall M \in \mathring{U}(M_0),\ f(M) < f(M_0)$

3) M_0 *— точкой строгого экстремума функции* $f(M)$, *если соблюдается пункт 1 или 2*

Теорема 2.1 (Необходимое условие локального экстремума). *Пусть существует функция*

$$u = f(M) = f(x_1, \ldots, x_n),\ M \in U_0(M_0)$$
$$\text{где } M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0) \text{ и } \exists f'_{x_1}, \ldots, f'_{x_n}$$

Тогда если M_0 *— точка локального экстремума, то*

$$f'_{x_1}(M_0) = 0, \ldots, f'_{x_n}(M_0) = 0 \Leftrightarrow df(M_0) = 0$$

Доказательство. Пусть M_0 — минимум f(M), т.е.

$$\exists \delta > 0, \forall M \in U_\delta(M_0),\ f(M) \geqslant f(M_0)$$

Рассмотрим частную производную от первого аргумента через предел. Для этого возьмём точку $M(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ в окрестности точки M_0, тогда получаем

$$f'_{x_1}(M_0) = \lim_{x_1 \to x_1^0}\left(\frac{f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{x_1 - x_1^0}\right)$$

Так как M_0 — минимум $f(M)$, то

$$f(M) - f(M_0) \geqslant 0$$

Осталось рассмотреть два случая для знаменателя

1) если $x_1 > x_1^0$, то $f'_{x_1} \geqslant 0$

2) если $x_1 < x_1^0$, то $f'_{x_1} \leqslant 0$

Из всего этого следует, что

$$f'_{x_1}(M_0) = 0$$

Аналогично доказываются случаи для других производных ■

Лемма 2.1 (О сохранении знака непрерывной функции). *Пусть*

$$u = \varphi(M) = \varphi(x_1, \ldots, x_n) \in C(U(M_0))$$

и

1) $\varphi(M_0) > 0 \Rightarrow \exists\delta > 0\ \forall M \in U_\delta(M_0)\ \varphi(M) > 0$

2) $\varphi(M_0) < 0 \Rightarrow \exists\delta > 0\ \forall M \in U_\delta(M_0)\ \varphi(M) < 0$

Доказательство.

1) Логика доказательства аналогична первому семестру

$\varphi(M_0) > 0$

$\varepsilon = \dfrac{\varphi(M_0)}{2} > 0\ \exists\delta > 0\ \forall M \in U_\delta(M_0)\ |\varphi(M) - \varphi(M_0)| < \varepsilon$

Расскроем знак модудя

$\varphi(M_0) - \dfrac{\varphi(M_0)}{2} < \varphi(M) < \varphi(M_0) + \dfrac{\varphi(M_0)}{2}$

$\Rightarrow \forall M \in U_\delta(M_0)\ \varphi(M) > \dfrac{\varphi(M_0)}{2} > 0$

$\Rightarrow \varphi(M) > 0$

2) Аналогично доказательству выше

■

Лемма 2.2 (О свойстве коэфициентов в квадратичной форме). *Пусть* $q(u, v) = Au^2 + 2Buv + Cv^2$ *— некая квадратичная форма (аналог* $q(u, v) = a_{uu}u^2 + a_{vv}v^2 + a_{uv}uv$*). Тогда*

1) $\forall (u, v) \neq (0; 0)\ q(u, v) > 0 \Leftrightarrow A > 0,\ AC - B^2 > 0$ *— положительно определённая квадратичная форма*

2) $\forall (u, v) \neq (0; 0)\ q(u, v) < 0 \Leftrightarrow A < 0,\ AC - B^2 > 0$ *— отрицательно определённая квадратичная форма*

Доказательство. Для доказательства воспользуемся критерием Сильвестра (2 семестр)
Распишем квадратичную форму для n переменных

$$q(u_1, \dots, u_n) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_iu_j,\ a_{ij} = a_{ji}$$

Матрица для неё будет следующей

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\ A_1^T = A_1$$

По критерию Сильвестра для квадратичной формы справедливо

1) $q > 0 :\ \Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0$

2) $q < 0 :\ \Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n\Delta_n > 0$

Если $n = 2$ то квадратичная форма имеет вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\ \Delta_1 = A, \Delta_2 = AC - B^2$$

Таким образом очевидно что если $q > 0$, то $A > 0,\ AC - B^2 > 0$
Аналогично для $q < 0$ следует $A = \Delta_1 < 0,\ AC - B^2 = \Delta_2 > 0$

■

Теорема 2.2 (Достаточное условие экстреума $f(x, y)$). *Пусть функция* $u = f(M) = f(x, y) \in C^2(U(M_0))$ *и* $df(M_0) = 0$.
Обозначим через $A = f''_{xx}(M_0),\ B = f''_{xy}(M_0),\ C = f''_{yy}(M_0),$ *Тогда*

1) $A > 0,\ AC - B^2 > 0$ *(т.е. квадратичная форма положительна)* $\Rightarrow M_0$ *— точка строгого минимума функции*

2) $A < 0,\ AC - B^2 > 0$ *(т.е. квадратичная форма отрицательна)* $\Rightarrow M_0$ *— точка строгого максимума функции*

3) $AC - B^2 < 0 \Rightarrow M_0$ *— не экстремум функции*

Доказательство. Воспользуемся формулой Тейлора для k = 1, тогда

$$\forall M \in U(M_0)\ \exists N \in [M_0, M],\ N \in U(M_0)$$
$$f(M) = f(M_0) + \frac{1}{1!}df(M_0) + \frac{1}{2!}d^2f(N),\ \text{где } M(x,y),\ M_0(x_0,y_0)$$
$$\Delta x = x - x_0 = dx,\ \Delta y = y - y_0 = dy$$

Распишем чему равны производые в формуле

$df(M_0) = f'_x(M_0) + f'_y(M_0) = 0$ (по условию)
$d^2f(N) = A_1d^2x + 2B_1dxdy + C_1d^2y,$ где $A_1 = f''_{xx}(M_0), B_1 = f''_{xy}(M_0), C_1 = f''_{yy}(M_0)$

Таким образом

1)) Для удобства введём
$\varphi_1(M) = f''_{xx}(M)$
Т.к. $A = f''_{xx}(M_0) = \varphi_1(M_0) > 0$ по условию, то по лемме 1 получаем
$\exists \delta_1 > 0\ \forall N_1 \in U_{\delta_1}(M_0) \Rightarrow \varphi_1(N) > 0$

) Для удобства введём
$\varphi_2(M) = f''_{xx}f''_{yy} - f''^2_{xy}$
Т.к. $AC - B^2 = \varphi_2(M_0) > 0$ по условию, то аналогично по лемме 1 получаем
$\exists \delta_2 > 0\ \forall N_2 \in U_{\delta_2}(M_0) \Rightarrow \varphi_2(N) > 0$

Объединим пункты выше в один

$$\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}\ \forall N \in U_\delta(M_0)\ \varphi_1 > 0,\ \varphi_2 > 0$$
$$\Rightarrow M \in U_\delta(M_0) \Rightarrow N \in U_\delta(M_0),\ A_1 > 0,\ A_1C_1 - B_1^2 > 0$$

Из строчки выше мы видим, что по лемме 2 в точке N квадратичная форма будет положительна другими словами

$d^2 f(N) > 0$

Из формулы Тейлора и пункта выше следует

$\forall M \in \mathring{U}_\delta(M_0)\ f(M) - f(M_0) = \dfrac{1}{2!} d^2 f(N) > 0$

Получаем

$f(M) > f(M_0),\ \forall M \in \mathring{U}_\delta(M_0) \Rightarrow M_0$ — точка минимума функции

2) Доказывается аналогично

3) Так как квадратичная форма знакопеременная, то найдётся такая $\delta > 0$, в окрестности которой будет справедливо $(A_1C_1 - B_1^2)(AC - B^2) > 0$, $(AC - B^2) < 0 \Rightarrow A_1C_1 - B_1^2 < 0 \Rightarrow B_1^2 - A_1C_1 > 0$
Помним, что

$$d^2 f(N) = A_1 d^2 x + 2B_1 dx dy + C_1 d^2 y$$

Так как $dy \neq 0$, то пусть $t = \frac{dx}{dy}$. Разделим равенство на $d^2 y$, получим

$\dfrac{d^2 f(N)}{d^2 y} = A_1 t^2 + 2B_1 t + C_1 = [D = A_1C_1 - B_1^2 > 0] = A_1(t - \theta_1)(t - \theta_2)$

$\dfrac{d^2 f(N)}{d^2 y} = A_1(t - \theta_1)(t - \theta_2)$

$d^2 f(N) = A_1(\Delta x - \theta_1\, \Delta y)(\Delta x - \theta_2\, \Delta y) \qquad dx = \Delta x \quad dy = \Delta y$

Из множителей можно выделить уравнения прямых и рассмотреть изменение знака у $d^2 f(N)$ (метод интервалов)

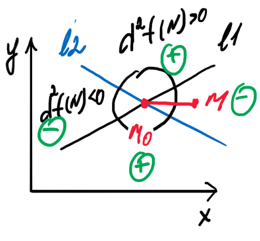


Рис. 3.

$$l_1 :\ (x - x_0) - \theta_1\,(y - y_0) = 0$$
$$l_2 :\ (x - x_0) - \theta_2\,(y - y_0) = 0$$

Таким образом мы видим

$$\forall \varepsilon < \delta,\, \varepsilon > 0 \qquad \begin{matrix} \exists M_1\ d^2f(N_1) > 0\ f(M) > f(M_1) \\ \exists M_2\ d^2f(N_2) > 0\ f(M) < f(M_2) \end{matrix}$$

■

Теорема 2.3 (Достаточное условие экстремума функции n - переменных). *Пусть есть функция* $u = f(M) = f(x_1, \dots, x_n) \in C^2(U(M_0))$ *и* $df(M_0) = 0$.
Обозначим $d^2f(M_0) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}dx_idx_j$, $a_{ij} = aji$
Тогда

1) $d^2f(M_0) > 0 \Leftrightarrow \Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0 \Rightarrow M_0$ *— точка строгого минимума функции*

2) $d^2f(M_0) < 0 \Leftrightarrow \Delta_1 < 0, \dots, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n\Delta_n \Rightarrow M_0$ *— точка строгого максимума функции*

3) $d^2f(M_0)$*неопределённая форма* $\Leftrightarrow$ *в*M_0 *— нет экстремума функции*

Доказательство. Аналогино доказательству предыдущей теоремы, воспользуемся формулой Тейлора

$$f(M) = f(M_0) + \frac{1}{1!}df(M_0) + \frac{1}{2!}d^2f(N),\ f(M) - f(M_0) = \frac{1}{2}d^2f(N)$$

1)

$$\begin{aligned} &\Delta_1(M_0) > 0, \dots, \Delta_n(M_0) > 0 \\ \Rightarrow\ &\text{из критерия Сильвестра } \exists\delta > 0\ \forall N \in U_\delta(M_0) \\ \Rightarrow\ &\Delta_1(N) > 0, \dots, \Delta_n(N) > 0 \\ \Rightarrow\ &d^2f(N) > 0 \\ \Rightarrow\ &f(M) > f(M_0),\ \forall M \in \mathring{U}_\delta(M_0) \Rightarrow M_0 \text{ — точка минимума функции} \end{aligned}$$

2) Доказывается аналогично

3) Принимаем без доказательств

■

Замечание 2.1. *Если квадратичная форма равна нулю, то требуются дополнительные исследования. Например взятие производной выше второй, рассмотрение точек в* $\delta(M_0)$ *окрестности*

3. Условные экстремумы ФНП

Пример 3.1. *Найти экстремум для функции* $u = x^2 + y^2$, *ограниченной поверхностью* $S : x + y = 1$

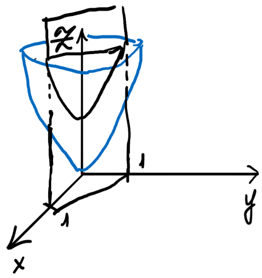


Рис. 4.

Решение

$$y = 1 - x \;\Rightarrow\; u = x^2 + 1 + x^2 - 2x$$

$$u'_x = 4x - 2 = 0 \qquad\qquad u''_x = 4 > 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad\qquad \text{\textit{точек нет}}$$

Таким образом $M_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ — *экстремум (строгий минимум)*

В следующем примере предыдущий алгоритм не работает.

Пример 3.2. *Найти экстремум для функции* $u = x$, *ограниченной поверхностью* $S : x^2 + y^2 = 1$

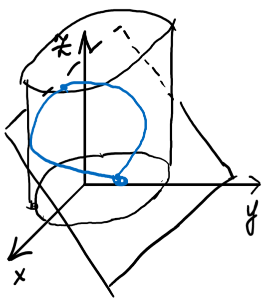


Рис. 5.

Если взять частную производную по x, то получим ($u'_x \neq 0$) что экстремум отсутствует, но по построению видно, что их два. Ошибка в том, что от "элипса"мы перешли к "отрезку"путём взятия производной.

Чтобы избавиться от этого параметризируем x и y следующим образом

$$\begin{cases} x = cos(t) \\ y = sin(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},\, t \in [0;\ 2\pi]$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} &u = cos(t) \\ &u'_t = -sin(t) \\ &t_{min} = 0,\ t_{max} = \pi, \text{ видно по построению} \\ &u''_t = -cos(t) \end{aligned}$$

Таким образом, ключевым моментом является сохранение гладкости функции при взятии производных (т.е. если)

Замечание 3.1 (Условие связи. Условное). *Условие свизи это функция(и) $\varphi_n(M)$, которая(ые) применяется(ются) к фукции $f(M)$, чтобы наложить ограничения (условия) на неё.*

Определение 3.1 (Условный экстремум). *Пусть $u = f(M) = f(x_1, \dots, x_n)$ определена в некоторой окрестности $U(M_0)$, $M(x_1^0, \dots, x_n^0)$ и выполнено условие связи $S : \varphi_1(M) = 0, \dots, \varphi_k(M) = 0,\ M_0 \in S$. Тогда*

1) *M_0 — точка локального условного минимума функции $f(M)$ при условии $M \in S \Leftrightarrow \exists\delta > 0\ \forall M \in U_\delta(M_0) \cap S\ f(M) \geqslant f(M_0)$*

2) *M_0 — точка локального условного максимума функции $f(M)$ при условии $M \in S \Leftrightarrow \exists\delta > 0\ \forall M \in U_\delta(M_0) \cap S\ f(M) \leqslant f(M_0)$*

3) *M_0 — точка условного экстремума функции $f(M) \Leftrightarrow M_0$ точка условного минимума или условного максимума*

Анлогичны будут рассуждения для строгого условного экстремума (помним, что он рассматривается в проколотой окрестности).

Повторимся, что условный экстремум отличается от обычного тем, что поиск ограничен S

Определение 3.2 (Формула Лагранжа задачи на усл. экстремум). *Пусть $f(M), \varphi_1(M), \dots, \varphi_k(M)$ — функции n переменных $x_1, \dots, x_n$, определенных в $U(M_0)$. Тогда функция*

$$L(M_i, \lambda) = f(M) + \lambda_1\varphi_1(M) + \dots + \lambda_k\varphi_k(M)$$

называется функцией Лагранжа задачи на условный экстремум функции $f(M)$ при условии $M \in S : \varphi_1 = \dots = \varphi_k = 0$

Формула Лагранжа позволяет связать функцию и дополнительное условие воедино, что очень удобно.

Теорема 3.1 (Необходимый признак условного экстремума). *Пусть*

$$f(M), \varphi_1(M), \dots, \varphi_k(M) \in C^{-1}(U(M_0))$$

и M_0 — внутренняя точка гладкой части поверхности S

$$S : \varphi_1(M) = 0, \dots, \varphi_k(M) = 0, \quad M_0 \in S$$

Обозначим через

$$L(M, \lambda) = f(M) + \lambda_1\varphi_1(M) + \dots + \lambda_k\varphi_k(M)$$

функцию Лагранжа задачи на условный экстремум функции $f(M)$, где $M \in S$. Тогда, если точка M_0 — условный экстремум функции $f(M)$, то существует $\lambda_0(\lambda_1^0, \dots, \lambda_k^0)$, для которой

$$dL(M_0, \lambda_0) = 0, \text{ где } M_0(x_1^0, \dots, x_n^0), \ \lambda_0(\lambda_1^0, \dots, \lambda_k^0)$$

Доказательство. Рассмотрим следующий случай: $n = 2$, $k = 1$ (размерность пространства и количество функций задающих поверхность), то есть $u = f(x, y)$, $(x, y) \in U(M_0)$, $M_0(x_0, y_0)$, M_0 — точка условного экстремума $S : \varphi(x, y) = 0$
Так как $\varphi(x, y)$ — гладкая функция, то мы можем её параметризировать

$$S : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in U(t_0)$$

Тогда

$$M_0(x, y) = M_0(x(t_0), y(t_0)), \ x(t), \ y(t) \in C'(U(t_0))$$

И следовательно по условию

$$\forall t \in U(t_0) \ \varphi(x(t), y(t)) = 0$$

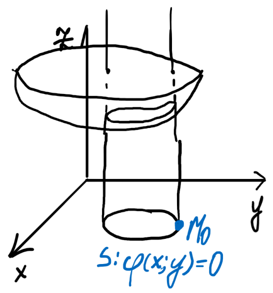


Рис. 6. вместо z тут u

При этом $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0,0)$, то есть параметриация "хорошая"(Важность факта можно понять из примера 2).
Таким образом задача на условный экстремум переходит в задачу на обычный экстремум функции $u = f(x(t), y(t))$ (таким образом получили функцию от одной переменной).
По формуле частной производной

$$u'(t) = f'_x\, x'_t + f'_y\, y'_t$$

Аналогично для $\varphi'(t)$.
Рассмотрим систему

$$\begin{cases} f'_x x'_t + f'_y y'_t = 0 \\ \varphi'_x x'_t + \varphi'_y y'_t = 0 \end{cases}$$

Так как M_0 - условный экстремум (по усл.), то t_0 - экстремум функции $u(t)$, значит $u'_t(t_0) = 0$, т.е. t_0 - решение первого уравнения системы. Причём мы имеем два решения: в t_0 и когда $x'_t,\ y'_t = 0$ (это справедливо, т.к. $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0,0)$)
Так как по условию $\varphi(t) = 0$, то и $\varphi'(t) = 0$ для любого t. Значит, второе уравнение справедливо всегда.
Получается по теореме Краммера следует

$$\begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ \varphi'_x & \varphi'_y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{f'_x(M_0)}{\varphi'_x(M_0)} = \frac{f'_y(M_0)}{\varphi'_y(M_0)} = -\lambda_0$$

Примечание. Если знаменатель равен нулю, то и числитель будет ему равен. Поэтому всё ОК
Таким образом из отношения можно получить следующию систему

$$\begin{cases} f'_x(M_0) + \lambda_0 \varphi'_x(M_0) = 0 \\ f'_y(M_0) + \lambda_0 \varphi'_y(M_0) = 0 \end{cases}$$

Добавим ещё одно уравнение из условия, получим

$$\begin{cases} f'_x(M_0) + \lambda_0\varphi'_x(M_0) = 0 \\ f'_y(M_0) + \lambda_0\varphi'_y(M_0) = 0 \\ \varphi(M_0) = 0 \end{cases}$$

Которая на самом деле ни что иное как

$$\begin{cases} L'_x(M_0, \lambda_0) = 0 \\ L'_y(M_0, \lambda_0) = 0 \\ L'_\lambda(M_0) = 0 \end{cases}$$

Если мы сложим все три равенства то получим производную функции Лагранжа, которая равна нулю

$$dL(M_0, \lambda_0) = 0$$

■

Теорема 3.2 (Необходимый признак усл. экстремума в общем случае). *Пусть*

$$\exists M(x_1, \dots, x_n),\ \exists M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$$
$$f(M), \varphi_1(M), \dots, \varphi_k(M) \in C^2(U(M_0))$$
$$L(M, \lambda) = f(M) + \lambda_1\varphi_1(M) + \dots + \lambda_k\varphi_k(M)$$

и $\exists\lambda_0(\lambda_1^0, \dots, \lambda_k^0)$ *для которой* $dL(M_0, \lambda_0) = 0$ *Рассмотрим*

$$S:\ d\varphi_j(M_0) = 0 \quad j = 1, \dots, k$$
$$S':\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta\varphi_j}{\delta x_j}\, dx_j \quad j = 1, \dots, k$$

S' *— система* k *линейных однородных уравнений относительно* n *неизвестных* $dx_1, \dots, dx_n$ *размерность* $m = n - r$, r *— ранг матрицы поэтому* $dx_1, \dots, dx_n$ *– независимые (свободные) переменные.*
Второй дифференциал

$$d^2L = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta^2 L(M_0, \lambda_0)}{\delta x_i\, \delta x_j}\, dx_i\, dx_j = q(dx_1, \dots, dx_m)$$

Тогда

1) $q > 0 \Rightarrow M_0$ — точка строгого условного минимума функции

2) $q < 0 \Rightarrow M_0$ — точка строгого условного максимума функции

3) q — неопределённая форма $\Rightarrow$ в M_0 нет экстремума

Доказательство. Принимаем без доказательств ■

Замечание 3.2. *Условие $q > 0$ или $q < 0$ проверяется с помощью критерия Сильвестра. Данный факт используется для доказательства теоремы.*

Замечание 3.3. *По аналогии со вторым параграфом. Требуются дополнительные исследования, если второй диференциал равен нулю.*

Пример 3.3. *Дано:*

$$u = x^2 + y^2 + z^2 \quad S: \; x\,y + z = 2$$

Решение:
Поверхность S можно описать одной гладкой функцией (т.е. $\varphi = x\,y + z - 2$). Тогда получаем

$$L = x^2 + y^2 + z^2 + 2\,\lambda\,(x\,y + z - 2)$$

Найдём частные производные

$$L'_x = 2\,x - 2\,\lambda\,y = 0 \quad L'_y = 2\,y - 2\,\lambda\,x = 0 \quad L'_z = 2\,z - 2\,\lambda$$
$$L'_\lambda = xy + z - 2 = 0$$

Решаем систему и получаем следующие подозрительные точки

$$\begin{array}{lll} M_0(0,\ 0,\ 2) & M_1(1,\ 1,\ 1) & M_2(-1,\ -1,\ 1) \\ \lambda_0 = 2 & \lambda_1 = 1 & \lambda_2 = -1 \end{array}$$

Теперь требуется проверить точки на экстремумы. Найдём производные

$$\begin{array}{lll} L''_{xx} = 2 & L''_{xy} = -2\,\lambda & L''_{xz} = 0 \\ L''_{yy} = 2 & L''_{yz} = 0 & \\ L''_{zz} = 2 & & \end{array}$$

Дважды продифференцируем функцию Лагранжа. Помним, что λ *– коэффициент. В итоге получаем*

$$d^2L = 2\,(dx)^2 + 2\,(dy)^2 + 2\,(dz)^2 - 4\lambda\, dx\, dy$$

Также $S' :\ y\,dx + x\,dy + dz = 0$
При подстановке M_0 *и с помощью значений из* S' *получаем значение функции Лагранжа.*

$$q_0 = 2\,(dx)^2 - 8\,dx\,dy + 2\,(dy)^2$$

по критерию Сильвестра q_0 *– знакопеременна. Значит в* M_0 *нет экстремума. При* $M_{1,2}$

$$q_{1,2} = 4\,(dx)^2 + 4\,(dy)^2$$

видим, что $M_{1,2}$ *– точка условного минимума*

4. Отыскание max и min значений для ФНП

Пример 4.1. *Найти экстремумы для функции* $u = x^2 + y^2$ *ограниченной поверхностью* $D : |x| + 2|y| \leqslant 5$

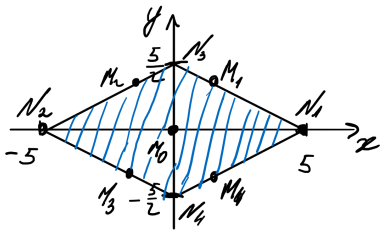


Рис. 7.

Таким образом, мы имеем дело с компактом (огр. множеством).

1) $u'_x = 2x = 0,\ u'_y = 2y = 0$
   $M_0(0,0),\ u(M_0) = 0$ — *минимум*

2) *Для удобства будем рассматривать первую четверть, так как компакт представляет собой ромб, который симметричен относительно осей (Замечание. Облатсть определена через 4 дифференцируемые функции).*

$$L_1 = x^2 + y^2 + \lambda(x + 2y - 5)$$
$$dL_1 = (2x+\lambda)dx + (2y + 2\lambda)dy + (x + 2y - 5)d\lambda = 0$$
$$\begin{cases} 2x + \lambda = 0,\ x = -\frac{\lambda}{2} \\ 2y + 2\lambda = 0,\ y = -\lambda \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

Подставим значения x и y в последнее уравнение, получим

$$\lambda = -2$$

следовательно экстремум в точке $M_1(1,2)$
Так как мы рассматриваем первую четветь, то в оставшихся трёх получим $M_2(-1,2),\ M_3(-1,-2),\ M_4(1,-2)$
Для данных точек значение функции

$$u(M_{1,2,3,4}) = 1 + 4 = 5$$

3) Так как функция компакта не является гладкой, то рассмотрим следующие точки:

$$N_1(5,0),\ N_2(-5,0) \qquad N_3(0,\frac{5}{2}),\ N_4(0,-\frac{5}{2})$$
$$u(N_{1,2}) = 25 \qquad u(N_{3,4}) = \frac{25}{4}$$

Таким образом $u_{max} = u(N_{1,2}) = 25$.
Окончательный ответ:

$$\forall (x,y) \in D,\ 0 \leqslant u(x,y) \leqslant 25$$

Замечание 4.1 (Как выглядит в общем случае). *Пусть* $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ *определена в замкнутой односвязанной области* $D : \varphi_1(M) \geqslant 0, \ldots, \varphi_k(M) \geqslant 0$

1) $M \in \mathring{D} : \varphi_1(M) > 0, \ldots, \varphi_k(M) > 0$
Должно соблюдаться $f(M),\ \varphi_1(M),\ \ldots,\ \varphi_k(M) \in C'(\mathring{D})$ *— гладкая по каждой части границы*
Для $df(M) = 0\ \exists M_1, \ldots, M_l \in \mathring{D}$ *— гладкая n-мерная часть*

2) Гладкая $(n-1)$ *мерная часть границы* D

$$\begin{array}{lcl} L_1 = f + \lambda_1\varphi_1 & ,\ldots, & L_k = f + \lambda_k\varphi_k \\ dL_1 = 0 & & dL_k = 0 \\ N_{11}, \ldots, N_{1l_1} + \lambda & & N_{11}, \ldots, N_{1l_k} + \lambda \end{array}$$

$\varphi_1(N_{11}) = 0, \varphi_2(N_{11}) > 0, \ldots, \varphi_k(N_{11}) > 0$

3) Гладкая $(n-2)$ *мерная часть границы* D*. Рассмотрим функции вида*

$$L = f(M) + \lambda_i\,\varphi_i(M) + \lambda_j\,\varphi_j(M)$$

$$\begin{array}{lcl} S : \varphi_i(M) = 0, & \varphi_j(M) = 0 & (i \neq j) \\ \quad 1 \leqslant i \leqslant k & & 1 \leqslant j \leqslant k \end{array}$$

Рассматриваем

$$dL(M, \lambda_i, \lambda_j) = 0$$

Получаем следующий набор точек $K_1,\ \ldots,\ K_s$

. . .)

$n+1$) Рассматриваем 0-мерное гладкое пространство (вершины или "плохие"точки). Получим следующее множетсво: $P_1, \ \dots, \ P_q$

Таким образом, ответ:

$$U_{max} = max\{u(M_1), \ \dots, \ u(P_q)\}$$
$$U_{min} = min\{u(M_1), \ \dots, \ u(P_q)\}$$

Тут надо написать обощающий алгоритм, т.е. что по факту для поиска экстремумов мы рассматриваем множества различных функций Лагранжа для различного количества границ.

Часть II

Обыкновенные дифференциальные уравнения и их системы

5. Введение. Дифференциальные уравнения 1-го порядка

Определение 5.1 (Дифференциальное уравнение). *Уравнение вида $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ называют обыкновенным дифференциальным уранением n-го порядка. Решением называют функцию $y = y(x)$, которая n раз дифференцируема на интервале I:*

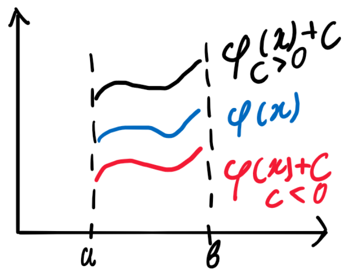
$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

Определение 5.2 (ДУ разрешённое относительно старшей производной). *Если дифференциальное уравнение имеет вид*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

то тогда его называют обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка разрешённого относительно старшей производной

Пример 5.1 (моделный). *Пусть $f(x) \in C'_{(a,b)}$, $y' = f(x)$ — дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешённое относительно 1й производной.*



Если $y = y(x)$ решение, то

$$y'(x) = f(x)$$

$$y = \int f(x)dx + C = \varphi(x) + C \quad x \in (a, b)$$

Если $y = \psi(x)$ решение ДУ, то

$$\exists C,\ \forall x \in (a, b) \quad \psi = \varphi(x) + C$$

Для любого (x_0, y_0) в полосе, т.е. для $x_0 \in (a, b)$ существует решение $y = \varphi(x) - \varphi(x_0) + y_0$, $(y_0 \in \mathbb{R})$

Таким образом мы видим, что для одного дифференциального уравнения существует множетсво решений. Для конкретизации задачи используют условие Коши.

Определение 5.3 (Задача Коши). *Система вида*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \quad (\textit{конкретизация первообразной}) \end{cases}$$

Называется условием Коши, а задача о поиске решения это задача Коши

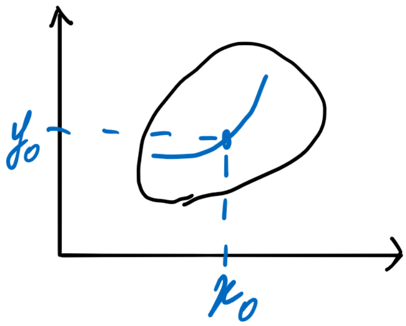


Рис. 8.

Теорема 5.1 (Сущ. и ед. решения задачи Коши для ДУ 1го порядка). *Пусть $f(x,y) \in C(U(M_0))$ и $\exists f'_y(M) \in C(U(M_0))$. Тогда существует такая $\delta > 0$ и существует решение $y' = y(x) \in U_\delta(M_0)$ задачи Коши с соответвующим условием $y' = f(x) \quad y(x_0) = y_0$ и такое решение в $U_\delta(x_0)$ единственно*

Доказательство. Принимаем без доказательств ■

Определение 5.4 (Поле направлений ДУ). *Пусть*

$$y' = f(x,y), \quad f(x,y) \in C(D)$$

$M_0(x_0, y_0)$ — любая внутренняя точка области D. Запишем уравнение касательной к графику решения задачи Коши

$$l_0 : Y - y_0 = f(x_0, y_0)\,(X - x_0)$$

а задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

Пусть $\vec{\tau}$ *— единичный вектор касательной. Тогда множество* $\{\vec{\tau}\}$ *— поле направлений*

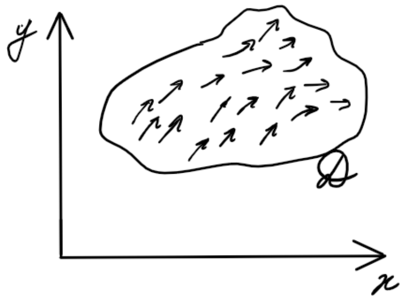


Рис. 9. Поле направлений

Вместе с понятием поля направлений вводят (для удобства) такую вещь как изоклины, т.е. линии, вдоль которых поле имеет одно и тоже направление. Задаётся уравнением $f(x,y) = C$

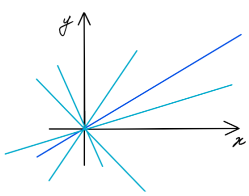
Тут важно заметить, что понятие поля направлений очень сильно связано с физикой, так как с помощью них можно легко описывать физические поля (эклектрическое, магнитное).

С помощью полей направлений доказывается теорема о единственности задачи Коши.

Пример 5.2. *Дано:*

$$y' = \frac{y}{x}$$

Требуется построить поле направлений.
Решение.



Изоклины для данного ДУ задаются уравнением

$$\frac{y}{x} = C$$

Получается, изоклины представляют собой прямые, проходящие через начало координат. Уравнение изоклин $y = Cx$.

Если подставлять пары $(x,\ y)$, *то мы заметим, что вектора поля направлений совпадают с изоклинами.*
Таким образом поле направлений состоит из множества прямых, проходящих через начало отсчёта (Точка (0, 0) выколотая).

Пример 5.3. *Дано*

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Требуется построить поле направлений.
Решение.
Изоклины для данного ДУ задаются уравнением

$$-\frac{x}{y} = C$$

Аналогично примеру выше, видим что изоклины проходят через начало координат.
Рассмотрим несколько изоклин.

1) $C = -1$, *тогда* $y = x$. *Прямая в первой и третьей четверти. Для неё значение углового коэфициента* $k = -1$. *Следовательно угол равен* $\frac{3\pi}{4}$ *для первой четверти*

2) *Рассмотрим* $C \in (-\infty;\ -1)$, *тогда нетрудно заметить, что угол* φ *соответственно изменялся для первой четверти от* $\frac{\pi}{2}$ *до* $\frac{3\pi}{4}$ *(оба не включительно).*

3) *Рассмотрим* $C \in (-1;\ 0)$. *Тогда угол* φ *соответственно изменялся для первой четверти от* $\frac{3\pi}{4}$ *до* π.

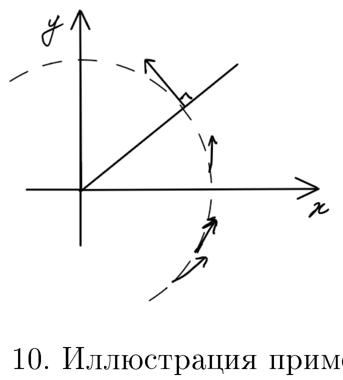


Рис. 10. Иллюстрация примера

Определение 5.5 (Общее решение). *Пусть $y' = f(x, y)$ — ДУ первого порядка. Функция $y = \varphi(x, C)$ называется общим решением этого ДУ если:*

1) *$\forall C \in \mathbb{R}$ y как функция от x является решением ДУ*

2) *Для любого решения $y = y^*(x)$*

$$\exists C^* \in \mathbb{R}, \quad y^*(x) \overset{(x)}{\equiv} \varphi(x, C^*)$$

Замечание 5.1. *Уравнение $\Phi(x, y, C) = 0$ — называется общим интегралом ДУ. $y' = f(x, y)$ если:*

1) *всякая неявная функция $y = y(x, C)$ при фиксированном C является решением ДУ*

2) *всякое решение задаётся неявной функцией $y = y(x, C^*)$ для некоторого C^**

Пример 5.4. *Для $y' = \frac{y}{x}$ очевидно из рисунка, что общее решение*

$$y = C\,x$$

Пример 5.5. *Для $y' = -\frac{x}{y}$ очевидно из рисунка, что общий интеграл*

$$x^2 + y^2 = C^2$$

Общее решение отсутствует

Замечание 5.2. *Точка особая, если нарушается существование и единственность задачи Коши*

Замечание 5.3. *$y = \varphi(x, C)$ — «общее» решение, $y = \hat{y}(x)$ — особое решение по отношению к общему решению.*

Замечание 5.4. *Дано $y' = f(x)$, тогда*

$$y = \int f(x)\,dx + C$$

называется решением ДУ «в квадратурах».
Важно заметить, что интегралов может быть несколько. Например,

$$y^{(n)} = f(x)$$

интегрируется в квадратурах, через последовательное интегрирование. Другим примером является сумма интегралов.

6. ДУ в "дифференциалах". ДУ с разделяющимися переменными

Определение 6.1. *Пусть $M(x, y), N(x, y) \in C(D)$. Тогда уравнение вида*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

называется ДУ в "дифференциалах"при этом

1) *Решение этого ДУ - дифференциальные уравнения $y = y(x), x \in I$, где I — отрезок, причём*

$$\forall x \in I \quad M(x, y(x)) + N(x, y(x))y'(x) = 0$$

2) *кривая линия $L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in I$ — называется интегральной кривой для данного ДУ. Это эквивалентно следующенму*
L – гладкая кривая и

$$\forall t \in I, \quad M(x(t), y(t))\, x'_t + N(x(t), y(t))\, y'_t = 0$$
$$dx = x'_t\, dt,\ dy(t) = y'_t\, dt$$

Замечание 6.1. *Есть связь между ДУ решённым относительно производной и ДУ в «дифференциалах»*

$$y' = f(x, y) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x, y)dx - dy = 0$$
$$Mdx + Ndy = 0| \div dx$$
$$M + Ny' = 0$$
$$y' = -\frac{M}{N}$$

Рассмотрим два примера отражающих этот факт.

Пример 6.1. *Дано*

$$y' = \frac{y}{x}$$

Тогда уравнение в «диференциалах»

$$y\, dx - x\, dy = 0$$

Только одна особая точка. Если $x = 0$, то интегральная кривая

Пример 6.2. *Дано*

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Тогда уравнение в «диференциалах»

$$y\,dy + x\,dx = 0$$

Интегральные кривые — замкнутые окружности

Определение 6.2. *ДУ вида $f(x)\,dx = g(y)\,dy$ — называется ДУ с разделёнными переменными. Причём $f(x) \in C(I),\ g(y) \in C(J)$.*
$I,\ J$ — интервалы

Теорема 6.1 (Общий интеграл ДУ с разделяющимися переменными). *В условиях определения выше пусть $F(x)$ первообразная к $f(x)$ на I, а $G(y)$ для $g(y)$ на J*
Тогда $F(x) = G(y) + C$ является общим интегралом ДУ $f(x)dx = g(y)dy$

Замечание 6.2. *В данной теореме мы просто говорим о взаимной связи первообразных с производными*

Доказательство. По условию:

$$L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in (\alpha; \beta)$$

Т.е. дана интегральная кривая ДУ $f(x)dx = g(y)dy$. Это эквивалентно

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad F(x(t)) = G(y(t)) + C$$

$\Rightarrow$ Рассмотрим $f(x(t))\,x'_t = g(y(t))\,y'_t$. Тогда

$$\begin{aligned} f(x(t))\,x'_t &= g(y(t))\,y'_t \\ (F(x(t)))'_t &= (G(y(t)))'_t \qquad \text{Зам. } (F(x(t)))' = f(x(t))\,x'_t] \\ (F(x(t)) - G(y(t)))'_t &= 0 \end{aligned}$$

Так как производная равна нулю, то при взятии первообразных справа будет константа, получаем

$$\exists C \equiv const \quad t \in (\alpha;\, \beta), \quad F(x(t)) = G(y(t)) + C$$

$\Leftarrow$ Если $\forall t \in (\alpha;\beta)$ $F(x(t)) = G(y(t)) + C$ то

$$[F(x(t))]'_t = [G(y(t))]'_t + [C]'_t$$
$$f(x(t))\,x'_t = g(y(t))\,y'_t$$

Таким образом L — интегральная кривая ДУ $f(x)\,dx = g(y)\,dy$

■

Замечание 6.3. *Решение в "квадратурах":*

$$\int f(x)\,dx = \int g(y)\,dy + C$$

Пример 6.3. *Дано $y\,dx - x\,dy = 0$. Решить ДУ.*

$$y\,dx - x\,dy = 0$$
$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$
$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$$
$$\ln(|x|) = \ln(|y|) - \ln(C_1) \qquad C = ln(C_1)$$
$$y = C\,x$$

Ответ: $y = C\,x$

Пример 6.4. *Дано*

$$x\,dx - y\,dy = 0$$

Требуется решить ДУ.
Решение

$$x\,dx - y\,dy = 0$$
$$\int x\,dx = -\int y\,dy$$

Для удобства возьмём константу $\frac{C^2}{2}$

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + \frac{C^2}{2}$$
$$x^2 + y^2 = C^2$$

Ответ: $x^2 + y^2 = C^2$

Определение 6.3. *ДУ вида*

$$y' = f(x)g(x) \qquad f(x),\ g(y) \in C$$

называется ДУ с разделяющимися переменными

Замечание 6.4 (Общий интеграл ДУ с разделяющимися переменными). *Возьмём* $y' \mapsto \frac{dy}{dx}$. *Заменим* y' *и умножим выражение из определения на* dx, *получим*

$$\begin{aligned} y' &= f(x)\, g(y) \\ \frac{dy}{dx} &= f(x)\, g(y) \\ dy &= f(x)\, g(y)\, dx \\ \frac{dy}{g(y)} &= f(x)\, dx \\ \int \frac{dy}{g(y)} &= \int f(x)\, dx + C \end{aligned}$$

Таким образом, получили общий интеграл.

Замечание. Было деление на $g(y)$. *В общем случае также требуется рассматривать* $g(y) = 0$

Пример 6.5. *Дано*

$$y' = \frac{y}{x}$$

Решение

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y}{x} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x} \\ \frac{dy}{y} &= \frac{dx}{x} \\ \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{x} \\ \ln|y| &= \ln|x| + \ln|C_1| \\ y &= C\, x \end{aligned}$$

Пример 6.6. *Дано*

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Решение

$$
\begin{gathered}
y' = -\frac{x}{y} \\
\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \\
y\,dy = -x\,dx \\
\int y\,dy = -\int x\,dx \\
\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{C^2}{2} \\
y^2 + x^2 = C^2
\end{gathered}
$$

Определение 6.4. *ДУ 1го порядка приводящееся к ДУ с разделяющимися переменными*

$$y' = f(a\,x + b\,y + c) \qquad a\,b \neq 0, \quad f(z) \in C_{(I)}$$

Замечание 6.5. *Введём*

$$z = a\,x + b\,y + C, \quad z = z(x)$$

Тогда

$$
\begin{gathered}
z' = a + b\,y' = [y' = f(z(x)) = f(x)] = a + b\,f(x) \\
z' = a + b\,f(x) \\
\frac{dz}{dx} = a + b\,f(x) \\
dx = \frac{dz}{a + b\,f(x)} \\
x + C = \int \frac{dz}{a + b\,f(x)}
\end{gathered}
$$

Получаем систему

$$
\begin{cases}
x + C = \int \dfrac{dz}{a + b\,f(x)} \\
z = a\,x + b\,y + C
\end{cases}
$$

Отдельно требуется рассмотреть случай $a + b\,f(z) = 0$

Пример 6.7. *Дано*

$$y' = \cos(x - y)$$

Решение.

$$\begin{aligned} z &= x - y \\ z' &= 1 - y' \qquad y' = cos(z) \\ z' &= 1 - \cos(z) \end{aligned}$$

Получили ДУ с разделяющимися переменными. Решаем

$$\begin{aligned} \frac{dz}{1-\cos(z)} &= dx \\ \int \frac{dz}{1-\cos(z)} &= \int dx \\ \int \frac{dz}{2\,\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)} &= x + C \\ ctg\left(\frac{z}{2}\right) &= x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= 2\,arctg(-x - C) + 2\,\pi\,k \qquad k \in \mathbb{N} \\ x - y &= 2\,arctg(-x - C) + 2\,\pi\,k \qquad k \in \mathbb{N} \\ y &= x - 2\,arctg(-x - C) - 2\,\pi\,k \qquad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Не забываем, что мы делили. Следовательно, требуется рассмотреть частный случай. $1 - cos(z) = 0$

$$\begin{aligned} 1 - cos(z) &= 0 \\ cos(x - y) &= 1 \\ x - y &= -2\,\pi\,k \qquad k \in \mathbb{N} \\ y &= x + 2\,\pi\,k \qquad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Проверим является ли значение выше упущенным решением.

$$\begin{aligned} y' &= 1 \qquad (\textit{производная взята из равенства выше}) \\ cos(x - y) &= cos(-2\,\pi\,k) = 1 \qquad (\textit{подстановка в условие}) \end{aligned}$$

Левая и правая части условия равны, следовательно $y = x + 2\,\pi\,k$ *входит в множество решений.*

Множество решений выглядит следующим образом

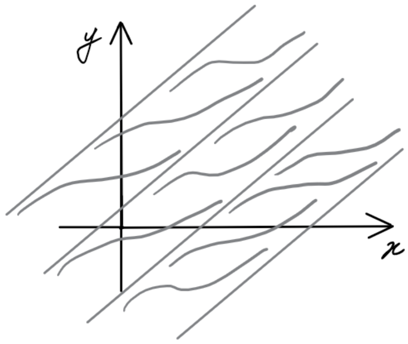


Рис. 11.

7. Однородные ДУ первого порядка

Определение 7.1. *Пусть функция $f(t)$ определена и непрерывна на некотором интервале и $f(t) \not\equiv t$. Тогда ДУ*

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

называются однородными ДУ первого порядка.

Замечание 7.1. *$F(x_1, \ldots, x_n)$ называются однородными функциями веса k, если*

$$\forall t \in \mathbb{R}\ F(t\,x_1, t\,x_2, \ldots, t\,x_n) = t^k\,F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Пример. $f(\frac{t\,y}{t\,x}) = f(\frac{y}{x})$ *— однородное ДУ веса* $k = 0$

Замечание 7.2 (Как решить однородное ДУ). *Дано*

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Введём

$$t(x) = t = \frac{y}{x}$$

Тогда
textcolorredmyт опечатка?

$$y = t\,x, \quad y' = t'\,x + t = f(t)$$

Таким образом получаем ДУ с разделяюмися переменными

$$t' = \frac{f(t) - t}{x}$$

Решаем

$$\frac{dt}{dx} = \frac{f(t) - t}{x}$$

Так как мы будем делить на $f(t) - t$, то потребуется рассмотреть два случая

1) $f(t) - t \neq 0$

$$\int \frac{dt}{f(t) - t} = \int \frac{dx}{x}$$

$$ln(|x|) = \int \frac{dt}{f(t) - t} + ln(C)$$

$$\begin{cases} x = Ce^{\int \frac{dt}{f(t)-t}} \\ y = t\,x \end{cases}$$

2) $f(t) - t = 0$

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad f(\alpha) = \alpha, \quad y = \alpha\,x$$

$$y' = \alpha = f(\alpha) = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

Пример 7.1. *Дано*

$$y' = \frac{x\,y + y^2}{x^2}$$

Решение.

$$y' = \frac{x\,y + y^2}{x^2} = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Делаем замену

$$t = \frac{y}{x}, \quad y = t\,x \quad dy = x\,dt + t\,dx$$
$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{x\,dt}{dx} + t = t'\,x + t$$

Подставляем и получаем

$$t'\,x + \cancel{t} = \cancel{t} + t^2$$
$$\frac{dt}{t^2} = \frac{dx}{x}$$
$$-\frac{1}{t} = \ln|x| - \ln(C) = -\frac{x}{y}$$
$$\frac{x}{y} = \ln\left(\frac{C}{x}\right) \qquad C \neq 0$$
$$y = \frac{x}{\ln\left(\dfrac{C}{x}\right)} \qquad C \neq 0$$

Также требуется рассмотреть частный случай, когда $t = 0$, тогда $y = 0$

Замечание 7.3. *Дано:*

$$y' = f\left(\frac{a_1\,x + b_1\,y + c_1}{a_2\,x + b_2\,y + c_2}\right)$$

где

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad c_1^2 + c_2^2 \neq 0$$

Вопрос. Как превести эту дробь к однородному ДУ 1-го порядка? $f\left(\frac{y}{x}\right)$
Ответ:
Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_1\,x + b_1\,y + c_1 = 0 \\ a_2\,x + b_2\,y + c_2 = 0 \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Тогда по теореме Крамера получим, что существует единственное решение $(\alpha;\ \beta)$ этой системы линейных алгебраических уравнений. Сделаем замену

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha \\ y = y_1 + \beta \end{cases}$$

Получим

$$\begin{aligned} a_1\,x + b_1\,y + c_1 &= a_1(x_1 + \alpha) + b_1(y_1 + \beta) + c_1 = \\ &= a_1\,x_1 + b_1\,y_1 + \underbrace{a_1\,\alpha + b_1\,\beta + c_1}_{0\ \text{(как корни ур-я)}} = \\ &= a_1\,x_1 + b_1\,y_1 \end{aligned}$$

Помимо этого, если взять диференциалы от заменённых функций, получим

$$\begin{cases} dx = dx_1 \\ dy = dy_1 \end{cases}$$

Таким образом мы можем перейти к отношению линейных функций. Из первоначального уравнения получаем.

$$\begin{aligned} y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{a_1\,x + b_1\,y + c_1}{a_2\,x + b_2\,y + c_2}\right) = f\left(\frac{a_1\,x_1 + b_1\,y_1}{a_2\,x_1 + b_2\,y_1}\right) = \\ = f\left(\frac{a_1 + b_1\,\frac{y_1}{x_1}}{a_2\,x_1 + b_2\,\frac{y_1}{x_1}}\right) = g\left(\frac{y_1}{x_1}\right) \end{aligned}$$

Таким образом

$$\frac{dy_1}{dx_1} = g\left(\frac{y_1}{x_2}\right)$$

получили однородное ДУ 1-го порядка, где

$$\begin{cases} x_1 = x - \alpha \\ y_1 = y - \beta \end{cases}$$

Пример 7.2. *Дано*

$$y' = \frac{x + y + 1}{x - y}$$

Решение.

1) *Найдём коэфициенты α и β. Для этого рассмотрим систему.*

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 1 = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \qquad \text{Получаем } \alpha = \beta = -\frac{1}{2}$$

2) Зная α и β Делаем замену x и y на

$$x = x_1 - \frac{1}{2} \qquad y = y_1 - \frac{1}{2}$$

Получаем

$$y' = \frac{x+y+1}{x-y} = \frac{x_1+y_1}{x_1-y_1}$$
$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1+y_1}{x_1-y_1}$$

3) Пусть $t = \frac{y_1}{x_1}$, следоватнльно $y_1 = t\,x_1$. Тогда

$$dy_1 = x_1\,dt + t\,dx_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dt}{dx_1}\,x_1 + t$$

А после замены $y_1 = t\,x_1$ справа получаем

$$\frac{x_1 + t\,x_1}{x_1 - t\,x_1} = \frac{1+t}{1-t}$$

Таким образом

$$\frac{dt}{dx_1}\,x_1 + t = \frac{1+t}{1-t}$$
$$\frac{dt}{dx_1}\,x_1 = \frac{1+t-t+t^2}{1-t}$$
$$\frac{1-t}{1+t^2}\,dt = \frac{dx_1}{x_1}$$
$$\int \frac{1-t}{1+t^2}\,dt = ln|x_1|$$

После интегрирования получаем

$$\ln|x_1| + C_1 = arctg(t) - \frac{1}{2}\,\ln|1+t^2|$$

Делаем обратную замену $t = \frac{y_1}{x_1}$, получаем

$$\ln|x_1| + C_1 = arctg\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - \frac{1}{2}\,\ln\left|1 + \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2\right|$$
$$\cancel{\ln|x_1|} + C_1 = arctg\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - \frac{1}{2}\,\ln|x_1^2 + y_1^2| + \cancel{\ln|x_1^2|}$$

Ответ

$$arctg\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - \frac{1}{2}\,\ln|x_1^2 + y_1^2| = C$$

8. Линейные дифференциальные уравнения. ДУ Бернулли

Определение 8.1 (Линейное ДУ). *ДУ вида*

$$a(x)\,y' + b(x)\,y + c(x) = 0$$

называется линейным диференциальным уравнением, а

$$y' + p(x)\,y = q(x)$$

является приведённой формой линейного ДУ первого порядка, где

$$p(x) \in C_{(a;\,b)} \quad q(x) \in C_{(a;\,b)}$$

Определение 8.2. *Пусть*

$$y' + p(x)\,y = q(x) \tag{1}$$
$$y' + p(x)\,y = 0 \tag{2}$$

ДУ (2) *- линейное однородное ДУ, соответствующее линейному ДУ* (1)

Замечание 8.1. *Метод Лагранжа для решения линейных неоднородных ДУ первого порядка, в вариации произвольной постоянной*
Дано

$$y' + p(x)\,y = q(x)$$

Решение

1) *Ищем решение для однородного уравнения*

$$\begin{aligned} y' + p(x)\,y &= 0 \\ \frac{dy}{y} &= -p(x)\,dx \\ \ln(y) &= -\int p(x)\,dx + \ln(C) \\ y &= C\,v(x) \end{aligned}$$

Замечание. $v(x) = e^{-\int p(x)\,dx}$
Таким образом, получили ***частное*** *решение для однородного ДУ.*

2) *ищем решение первоначального ДУ в виде $y = C(x)\,v(x)$, где $C(x)$ — постоянная, зависящая от x (произвольная постоянная)*

$$y = C(x)\,v(x)$$
$$y' = C'\,v + C\,v'$$

Подставим в уравнение из условия

$$C'\,v + C\,v' + p\,C\,v = q$$
$$C'\,v + C\,(v' + p\,v) = q$$

Так как на первом шаге мы рассматривали $v' + p\,v = 0$, то уравнения выше получаем

$$C\,(v' + p\,v) = 0$$
$$C'\,v(x) = q(x)$$
$$C' = \frac{q(x)}{v(x)}$$
$$C(x) = \int \frac{q(x)}{v(x)}\,dx + const$$

Подставим значение $v(x)$ из шага 1, получим

$$C(x) = \int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx + const \qquad x \in (a;\,b)$$

Или

$$C(x) = u(x) + const$$

3) *полное решение ДУ имеет вид*

$$y = C(x)\,v(x) = (u(x) + C)\,v(x) = u(x)\,v(x) + C\,v(x)$$

В общем виде

$$y = y_{(\textit{частное решение неоднородного})} + C\,y_{(\textit{частное решение однородного})}$$

Замечание 8.2 (По поводу решения задач Коши). *Пусть*

$$p(x),\; q(x) \in C_{(a;\,b)}, \quad x_0 \in (a;\,b), \quad y_0 \in \mathbb{R}$$

Тогда задача Коши

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y'|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

имеет единственное решение, определённое на $(a;\ b)$ вида

$$y = \underbrace{e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}}_{v(x)} \left(\underbrace{y_0}_{c} + \underbrace{\int_{x_0}^{x} \underbrace{g(s)e^{\int_{x_0}^{s} p(t)dt}}_{\frac{g(s)}{v(s)}} ds}_{u(x)} \right)$$

Пример 8.1. *Дано*

$$xy' + y = 3x^3$$

Решение.
Делим на x получим

$$y' + \frac{y}{x} = 3x^2$$

1) *Решаем однородное уравнение. Находим решение для $\mathring{y} = v(x)$*

$$v' + \frac{v}{x} = 0$$
$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$$
$$\ln(v) = -\ln(x) + \ln(C)$$
$$v = \frac{C}{x} \text{ — общее решение}$$
$$\text{При } C = 1 \quad v(x) = \frac{1}{x} \text{ — частное решение}$$

2) *Решаем общее уравнение. где $y = C(x)\,v(x) = v(x)\,u(x)$*

$$\text{Так как } y = \frac{u}{x}, \text{ то } y' = \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2}$$

Подставляем в первоначальное уравнение. Получаем

$$\frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} + \frac{u}{x^2} = 3x^2$$
$$u' = 3x^3$$
$$u(x) = \frac{3}{4}x^4 + c$$

3) *Совмещаем результаты шагов 1 и 2. Получаем ответ*

$$y = \frac{3}{4}x^4 + \frac{c}{x} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Определение 8.3. *ДУ вида*

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^{\alpha} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0;\,1\}$$

называется ДУ Бернулли

Замечание 8.3 (Решение ДУ Бернулли). *ДУ Бернулли интегрируется методом Лагранжа в вариации произвольной постоянной*

1) *Ищем $v = v(x)$ частное решение соответствующее линейному однородному ДУ*

$$v' + p(x)\,v = 0$$
$$v(x) = e^{-\int p(x)\,dx}$$

2) *Ищем общее решение ДУ для $u = u(x)$, где $y = u(x)\,v(x)$*

$$u'\,v + \underbrace{u(v' + pv)}_{=0(\textit{см. зам. 2})} = qu^{\alpha}v^{\alpha}$$
$$u'\,v(x) = q(x)u^{\alpha}v^{\alpha}(x)$$

Замечание. Нам известно то, что с аргументом.
Далее разделим на $u^{\alpha}\,v(x)$

$$\frac{du}{u^{\alpha}} = q(x)\,v^{\alpha-1}(x)\,dx$$
$$\int \frac{du}{u^{\alpha}} = \int q(x)\,v^{\alpha-1}(x)\,dx$$
$$\frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \int q(x)\,v^{\alpha-1}(x)\,dx + C$$
$$u = u(x,\ C) = \left((1-\alpha)\left(\int q(x)\,v^{\alpha-1}(x)\,dx + C\right)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

3) *Таким образом, ответ*

$$y = u(x,\ C)\,v(x)$$

Пример 8.2. *Дано*

$$x\,y' - y = x\,y^2$$

Решение.
Для соответсвия ДУ Бернулли разделим на x. Получим

$$y' - \frac{y}{x} = y^2$$

Видим, что

$$p(x) = -\frac{1}{x}, \quad q(x) = 1, \quad \alpha = 2$$

1) *Ищем частное решение однородного ДУ*

$$\begin{gathered} v' - \frac{v}{x} = 0 \\ \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \\ \ln|v| = -\ln|x| + \ln(C) \\ v = C\,x \end{gathered}$$

Если $C = 1$, *то получаем частное решение* $v(x) = x$

2) *Рассмотрим* $y = u(x)\,v(x) = u\,x$
Подставим в уравнение из условия, получим

$$\begin{gathered} u'\,x + u - u = u^2\,x^2 \\ u' = u^2\,x \\ \frac{du}{u^2} = x\,dx \\ -\frac{1}{u} = \frac{x^2}{2} - C \\ u = \frac{1}{C - \dfrac{x^2}{2}} \end{gathered}$$

3) *Ответ*

$$\begin{gathered} y = \frac{x}{C - \dfrac{x^2}{2}} \\ y = \frac{2\,x}{2\,C - x^2} \end{gathered}$$

9. ДУ в полных дифференциалах

Определение 9.1. *ДУ вида*

$$M(x,\ y)\,dx + N(x,\ y)\,dy = 0 \qquad M(x,\ y),\ N(x,\ y) \in C'(D)$$

называется ДУ «в полных дифференциалах», если $\exists F(x,\ y) \in C^2(D)$ *для которой*

$$\begin{aligned} F'_x &= M(x,\ y) \\ F'_y &= N(x,\ y) \end{aligned}$$

то есть ДУ имеет вид $dF(x,\ y) = 0$

Примечание. *Дифференциал*

$$dF(x,\ y) = F'_x\,dx + F'_y\,dy = M\,dx + N\,dy$$

является полным, поэтому и название уравнения «в полных дифференциалах».

Теорема 9.1 (Об общем интеграле). *В условиях определения 1, уравнение* $F(x,\ y) = C$ *даёт общий интеграл ДУ* $dF(x,\ y) = 0$ *(предполагаем, что D-односвязная область (ограниченная простой замкнутой кривой))*

Доказательство. Интегральная кривая $dF(x,\ y) = 0$

$$L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in I$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\exists C = const, \quad \forall t \in I, \quad F(x(t),\ y(t)) = C$$

$\Rightarrow$ По условию имеем

$$F'_x(x(t),\ y(t))\,x'_t + F'_y(x(t),\ y(t))\,y'_t = 0$$

Значит

$$(F(x(t), y(t)))' = 0, \quad t \in I$$
$$\Rightarrow \exists C = const \quad \forall t \in I \quad F(x(t),\ y(t)) = C$$

$\Leftarrow$ По условию

$$\forall t \in I \quad F(x(t),\, y(t)) = C$$

Продиференцируем равенство, получим

$$F'_x\, x'_t + F'_y\, y'_t = 0$$

По определению следует, что
L — интегральная кривая ДУ $F'_x\, dy + F'_y\, dx = 0$ и значит $dF(x, y) = 0$

■

Замечание 9.1 (решение задачи Коши).

$$\begin{cases} dF(x, y) = 0 \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

$F(x, y) = F(x_0, y_0)$ *(в неявном виде)*

Пример 9.1. *Дано*

$$F(x, y) = x^2\, y$$

Требуется вывести ДУ.
Решение.

$$F'_x = 2\, x\, y$$
$$F'_y = x^2$$

Тогда уравнение «в полных диференциалах» будет выглядеть так

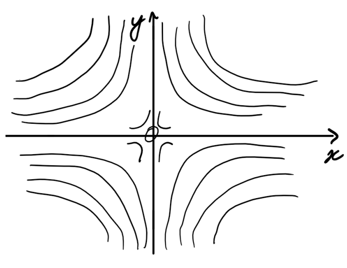


Рис. 12. Общее решение

$$2\, x\, y\, dx + x^2\, dy = 0$$
$$x^2\, y + x^2\, y = C_1$$
$$x^2\, y = C = \frac{C_1}{2}$$

Общее решение

$$y = \frac{C}{x^2}$$

Теорема 9.2 (О необходимом и достаточных усл. хар. ДУ в полн. диф.). *Пусть функции $M(x,\ y)$ $\quad N(x,\ y) \in C'(D)$, где D односвязная замкнутая ограниченная область на $\mathbb{R}^2$ (граница D односвязанная замкнутая кривая). Тогда ДУ*

$$M(x,\ y)dx + N(x,\ y)dy = 0$$

является ДУ в полных дифференциалах. Это эквивалентно

$$M'_y = N'_x \qquad (\forall (x,\ y) \in \mathring{U}(D))$$

Доказательство. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ - внутренняя точка в области D

$\Rightarrow$ Пусть есть $F(x,y) \in C^2$ такая, что

$$F'_x = M(x,\ y), \quad F'_y = N(x,\ y) \quad \forall (x,y) \in \mathring{D}$$

Найдём $M'_y = F''_{xy} \in \mathring{D} \in C(\mathring{D})$ и $N'_x = F''_{yx} \in C(\mathring{D})$

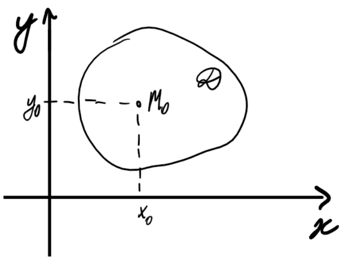


Рис. 13.

Так как они непрерывны, значит $F''_{xy} = F''_{yx}$. Из этого очевидно, что

$$M'_y = N'_x \qquad M'_y, N'_x \in \mathring{D}$$

$\Leftarrow$ По условию

$$\forall (x,y) \in \mathring{D} \quad M'_y(x,y) = N'_x(x,y)$$

и возьмём

$$(x_0,\ y_0) \in \mathring{D}, \quad U((x_0,\ y_0)) \subset D$$

Найдём частный интеграл F'_x, где $y = const$

$$F'_x = M(x,y) \quad \Rightarrow \quad F(x,\ y) = \int_{x_0}^{x} M(x;\ y)\, dx + \varphi(y)$$

Также

$$F'_y = \left(\int_{x_0}^{x} M(x,\ y)\,dx + \varphi(y)\right)'_y = \int_{x_0}^{x} M'_y(x,\ y)\,dx + \varphi'(y) \equiv N(x,\ y)$$

$$\int_{x_0}^{x} N'_x(x,\ y)\,dx = N(x,\ y)$$

$$\int_{x_0}^{x} N'(x,y)\,dx + \varphi'(y) \equiv N(x,y)$$

$$N(x,y)|_{x_0}^{x} + \varphi' \equiv N(x,y)$$

$$\cancel{N(x,y)} - N(x_0,y) + \varphi'_y \equiv \cancel{N(x,y)}$$

$$\varphi'_y = N(x_0,y)$$

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy$$

Таким образом

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)\,dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0,s)ds$$

Замечание. По поводу односвязанности.
Односвязность показывает то, что мы способны соединить точки P и P_0 внутри данной области.
Тогда $\exists F(x,y)$ определённая в $U(P_0)$

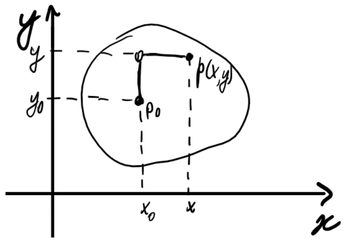


Рис. 14.

$$F'_x = M(x,y) \quad F'_y = N(x,y) \qquad (\forall (x,y) \in U(P_0))$$

«Двигаем» точку P_0 до P. Тогда

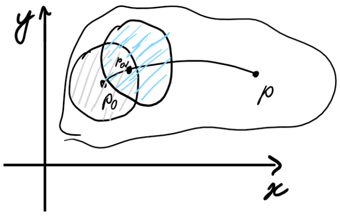


Рис. 15. «движение точки»

$$\exists F(x,y) \in \mathring{D} \qquad F'_x = M \qquad F'_y = N \quad (\forall (x,y) \in \mathring{D})$$

■

Определение 9.2 (Интегрирующий множитель). *Пусть*

$$M(x,y),\ N(x,y) \in C'(D)$$

Тогда функцию $\mu = \mu(x,\ y)$ называют интегрирующим множителем ДУ

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

Или ($\Leftrightarrow$)
Существует $\mu(x,\ y)$ — непрерывная функция, причём ДУ

$$\mu\,M\,dx + \mu\,N\,dy = 0$$

является ДУ «в полных дифференциалах».
Или

$$u(x,\ y) \in C'(D) \qquad (\mu\,M)'_y = (\mu\,N)'_x$$

в односвязных компонентах области D и частях D

Замечание 9.2. *(отыскание интегрирующего множителя в некоторых случаях)*
Пусть

$$\frac{M'_y - N'_x}{N} = f(x)$$

Тогда существует интегрирующий множитель

$$\mu = \mu(x) \qquad \mu(x) = e^{\int f(x)dx}$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\mu'_y\,M + \mu\,M'_y = \mu'_x\,N + \mu\,N'_x$$
$$\mu\,(M'_y - N'_x) = \mu'_x\,N - \mu'_y\,M$$

Если $\mu = \mu(x) \quad \mu''_y \equiv 0$, тогда

$$\frac{du}{\mu} = \frac{M'_y - N'_x}{N}\,dx = f(x)\,dx$$
$$\ln|\mu| = \int f(x)\,dx$$
$$\mu(x) = e^{\int f(x)\,dx}$$

$\blacksquare$

Пример 9.2. *Дано*

$$x\,y\,dx + (x^2+y^2)\,dy = 0$$

Решение

$$M = xy \qquad\qquad N = x^2+y^2$$
$$M'_y = x \qquad\qquad N'_y = 2x$$

$$\frac{M'_y - N'_x}{M} = -\frac{x}{x\,y} = -\frac{1}{y} = g(y)$$

Из замечания выше следует

$$\exists \mu = \mu(y) = e^{\int g(y)dy} = e^{\int \frac{dy}{y}} = e^{\ln y} = y$$
$$\mu = y$$

Таким образом $y = \mu$. *Домножим равенство из условия на* y.

$$x\,y^2\,dx + (x^2y+y^3)\,dy = 0$$
$$M_1 = xy^2$$
$$N_1 = x^2y + y^3$$
$$M'_{1_y} = 2\,x\,y = N'_{1_x}$$

Таким образом получили ДУ в полных диференциалах.
Решаем его

$$\begin{cases} F'_x = xy^2 \\ F'_y = x^2y + y^3 \end{cases}$$

Возьмём первое уравнение и проинтегрируем его. Причём вместо константы добавим функцию от y (можем т.к. $(\varphi(y))'_x = C'_x = 0$).

$$F(x,\, y) = \int x\, y^2\, dx = y^2 \int x\, dx = \frac{y^2 x^2}{2} + \varphi(y)$$

Найдём $\varphi(y)$ с помощью F'_y

$$(\frac{1}{2}x^2y^2 + \varphi(y))'_y = x^2y + y^3$$
$$x^2y + \varphi'_y = x^2y + y^3$$
$$\varphi'_y = y^3 \quad \varphi(y) = \frac{y^4}{4}$$

Таким образом мы нашли $F(x,\, y)$. Ответом является следующее уравнение

$$\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 = C$$

10. ДУ Клеро и Лагранжа

Замечание 10.1 (По поводу параграфа (от автора)). *Если до этого мы рассматривали уравнения, разрешённые относительно производной, то в данном параграфе мы рассмотрим два вида ДУ, которые таковыми не являются.*

Определение 10.1. *Пусть функция*

$$\varphi(t) \in C'(I) \quad and \quad \varphi(t) \not\equiv t$$

Тогда ДУ вида

$$y = x\, y' + \varphi(y')$$

называют диффернциальным уравнением Клеро

Замечание 10.2 (Решение ДУ Клеро). *Дано*

$$y = x\, y'(x) + \varphi(y'(x))$$

Решение.
Продиференцируем по x. Получим

$$\cancel{y'_x(x)} = \cancel{y'_x(x)} + x\, y''_{xx}(x) + \varphi'_t(y')\, y''_{xx}$$

Примечание. Пишем индекс t, так как производная от сложной функции.
Таким образом

$$y''(x + \varphi'_t) \equiv 0$$

Рассмотрим 2 случая

1) $y''_{xx} = 0$ *Получаем*

$$(y'_x)' \equiv 0$$
$$y'_x \equiv C$$
$$y = C\, x + C_1$$

Требуется проверка, так как мы могли получить лишние решения после диференцирования (это не опечатка?) (могли появиться в самом начале, когда дифференцировали по x)

Проверка. Подставляем ответ в первоначальное решение.

$$C\,x + C_1 = C\,x + \varphi(C)$$
$$C_1 = \varphi(C)$$

Таким образом общее решение ДУ Клеро выглядит так

$$y = C\,x + \varphi(C)$$

Нетрудно заметить, что решение выглядит как семейство прямых линий.

2) *Рассмотрим второй множитель*

$$x + \varphi'_t(t) \equiv 0$$
$$x \equiv -\varphi'_t(t)$$

Нашли решение относительно x теперь найдём решение относительно y.
Пусть $y' = t$, тогда из уравнения условия

$$y = x\,t + \varphi(t)$$

Подставляем x получаем

$$y = -t\,\varphi'_t + \varphi$$

Таким образом, особое решение ДУ Клеро имеет вид

$$L: \begin{cases} x = -\varphi'_t(t) \\ y = \varphi - t\,\varphi'_t \end{cases}$$

что является уравнением прямой L.

Графически решение выглядит следующим образом

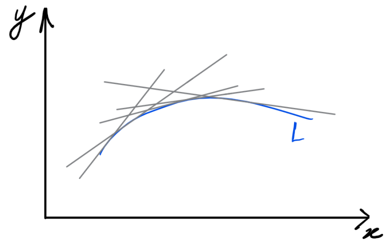


Рис. 16.

Замечание 10.3 (О геометрическом смысле ДУ Клеро). *Ищем кривую L, касательные к которой обладают некоторым свойством. Рисунок для условия в конце.*

Уравнение касательной к L в точке $(x,\ y) \in L$

$$Y - y = y'\,(X - x) = y'\,X - x\,y'$$

Уравнение относительно Y в общем виде

$$Y = k\,X + b, \quad \text{где} \quad k = y', \quad b = y - x\,y'$$

Объявим свойство касасательной как $b = \varphi(k)$. Тогда

$$y - x\,y' = \varphi(y')$$
$$y = x\,y' + \varphi(y')$$

Таким образом, мы получили уравнение Клеро.

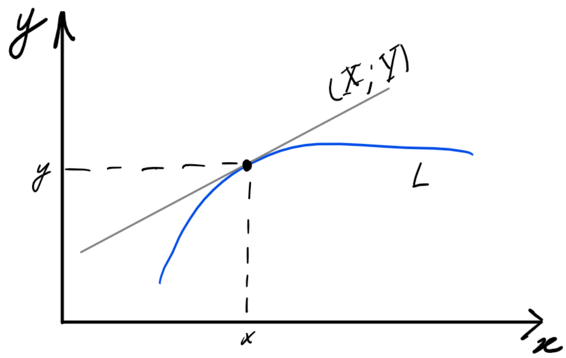


Рис. 17.

Определение 10.2. *Пусть есть функции*

$$(\varphi(t),\ \psi(t)) \in C'(I) \quad \varphi(t) \not\equiv t \text{ (функция нелинейна)}$$

Тогда уравнение вида

$$y = x\,\varphi(y') + \psi(y')$$

называют ДУ Лагранжа.

Замечание 1. Уравнение похоже на Клеро, но тут кривая связана с нормалями.

Замечание 2. Уравнение Лагранжа общий случай уравнения Клеро.

Замечание 10.4 (Как решать). *Дано*

$$y = x\,\varphi(y') + \psi(y')$$

Решение.

Введём следующую параметризацию

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Тогда формуле параметрически заданной функции получаем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = t \qquad \Rightarrow \qquad y'_t = t\,x'_t$$

Так как y'_x и y' одно и тоже, получаем из условия

$$y = x\,\varphi(t) + \psi(t)$$

Продиференцируем по t Получим

$$y'_t = x'_t\,\varphi + x\,\varphi'_t + \psi'_t$$

Помним, что $y'_t = t\,x'_t$. С учётом этого уравнение выше приобретает вид

$$x'_t\,\varphi + x\,\varphi'_t + \psi'_t = t\,x'_t$$
$$x'_t\,(\varphi - t) + x\,\varphi'_t = -\psi'_t$$

Таким образом получили линейное ДУ 1-го порядка в приведённой форме. Решение (через метод Лагранжа)

$$x'_t + \frac{{\varphi'}_t}{\varphi - t}\, x = \frac{\psi'_t}{\varphi - t}$$

$$x'_0 + \frac{\varphi'_t}{\varphi - t}\, x_0 = 0$$

$$x'_0 = \frac{\varphi'_t}{t - \varphi}\, x_0$$

$$\frac{dx_0}{x_0} = \frac{\varphi'_t\, dt}{t - \varphi}$$

Интегрируем и получаем решение для однородного ДУ затем находим ответ для неодродного уравнения (x_1)*. Таким образом мы нашли*

$$x = x_1(t) + C\, x_0(t)$$

Подставляем значение x *в* $y'_t = t\, x'_t$ *или* $y = x\, \varphi(t) + \psi(t)$ *(оба варинта справедливы?). Получаем окончательный ответ.*
Таким образом, общий интеграл ДУ Лагранжа

$$\begin{cases} x = x_1(t) + C\, x_0(t) \\ y = y_1(t) + C\, y_0(t) \end{cases}$$

Замечание. Нужно проверить

$$\frac{y'_t}{x'_t} = t$$

особое решение, когда $\varphi(t) - t = 0$

11. Диференциальные уравнения высшего порядка, доспукающие понижения порядка

Определение 11.1. *ДУ n-го порядка это уравнение вида*

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

решение которого является функцией $y = y(x)$, $x \in I$, которая n раз диференцируема на I и справедливо

$$F(x, y, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

Определение 11.2. *Если*

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

то оно называется диферециалное уравнение n-го порядка рзрешённого относительно старшей производной

Пример 11.1 (Как можно описать множество решений). *Дано*

$$y^{(n)} = f(x),\ f(x) \in C(I),\ \text{где } I \text{ — интервал}$$

Для краткости запишем через эквивалентность

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) &\equiv f(x) & & \\ (y^{(n-1)}(x))' &\equiv f(x) & \Leftrightarrow \quad & y^{(n-1)}(x) = F_1(x) + C_1 \\ (y^{(n-2)}(x))'' &\equiv f(x) & \Leftrightarrow \quad & y^{(n-2)}(x) = F_2(x) + C_1\, x + C_2 \end{aligned}$$

Из этого следует

$$\begin{aligned} y^{(n-3)} &= F_3(x) + \frac{C_1}{2}\, x^2 + C_2\, x + C_3 \\ &\dots \\ y &= F_n(x) + \frac{C_1}{(n+1)!}\, x^{n-1} + \dots + C_{n-1}\, x + C_n \\ y &= F_n(x) + C_1'\, x^{n-1} + \dots + C_{n-1}'\, x + C_n' \end{aligned}$$

где

$$F_n(x) = \underbrace{\int dx \int dx \cdots \int f(x) dx}_{n \text{ раз}}$$

Замечание. В последней строке сделана замена вида: $C_1' = \frac{C_1}{(n+1)!}$ … $C_n' = C_n$.

Определение 11.3 (Общее решение). *Пусть* $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{n-1})$ *— ДУ n-го порядка.*
Тогда функция
$$y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$$
называется общим решением этого ДУ если

1) $\forall C_1, \ldots, C_n$ $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$ *является решением как функция от* x

2) *Для любого решения* $y = \varphi^*(x)$ *найдётся такой набор* $C_1^*, \ldots, C_n^* \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$, *что* $\varphi^*(x) = \varphi(x, C_1^*, \ldots, C_n^*)$. *То есть общее решение учитывает все наборы констант (все варианты решения)*

Определение 11.4 (Общий интеграл). *Если общее решение задано неявной функцией*
$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$$
то это общий интеграл

Определение 11.5 (Задача Коши для ДУ n-го порядка). *Она описывается следующим образом*

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \\ y|_{x=x_0} = y_0,\ y'|_{x=x_0} = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{n-1} \end{cases}$$

где функция $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *определена в области* $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$,
а $M_0(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{n-1})$ *— внутренняя точка области* D

Теорема 11.1 (Сущ. и ед. задачи Коши для ДУ n-го порядка). *Пусть функция* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *определена в области* $D \in \mathbb{R}^{n+1}$ *и*

$$f(M),\ \frac{\delta f(M)}{\delta y},\ \frac{\delta f(M)}{\delta y'},\ \ldots,\ \frac{\delta f(M)}{\delta y^{(n-1)}}$$

непреывны в некоторой окрестности $U(M_0) \subset D$, *где* $M_0(x_0,\ y_0,\ \ldots,\ y_0^{(n-1)})$

Тогда $\exists \delta > 0$ *и существует единственная функция* $y = y(x)$, $x \in U_\delta(x_0)$, *которая является решением задачи Коши*

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \\ y|_{x=x_0} = y_0,\ y'|_{x=x_0} = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{n-1} \end{cases}$$

Доказательство. Принимаем без доказательств.
Примечание. Доказательсво аналогично случаю для одной переменной.
■

Замечание 11.1 (О ДУ допускающих понижение порядка). *Рассмотрим ДУ вида $F(x, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, т.е. не содержащих в явном виде y.*
Для них спаведлива следующая замена:

$$z = z(x) = y'(x),\ z'(x) = y''(x),\ \ldots,\ z^{(n-1)}(x) = y^{(n)}(x)$$

Тогда

$$\begin{cases} F(x, z, \ldots, z^{(n-1)}) = 0 \\ z = y' \end{cases}$$

Таким образом, общее решение

$$y' = z = z(x, C_1, \ldots, C_{n-1})$$

Ответ

$$y = \int z(x, C_1, \ldots, C_{n-1})\, dx + C_n$$

Пример 11.2. *Дано*

$$x^2 y'' - (y')^2 = 0$$

Решение.
Заменияем $z = y'$, $z' = y''$. Получаем

$$x^2 z' - z^2 = 0$$
$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2}$$
$$\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x^2}$$
$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{x} - C_1$$
$$z = \frac{x}{C_1 x + 1}$$
$$y' = \frac{x}{C_1 x + 1}$$
$$y = \int \frac{x}{C_1 x + 1}$$

Таким образом получаем

1) $C_1 = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2}{C_2}$

2) Для $C_1 \neq 0$ *получим*

$$y = \frac{1}{C_1} \int \frac{(C_1\,x+1)-1}{C_1\,x+1}\,dx + C_2$$
$$y = \frac{x}{C_1} - \frac{1}{C_1^2}\,ln(|C_1\,x+1|) + C_2$$

3) Частный случай $z = 0,\ y' = 0 \Rightarrow y = C_2$

Замечание 11.2. *Рассмотрим ДУ вида* $F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$*, т.е. не содержащие в явном виде* $y, y', \dots, y^{(k-1)},\ k \geqslant 2s$*.*
В данном случае всё аналогично предыдущему замечанию

$$z = y^{(k)}, z' = y^{(k+1)}, \dots, z^{(n-k)} = y^{(n)}$$
$$\begin{cases} F(x, z, \dots, z^{(n-k)}) = 0 \\ z = y^{(k)} \end{cases}$$

Таким образом, общее решение для z

$$z = z(x, C_1, \dots, C_{n-k})$$
$$F_k^{(k)} = z(x, C_1, \dots, C_{n-k})$$
$$y^{(k)} = F_k^{(k)}$$
$$y = F_k(x, C_1, \dots, C_{n-k}) + C_{n-k+1}\,x^{k-1} + \dots + C_n$$

Пример 11.3. *Дано*

$$x\,y''' - y'' = 0 \Rightarrow k = 2$$

Решение

Пусть $z = y'',\ z' = y'''$ *тогда*

$$x\,z' - z = 0$$
$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} + ln|C_1|$$

$z = C_1\,x$*Делаем обратную замену*

$$y'' = C_1\,x$$
$$y' = \frac{C_1\,x^2}{2} + C_2$$
$$y = \underbrace{\frac{C_1\,x^3}{6}}_{F_2(x, C_1)} + \underbrace{C_2\,x + C_3}_{\text{многочлен ст. } k-1}$$

По факту мы рассмотрели следующее уравнение в поле

$$y''' = \frac{y''}{x},\ D \in \mathbb{R}^4 \setminus \{x = 0\}$$

Замечание. Частный случай ($z = 0$) входит в общее решение. Таким образом, решение выше полное.

Замечание 11.3. *Рассмотрим ДУ вида $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ т.е. не содержащее x в явном виде.*
Аналогично делаем замену

$$\begin{aligned} y' &= p(y) \\ \text{Отметим } y'_x(x) &= p(y(x)) \text{ — сложная функция. Значит} \\ y'' &= p'\,p \\ y''' &= (p''\,p + (p')^2)\,p = f_2(p, p', p'') \\ &\dots \\ y^{(k+1)} &= f_k(p, p', \dots, p^{(k)}) \end{aligned}$$

Таким образом получаем следующую систему

$$\begin{cases} F(y,\ p,\ p'\,p,\ f_2(p,\ p',\ p''),\ \dots,\ f_k(p,\ p',\ \dots,\ p^{(k)})) = 0 \\ y' = p \end{cases}$$

Следовательно общее решение относительно p

$$p = p(y, C_1, \dots, C_{n-1})$$

Зная, что $y' = p$ получаем

$$\frac{dy}{p(y, C_1, \dots, C_{n-1})} = dx$$

Таким образом решение относительно x следующее

$$x = \int \frac{dy}{p(y, C_1, \dots, C_{n-1})} + C_n$$

Пример 11.4. *Дано*

$$y'' = 2\,y\,y'$$

Решение

$$\begin{aligned} y' &= p(y) \\ y'' &= p'\,p \\ p'\,p &= 2\,y\,p \\ p(p' - 2\,y) &= 0 \end{aligned}$$

Получаем два случая
Первый:

$$p = 0 \Rightarrow \; y' = 0, \; y = C_1$$

Второй:

$$\begin{aligned} p' - 2\,y &= 0 \\ p' &= 2\,y \\ dp &= 2\,y\,dy \\ \int dp &= \int 2\,y\,dy \\ p = y' &= y^2 + C_1 \\ \frac{dy}{dx} &= y^2 + C_1 \\ \int dx &= \int \frac{dy}{y^2 + C_1} \\ x + C_2 &= \int \frac{dy}{y^2 + C_1} \end{aligned}$$

При вычислении интеграла рассмотрим три случая

1) $C_1 = 0$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{y} &= x + C_2 \\ y &= -\frac{1}{x + C_2} \end{aligned}$$

2) $C_1 > 0$

$$\begin{aligned} x + C_2 &= \frac{1}{\sqrt{C_1}}\, arctg\left(\frac{y}{\sqrt{C_1}}\right) \\ y &= \sqrt{C_1}\, tg((x + C_2)\sqrt{C_1}) \end{aligned}$$

3) $C_1 < 0, \; C_1 = -|C_1|$

$$x + C_2 = \frac{1}{2\sqrt{|C_1|}}\, ln\left|\frac{y - \sqrt{|C_1|}}{y + \sqrt{|C_1|}}\right|$$

12. Линейные ДУ n-го порядка

Определение 12.1. *Пусть сущ. функции* $p_1(x), \ldots, p_n(x), f(x) \in C_{(a;b)}$. *Тогда ДУ вида*

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)\,y = f(x)$$

называется лининейным ДУ n-го порядка с коэфициентами $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ *и правой частью* $f(x)$

Теорема 12.1 (Сущ. и ед. задачи Коши для ЛДУ n-го порядка). *Пусть* $p_1(x), \ldots, p_n(x), f(x) \in C_{(a;\,b)}$.
Тогда $\forall x_0 \in (a;\,b)$, $\forall y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$ *задача Коши*

$$\begin{cases} y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = f(x) \\ y|_{x=x_0} = y_0, \ldots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

имеет единственное решение $y = y(x)$, $x \in (a,\,b)$ *определённое на всём интервале* $(a;\,b)$.

Доказательство. Принимаем без доказательств ∎

Для более компактной записи введём следующее определение

Определение 12.2 (Линейный диференциальный оператор). *Перед тем как непосредственно вводить определение рассмотрим два случая.*

1) *Рассмотрим оператор диференцирования:* $\frac{d}{dx}$, *тогда его действие будет выглядеть так*

$$\frac{d}{dx}\,f(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

Данный оператор линейный, так как

) $(v+u)' = v' + u'$

) $(cu)' = c\,u'$

(Примечание. признак линейности см. во 2м сем.)

2) *Для другого оператора* $\frac{d^k}{dx^k}$ *действие будет выглядеть*

$$\frac{d^k}{dx^k}f(x) = \frac{d^k f(x)}{dx^k} = f^(k)(x)$$

Сам оператор также является линейным

Таким образом, очевидно, что в общем случае можно определить оператор

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x)E$$

это линейный диференциальный оператор n-го порядка, где

$$Ef(x) = f(x) \ E \text{ — единичный оператор}$$

Его действие на n раз диф. ф-ю $f(x)$

$$L = \frac{d^n f(x)}{dx^n} + p_1(x)\,\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x)\,\frac{df(x)}{dx} + p_n(x)\,f(x)$$
$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + p_{n-1}\,(x)y' + p_n(x)\,y$$

Замечание 12.1. *Теперь ЛДУ n-го порядка можно описать так*

$$L(y) = f(x)$$

Замечание 12.2 (Линейность оператора L). .
Пусть

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x)\,\frac{d}{dx} + p_n(x)\,E$$

Тогда

1) $L(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = L(\varphi_1(x)) + L(\varphi_2(x))$

2) $L(C\,\varphi(x)) = C\,L(\varphi(x))$

3) $L(C_1\,\varphi_1(x) + C_2\,\varphi_2(x) + \dots + C_n\varphi_n(x)) = C_1\,L(\varphi_1(x)) + C_2\,L(\varphi_2(x)) + \dots + C_n\,L(\varphi_n(x))$

Доказательство.

1) Рассмотрим следующие тривиальные выражения

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) + \varphi_2(x) &= \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \\ (\varphi_1(x) + \varphi_2(x))' &= \varphi_1'(x) + \varphi_2'(x) \\ (\varphi_1(x) + \varphi_2(x))'' &= \varphi_1''(x) + \varphi_2''(x) \\ &\dots \\ (\varphi_1(x) + \varphi_2(x))^{(n)} &= \varphi_1^{(n)}(x) + \varphi_2^{(n)}(x) \end{aligned}$$

Каждую из строк соответственно умножим на $p_n,\ p_{n-1},\ \dots,\ p_1,\ 1$. Затем сложим все уравнения. И нетрудно заметить, что таким образом получаем

$$L(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = L(\varphi_1(x)) + L(\varphi_2(x))$$

2) аналогично доказывается (рассмотрим выражения $c\,\varphi, (c\,\varphi)^{(n)}$)

3) аналогично (или методом мат. индукции по k)

■

Определение 12.3.

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + p_{n-1}(x)\,y' + \cdots + p_n(x)\,y = f(x) \qquad (3)$$

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + p_{n-1}(x)\,y' + \cdots + p_n(x)\,y = 0 \qquad (4)$$

ДУ (2) называют линейным однородным ДУ, а (1) лин. неоднородным ДУ
В краткой форме соответствует

$$L(y) = f(x)$$
$$L(y) = 0$$

Замечание 12.3. .
ЛОДУ — линейное однородное диференциальное уравнение
ЛНДУ — линейное неоднородное диференциальное уравнение

Теорема 12.2 (О линейности мн-ва решений ЛОДУ). *Пусть функции $p_1(x), \ldots, p_n(x), f(x) \in C_{(a;b)}$ и $L(y) = y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + p_{n-1}(x)y' + \cdots + p_n(x)\,y$. Тогда ЛОДУ $L(y) = 0$ имеет множество решений удвлетворяющие следующему свойству линейности.*
Если $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$ решение $L(y) = 0$, то
$\forall C_1, \ldots, C_k \in \mathbb{R}$ функция

$$y = C_1\,\varphi_1(x) + \cdots + C_k\,\varphi_k(x)$$

является решением $L(y) = 0$

Замечание. Количество решений произвольно и не обязательно равно n.

Доказательство..
Дано

$$L(\varphi_1(x)) \equiv 0, \ \ldots, \ L(\varphi_k(x)) \equiv 0$$

Тогда для $\forall C_1, \ldots, C_k$ и свойствам из замечания 2 получаем

$$L(C_1\varphi_1(x) + \cdots + C_n\,\varphi_n(x)) = C_1\,L(\varphi_1(x)) + \cdots + C_n\,L(\varphi_n(x)) \equiv 0$$

Следовательно $y = C_1\,\varphi_1(x) + \cdots + C_k\,\varphi_k(x)$ является решением $L(y) = 0$

■

13. Фундаментальная система решений ЛОДУ

Определение 13.1 (Линейно зависимая система функций). *Система функций $\{\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_k(x)\}$ определённая на $(a;\ b)$ называется линейно зависимой*

$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{array}{ll} \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R} & \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_k^2 \neq 0 \\ \forall x \in (a;\ b) & \alpha_1\,\varphi_1(x) + \cdots + \alpha_k\,\varphi_k(x) = 0 \end{array}$$

Примечание. Говорят: лин. зав. на интервале $(a;\ b)$. Важно отметить, что мы рассматриваем систему на интервале.

Пример 13.1. *Дана линейно зависимая система на $\mathbb{R}$*

$$\{x,\ x+1,\ x-1\}$$

Требуется найти набор коэфициентов.
Решение

$$\alpha\,x + \beta\,(x+1) + \gamma\,(x-1) \equiv 0$$
$$(\alpha+\beta+\gamma)\,x + \beta - \gamma \equiv 0$$

Очевидно, что решение будет тогда, когда выполнена следующая система

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

Таким образом, решение

$$\begin{cases} \alpha = -2\beta \\ \beta = \beta \\ \gamma = \beta \end{cases}$$

Ответом может быть, например, частный случай при $\beta = 1$ тогда
$\alpha = -2,\ \beta = 1,\ \gamma = 1$
$-2x + (x+1) + (x-1) \equiv 0$ — *система линейно зависима на $\mathbb{R}$*

Определение 13.2 (Линейно независимая система функций). *Система функций $\{\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_k(x)\}$ опр-на на $(a;b)$ называется линейно независимой на $(a;b)$*
Или

$$\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)\} \text{ не явл. лин. зав. на } (a;b)$$

Или

$$\forall x \in (a;\, b) \quad \alpha_1\, \varphi_1(x) + \cdots + \alpha_k\, \varphi_k(x) = 0$$
$$\text{Где } \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$$

Определение 13.3 (Фундаментальная система решений ЛОДУ).
.
Пусть

$$p_1(x), \ldots, p_n(x) \in C_{(a;b)}$$

ЛОДУ

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + p_{n-1}(x)\, y' + \cdots + p_n(x)\, y = 0$$

Система функций $\{\varphi_1(x),\, \ldots,\, \varphi_k(x)\}$ *определена на* $(a;\, b)$ *называется фундаментальной системой решений ЛОДУ* $L(y) = 0$
$\Leftrightarrow$

1) $L(\varphi_1(x)) \equiv 0, \ldots, L(\varphi_n(x)) \equiv 0$
   Где $x \in (a;\, b)$ *и* $\varphi_1,\, \ldots,\, \varphi_n$ *— решения ЛОДУ*

2) *число функций равно* $n = \{$*порядок ЛОДУ*$\}$

3) $\{\varphi_1(x),\, \ldots,\, \varphi_n(x)\}$ *- лин. незав. система на* $(a;\, b)$

Определение 13.4. *Пусть функции* $\varphi_1(x),\, \ldots,\, \varphi_n(x)$ n *раз дифф-мая функция на* $(a;\, b)$
Тогда функциональный определитель

$$W(x) = W(\varphi_1,\, \ldots,\, \varphi_n) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

называется определителем Вронского или Вронскиан для системы функций $\{\varphi_1(x),\, \ldots,\, \varphi_n(x)\}$

Теорема 13.1. *В условиях определения 4, если система функций*

$$\{\varphi_1(x),\, \ldots,\, \varphi_n(x)\} \quad \text{линейно зависима на } (a;\, b)$$

то

$$\forall \alpha \in (a;\, b), \quad W(x) = W(\varphi_1,\, \ldots,\, \varphi_n) = 0$$

Доказательство. $\exists\, \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$, причём $\alpha_1^2+\cdots+\alpha_n^2\neq 0$ а также

$$\forall x\in(a;\,b)\quad \alpha_1\,\varphi_1(x)+\cdots+\alpha_k\,\varphi_k(x)=0$$

Зафиксируем один из коэфициентов и будем считать, что $\alpha_1\neq 0$ (в случаее, если другой коэфициент не равен нулю, то его можно поменять местами с α_1)

$$W=\begin{pmatrix}\varphi_1 & \ldots & \varphi_n\\ \vdots & \ldots & \vdots\\ \varphi_1^{(n-1)} & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}\end{pmatrix}=\frac{1}{\alpha_1}\begin{pmatrix}\alpha_1\,\varphi_1 & \ldots & \varphi_n\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha_1\,\varphi_1^{(n-1)} & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}\end{pmatrix}=$$

$=[$ Добавляем к первому столбцу столбцы умноженные на $\alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n\ ]=$

$$=\frac{1}{\alpha_1}\begin{pmatrix}\alpha_1\,\varphi_1+\cdots+\alpha_n\,\varphi_n & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha_1\,\varphi_1^{(n-1)}+\cdots+\alpha_n\,\varphi_n^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\alpha_1}\begin{pmatrix}\alpha_1\,\varphi_1+\cdots+\alpha_n\,\varphi_n & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ (\alpha_1\,\varphi_1+\cdots+\alpha_n\,\varphi_n)^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\alpha_1}\begin{pmatrix}0 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n\\ 0 & \varphi_2' & \ldots & \varphi_n'\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \varphi_2^{(n-1)} & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}\end{pmatrix}=0\qquad \forall x\in(a;\,b)$$

■

Замечание 13.1. *Пусть* $\{\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)\}$ *n раз диференцируемая система функций на* $(a;\ b)$, $W(x)=W(\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x))$ *— вронскиан системы* $\{\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)\}$

Тогда если $\exists x_0\in(a;\ b)$ $W(x_0)\neq 0$ *то система* $\{\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)\}$ *линейна независима на* $(a;\ b)$

Доказательство. Доказательство от противного.
Пусть $W(x_0)\neq 0$ и система линейно зависима на промежутке. Следовательно теореме выше получаем, что вронскиан равен нулю $\forall x\in(a\ b)$, следовательно, в частности, $W(x_0)=0$, что противоречит первоначальному условию $W(x_0)\neq 0$. Таким образом, получаем противоречие и следовательно система линейно независима на интервале. ■

Вспомним теорему 1 из предыдущего параграфа (она нужна для доказательства следующей теоремы)

Теорема 13.2. *Пусть* $p_1(x),\ \ldots,\ p_n(x),\ f(x) \in C_{(a;\,b)}$.
Тогда $\forall x_0 \in (a;\,b)$, $\forall y_0,\ y_0',\ \ldots,\ y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$ *задача Коши*

$$\begin{cases} L(y) = y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)\,y = f(x) \\ y|_{x=x_0} = y_0, \ldots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

имеет единственное решение $y = y(x)$, $x \in (a,\,b)$ *определённое на всём интервале* $(a;\,b)$.

Теорема 13.3. *Пусть в условиях теоремы выше функции* $\{\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)\}$ *является решением ЛОДУ* $L(y) = 0$ *и* $\exists x_0 \in (a;\,b)$, $W(x_0) = 0$.

Тогда $\{\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)\}$ *линейно зависима на всём промежутке и (по т. 1)* $\forall x \in (a,\,b)\ W(x) = 0$

Доказательство. Рассмотрим алгебраическую систему уравнений относительно $C_1, \ldots, C_n$, получим

$$\begin{cases} C_1\,\varphi_1(x_0) + \cdots + C_n\,\varphi_n(x_0) = 0 \\ C_1\,\varphi_1'(x_0) + \cdots + C_n\,\varphi_n'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ C_1\,\varphi_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + C_n\,\varphi_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

n уравнений относительно n переменных $C_1, \ldots, C_n$ и $\Delta = W(x_0) = 0$. Значит ранг матрицы меньше n, следовательно существует бесконечное множество решений (см. 2 сем.), то есть

$$\exists (C_1^*,\ \ldots,\ C_n^*) \neq (0,\ \ldots,\ 0)$$

Рассмотрим

$$\varphi^*(x) = C_1^*\,\varphi_1(x_0) + \cdots + C_n^*\,\varphi_n(x_0)$$

$\varphi^*(x)$ — является решением задачи Коши

$$\begin{cases} L(y) = 0 \\ y|_{x=x_0} = 0, \ldots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = 0 \end{cases}$$

То есть

$$\varphi^*(x_0) = 0,\ (\varphi^*)'(x_0) = 0,\ \ldots,\ (\varphi^*)^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Очевидно, что для $y \equiv 0$, также является решением тойже задачи Коши на интервале. Примечание $L(y) = y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)\,y$. Из всего этого следует

$$\varphi^*(x_0) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in (a;\ b) \quad C_1^*\,\varphi_1(x) + \cdots + C_n^*\,\varphi_n(x) = 0$$

где $(C_1^*,\ \dots,\ C_n^*) \neq (0,\ \dots,\ 0)$.
Значит по определению линейно зависимой системы, получаем что система $\{\varphi_1(x),\ \dots,\ \varphi_n(x)\}$ линейно зависима на $(a;\ b)$ ■

Теорема 13.4 (О существовании ФСР ЛОДУ n-го порядка). *Пусть функции $p_1(x),\ \dots,\ p_n(x) \in C_{(a;\,b)}$, тогда существует набор функций $\{\varphi_1(x),\ \dots,\ \varphi_n(x)\}$ являющийся ФСР для*

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)\,y = 0$$

Доказательство. Возьмём $x_0 \in (a;\ b)$ и рассмотрим n задач Коши вида:

$$\begin{array}{llll}
L(y) = 0 & L(y) = 0 & \dots & L(y) = 0 \\
y|_{x=x_0} = 1 & y|_{x=x_0} = 0 & \dots & y|_{x=x_0} = 0 \\
y'|_{x=x_0} = 0 & y'|_{x=x_0} = 1 & \dots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \dots & y^{n-2}|_{x=x_0} = 0 \\
y^{n-1}|_{x=x_0} = 0 & y^{n-1}|_{x=x_0} = 0 & \dots & y^{n-1}|_{x=x_0} = 1 \\
y = \varphi_1(x) & y = \varphi_2(x) & \dots & y = \varphi_n(x) \\
x \in (a;\, b) & x \in (a;\, b) & \dots & x \in (a;\, b)
\end{array}$$

Таким образом имеем следующий вронскиан

$$W(x_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

Из того, что определитель не равен нулю следует

1) $\varphi_1,\ \dots,\ \varphi_n$ — решения $L(y) = 0$ на $x \in (a;\, b)$

2) Количество решений равно порядку ДУ ($L(y) = 0$), которое равно n

3) $\{\varphi_1,\ \dots,\ \varphi_n\}$ — линейно независимы на $(a;\, b)$ (по следствию к теореме 1)

Из этого по определению 3 следует, что $\{\varphi_1,\ \dots,\ \varphi_n\}$ — ФСР $L(y) = 0$
■

Теорема 13.5 (Формула Лиувилля). *Пусть* $p_1(x),\ \ldots,\ p_n(x) \in C_{(a;\, b)}$ *и* $\{\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)\}$ *— ФСР ЛОДУ* $L(y) = 0$.

Возьмём $x_0 \in (a;\ b)$ *и обозначим через* $W_0 = W(x_0) \neq 0$. *Тогда справедлива формула Лиувилля*

$$W(x) = W_0\, e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)\, dt}$$

Доказательство. Для наглядности рассмотрим случай $n = 2$, тогда

$$L(y) = y'' + p_1(x)\, y' + p_2(x)\, y = 0$$

Пусть $\{\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)\}$ — ФСР, то есть

$$\begin{cases} \varphi_1'' + p_1\, \varphi_1' + p_2\, \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2'' + p_1\, \varphi_2' + p_2\, \varphi_2 = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим вронскиан и его производную.

$$W(x) = \begin{cases} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{cases} = \varphi_1\, \varphi_2' - \varphi_2\, \varphi_1'$$
$$W'(x) = \cancel{\varphi_1'\, \varphi_2'} + \varphi_1\, \varphi_2'' - \varphi_1''\, \varphi_2 - \cancel{\varphi_1'\, \varphi_2'}$$

Воспользуемся системой выше для замены φ_1'' и φ_2''. Получим.

$$\begin{cases} \varphi_1'' = -p_1\, \varphi_1' - p_2\, \varphi_1 \\ \varphi_2'' = -p_1\, \varphi_2' - p_2\, \varphi_2 \end{cases}$$
$$W'(x) = \varphi_1\, (-p_1\, \varphi_2' - p_2\, \varphi_2) + \varphi_2(p_1\, \varphi_1' + p_2\, \varphi_1)$$
$$W'(x) = -p_1\, (\varphi_1\, \varphi_2' - \varphi_1'\, \varphi_2) = -p_1\, W$$

Решаем тривиальное ДУ

$$\frac{dW}{dx} = -p_1(x)\, W$$

Очевидно

$$\int_{x_0}^{x} ln(W) = -\int_{x_0}^{x} p_1(t)\, dt$$

Ответ

$$W(x) = W(x_0)^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)\, dt}$$

■

14. Общее решение линейного ДУ n-го порядка

Теорема 14.1 (Об общем решении ЛОДУ n-го порядка). *Пусть*

$$p_1(x),\ \ldots,\ p_n(x)\ \in C_{(a;\,b)}\ \text{и}\ \{\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)\}$$

ФСР ЛОДУ

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + p_1\,y = 0$$

Тогда функция

$$y = C_1\,\varphi_1(x) + \cdots + C_n\,\varphi_n(x)$$

описывает множество всех решений ЛОДУ $L(y) = 0$, то есть

1) $\forall\ C_1,\ \ldots,\ C_n\ \in \mathbb{R} \qquad y = C_1\,\varphi_1 + \cdots + C_n\,\varphi_n$ *— решение* $L(y) = 0$

2) $\forall y = \varphi^*(x)$ *— решение* $L(y) = 0$*. Тогда*

$$\exists\ C_1^*,\ \ldots,\ C_n^*\ \in \mathbb{R} \quad x \in (a;\ b)$$
$$\varphi^*(x) = C_1^*\,\varphi_1 + \cdots + C_n^*\,\varphi_n$$

Доказательство.

1) Дано $L(\varphi_1) = 0,\ \ldots,\ L(\varphi_n) = 0$

$$\forall C_1,\ \ldots,\ C_n \quad L(C_1\,\varphi_1 + \cdots + C_n\,\varphi_n) = C_1\,\underbrace{L(\varphi_1)}_{=0} + \cdots + C_n\,\underbrace{L(\varphi_n)}_{=0}$$

$$\Rightarrow\ y = C_1\,\varphi_1(x) + \cdots + C_n\,\varphi_n(x) \quad \text{— решение } L(y) = 0, x \in (a;\ b)$$

2) Пусть $y = \varphi^*(x)$ — решение $L(y) = 0 \quad x \in (a;\ b)$
Возьмём точку $x_0 \in (a;\ b)$ и скажем, что

$$y_0 = \varphi_1^*(x_0),\ \ldots,\ y_0^{(n-1)} = (\varphi_n^*)^{(n-1)}(x_0)$$

Тогда $y = \varphi^*(x)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} L(y) = y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)\,y = f(x) \\ y|_{x=x_0} = y_0, \ldots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

С другой строны будем искать решение этой задачи Коши в виде
$y = C_1\,\varphi_1(x) + \cdots + C_n\,\varphi_n(x)$
тогда решение имеет вид

$$\begin{cases} C_1\,\varphi_1(x_0) + \cdots + C_n\,\varphi_n(x_0) = y_0 \\ C_1\,\varphi_1'(x_0) + \cdots + C_n\,\varphi_n'(x_0) = y_0' \\ \vdots \\ C_1\,\varphi_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + C_n\,\varphi_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Это система n алгебраических уравнений относительно n переменных $C_1,\ \ldots,\ C_n$, определитель которой $\Delta = W(x_0) \neq 0$, так как мы рассматриваем ФРС (система уравнений ленейно независима по определению).

По т. Крамера следует, что существует решение и притом единственное, то есть

$$\exists (C_1^*,\ \ldots,\ C_n^*)$$

Следовательно $y = C_1^*\,\varphi_1(x) + \cdots + C_n^*\,\varphi_n(x)$ — решение задачи Коши и для $\varphi^*(x)$ по теореме о существовании и единственности задачи Коши.

$\blacksquare$

Теорема 14.2 (Об общем реешении ЛНДУ n-го порядка). *Пусть $p_1(x),\ \ldots,\ p_n(x),\ f(x) \in (a;\,b)$ и $\{\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)\}$ — ФСР ЛОДУ*

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)\,y = 0 \qquad x \in (a;\,b)$$

Обозначим через $\psi(x)$ некоторое решение ЛНДУ $L(y) = f(x)$. Тогда общее решение ЛНДУ имеет вид

$$y = \psi(x) + C_1\,\varphi_1(x) + \cdots + C_n\,\varphi_n(x)$$

То есть

1) $\forall\, C_1,\ \ldots,\ C_n\ \in \mathbb{R} \quad y = \psi + C_1\,\varphi_1 + \cdots + C_n\,\varphi_n$ *является решением* $L(y) = f(x)$

2) *Для любого решения $\psi^*(x)$ ЛНДУ $L(y) = f(x)$*
$\exists\, C_1,\ \ldots,\ C_n \quad x \in (a;\,b) \quad \psi^* = \psi + C_1^*\,\varphi_1 + \cdots + C_n^*\,\varphi_n$

Доказательство.

$\forall x_0 \in (a;\, b),\ \exists y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)},\ \psi(x)$ — решение здачи Коши

$$\begin{cases} L(y) = f(x) \\ y|_{x=x_0} = y_0,\ y'|_{x=x_0} = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}, \end{cases}$$

По теореме о существовании и единственности задачи Коши

1) Аналогично доказательству выше имеем

   $\forall\, C_1,\ \ldots,\ C_n$
   $L(\psi + C_1\,\varphi_1 + \cdots + C_n\,\varphi_n) = \underbrace{L(\psi)}_{=f(x)} + C_1\,\underbrace{L(\varphi_1)}_{=0} + \cdots + C_n\,\underbrace{L(\varphi_n)}_{=0} = f(x)$

2) $y = \psi^*(x)$ решение $L(\psi^*) = f(x)$, с другой стороны $L(\psi) = f(x)$ тоже решение (по усл.)
   Тогда рассмотрим следующее выражение

   $$L(\psi^* - \psi) = [\text{по св-ву лин. оп.}] = L(\psi^*) - L(\psi) = f(x) - f(x) = 0$$

   Значит $L(\psi^* - \psi)$ — ЛОДУ. Следовательно по теореме 1 для ЛОДУ справедливо

   $$\exists\, C_1^*,\ \ldots,\ C_n^* \quad \forall x \in (a;\, b) \varphi^* = \psi^* - \psi = C_1^*\,\varphi_1 + \cdots + C_n^*\,\varphi_n$$

   Нетрудно заметить и вывести

   $$\psi^* = \psi + C_1^*\,\varphi_1 + \cdots + C_n^*\,\varphi_n$$

■

15. Метод вариации произвольных постоянных

Теорема 15.1. *Пусть*

$$p_1(x),\ \ldots,\ p_n(x),\ f(x) \in C_{(a;\,b)}$$

и изветна ФСР $\{\varphi_1(x),\ \ldots\ \varphi_n(x)\}$ *ЛОДУ*

$$L(y) = y^{(n)} + y^{(n-1)}\,p_1(x) + \cdots + y\,p_n(x) = 0$$

Ищем решение ЛНДУ $L(x) = f(x)$ *в виде*

$$y = C_1(x)\,\varphi_1(x) + \cdots + C_n(x)\,\varphi_n(x)$$

где функции $\{C_1(x),\ \ldots,\ C_n(x)\}$ *диференцируемые на* $(a;\,b)$ *и* $\{C_1'(x),\ \ldots,\ C_n'(x)\}$ *удовлетворяет следующим свойствам алгебраических уравнений*

$$\begin{cases} C_1'\,\varphi_1'(x) + \cdots + C_n'\,\varphi_n'(x) = 0 \\ C_1'\,\varphi_1'(x) + \cdots + C_n'\,\varphi_n'(x) = 0 \\ \vdots C_1'\,\varphi_1^{(n-2)}(x) + \cdots + C_n\,\varphi_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ C_1'\,\varphi_1^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n\,\varphi_n^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases}$$

Тогда такая система имеет решения

$$C_1' = u_1(x),\ \ldots,\ C_n = u_n(x)$$

$$y = \left[\left(\varphi_1(x)\int u_1(x)\,dx\right) + \cdots + \left(\varphi_n(x)\int u_n(x)\,dx\right)\right] + [C_1\,\varphi_1(x) + \cdots + C_n\,\varphi_n(x)]$$

где $C_1,\ \ldots,\ C_n$ *— константы.*
Примечание. Тут две суммы: одна с интегралом, другая без

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$y = C_1\,\varphi_1 + \cdots + C_n\,\varphi_n$$

Возьмём n производных, причём заметим, что φ, и C_1 зависимы от x.

Тогда получаем

$$
\begin{aligned}
y &= C_1\,\varphi_1 + \dots + C_n\,\varphi_n \\
y' &= C_1\,\varphi_1' + \dots + C_n\,\varphi_n' + \underbrace{C_1'\,\varphi_1 + \dots + C_n'\,\varphi_n}_{\equiv 0} \\
y'' &= C_1\,\varphi_1'' + \dots + C_n\,\varphi_n'' + \underbrace{C_1'\,\varphi_1' + \dots + C_n'\,\varphi_n'}_{\equiv 0} \\
&\vdots \\
y^{(n-2)} &= C_1\,\varphi_1^{(n-2)} + \dots + C_n\,\varphi_n^{(n-2)} + \underbrace{C_1'\,\varphi_1^{(n-3)} + \dots + C_n'\,\varphi_n^{(n-3)}}_{\equiv 0} \\
y^{(n-1)} &= C_1\,\varphi_1^{(n-1)} + \dots + C_n\,\varphi_n^{(n-1)} + \underbrace{C_1'\,\varphi_1^{(n-2)} + \dots + C_n'\,\varphi_n^{(n-2)}}_{\equiv f(x)}
\end{aligned}
$$

Таким образом

$$
\begin{aligned}
p_n\ * &\mid y = C_1\,\varphi_1 + \dots + C_n\,\varphi_n \\
p_{n-1}\ * &\mid y' = C_1\,\varphi_1' + \dots + C_n\,\varphi_n' \\
p_{n-2}\ * &\mid y'' = C_1\,\varphi_1'' + \dots + C_n\,\varphi_n'' \\
&\vdots \\
p_1\ * &\mid y^{(n-2)} = C_1\,\varphi_1^{(n-2)} + \dots + C_n\,\varphi_n^{(n-2)} \\
1\ * &\mid y^{(n-1)} = C_1\,\varphi_1^{(n-1)} + \dots + C_n\,\varphi_n^{(n-1)} + f(x)
\end{aligned}
$$

Сложим все функции, получим

$$
L(y) = C_1\ \underbrace{L(\varphi_1)}_{\equiv 0(\text{ФСР})} + \dots + C_n\ \underbrace{L(\varphi_n)}_{\equiv 0(\text{ФСР})} + f(x)
$$

Таким образом $L(y) = f(x)$. Значит уравнение в самом начале является решением ЛНДУ.

Теперь рассмотрим

$$
\begin{cases}
C_1'\,\varphi_1 + \dots + C_n'\,\varphi_n = 0 \\
C_1'\,\varphi_1' + \dots + C_n'\,\varphi_n' = 0 \\
\vdots \\
C_1'\,\varphi_1^{(n-3)} + \dots + C_n'\,\varphi_n^{(n-3)} = 0 \\
C_1'\,\varphi_1^{(n-2)} + \dots + C_n'\,\varphi_n^{(n-2)} = f(x)
\end{cases}
$$

Это система из n алгебраических уравнений относительно n переменных $C_1', \ldots, C_n'$. Видим, что определитель матрицы $\Delta = W(x) \neq 0$ $\forall x \in (a;\, b)$ (Т.к. $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ — ФСР). Следовательно, по теореме Крамера существует единственное решение

$$C_1' = u_1(x), \ \ldots, \ C_n' = u_n(x)$$

Таким образом

$$C_1(x) = \int u_1(x)\,dx + C_1, \ \ldots, \ C_n(x) = \int u_n(x)\,dx + C_n$$

Значит решение ЛНДУ

$$y = \left(\int u_1(x)\,dx + C_1\right)\varphi_1(x) + \cdots + \left(\int u_n(x)\,dx + C_n\right)\varphi_n(x)$$

Что аналогично

$$y = \left[\left(\varphi_1(x)\int u_1(x)\,dx\right) + \cdots + \left(\varphi_n(x)\int u_n(x)\,dx\right)\right] + \left[C_1\,\varphi_1(x) + \cdots + C_n\,\varphi_n(x)\right]$$

■

Замечание 15.1 (Нахождение произвольных постоянных и описание ответа). *Пользуясь методом Крамера $x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$ получаем*

$$u_k(x) = \frac{1}{W(x)}\begin{bmatrix} \varphi_1 & \ldots & 0 & \ldots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \ldots & 0 & \ldots & \varphi_n' \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \ldots & f(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)} \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^{(k+n)}\,\frac{W(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}, \varphi_{k+1} \ldots, \varphi_n)}{W(x)}\,f(x) =$$

$$= \frac{(-1)^{(k+n)}\,f(x)\,W_k(x)}{W(x)}$$

Для описания решения введём вспомогательную функцию

$$G(x,\, t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+n}\varphi_k(x)\,\frac{W_k(t)}{W(t)}$$

Примечание. *Переменная t введена, чтобы «разграничить» интегрируемые Вронскианы и $\varphi(x)$, который за интегралом. Тогда решение имеет вид*

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^{x} G(x,\, t)\,f(t)\,dt}_{y_{ч.н.}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k\,\varphi_k(x)}_{y_{о.о.}}$$

Пример 15.1. *Дано*

$$x\,y'' + y' = x$$

Решение.
Приведём к каноническому виду (делим на x)

$$y'' + \frac{y'}{x} = 1$$

Получили $L(y)$. Решаем в два этапа

1) *Рассматриваем однородное уравнение $L(y) = 0$*

$$y'' + \frac{y'}{x} = 0$$
$$y' = z, \qquad y'' = z'$$
$$z' + \frac{z}{x} = 0$$
$$\int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dx}{x}$$
$$\ln|z| = -\ln|x| + \ln\,C_1$$
$$z = y' = \frac{C_1}{x}$$
$$y = y_{o.o.} = C_1\,\ln|x| + C_2$$

2) *Решаем неоднородное уравнение с произволными постоянными $C_1(x),\ C_2(x)$ и $\varphi_1,\ \varphi_2$*

$$y = C_1(x)\,\ln|x| + C_2(x)$$
$$\varphi_1 = \ln|x|, \qquad \varphi_2 = 1$$
$$\varphi_1' = \frac{1}{x}, \qquad \varphi_2' = 0$$

Накладываем 1 дополнительное условие $C_1'\,\ln|x| + C_2' = 0$

$$\begin{cases} C_1'\,\ln|x| + C_2' = 0 \\ C_1'\,\frac{1}{x} + C_2'\,0 = 1 \quad (\textit{Из условия}) \end{cases}$$

Решаем

$$\begin{cases} C_1'\,ln|x| + C_2' = 0 \\ C_1'\,\frac{1}{x} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2' = -C_1'\,ln|x| \\ C_1' = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2' = -x\,ln|x| \\ C_1(x) = \frac{x^2}{2} + C_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2(x) = -\int x\,ln|x|\,dx \\ C_1(x) = \frac{x^2}{2} + C_1 \end{cases}$$

$$C_2(x) = -\int x\,ln|x|\,dx = \left[u = ln|x|, \quad dv = x\,dx; \qquad du = \frac{1}{x}, \quad v = \frac{x^2}{2}\right] =$$

$$= -\frac{x^2}{2}\,ln|x| + \frac{x^2}{4} + C_2$$

Зная значения $C_1(x)$ *и* $C_2(x)$ *получаем*

$$y = \frac{x^2}{2}\,ln|x| - \frac{x^2}{2}\,ln|x| + \frac{x^2}{4} + C_1\,ln|x| + C_2$$

Ответ

$$y = \frac{x^2}{4} + C_1\,ln|x| + C_2$$

16. Лин. диф. ур-я n-го порядка с постоянными коэфициентами

Определение 16.1.
ДУ вида

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + a_{n-1}(x)\, y' + \cdots + a_n(x)\, y = f(x)$$

где $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *(постояные),* $f(x) \in C_{(a;\,b)}$ *называются линейные ДУ n-го порядка с постояными коэфициентами (т.е. не зависящими от* x*)*

Замечание 16.1 (Основа метода реш. ДУ $L(y) = 0$).
Будем искать решения вида $y = e^{\alpha\, x}$*, тогда*

$$\begin{aligned}
a_n \ * \ &|\ y = e^{\alpha x} \\
a_{n-1} \ * \ &|\ y' = \alpha e^{\alpha x} \\
&\ \vdots \\
a_1 \ * \ &|\ y^{(n-1)} = \alpha^{n-1} e^{\alpha x} \\
1 \ * \ &|\ y^{(n)} = \alpha^n e^{\alpha x}
\end{aligned}$$

Складываем, получаем

$$L(y) = e^{\alpha x}\, P(\alpha), \quad \text{где} \quad P(\alpha) = \alpha^n + a_1\, \alpha^{n-1} + \cdots + a_n$$

По условию $e^{\alpha x}$ *решение* $L(y) = 0$*. Это равносильно следующему утверждению* $P(\alpha) = 0$*, то есть* α *- корень многочлена* $P(\lambda)$*, где* λ *- переменая*

Определение 16.2.
Пусть

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + a_{n-1}(x)\, y' + \cdots + a_n(x)\, y = 0$$

— ЛОДУ с постоянными коэффициентами $a_1, \ldots, a_n$
Тогда многочлен

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\, \lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

называется характеристическим многочленом ЛОДУ $L(y) = 0$

Теорема 16.1 (ФСР, случай простых корней $P(\lambda)$).
Пусть
$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\,\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$
— характерестический многочлен ЛОДУ $L(y) = 0$ с постоянными коэффициентами.
Тогда если все корни $P(\lambda)$ вещественны и различны, то есть $\{\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n\}$ корни $P(\lambda)$ причём $\alpha_i \neq \alpha_j (i \neq j)$, то ФСР $L(y) = 0$ выглядит так
$$\{e^{\alpha_1\,x},\ e^{\alpha_2\,x},\ \ldots,\ e^{\alpha_n\,x}\}$$

Доказательство.
Для начала вспомним определение ФСР

1) $L(e^{\alpha_i\,x}) = 0 \qquad i = 1,\ \ldots,\ n$
2) функциий n-штук и это равно порядку ДУ $L(y) = 0$
3) Система функций $\{e^{\alpha_1\,x},\ e^{\alpha_2\,x},\ \ldots,\ e^{\alpha_n\,x}\}$ – линейно независима

Справедливость пункта 1 следует из замечания 1, соблюдение 2 – из условия. Значит требуется доказать корректность пункта 3.

Последнее будем доказывать от противного. Пусть система линейно зависима и пусть один из коэфициетов $C_1 \neq 0$. Рассмотрим

$$\begin{aligned}
C_1\,e^{\alpha_1\,x} + \cdots + C_n\,e^{\alpha_1\,x} \equiv 0 \quad &|\ \div\, e^{\alpha_1\,x} \\
C_1\,e^{(\alpha_1-\alpha_n)\,x} + \cdots + C_{n-1}e^{(\alpha_{n-1}-\alpha_n)\,x} + 1 \equiv 0 \quad &|\ \mathrm{d}f \\
C_1\,(\alpha_1-\alpha_n)\,e^{(\alpha_1-\alpha_n)\,x} + \cdots + C_{n-1}\,(\alpha_{n-1}-\alpha_n)\,e^{(\alpha_{n-1}-\alpha_n)\,x} \equiv 0 &
\end{aligned}$$

Опять делим и диференцируем, и так до тех пор пока не получим

$$C_1\,\underbrace{(\alpha_1-\alpha_n)}_{\neq 0}\,\underbrace{(\alpha_1-\alpha_{n-1})}_{\neq 0}\,\ldots\,\underbrace{(\alpha_1-\alpha_2)}_{\neq 0}\,e^{(\alpha_1-\alpha_n)\,x} \equiv 0$$

Разности не равны нулю, так как все корни различны. Тогда остаётся только $C_1 = 0$, но в самом начале мы сказали, что $C_1 \neq 0$, получаем противоречие.

Значит $C_1 = \cdots = C_n = 0$, следовательно система линено не зависима, и она является ФСР.
■

Пример 16.1.
Дано
$$y''' - 3y'' + 2y' = 0$$
Решение
$$P(\lambda) = \lambda^3 - 3\,\lambda^2 + 2\,\lambda = \lambda\,(\lambda - 1)\,(\lambda - 2)$$
Таким образом, корни $P(\lambda)$
$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = 2$$
Значит ФСР и общее решение выглядят следующим образом
$$\{1, e^x, e^{2x}\} \qquad y = c_1 + c_2\,e^x + c_3\,e^{2x}$$

Замечание 16.2 («Напоминание»).
Характерестический многочлен
$$P(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{k_1}\,\ldots\,(\lambda - \alpha_s)^{k_s}\,(\lambda^2 + p_1\lambda + q_1)^{m_1}\ldots(\lambda^2 + p_t\,\lambda + q_t)^{m_t}$$
разложенный на линейные и квадратиные корни, где

1) $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_s$ *все попарно различные вещественные корни соответствующей кратности* $k_1,\ \ldots,\ k_s \quad s \geqslant 0 \quad s \in \{N \cup \{0\}\}$

2) *Комплексные корни*
$$\lambda^2 + p\,\lambda + q = (\lambda - z_j)\,(\lambda - \bar{z}_j)$$
$$z_j = \alpha_{s+j} + i\,\beta_j \quad \bar{z}_j = \alpha_{s+j} - i\,\beta_j \quad \beta_j \geqslant 0$$
а $(z_j\ \bar{z}_j)$ *— попарно различные пары комплексно сопряжённых корней кратности* $m_j \quad j = 1,\ \ldots,\ t \quad t \geqslant 0 \quad t \in \{N \cup \{0\}\}$

Замечание 16.3. *Это «напоминание», так как оно анлогично критерию кратности из 2-го семестра.*
Замечание потребуется позже.

Лемма 16.1 (о действии линейного ДУ оператора на произведение).

Пусть
$$L(y) = y^{(n)} + a_1\,y^{(n-1)} + a_{n-1}\,y' + \cdots + a_n\,y \qquad y^{(n)} \mapsto \lambda^k \quad y \mapsto 1$$
Характеристический многочлен
$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\,\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

Тогда $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *и* $\forall u(x)$ *– n раз диференцируемой справедлива формула*

$$L(u(x)\,e^{\alpha x}) = e^{\alpha\, x}\,[u(x)\,P(\alpha) + \frac{1}{1!}\,u'(x)\,P'(\alpha) + \\ + \frac{1}{2!}\,u''(x)\,P''(\alpha) + \\ + \cdots + \\ + \frac{1}{n!}\,u^{(n)}(x)\,P^{(n)}(\alpha)]$$

Доказательство.
Докажем случай для n=2,
тогда ЛОДУ и характеристический многочлен принимают следующий вид

$$L(y) = y'' + a_1\,y' + a_2\,y \qquad P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\,\lambda + a_2$$

решение и его производные

$$\begin{aligned} a_2 \mid \quad & y = u\,e^{\alpha x} \\ a_1 \mid \quad & y' = u'\,e^{\alpha x} + u\,\alpha e^{\alpha x} \\ 1 \mid \quad & y'' = u''\,e^{\alpha x} + 2\,u'\,\alpha\,e^{\alpha x} + u\,\alpha^2\,e^{\alpha x} \end{aligned}$$

Складываем всё и получаем

$$\begin{aligned} a_2\,y + a_1\,y' + y'' &= e^{\alpha\,x}\,(a_2\,u + a_1\,u' + a_1\,u\,\alpha + u'' + 2\,u'\,\alpha + u\,\alpha^2) \\ L(y) &= e^{\alpha\,x}\,(a_2\,u + u\,\alpha^2 + a_1\,u\,\alpha + a_1\,u' + 2\,u'\,\alpha + u'') \\ L(y) &= e^{\alpha\,x}\,(u\,(\alpha^2 + a_1\,\alpha + a_2) + u'\,(2\,\alpha + a_1) + u'') \end{aligned}$$

В нашем случае характеристический многочлен и его производные имеют следующий вид

$$\begin{aligned} & P_n(\lambda) = \lambda^2 + a_1\,\lambda + a_2 \\ & P_n'(\lambda) = 2\,\lambda + a_1 \\ & P_n''(\lambda) = 2 \end{aligned}$$

Делаем соответствующие замены в $L(y)$, получаем

$$L(y) = e^{\alpha x}\,\left(P(\alpha) + u'\,P'(\alpha) + \frac{1}{2}\,u^n P''(\alpha)\right)$$

■

Замечание 16.4 (Как работает доказательство в общем случае).
Не требуется на экзамене.
Производные корня раскладываются с помощью биномиальных коэффициентов. Затем аналогичным образом получаем $L(y)$. Потом мы видим, что характеристический многочлен и его производные в общем случае имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
P_n(\lambda) &= \lambda^n + a_1\,\lambda^{n-1} + \dots + a_n \\
P_n'(\lambda) &= n\,\lambda^{n-1} + a_1\;(n-1)\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \\
P_n''(\lambda) &= n\,(n-1)\,\lambda^{n-2} + a_1\,(n-1)\,(n-2)\,\lambda^{n-1} + \dots + 2!\,a_{n-2} \\
&\vdots \\
P_n^{(n)}(\lambda) &= n!
\end{aligned}$$

И из замены в $L(y)$ на формулы выше мы получаем справедливость теоремы в общем случае.

Теорема 16.2.
Пусть α корень кратности $k \geqslant 1$ характеристического многочлена $P(\lambda)$ ЛОДУ

$$L(y) = y^{(n)} + a_1\,y^{(n-1)} + a_{n-1}\,y' + \dots + a_n\,y = 0$$

с постоянными коэффициентами $\alpha_1,\ \dots,\ \alpha_n$
Тогда функции

$$\underbrace{\{e^{\alpha\,x},\ x\,e^{\alpha\,x},\ \dots,\ x^{k-1}\,e^{\alpha\,x}\}}_{k\ \text{штук}}$$

образуют линейно независимую систему решений $L(y) = 0$

Доказательство.
Пусть решение α, имеет вид

$$y = x^l\,e^{\alpha\,x} \qquad 0 \leqslant l \leqslant k-1$$

Тогда производные множителя у корня имеют следующий вид

$$u = x^l,\quad u' = l\,x^{l-1},\quad \dots,\quad u^{(l)} = l!,\quad u^{(l+1)} = 0,\quad \dots,\quad u^{(n)} = 0$$

Значения характеристического многочлена и его производных ведут себя следующим образом.

$$P(\alpha) = 0,\quad \dots,\quad P^{(l)}(\alpha) = 0,\quad P^{(l+1)}(\alpha) = something,\quad \dots,\quad P^{(n)}(\alpha) = something$$

Последнее справедливо по формулировке критерия кратности корня (см. 2 семестр).

По лемме 1 получаем, что корень, включающий произведение, под действием линейного дифференциального оператора будет иметь следующий вид

$$
\begin{aligned}
&L(x^l\, e^{\alpha\, x}) = \\
&= e^{\alpha x} \left(x^l \cdot 0 + \frac{l\, x^{l-1} \cdot 0}{1!} + \dots + \frac{0 \cdot l!}{l!} + \frac{0 \cdot p^{(l+1)}(\alpha)}{(l+1)!} + \dots + \frac{0 \cdot p^{(n)}(\alpha)}{n!} \right) = \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = e^{\alpha x} \cdot 0 = 0
\end{aligned}
$$

Таким образом, получаем что $e^{\alpha\, x}\, x^l$ решение $L(y) = 0$.

Теперь докажем что система ЛНЗ.
Так как $0 \leqslant l \leqslant k-1$ значит

$$C_1\, e^{\alpha\, x} + C_2\, x\, e^{\alpha\, x} + \dots + C_k\, x^{k-1}\, e^{\alpha\, x} = 0$$

так как $e^{\alpha\, x}$ общий множитель и он не равен нулю, тогда очевидно

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad C_1 + C_2\, x + \dots + C_n\, x^{n-1} = 0$$

Сумма будет всегда равна нулю тогда и только тогда, когда

$$C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$$

Таким образом, система

$$\{e^{\alpha\, x},\ x\, e^{\alpha\, x},\ \dots,\ x^{k-1}\, e^{\alpha\, x}\}$$

— является ЛНЗ. ∎

Теорема 16.3 (Вклад в ФСР вещественных корней).
Если в условиях теоремы 2 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ вещественные корни характеристического многочлена $P(\lambda)$ обладают соотвествующими кратностями $k_1, \dots, k_s$ то набор функций

$$\{e^{\alpha_1\, x},\ x\, e^{\alpha_1\, x},\ \dots,\ x^{k_1-1}\, e^{\alpha_1\, x},\ \dots,\ e^{\alpha_s\, x},\ x\, e^{\alpha_s\, x},\ \dots,\ x^{k_s-1}\, e^{\alpha_s\, x}\}$$

образует ЛНЗ систему решений ДУ $L(y) = 0$

Доказательство.
Данные функции являются решениями $L(y) = 0$ (по теореме 2). Таким образом, остаётся доказать их ЛНЗ на $\mathbb{R}$.
Докажем справедливость факта от противного.
Предположим, что линейная комбинация этих функций равна нулю

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P_1(x)\, e^{\alpha_1 x} + \dots + P_s(x)\, e^{\alpha_s x} \equiv 0$$

Также скажем следующее

$$P_1(x) = C_0\, x^k + \dots, \qquad C_0 \neq 0 \qquad k \leqslant k_1 - 1$$

Разделим линейную комбинацию на $e^{\alpha_s x}$, получим

$$P_1(x)\, e^{(\alpha_1 - \alpha_s)\, x} + \dots + P_s(x) \equiv 0 \qquad \deg P_s \leqslant k_s - 1$$

k_s раз диференцируем, получаем

$$Q_1(x)\, e^{(\alpha_1 - \alpha_s)\, x} + \dots + Q_{s-1}(x)\, e^{(\alpha_{s-1} - \alpha_s)\, x} \equiv 0$$

старший коэффициент у многочлена Q_1 равен

$$C_0\, (\alpha_1 - \alpha_s)^{k_s} \neq 0$$

Сама степень многочлена $\deg Q_1 = k$
аналогично для последующих страших кофициентов Q_i.
Повторяем деление и дифференцирование до тех пор пока не получим следующее

$$R_1(x)\, e^{(\alpha_1 - \alpha_s)\, x} \equiv 0$$

где старший коэфициент у R_1 равен

$$C_0\, (\alpha_1 - \alpha_s)^{k_s}\, (\alpha_1 - \alpha_{s-1})^{k_{s-1}}\, \dots\, (\alpha_1 - \alpha_2)^{k_2}$$

Для соблюдения тождества выше должно выполнятся $R_1(x) = 0$ (т.к. второй множитель не может быть равен нулю). Но значение $R_1(x)$ не может быть равно нулю, так как $C_0 \neq 0$, а также $\deg R_1 = k$ (справедливость последнего важна, так как в противном случае значение коэфициента не имело бы значения, т.к. после дифференцирований значение x^β равнялось нулю).
Таким образом, получаем противоречие, значит $P_1 \equiv 0, \dots, P_s \equiv 0$. Следовательно решения ЛНЗ. ■

Пример 16.2. *Дано*
$$y^{(5)} + 2\,y^{(4)} + y^{(3)} = 0$$

Решение.
Характеристический многочлен для этого уравнения следующий

$$P(\lambda) = \lambda^5 + 2\,\lambda^4 + \lambda^3 = \lambda^3(\lambda+1)^2$$

Получаем для него корни α *с кратностями* k

$$\alpha_1 = 0,\ k_1 = 3 \qquad \alpha_2 = -1,\ k_2 = 2$$

Значит ФСР
$$\{1,\ x,\ x^2,\ e^{-x},\ x\,e^{-x}\}$$

А общее решение ЛОДУ

$$y = C_1 + C_2\,x + C_3\,x^2 + (C_4 + C_5\,x)\,e^{-x}$$

17. Случай комплексных корней характеристического многочлена. Общий случай построения ФСР

Определение 17.1 (Комплексное число).

$$\alpha,\ \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha + \beta\, i \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Представление комплексного числа

$$e^{(\alpha+\beta\, i)\, x} = e^{\alpha\, x}\, (\cos(\beta\, x) + i\, \sin(\beta\, x))$$

Замечание

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} + e^{z_2}$$

Определение 17.2.
Пусть

$$u = u(x),\ v = v(x)$$

— функции вещественных переменных x, тогда

$$z = u(x) + i\, v(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

— комплексная функция от вещественных аргументов.
А также

$$(u + i\, v)'_x = u'_x + i\, v'_x$$

Замечание 17.1.

$$L(u + i\, v) = L(u) + i\, L(v)$$

Замечание 17.2.

$$(e^{(\alpha+i\,\beta)\, x})'_x = (\alpha + i\,\beta)\, e^{(\alpha+i\,\beta)\, x}$$

Доказательство.

$$\begin{gathered}(e^{(\alpha+i\,\beta)\, x})'_x = [\text{опр. } 1] = (e^{\alpha\, x}\, \cos(\beta\, x) + i\, e^{\alpha\, x}\, \sin(\beta\, x))'_x = \\ = (e^{\alpha\, x}\, \cos(\beta\, x))'_x + i\, (e^{\alpha\, x}\, \sin(\beta\, x))'_x = \\ = e^{\alpha\, x}\, (\alpha\, \cos(\beta\, x) - \beta\, \sin(\beta\, x)) + i\, e^{\alpha\, x}\, (\alpha\, \sin(\beta\, x) + \beta\, \cos(\beta\, x))\end{gathered}$$

С другой стороны

$$\begin{gathered}(\alpha + i\,\beta)\, e^{(\alpha+i\,\beta)\, x} = [\text{опр. } 1] = (\alpha + i\,\beta)\, e^{\alpha\, x}\, (\cos(\beta\, x) + i\, \sin(\beta\, x)) = \\ = e^{\alpha\, x}\, (\alpha\, \cos(\beta\, x) - \beta\, \sin(\beta\, x)) + i\, e^{\alpha\, x}\, (\alpha\, \sin(\beta\, x) + \beta\, \cos(\beta\, x))\end{gathered}$$

∎

Теорема 17.1.
Пусть $\alpha \pm i\,\beta$ *— пара комплексно сопряжённых корней характеристического многочлена* $P(\lambda)$, $(\beta > 0)$ *кратности* $m \geqslant 1$
ЛОДУ $L(y) = 0$ *с постоянными коэффициентами (как в §12).*
Тогда функции

$$\{e^{\alpha\,x}\,\cos(\beta\,x),\ x\,e^{\alpha\,x}, \cos(\beta\,x),\ \ldots,\ x^{m-1}\,e^{\alpha\,x}, \cos(\beta\,x),$$
$$e^{\alpha\,x}\,\sin(\beta\,x),\ x\,e^{\alpha\,x}, \sin(\beta\,x),\ \ldots,\ x^{m-1}\,e^{\alpha\,x}, \sin(\beta\,x)\}$$

Образуют систему $2\,m$ *линейно независимых решений ЛОДУ* $L(y) = 0$

Доказательство.
Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 из предыдушего параграфа.
По условию
$$L(x^l\,e^{(\alpha+i\,\beta)\,x}) = 0 \qquad 0 \leqslant l \leqslant m-1$$

Тогда корень

$$y = x^l\,e^{(\alpha+i\,\beta)\,x} = x^l\,e^{\alpha\,x}\,(\cos(\alpha) + i\,\sin(\beta\,x)) \qquad 0 \leqslant l \leqslant m-1$$

В более общем виде (по определению 2) корень

$$y = u + i\,v$$

Тогда по свойству линейного оператора для комплексного числа получаем
$$L(u + i\,v) = L(u) + i\,L(v)$$

Так как $L(y) = 0$, то тогда и слагаемые, его состовляющие также равны нулю. Значит

$$u = x^l\,e^{\alpha\,x}\,\cos(\alpha) \qquad v = x^l\,e^{\alpha\,x}\,\sin(\beta\,x)$$

Являются решениями ДУ $L(y) = 0$.
Данные функции ЛНЗ над областью $\mathbb{C}$. Значит тем более функции ЛНЗ над $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. ∎

Теорема 17.2 (Построение ФСР ЛОДУ n-го порядка с $const$ коэф).
Пусть

$$P(\lambda) = (\lambda + \alpha_1)^{k_1}\,\ldots\,(\lambda + \alpha_s)^{k_s}\,(\lambda^2 + p_1\,\lambda + q_1)^{m_1}\,\ldots\,(\lambda^2 + p_t\,\lambda + q_t)^{m_t}$$

характеристический многочлен ЛОДУ n-го порядка с потоянными коэфициентами, который соответсвует следующим уравнениям

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\,\lambda^{n-1} + \cdots + a_n, \quad L(y) = y^n + a_1\,y^{n-1} + \cdots + a_n$$

$\alpha_1\ \ldots,\ \alpha_s$ — попарно различные вещественные корни $P(\lambda)$ кратности $k_1,\ \ldots,\ k_s$ соответственно ($s \geqslant 0$). (Не путать α_i и a_i)
$(\lambda^2 + p\,\lambda + q)^m = (\lambda - z)\,(\lambda - \bar{z})$ пары $(z_1, \bar{z_1}) \ldots (z_t, \bar{z}_t)$ — все попарно различные корни кратности $m_1,\ \ldots,\ m_t$ соответственно ($t \geqslant 0$)

Замечание по поводу условия $\beta > 0$.

$$z_j = \alpha_{s+j} + i\,\beta_j \quad \beta_j > 0 \quad \bar{z_j} = \alpha_{s+j} - i\,\beta_j$$

Тогда

1) *Если $\alpha \in \mathbb{R}$, корнень кратности k, для $P\lambda$, тогда*

$$\{e^{\alpha\,x},\ x\,e^{\alpha\,x},\ \ldots,\ x^{k-1}\,e^{\alpha\,x}\}$$

2) *Если $\alpha{\pm}i\,\beta$, пара комплексно сопряжённых корней кратности $m \geqslant 1$, тогда*

$$\begin{gathered}\{e^{\alpha\,x}\,\cos(\beta\,x),\ x\,e^{\alpha\,x}\,\cos(\beta\,x),\ \ldots,\ x^{m-1}\,e^{\alpha\,x}\,\cos(\beta\,x),\\ e^{\alpha\,x}\,\sin(\beta\,x),\ x\,e^{\alpha\,x}\,\sin(\beta\,x),\ \ldots,\ x^{m-1}\,e^{\alpha\,x}\,\sin(\beta\,x)\}\end{gathered}$$

Всего будет $k_1{+}\cdots{+}k_s{+}2\,m_1{+}\cdots{+}2\,m_t = n$ решений. Все они образуют ФСР $L(y) = 0$

Доказательство.
Все эти n функций являются решением $L(y) = 0$. Их количество равно порядку ДУ $L(y) = 0$. Эти функции образуют ЛНЗ систему, так как функции

$$e^{\alpha_1\,x},\ \ldots,\ x^{k_1-1}\,e^{\alpha_1\,x},\ \ldots,\ e^{(\alpha_{s+1} \pm i\,\beta_1)\,x},\ \ldots,\ e^{(\alpha_{s+t} \pm i\,\beta_t)}\,x^{m_t-1}$$

ЛНЗ на $\mathbb{C}$, следовательно они ЛНЗ на $\mathbb{R}$. Таким образом они образуют ФСР (т.к. мы рассмотрели все три критерия). ■

Пример 17.1.
Дано

$$P(\lambda) = \lambda^2\,(\lambda-2)^3\,(\lambda+1)^4\,(\lambda^2 + 2\,\lambda + 2)^2$$

Решение.
Видим, что корни характеристического многочлена имеют соответствующие кратности

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 = 0 & \alpha_2 = 2 & \alpha_3 = -1 & \alpha \pm i\,\beta = -2 \pm i \\ k_1 = 2 & k_2 = 3 & k_3 = 4 & m_1 = 2 \end{array}$$

Тогда ФСР

$$\{1,\ x,\ e^{2\,x},\ x\,e^{2\,x},\ x^2\,e^{2\,x},\ e^{-x},\ x\,e^{-x},\ x^2\,e^{-x},\ x^3\,e^{-x},\\ e^{-2\,x}\,\cos(x),\ e^{-2\,x}\,\sin(x),\ x\,e^{-2\,x}\,\cos(x),\ x\,e^{-2\,x}\,\sin(x)\}$$

$$n = k_1 + k_2 + k_3 + m_1 = 2 + 3 + 4 + 2 \cdot 2 = 13$$

Тогда общее решение выглядит так

$$y = C_1 + C_2\,x + (C_3 + C_4\,x + C_5\,x^2)\,e^{2\,x} + (C_6 + C_7\,x + C_8\,x^2 + C_9\,x^3)\,e^{-x} +\\ + (C_{10} + C_{11}\,x)\,e^{-2\,x}\,\cos(x) + (C_{12} + C_{13}\,x)\,e^{-2\,x}\,\sin(x)$$

18. Метод неопределённых коэф. для отыскания частного решения ЛОДУ n-го порядка с пост. коэф.

В параграфе рассмотрим уравнения вида

$$L(y) = P_m(x)e^{\alpha x} \quad L(y) = P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x \quad L(y) = Q_m(x)e^{\alpha x}\sin x$$

Теорема 18.1 (О суперпозиции частных решений). *Пусть* $y_1(x),\ \ldots,\ y_k(x)$ *- это частные решения соответствующих (1 к 1) ЛНДУ вида* $L(y) = f_1(x),\ \ldots,\ L(y) = f_k(x)$

Тогда для ЛНДУ вида

$$L(y) = A_1\, f_1(x) + \cdots + A_k\, f_k(x) \qquad A_1,\ \ldots,\ A_k \in \mathbb{R}$$

имеет частное решение вида

$$y = A_1\, y_1(x) + \cdots + A_k\, y_k(x)$$

Доказательство. Дано:

$$L(y) = f_1(x),\ \ldots,\ L(y) = f_k(x)$$

Тогда свойству линейного оператора

$$L(A_1\, y_1(x) + \cdots + A_k\, y_k(x)) = A_1\, L(y_1) + \cdots + A_k\, L(y_k) = A_1\, f_1(x) + \cdots + A_k\, f_k(x)$$

■

Лемма 18.1 (Алгебраическая). *Пусть*

$$Q_m(x) = C_0\, x^m + C_1\, x^{m-1} + \cdots + C_m \qquad C_0 \neq 0$$

многочлен степени $m \geqslant 0$.

Тогда для любых чисел $\delta_0 \neq 0, \delta_1,\ \ldots,\ \delta_n$ *существует многочлен*

$$u(x) = u_m(x) = A_0\, x^m + \cdots + A_n$$

степени m *для которого*

$$\delta_0\, u + \delta_1\, u' + \cdots + \delta_n\, u^{(n)} = Q_m(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

То есть

$$C_0\, x^m + C_1\, x^{m-1} + \cdots + C_m \equiv \delta_0\, u + \delta_1\, u' + \cdots + \delta_n\, u^{(n)}$$

Доказательство. Для доказательства достаточно рассмотреть случай $m = n$ так как

1) если $n < m$, то возьмём набор (так как числа любые по условию)

$$\delta_{n+1} = \cdots = \delta_m = 0$$

тогда многочлен $u_m(x)$ содержит n слагаемых

2) если $n > m$, то

$$u^{(m+1)} = 0, \; \ldots, \; u^{(n)} = 0$$

так как многочлен $Q(x)$ степни m (по условию). Это всё значит, что

$$\delta_0 \, u + \delta_1 \, u' + \cdots + \delta_n \, u^{(n)} \equiv Q_m(x)$$

два случая выше сводятся к $m = n$.
Для начала выразим коэфициенты $C_m, \; \ldots, \; C_1$ из $Q_m(x)$, получим

$$C_m = Q_m(x), \quad 1! \, C_{m-1} = Q'_m(x), \quad \ldots, \quad m! \, C_0 = Q^{(m)}(x)$$

Примечание. Последние не нулевые слагаемые у производных дают коэфициент в виде на постоянной $_i$ умноженной на факториал (из-за взятия производной у x^i)

Также по условию для $Q(x)$ и его производных существуют такие равенства

$$\begin{aligned}
Q_m(x) &= \delta_0 \, u(x) + \delta_1 \, u'(x) + \cdots + \delta_m \, u^{(m)}(x) \\
Q'_m(x) &= \delta_0 \, u'(x) + \delta_1 \, u''(x) + \cdots + \delta_{m-1} \, u^{(m)}(x) + 0 \\
&\vdots \\
Q_m^{(m)}(x) &= \delta_0 \, u^{(m)}(x)
\end{aligned}$$

Если мы подставим в качестве аргумента ноль в функцию $u(x)$ и аналогично способу выше выразим $A_m, \; \ldots, \; A_0$, то получим

$$A_m = u(0), \quad 1! \, A_{m-1} = u'(0), \quad \ldots, \quad m! \, A_0 = u^{(m!)}(0)$$

Теперь объединим всё таким образом, чтобы остались только $C_i, \; \delta_i, \; A_i$, получим систему

$$\begin{cases}
C_m = \delta_0 \, A_m + \delta_1 \, A_{m-1} + \cdots + m! \, \delta_m \, A_0 \\
1! \, C_{m-1} = 1! \, \delta_0 \, A_{m-1} + \delta_1 \, A_{m-1} + \cdots + m! \, \delta_{m-1} \, A_0 \\
\vdots \\
m! \, C_0 = m! \, \delta_0 \, A_0
\end{cases}$$

это алгебраическая система из $(m+1)$ уравнений относительно $(m+1)$ переменных $A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_m$ и определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \delta_0 & * & * & * \\ 0 & 1!\,\delta_0 & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & m!\,\delta_m \end{vmatrix} = [\text{по свойству треугольной матрицы}] = \delta_0^{(m+1)}\,1!\,2!\,\ldots\,m!$$

Так как $\delta_0 \neq 0$ (по условию), то $\Delta \neq 0$. Тогда по теореме Крамера существует единственное решение в виде $A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_m$ и

$$\exists u(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \delta_0\,u + \delta_1\,u' + \cdots + \delta_n\,us^{(n)} = Q_m(x)$$

■

Теорема 18.2. *Пусть*

$$L(y) = y^{(n)} + \alpha_1\,y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_n\,y = Q_m(x)\,e^{\alpha\,x}$$

ЛНДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами $a_1,\ \ldots,\ a_n$ и правой частью специального вида $Q_m(x)\,e^{\alpha\,x}$, где

$$Q_m(x) = C_0\,x^m + C_1\,x^{m-1} + \cdots + C_m \qquad C_0 \neq 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

— многочлен степени $m \geqslant 0$.

Обозначим через $P(\lambda)$ характеристический многочлен этого ДУ и положим $k = 0$, если $P(\alpha) \neq 0$ и k - кратность корня характеристического многочлена $P(\lambda)$, если $P(\alpha) = 0$

Тогда существует многочлен $u(x) = A_0\,x^m + \cdots + A_m$ степени m для которого
$y = x^k\,e^{\alpha x}\,u(x)$ является часть решения ЛНДУ $L(y) = Q_m(x)\,e^{\alpha\,x}$

Доказательство. Так как k описывает кратность корня характеристического многочлена, то чевидно, что по критерию кратности корня следует

- Если $k = 0$, то $P(\alpha) \neq 0$
- Если $k \geqslant 1$, то $P(\alpha) = 0,\ \ldots,\ P^{(k-1)}(\alpha) = 0,\ P^{(k)} \neq 0$

Как получили равентсво ниже? (Похоже на пар.12 т.2)

$$L(V(x)\,e^{\alpha\,x}) = e^{\alpha\,x}\,(V(x)\,P(\alpha) + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}\,V^{(k-1)}(x)\,P^{(k-1)}(\alpha) + \\ + \frac{1}{k!}\,V^{(k)}(x)\,P^{(k)}(\alpha) + \cdots + \frac{1}{n}\,V^{(n)}(x)\,P^{(n)}(\alpha))$$

Обозначим

$$\delta_0 = \frac{1}{k!}\,P^{(k)}(\alpha) \neq 0, \quad \delta_1 = \frac{1}{(k+1)!}\,P^{(k+1)}(\alpha) \neq 0, \quad \ldots, \quad \delta_{n-k} = \frac{1}{n!}\,P^{(n)}(\alpha)$$

тогда по лемме выше получаем

$$\exists \omega(x) = B_0\,x^m + \cdots + B_m \\ \forall x \subset R \quad \delta_0\,\omega(x) + \delta_1\,\omega'(x) + \cdots + \delta_{n-k}\,\omega^{(n-k)}(x) = Q_m(x)$$

Или последнее равенство в другом виде

$$L(V(x)\,e^{\alpha\,x}) = e^{\alpha\,x}\,(\delta_0\,\omega + \delta_1\,\omega' + \cdots + \delta_{n-k}\,\omega^{(n-k)})$$

Тогда нетрудно заметить, что $V^{(k)}(x) = \omega(x)$. Также знаем, что (Откуда?)

$$V|_{x=x_0} = 0, \quad \ldots, \quad V^{(k-1)}|_{x=x_0} = 0$$

Тогда

$$V(x) = A_0\,x^{m+k} + \cdots + A_m\,x^k = x^k\,u(x) \qquad u(x) = A_1\,x^m + \cdots + A_m$$

Таким обазом

$$L(x^k\,u(x)\,e^{\alpha\,x}) = e^{\alpha\,x}(\delta_0\,\omega(x) + \delta_1\,\omega'(x) + \cdots + \delta_{n-k}\,\omega^{(n-k)}(x)) = e^{\alpha\,x}\,Q_m(x) \\ (\forall x \in \mathbb{R})$$

Значит $y = x^k\,u(x)\,e^{\alpha\,x}$ — частное решение $L(y) = Q_m\,e^{\alpha\,x}$

■

Пример 18.1. *Дано:*

$$y'' - 2\,y' + y = 12\,x\,e^x$$

Решение:

$$L(y) = Q_1(x)\,e^x \\ Q_1(x) = 12\,x, \quad \alpha = 1, \quad m = 1$$

1) Решаем однородное

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\,\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$
$$\lambda_1 = 1, \quad k_1 = 2$$
$$\lambda = \lambda_1 \quad \Rightarrow \quad k = 2$$
$$y_{o.o} = C_1\, e^x + C_2\, x\, e^x$$

2) Из шага 1 знаем, что $k = 2$, также из условия $m = 1, \quad \alpha = 1$. По теореме 2 получаем следующее решение

$$\psi(x) = x^2\,(A\,x + B)\,e^x$$

$$\begin{array}{lll} V = A\,x^3 + B\,x^2 & p = (\lambda - 1)^2 & = 0 \\ V' = 3\,A\,x^2 + 2B\,x & \dfrac{p'}{1!} = 2\,(\lambda - 1) & = 0 \\ V'' = 6\,A\,x + 2\,B & \dfrac{p''}{2!} = 1 & = 1 \\ & & \textit{столбец при } \lambda = 1 \end{array}$$

$$L(V e^x) = e^x\,(0 \cdot 0 + V' \cdot 0 + (6\,A\,x + 2\,B) \cdot 1) = 12\,x\,e^x$$
$$6\,A\,x + 2\,B = 12\,x \quad \Rightarrow \quad A = 2,\ B = 0$$

Значит частное неоднородное решение

$$\psi(x) = 2\,x^3\,e^x = y_{ч.н}$$

3) Таким образом общее решение

$$y = (2\,x^3 + C_1 + C_2\,x)e^x$$

Теорема 18.3. *Пусть*

$$L(y) = y^{(n)} + \alpha_1\,y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_n\,y = Q_m(x)\,\cos(\beta\,x) + R_m(x)\,e^{\beta\,x}$$

где $Q_m(x),\ R_m(x)$ - многочлены степени $\leqslant m$,

$$\alpha + \beta\,i \in \mathbb{C}, \quad \beta \neq 0$$

Если

$$P(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1\,\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_n$$

— характеристичекий многочлен то

- *если $k = 0$, то*

$$P(\alpha + \beta i) \neq 0$$

- k — *кратность корня* $\alpha + \beta i$, *если* $P(\alpha+\beta i) = 0$

То тогда

$$\exists \quad u(x) = A_0\, x^m + \dots + A_m, \quad v(x) = B_0\, x^m + \dots + B_m$$

— *многочлены степени* $\leqslant m$ *для которых*

$$\psi(x) = x^k\, e^{\alpha\, x} (u(x)\, \cos(\beta\, x) + V\, \sin(\beta\, x))$$

является решением ЛНДУ

$$L(y) = e^{\alpha\, x}\, (Q_m(x)\, \cos(\beta\, x) + R_m(x)\, \sin(\beta\, x))$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательное ДУ

$$L(y) = (Q_m - i\, R_m)\, e^{(\alpha + i\, \beta)\, x}$$
$$\mathrm{Re}(Q_m - i\, R_m)\, e^{(\alpha+\beta\, i)\, x} = e^{\alpha\, x} (Q_m\, \cos(\alpha\, x) + R_m\, \sin(\beta\, x))$$

По предыдущей теореме 2, следует что существуют мн-ны степени $\leqslant m$,

$$u(x) - \omega(x) = \underbrace{x^m + \dots + A_m}_{u} - i\, \underbrace{(B_0\, x^m + \dots + B_m)}_{v}$$

такой что

$$y(x) = x^k\, (u - i\, v)\, e^{(\alpha+\beta\, i)\, x}$$

является решением вспомогательного уравнения

$$L(y) = (Q_m - i\, R_m)\, e^{(\alpha+\beta\, i)\, x}$$

Непонятно!

$$\psi(x) - \mathrm{Re}(y(x)) = x^k e^{\alpha x} (u(x) cos \beta x + V(x) sin \beta x)$$

является решением

$$L(y) = Re(Q_m - i R_m) e^{(\alpha+\beta i)} x = e^{\alpha x} (Q_m cos \alpha x + Q_m sin \beta x)$$

■

Пример 18.2. *Дано:*

$$y'' - 2y' + y = 4\, x\, \cos(x)$$

Решение:
Разобрать!!!

1) Ищем общее однородное

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 1$$
$$\lambda_{1,\,2} = \alpha \pm i\,\beta = \pm i \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1 \quad k_{1,\,2} = 1$$
$$y_{o.o} = C_1\,\cos(x) + C_2\,\sin(x)$$

2) Ищем частное решение $y'' + y = 4\,x\,\cos(x)$

$$m = 1, \quad \alpha \pm \beta i = \pm i, \quad k = 1$$
$$\psi(x) = x\,(A\,x + B)\,e^{i\,x} = u\,e^{i\,x}$$
$$L(ue^{i\,x}) = e^{i\,x}(u\,P(i) + u'\,p'(i) + \frac{u''}{2}\,P''(i))$$
$$\begin{array}{lll} u = Ax^2 + Bx & p = \lambda^2 + 1 & = 0 \\ u' = 2Ax + B & p' = 2\lambda & = 2 \\ V'' = 2A & \dfrac{p''}{2} = 1 & = 1 \\ & & \lambda = 1 \end{array}$$
$$L(u\,e^{ix}) = e^{i\,x}((u\,A\,i + 2\,B)2\,A) = 4\,x\,e^{i\,x}$$
$$4\,A_i = 4, \quad A = -i, \quad B = 1$$
$$\Rightarrow y_{.} = (-i\,x^2 + x)(\cos(\alpha) + i\,\sin(x))$$
$$\psi = Re\,y_{.} = x\,\cos(x) + x^2\,\sin(x)$$

3) Таким образом общее решение

$$y = x\,\cos(x) + x^2\,\sin(x) + C_1\,\cos(x) + C_2\,\sin(x)$$

19. Системы обыкновенных ДУ

Определение 19.1.
Система уравнений вида

$$F_i(x,\ y_1,\ y_1',\ \dots,\ y_1^{m_1},\ \dots,\ y_n,\ y_n',\ \dots,\ y_n^{m_n}) \equiv 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ n)$$

называют системой обыкновенных ДУ порядка $m = \max\{m_1,\ \dots,\ m_n\}$ *относительно функций* $y_1 = y_1(x),\ \dots,\ y_n = y_n(x)$. *Набор функций* $\{y_1,\ \dots,\ y_n\}$ *называется решением ДУ если при подстановке*

$$F_i(x,\ y_1,\ y_1',\ \dots,\ y_1^{m_1},\ \dots,\ y_n,\ y_n',\ \dots,\ y_1^{m_n}) \overset{(x)}{\equiv} 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ n)$$

то есть получается система верных функциональных тождеств

Теорема 19.1.
Всякая система ДУ из определения 1 эквивалентна некоторой системе обыкновенных ДУ 1-го порядка

Доказательство.
Введём

$$\begin{array}{llll}
z_{1,1} = y_1 & z_{1,2} = y_1' & \dots & z_{1,m_1} = y_1^{(m_1-1)} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
z_{n,1} = y_n & z_{n,2} = y_n' & \dots & z_{n,m_n} = y_n^{(m_n-1)}
\end{array}$$

Примечание. Всего получим $N = \sum_{i=1}^{n} m_i$ функций.
Таким образом, после замены на z получаем

$$F_i(x,\ z_{1,1},\ z_{1,2},\ \dots,\ z_{1,m_1},\ z_{1,m_1}',\ \dots,\ z_{n,1},\ z_{n,2},\ \dots,\ z_{n,m_n},\ z_{n,m_n}') \equiv 0$$
$$(i = 1,\ 2,\ \dots,\ n)$$

Мы знаем, что $z_{i,1},\ z_{i,2}$ связаны межу собой и другими $z_{i,j}$, тогда

$$\begin{cases} z_{i,j}' = z_{i,j+1} \qquad 1 \leqslant i \leqslant n \quad 1 \leqslant j \leqslant m_i - 1 \\ F_i = 0 \end{cases}$$

Таким образом мы получили систему обыкновенных ДУ первого порядка относительно $z_{i,j}$ ■

Определение 19.2.
Система ДУ вида

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n) \\ \ldots \\ y_n' = f_n(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n) \end{cases}$$

Называют нормальной системой обыкновенных ДУ 1-го порядка

Замечание 19.1.
Введём

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \vec{y'} = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Тогда систему из определения выше можно описать так

$$\vec{y'} = \vec{f}(x,\ \vec{y})$$

Пример 19.1.
Дано

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + p_2(x)\, y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}\, y' + p_n(x)\, y = f(x)$$

Требуется перейти к нормальной ситеме обыкновенных ДУ 1-го порядка.
Решение.
Введём следующие функции

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad \ldots, \quad y_n = y^{(n-1)}$$

Тогда ответ

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = \ldots\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = \ldots\ \ldots\ y_n \\ y_n' = -p_n\, y_1 - p_{n-1}\, y_2 - \cdots - p_1\, y_n + f(x) \end{cases}$$

Теорема 19.2.
Пусть

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n) \end{cases}$$

— *нормальная система относительно n фукций $y_1,\ \ldots,\ y_n$ первого порядка*

Тогда если функции

$$f_1,\ \ldots,\ f_n, \qquad \frac{\delta f_i}{\delta y_j} \quad 1 \leqslant i \leqslant n \quad 1 \leqslant j \leqslant n$$

непрерывны в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, а $M_0(x_0,\ y_1^0,\ \ldots,\ y_n^0)$ — внутренняя точка области D, то $\exists \delta > 0$ и существует единственное решение

$$(y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x)) \qquad x \in U_\delta(x_0)$$

удовлетворяющее следующим условиям задачи Коши

$$\begin{cases} \vec{y'} = \vec{f}'(x,\ \vec{y}) \\ \vec{y}|_{x=x_0} = \vec{y_0} = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Доказательство. Без доказательств ∎

Замечание 19.2 (Как построить инетгральную кривую). *Выведем систему ДУ «в дифференциалах». Для этого рассмотрим*

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n) \end{cases}$$

в сокращенном виде

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, \vec{y}) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, \vec{y}) \end{cases}$$

Воспользуемся $dy_i = y_i'(x)\,dx$, получим

$$dx = \frac{dy_1}{f_1(x, \vec{y})} = \cdots = \frac{dy_n}{f_n(x, \vec{y})}$$

или

$$1 = \frac{y_1'}{f_1(x, \vec{y})} = \cdots = \frac{y_n'}{f_n(x, \vec{y})}$$

Если интегральная кривая L проходит через точку $M_0(x_0,\ y_1^0,\ \ldots,\ y_n^0)$ то касательные к ней удовлетворяют системе линеных алгебраических уравнений

$$X - x_0 = \frac{Y_1 - y_1^0}{f_1(M_0)} = \cdots = \frac{Y_n - y_n^0}{f_n(M_0)}$$

Замечание 19.3.
Систему ДУ можно свести к уравнению высокого порядка относительно одной функции с помощью метода исключения неизвестной.

Пример 19.2. *Дано*

$$\begin{cases} y' = x + z \\ z' = x + 2\,y + z \end{cases} \qquad \text{Найти } (y(x),\ z(x))$$

Решение.
Продиференцируем первое уравнение по x, а также выразим из него z, получим

$$\begin{cases} y'' = 1 + z' = [z' = x + 2\,y + z] = 1 + x + 2\,y + z \\ z = y' - x \end{cases}$$

Заменяем (и исключаем) z получаем

$$y'' = 1 + x + 2\,y + y' - x$$
$$y'' - y' - 2\,y = 1$$

Таким образом, получили ЛНДУ. Решаем сначала соотвествующее однородное

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)\,(\lambda - 2)$$
$$\alpha_1 = -1 \quad \alpha_2 = 2 \quad k_{1,2} = 1$$

Получаем ФСР $\{e^{-x},\ e^{2\,x}\}$ и тогда,

$$y_{o.o.} = C_1\,e^{-x} + C_2\,e^{2x}$$

Теперь решаем неоднородное, по условию видим

$$\alpha = 0, \quad k = 0, \quad m = 0$$

Пусть

$$y = A, \quad \Rightarrow \quad y' = 0,\ y'' = 0$$
$$-2\,A = 1 \quad A = -\frac{1}{2}$$

Таким образом, ответ

$$
\begin{aligned}
&y = -\frac{1}{2} + C_1\, e^{-x} + C_2\, e^{2\,x}\\
&z = y' - x = -x - C_1\, e^{-x} + 2\, C_2\, e^{2\,x}
\end{aligned}
$$

20. Система линейных ДУ

Определение 20.1. *Пусть для функций справедливо*

$$P_{i\,j}(x) \in C_{(a;\,b)} \qquad f_1(x),\ \ldots,\ f_n(x) \in C_{(a;\,b)}$$

Тогда система ДУ вида

$$\begin{cases} y_1' = P_{1\,1}(x)\,y_1 + \cdots + P_{1\,n}(x)\,y_n + f_1(x) \\ \ldots \\ y_1' = P_{n\,1}(x)\,y_1 + \cdots + P_{n\,n}(x)\,y_n + f_n(x) \end{cases}$$

называется линейной системой относительно n неизвестных функций $(y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x))$

Замечание 20.1. *Для краткости записи введём*

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \vec{y'} = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad P(x) = \begin{pmatrix} P_{1\,1}(x) & \ldots & P_{1\,n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n\,1}(x) & \ldots & P_{n\,n}(x) \end{pmatrix}$$

где $f(\vec{x})$ *— столбец правых частей, а* $P(x)$ *— матрица коэфициентов. Таким образом система ДУ из определения 1 имеет вид*

$$\vec{y'} = P(x)\,\vec{y} + \vec{f}(x)$$

Теорема 20.1. *В условиях определения 1*

$$\forall x_0 \in (a;\,b) \quad \forall \vec{y_0} = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix}$$

существует единственное решение

$$\vec{y} = \vec{y}(x) \quad x \in (a;\,b)$$

задачи Коши

$$\begin{cases} \vec{y'} = P(x)\,\vec{y} + \vec{f}(x) \\ \vec{y}|_{x=x_0} = \vec{y_0} \end{cases}$$

Доказательство. Без доказательств ■

Определение 20.2. *Пусть*

$$\{\vec{y_1}(x) \;\; \ldots, \; \vec{y_k}(x)\}$$

система функций в R^n *причём*

$$\vec{y_i}(x) = \begin{pmatrix} y_{i\,1} \\ \vdots \\ y_{i\,n} \end{pmatrix} \qquad x \in (a;\, b)$$

Тогда

- *система линейно зависима на интервале* $(a;\, b)$
  Другими словами

$$\exists \alpha_1, \, \ldots, \, \alpha_n \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \neq 0 \qquad \forall x \in (a;\, b) \quad \alpha_1 \, \vec{y_1} + \cdots + \alpha_k \, \vec{y_k} = 0$$

- *Во всех остальных случаях система линейно не зависима на интервале*

Определение 20.3. *Пусть*

$$\vec{y'} = P(x) \, \vec{y}$$

— однородная система линейных ДУ, где $P(x)$ *— матрица коэфициентов, каждый из которых* $\in C_(a;\, b)$.

Тогда

$$\{\vec{y_1}(x), \; \ldots, \; \vec{y_n}(x)\}$$

— ФСР для $\vec{y'} = P(x) \, \vec{y}$, *если*

1) $\forall i \in (1, \, \ldots, \, n) \quad \vec{y_i'} = P(x) \, \vec{y_i} \qquad (\forall x \in (a;\, b))$

2) *Количество векторов системы решений соответствует порядку матрицы* $P(x)$

3) *Система лиенейно независима на* $(a;\, b)$

Теорема 20.2. *Пусть*

$$\vec{y'} = P(x) \, \vec{y} + \vec{f}(x)$$

— система линейных ДУ (как в определении 1)

Тогда существует ФСР $\{\vec{y_1}(x),\ \ldots,\ \vec{y_n}(x)\}$ *соответствующая линейному однородному ДУ* $\vec{y}' = P(x)\,\vec{y}$ *и решения* $\vec{\psi}(x)$*, такие что*

$$\vec{y} = \vec{\psi}(x) + C_1\,\vec{y_1}(x) + \cdots + C_n\,\vec{y_n}(x)$$

описывает множество всех решений данной системы линейных ДУ, где $C_1,\ \ldots,\ C_n$ *— произволные постоянные*

Доказательство. Без доказательств ∎

21. Система линейных ДУ с const коэф.

Определение 21.1. *Система вида*

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}\, y_1 + \dots + a_{1n}\, y_n + f_1(x) \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}\, y_1 + \dots + a_{nn}\, y_n + f_n(x) \end{cases}$$

называется системой из n ЛДУ с постоянными коэфинциентами.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— *матрица коэфициентов*

Замечание 21.1.
Система из определения 1 сводится для каждой функции $y_i'(x)$ к ЛДУ n-го порядка

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = e^{\alpha x} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \vec{y'} = \alpha\, \vec{b}\, e^{\alpha\, x} \qquad \alpha\, \vec{b}\, e^{\alpha\, x} = A\, \vec{b}\, e^{\alpha\, x}$$

$$\Rightarrow \quad A\, \vec{b} = \alpha\, \vec{b}$$

Таким образом $\vec{b}$ собственный вектор, α собственное значение матрицы A, $\det(A - \alpha\, E) = 0$

$$(-1)^n\, det(A - \lambda\, E) = P_n(\lambda) = \lambda^n + p_1\, \lambda^{n-1} + \dots + p_n$$

— *характеристический многочлен.*

Замечание 21.2.
Если $\alpha_1\ \dots\ \alpha_n \in \mathbb{R}$ — попарно различные корни характеристического многочленана (т.е. собственное значение матрицы A) $\vec{b_1},\ \dots,\ \vec{b_n}$ соотвествующие собственные векторы. Тогда

$$y = C_1\, \vec{b_1}\, e^{\alpha_1\, x} + \dots + C_n\, \vec{b_n}\, e^{\alpha_n\, x}$$

— *общее решение линейной диференциальной системой $\vec{y'} = A\, \vec{y}$*

Пример ниже не разобран. Есть множество вопросов по решению. Не понятен ход действий.

Пример 21.1.
Дано

$$y_1 = y_1(t), \quad y_2 = y_2(t)$$
$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + 3\,t \\ y_2' = -4\,y_1 + y_2 + t\,e^{-t} \end{cases}$$

Решение.
Сначала рассматриваем соотвествующую однородную систему. Получаем следующий характеристический многочлен.

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 4 = (\lambda+1)(\lambda-3)$$

Его решения с кратностями

$$\alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 3, \quad k_{1,2} = 1$$

Ищем собственный вектор для $\lambda = \alpha_1 = -1$*. Получаем*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\,\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 0\,\alpha_1 + 0\,\alpha_2 = 0 \end{cases} \qquad 2\,\alpha = \beta$$

Таким образом собственный вектор

$$\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Частное решение

$$\vec{\varphi_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Аналогично для $\lambda = \alpha_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -2\beta_1 = \beta_2$$

Значение собственного вектора и частное решение

$$\vec{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{\varphi_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{3t}$$

Таким образом решение для однородной системы

$$\vec{y_{o.o.}} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{3\,t}$$

$$y_1'' = y_1' - y_2' + 3 = y_1' + 4\,y_2 - y_2 - t\,e^{-t} + 3 =$$
$$= y_1' + 4\,y_1 - y_1 + y_1' - 3\,t + 3 - t\,e^{-t}$$

Для нахождения значения y_1'' *использовали следующие равенства*

$$y_2 = y_1 - y_1' + 3\,t \quad \Leftrightarrow \quad y_1' = y_1 - y_2 + 3\,t$$
$$y_2' = -4\,y_1 + y_2 + t\,e^{-t}$$

Продолжаем дальше

$$L(y_1) = y_1'' - 2y_1' - 3y_1 = 3 - 3t - te^{-t}$$
$$P_2(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3(\lambda+1)(\lambda-3)$$
$$L(y) = 3 - 3t = Q_m(t)e^{\alpha t}, \quad m = 1, \alpha = 0, k = 0$$
$$\Psi_1 = At + Bs$$
$$\Psi_1' = A$$
$$\Psi_1 = t - \frac{5}{3}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - \lambda - 3 \\ 2\,\lambda - 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} = 3 \\ = 2 \end{matrix}$$

$$L(\Psi_1) = -3At - 3B - 2A = 3 - 3t, A = 1, B = -\frac{5}{3}$$
$$L(y) = -t\,e^{-t},\ m = 1,\ \alpha = -1,\ k = 1$$
$$\Psi_2 = (A\,t^2 + B\,t)\,e^{-t} = u\,e^{-t} \qquad \text{где} \quad u = A\,t^2 + B\,t$$
$$u' = 2\,A\,t + B \quad u'' = 2\,A \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - \lambda - 3 \quad (0)$$

$=>; 2\lambda - 2(-4); (1)$
$L(\Psi_2) = e^{-t}(-8At - 4B + 2A) = te^{-t} =>$
$-8A = 1 => A = \frac{-1}{8}$
$2A - 4B = 0 => B = \frac{1}{16}$
$\Psi_2 = frac116(2t^2 + t)e^{-t}$
$y_1 = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} + t - \frac{5}{3} - \frac{1}{16}(2t^2 + t)e^{-t}$
$y_1' = -c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{3t} + 1 - \frac{1}{16}(-2t + t + 1)e^{-t}$
$y_2 = y_1 - y_1' + 3t$

$$\begin{cases} y_2 = 2c_1 e^{-t} - 2ce^{3t} + 4t - \frac{8}{3} - \frac{1}{16}(4t^2 - 2t + 1)e^{-t} \\ y_1 = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} + t - \frac{5}{3} - \frac{1}{16}(2t^2 + t)e^{-t} \end{cases}$$

Часть III

Числовые ряды

22. Основные определения

Замечание 22.1 (Некоторые случаи рядов).
Вещественное число можно представить в следующем виде

$$x \in \mathbb{R},\ x = A, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$

где

$$a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}, \quad A \in \mathbb{Z}$$

Также запись выше эквивалентна следующему выражению

$$x = A + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots$$

Из этого можно выделить конечную десятичную дробь

$$x_n = A, a_1\, a_2\, \ldots\, a_n \in \mathbb{Q}$$

Связь рационального и действительного числа

$$\exists \lim_{n \to +\infty} x_n = x$$

Рассмотрим следующий случай (вывод убывающей геом. прогрессии). Пусть

$$b_n = b_1\, q^{n-1} \qquad |q| < 1$$

тогда

$$\begin{aligned}
S_n &= b_1 + \cdots + b_n \\
S_n &= b_1 + q\,(b_1 + b_1\, q + \cdots + b_1\, q^{n-2}) \\
S_n &= b_1 + q\,(b_1 + b_1\, q + \cdots + b_1\, q^{n-2} + b_1\, q^{n-1}) - b_1\, q^n \\
S_n &= b_1 + q\, S_n - b_1\, q^n \\
S_n\,(1-q) &= b_1\,(1 - q^n) \\
S_n &= b_1\, \frac{1-q^n}{1-q}
\end{aligned}$$

Зная что $|q| < 1$, получаем

$$b_1\, \frac{1-q^n}{1-q} \to \frac{b_1}{1-q} \quad (n \to +\infty)$$

Значит, формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогресси равна

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_1 \, q^{n-1} = \frac{b_1}{1-q}$$

Определение 22.1 (Числовой ряд).
Пусть $\{a_n\}$ — последовательность чисел, $a_n \in \mathbb{R}$. Тогда формальное выражение

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

называется числовым рядом, где

$$a_1, \; a_2, \; \dots, \; a_n$$

— члены ряда, а функция $n \mapsto a_n$ называется общим членом ряда.

Определение 22.2.
Пусть a_n - числовой ряд. Тогда:

1) *n-ная частичная сумма ряда имеет вид*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

2) *Если*

$$\exists \lim_{n \to +\infty} a_n = S$$

то ряд называется сходящимся и S — его сумма. Пишем

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

3) *Если $\nexists \lim S_n$, в частности предел равен ∞, то ряд расходящийся и такой ряд не имеет суммы.*

Определение 22.3.
Пусть $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ — числовой ряд. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ ряд $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ нызывается n-ым остатком ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

Замечание 22.2.

- *Если ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится и его сумма равна* S, *то* $\forall n \in \mathbb{N}$ *его* n*-ый остаток сходится и его сумма* $S_k = S - S_n$.
- *Если ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *расходится, то* $\forall n \in N$ *его остаток тоже расходится.*

Замечание 22.3 (Свойства сходящихся рядов).

1) *Сумма сходящихся рядов равна сходящимуся ряду*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S^{(A)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = S^{(B)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n) = S^{(A)} + S^{(B)}$$

2) *При домножении сходящегося ряда на константу ряд остаётся сходящимся, а сумма увеличивается в разы домножаемой величены*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S \quad \Rightarrow \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha\, a_n = \alpha\, S$$

Доказательство.

1) $S_n^{(A+B)} = (S_n^{(A)} + S_n^{(B)}) \to (S^{(A)} + S^{(B)})$
Таким образом, $S_n^{(A+B)} \to S^{(A+B)}$

2) $S_n^{(\alpha\, A)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha\, a_n = \alpha\, S_n^{(A)} \to \alpha\, S^{(A)}$
Таким образом, $S^{(\alpha\, A)} \to \alpha\, S^{(A)}$

■

Теорема 22.1 (Необходимое условие сходимости).
Если ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S$$

то

$$\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Доказательство.
Из определения частичной суммы ряда следует

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$$

Тогда

$$\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

■

Замечание 22.4.
Если $a_n \nrightarrow 0$ *при* $n \to \infty$*, то ряд расходится.*

Необходимый признак не доказывает, что ряд сходится, согласно ему. Он лишь показывает возможную(!) сходимость. А если признак указывает на расходимость, то он точно расходится.

Пример 22.1.
Дано

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ln(1+\frac{1}{n})$$

С одной стороны (через формулы эквивалентности б.м. функций (1 сем.))

$$a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \qquad (n \to \infty)$$

Значит

$$a_n \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

С другой

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) =$$
$$= \ln\left(\frac{\cancel{2}}{1}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\dots\frac{n+1}{\cancel{n}}\right) = \ln(n+1)$$

Таким образом

$$S_n = \ln(n+1) \to +\infty$$

Ряд расходится, хоть и пределы его слагаемых стремятся к нулю

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

Для доказательства сходимости используют следующие критерии

Теорема 22.2 (Критерий Коши сходимости числового ряда).
Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится, то*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \forall p \in N \quad |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

Обратное утверждение также верно

Доказательство.
Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, то это эквивалентно

$$\exists \lim_{n\to+\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$$

По определению предела по Коши это эвивалентно

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall p \in N \quad |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

Последнее неравенство можно расписать

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

■

Теорема 22.3 (Признак абсолютной сходимости).
Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится.

Доказательство.
$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ сходится, следовательно по критерию Коши

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant \mathbb{N} \quad \forall p \geqslant 1 \quad ||a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}|| < \varepsilon$$

Воспользуемся неравенством треугольника, получим

$$||a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}|| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon$$

По критерию Коши ряд сходится. ■

Определение 22.4.
Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ сходится, ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся.

23. Признаки сходимости положительных рядов

Пусть, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S$ — сходящийся ряд, тогда

$$\text{частная сумма ряда } S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \to S(n \to +\infty)$$

И, если $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ — сходящийся ряд, то $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ — тоже сходится, причём абсолютно (абсолютная сходимость — более ёмкое понятие)

Определение 23.1. *Числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\, a_n \geq 0$

Теорема 23.1. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *— положительный ряд, частичные суммы* S_n *которого ограничены сверху. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = S$ *сходится и его сумма равна* $S = \sup\limits_{n\geq 1}(S_n))$

Доказательство. $\forall n \geq 1\; S_{n+1} = S_n + a_n \geq S_n$(ряд положительный $\Rightarrow$ $\Rightarrow a_{n+1} \geq 0) \Rightarrow$ Послеовательность$\{S_n\} \nearrow$.
Тогда $\exists \lim\limits_{n\to+\infty}(S_n) \Leftrightarrow$ последовательность $\{S_n\}$ ограничена сверху и её предел равен $S = \sup\limits_{n\geq 1}(S_n)$ ∎

Короче, если из бесконечного множества частных сумм ряда ни одна не превышает какого-то числа, то ряд точно сходится. Причём схоится к большей из этого бесконечного числа сумм.

Теорема 23.2 (Признак сравнения сходимости рядов). *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *— два ряда. При этом:*

1) $\forall n \geq 1\; a_n \geq 0$ *(ряд положительный)*

2) $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall b \geq n_0\; |b_n| \leq a_n$

3) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = S$ *сходится*

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *сходится*

Доказательство. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится $\Rightarrow$ [по критерию Коши] $\Rightarrow$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists N \geq n_0\, \forall p \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N\, |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow |b_{n+1} + \dots + b_{n+p}| \leq |b_{n+1}| + \dots + |b_{n+p}| \leq a_{n+1} + \dots + a_{n+p} =$[т.к. $a_n \geq 0$]
$= |a_{n+1} + \dots a_{n+p}| < \varepsilon$
Т.е. $|b_{n+1} + \dots + b_{n+p}| < \varepsilon \Rightarrow$ [по критерию Коши] $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходится. ■

Следствие 23.1. $\forall n \geq n_0\; 0 \leq b_n \leq a_n$ *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *расходится, то и* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *тоже расходится*

Доказательство. От противного:
Если бы $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходился, то по теореме 2 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ — сходился бы $\Rightarrow$ противоречие ■

Теорема 23.3 (Признак сравнения рядов в предельной форме).
Пусть $\forall n \geq 1\; a_n \geq 0, b_n \geq 0$ *и* $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$*, т.е.* $c > 0$
Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится* $\Leftrightarrow$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *сходится*

Доказательство. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \Rightarrow$
Пусть $\varepsilon = \frac{c}{2} (\varepsilon > 0) \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0\, |\frac{a_n}{b_n} - c| < \frac{c}{2} \Rightarrow \frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3c}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall n \geq n_0\; 0 < b_n < \frac{2}{c} a_n$
Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится $\Rightarrow$ [по теореме 2] $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходится.
$\Leftarrow$
Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходится $\Rightarrow \forall n \geq n_0\; a_n < \frac{3}{2} c b_n \Rightarrow$ [по теореме 2] $\Rightarrow$
$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится ■

Аналогичная штука работает для расходящихся рядов:
Если предел отношения элементов ряда на бесконечности равен ненулевой константе и один из рядов расходящийся, то и второй тоже обязательно расходится

Пример 23.1.

1) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ *расходится* (1)
$\ln(1+t)\sim t(t\to 0)\Rightarrow [t=\frac{1}{n}]\Rightarrow \ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n}(n\to+\infty)\Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=1\neq 0$
Теперь, учитывая, что у нас есть ненулевой предел отношения элементов двух рядов, один из которых расходящийся, можно говорить, что расходится и второй, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ *расходится*

2) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$ *сходится.* $(S_n=1-\frac{1}{n+1})\Rightarrow$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ *сходится, т.к.* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}}=1$

Теорема 23.4 (Признак Даламбера). *Пусть* $\forall n\geq 1\; a_n>0$ *и:*

1) $\exists q<1\,\forall n\geq n_0\;\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq q\leq 1$*. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ *сходится*

2) $\forall n\geq n_0\;\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1\Rightarrow$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ *расходится*

Доказательство.

1) $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq q<1(\forall n\geq n_0)$
$a_n\leq a_{n-1}q\leq a_{n-2}q^2\leq\cdots\leq a_{n_0}q^{n-n_0}$
$\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}a_{n_0}q^{n-n_0}=a_{n_0}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}q^k=\frac{a_{n_0}}{1-q}$ сходится, т.к. $0<q<1\Rightarrow$
$\Rightarrow$ [по теореме 2] $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ сходится

2) $\forall n\geq n_0\;\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1\Rightarrow a_n\geq a_{n-1}\geq\cdots\geq a_{n_0}>0\Rightarrow a_n\geq a_{n_0}>0$
$n\to+\infty$, если бы $a_n\to 0$ (условие сходимости ряда), тогда по принципу сжатой переменной $a_{n_0}=0$, но это не так $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow a_n\nrightarrow 0(n\to+\infty)$ и ряд расходится

■

Теорема 23.5 (Признак Даламбера в предельной форме). *Пусть* $\forall n\geq 1\; a_n>0$ *и* $\exists\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$*, тогда:*

1) $q < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится*

2) $q > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *расходится*

3) $q = 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *может сходиться или расходиться*

Доказательство.

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, q < 1$
$q < 1 \Rightarrow \varepsilon = \frac{1-q}{2} > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0\, |\frac{a_{n+1}}{a_n} - q| < \frac{1-q}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow q - \frac{1-q}{2} < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \frac{1-q}{2} = \frac{q+1}{2} = q^* < \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall n \geq n_0\, \frac{a_{n+1}}{a_n} < q^* < 1 \Rightarrow$ [по теореме 4] $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1 \Rightarrow \varepsilon = \frac{q-1}{2} > 0$
$\exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0\, |\frac{a_{n+1}}{a_n} - q| < \frac{q-1}{2} \Rightarrow q - \frac{q-1}{2} < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \frac{q-1}{2}$
$1 = \frac{1+1}{2} < q^* = \frac{q+1}{2} < \frac{a_{n+1}}{a_n} > q^* > 1 \Rightarrow$ [по теореме 4] $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ расходится

3) $q = 1 : \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$
Тут достаточно привести примеры сходящегося и расходящегося ряда для $q = 1$:

- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ расходится, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \to 1 (n \to +\infty)$
- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1 (n \to +\infty)$

Итого точно сказать нельзя

■

Теорема 23.6 (Радикальный метод Коши). *Пусть* $\forall n \geq 1\ a_n > 0$ *и* $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l, l \in \mathbb{R}$. *Тогда, если:*

1) $l < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится*

2) $l > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *расходится*

3) $l = 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *не определено. Может сходиться или расходиться*

Доказательство.

1) $0 \geq l < 1$(т.к. l это корень)
$\varepsilon = \frac{1-l}{2}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 \mid \sqrt[n]{a_n} - l| < \frac{1-l}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < \frac{l+1}{2} = l^* < 1 \Rightarrow a_n < (l^*)^n (n \geq n_0), l^* \in [0;1]$
ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} (l^*)^n =$
$=$ [Как сумма геом. прогрессии со знаменателем меньшим единицы] $=$

$= \frac{(l^*)^{n_0}}{1-l^*}$ сходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (l^*)^n$ сходится $\Rightarrow$ [по теореме 3] $\Rightarrow$ тоже сходится

2) $l > 1 \Rightarrow \varepsilon = \frac{l-1}{2}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 \mid \sqrt[n]{a_n} - l| < \frac{l-1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 < l^{ast} = \frac{l+1}{2} = l - \frac{l-1}{2} < \sqrt[n]{a_n}(n \geq n_0) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall n \geq n_0 a_n > 1 \Rightarrow a_n \nrightarrow 0 (n \to +\infty) \Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ расходится

3) Тут тоже достаточно только привести примеры:

- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 1$ $a_n = 1$, $\sqrt[n]{a_n} = 1$, $\sqrt[n]{a_n} \to 1 (n \to +\infty) \Rightarrow l = 1$, а ряд расходится
- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sqrt[n]{a_n} = (\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{n}} = e^{-2\frac{\ln n}{n}} \to 1 (n \to +\infty)$
(т.к. логарифм возрастает медленее 1й степени и степень е стремится к 0) $\Rightarrow$
$l = 1$, а ряд расходится

∎

Теорема 23.7 (Интегральный признак Коши). *Пусть функция* $f(x)$ *удовлетворяет условиям:*

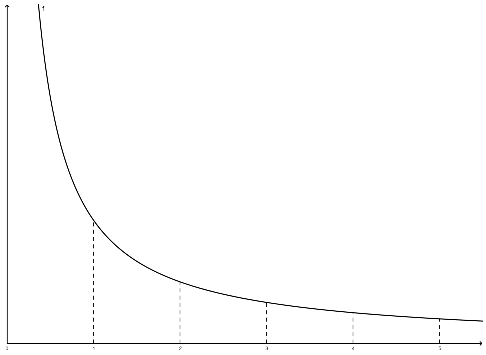
1) $f(x) \in C_{[1;+\infty)}$

2) $f(x) \searrow$ *на* $[1; +\infty)$

3) $\forall x \in [1; +\infty)$ $f(x) > 0$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ *сходится* $\Leftrightarrow$ *несобственный интеграл* $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится*

Доказательство.



$x \in [k; k+1], f(k+1) < f(x) < f(k)(k = 1, 2, \dots) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(k+1) \leq \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k) \Rightarrow$
$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \int\limits_{1}^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) = S_n, S_{n+1} - f(1) \leq \int\limits_{1}^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n$
$\Rightarrow$:
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ сходится $\Rightarrow$ [по теореме 1] $\Rightarrow S_n \leq S$
$\forall t \in \mathbb{R}\ t > 1\ \exists n \in \mathbb{N} t < n + 1$ (аксиома Архимеда)
$F(t) = \int\limits_{1}^{t} f(x)\,dx = \int\limits_{1}^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n\ leqS$
$F(t) \nearrow$ т.к. $F' = f(x) \Rightarrow \exists \lim\limits_{t \to +\infty} = F \leq S \Rightarrow \int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится
$\Leftarrow$:
$\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx = F$ сходится $\Rightarrow S_n \leq f(1) + \int\limits_{1}^{n+1} f(x)\,dx \leq f(1) + F \Rightarrow$
$\Rightarrow$ [по теореме 1] $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ сходится ■

24. Сходимость знакопеременных рядов

Определение 24.1. *Ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *наз. знакопеременным, если существует беск. много* $n \in \mathbb{N} a_n > 0$ *и существует беск. много* $n \in \mathbb{N} a_n < 0$

Определение 24.2. *Ряд* $\sum (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...$ *наз. знакочередующимся, если* $\forall n \in \mathbb{N} a_n > 0$

Определение 24.3 (признак Лейбница сходимость знакоперем. рядов). *Пусть ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ *удовл. след. условиям:*
1)$\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$
2)$\{a_n\} \searrow$ *строго т.е.* $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} < a_n$
3)$\exists lim_{n->\infty} = 0$
Тогда ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n = S$ *сходится,* S *- его сумма, при этом*
1)$a_1 - a_2 < S < a_1$
2)$\forall n \geqslant 1 |S - S_n| < a_{n+1}$

Доказательство. Рассмотрим $\{S_{2n}\}$
$S_{2n} = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{>0} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{>0} + ... + \underbrace{(a2n - 1 - a_{2n})}_{>0}$
$S_{2(n+1)} - S_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} > 0 \forall n \geqslant 1, S_{2n} < S_{2(n+1)} => \{S_{2n}\} \searrow$ строго
Теперь рассмотрим другую группировку
$S_{2n} = \underbrace{a_1}_{>0} - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{>0} - ... - \underbrace{(a_{2n-2} - a_{2n-1})}_{>0} - \underbrace{a_{2n}}_{>0}$
$=> S_{2n} < a_1 (n \geqslant 1), S_{2n} < a_1 - a_2 + a_3 (n \geqslant 2)$
S_{2n} огр. сверху
$=> \exists lim_{n->\infty} S_{2n} = S = sup_{n \geqslant 1} S_{2n} \geqslant a_1 - (a_2 - a_3) < a_1$
$=> \exists lim_{n->\infty} S_{2n+1} = lim_{n->\infty} (\underbrace{S_{2n}}_{->S} + \underbrace{a_{2n+1}}_{->0}) = S$
$=> \exists lim_{n->\infty} S_n = S < a_1$
$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_2 - a_3 + a_4 - ... = a_1 - S < a_2$
$=> a_1 - a_2 < S$(пункт 1 доказан)
Второй пункт доказ. аналогично
$(-1)^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1} a_k = a_{n+1} - a_{n+2} + ... = \underbrace{(-1)^n (S - S_n)}_{0 < a_{n+1} - a_{n+2} <}$
$=> |S - S_n| < a_{n+1}$
■

Пример 24.1. *Доказ.* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *сходится(не абсолютно)*
$\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *- ряд Лейбница*
Решение:
$a_n = \frac{1}{n} > 0, a_n \searrow$ *строго,* $a_n- > 0(n- > \infty)$ => *по т.1 ряд Лейбница сходится*
Проверка на абс. сход.
$\sum_{n=1}^{+\infty}|\frac{(-1)^{n-1}}{n}| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$*расход. (гарм. ряд)*

Пример 24.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ *- сходится абсолютно*
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{ln(n+1)}$ *- сходится (не абсолютно)*

Теорема 24.1 (Признак Дирихле). *Пусть* $\sum_{n=1}^{infty} a_n b_n$ *- числовой ряд, удовлетворяющий следующим условиям:*
1) $\exists M > 0 : \forall n \in N |\sum_{k=1}^{n} a_k| \leq M$*, то есть частичная сумма ряда ограничена*
2) $\{b_n\} \to 0$*, то есть* $\forall n \geq 1, b_k > 0; \forall n \geq 1 b_{n+1} < b_n; \exists lim b_n = 0$
Тогда ряд $\sum_{n=1}^{infty} a_n b_n$ *сходится и его сумма* $|T| \leq M b_1$

Доказательство. $T_n = a_1b_1 + ... + a_nb_n = (a_1b_1) + (a_1b_2 + a_2b_2 - a_1b_2) + (a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 - a_1b_3 - a_2b_3) + ... + a_1b_n + a_2b_n + ... + a_nb_n - a_1b_n - a_2b_n - ... - a_{n_1}b_n =$
$= S_1b_1 + S_2b_2 + ... + S_nb_n - S_1b_2 - S_2b_3 - ... - S_{n_1}b_n = S_1(b_1 - b_2) + S_2(b_2 - b_3) + ... + S_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + S_nb_n$
$\sum_{k=1}^{infty} a_kb_k = \sum_{k=1}^{\infty} S_k(b_k - b_{k+1})$
$|S_k(b_k - b_{k+1})| < M(b_k - b_{k+1})$
$\sum_{k=1}^{n} a_kb_k \leq \sum_{k=1}^{n} |S_k(b_k - b_{k+1})| < M\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = M(b_1 - b_n) \to Mb_1$
По признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} S_k(b_k - b_{k+1}) = T$ - сходится
$T_n = \sum_{k=1}^{n-1} S_k(b_k - b_{k+1}) + S_nb_n \to T \Rightarrow \exists lim T_n = T$
Ч.т.д
■

Замечание 24.1. $\sum(-1)^{n-1}b_n, b_n \to 0$
$a_n = (-1)^{n-1}, |S_n| \leq 1$

Пример 24.3. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{cos n\alpha}{n^\beta}$
$1)\alpha = 2\Pi k, k \in Z$ $cos(2\Pi nk) = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\beta}, \beta \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{n^\beta}$ *расходится, иначе сходится*
$2)\alpha \neq 2\Pi k$

$a_n = cosn\alpha, b_n = \frac{1}{n^\beta} \to 0$ *при* $\beta > 0$
$S_n = cos\alpha + ...cosn\alpha$
$2cos\alpha S_n = 2cos^2\alpha + 2cos\alpha cos2\alpha + ... + 2cos\alpha cosn\alpha = 1 + cos2\alpha + cos\alpha + cos3\alpha + ... + cos(n-1)\alpha + cos(n+1)\alpha = 1 + S_n - cosn\alpha + S_n - cos\alpha + cos(n+1)\alpha$
$2(1 - cos\alpha)S_n = 1 + cosn\alpha + cos\alpha - cos(n+1)\alpha$
$2(1 - cos\alpha)|S_n| = 4 \Rightarrow |S_n| \leq \frac{2}{1-cos\alpha} = M \Rightarrow$ *ряд сходится*

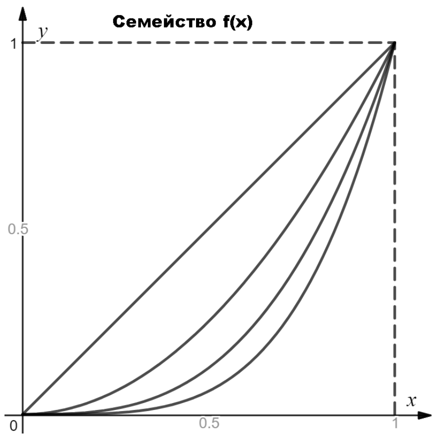
Часть IV

Функциональные последовательности и ряды

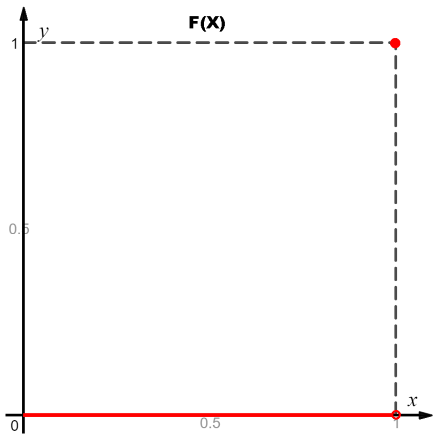
25. Равномерно сходящиеся функциональные последовательности

Определение 25.1. *Пусть* $\{f_n(x)\}$ *это последовательность функций, определённых в некоторой области* $D \subset \mathbb{R}$, *тогда говорят, что эта последовательность поточечно сходится к* $F(x), x \in D$
т.е. $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} = F(x), (x \in D) \Leftrightarrow \forall x \in D\ \exists \lim\limits_{n\to+\infty} = F(x)$
т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}, N = N(\varepsilon, x)\ \forall n > N\ |f_n(x) - F(x)| < \varepsilon$

Пример 25.1.



Семейство $f_n(x)$



$F(x)$

$f_n(x) = x^n, x \in [0; 1]$

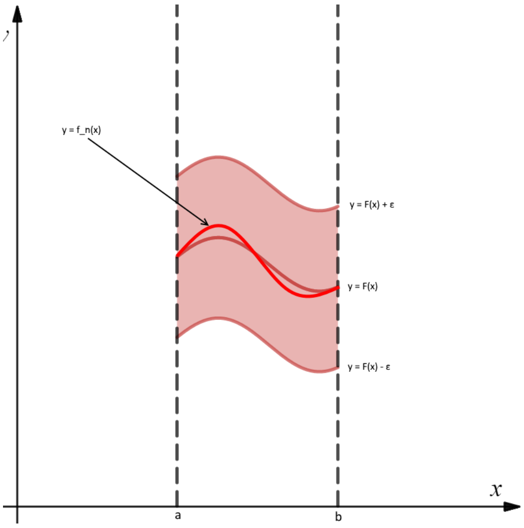
$$\lim_{n\to+\infty} x^n = F(x) \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, x \in [0; 1) \\ 1, x = 1 \end{cases}$$

Определение 25.2. *Пусть* $\{f_n(x)\}$ *это последовательность функций, определённых в некоторой области* $D \subset \mathbb{R}$, *тогда говорят, что эта последовательность равномерно сходится к* $F(x), x \in D \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}, N = N(\varepsilon, x)\ \forall n > N\ \forall x \in D\ |f_n(x) - F(x)| < \varepsilon$

Отличие от поточечной сходимости получается только в том, что номер, с которого начинается пренебрежимо малое отставание от F не зависит от x

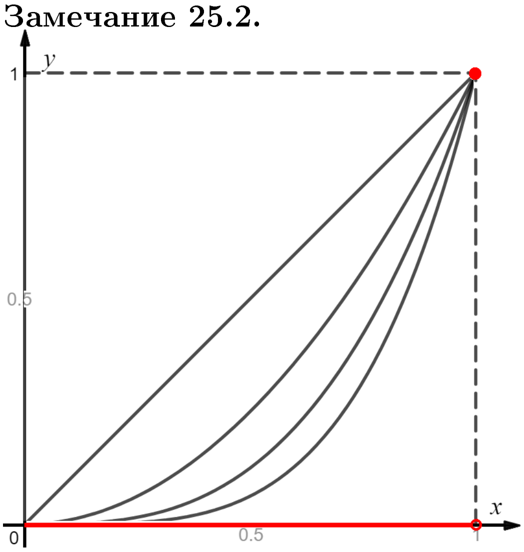
Обозначают: $f_n(x) \rightrightarrows F(x)(n \to +\infty; x \in D)$

Замечание 25.1 (Геометрический смысл равномерной сходимости).



$D = [a; b]$

Замечание 25.2.



$f_n(x) = x^n; x \in [0; 1]$ $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} F(x)$

$f_n(x) \not\rightrightarrows F(x)$, *где* $F(x) = \begin{cases} 0, x \in [0; 1) \\ 1, x = 1 \end{cases}$ $\quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$

Теорема 25.1 (Критерий Коши равномерной сходимости функциональных после

Пусть $\{f_n(x)\}$ *- функциональная последовательность, где* $x \in D$*. Тогда*

$\{f_n(x)\}$ *равномерно стремится к* $F(x)$ *при* $n \to +\infty; x \in D \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq N\ \forall x \in D\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Доказательство.
$\Rightarrow$
Пусть $f_n(x)$ равномерно сходится к $F(x)$ для $n \to +\infty, x \in D \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall n \geq N\ \forall x \in D\ |f_n(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$;
$\Rightarrow \forall m \geq N\ \forall x \in D\ |f_m(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$
$|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - F(x) + F(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - F(x)| +$
$+ |f_m(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

$\Leftarrow$
$\forall \varepsilon\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n, m \geq N\ |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$
Тогда $\forall x \in D\ f_m(x) \underset{n \to +\infty}{\to} F(x)$ (по критерию Коши для числовой последовательности)
$\Rightarrow (m \to +\infty) \Rightarrow |f_n(x) - F(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow f_n(x) \rightrightarrows F(x)(n \to +\infty; x \in D)$
■

Теорема 25.2 (О непрерывности предела равномерно сходящихся функциональн
Пусть $\forall n \geq 1$ *функции* $f_n(x) \in C_{[a;b]}$.
Тогда $f_n(x) \rightrightarrows F(x)(n \to +\infty, x \in [a;b]) \Rightarrow F(x) \in C_{[a;b]}$

Доказательство. Надо доказать, что 1. $\forall x_0 \in [a;b]\ \exists \lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$и $\begin{cases} \exists F(a+0) = F(a) \\ \exists F(b-0) = F(b) \end{cases}$

Пусть $x_0 \in [a;b], f_n(x) \in C_{[a;b]} \Rightarrow$ [по теореме Кантора] $\Rightarrow$
$\Rightarrow f_n(x)$равномерно непрерывна на$[a;b] \forall n in \mathbb{N}$,
т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0, \delta = \delta(\varepsilon, n)\ \forall x, x_0 \in [a;b]\ |x - x_0| < \delta\ |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$
$f_n(x) \rightrightarrows F(x)(n \to +\infty; x \in D)$ для $\varepsilon > 0$
$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall x, x_0 \in [a;b] |f_n(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, |f_n(x_0) - F(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$
Для $n = N : |f_N(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{3}; |f_N(x_0) - F(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow |F(x) - F(x_0)| = |F(x) - f_N(x) + f_N(x) - F(x_0) - f_N(x_0) + f_N(x_0)| \leq$
$\leq |f_N(x) - F(x)| + |f_N(x_0) - F(x_0)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$
$\delta = \delta(\varepsilon, n)$, т.е. δ не зависит от x
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \exists \delta(\varepsilon, n) > 0\ \forall x, x_0 \in [a;b]\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$
$\Rightarrow F(x)$непрерывна на $[a;b]$ ■

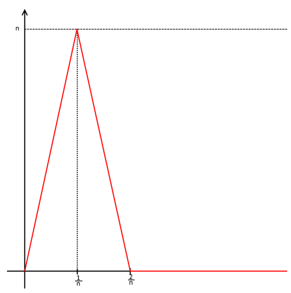
Замечание 25.3. $\lim\limits_{x \to x_0}(\lim\limits_{n \to +\infty}(f_n(x))) = \lim\limits_{n \to +\infty}(\lim\limits_{x \to x_0}(f_n(x))) \Leftrightarrow F(x) \in C_{[a;b]}, x, x_0 \in [a;b]$

Теорема 25.3 (Об интегрировании равномерно сходящихся функциональных пос
Пусть функции $f_n(x) \in C_[a;b]$ *и* $f_n(x) \rightrightarrows F(x), (n \to +\infty, x \in [a;b]) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b F(x)dx$

Доказательство.
$f_n(x) \rightrightarrows F(x)(n \to +\infty; x \in [a;b]) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \; \forall x \in [a;b] |f_n(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$
$|\int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b F(x)dx| = |\int\limits_a^b f_n(x)dx - F(x)dx| \leq$
$\leq |\int\limits_a^b f_n(x)dx - F(x)dx| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \; \forall x \in [a;b] |\int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b F(x)dx| \leq \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b F(x)dx$ ■

Замечание 25.4. $\lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)dx$

Замечание 25.5. *Теорема 3 неверна в случае поточечной, а не равномерной, сходимости.*



$f_n(x) \in C_{[0;1]}. f_n(x) \to 0(n \to +\infty; x \in [0;1])$
$\int\limits_0^1 f_n(x) = [\text{как площадь треугольника}] = \frac{2}{n}\frac{n}{2} = 1 \to 1(n \to +\infty)$
Но при этом $\int\limits_0^1 F(x) = 0 \to 0(n \to +\infty) \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx \neq \int\limits_a^b F(x)dx$

Теорема 25.4 (О дифференциировании равномерно сходящихся функциональны
Пусть $f_n(x) \in C^1_{[a;b]}$, *т.е.* $\exists f'_n(x) \in C_{[a;b]}$ *и выполнены условия:*

1) $f'_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)(n \to +\infty; x \in [a;b])$
2) $\exists x_0 \in [a;b] \; f_n(x_0) \to A(n \to +\infty)$

Тогда:

1) $\exists F(x) \in C^1_{[a;b]} \; f_n(x) \rightrightarrows F(x)(n \to +\infty; x \in [a;b])$

2) $F'(x) = \varphi'(x)(x \in [a;b])$

Доказательство. $F(x) = A + \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)dt$

$\begin{cases} f'_n(x) \in C_{[a;b]} \\ f'_n(x) \rightrightarrows \varphi(x) \end{cases} \Rightarrow$ [по теореме 2] $\Rightarrow \varphi(t) \in C_{[a;b]} \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi(t)$ интегрируема $\Rightarrow$ [по теореме Барроу] $\Rightarrow \exists F'(x) = \varphi(x)(x \in [a;b])$
$|f_n(x) - F(x)| = |\int\limits_{x_0}^{x} f'_n(t)dt + f_n(x_0) - A - \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)dt| =$
$= |\int\limits_{x_0}^{x}(f'_n(t) - \varphi(t))dt + f_n(x_0) - A| \leq |\int\limits_{x_0}^{x} |(f'_n(t) - \varphi(t))|dt| + |f_n(x_0) - A|$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N_1 \ \forall t \in [a;b] |f'_n(x) - \varphi(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ т.к. $f_n(t)$ сходится к $\varphi(t)$
Для $\varepsilon > 0 \exists N \geq N_1 \ \forall n \geq N \ |f_n(x_0) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$
Итого:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ |\int\limits_{x_0}^{x} |(f'_n(t) - \varphi(t))|dt| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} |\int\limits_{x_0}^{x} dt| =$
$= \frac{\varepsilon|x-x_0|}{2(b-a)} \leq \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2}$
Прибавим к этому, что $|f_n(x_0) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ и получим:
$|f_n(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
Итого:
$\forall x \in [a;b] |f_n(x) - F(x)| < \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \ \forall n \geq N \ \forall x \in [a;b] \ |f_n(x) - F(x)| < \varepsilon \Rightarrow f_n(x) \rightrightarrows F(x), (n \to +\infty, x \in [a;b])$ 1я часть доказана Тут есть доказательство второй части, которое я пропустил или какой-то подвох? ■

26. Равномерно сходящиеся функциональные ряды

Определение 26.1. *Пусть $u_n(x)$ - функциональная последовательность, определённая на $D, x \in D$*
Тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ - функциональный ряд $x \in D$. Этот ряд сходится $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = S(x), x \in D$. При этом: $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ - сумма ряда ($x \in D$). Т.е. ряд сходится к сумме S на $D \Leftrightarrow S_n(x) \to S(x)(n \to +\infty; x \in D)$

Определение 26.2. *В определении 1 говорят, что ряд равномерно сходится на области $D, D \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow S_n(x) \rightrightarrows S(x)(n \to +\infty, x \in D)$*

Теорема 26.1. *(Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда)*
Пусть $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x), x \in D, D \subset \mathbb{R}$. Тогда этот ряд равномерно сходитсян на $D \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N \, \forall p \geq 1 \, \forall x \in D \, |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$

Доказательство. $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_n(x)$ - частичная сумма ряда, тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на $D \Leftrightarrow S_n(x) \rightrightarrows S(x)(n \to +\infty; x \in D) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ [критерий Коши для функциональных последовательностей] $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N \, \forall p \geq 1 \, \forall x \in D \, |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$ ■

Теорема 26.2. *(О непрерывности суммы равномерно сходящегося функционального ряда)*
Пусть $\forall n \geq 1 \; u_n(x) \in C_{[a;b]}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = S(x)$ равномерно сходится к сумме $S(x)$ на $[a; b]$. Тогда $S(x) \in C_{[a;b]}$

Доказательство. Рассмотрим частичные суммы $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) = u_1(x)(\in C_{[a;b]}) + \dots + u_n(x)(\in C_{[a;b]}) \in C_{[a;b]}$
$S_n(x) \rightrightarrows \S(x)(n \to +\infty; x \in [a; b]) \Rightarrow$ [по теореме 2 предыдущего параграфа] $\Rightarrow$
$S(x) \in C_{[a;b]}$ ■

Теорема 26.3. *(О почленном интегрировании равномерно сходящихся рядов)*

Пусть $\forall n \geq 1, u_n(x) \in C_{[a;b]}$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = S(x)$ *равномерно сходится на* $[a;b]$

Тогда $\int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_a^b u_n(x)$

Доказательство.
$S_n(x) \rightrightarrows S(x)(n \to +\infty; x \in [a;b]) \forall n \geq 1\ s_n(x) in C_{[a;b]} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ по теореме 2 $\Rightarrow S(x) \in C_{[a;b]}$ (т.е. все интегралы существуют)
По теореме 3 предыдущего параграфа $\int\limits_a^b S_n(x) \rightrightarrows \int\limits_a^b S(x)(n \to +\infty) \Rightarrow$
$\Rightarrow \int\limits_a^b S_n(x) = \int\limits_a^b (\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x))dx = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_a^b u_k(x)dx$ - частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_a^b u_n(x)dx$. Она будет стремиться к сумме $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_a^b u_n(x)dx = \int\limits_a^b S(x)dx$
■

Замечание 26.1. $\forall x \in [a;b]$ *в условиях теоремы 3* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_a^x u_k(t)dt = \int\limits_a^x S(t)dt$

Теорема 26.4. *(О почленном дифференциировании равномерно сходящихся функциональных рядов) Пусть* $\forall n \geq 1$ *функции* $u_n(x) \in C^1_{[a;b]}$ *и выполняются следущие условия:*

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ *равномерно сходится на* $[a;b]$

2) $\exists x_0 \in [a;b]\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0) = A, A \in \mathbb{R}$

Тогда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится к функции* $S(x) \in C^1_{[a;b]}$*на*$[a;b]$

2) $S'(x) = \varphi(x), x \in [a;b]$, *в частности:*

- $S'(a+0) = \varphi(a)$
- $S'(b-0) = \varphi(b)$

Доказательство. $\sum\limits_{k=1}^{n} u'_k(x) \rightrightarrows \varphi(x)(n \to +\infty x \in [a;b]) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} (\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x))' \rightrightarrows \varphi(x)(n \to +\infty x \in [a;b]) \\ \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x_0) \to A(n \to +\infty) \end{array}\right| \Rightarrow [\text{по теореме 4 §1}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) \rightrightarrows S(x)(n \to +\infty x \in [a;b]) \quad (1) \\ S'(x) = \varphi(x), x \in [a;b] \end{cases}$$

$\varphi(x) \in C_{[a;b]} \Rightarrow S(x) \in C^1_{[a;b]}$

Из (1) $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) = S(x)$ равномерно сходится на отрезке $[a;b]$ ∎

Теорема 26.5. *(Достаточный признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов) Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *- функциональный ряд для* $x \in D, D \subset \mathbb{R}$

Тогда, если найдется числовой ряд $\exists \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$*, который удовлетворяет:*

1) $\forall x \in D \; \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n(x)| \leq a_n$

2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится*

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится на* D

Доказательство. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится $\Rightarrow$ [по критерию Коши] $\Rightarrow$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \; \forall p \geq 1 \quad |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$
$0 \leq u_n(x) \leq a_n \Rightarrow \forall n \geq 1 \quad a_n \geq 0;$
$\forall x \in D \quad |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| \leq |u_{n+1}(x)| + \dots + |u_{n+p}(x)| \leq$
$\leq a_{n+1} + \dots + a_{n+p} = |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \; \forall p \geq 1 \quad |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow$ [по теореме 1 §] $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на D ∎

27. Степенные ряды

Определение 27.1. *Функциональный ряд вида* $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(x-\alpha)^n = C_0 + C_1(x-\alpha) + ... + C_n(x-\alpha)^n + ...$ *называется степенным рядом,* α *- центр ряда,* $C_0, C_1, ...$ *- коэффициенты ряда.*

Замечание 27.1. $t = x - \alpha \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} C_n(x-\alpha)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n t^n$ *- переместили центр в* 0

Теорема 27.1 (1-я Теорема Абеля). *Пусть степенной ряд* $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(x-\alpha)^n$ *сходится при* $x = x_0 \neq \alpha$
Тогда $\forall n, |x-\alpha| < |x_0 - \alpha|$ *данный ряд сходится, причём абсолютно, в точке* x

Доказательство. $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(x-\alpha)^n$ сходится $\Rightarrow \exists lim C_n(x_0-\alpha)^n = 0$ (необходимый признак сходимости)
$\Rightarrow C_n(x_0-\alpha)^n$ ограничена $\Rightarrow \exists M > 0 : \forall n \geq 0 |C_n(x_0-\alpha)^n| \leq M \Rightarrow |C_n||(x_0-\alpha)| \leq M$
Возьмём $x : |x-\alpha| < |x_0-\alpha|$ и пусть $q = \frac{|x-\alpha|}{x_0-\alpha} \Rightarrow 0 \leq q < 1$
Тогда $\forall n \geq 0 |C_n(x-\alpha)^n| = |C_n||x-\alpha|^n = |C_n||x_0-\alpha|^n q^n \leq M q^n$
Ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} M q^n = \frac{1}{1-q}$ сходится, следовательно ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(x-\alpha)^n$ сходится абсолютно по признаку сравнимости
■

Замечание 27.2 (Следствие). *Пусть ряд* $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(x-\alpha)^n$ *расходится при* $x_1 \neq a$*, тогда* $\forall x |x-\alpha| > |x_1-\alpha|$ *ряд расходится*

Доказательство. От противного:
Если в условиях следствия $\exists x_0 : |x_0-\alpha| > |x_1-\alpha|$ и ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(x_0-\alpha)^n$ сходится, то по теореме ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(x_1-\alpha)^n$ сходится абсолютно, что противоречит условию.
ч.т.д
■

Замечание 27.3. *TODO вставить рисунок*

Теорема 27.2 (О существовании радиуса сходимости степенного ряда). *Пусть* $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(x-\alpha)^n$ *- степенной ряд*
Тогда $\exists R, o \leq R \leq +\infty$*, для которого:*

1) $\forall x |x-\alpha| < R$ *ряд сходится в* x
2) $\forall x |x-\alpha| > R$ *ряд расходится в* x

Доказательство. Если ряд сходится только в α, $R = 0$
Если ряд сходится при $\forall x$, $R = +\infty$
Рассмотрим третий случай
$\exists x_0 \neq \alpha$ и ряд сходится в x_0
$\exists x_1 \neq \alpha$ и ряд расходится в x_1
■

28. Разложение функции в ряд Тейлора

Теорема 28.1. *(О разложении функции в степенной ряд)*
Пусть функция $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n, x \in U_\delta(a), \delta > 0$
Тогда такое разложение единственное и его коэффициенты вычисляются по формуле: $\begin{cases} c_0 = f(a) \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \frac{f(a)}{n!} \end{cases}$ *, где a - фиксированная точка*

Доказательство.
$f(x)$ - сумма степенного ряда $\Rightarrow f(x) \in C^\infty(U_\delta(a))$

1) $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n + \dots$ при $x = a : f(a) = c_0$
2) Продифференциируем: $f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + \dots + nc_n(x-a)^{n-1} + \dots$
   $x = a : f'(a) = c_1$

   $\vdots$

$n)$ $f^{(n)}(x) = n!c_n + \frac{(n+1)!}{1!}c_{n+1}(x-a) + \dots + \frac{(n+k)!}{k!}c_{n+k}(x-a)^k + \dots$
   $x = a : f^{(n)}(a) = n!c_n \Rightarrow c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ $(n \in \mathbb{N})$

■

Определение 28.1. *Пусть функция* $f(x) \in C^\infty(U_\delta(a))$
Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ *называется рядом Тейлора функции* $f(x)$ *в* $(\cdot)a$.

$$f(x) \to \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Замечание 28.1.
$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$, $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}); f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$
$\forall k \in \mathbb{N} \quad f^{(k)}(0) = 0 \Rightarrow$ *нулевой ряд Тейлора в окрестности нуля*
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0, x \in \mathbb{R} \neq f(x)$ *при* $x \neq 0$

Замечание 28.2. $f(x) \in C^n(U_\delta(a))$ *и* $\exists f^{(n+1)}$ *для* $x \in U_\delta(a) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall x \in U_\delta(a)\ \exists \xi \in U_\delta(a), \xi \in [a; x]$
$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n(x); R_n(x) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$
$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ *- остаточный член в формуле Тейлора (в данном случае остаточный член представлен в форме Лагранжа)*

Теорема 28.2. *(Критерий разложимости функции в ряд Тейлора) Пусть функция* $f(x) \in C^{\infty}(U_\delta(a)), R > 0$

Тогда $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, x \in (a-R; a+R) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in (a-R; a+R) \exists \lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$

Доказательство.

$(\Rightarrow)$

$$\text{Пусть } f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x \in (a-R; a+R)\ \exists \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim \lim_{n\to+\infty}(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim \lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0 (x \in (a-R; a+R))$$

$(\Leftarrow)$

$$\forall x \in (a-R; a+R)\ \exists \lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0\ \Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty}(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} f(x) - \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x \in (a-R; a+R) f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

■

Замечание 28.3. *(Таблица разложений)*

1) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad R = +\infty$

2) $\cos(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad R = +\infty$

3) $\sin(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R = +\infty$

4) $(1+x)^\mu = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{n!}x^n, \quad R = 1, \mu \in \mathbb{R}\backslash(\mathbb{N} \cup 0)$

5) $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad R = 1$

6) $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n, \quad R = 1$

$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1), (2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n$

7) $\ln(1+x) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n}, \quad R = 1$

8) $\arctan(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R = 1$

9) $\arcsin(x) = x + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad R = 1$

Пример 28.1.

$f(x) = \frac{x}{x^2+x-2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, c_n =?, x \in ?\ \frac{x}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x+(2A-B)}{x^2+x-2}$

$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=\frac{2}{3} \end{cases} \quad f(x) = \frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{3(x+2)} = -\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n} =$

$= \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3}(\frac{(-1)^n}{2^n} - 1)x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \Rightarrow c_n = \frac{1}{3}(\frac{(-1)^n}{2^n} - 1) \Rightarrow R = 1$