

# Содержание

<b>I</b>	<b>Приложение функции нескольких переменных</b>	<b>3</b>
1.	Касательные к пространственным прямым и касательные к поверхностям	3
2.	Экстремум функции нескольких переменных	7
3.	Условные экстремумы ФНП	13
4.	Отыскание $\max$ и $\min$ значений для ФНП	20
<b>II</b>	<b>Обыкновенные дифференциальные уравнения и их системы</b>	<b>23</b>
5.	Введение. Дифференциальные уравнения 1-го порядка	23
6.	ДУ в "дифференциалах". ДУ с разделяющимися переменными	28
7.	Однородные ДУ первого порядка	35
8.	Линейные дифференциальные уравнения. ДУ Бернулли	39
9.	ДУ в полных дифференциалах	44
10.	ДУ Клеро и Лагранжа	51
11.	Дифференциальные уравнения высшего порядка, допускающие понижения порядка	56
12.	Линейные ДУ $n$ -го порядка	62
13.	Фундаментальная система решений ЛОДУ	65
14.	Общее решение линейного ДУ $n$ -го порядка	71
15.	Метод вариации произвольных постоянных	74
16.	Лин. диф. ур-я $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами	79

17.Случай комплексных корней характеристического многочлена. Общий случай построения ФСР	87
18.Метод неопределённых коэф. для отыскания частного решения ЛОДУ $n$ -го порядка с пост. коэф.	91
19.Системы обыкновенных ДУ	98
20.Система линейных ДУ	103
21.Система линейных ДУ с const коэф.	106
 III Числовые ряды	 109
22.Основные определения	109
23.Признаки сходимости положительных рядов	114
24.Сходимость знакопеременных рядов	123
 IV Функциональные последовательности и ряды	 126
25.Равномерно сходящиеся функциональные последовательности	126
26.Равномерно сходящиеся функциональные ряды	131
27.Степенные ряды	134
28.Разложение функции в ряд Тейлора	136

## Часть I

# Приложение функции нескольких переменных

## 1. Касательные к пространственным прямым и касательные к поверхностям

**Определение 1.1 (Касательная к пространственным кривым).** Пусть  $L$  — гладкая пространственная кривая без особых точек или

$$L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in U(t_0)$$

$$x(t), y(t), z(t) \in C'(U(t_0)) \quad (x'_t, y'_t, z'_t) \neq (0, 0, 0)$$

Геометрически выглядит следующим образом

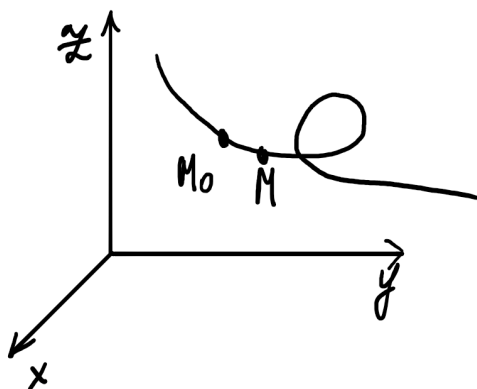


Рис. 1.

Обозначим

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \quad \text{при } t = t_0 \quad \Delta t \neq 0, \quad t = t_0 + \Delta t, \quad \Delta t \in U(t_0)$$

Тогда уравнение касательной

$$MM_0 : \frac{x - x_0}{x(t_0 + \Delta t) - x_0} = \frac{y - y_0}{y(t_0 + \Delta t) - y_0} = \frac{z - z_0}{z(t_0 + \Delta t) - z_0}$$

Равенство выше является каноническим. Если разделить элементы на  $\Delta t$  и рассмотреть  $\Delta t \rightarrow 0$  то получим следующее

$$l_0 : \frac{x - x_0}{x'_0} = \frac{y - y_0}{y'_0} = \frac{z - z_0}{z'_0}$$

Так как

$$\frac{x(t_0 - \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} \rightarrow x'_t(t_0) = x'_0 \quad \Delta t \rightarrow 0$$

$l_0$  — касательная к кривой  $L$  в точке  $M_0$

$l_0$  — прямая линия в пространстве  $x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2 \neq 0$

**Определение 1.2 (Касательная плоскость к поверхности).** .

Пусть  $S : F(x, y, z) = 0$  — поверхность в пространстве.

$F(x, y, z)$  — непрерывная функ. в окрестности точки  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$

Плоскость  $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ , где  $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$  называется касательная плоскость к  $S$  в точке  $M_0$  если

1)  $M_0 \in \pi$

2) Любая кривая линия  $L \subset S, M_0 \in L$  гладкой кривой с касательным вектором  $\vec{\tau} \neq \vec{0}$  выполняется условие

$$\vec{n} \perp \vec{\tau}, \vec{n} = A, B, C \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{n}, \vec{\tau}) = 0$$

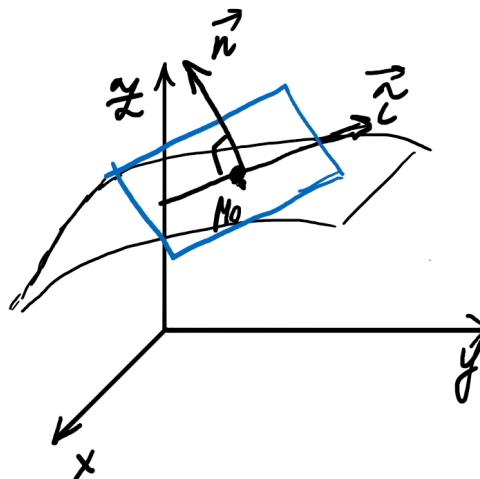


Рис. 2.

**Теорема 1.1 (О существовании касательной плоскости).** Пусть

$$F(x, y, z) \in C'(U(M_0)), \quad F'_x{}^2(M_0) + F'_y{}^2(M_0) + F'_z{}^2(M_0) \neq 0$$

Тогда для поверхности  $S : F(x, y, z) = 0$ ,  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$  существует касательная плоскость

$$\pi : F'_x(M_0)(X - x_0) + F'_y(M_0)(Y - y_0) + F'_z(M_0)(Z - z_0) = 0$$

**Доказательство.**

$$L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in U(t_0) \quad x(t), y(t), z(t) \in C'(U(t_0))$$

$$x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), z_0 = z(t_0), \quad M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$$

$$\vec{\tau} = x'_t(t_0), y'_t(t_0), z'_t(t_0)$$

$$\vec{n} = F'_x(M_0), F'_y(M_0), F'_z(M_0)$$

Докажем, что скалярное произведение равно нулю

$$L \subset S \Rightarrow \forall t \in U(t_0) \quad F(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

Из дифференцируемости сложной функции получаем

$$(F(x(t), y(t), z(t)))'_t = F'_x x'_t + F'_y y'_t + F'_z z'_t$$

при  $t = t_0$

$$F'_x(M_0) x'_t(t_0) + F'_y(M_0) y'_t(t_0) + F'_z(M_0) z'_t(t_0) = 0 \Rightarrow (\vec{n}, \vec{\tau}) = 0$$

$$\Rightarrow \pi : F'_x(M_0)(X - x_0) + F'_y(M_0)(Y - y_0) + F'_z(M_0)(Z - z_0) = 0$$

■

**Определение 1.3 (Градиент).** Градиент функции  $F$  в точке  $M_0$  обозначается так

$$\{F'_x(M_0); F'_y(M_0); F'_z(M_0)\} = \text{grad } F|_{M_0}$$

**Теорема 1.2 (Существование касательной плоскости).** .

Рассматривается случай явно заданной поверхности

Пусть  $f(x, y) \in C'(U(N_0))$ ,  $N_0(x_0, y_0)$ .

Тогда для явно заданной поверхности  $S : z = f(x, y)$  существует касательная плоскость в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , где  $z_0 = f(N_0)$  вида

$$\pi : Z - z_0 = f'_x(N_0)(X - x_0) + f'_y(N_0)(Y - y_0)$$

**Доказательство.**

$$S : f(x, y) - z = 0, F = f(x, y) - z$$

$$F'_x = (f(x, y) - z)'_x = f'_x(N)$$

Аналогично для других производных

$$F'_y = f'_y(N); F'_z = -1;$$

Т.к. мы задали явную функцию  $F$ , то по теореме 1 получаем

$$\pi : f'_x(N_0)(X - x_0) + f'_y(N_0)(Y - y_0) + f'_z(N_0)(Z - z_0) = 0$$

$$\pi : f'_x(N_0)(X - x_0) + f'_y(N_0)(Y - y_0) - (Z - z_0) = 0, \text{ примечание } z_0 = f(x_0, y_0)$$

$$\pi : Z = f(x_0, y_0) + f'_x(N_0)(X - x_0) + f'_y(N_0)(Y - y_0)$$

■

**Определение 1.4 (Нормаль к поверхности).** Пусть  $S : F(x, y, z) = 0$ ,  $(x, y, z) \in U(M_0)$  гладкая поверхность.  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$ .

Тогда нормаль  $n$  к поверхности  $S$  в точке  $M_0$  называется прямая линия  $n$ ,  $M_0 \in n$ ,  $n \perp \pi$ , где  $\pi$  — касательная плоскость

**Замечание 1.1.** Если в условии определения  $\nabla \text{grad } F|_{M_0} \neq \vec{0}$ , то каноническое уравнение  $n$

$$n : \frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}$$

## 2. Экстремум функции нескольких переменных

**Определение 2.1 (Экстремума ФНП).** Пусть функция  $u = f(M) = f(x_1, \dots, x_n)$  — является функцией  $n$  - переменных определённых в некоторой окрестности  $U(M_0)$  и  $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ .

Тогда

- 1)  $M_0$  — точкой (локального) минимума функции  $f(M)$ , если  $\exists \delta > 0, \forall M \in U_\delta(M_0), f(M) \geq f(M_0)$
- 2)  $M_0$  — точкой (локального) максимума функции  $f(M)$ , если  $\exists \delta > 0, \forall M \in U_\delta(M_0), f(M) \leq f(M_0)$
- 3)  $M_0$  — точкой (локального) экстремума  $f(M)$ , если  $M_0 = \min f(M)$  или  $M_0 = \max f(M)$

**Определение 2.2 (Строгий экстремум функции нескольких переменных).**

Пусть функция  $u = f(M) = f(x_1, \dots, x_n)$  — является функцией  $n$  - переменных определённых в некоторой окрестности  $U(M_0)$  и  $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$

Тогда

- 1)  $M_0$  — точкой строгого минимума функции  $f(M)$ , если  $\exists \delta > 0, \forall M \in \dot{U}(M_0), f(M) > f(M_0)$
- 2)  $M_0$  — точкой строгого максимума функции  $f(M)$ , если  $\exists \delta > 0, \forall M \in \dot{U}(M_0), f(M) < f(M_0)$
- 3)  $M_0$  — точкой строгого экстремума функции  $f(M)$ , если соблюдается пункт 1 или 2

**Теорема 2.1 (Необходимое условие локального экстремума).** Пусть существует функция

$$u = f(M) = f(x_1, \dots, x_n), M \in U_0(M_0) \\ \text{где } M_0(x_1^0, \dots, x_n^0) \text{ и } \exists f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n}$$

Тогда если  $M_0$  — точка локального экстремума, то

$$f'_{x_1}(M_0) = 0, \dots, f'_{x_n}(M_0) = 0 \Leftrightarrow df(M_0) = 0$$

**Доказательство.** Пусть  $M_0$  — минимум  $f(M)$ , т.е.

$$\exists \delta > 0, \forall M \in U_\delta(M_0), f(M) \geq f(M_0)$$

Рассмотрим частную производную от первого аргумента через предел. Для этого возьмём точку  $M(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0)$  в окрестности точки  $M_0$ , тогда получаем

$$f'_{x_1}(M_0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \left( \frac{f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{x_1 - x_1^0} \right)$$

Так как  $M_0$  — минимум  $f(M)$ , то

$$f(M) - f(M_0) \geq 0$$

Осталось рассмотреть два случая для знаменателя

1) если  $x_1 > x_1^0$ , то  $f'_{x_1} \geq 0$

2) если  $x_1 < x_1^0$ , то  $f'_{x_1} \leq 0$

Из всего этого следует, что

$$f'_{x_1}(M_0) = 0$$

Аналогично доказываются случаи для других производных ■

**Лемма 2.1 (О сохранении знака непрерывной функции).** Пусть

$$u = \varphi(M) = \varphi(x_1, \dots, x_n) \in C(U(M_0))$$

и

1)  $\varphi(M_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \forall M \in U_\delta(M_0) \varphi(M) > 0$

2)  $\varphi(M_0) < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \forall M \in U_\delta(M_0) \varphi(M) < 0$

**Доказательство.**

1) Логика доказательства аналогична первому семестру

$$\varphi(M_0) > 0$$

$$\varepsilon = \frac{\varphi(M_0)}{2} > 0 \exists \delta > 0 \forall M \in U_\delta(M_0) |\varphi(M) - \varphi(M_0)| < \varepsilon$$

Расскроем знак модуля

$$\varphi(M_0) - \frac{\varphi(M_0)}{2} < \varphi(M) < \varphi(M_0) + \frac{\varphi(M_0)}{2}$$

$$\Rightarrow \forall M \in U_\delta(M_0) \varphi(M) > \frac{\varphi(M_0)}{2} > 0$$

$$\Rightarrow \varphi(M) > 0$$



2) Аналогично доказательству выше

■

**Лемма 2.2 (О свойстве коэффициентов в квадратичной форме).**

Пусть  $q(u, v) = Au^2 + 2Buv + Cv^2$  — некая квадратичная форма (аналог  $q(u, v) = a_{uu}u^2 + a_{vv}v^2 + a_{uv}uv$ ). Тогда

- 1)  $\forall (u, v) \neq (0; 0) \quad q(u, v) > 0 \Leftrightarrow A > 0, \quad AC - B^2 > 0$  — положительно определённая квадратичная форма
- 2)  $\forall (u, v) \neq (0; 0) \quad q(u, v) < 0 \Leftrightarrow A < 0, \quad AC - B^2 > 0$  — отрицательно определённая квадратичная форма

**Доказательство.** Для доказательства воспользуемся критерием Сильвестра (2 семестр)

Распишем квадратичную форму для  $n$  переменных

$$q(u_1, \dots, u_n) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i u_j, \quad a_{ij} = a_{ji}$$

Матрица для неё будет следующей

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad A_1^T = A_1$$

По критерию Сильвестра для квадратичной формы справедливо

- 1)  $q > 0 : \Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0$
- 2)  $q < 0 : \Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0$

Если  $n = 2$  то квадратичная форма имеет вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = A, \quad \Delta_2 = AC - B^2$$

Таким образом очевидно что если  $q > 0$ , то  $A > 0, \quad AC - B^2 > 0$

Аналогично для  $q < 0$  следует  $A = \Delta_1 < 0, \quad AC - B^2 = \Delta_2 > 0$

■

**Теорема 2.2 (Достаточное условие экстремума  $f(x, y)$ ).** Пусть функция  $u = f(M) = f(x, y) \in C^2(U(M_0))$  и  $df(M_0) = 0$ .

Обозначим через  $A = f''_{xx}(M_0)$ ,  $B = f''_{xy}(M_0)$ ,  $C = f''_{yy}(M_0)$ , Тогда

- 1)  $A > 0, AC - B^2 > 0$  (т.е. квадратичная форма положительна)  
 $\Rightarrow M_0$  — точка строгого минимума функции
- 2)  $A < 0, AC - B^2 > 0$  (т.е. квадратичная форма отрицательна)  
 $\Rightarrow M_0$  — точка строгого максимума функции
- 3)  $AC - B^2 < 0 \Rightarrow M_0$  — не экстремум функции

**Доказательство.** Воспользуемся формулой Тейлора для  $k = 1$ , тогда

$$\forall M \in U(M_0) \exists N \in [M_0, M], N \in U(M_0)$$

$$f(M) = f(M_0) + \frac{1}{1!} df(M_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(N), \text{ где } M(x, y), M_0(x_0, y_0)$$

$$\Delta x = x - x_0 = dx, \Delta y = y - y_0 = dy$$

Распишем чему равны производные в формуле

$$df(M_0) = f'_x(M_0) + f'_y(M_0) = 0 \text{ (по условию)}$$

$$d^2 f(N) = A_1 d^2 x + 2B_1 dx dy + C_1 d^2 y, \text{ где } A_1 = f''_{xx}(M_0), B_1 = f''_{xy}(M_0), C_1 = f''_{yy}(M_0)$$

Таким образом

- 1) ) Для удобства введём  
 $\varphi_1(M) = f''_{xx}(M)$   
Т.к.  $A = f''_{xx}(M_0) = \varphi_1(M_0) > 0$  по условию, то по лемме 1 получаем  
 $\exists \delta_1 > 0 \forall N_1 \in U_{\delta_1}(M_0) \Rightarrow \varphi_1(N) > 0$
- ) Для удобства введём  
 $\varphi_2(M) = f''_{xx} f''_{yy} - f''_{xy}^2$   
Т.к.  $AC - B^2 = \varphi_2(M_0) > 0$  по условию, то аналогично по лемме 1 получаем  
 $\exists \delta_2 > 0 \forall N_2 \in U_{\delta_2}(M_0) \Rightarrow \varphi_2(N) > 0$

Объединим пункты выше в один

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \forall N \in U_\delta(M_0) \varphi_1 > 0, \varphi_2 > 0$$

$$\Rightarrow M \in U_\delta(M_0) \Rightarrow N \in U_\delta(M_0), A_1 > 0, A_1 C_1 - B_1^2 > 0$$

Из строчки выше мы видим, что по лемме 2 в точке  $N$  квадратич-

ная форма будет положительна другими словами

$$d^2 f(N) > 0$$

Из формулы Тейлора и пункта выше следует

$$\forall M \in \mathring{U}_\delta(M_0) \quad f(M) - f(M_0) = \frac{1}{2!} d^2 f(N) > 0$$

Получаем

$$f(M) > f(M_0), \quad \forall M \in \mathring{U}_\delta(M_0) \Rightarrow M_0 - \text{точка минимума функции}$$

2) Доказывается аналогично

3) Так как квадратичная форма знакопеременная, то найдётся такая  $\delta > 0$ , в окрестности которой будет справедливо

$$(A_1 C_1 - B_1^2)(AC - B^2) > 0, \quad (AC - B^2) < 0 \Rightarrow A_1 C_1 - B_1^2 < 0 \Rightarrow B_1^2 - A_1 C_1 > 0$$

Помним, что

$$d^2 f(N) = A_1 d^2 x + 2B_1 dx dy + C_1 d^2 y$$

Так как  $dy \neq 0$ , то пусть  $t = \frac{dx}{dy}$ . Разделим равенство на  $d^2 y$ , получим

$$\frac{d^2 f(N)}{d^2 y} = A_1 t^2 + 2B_1 t + C_1 = [D = A_1 C_1 - B_1^2 > 0] = A_1(t - \theta_1)(t - \theta_2)$$

$$\frac{d^2 f(N)}{d^2 y} = A_1(t - \theta_1)(t - \theta_2)$$

$$d^2 f(N) = A_1(\Delta x - \theta_1 \Delta y)(\Delta x - \theta_2 \Delta y) \quad dx = \Delta x \quad dy = \Delta y$$

Из множителей можно выделить уравнения прямых и рассмотреть изменение знака у  $d^2 f(N)$  (метод интервалов)



Рис. 3.

$$l_1 : (x - x_0) - \theta_1 (y - y_0) = 0$$

$$l_2 : (x - x_0) - \theta_2 (y - y_0) = 0$$

Таким образом мы видим

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon < \delta, \varepsilon > 0 \quad & \exists M_1 \ d^2 f(N_1) > 0 \ f(M) > f(M_1) \\ & \exists M_2 \ d^2 f(N_2) > 0 \ f(M) < f(M_2)\end{aligned}$$

■

**Теорема 2.3 (Достаточное условие экстремума функции  $n$  - переменных).**

Пусть есть функция  $u = f(M) = f(x_1, \dots, x_n) \in C^2(U(M_0))$  и  $df(M_0) = 0$ .

Обозначим  $d^2 f(M_0) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} dx_i dx_j$ ,  $a_{ij} = a_{ji}$

Тогда

- 1)  $d^2 f(M_0) > 0 \Leftrightarrow \Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0 \Rightarrow M_0$  — точка строгого минимума функции
- 2)  $d^2 f(M_0) < 0 \Leftrightarrow \Delta_1 < 0, \dots, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n \Rightarrow M_0$  — точка строгого максимума функции
- 3)  $d^2 f(M_0)$  неопределённая форма  $\Leftrightarrow$  в  $M_0$  — нет экстремума функции

**Доказательство.** Аналогично доказательству предыдущей теоремы, воспользуемся формулой Тейлора

$$f(M) = f(M_0) + \frac{1}{1!} df(M_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(N), \quad f(M) - f(M_0) = \frac{1}{2} d^2 f(N)$$

1)

$$\begin{aligned}\Delta_1(M_0) > 0, \dots, \Delta_n(M_0) > 0 \\ \Rightarrow \text{из критерия Сильвестра } \exists \delta > 0 \ \forall N \in U_\delta(M_0) \\ \Rightarrow \Delta_1(N) > 0, \dots, \Delta_n(N) > 0 \\ \Rightarrow d^2 f(N) > 0 \\ \Rightarrow f(M) > f(M_0), \ \forall M \in \mathring{U}_\delta(M_0) \Rightarrow M_0 \text{ — точка минимума функции}\end{aligned}$$

2) Доказывается аналогично

3) Принимаем без доказательств

■

**Замечание 2.1.** Если квадратичная форма равна нулю, то требуются дополнительные исследования. Например взятие производной выше второй, рассмотрение точек в  $\delta(M_0)$  окрестности

### 3. Условные экстремумы ФНП

**Пример 3.1.** Найти экстремум для функции  $u = x^2 + y^2$ , ограниченной поверхностью  $S : x + y = 1$



Рис. 4.

*Решение*

$$y = 1 - x \Rightarrow u = x^2 + 1 + x^2 - 2x$$

$$u'_x = 4x - 2 = 0$$

$$u''_x = 4 > 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

точек нет

Таким образом  $M_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  — экстремум (строгий минимум)

В следующем примере предыдущий алгоритм не работает.

**Пример 3.2.** Найти экстремум для функции  $u = x$ , ограниченной поверхностью  $S : x^2 + y^2 = 1$



Рис. 5.

Если взять частную производную по  $x$ , то получим ( $u'_x \neq 0$ ) что экстремум отсутствует, но по построению видно, что их два. Ошибка в том, что от "эллипса" мы перешли к "отрезку" путём взятия производной.

Чтобы избавиться от этого параметризуем  $x$  и  $y$  следующим образом

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, t \in [0; 2\pi]$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} u &= \cos(t) \\ u'_t &= -\sin(t) \\ t_{\min} &= 0, t_{\max} = \pi, \text{ видно по построению} \\ u''_t &= -\cos(t) \end{aligned}$$

Таким образом, ключевым моментом является сохранение гладкости функции при взятии производных (т.е. если )

**Замечание 3.1 (Условие связи. Условное).** Условие связи это функция(и)  $\varphi_n(M)$ , которая(ые) применяется(ются) к функции  $f(M)$ , чтобы наложить ограничения (условия) на неё.

**Определение 3.1 (Условный экстремум).** Пусть  $u = f(M) = f(x_1, \dots, x_n)$  определена в некоторой окрестности  $U(M_0)$ ,  $M(x_1^0, \dots, x_n^0)$  и выполнено условие связи  $S : \varphi_1(M) = 0, \dots, \varphi_k(M) = 0$ ,  $M_0 \in S$ . Тогда

- 1)  $M_0$  — точка локального условного минимума функции  $f(M)$  при условии  $M \in S \Leftrightarrow \exists \delta > 0 \forall M \in U_\delta(M_0) \cap S f(M) \geq f(M_0)$
- 2)  $M_0$  — точка локального условного максимума функции  $f(M)$  при условии  $M \in S \Leftrightarrow \exists \delta > 0 \forall M \in U_\delta(M_0) \cap S f(M) \leq f(M_0)$
- 3)  $M_0$  — точка условного экстремума функции  $f(M) \Leftrightarrow M_0$  точка условного минимума или условного максимума

Аналогичны будут рассуждения для строгого условного экстремума (помним, что он рассматривается в проколотой окрестности).

Повторимся, что условный экстремум отличается от обычного тем, что поиск ограничен  $S$

**Определение 3.2 (Формула Лагранжа задачи на усл. экстремум).**

Пусть  $f(M), \varphi_1(M), \dots, \varphi_k(M)$  — функции  $n$  переменных  $x_1, \dots, x_n$ , определенных в  $U(M_0)$ . Тогда функция

$$L(M, \lambda) = f(M) + \lambda_1 \varphi_1(M) + \dots + \lambda_k \varphi_k(M)$$

называется функцией Лагранжа задачи на условный экстремум функции  $f(M)$  при условии  $M \in S : \varphi_1 = \dots = \varphi_k = 0$

Формула Лагранжа позволяет связать функцию и дополнительное условие воедино, что очень удобно.

**Теорема 3.1 (Необходимый признак условного экстремума).** Пусть

$$f(M), \varphi_1(M), \dots, \varphi_k(M) \in C^{-1}(U(M_0))$$

и  $M_0$  — внутренняя точка гладкой части поверхности  $S$

$$S : \varphi_1(M) = 0, \dots, \varphi_k(M) = 0, \quad M_0 \in S$$

Обозначим через

$$L(M, \lambda) = f(M) + \lambda_1 \varphi_1(M) + \dots + \lambda_k \varphi_k(M)$$

функцию Лагранжа задачи на условный экстремум функции  $f(M)$ , где  $M \in S$ . Тогда, если точка  $M_0$  — условный экстремум функции  $f(M)$ , то существует  $\lambda_0(\lambda_1^0, \dots, \lambda_k^0)$ , для которой

$$dL(M_0, \lambda_0) = 0, \quad \text{где } M_0(x_1^0, \dots, x_n^0), \quad \lambda_0(\lambda_1^0, \dots, \lambda_k^0)$$

**Доказательство.** Рассмотрим следующий случай:  $n = 2, k = 1$  (размерность пространства и количество функций задающих поверхность), то есть  $u = f(x, y), (x, y) \in U(M_0), M_0(x_0, y_0), M_0$  — точка условного экстремума  $S : \varphi(x, y) = 0$

Так как  $\varphi(x, y)$  — гладкая функция, то мы можем её параметризовать

$$S : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in U(t_0)$$

Тогда

$$M_0(x, y) = M_0(x(t_0), y(t_0)), \quad x(t), y(t) \in C'(U(t_0))$$

И следовательно по условию

$$\forall t \in U(t_0) \quad \varphi(x(t), y(t)) = 0$$



Рис. 6. вместо  $z$  тут  $u$

При этом  $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0)$ , то есть параметризация "хорошая" (Важность факта можно понять из примера 2).

Таким образом задача на условный экстремум переходит в задачу на обычный экстремум функции  $u = f(x(t), y(t))$  (таким образом получили функцию от одной переменной).

По формуле частной производной

$$u'(t) = f'_x x'_t + f'_y y'_t$$

Аналогично для  $\varphi'(t)$ .

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} f'_x x'_t + f'_y y'_t = 0 \\ \varphi'_x x'_t + \varphi'_y y'_t = 0 \end{cases}$$

Так как  $M_0$  - условный экстремум (по усл.), то  $t_0$  - экстремум функции  $u(t)$ , значит  $u'_t(t_0) = 0$ , т.е.  $t_0$  - решение первого уравнения системы. Причём мы имеем два решения: в  $t_0$  и когда  $x'_t, y'_t = 0$  (это справедливо, т.к.  $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0)$ )

Так как по условию  $\varphi(t) = 0$ , то и  $\varphi'(t) = 0$  для любого  $t$ . Значит, второе уравнение справедливо всегда.

Получается по теореме Крамера следует

$$\begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ \varphi'_x & \varphi'_y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{f'_x(M_0)}{\varphi'_x(M_0)} = \frac{f'_y(M_0)}{\varphi'_y(M_0)} = -\lambda_0$$

Примечание. Если знаменатель равен нулю, то и числитель будет ему равен. Поэтому всё ОК

Таким образом из отношения можно получить следующую систему

$$\begin{cases} f'_x(M_0) + \lambda_0 \varphi'_x(M_0) = 0 \\ f'_y(M_0) + \lambda_0 \varphi'_y(M_0) = 0 \end{cases}$$



Добавим ещё одно уравнение из условия, получим

$$\begin{cases} f'_x(M_0) + \lambda_0 \varphi'_x(M_0) = 0 \\ f'_y(M_0) + \lambda_0 \varphi'_y(M_0) = 0 \\ \varphi(M_0) = 0 \end{cases}$$

Которая на самом деле ни что иное как

$$\begin{cases} L'_x(M_0, \lambda_0) = 0 \\ L'_y(M_0, \lambda_0) = 0 \\ L'_\lambda(M_0) = 0 \end{cases}$$

Если мы сложим все три равенства то получим производную функции Лагранжа, которая равна нулю

$$dL(M_0, \lambda_0) = 0$$

■

**Теорема 3.2 (Необходимый признак усл. экстремума в общем случае).**

*Пусть*

$$\begin{aligned} & \exists M(x_1, \dots, x_n), \exists M_0(x_1^0, \dots, x_n^0) \\ & f(M), \varphi_1(M), \dots, \varphi_k(M) \in C^2(U(M_0)) \\ & L(M, \lambda) = f(M) + \lambda_1 \varphi_1(M) + \dots + \lambda_k \varphi_k(M) \end{aligned}$$

*и  $\exists \lambda_0(\lambda_1^0, \dots, \lambda_k^0)$  для которой  $dL(M_0, \lambda_0) = 0$  Рассмотрим*

$$S : d\varphi_j(M_0) = 0 \quad j = 1, \dots, k$$

$$S' : \sum_{i=1}^n \frac{\delta \varphi_j}{\delta x_i} dx_i \quad j = 1, \dots, k$$

*$S'$  — система  $k$  линейных однородных уравнений относительно  $n$  неизвестных  $dx_1, \dots, dx_n$  размерность  $m = n - r$ ,  $r$  — ранг матрицы поэтому  $dx_1, \dots, dx_n$  — независимые (свободные) переменные.*

*Второй дифференциал*

$$d^2L = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\delta^2 L(M_0, \lambda_0)}{\delta x_i \delta x_j} dx_i dx_j = q(dx_1, \dots, dx_m)$$

*Тогда*

1)  $q > 0 \Rightarrow M_0$  — точка строгого условного минимума функции

2)  $q < 0 \Rightarrow M_0$  — точка строгого условного максимума функции

3)  $q$  — неопределённая форма  $\Rightarrow$  в  $M_0$  нет экстремума

**Доказательство.** Принимаем без доказательств ■

**Замечание 3.2.** Условие  $q > 0$  или  $q < 0$  проверяется с помощью критерия Сильвестра. Данный факт используется для доказательства теоремы.

**Замечание 3.3.** По аналогии со вторым параграфом. Требуются дополнительные исследования, если второй дифференциал равен нулю.

**Пример 3.3.** Дано:

$$u = x^2 + y^2 + z^2 \quad S : xy + z = 2$$

Решение:

Поверхность  $S$  можно описать одной гладкой функцией (т.е.  $\varphi = xy + z - 2$ ). Тогда получаем

$$L = x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda(xy + z - 2)$$

Найдём частные производные

$$\begin{aligned} L'_x = 2x - 2\lambda y = 0 \quad L'_y = 2y - 2\lambda x = 0 \quad L'_z = 2z - 2\lambda \\ L'_\lambda = xy + z - 2 = 0 \end{aligned}$$

Решаем систему и получаем следующие подозрительные точки

$M_0(0, 0, 2)$	$M_1(1, 1, 1)$	$M_2(-1, -1, 1)$
$\lambda_0 = 2$	$\lambda_1 = 1$	$\lambda_2 = -1$

Теперь требуется проверить точки на экстремумы. Найдём производные

$$\begin{aligned} L''_{xx} = 2 \quad L''_{xy} = -2\lambda \quad L''_{xz} = 0 \\ L''_{yy} = 2 \quad L''_{yz} = 0 \\ L''_{zz} = 2 \end{aligned}$$

Дважды продифференцируем функцию Лагранжа. Помним, что  $\lambda$  – коэффициент. В итоге получаем

$$d^2L = 2(dx)^2 + 2(dy)^2 + 2(dz)^2 - 4\lambda dx dy$$

Также  $S' : y dx + x dy + dz = 0$

При подстановке  $M_0$  и с помощью значений из  $S'$  получаем значение функции Лагранжа.

$$q_0 = 2(dx)^2 - 8 dx dy + 2(dy)^2$$

по критерию Сильвестра  $q_0$  – знакопеременна. Значит в  $M_0$  нет экстремума. При  $M_{1,2}$

$$q_{1,2} = 4(dx)^2 + 4(dy)^2$$

видим, что  $M_{1,2}$  – точка условного минимума

## 4. Отыскание max и min значений для ФНП

**Пример 4.1.** Найти экстремумы для функции  $u = x^2 + y^2$  ограниченной поверхностью  $D : |x| + 2|y| \leq 5$

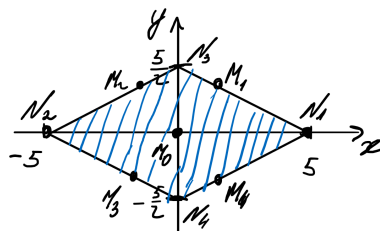


Рис. 7.

Таким образом, мы имеем дело с компактом (огр. множеством).

1)  $u'_x = 2x = 0, u'_y = 2y = 0$

$M_0(0,0), u(M_0) = 0$  — минимум

2) Для удобства будем рассматривать первую четверть, так как компакт представляет собой ромб, который симметричен относительно осей (Замечание. Область определена через 4 дифференцируемые функции).

$$L_1 = x^2 + y^2 + \lambda(x + 2y - 5)$$

$$dL_1 = (2x + \lambda)dx + (2y + 2\lambda)dy + (x + 2y - 5)d\lambda = 0$$

$$\begin{cases} 2x + \lambda = 0, & x = -\frac{\lambda}{2} \\ 2y + 2\lambda = 0, & y = -\lambda \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

Подставим значения  $x$  и  $y$  в последнее уравнение, получим

$$\lambda = -2$$

следовательно экстремум в точке  $M_1(1,2)$

Так как мы рассматриваем первую четверть, то в оставшихся трёх получим  $M_2(-1,2), M_3(-1,-2), M_4(1,-2)$

Для данных точек значение функции

$$u(M_{1,2,3,4}) = 1 + 4 = 5$$

3) Так как функция компакта не является гладкой, то рассмотрим следующие точки:

$$\begin{array}{ll} N_1(5, 0), N_2(-5, 0) & N_3(0, \frac{5}{2}), N_4(0, -\frac{5}{2}) \\ u(N_{1,2}) = 25 & u(N_{3,4}) = \frac{25}{4} \end{array}$$

Таким образом  $u_{max} = u(N_{1,2}) = 25$ .

Окончательный ответ:

$$\forall (x, y) \in D, 0 \leq u(x, y) \leq 25$$

**Замечание 4.1 (Как выглядит в общем случае).** Пусть  $u = f(x_1, \dots, x_n)$  определена в замкнутой односвязанной области  $D : \varphi_1(M) \geq 0, \dots, \varphi_k(M) \geq 0$

1)  $M \in \mathring{D} : \varphi_1(M) > 0, \dots, \varphi_k(M) > 0$   
 Должно соблюдаться  $f(M), \varphi_1(M), \dots, \varphi_k(M) \in C'(\mathring{D})$  — гладкая по каждой части границы  
 Для  $df(M) = 0 \exists M_1, \dots, M_l \in \mathring{D}$  — гладкая  $n$ -мерная часть

2) Гладкая  $(n - 1)$  мерная часть границы  $D$

$$\begin{array}{ll} L_1 = f + \lambda_1 \varphi_1 & , \dots, L_k = f + \lambda_k \varphi_k \\ dL_1 = 0 & dL_k = 0 \\ N_{11}, \dots, N_{1l_1} + \lambda & N_{11}, \dots, N_{1l_k} + \lambda \end{array}$$

$$\varphi_1(N_{11}) = 0, \varphi_2(N_{11}) > 0, \dots, \varphi_k(N_{11}) > 0$$

3) Гладкая  $(n - 2)$  мерная часть границы  $D$ . Рассмотрим функции вида

$$L = f(M) + \lambda_i \varphi_i(M) + \lambda_j \varphi_j(M)$$

$$\begin{array}{ll} S : \varphi_i(M) = 0, & \varphi_j(M) = 0 \quad (i \neq j) \\ 1 \leq i \leq k & 1 \leq j \leq k \end{array}$$

Рассматриваем

$$dL(M, \lambda_i, \lambda_j) = 0$$

Получаем следующий набор точек  $K_1, \dots, K_s$

...

$n + 1$ ) Рассматриваем  $\theta$ -мерное гладкое пространство (вершины или "плохие" точки). Получим следующее множество:  $P_1, \dots, P_q$

Таким образом, ответ:

$$U_{max} = \max\{u(M_1), \dots, u(P_q)\}$$
$$U_{min} = \min\{u(M_1), \dots, u(P_q)\}$$

Тут надо написать обобщающий алгоритм, т.е. что по факту для поиска экстремумов мы рассматриваем множества различных функций Лагранжа для различного количества границ.

## Часть II

# Обыкновенные дифференциальные уравнения и их системы

## 5. Введение. Дифференциальные уравнения 1-го порядка

**Определение 5.1 (Дифференциальное уравнение).** Уравнение вида  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$  называют обыкновенным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка. Решением называют функцию  $y = y(x)$ , которая  $n$  раз дифференцируема на интервале  $I$ :

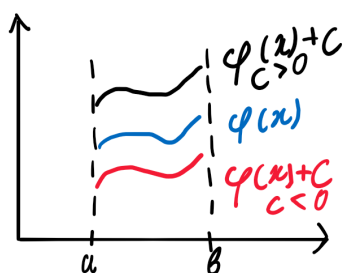
$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

**Определение 5.2 (ДУ разрешённое относительно старшей производной).** Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

то тогда его называют обыкновенным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка разрешённого относительно старшей производной

**Пример 5.1 (моделный).** Пусть  $f(x) \in C'_{(a,b)}$ ,  $y' = f(x)$  — дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка, разрешённое относительно 1й производной.



Если  $y = y(x)$  решение, то

$$y'(x) = f(x)$$

$$y = \int f(x)dx + C = \varphi(x) + C \quad x \in (a, b)$$

Если  $y = \psi(x)$  решение ДУ, то

$$\exists C, \forall x \in (a, b) \quad \psi = \varphi(x) + C$$

Для любого  $(x_0, y_0)$  в полосе, т.е. для  $x_0 \in (a, b)$  существует решение  $y = \varphi(x) - \varphi(x_0) + y_0$ , ( $y_0 \in \mathbb{R}$ )

Таким образом мы видим, что для одного дифференциального уравнения существует множество решений. Для конкретизации задачи используют условие Коши.

**Определение 5.3 (Задача Коши).** Система вида

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases} \quad (\text{конкретизация первообразной})$$

Называется условием Коши, а задача о поиске решения это задача Коши



Рис. 8.

**Теорема 5.1 (Сущ. и ед. решения задачи Коши для ДУ 1го порядка).**

Пусть  $f(x, y) \in C(U(M_0))$  и  $\exists f'_y(M) \in C(U(M_0))$ . Тогда существует такая  $\delta > 0$  и существует решение  $y' = y(x) \in U_\delta(M_0)$  задачи Коши с соответствующим условием  $y' = f(x)$   $y(x_0) = y_0$  и такое решение в  $U_\delta(x_0)$  единственно

**Доказательство.** Принимаем без доказательств ■

**Определение 5.4 (Поле направлений ДУ).** Пусть

$$y' = f(x, y), \quad f(x, y) \in C(D)$$

$M_0(x_0, y_0)$  — любая внутренняя точка области  $D$ . Запишем уравнение касательной к графику решения задачи Коши

$$l_0 : Y - y_0 = f(x_0, y_0) (X - x_0)$$



а задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

Пусть  $\vec{\tau}$  — единичный вектор касательной. Тогда множество  $\{\vec{\tau}\}$  — поле направлений



Рис. 9. Поле направлений

Вместе с понятием поля направлений вводят (для удобства) такую вещь как изоклины, т.е. линии, вдоль которых поле имеет одно и тоже направление. Задаётся уравнением  $f(x, y) = C$

Тут важно заметить, что понятие поля направлений очень сильно связано с физикой, так как с помощью них можно легко описывать физические поля (электрическое, магнитное).

С помощью полей направлений доказывается теорема о единственности задачи Коши.

**Пример 5.2.** Дано:

$$y' = \frac{y}{x}$$

Требуется построить поле направлений.

Решение.



Изоклины для данного ДУ задаются уравнением

$$\frac{y}{x} = C$$

Получается, изоклины представляют собой прямые, проходящие через начало координат. Уравнение изоклин  $y = Cx$ .

Если подставлять пары  $(x, y)$ , то мы заметим, что вектора поля направлений совпадают с изоклинами.

Таким образом поле направлений состоит из множества прямых, проходящих через начало отсчёта (Точка  $(0, 0)$  выколота).

**Пример 5.3.** Дано

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Требуется построить поле направлений.

Решение.

Изоклины для данного ДУ задаются уравнением

$$-\frac{x}{y} = C$$

Аналогично примеру выше, видим что изоклины проходят через начало координат.

Рассмотрим несколько изоклин.

- 1)  $C = -1$ , тогда  $y = x$ . Прямая в первой и третьей четверти. Для неё значение углового коэффициента  $k = -1$ . Следовательно угол равен  $\frac{3\pi}{4}$  для первой четверти
- 2) Рассмотрим  $C \in (-\infty; -1)$ , тогда нетрудно заметить, что угол  $\varphi$  соответственно изменялся для первой четверти от  $\frac{\pi}{2}$  до  $\frac{3\pi}{4}$  (оба не включительно).
- 3) Рассмотрим  $C \in (-1; 0)$ . Тогда угол  $\varphi$  соответственно изменялся для первой четверти от  $\frac{3\pi}{4}$  до  $\pi$ .

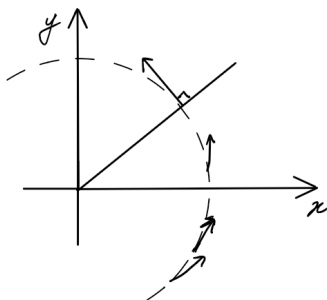


Рис. 10. Иллюстрация примера

**Определение 5.5 (Общее решение).** Пусть  $y' = f(x, y)$  — ДУ первого порядка. Функция  $y = \varphi(x, C)$  называется общим решением этого ДУ если:

- 1)  $\forall C \in \mathbb{R}$   $y$  как функция от  $x$  является решением ДУ
- 2) Для любого решения  $y = y^*(x)$

$$\exists C^* \in \mathbb{R}, \quad y^*(x) \stackrel{(x)}{\equiv} \varphi(x, C^*)$$

**Замечание 5.1.** Уравнение  $\Phi(x, y, C) = 0$  — называется общим интегралом ДУ  $y' = f(x, y)$  если:

- 1) всякая неявная функция  $y = y(x, C)$  при фиксированном  $C$  является решением ДУ
- 2) всякое решение задаётся неявной функцией  $y = y(x, C^*)$  для некоторого  $C^*$

**Пример 5.4.** Для  $y' = \frac{y}{x}$  очевидно из рисунка, что общее решение

$$y = Cx$$

**Пример 5.5.** Для  $y' = -\frac{x}{y}$  очевидно из рисунка, что общий интеграл

$$x^2 + y^2 = C^2$$

Общее решение отсутствует

**Замечание 5.2.** Точка особая, если нарушается существование и единственность задачи Коши

**Замечание 5.3.**  $y = \varphi(x, C)$  — «общее» решение,  $y = \hat{y}(x)$  — особое решение по отношению к общему решению.

**Замечание 5.4.** Дано  $y' = f(x)$ , тогда

$$y = \int f(x) dx + C$$

называется решением ДУ «в квадратурах».

Важно заметить, что интегралов может быть несколько. Например,

$$y^{(n)} = f(x)$$

интегрируется в квадратурах, через последовательное интегрирование. Другим примером является сумма интегралов.

## 6. ДУ в "дифференциалах". ДУ с разделяющимися переменными

**Определение 6.1.** Пусть  $M(x, y), N(x, y) \in C(D)$ . Тогда уравнение вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

называется ДУ в "дифференциалах" при этом

- 1) Решение этого ДУ - дифференциальные уравнения  $y = y(x), x \in I$ , где  $I$  — отрезок, причём

$$\forall x \in I \quad M(x, y(x)) + N(x, y(x))y'(x) = 0$$

- 2) кривая линия  $L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in I$  — называется интегральной кривой для данного ДУ. Это эквивалентно следующему  
 $L$  — гладкая кривая и

$$\begin{aligned} \forall t \in I, \quad M(x(t), y(t))x'_t + N(x(t), y(t))y'_t &= 0 \\ dx &= x'_t dt, \quad dy(t) = y'_t dt \end{aligned}$$

**Замечание 6.1.** Есть связь между ДУ решённым относительно производной и ДУ в «дифференциалах»

$$\begin{aligned} y' = f(x, y) &\Leftrightarrow f(x, y)dx - dy = 0 \\ Mdx + Ndy &= 0 \mid \div dx \\ M + Ny' &= 0 \\ y' &= -\frac{M}{N} \end{aligned}$$

Рассмотрим два примера отражающих этот факт.

**Пример 6.1.** Дано

$$y' = \frac{y}{x}$$

Тогда уравнение в «дифференциалах»

$$y dx - x dy = 0$$

Только одна особая точка. Если  $x = 0$ , то интегральная кривая

**Пример 6.2.** Дано

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Тогда уравнение в «дифференциалах»

$$y dy + x dx = 0$$

*Интегральные кривые — замкнутые окружности*

**Определение 6.2.** ДУ вида  $f(x) dx = g(y) dy$  — называется ДУ с разделёнными переменными. Причём  $f(x) \in C(I)$ ,  $g(y) \in C(J)$ .  
 $I, J$  — интервалы

**Теорема 6.1 (Общий интеграл ДУ с разделяющимися переменными).**  
В условиях определения выше пусть  $F(x)$  первообразная к  $f(x)$  на  $I$ , а  $G(y)$  для  $g(y)$  на  $J$   
Тогда  $F(x) = G(y) + C$  является общим интегралом ДУ  $f(x)dx = g(y)dy$

**Замечание 6.2.** В данной теореме мы просто говорим о взаимной связи первообразных с производными

**Доказательство.** По условию:

$$L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in (\alpha; \beta)$$

Т.е. дана интегральная кривая ДУ  $f(x)dx = g(y)dy$ . Это эквивалентно

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad F(x(t)) = G(y(t)) + C$$

$\Rightarrow$  Рассмотрим  $f(x(t)) x'_t = g(y(t)) y'_t$ . Тогда

$$\begin{aligned} f(x(t)) x'_t &= g(y(t)) y'_t \\ (F(x(t)))'_t &= (G(y(t)))'_t && \text{Зам. } (F(x(t)))' = f(x(t)) x'_t \\ (F(x(t)) - G(y(t)))'_t &= 0 \end{aligned}$$

Так как производная равна нулю, то при взятии первообразных справа будет константа, получаем

$$\exists C \equiv const \quad t \in (\alpha; \beta), \quad F(x(t)) = G(y(t)) + C$$

⇐ Если  $\forall t \in (\alpha; \beta)$   $F(x(t)) = G(y(t)) + C$  то

$$\begin{aligned} [F(x(t))]'_t &= [G(y(t))]'_t + [C]'_t \\ f(x(t)) x'_t &= g(y(t)) y'_t \end{aligned}$$

Таким образом  $L$  — интегральная кривая ДУ  $f(x) dx = g(y) dy$

■

**Замечание 6.3.** Решение в "квадратурах":

$$\int f(x) dx = \int g(y) dy + C$$

**Пример 6.3.** Дано  $y dx - x dy = 0$ . Решить ДУ.

$$\begin{aligned} y dx - x dy &= 0 \\ \frac{dx}{x} &= \frac{dy}{y} \\ \int \frac{dx}{x} &= \int \frac{dy}{y} \\ \ln(|x|) &= \ln(|y|) - \ln(C_1) \quad C = \ln(C_1) \\ y &= C x \end{aligned}$$

Ответ:  $y = C x$

**Пример 6.4.** Дано

$$x dx - y dy = 0$$

Требуется решить ДУ.

Решение

$$\begin{aligned} x dx - y dy &= 0 \\ \int x dx &= - \int y dy \end{aligned}$$

Для удобства возьмём константу  $\frac{C^2}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2} &= -\frac{y^2}{2} + \frac{C^2}{2} \\ x^2 + y^2 &= C^2 \end{aligned}$$

Ответ:  $x^2 + y^2 = C^2$

**Определение 6.3.** ДУ вида

$$y' = f(x)g(y) \quad f(x), g(y) \in C$$

называется ДУ с разделяющимися переменными

**Замечание 6.4 (Общий интеграл ДУ с разделяющимися переменными).**

Возьмём  $y' \mapsto \frac{dy}{dx}$ . Заменим  $y'$  и умножим выражение из определения на  $dx$ , получим

$$\begin{aligned} y' &= f(x)g(y) \\ \frac{dy}{dx} &= f(x)g(y) \\ dy &= f(x)g(y)dx \\ \frac{dy}{g(y)} &= f(x)dx \\ \int \frac{dy}{g(y)} &= \int f(x)dx + C \end{aligned}$$

Таким образом, получили общий интеграл.

*Замечание.* Было деление на  $g(y)$ . В общем случае также требуется рассматривать  $g(y) = 0$

**Пример 6.5.** Дано

$$y' = \frac{y}{x}$$

Решение

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y}{x} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x} \\ \frac{dy}{y} &= \frac{dx}{x} \\ \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{x} \\ \ln |y| &= \ln |x| + \ln |C_1| \\ y &= Cx \end{aligned}$$

**Пример 6.6.** Дано

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Решение

$$\begin{aligned}y' &= -\frac{x}{y} \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \\ y \, dy &= -x \, dx \\ \int y \, dy &= -\int x \, dx \\ \frac{y^2}{2} &= -\frac{x^2}{2} + \frac{C^2}{2} \\ y^2 + x^2 &= C^2\end{aligned}$$

**Определение 6.4.** ДУ 1го порядка приводящееся к ДУ с разделяющимися переменными

$$y' = f(ax + by + c) \quad ab \neq 0, \quad f(z) \in C(I)$$

**Замечание 6.5.** Введём

$$z = ax + by + C, \quad z = z(x)$$

Тогда

$$\begin{aligned}z' &= a + by' = [y' = f(z(x)) = f(x)] = a + bf(x) \\ z' &= a + bf(x) \\ \frac{dz}{dx} &= a + bf(x) \\ dx &= \frac{dz}{a + bf(x)} \\ x + C &= \int \frac{dz}{a + bf(x)}\end{aligned}$$

Получаем систему

$$\begin{cases} x + C = \int \frac{dz}{a + bf(x)} \\ z = ax + by + C \end{cases}$$

Отдельно требуется рассмотреть случай  $a + bf(z) = 0$

**Пример 6.7.** Дано

$$y' = \cos(x - y)$$



*Решение.*

$$\begin{aligned}z &= x - y \\z' &= 1 - y' \quad y' = \cos(z) \\z' &= 1 - \cos(z)\end{aligned}$$

*Получили ДУ с разделяющимися переменными. Решаем*

$$\begin{aligned}\frac{dz}{1 - \cos(z)} &= dx \\ \int \frac{dz}{1 - \cos(z)} &= \int dx \\ \int \frac{dz}{2 \sin^2\left(\frac{z}{2}\right)} &= x + C \\ \operatorname{ctg}\left(\frac{z}{2}\right) &= x + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z &= 2 \operatorname{arctg}(-x - C) + 2\pi k \quad k \in \mathbb{N} \\ x - y &= 2 \operatorname{arctg}(-x - C) + 2\pi k \quad k \in \mathbb{N} \\ y &= x - 2 \operatorname{arctg}(-x - C) - 2\pi k \quad k \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

*Не забываем, что мы делили. Следовательно, требуется рассмотреть частный случай.  $1 - \cos(z) = 0$*

$$\begin{aligned}1 - \cos(z) &= 0 \\ \cos(x - y) &= 1 \\ x - y &= -2\pi k \quad k \in \mathbb{N} \\ y &= x + 2\pi k \quad k \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

*Проверим является ли значение выше упущенным решением.*

$$\begin{aligned}y' &= 1 \quad (\text{производная взята из равенства выше}) \\ \cos(x - y) &= \cos(-2\pi k) = 1 \quad (\text{подстановка в условие})\end{aligned}$$

*Левая и правая части условия равны, следовательно  $y = x + 2\pi k$  входит в множество решений.*

*Множество решений выглядит следующим образом*



Рис. 11.

## 7. Однородные ДУ первого порядка

**Определение 7.1.** Пусть функция  $f(t)$  определена и непрерывна на некотором интервале и  $f(t) \not\equiv t$ . Тогда ДУ

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

называются однородными ДУ первого порядка.

**Замечание 7.1.**  $F(x_1, \dots, x_n)$  называются однородными функциями веса  $k$ , если

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad F(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Пример.  $f\left(\frac{ty}{tx}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right)$  — однородное ДУ веса  $k = 0$

**Замечание 7.2** (Как решить однородное ДУ). Дано

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Введём

$$t(x) = t = \frac{y}{x}$$

Тогда

*textcolorredmym опечатка?*

$$y = tx, \quad y' = t'x + t = f(t)$$

Таким образом получаем ДУ с разделяющимися переменными

$$t' = \frac{f(t) - t}{x}$$

Решаем

$$\frac{dt}{dx} = \frac{f(t) - t}{x}$$

Так как мы будем делить на  $f(t) - t$ , то потребуется рассмотреть два случая

$$1) f(t) - t \neq 0$$

$$2) f(t) - t = 0$$

$$\int \frac{dt}{f(t) - t} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad f(\alpha) = \alpha, \quad y = \alpha x$$

$$\ln(|x|) = \int \frac{dt}{f(t) - t} + \ln(C) \quad y' = \alpha = f(\alpha) = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\begin{cases} x = Ce^{\int \frac{dt}{f(t)-t}} \\ y = tx \end{cases}$$

**Пример 7.1.** Дано

$$y' = \frac{x y + y^2}{x^2}$$

Решение.

$$y' = \frac{x y + y^2}{x^2} = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Делаем замену

$$t = \frac{y}{x}, \quad y = t x \quad dy = x dt + t dx$$
$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{x dt}{dx} + t = t' x + t$$

Подставляем и получаем

$$t' x + t = t + t^2$$
$$\frac{dt}{t^2} = \frac{dx}{x}$$
$$-\frac{1}{t} = \ln|x| - \ln(C) = -\frac{x}{y}$$
$$\frac{x}{y} = \ln\left(\frac{C}{x}\right) \quad C \neq 0$$
$$y = \frac{x}{\ln\left(\frac{C}{x}\right)} \quad C \neq 0$$

Также требуется рассмотреть частный случай, когда  $t = 0$ , тогда  $y = 0$

**Замечание 7.3.** Дано:

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$$

где

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad c_1^2 + c_2^2 \neq 0$$

Вопрос. Как превести эту дробь к однородному ДУ 1-го порядка?  $f\left(\frac{y}{x}\right)$

Ответ:

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Тогда по теореме Крамера получим, что существует единственное решение  $(\alpha; \beta)$  этой системы линейных алгебраических уравнений.

Сделаем замену

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha \\ y = y_1 + \beta \end{cases}$$

Получим

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 &= a_1(x_1 + \alpha) + b_1(y_1 + \beta) + c_1 = \\ &= a_1 x_1 + b_1 y_1 + \underbrace{a_1 \alpha + b_1 \beta + c_1}_{0 \text{ (как корни ур-я)}} = \\ &= a_1 x_1 + b_1 y_1 \end{aligned}$$

Помимо этого, если взять дифференциалы от заменённых функций, получим

$$\begin{cases} dx = dx_1 \\ dy = dy_1 \end{cases}$$

Таким образом мы можем перейти к отношению линейных функций. Из первоначального уравнения получаем.

$$\begin{aligned} y' = \frac{dy}{dx} &= \frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) = f\left(\frac{a_1 x_1 + b_1 y_1}{a_2 x_1 + b_2 y_1}\right) = \\ &= f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{y_1}{x_1}}{a_2 + b_2 \frac{y_1}{x_1}}\right) = g\left(\frac{y_1}{x_1}\right) \end{aligned}$$

Таким образом

$$\frac{dy_1}{dx_1} = g\left(\frac{y_1}{x_1}\right)$$

получили однородное ДУ 1-го порядка, где

$$\begin{cases} x_1 = x - \alpha \\ y_1 = y - \beta \end{cases}$$

**Пример 7.2.** Дано

$$y' = \frac{x + y + 1}{x - y}$$

Решение.

1) Найдём коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$ . Для этого рассмотрим систему.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 1 = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \quad \text{Получаем } \alpha = \beta = -\frac{1}{2}$$

2) Зная  $\alpha$  и  $\beta$  Делаем замену  $x$  и  $y$  на

$$x = x_1 - \frac{1}{2} \quad y = y_1 - \frac{1}{2}$$

Получаем

$$y' = \frac{x + y + 1}{x - y} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}$$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}$$

3) Пусть  $t = \frac{y_1}{x_1}$ , следовательно  $y_1 = t x_1$ . Тогда

$$dy_1 = x_1 dt + t dx_1 \Rightarrow \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dt}{dx_1} x_1 + t$$

А после замены  $y_1 = t x_1$  справа получаем

$$\frac{x_1 + t x_1}{x_1 - t x_1} = \frac{1 + t}{1 - t}$$

Таким образом

$$\frac{dt}{dx_1} x_1 + t = \frac{1 + t}{1 - t}$$

$$\frac{dt}{dx_1} x_1 = \frac{1 + t - t + t^2}{1 - t}$$

$$\frac{1 - t}{1 + t^2} dt = \frac{dx_1}{x_1}$$

$$\int \frac{1 - t}{1 + t^2} dt = \ln|x_1|$$

После интегрирования получаем

$$\ln|x_1| + C_1 = \arctg(t) - \frac{1}{2} \ln|1 + t^2|$$

Делаем обратную замену  $t = \frac{y_1}{x_1}$ , получаем

$$\ln|x_1| + C_1 = \arctg\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - \frac{1}{2} \ln\left|1 + \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2\right|$$

$$\cancel{\ln|x_1|} + C_1 = \arctg\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - \frac{1}{2} \ln|x_1^2 + y_1^2| + \cancel{\ln|x_1^2|}$$

Ответ

$$\arctg\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - \frac{1}{2} \ln|x_1^2 + y_1^2| = C$$

## 8. Линейные дифференциальные уравнения. ДУ Бернулли

**Определение 8.1** (Линейное ДУ). ДУ вида

$$a(x) y' + b(x) y + c(x) = 0$$

называется линейным дифференциальным уравнением, а

$$y' + p(x) y = q(x)$$

является приведённой формой линейного ДУ первого порядка, где

$$p(x) \in C_{(a; b)} \quad q(x) \in C_{(a; b)}$$

**Определение 8.2.** Пусть

$$y' + p(x) y = q(x) \tag{1}$$

$$y' + p(x) y = 0 \tag{2}$$

ДУ (2) - линейное однородное ДУ, соответствующее линейному ДУ (1)

**Замечание 8.1.** Метод Лагранжа для решения линейных неоднородных ДУ первого порядка, в вариации произвольной постоянной  
Дано

$$y' + p(x) y = q(x)$$

Решение

1) Ищем решение для однородного уравнения

$$y' + p(x) y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x) dx$$

$$\ln(y) = - \int p(x) dx + \ln(C)$$

$$y = C v(x)$$

Замечание.  $v(x) = e^{-\int p(x) dx}$

Таким образом, получили **частное** решение для однородного ДУ.

2) ищем решение первоначального ДУ в виде  $y = C(x) v(x)$ , где  $C(x)$  — постоянная, зависящая от  $x$  (произвольная постоянная)

$$\begin{aligned} y &= C(x) v(x) \\ y' &= C' v + C v' \end{aligned}$$

Подставим в уравнение из условия

$$\begin{aligned} C' v + C v' + p C v &= q \\ C' v + C (v' + p v) &= q \end{aligned}$$

Так как на первом шаге мы рассматривали  $v' + p v = 0$ , то уравнения выше получаем

$$\begin{aligned} C (v' + p v) &= 0 \\ C' v(x) &= q(x) \\ C' &= \frac{q(x)}{v(x)} \\ C(x) &= \int \frac{q(x)}{v(x)} dx + const \end{aligned}$$

Подставим значение  $v(x)$  из шага 1, получим

$$C(x) = \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + const \quad x \in (a; b)$$

Или

$$C(x) = u(x) + const$$

3) полное решение ДУ имеет вид

$$y = C(x) v(x) = (u(x) + C) v(x) = u(x) v(x) + C v(x)$$

В общем виде

$$y = y_{\text{(частное решение неоднородного)}} + C y_{\text{(частное решение однородного)}}$$

**Замечание 8.2 (По поводу решения задач Коши).** Пусть

$$p(x), q(x) \in C_{(a; b)}, \quad x_0 \in (a; b), \quad y_0 \in \mathbb{R}$$

Тогда задача Коши

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y'|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$



имеет единственное решение, определённое на  $(a; b)$  вида

$$y = \underbrace{e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}}_{v(x)} \left( \underbrace{y_0}_c + \underbrace{\int_{x_0}^x \underbrace{g(s)e^{\int_{x_0}^s p(t)dt} ds}_{\frac{g(s)}{v(s)}}}_{u(x)} \right)$$

**Пример 8.1.** Дано

$$xy' + y = 3x^3$$

Решение.

Делим на  $x$  получим

$$y' + \frac{y}{x} = 3x^2$$

1) Решаем однородное уравнение. Находим решение для  $\dot{y} = v(x)$

$$v' + \frac{v}{x} = 0$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln(v) = -\ln(x) + \ln(C)$$

$$v = \frac{C}{x} \text{ — общее решение}$$

$$\text{При } C = 1 \quad v(x) = \frac{1}{x} \text{ — частное решение}$$

2) Решаем общее уравнение. где  $y = C(x) v(x) = v(x) u(x)$

$$\text{Так как } y = \frac{u}{x}, \text{ то } y' = \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2}$$

Подставляем в первоначальное уравнение. Получаем

$$\frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} + \frac{u}{x^2} = 3x^2$$

$$u' = 3x^3$$

$$u(x) = \frac{3}{4}x^4 + c$$

3) Совмещаем результаты шагов 1 и 2. Получаем ответ

$$y = \frac{3}{4}x^4 + \frac{c}{x} \quad x \in \mathbb{R}$$

**Определение 8.3.** ДУ вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$$

называется ДУ Бернулли

**Замечание 8.3 (Решение ДУ Бернулли).** ДУ Бернулли интегрируется методом Лагранжа в вариации произвольной постоянной

- 1) Ищем  $v = v(x)$  частное решение соответствующее линейному однородному ДУ

$$\begin{aligned} v' + p(x)v &= 0 \\ v(x) &= e^{-\int p(x) dx} \end{aligned}$$

- 2) Ищем общее решение ДУ для  $u = u(x)$ , где  $y = u(x)v(x)$

$$\begin{aligned} u'v + \underbrace{u(v' + pv)}_{=0 \text{ (см. зам. 2)}} &= qu^\alpha v^\alpha \\ u'v(x) &= q(x)u^\alpha v^\alpha(x) \end{aligned}$$

*Замечание.* Нам известно то, что с аргументом.  
Далее разделим на  $u^\alpha v(x)$

$$\begin{aligned} \frac{du}{u^\alpha} &= q(x)v^{\alpha-1}(x)dx \\ \int \frac{du}{u^\alpha} &= \int q(x)v^{\alpha-1}(x)dx \\ \frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha} &= \int q(x)v^{\alpha-1}(x)dx + C \\ u = u(x, C) &= \left( (1-\alpha) \left( \int q(x)v^{\alpha-1}(x)dx + C \right) \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

- 3) Таким образом, ответ

$$y = u(x, C)v(x)$$

**Пример 8.2.** Дано

$$xy' - y = xy^2$$

*Решение.*

Для соответствия ДУ Бернулли разделим на  $x$ . Получим

$$y' - \frac{y}{x} = y^2$$

Видим, что

$$p(x) = -\frac{1}{x}, \quad q(x) = 1, \quad \alpha = 2$$

1) Ищем частное решение однородного ДУ

$$\begin{aligned} v' - \frac{v}{x} &= 0 \\ \frac{dv}{v} &= \frac{dx}{x} \\ \ln |v| &= -\ln |x| + \ln(C) \\ v &= Cx \end{aligned}$$

Если  $C = 1$ , то получаем частное решение  $v(x) = x$

2) Рассмотрим  $y = u(x)v(x) = ux$

Подставим в уравнение из условия, получим

$$\begin{aligned} u'x + u - u &= u^2x^2 \\ u' &= u^2x \\ \frac{du}{u^2} &= x dx \\ -\frac{1}{u} &= \frac{x^2}{2} - C \\ u &= \frac{1}{C - \frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

3) Ответ

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{C - \frac{x^2}{2}} \\ y &= \frac{2x}{2C - x^2} \end{aligned}$$

## 9. ДУ в полных дифференциалах

**Определение 9.1.** ДУ вида

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad M(x, y), N(x, y) \in C'(D)$$

называется ДУ «в полных дифференциалах», если  $\exists F(x, y) \in C^2(D)$  для которой

$$\begin{aligned} F'_x &= M(x, y) \\ F'_y &= N(x, y) \end{aligned}$$

то есть ДУ имеет вид  $dF(x, y) = 0$

*Примечание.* Дифференциал

$$dF(x, y) = F'_x dx + F'_y dy = M dx + N dy$$

является полным, поэтому и название уравнения «в полных дифференциалах».

**Теорема 9.1 (Об общем интеграле).** В условиях определения 1, уравнение  $F(x, y) = C$  даёт общий интеграл ДУ  $dF(x, y) = 0$  (предполагаем, что  $D$ -односвязная область (ограниченная простой замкнутой кривой))

**Доказательство.** Интегральная кривая  $dF(x, y) = 0$

$$L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in I$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\exists C = \text{const}, \quad \forall t \in I, \quad F(x(t), y(t)) = C$$

$\Rightarrow$  По условию имеем

$$F'_x(x(t), y(t)) x'_t + F'_y(x(t), y(t)) y'_t = 0$$

Значит

$$\begin{aligned} (F(x(t), y(t)))' &= 0, \quad t \in I \\ \Rightarrow \exists C = \text{const} \quad \forall t \in I \quad F(x(t), y(t)) &= C \end{aligned}$$

⇐ По условию

$$\forall t \in I \quad F(x(t), y(t)) = C$$

Продифференцируем равенство, получим

$$F'_x x'_t + F'_y y'_t = 0$$

По определению следует, что

$L$  — интегральная кривая ДУ  $F'_x dy + F'_y dx = 0$  и значит  $dF(x, y) = 0$

■

**Замечание 9.1** (решение задачи Коши).

$$\begin{cases} dF(x, y) = 0 \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

$F(x, y) = F(x_0, y_0)$  (в неявном виде)

**Пример 9.1.** Дано

$$F(x, y) = x^2 y$$

Требуется вывести ДУ.

Решение.

$$F'_x = 2xy$$

$$F'_y = x^2$$

Тогда уравнение «в полных дифференциалах» будет выглядеть так



$$2xy dx + x^2 dy = 0$$

$$x^2 y + x^2 y = C_1$$

$$x^2 y = C = \frac{C_1}{2}$$

Общее решение

Рис. 12. Общее решение

$$y = \frac{C}{x^2}$$

**Теорема 9.2 (О необходимом и достаточных усл. хар. ДУ в полн. диф.).**

Пусть функции  $M(x, y), N(x, y) \in C'(D)$ , где  $D$  односвязная замкнутая ограниченная область на  $\mathbb{R}^2$  (граница  $D$  односвязная замкнутая кривая). Тогда ДУ

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

является ДУ в полных дифференциалах. Это эквивалентно

$$M'_y = N'_x \quad (\forall (x, y) \in \overset{\circ}{D})$$

**Доказательство.** Пусть  $M_0(x_0, y_0)$  - внутренняя точка в области  $D$

$\Rightarrow$  Пусть есть  $F(x, y) \in C^2$  такая, что

$$F'_x = M(x, y), \quad F'_y = N(x, y) \quad \forall (x, y) \in \overset{\circ}{D}$$

Найдём  $M'_y = F''_{xy} \in \overset{\circ}{D} \subset C(\overset{\circ}{D})$  и  $N'_x = F''_{yx} \in C(\overset{\circ}{D})$



Рис. 13.

Так как они непрерывны, значит  $F''_{xy} = F''_{yx}$ . Из этого очевидно, что

$$M'_y = N'_x \quad M'_y, N'_x \in \overset{\circ}{D}$$

$\Leftarrow$  По условию

$$\forall (x, y) \in \overset{\circ}{D} \quad M'_y(x, y) = N'_x(x, y)$$

и возьмём

$$(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{D}, \quad U((x_0, y_0)) \subset D$$

Найдём частный интеграл  $F'_x$ , где  $y = \text{const}$

$$F'_x = M(x, y) \quad \Rightarrow \quad F(x, y) = \int_{x_0}^x M(x; y) dx + \varphi(y)$$

Также

$$\begin{aligned}
 F'_y &= \left( \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \varphi(y) \right)'_y = \int_{x_0}^x M'_y(x, y) dx + \varphi'(y) \equiv N(x, y) \\
 \int_{x_0}^x N'_x(x, y) dx &= N(x, y) \\
 \int_{x_0}^x N'(x, y) dx + \varphi'(y) &\equiv N(x, y) \\
 N(x, y)|_{x_0}^x + \varphi' &\equiv N(x, y) \\
 \cancel{N(x, y)} - N(x_0, y) + \varphi'_y &\equiv \cancel{N(x, y)} \\
 \varphi'_y &= N(x_0, y) \\
 \varphi(y) &= \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy
 \end{aligned}$$

Таким образом

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x M(t, y) dt + \int_{y_0}^y N(x_0, s) ds$$

**Замечание.** По поводу односвязности.

Односвязность показывает то, что мы способны соединить точки  $P$  и  $P_0$  внутри данной области.

Тогда  $\exists F(x, y)$  определённая в  $U(P_0)$

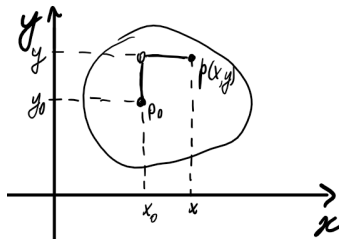


Рис. 14.

$$F'_x = M(x, y) \quad F'_y = N(x, y) \quad (\forall (x, y) \in U(P_0))$$

«Двигаем» точку  $P_0$  до  $P$ . Тогда

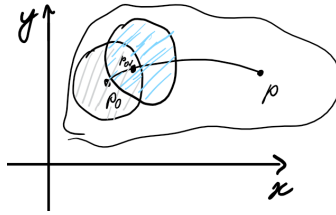


Рис. 15. «движение точки»

$$\exists F(x, y) \in \mathring{D} \quad F'_x = M \quad F'_y = N \quad (\forall (x, y) \in \mathring{D})$$

■

**Определение 9.2 (Интегрирующий множитель).** Пусть

$$M(x, y), N(x, y) \in C'(D)$$

Тогда функцию  $\mu = \mu(x, y)$  называют интегрирующим множителем ДУ

$$M dx + N dy = 0$$

Или ( $\Leftrightarrow$ )

Существует  $\mu(x, y)$  — непрерывная функция, причём ДУ

$$\mu M dx + \mu N dy = 0$$

является ДУ «в полных дифференциалах».

Или

$$u(x, y) \in C'(D) \quad (\mu M)'_y = (\mu N)'_x$$

в односвязных компонентах области  $D$  и частях  $D$

**Замечание 9.2.** (отыскание интегрирующего множителя в некоторых случаях)

Пусть

$$\frac{M'_y - N'_x}{N} = f(x)$$

Тогда существует интегрирующий множитель

$$\mu = \mu(x) \quad \mu(x) = e^{\int f(x) dx}$$

**Доказательство.** Рассмотрим

$$\begin{aligned} \mu'_y M + \mu M'_y &= \mu'_x N + \mu N'_x \\ \mu (M'_y - N'_x) &= \mu'_x N - \mu'_y M \end{aligned}$$



Если  $\mu = \mu(x)$   $\mu_y'' \equiv 0$ , тогда

$$\begin{aligned}\frac{du}{\mu} &= \frac{M_y' - N_x'}{N} dx = f(x) dx \\ \ln |\mu| &= \int f(x) dx \\ \mu(x) &= e^{\int f(x) dx}\end{aligned}$$

■

**Пример 9.2.** Дано

$$x y dx + (x^2 + y^2) dy = 0$$

Решение

$$\begin{aligned}M &= xy & N &= x^2 + y^2 \\ M_y' &= x & N_y' &= 2x\end{aligned}$$

$$\frac{M_y' - N_x'}{M} = -\frac{x}{xy} = -\frac{1}{y} = g(y)$$

Из замечания выше следует

$$\begin{aligned}\exists \mu = \mu(y) &= e^{\int g(y) dy} = e^{\int \frac{dy}{y}} = e^{\ln y} = y \\ \mu &= y\end{aligned}$$

Таким образом  $y = \mu$ . Домножим равенство из условия на  $y$ .

$$\begin{aligned}x y^2 dx + (x^2 y + y^3) dy &= 0 \\ M_1 &= x y^2 \\ N_1 &= x^2 y + y^3 \\ M_{1_y}' &= 2 x y = N_{1_x}'\end{aligned}$$

Таким образом получили ДУ в полных дифференциалах.

Решаем его

$$\begin{cases} F_x' = x y^2 \\ F_y' = x^2 y + y^3 \end{cases}$$

Возьмём первое уравнение и проинтегрируем его. Причём вместо константы добавим функцию от  $y$  (можем т.к.  $(\varphi(y))'_x = C'_x = 0$ ).

$$F(x, y) = \int x y^2 dx = y^2 \int x dx = \frac{y^2 x^2}{2} + \varphi(y)$$

Найдём  $\varphi(y)$  с помощью  $F'_y$

$$\left(\frac{1}{2}x^2y^2 + \varphi(y)\right)'_y = x^2y + y^3$$

$$x^2y + \varphi'_y = x^2y + y^3$$

$$\varphi'_y = y^3 \quad \varphi(y) = \frac{y^4}{4}$$

Таким образом мы нашли  $F(x, y)$ . Ответом является следующее уравнение

$$\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 = C$$

## 10. ДУ Клеро и Лагранжа

**Замечание 10.1** (По поводу параграфа (от автора)). Если до этого мы рассматривали уравнения, разрешённые относительно производной, то в данном параграфе мы рассмотрим два вида ДУ, которые таковыми не являются.

**Определение 10.1.** Пусть функция

$$\varphi(t) \in C'(I) \quad \text{and} \quad \varphi(t) \not\equiv t$$

Тогда ДУ вида

$$y = x y' + \varphi(y')$$

называют дифференциальным уравнением Клеро

**Замечание 10.2** (Решение ДУ Клеро). Дано

$$y = x y'(x) + \varphi(y'(x))$$

Решение.

Продифференцируем по  $x$ . Получим

$$\cancel{y'_x(x)} = \cancel{y'_x(x)} + x y''_{xx}(x) + \varphi'_t(y') y''_{xx}$$

*Примечание.* Пишем индекс  $t$ , так как производная от сложной функции.

Таким образом

$$y''(x + \varphi'_t) \equiv 0$$

Рассмотрим 2 случая

$$1) \ y''_{xx} = 0 \quad \text{Получаем}$$

$$\begin{aligned} (y'_x)' &\equiv 0 \\ y'_x &\equiv C \\ y &= C x + C_1 \end{aligned}$$

Требуется проверка, так как мы могли получить лишние решения после *дифференцирования (это не опечатка?)* (могли появиться в самом начале, когда дифференцировали по  $x$ )

*Проверка. Подставляем ответ в первоначальное решение.*

$$\begin{aligned} Cx + C_1 &= Cx + \varphi(C) \\ C_1 &= \varphi(C) \end{aligned}$$

*Таким образом общее решение ДУ Клеро выглядит так*

$$y = Cx + \varphi(C)$$

*Нетрудно заметить, что решение выглядит как семейство прямых линий.*

2) *Рассмотрим второй множитель*

$$\begin{aligned} x + \varphi'_t(t) &\equiv 0 \\ x &\equiv -\varphi'_t(t) \end{aligned}$$

*Нашли решение относительно  $x$  теперь найдём решение относительно  $y$ .*

*Пусть  $y' = t$ , тогда из уравнения условия*

$$y = xt + \varphi(t)$$

*Подставляем  $x$  получаем*

$$y = -t\varphi'_t + \varphi$$

*Таким образом, особое решение ДУ Клеро имеет вид*

$$L: \begin{cases} x = -\varphi'_t(t) \\ y = \varphi - t\varphi'_t \end{cases}$$

*что является уравнением прямой  $L$ .*

Графически решение выглядит следующим образом



Рис. 16.

**Замечание 10.3** (О геометрическом смысле ДУ Клеро). Ищем кривую  $L$ , касательные к которой обладают некоторым свойством. Рисунок для условия в конце.

Уравнение касательной к  $L$  в точке  $(x, y) \in L$

$$Y - y = y' (X - x) = y' X - x y'$$

Уравнение относительно  $Y$  в общем виде

$$Y = k X + b, \quad \text{где} \quad k = y', \quad b = y - x y'$$

Объявим свойство касательной как  $b = \varphi(k)$ . Тогда

$$\begin{aligned} y - x y' &= \varphi(y') \\ y &= x y' + \varphi(y') \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили уравнение Клеро.

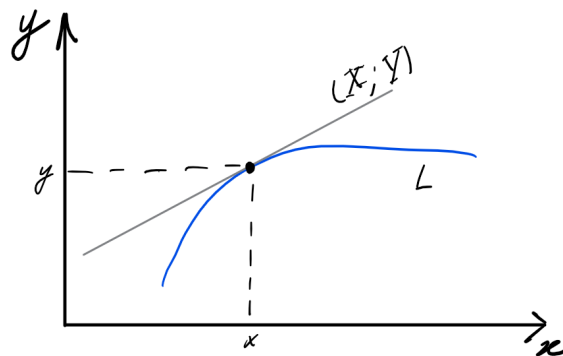


Рис. 17.

**Определение 10.2.** Пусть есть функции

$$(\varphi(t), \psi(t)) \in C'(I) \quad \varphi(t) \not\equiv t \text{ (функция нелинейна)}$$

Тогда уравнение вида

$$y = x \varphi(y') + \psi(y')$$

называют ДУ Лагранжа.

*Замечание 1.* Уравнение похоже на Клеро, но тут кривая связана с нормальными.

*Замечание 2.* Уравнение Лагранжа общий случай уравнения Клеро.

**Замечание 10.4 (Как решать).** Дано

$$y = x \varphi(y') + \psi(y')$$

Решение.

Введём следующую параметризацию

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Тогда формуле параметрически заданной функции получаем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = t \quad \Rightarrow \quad y'_t = t x'_t$$

Так как  $y'_x$  и  $y'$  одно и то же, получаем из условия

$$y = x \varphi(t) + \psi(t)$$

Продифференцируем по  $t$  Получим

$$y'_t = x'_t \varphi + x \varphi'_t + \psi'_t$$

Помним, что  $y'_t = t x'_t$ . С учётом этого уравнение выше приобретает вид

$$\begin{aligned} x'_t \varphi + x \varphi'_t + \psi'_t &= t x'_t \\ x'_t (\varphi - t) + x \varphi'_t &= -\psi'_t \end{aligned}$$

Таким образом получили линейное ДУ 1-го порядка в приведённой форме. Решение (через метод Лагранжа)

$$\begin{aligned}x'_t + \frac{\varphi'_t}{\varphi - t} x &= \frac{\psi'_t}{\varphi - t} \\x'_0 + \frac{\varphi'_t}{\varphi - t} x_0 &= 0 \\x'_0 &= \frac{\varphi'_t}{t - \varphi} x_0 \\\frac{dx_0}{x_0} &= \frac{\varphi'_t dt}{t - \varphi}\end{aligned}$$

Интегрируем и получаем решение для однородного ДУ затем находим ответ для неоднородного уравнения ( $x_1$ ). Таким образом мы нашли

$$x = x_1(t) + C x_0(t)$$

Подставляем значение  $x$  в  $y'_t = t x'_t$  или  $y = x \varphi(t) + \psi(t)$  (оба варианта справедливы?). Получаем окончательный ответ.

Таким образом, общий интеграл ДУ Лагранжа

$$\begin{cases} x = x_1(t) + C x_0(t) \\ y = y_1(t) + C y_0(t) \end{cases}$$

Замечание. Нужно проверить

$$\frac{y'_t}{x'_t} = t$$

особое решение, когда  $\varphi(t) - t = 0$

## 11. Дифференциальные уравнения высшего порядка, допускающие понижения порядка

**Определение 11.1.** ДУ  $n$ -го порядка это уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

решение которого является функцией  $y = y(x)$ ,  $x \in I$ , которая  $n$  раз дифференцируема на  $I$  и справедливо

$$F(x, y, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

**Определение 11.2.** Если

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

то оно называется дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка разрешённого относительно старшей производной

**Пример 11.1 (Как можно описать множество решений).** Дано

$$y^{(n)} = f(x), \quad f(x) \in C(I), \quad \text{где } I - \text{интервал}$$

Для краткости запишем через эквивалентность

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) &\equiv f(x) \\ (y^{(n-1)}(x))' &\equiv f(x) &\Leftrightarrow & y^{(n-1)}(x) = F_1(x) + C_1 \\ (y^{(n-2)}(x))'' &\equiv f(x) &\Leftrightarrow & y^{(n-2)}(x) = F_2(x) + C_1 x + C_2 \end{aligned}$$

Из этого следует

$$y^{(n-3)} = F_3(x) + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$$

...

$$y = F_n(x) + \frac{C_1}{(n+1)!} x^{n-1} + \dots + C_{n-1} x + C_n$$

$$y = F_n(x) + C'_1 x^{n-1} + \dots + C'_{n-1} x + C'_n$$

где

$$F_n(x) = \underbrace{\int dx \int dx \dots \int f(x) dx}_{n \text{ раз}}$$

*Замечание.* В последней строке сделана замена вида:  $C'_1 = \frac{C_1}{(n+1)!} \dots C'_n = C_n$ .



**Определение 11.3 (Общее решение).** Пусть  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  — ДУ  $n$ -го порядка.

Тогда функция

$$y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$$

называется общим решением этого ДУ если

- 1)  $\forall C_1, \dots, C_n$   $y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$  является решением как функция от  $x$
- 2) Для любого решения  $y = \varphi^*(x)$  найдётся такой набор  $C_1^*, \dots, C_n^* \in \mathbb{R}$ ,  $\forall x \in I$ , что  $\varphi^*(x) = \varphi(x, C_1^*, \dots, C_n^*)$ . То есть общее решение учитывает все наборы констант (все варианты решения)

**Определение 11.4 (Общий интеграл).** Если общее решение задано неявной функцией

$$\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$$

то это общий интеграл

**Определение 11.5 (Задача Коши для ДУ  $n$ -го порядка).** Она описывается следующим образом

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

где функция  $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  определена в области  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , а  $M_0(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$  — внутренняя точка области  $D$

**Теорема 11.1 (Сущ. и ед. задачи Коши для ДУ  $n$ -го порядка).**

Пусть функция  $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  определена в области  $D \in \mathbb{R}^{n+1}$  и

$$f(M), \quad \frac{\delta f(M)}{\delta y}, \quad \frac{\delta f(M)}{\delta y'}, \quad \dots, \quad \frac{\delta f(M)}{\delta y^{(n-1)}}$$

непрерывны в некоторой окрестности  $U(M_0) \subset D$ , где  $M_0(x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)})$

Тогда  $\exists \delta > 0$  и существует единственная функция  $y = y(x)$ ,  $x \in U_\delta(x_0)$ , которая является решением задачи Коши

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

**Доказательство.** Принимаем без доказательств.

**Примечание.** Доказательство аналогично случаю для одной переменной.

■

**Замечание 11.1 (О ДУ допускающих понижение порядка).** Рассмотрим ДУ вида  $F(x, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ , т.е. не содержащих в явном виде  $y$ . Для них справедлива следующая замена:

$$z = z(x) = y'(x), \quad z'(x) = y''(x), \quad \dots, \quad z^{(n-1)}(x) = y^{(n)}(x)$$

Тогда

$$\begin{cases} F(x, z, \dots, z^{(n-1)}) = 0 \\ z = y' \end{cases}$$

Таким образом, общее решение

$$y' = z = z(x, C_1, \dots, C_{n-1})$$

Ответ

$$y = \int z(x, C_1, \dots, C_{n-1}) dx + C_n$$

**Пример 11.2.** Дано

$$x^2 y'' - (y')^2 = 0$$

Решение.

Заменяем  $z = y'$ ,  $z' = y''$ . Получаем

$$\begin{aligned} x^2 z' - z^2 &= 0 \\ \frac{dz}{z^2} &= \frac{dx}{x^2} \\ \int \frac{dz}{z^2} &= \int \frac{dx}{x^2} \\ -\frac{1}{z} &= -\frac{1}{x} - C_1 \\ z &= \frac{x}{C_1 x + 1} \\ y' &= \frac{x}{C_1 x + 1} \\ y &= \int \frac{x}{C_1 x + 1} \end{aligned}$$

Таким образом получаем

$$1) C_1 = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2}{C_2}$$

2) Для  $C_1 \neq 0$  получим

$$y = \frac{1}{C_1} \int \frac{(C_1 x + 1) - 1}{C_1 x + 1} dx + C_2$$

$$y = \frac{x}{C_1} - \frac{1}{C_1^2} \ln(|C_1 x + 1|) + C_2$$

3) Частный случай  $z = 0, y' = 0 \Rightarrow y = C_2$

**Замечание 11.2.** Рассмотрим ДУ вида  $F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ , т.е. не содержащие в явном виде  $y, y', \dots, y^{(k-1)}$ ,  $k \geq 2s$ .

В данном случае всё аналогично предыдущему замечанию

$$z = y^{(k)}, z' = y^{(k+1)}, \dots, z^{(n-k)} = y^{(n)}$$

$$\begin{cases} F(x, z, \dots, z^{(n-k)}) = 0 \\ z = y^{(k)} \end{cases}$$

Таким образом, общее решение для  $z$

$$z = z(x, C_1, \dots, C_{n-k})$$

$$F_k^{(k)} = z(x, C_1, \dots, C_{n-k})$$

$$y^{(k)} = F_k^{(k)}$$

$$y = F_k(x, C_1, \dots, C_{n-k}) + C_{n-k+1} x^{k-1} + \dots + C_n$$

**Пример 11.3.** Дано

$$x y''' - y'' = 0 \Rightarrow k = 2$$

Решение

Пусть  $z = y''$ ,  $z' = y'''$  тогда

$$x z' - z = 0$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} + \ln|C_1|$$

$z = C_1 x$  Делаем обратную замену

$$y'' = C_1 x$$

$$y' = \frac{C_1 x^2}{2} + C_2$$

$$y = \underbrace{\frac{C_1 x^3}{6}}_{F_2(x, C_1)} + \underbrace{C_2 x + C_3}_{\text{многочлен ст. } k-1}$$

По факту мы рассмотрели следующее уравнение в поле

$$y''' = \frac{y''}{x}, \quad D \in \mathbb{R}^4 \setminus \{x = 0\}$$

*Замечание.* Частный случай ( $z = 0$ ) входит в общее решение. Таким образом, решение выше полное.

**Замечание 11.3.** Рассмотрим ДУ вида  $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  т.е. не содержащее  $x$  в явном виде.

Аналогично делаем замену

$$y' = p(y)$$

Отметим  $y'_x(x) = p(y(x))$  — сложная функция. Значит

$$y'' = p' p$$

$$y''' = (p'' p + (p')^2) p = f_2(p, p', p'')$$

...

$$y^{(k+1)} = f_k(p, p', \dots, p^{(k)})$$

Таким образом получаем следующую систему

$$\begin{cases} F(y, p, p' p, f_2(p, p', p''), \dots, f_k(p, p', \dots, p^{(k)})) = 0 \\ y' = p \end{cases}$$

Следовательно общее решение относительно  $p$

$$p = p(y, C_1, \dots, C_{n-1})$$

Зная, что  $y' = p$  получаем

$$\frac{dy}{p(y, C_1, \dots, C_{n-1})} = dx$$

Таким образом решение относительно  $x$  следующее

$$x = \int \frac{dy}{p(y, C_1, \dots, C_{n-1})} + C_n$$

**Пример 11.4.** Дано

$$y'' = 2 y y'$$

*Решение*

$$y' = p(y)$$

$$y'' = p' p$$

$$p' p = 2 y p$$

$$p(p' - 2 y) = 0$$

Получаем два случая

Первый:

$$p = 0 \Rightarrow y' = 0, y = C_1$$

Второй:

$$\begin{aligned} p' - 2y &= 0 \\ p' &= 2y \\ dp &= 2y dy \\ \int dp &= \int 2y dy \\ p = y' &= y^2 + C_1 \\ \frac{dy}{dx} &= y^2 + C_1 \\ \int dx &= \int \frac{dy}{y^2 + C_1} \\ x + C_2 &= \int \frac{dy}{y^2 + C_1} \end{aligned}$$

При вычислении интеграла рассмотрим три случая

1)  $C_1 = 0$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{y} &= x + C_2 \\ y &= -\frac{1}{x + C_2} \end{aligned}$$

2)  $C_1 > 0$

$$\begin{aligned} x + C_2 &= \frac{1}{\sqrt{C_1}} \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{\sqrt{C_1}} \right) \\ y &= \sqrt{C_1} \operatorname{tg}((x + C_2) \sqrt{C_1}) \end{aligned}$$

3)  $C_1 < 0, C_1 = -|C_1|$

$$x + C_2 = \frac{1}{2\sqrt{|C_1|}} \ln \left| \frac{y - \sqrt{|C_1|}}{y + \sqrt{|C_1|}} \right|$$

## 12. Линейные ДУ n-го порядка

**Определение 12.1.** Пусть сущ. функции  $p_1(x), \dots, p_n(x), f(x) \in C_{(a;b)}$ . Тогда ДУ вида

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x)$$

называется линейным ДУ n-го порядка с коэффициентами  $p_1(x), \dots, p_n(x)$  и правой частью  $f(x)$

**Теорема 12.1 (Сущ. и ед. задачи Коши для ЛДУ n-го порядка).**

Пусть  $p_1(x), \dots, p_n(x), f(x) \in C_{(a;b)}$ .

Тогда  $\forall x_0 \in (a; b), \forall y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$  задача Коши

$$\begin{cases} y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x) \\ y|_{x=x_0} = y_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

имеет единственное решение  $y = y(x), x \in (a, b)$  определённое на всём интервале  $(a; b)$ .

**Доказательство.** Принимаем без доказательств

■

Для более компактной записи введём следующее определение

**Определение 12.2 (Линейный дифференциальный оператор).** Перед тем как непосредственно вводить определение рассмотрим два случая.

- 1) Рассмотрим оператор дифференцирования:  $\frac{d}{dx}$ , тогда его действие будет выглядеть так

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

Данный оператор линейный, так как

$$) (v + u)' = v' + u'$$

$$) (cu)' = c u'$$

(Примечание. признак линейности см. во 2м сем.)

- 2) Для другого оператора  $\frac{d^k}{dx^k}$  действие будет выглядеть

$$\frac{d^k}{dx^k} f(x) = \frac{d^k f(x)}{dx^k} = f^{(k)}(x)$$

Сам оператор также является линейным

Таким образом, очевидно, что в общем случае можно определить оператор

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(x) \frac{d}{dx} + p_n(x) E$$

это линейный дифференциальный оператор  $n$ -го порядка, где

$$Ef(x) = f(x) \quad E - \text{единичный оператор}$$

Его действие на  $n$  раз диф. ф-ю  $f(x)$

$$L = \frac{d^n f(x)}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(x) \frac{df(x)}{dx} + p_n(x) f(x)$$

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y$$

**Замечание 12.1.** Теперь ЛДУ  $n$ -го порядка можно описать так

$$L(y) = f(x)$$

**Замечание 12.2 (Линейность оператора  $L$ ).** .

Пусть

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(x) \frac{d}{dx} + p_n(x) E$$

Тогда

- 1)  $L(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = L(\varphi_1(x)) + L(\varphi_2(x))$
- 2)  $L(C \varphi(x)) = C L(\varphi(x))$
- 3)  $L(C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + \cdots + C_n \varphi_n(x)) = C_1 L(\varphi_1(x)) + C_2 L(\varphi_2(x)) + \cdots + C_n L(\varphi_n(x))$

**Доказательство.**

- 1) Рассмотрим следующие тривиальные выражения

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) + \varphi_2(x) &= \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \\ (\varphi_1(x) + \varphi_2(x))' &= \varphi_1'(x) + \varphi_2'(x) \\ (\varphi_1(x) + \varphi_2(x))'' &= \varphi_1''(x) + \varphi_2''(x) \\ &\dots \\ (\varphi_1(x) + \varphi_2(x))^{(n)} &= \varphi_1^{(n)}(x) + \varphi_2^{(n)}(x) \end{aligned}$$

Каждую из строк соответственно умножим на  $p_n, p_{n-1}, \dots, p_1, 1$ . Затем сложим все уравнения. И нетрудно заметить, что таким образом получаем

$$L(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = L(\varphi_1(x)) + L(\varphi_2(x))$$

2) аналогично доказывается (рассмотрим выражения  $c\varphi, (c\varphi)^{(n)}$ )

3) аналогично (или методом мат. индукции по  $k$ )

■

### Определение 12.3.

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_{n-1}(x) y' + \dots + p_n(x) y = f(x) \quad (3)$$

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_{n-1}(x) y' + \dots + p_n(x) y = 0 \quad (4)$$

ДУ (2) называют линейным однородным ДУ, а (1) лин. неоднородным ДУ

В краткой форме соответствует

$$L(y) = f(x)$$

$$L(y) = 0$$

### Замечание 12.3. .

ЛОДУ — линейное однородное дифференциальное уравнение

ЛНДУ — линейное неоднородное дифференциальное уравнение

**Теорема 12.2 (О линейности мн-ва решений ЛОДУ).** Пусть функции  $p_1(x), \dots, p_n(x), f(x) \in C_{(a;b)}$  и  $L(y) = y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_{n-1}(x) y' + \dots + p_n(x) y$ . Тогда ЛОДУ  $L(y) = 0$  имеет множество решений удовлетворяющее следующему свойству линейности.

Если  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)$  решение  $L(y) = 0$ , то

$\forall C_1, \dots, C_k \in \mathbb{R}$  функция

$$y = C_1 \varphi_1(x) + \dots + C_k \varphi_k(x)$$

является решением  $L(y) = 0$

*Замечание.* Количество решений произвольно и не обязательно равно  $n$ .

### Доказательство..

Дано

$$L(\varphi_1(x)) \equiv 0, \dots, L(\varphi_k(x)) \equiv 0$$

Тогда для  $\forall C_1, \dots, C_k$  и свойствам из замечания 2 получаем

$$L(C_1 \varphi_1(x) + \dots + C_n \varphi_n(x)) = C_1 L(\varphi_1(x)) + \dots + C_n L(\varphi_n(x)) \equiv 0$$

Следовательно  $y = C_1 \varphi_1(x) + \dots + C_k \varphi_k(x)$  является решением  $L(y) = 0$

■



### 13. Фундаментальная система решений ЛО-ДУ

**Определение 13.1 (Линейно зависимая система функций).** Система функций  $\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)\}$  определённая на  $(a; b)$  называется линейно зависимой

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ll} \exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} & \alpha_1^2 + \dots + \alpha_k^2 \neq 0 \\ \forall x \in (a; b) & \alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_k \varphi_k(x) = 0 \end{array}$$

*Примечание.* Говорят: лин. зав. на интервале  $(a; b)$ . Важно отметить, что мы рассматриваем систему на интервале.

**Пример 13.1.** Дана линейно зависимая система на  $\mathbb{R}$

$$\{x, x+1, x-1\}$$

Требуется найти набор коэффициентов.

Решение

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta(x+1) + \gamma(x-1) &\equiv 0 \\ (\alpha + \beta + \gamma)x + \beta - \gamma &\equiv 0 \end{aligned}$$

Очевидно, что решение будет тогда, когда выполнена следующая система

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

Таким образом, решение

$$\begin{cases} \alpha = -2\beta \\ \beta = \beta \\ \gamma = \beta \end{cases}$$

Ответом может быть, например, частный случай при  $\beta = 1$  тогда  $\alpha = -2, \beta = 1, \gamma = 1$   
 $-2x + (x+1) + (x-1) \equiv 0$  — система линейно зависима на  $\mathbb{R}$

**Определение 13.2 (Линейно независимая система функций).** Система функций  $\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)\}$  опр-на на  $(a; b)$  называется линейно независимой на  $(a; b)$

Или

$$\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)\} \text{ не явл. лин. зав. на } (a; b)$$

Или

$$\forall x \in (a; b) \quad \alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_k \varphi_k(x) = 0$$
$$\text{Где } \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$$

**Определение 13.3** (Фундаментальная система решений ЛОДУ).

Пусть

$$p_1(x), \dots, p_n(x) \in C_{(a;b)}$$

ЛОДУ

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_{n-1}(x) y' + \dots + p_n(x) y = 0$$

Система функций  $\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$  определена на  $(a; b)$  называется фундаментальной системой решений ЛОДУ  $L(y) = 0$

$\Leftrightarrow$

- 1)  $L(\varphi_1(x)) \equiv 0, \dots, L(\varphi_n(x)) \equiv 0$   
Где  $x \in (a; b)$  и  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  — решения ЛОДУ
- 2) число функций равно  $n = \{\text{порядок ЛОДУ}\}$
- 3)  $\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$  — лин. незав. система на  $(a; b)$

**Определение 13.4.** Пусть функции  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$   $n$  раз дифф-мая функция на  $(a; b)$

Тогда функциональный определитель

$$W(x) = W(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

называется определителем Вронского или Вронскиан для системы функций  $\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$

**Теорема 13.1.** В условиях определения 4, если система функций

$$\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\} \quad \text{линейно зависима на } (a; b)$$

то

$$\forall \alpha \in (a; b), \quad W(x) = W(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = 0$$

**Доказательство.**  $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$ , причём  $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$  а также

$$\forall x \in (a; b) \quad \alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) = 0$$

Зафиксируем один из коэффициентов и будем считать, что  $\alpha_1 \neq 0$  (в случае, если другой коэффициент не равен нулю, то его можно поменять местами с  $\alpha_1$ )

$$\begin{aligned} W &= \begin{pmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha_1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \varphi_1 & \dots & \varphi_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1 \varphi_1^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} = \\ &= [ \text{Добавляем к первому столбцу столбцы умноженные на } \alpha_2, \dots, \alpha_n ] = \\ &= \frac{1}{\alpha_1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_n \varphi_n & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1 \varphi_1^{(n-1)} + \dots + \alpha_n \varphi_n^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\alpha_1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_n \varphi_n & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_n \varphi_n)^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\alpha_1} \begin{pmatrix} 0 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ 0 & \varphi_2' & \dots & \varphi_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} = 0 \quad \forall x \in (a; b) \end{aligned}$$

■

**Замечание 13.1.** Пусть  $\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$   $n$  раз дифференцируемая система функций на  $(a; b)$ ,  $W(x) = W(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$  — вронскиан системы  $\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$

Тогда если  $\exists x_0 \in (a; b) \quad W(x_0) \neq 0$  то система  $\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$  линейна независима на  $(a; b)$

**Доказательство.** Доказательство от противного.

Пусть  $W(x_0) \neq 0$  и система линейно зависима на промежутке. Следовательно теореме выше получаем, что вронскиан равен нулю  $\forall x \in (a; b)$ , следовательно, в частности,  $W(x_0) = 0$ , что противоречит первоначальному условию  $W(x_0) \neq 0$ . Таким образом, получаем противоречие и следовательно система линейно независима на интервале. ■

Вспомним теорему 1 из предыдущего параграфа (она нужна для доказательства следующей теоремы)

**Теорема 13.2.** Пусть  $p_1(x), \dots, p_n(x), f(x) \in C_{(a; b)}$ .

Тогда  $\forall x_0 \in (a; b), \forall y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$  задача Коши

$$\begin{cases} L(y) = y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = f(x) \\ y|_{x=x_0} = y_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

имеет единственное решение  $y = y(x), x \in (a, b)$  определённое на всём интервале  $(a; b)$ .

**Теорема 13.3.** Пусть в условиях теоремы выше функции  $\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$  являются решением ЛОДУ  $L(y) = 0$  и  $\exists x_0 \in (a; b), W(x_0) = 0$ .

Тогда  $\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$  линейно зависима на всём промежутке и (по т. 1)  $\forall x \in (a, b) W(x) = 0$

**Доказательство.** Рассмотрим алгебраическую систему уравнений относительно  $C_1, \dots, C_n$ , получим

$$\begin{cases} C_1 \varphi_1(x_0) + \dots + C_n \varphi_n(x_0) = 0 \\ C_1 \varphi'_1(x_0) + \dots + C_n \varphi'_n(x_0) = 0 \\ \vdots \\ C_1 \varphi_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n \varphi_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

$n$  уравнений относительно  $n$  переменных  $C_1, \dots, C_n$  и  $\Delta = W(x_0) = 0$ . Значит ранг матрицы меньше  $n$ , следовательно существует бесконечное множество решений (см. 2 сем.), то есть

$$\exists (C_1^*, \dots, C_n^*) \neq (0, \dots, 0)$$

Рассмотрим

$$\varphi^*(x) = C_1^* \varphi_1(x_0) + \dots + C_n^* \varphi_n(x_0)$$

$\varphi^*(x)$  — является решением задачи Коши

$$\begin{cases} L(y) = 0 \\ y|_{x=x_0} = 0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = 0 \end{cases}$$

То есть

$$\varphi^*(x_0) = 0, (\varphi^*)'(x_0) = 0, \dots, (\varphi^*)^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Очевидно, что для  $y \equiv 0$ , также является решением той же задачи Коши на интервале. Примечание  $L(y) = y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y$ . Из всего этого следует

$$\varphi^*(x_0) \equiv 0 \Rightarrow \forall x \in (a; b) \quad C_1^* \varphi_1(x) + \dots + C_n^* \varphi_n(x) = 0$$

где  $(C_1^*, \dots, C_n^*) \neq (0, \dots, 0)$ .

Значит по определению линейно зависимой системы, получаем что система  $\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$  линейно зависима на  $(a; b)$  ■

**Теорема 13.4 (О существовании ФСР ЛОДУ  $n$ -го порядка).** Пусть функции  $p_1(x), \dots, p_n(x) \in C_{(a; b)}$ , тогда существует набор функций  $\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$  являющийся ФСР для

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = 0$$

**Доказательство.** Возьмём  $x_0 \in (a; b)$  и рассмотрим  $n$  задач Коши вида:

$L(y) = 0$	$L(y) = 0$	$\dots$	$L(y) = 0$
$y _{x=x_0} = 1$	$y _{x=x_0} = 0$	$\dots$	$y _{x=x_0} = 0$
$y' _{x=x_0} = 0$	$y' _{x=x_0} = 1$	$\dots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$y^{n-2} _{x=x_0} = 0$
$y^{n-1} _{x=x_0} = 0$	$y^{n-1} _{x=x_0} = 0$	$\dots$	$y^{n-1} _{x=x_0} = 1$
$y = \varphi_1(x)$	$y = \varphi_2(x)$	$\dots$	$y = \varphi_n(x)$
$x \in (a; b)$	$x \in (a; b)$	$\dots$	$x \in (a; b)$

Таким образом имеем следующий вронскиан

$$W(x_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

Из того, что определитель не равен нулю следует

- 1)  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  — решения  $L(y) = 0$  на  $x \in (a; b)$
- 2) Количество решений равно порядку ДУ ( $L(y) = 0$ ), которое равно  $n$
- 3)  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  — линейно независимы на  $(a; b)$  (по следствию к теореме 1)

Из этого по определению 3 следует, что  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  — ФСР  $L(y) = 0$

■

**Теорема 13.5 (Формула Лиувилля).** Пусть  $p_1(x), \dots, p_n(x) \in C_{(a; b)}$  и  $\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$  — ФСР ЛОДУ  $L(y) = 0$ .

Возьмём  $x_0 \in (a; b)$  и обозначим через  $W_0 = W(x_0) \neq 0$ . Тогда справедлива формула Лиувилля

$$W(x) = W_0 e^{-\int_{x_0}^x p_1(t) dt}$$

**Доказательство.** Для наглядности рассмотрим случай  $n = 2$ , тогда

$$L(y) = y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0$$

Пусть  $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$  — ФСР, то есть

$$\begin{cases} \varphi_1'' + p_1 \varphi_1' + p_2 \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2'' + p_1 \varphi_2' + p_2 \varphi_2 = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим вронскиан и его производную.

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} = \varphi_1 \varphi_2' - \varphi_2 \varphi_1' \\ W'(x) &= \cancel{\varphi_1' \varphi_2'} + \varphi_1 \varphi_2'' - \varphi_1'' \varphi_2 - \cancel{\varphi_1' \varphi_2'} \end{aligned}$$

Воспользуемся системой выше для замены  $\varphi_1''$  и  $\varphi_2''$ . Получим.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \varphi_1'' = -p_1 \varphi_1' - p_2 \varphi_1 \\ \varphi_2'' = -p_1 \varphi_2' - p_2 \varphi_2 \end{cases} \\ W'(x) &= \varphi_1 (-p_1 \varphi_2' - p_2 \varphi_2) + \varphi_2 (p_1 \varphi_1' + p_2 \varphi_1) \\ W'(x) &= -p_1 (\varphi_1 \varphi_2' - \varphi_1' \varphi_2) = -p_1 W \end{aligned}$$

Решаем тривиальное ДУ

$$\frac{dW}{dx} = -p_1(x) W$$

Очевидно

$$\int_{x_0}^x \ln(W) = - \int_{x_0}^x p_1(t) dt$$

Ответ

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p_1(t) dt}$$

■

## 14. Общее решение линейного ДУ n-го порядка

**Теорема 14.1 (Об общем решении ЛОДУ n-го порядка).** Пусть

$$p_1(x), \dots, p_n(x) \in C_{(a; b)} \text{ и } \{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$$

ФСР ЛОДУ

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0$$

Тогда функция

$$y = C_1 \varphi_1(x) + \dots + C_n \varphi_n(x)$$

описывает множество всех решений ЛОДУ  $L(y) = 0$ , то есть

$$1) \forall C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R} \quad y = C_1 \varphi_1 + \dots + C_n \varphi_n - \text{решение } L(y) = 0$$

$$2) \forall y = \varphi^*(x) - \text{решение } L(y) = 0. \text{ Тогда}$$

$$\exists C_1^*, \dots, C_n^* \in \mathbb{R} \quad x \in (a; b)$$

$$\varphi^*(x) = C_1^* \varphi_1 + \dots + C_n^* \varphi_n$$

**Доказательство.**

$$1) \text{ Дано } L(\varphi_1) = 0, \dots, L(\varphi_n) = 0$$

$$\forall C_1, \dots, C_n \quad L(C_1 \varphi_1 + \dots + C_n \varphi_n) = C_1 \underbrace{L(\varphi_1)}_{=0} + \dots + C_n \underbrace{L(\varphi_n)}_{=0}$$

$$\Rightarrow y = C_1 \varphi_1(x) + \dots + C_n \varphi_n(x) - \text{решение } L(y) = 0, x \in (a; b)$$

$$2) \text{ Пусть } y = \varphi^*(x) - \text{решение } L(y) = 0 \quad x \in (a; b)$$

Возьмём точку  $x_0 \in (a; b)$  и скажем, что

$$y_0 = \varphi_1^*(x_0), \dots, y_0^{(n-1)} = (\varphi_n^*)^{(n-1)}(x_0)$$

Тогда  $y = \varphi^*(x)$  является решением задачи Коши

$$\begin{cases} L(y) = y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = f(x) \\ y|_{x=x_0} = y_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

С другой стороны будем искать решение этой задачи Коши в виде  $y = C_1 \varphi_1(x) + \dots + C_n \varphi_n(x)$  тогда решение имеет вид

$$\begin{cases} C_1 \varphi_1(x_0) + \dots + C_n \varphi_n(x_0) = y_0 \\ C_1 \varphi_1'(x_0) + \dots + C_n \varphi_n'(x_0) = y_0' \\ \vdots \\ C_1 \varphi_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n \varphi_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Это система  $n$  алгебраических уравнений относительно  $n$  переменных  $C_1, \dots, C_n$ , определитель которой  $\Delta = W(x_0) \neq 0$ , так как мы рассматриваем ФРС (система уравнений линейно независима по определению).

По т. Крамера следует, что существует решение и притом единственное, то есть

$$\exists(C_1^*, \dots, C_n^*)$$

Следовательно  $y = C_1^* \varphi_1(x) + \dots + C_n^* \varphi_n(x)$  — решение задачи Коши и для  $\varphi^*(x)$  по теореме о существовании и единственности задачи Коши.

■

**Теорема 14.2 (Об общем решении ЛНДУ  $n$ -го порядка).** Пусть  $p_1(x), \dots, p_n(x), f(x) \in (a; b)$  и  $\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$  — ФРС ЛОДУ

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = 0 \quad x \in (a; b)$$

Обозначим через  $\psi(x)$  некоторое решение ЛНДУ  $L(y) = f(x)$ . Тогда общее решение ЛНДУ имеет вид

$$y = \psi(x) + C_1 \varphi_1(x) + \dots + C_n \varphi_n(x)$$

То есть

1)  $\forall C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R} \quad y = \psi + C_1 \varphi_1 + \dots + C_n \varphi_n$  является решением  $L(y) = f(x)$

2) Для любого решения  $\psi^*(x)$  ЛНДУ  $L(y) = f(x)$   
 $\exists C_1, \dots, C_n \quad x \in (a; b) \quad \psi^* = \psi + C_1^* \varphi_1 + \dots + C_n^* \varphi_n$



**Доказательство.**

$\forall x_0 \in (a; b), \exists y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}, \psi(x)$  — решение задачи Коши

$$\begin{cases} L(y) = f(x) \\ y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}, \end{cases}$$

По теореме о существовании и единственности задачи Коши

1) Аналогично доказательству выше имеем

$$\forall C_1, \dots, C_n \\ L(\psi + C_1 \varphi_1 + \dots + C_n \varphi_n) = \underbrace{L(\psi)}_{=f(x)} + C_1 \underbrace{L(\varphi_1)}_{=0} + \dots + C_n \underbrace{L(\varphi_n)}_{=0} = f(x)$$

2)  $y = \psi^*(x)$  решение  $L(\psi^*) = f(x)$ , с другой стороны  $L(\psi) = f(x)$  тоже решение (по усл.)

Тогда рассмотрим следующее выражение

$$L(\psi^* - \psi) = [\text{по св-ву лин. оп.}] = L(\psi^*) - L(\psi) = f(x) - f(x) = 0$$

Значит  $L(\psi^* - \psi)$  — ЛОДУ. Следовательно по теореме 1 для ЛОДУ справедливо

$$\exists C_1^*, \dots, C_n^* \quad \forall x \in (a; b) \varphi^* = \psi^* - \psi = C_1^* \varphi_1 + \dots + C_n^* \varphi_n$$

Нетрудно заметить и вывести

$$\psi^* = \psi + C_1^* \varphi_1 + \dots + C_n^* \varphi_n$$

■

## 15. Метод вариации произвольных постоянных

**Теорема 15.1.** Пусть

$$p_1(x), \dots, p_n(x), f(x) \in C_{(a;b)}$$

и известна ФСР  $\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$  ЛОДУ

$$L(y) = y^{(n)} + y^{(n-1)} p_1(x) + \dots + y p_n(x) = 0$$

Ищем решение ЛНДУ  $L(x) = f(x)$  в виде

$$y = C_1(x) \varphi_1(x) + \dots + C_n(x) \varphi_n(x)$$

где функции  $\{C_1(x), \dots, C_n(x)\}$  дифференцируемые на  $(a; b)$  и  $\{C'_1(x), \dots, C'_n(x)\}$  удовлетворяют следующим свойствам алгебраических уравнений

$$\begin{cases} C'_1 \varphi'_1(x) + \dots + C'_n \varphi'_n(x) = 0 \\ C'_1 \varphi'_1(x) + \dots + C'_n \varphi'_n(x) = 0 \\ :C'_1 \varphi_1^{(n-2)}(x) + \dots + C'_n \varphi_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ C'_1 \varphi_1^{(n-1)}(x) + \dots + C'_n \varphi_n^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases}$$

Тогда такая система имеет решения

$$C'_1 = u_1(x), \dots, C'_n = u_n(x)$$

$$y = \left[ \left( \varphi_1(x) \int u_1(x) dx \right) + \dots + \left( \varphi_n(x) \int u_n(x) dx \right) \right] + [C_1 \varphi_1(x) + \dots + C_n \varphi_n(x)]$$

где  $C_1, \dots, C_n$  — константы.

*Примечание.* Тут две суммы: одна с интегралом, другая без

**Доказательство.** Рассмотрим уравнение

$$y = C_1 \varphi_1 + \dots + C_n \varphi_n$$

Возьмём  $n$  производных, причём заметим, что  $\varphi$ , и  $C_1$  зависимы от  $x$ .

Тогда получаем

$$\begin{aligned}
y &= C_1 \varphi_1 + \dots + C_n \varphi_n \\
y' &= C_1 \varphi_1' + \dots + C_n \varphi_n' + \underbrace{C_1' \varphi_1 + \dots + C_n' \varphi_n}_{\equiv 0} \\
y'' &= C_1 \varphi_1'' + \dots + C_n \varphi_n'' + \underbrace{C_1' \varphi_1' + \dots + C_n' \varphi_n'}_{\equiv 0} \\
&\vdots \\
y^{(n-2)} &= C_1 \varphi_1^{(n-2)} + \dots + C_n \varphi_n^{(n-2)} + \underbrace{C_1' \varphi_1^{(n-3)} + \dots + C_n' \varphi_n^{(n-3)}}_{\equiv 0} \\
y^{(n-1)} &= C_1 \varphi_1^{(n-1)} + \dots + C_n \varphi_n^{(n-1)} + \underbrace{C_1' \varphi_1^{(n-2)} + \dots + C_n' \varphi_n^{(n-2)}}_{\equiv f(x)}
\end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned}
p_n * \mid y &= C_1 \varphi_1 + \dots + C_n \varphi_n \\
p_{n-1} * \mid y' &= C_1 \varphi_1' + \dots + C_n \varphi_n' \\
p_{n-2} * \mid y'' &= C_1 \varphi_1'' + \dots + C_n \varphi_n'' \\
&\vdots \\
p_1 * \mid y^{(n-2)} &= C_1 \varphi_1^{(n-2)} + \dots + C_n \varphi_n^{(n-2)} \\
1 * \mid y^{(n-1)} &= C_1 \varphi_1^{(n-1)} + \dots + C_n \varphi_n^{(n-1)} + f(x)
\end{aligned}$$

Сложим все функции, получим

$$L(y) = C_1 \underbrace{L(\varphi_1)}_{\equiv 0(\Phi CP)} + \dots + C_n \underbrace{L(\varphi_n)}_{\equiv 0(\Phi CP)} + f(x)$$

Таким образом  $L(y) = f(x)$ . Значит уравнение в самом начале является решением ЛНДУ.

Теперь рассмотрим

$$\begin{cases}
C_1' \varphi_1 + \dots + C_n' \varphi_n = 0 \\
C_1' \varphi_1' + \dots + C_n' \varphi_n' = 0 \\
\vdots \\
C_1' \varphi_1^{(n-3)} + \dots + C_n' \varphi_n^{(n-3)} = 0 \\
C_1' \varphi_1^{(n-2)} + \dots + C_n' \varphi_n^{(n-2)} = f(x)
\end{cases}$$

Это система из  $n$  алгебраических уравнений относительно  $n$  переменных  $C'_1, \dots, C'_n$ . Видим, что определитель матрицы  $\Delta = W(x) \neq 0$   $\forall x \in (a; b)$  (Т.к.  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  — ФСР). Следовательно, по теореме Крамера существует единственное решение

$$C'_1 = u_1(x), \dots, C'_n = u_n(x)$$

Таким образом

$$C_1(x) = \int u_1(x) dx + C_1, \dots, C_n(x) = \int u_n(x) dx + C_n$$

Значит решение ЛНДУ

$$y = \left( \int u_1(x) dx + C_1 \right) \varphi_1(x) + \dots + \left( \int u_n(x) dx + C_n \right) \varphi_n(x)$$

Что аналогично

$$y = \left[ \left( \varphi_1(x) \int u_1(x) dx \right) + \dots + \left( \varphi_n(x) \int u_n(x) dx \right) \right] + [C_1 \varphi_1(x) + \dots + C_n \varphi_n(x)]$$

■

**Замечание 15.1 (Нахождение произвольных постоянных и описание ответа).**

Пользуясь методом Крамера  $x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$  получаем

$$\begin{aligned} u_k(x) &= \frac{1}{W(x)} \begin{bmatrix} \varphi_1 & \dots & 0 & \dots & \varphi_n \\ \varphi'_1 & \dots & 0 & \dots & \varphi'_n \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \dots & f(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{bmatrix} = \\ &= (-1)^{(k+n)} \frac{W(\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n)}{W(x)} f(x) = \\ &= \frac{(-1)^{(k+n)} f(x) W_k(x)}{W(x)} \end{aligned}$$

Для описания решения введём вспомогательную функцию

$$G(x, t) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+n} \varphi_k(x) \frac{W_k(t)}{W(t)}$$

*Примечание.* Переменная  $t$  введена, чтобы «разграничить» интегрируемые Вронскианы и  $\varphi(x)$ , который за интегралом. Тогда решение имеет вид

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^x G(x, t) f(t) dt}_{y_{\text{ч.н.}}} + \underbrace{\sum_{k=1}^n C_k \varphi_k(x)}_{y_{\text{о.о.}}}$$

**Пример 15.1.** Дано

$$x y'' + y' = x$$

*Решение.*

Приведём к каноническому виду (делим на  $x$ )

$$y'' + \frac{y'}{x} = 1$$

Получили  $L(y)$ . Решаем в два этапа

1) Рассматриваем однородное уравнение  $L(y) = 0$

$$\begin{aligned} y'' + \frac{y'}{x} &= 0 \\ y' = z, \quad y'' &= z' \\ z' + \frac{z}{x} &= 0 \\ \int \frac{dz}{z} &= - \int \frac{dx}{x} \\ \ln |z| &= - \ln |x| + \ln C_1 \\ z = y' &= \frac{C_1}{x} \\ y = y_{o.o.} &= C_1 \ln |x| + C_2 \end{aligned}$$

2) Решаем неоднородное уравнение с произвольными постоянными  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$  и  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$

$$\begin{aligned} y &= C_1(x) \ln |x| + C_2(x) \\ \varphi_1 &= \ln |x|, \quad \varphi_2 = 1 \\ \varphi_1' &= \frac{1}{x}, \quad \varphi_2' = 0 \end{aligned}$$

Накладываем 1 дополнительное условие  $C_1' \ln |x| + C_2' = 0$

$$\begin{cases} C_1' \ln |x| + C_2' = 0 \\ C_1' \frac{1}{x} + C_2' = 1 \quad (\text{Из условия}) \end{cases}$$

*Решаем*

$$\begin{cases} C_1' \ln|x| + C_2' = 0 \\ C_1' \frac{1}{x} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2' = -C_1' \ln|x| \\ C_1' = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2' = -x \ln|x| \\ C_1(x) = \frac{x^2}{2} + C_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2(x) = -\int x \ln|x| dx \\ C_1(x) = \frac{x^2}{2} + C_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} C_2(x) &= -\int x \ln|x| dx = \left[ u = \ln|x|, \quad dv = x dx; \quad du = \frac{1}{x}, \quad v = \frac{x^2}{2} \right] = \\ &= -\frac{x^2}{2} \ln|x| + \frac{x^2}{4} + C_2 \end{aligned}$$

*Зная значения  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$  получаем*

$$y = \frac{x^2}{2} \ln|x| - \frac{x^2}{2} \ln|x| + \frac{x^2}{4} + C_1 \ln|x| + C_2$$

*Ответ*

$$y = \frac{x^2}{4} + C_1 \ln|x| + C_2$$

## 16. Лин. диф. ур-я n-го порядка с постоянными коэффициентами

### Определение 16.1.

ДУ вида

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + a_{n-1}(x) y' + \dots + a_n(x) y = f(x)$$

где  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  (постоянные),  $f(x) \in C_{(a;b)}$  называются линейные ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами (т.е. не зависящими от  $x$ )

### Замечание 16.1 (Основа метода реш. ДУ $L(y) = 0$ ).

Будем искать решения вида  $y = e^{\alpha x}$ , тогда

$$\begin{aligned} a_n * & \mid y = e^{\alpha x} \\ a_{n-1} * & \mid y' = \alpha e^{\alpha x} \\ & \vdots \\ a_1 * & \mid y^{(n-1)} = \alpha^{n-1} e^{\alpha x} \\ 1 * & \mid y^{(n)} = \alpha^n e^{\alpha x} \end{aligned}$$

Складываем, получаем

$$L(y) = e^{\alpha x} P(\alpha), \quad \text{где} \quad P(\alpha) = \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_n$$

По условию  $e^{\alpha x}$  решение  $L(y) = 0$ . Это равносильно следующему утверждению  $P(\alpha) = 0$ , то есть  $\alpha$  - корень многочлена  $P(\lambda)$ , где  $\lambda$  - переменная

### Определение 16.2.

Пусть

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + a_{n-1}(x) y' + \dots + a_n(x) y = 0$$

— ЛОДУ с постоянными коэффициентами  $a_1, \dots, a_n$

Тогда многочлен

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

называется характеристическим многочленом ЛОДУ  $L(y) = 0$

**Теорема 16.1 (ФСР, случай простых корней  $P(\lambda)$ ).**

Пусть

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

— характеристический многочлен ЛОДУ  $L(y) = 0$  с постоянными коэффициентами.

Тогда если все корни  $P(\lambda)$  вещественны и различны, то есть  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  корни  $P(\lambda)$  причём  $\alpha_i \neq \alpha_j (i \neq j)$ , то ФСР  $L(y) = 0$  выглядит так

$$\{e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x}\}$$

**Доказательство.**

Для начала вспомним определение ФСР

- 1)  $L(e^{\alpha_i x}) = 0 \quad i = 1, \dots, n$
- 2) функций  $n$ -штук и это равно порядку ДУ  $L(y) = 0$
- 3) Система функций  $\{e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x}\}$  — линейно независима

Справедливость пункта 1 следует из замечания 1, соблюдение 2 — из условия. Значит требуется доказать корректность пункта 3.

Последнее будем доказывать от противного. Пусть система линейно зависима и пусть один из коэффициентов  $C_1 \neq 0$ . Рассмотрим

$$\begin{aligned} C_1 e^{\alpha_1 x} + \dots + C_n e^{\alpha_n x} &\equiv 0 \quad | \div e^{\alpha_1 x} \\ C_1 e^{(\alpha_1 - \alpha_n) x} + \dots + C_{n-1} e^{(\alpha_{n-1} - \alpha_n) x} + 1 &\equiv 0 \quad | df \\ C_1 (\alpha_1 - \alpha_n) e^{(\alpha_1 - \alpha_n) x} + \dots + C_{n-1} (\alpha_{n-1} - \alpha_n) e^{(\alpha_{n-1} - \alpha_n) x} &\equiv 0 \end{aligned}$$

Опять делим и дифференцируем, и так до тех пор пока не получим

$$C_1 \underbrace{(\alpha_1 - \alpha_n)}_{\neq 0} \underbrace{(\alpha_1 - \alpha_{n-1})}_{\neq 0} \dots \underbrace{(\alpha_1 - \alpha_2)}_{\neq 0} e^{(\alpha_1 - \alpha_n) x} \equiv 0$$

Разности не равны нулю, так как все корни различны. Тогда остаётся только  $C_1 = 0$ , но в самом начале мы сказали, что  $C_1 \neq 0$ , получаем противоречие.

Значит  $C_1 = \dots = C_n = 0$ , следовательно система линейно не зависима, и она является ФСР.

■



**Пример 16.1.***Дано*

$$y''' - 3y'' + 2y' = 0$$

*Решение*

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

*Таким образом, корни  $P(\lambda)$* 

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = 2$$

*Значит ФСР и общее решение выглядят следующим образом*

$$\{1, e^x, e^{2x}\} \quad y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x}$$

**Замечание 16.2 («Напоминание»).***Характеристический многочлен*

$$P(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{k_1} \dots (\lambda - \alpha_s)^{k_s} (\lambda^2 + p_1\lambda + q_1)^{m_1} \dots (\lambda^2 + p_t\lambda + q_t)^{m_t}$$

*разложенный на линейные и квадратные корни, где*

1)  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  все попарно различные вещественные корни соответствующей кратности  $k_1, \dots, k_s$   $s \geq 0$   $s \in \{N \cup \{0\}\}$

2) Комплексные корни

$$\lambda^2 + p\lambda + q = (\lambda - z_j)(\lambda - \bar{z}_j)$$

$$z_j = \alpha_{s+j} + i\beta_j \quad \bar{z}_j = \alpha_{s+j} - i\beta_j \quad \beta_j \geq 0$$

$a(z_j, \bar{z}_j)$  — попарно различные пары комплексно сопряжённых корней кратности  $m_j$   $j = 1, \dots, t$   $t \geq 0$   $t \in \{N \cup \{0\}\}$

**Замечание 16.3.** Это «напоминание», так как оно аналогично критерию кратности из 2-го семестра.

*Замечание потребуетя позже.***Лемма 16.1 (о действии линейного ДУ оператора на произведение).***Пусть*

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_{n-1} y' + \dots + a_n y \quad y^{(n)} \mapsto \lambda^k \quad y \mapsto 1$$

*Характеристический многочлен*

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

Тогда  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  и  $\forall u(x)$  –  $n$  раз дифференцируемой справедлива формула

$$\begin{aligned} L(u(x) e^{\alpha x}) = e^{\alpha x} [ & u(x) P(\alpha) + \frac{1}{1!} u'(x) P'(\alpha) + \\ & + \frac{1}{2!} u''(x) P''(\alpha) + \\ & + \dots + \\ & + \frac{1}{n!} u^{(n)}(x) P^{(n)}(\alpha) ] \end{aligned}$$

**Доказательство.**

Докажем случай для  $n=2$ ,

тогда ЛОДУ и характеристический многочлен принимают следующий вид

$$L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y \quad P(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2$$

решение и его производные

$$\begin{array}{l|l} a_2 & y = u e^{\alpha x} \\ a_1 & y' = u' e^{\alpha x} + u \alpha e^{\alpha x} \\ 1 & y'' = u'' e^{\alpha x} + 2 u' \alpha e^{\alpha x} + u \alpha^2 e^{\alpha x} \end{array}$$

Складываем всё и получаем

$$\begin{aligned} a_2 y + a_1 y' + y'' &= e^{\alpha x} (a_2 u + a_1 u' + a_1 u \alpha + u'' + 2 u' \alpha + u \alpha^2) \\ L(y) &= e^{\alpha x} (a_2 u + u \alpha^2 + a_1 u \alpha + a_1 u' + 2 u' \alpha + u'') \\ L(y) &= e^{\alpha x} (u (\alpha^2 + a_1 \alpha + a_2) + u' (2 \alpha + a_1) + u'') \end{aligned}$$

В нашем случае характеристический многочлен и его производные имеют следующий вид

$$\begin{aligned} P_n(\lambda) &= \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 \\ P'_n(\lambda) &= 2 \lambda + a_1 \\ P''_n(\lambda) &= 2 \end{aligned}$$

Делаем соответствующие замены в  $L(y)$ , получаем

$$L(y) = e^{\alpha x} \left( P(\alpha) + u' P'(\alpha) + \frac{1}{2} u'' P''(\alpha) \right)$$

■

**Замечание 16.4** (Как работает доказательство в общем случае).

*Не требуется на экзамене.*

Производные корня раскладываются с помощью биномиальных коэффициентов. Затем аналогичным образом получаем  $L(y)$ . Потом мы видим, что характеристический многочлен и его производные в общем случае имеют следующий вид

$$\begin{aligned} P_n(\lambda) &= \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n \\ P'_n(\lambda) &= n \lambda^{n-1} + a_1 (n-1) \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \\ P''_n(\lambda) &= n(n-1) \lambda^{n-2} + a_1 (n-1)(n-2) \lambda^{n-3} + \dots + 2! a_{n-2} \\ &\vdots \\ P_n^{(n)}(\lambda) &= n! \end{aligned}$$

И из замены в  $L(y)$  на формулы выше мы получаем справедливость теоремы в общем случае.

**Теорема 16.2.**

Пусть  $\alpha$  корень кратности  $k \geq 1$  характеристического многочлена  $P(\lambda)$  ЛОДУ

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_{n-1} y' + \dots + a_n y = 0$$

с постоянными коэффициентами  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

Тогда функции

$$\underbrace{\{e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x}\}}_{k \text{ штук}}$$

образуют линейно независимую систему решений  $L(y) = 0$

**Доказательство.**

Пусть решение  $\alpha$ , имеет вид

$$y = x^l e^{\alpha x} \quad 0 \leq l \leq k-1$$

Тогда производные множителя у корня имеют следующий вид

$$u = x^l, \quad u' = l x^{l-1}, \quad \dots, \quad u^{(l)} = l!, \quad u^{(l+1)} = 0, \quad \dots, \quad u^{(n)} = 0$$

Значения характеристического многочлена и его производных ведут себя следующим образом.

$$P(\alpha) = 0, \quad \dots, \quad P^{(l)}(\alpha) = 0, \quad P^{(l+1)}(\alpha) = \text{something}, \quad \dots, \quad P^{(n)}(\alpha) = \text{something}$$

Последнее справедливо по формулировке критерия кратности корня (см. 2 семестр).

По лемме 1 получаем, что корень, включающий произведение, под действием линейного дифференциального оператора будет иметь следующий вид

$$\begin{aligned} L(x^l e^{\alpha x}) &= \\ &= e^{\alpha x} \left( x^l \cdot 0 + \frac{l x^{l-1} \cdot 0}{1!} + \dots + \frac{0 \cdot l!}{l!} + \frac{0 \cdot p^{(l+1)}(\alpha)}{(l+1)!} + \dots + \frac{0 \cdot p^{(n)}(\alpha)}{n!} \right) = \\ &= e^{\alpha x} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Таким образом, получаем что  $e^{\alpha x} x^l$  решение  $L(y) = 0$ .

Теперь докажем что система ЛНЗ.  
Так как  $0 \leq l \leq k-1$  значит

$$C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x} + \dots + C_k x^{k-1} e^{\alpha x} = 0$$

так как  $e^{\alpha x}$  общий множитель и он не равен нулю, тогда очевидно

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad C_1 + C_2 x + \dots + C_n x^{n-1} = 0$$

Сумма будет всегда равна нулю тогда и только тогда, когда

$$C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$$

Таким образом, система

$$\{e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x}\}$$

— является ЛНЗ. ■

### Теорема 16.3 (Вклад в ФСР вещественных корней).

Если в условиях теоремы 2  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  вещественные корни характеристического многочлена  $P(\lambda)$  обладают соответствующими кратностями  $k_1, \dots, k_s$  то набор функций

$$\{e^{\alpha_1 x}, x e^{\alpha_1 x}, \dots, x^{k_1-1} e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_s x}, x e^{\alpha_s x}, \dots, x^{k_s-1} e^{\alpha_s x}\}$$

образует ЛНЗ систему решений ДУ  $L(y) = 0$

**Доказательство.**

Данные функции являются решениями  $L(y) = 0$  (по теореме 2). Таким образом, остаётся доказать их ЛНЗ на  $\mathbb{R}$ .

Докажем справедливость факта от противного.

Предположим, что линейная комбинация этих функций равна нулю

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P_1(x) e^{\alpha_1 x} + \dots + P_s(x) e^{\alpha_s x} \equiv 0$$

Также скажем следующее

$$P_1(x) = C_0 x^k + \dots, \quad C_0 \neq 0 \quad k \leq k_1 - 1$$

Разделим линейную комбинацию на  $e^{\alpha_s x}$ , получим

$$P_1(x) e^{(\alpha_1 - \alpha_s)x} + \dots + P_s(x) \equiv 0 \quad \deg P_s \leq k_s - 1$$

$k_s$  раз дифференцируем, получаем

$$Q_1(x) e^{(\alpha_1 - \alpha_s)x} + \dots + Q_{s-1}(x) e^{(\alpha_{s-1} - \alpha_s)x} \equiv 0$$

старший коэффициент у многочлена  $Q_1$  равен

$$C_0 (\alpha_1 - \alpha_s)^{k_s} \neq 0$$

Сама степень многочлена  $\deg Q_1 = k$

аналогично для последующих старших коэффициентов  $Q_i$ .

Повторяем деление и дифференцирование до тех пор пока не получим следующее

$$R_1(x) e^{(\alpha_1 - \alpha_s)x} \equiv 0$$

где старший коэффициент у  $R_1$  равен

$$C_0 (\alpha_1 - \alpha_s)^{k_s} (\alpha_1 - \alpha_{s-1})^{k_{s-1}} \dots (\alpha_1 - \alpha_2)^{k_2}$$

Для соблюдения тождества выше должно выполняться  $R_1(x) = 0$  (т.к. второй множитель не может быть равен нулю). Но значение  $R_1(x)$  не может быть равно нулю, так как  $C_0 \neq 0$ , а также  $\deg R_1 = k$  (справедливость последнего важна, так как в противном случае значение коэффициента не имело бы значения, т.к. после дифференцирований значение  $x^\beta$  равнялось нулю).

Таким образом, получаем противоречие, значит  $P_1 \equiv 0, \dots, P_s \equiv 0$ . Следовательно решения ЛНЗ. ■

**Пример 16.2.** Дано

$$y^{(5)} + 2y^{(4)} + y^{(3)} = 0$$

*Решение.*

Характеристический многочлен для этого уравнения следующий

$$P(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^4 + \lambda^3 = \lambda^3(\lambda + 1)^2$$

Получаем для него корни  $\alpha$  с кратностями  $k$

$$\alpha_1 = 0, \quad k_1 = 3 \quad \alpha_2 = -1, \quad k_2 = 2$$

Значит ФСР

$$\{1, x, x^2, e^{-x}, x e^{-x}\}$$

А общее решение ЛОДУ

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + (C_4 + C_5 x) e^{-x}$$

## 17. Случай комплексных корней характеристического многочлена. Общий случай построения ФСР

**Определение 17.1** (Комплексное число).

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha + \beta i \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R}$$

*Представление комплексного числа*

$$e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x))$$

*Замечание*

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} + e^{z_2}$$

**Определение 17.2.**

*Пусть*

$$u = u(x), \quad v = v(x)$$

— функции вещественных переменных  $x$ , тогда

$$z = u(x) + i v(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

— комплексная функция от вещественных аргументов.

*А также*

$$(u + i v)'_x = u'_x + i v'_x$$

**Замечание 17.1.**

$$L(u + i v) = L(u) + i L(v)$$

**Замечание 17.2.**

$$(e^{(\alpha + i\beta)x})'_x = (\alpha + i\beta) e^{(\alpha + i\beta)x}$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} (e^{(\alpha + i\beta)x})'_x &= [\text{опр. 1}] = (e^{\alpha x} \cos(\beta x) + i e^{\alpha x} \sin(\beta x))'_x = \\ &= (e^{\alpha x} \cos(\beta x))'_x + i (e^{\alpha x} \sin(\beta x))'_x = \\ &= e^{\alpha x} (\alpha \cos(\beta x) - \beta \sin(\beta x)) + i e^{\alpha x} (\alpha \sin(\beta x) + \beta \cos(\beta x)) \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} (\alpha + i\beta) e^{(\alpha + i\beta)x} &= [\text{опр. 1}] = (\alpha + i\beta) e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)) = \\ &= e^{\alpha x} (\alpha \cos(\beta x) - \beta \sin(\beta x)) + i e^{\alpha x} (\alpha \sin(\beta x) + \beta \cos(\beta x)) \end{aligned}$$

■

**Теорема 17.1.**

Пусть  $\alpha \pm i\beta$  — пара комплексно сопряжённых корней характеристического многочлена  $P(\lambda)$ , ( $\beta > 0$ ) кратности  $m \geq 1$

ЛОДУ  $L(y) = 0$  с постоянными коэффициентами (как в §12).

Тогда функции

$$\{e^{\alpha x} \cos(\beta x), x e^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x), \\ e^{\alpha x} \sin(\beta x), x e^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x)\}$$

Образуют систему  $2m$  линейно независимых решений ЛОДУ  $L(y) = 0$

**Доказательство.**

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 из предыдущего параграфа.

По условию

$$L(x^l e^{(\alpha+i\beta)x}) = 0 \quad 0 \leq l \leq m-1$$

Тогда корень

$$y = x^l e^{(\alpha+i\beta)x} = x^l e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)) \quad 0 \leq l \leq m-1$$

В более общем виде (по определению 2) корень

$$y = u + i v$$

Тогда по свойству линейного оператора для комплексного числа получаем

$$L(u + i v) = L(u) + i L(v)$$

Так как  $L(y) = 0$ , то тогда и слагаемые, его составляющие также равны нулю. Значит

$$u = x^l e^{\alpha x} \cos(\beta x) \quad v = x^l e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

Являются решениями ДУ  $L(y) = 0$ .

Данные функции ЛНЗ над областью  $\mathbb{C}$ . Значит тем более функции ЛНЗ над  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ . ■

**Теорема 17.2 (Построение ФСР ЛОДУ  $n$ -го порядка с  $const$  коэф).**

Пусть

$$P(\lambda) = (\lambda + \alpha_1)^{k_1} \dots (\lambda + \alpha_s)^{k_s} (\lambda^2 + p_1 \lambda + q_1)^{m_1} \dots (\lambda^2 + p_t \lambda + q_t)^{m_t}$$



характеристический многочлен ЛОДУ  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами, который соответствует следующим уравнениям

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n, \quad L(y) = y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_s$  — попарно различные вещественные корни  $P(\lambda)$  кратности  $k_1, \dots, k_s$  соответственно ( $s \geq 0$ ). (Не путать  $\alpha_i$  и  $a_i$ )  
 $(\lambda^2 + p\lambda + q)^m = (\lambda - z)(\lambda - \bar{z})$  пары  $(z_1, \bar{z}_1) \dots (z_t, \bar{z}_t)$  — все попарно различные корни кратности  $m_1, \dots, m_t$  соответственно ( $t \geq 0$ )

Замечание по поводу условия  $\beta > 0$ .

$$z_j = \alpha_{s+j} + i\beta_j \quad \beta_j > 0 \quad \bar{z}_j = \alpha_{s+j} - i\beta_j$$

Тогда

1) Если  $\alpha \in \mathbb{R}$ , корень кратности  $k$ , для  $P\lambda$ , тогда

$$\{e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x}\}$$

2) Если  $\alpha \pm i\beta$ , пара комплексно сопряжённых корней кратности  $m \geq 1$ , тогда

$$\{e^{\alpha x} \cos(\beta x), x e^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x), \\ e^{\alpha x} \sin(\beta x), x e^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x)\}$$

Всего будет  $k_1 + \dots + k_s + 2m_1 + \dots + 2m_t = n$  решений. Все они образуют ФСР  $L(y) = 0$

**Доказательство.**

Все эти  $n$  функций являются решением  $L(y) = 0$ . Их количество равно порядку ДУ  $L(y) = 0$ . Эти функции образуют ЛНЗ систему, так как функции

$$e^{\alpha_1 x}, \dots, x^{k_1-1} e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{(\alpha_{s+1} \pm i\beta_1)x}, \dots, e^{(\alpha_{s+t} \pm i\beta_t)x} x^{m_t-1}$$

ЛНЗ на  $\mathbb{C}$ , следовательно они ЛНЗ на  $\mathbb{R}$ . Таким образом они образуют ФСР (т.к. мы рассмотрели все три критерия). ■

**Пример 17.1.**

Дано

$$P(\lambda) = \lambda^2 (\lambda - 2)^3 (\lambda + 1)^4 (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2$$

*Решение.*

*Видим, что корни характеристического многочлена имеют соответствующие кратности*

$$\begin{array}{cccc}\alpha_1 = 0 & \alpha_2 = 2 & \alpha_3 = -1 & \alpha \pm i\beta = -2 \pm i \\ k_1 = 2 & k_2 = 3 & k_3 = 4 & m_1 = 2\end{array}$$

*Тогда ФСР*

$$\{1, x, e^{2x}, x e^{2x}, x^2 e^{2x}, e^{-x}, x e^{-x}, x^2 e^{-x}, x^3 e^{-x}, \\ e^{-2x} \cos(x), e^{-2x} \sin(x), x e^{-2x} \cos(x), x e^{-2x} \sin(x)\}$$

$$n = k_1 + k_2 + k_3 + m_1 = 2 + 3 + 4 + 2 \cdot 2 = 13$$

*Тогда общее решение выглядит так*

$$y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x + C_5 x^2) e^{2x} + (C_6 + C_7 x + C_8 x^2 + C_9 x^3) e^{-x} + \\ + (C_{10} + C_{11} x) e^{-2x} \cos(x) + (C_{12} + C_{13} x) e^{-2x} \sin(x)$$

## 18. Метод неопределённых коэф. для отыскания частного решения ЛОДУ n-го порядка с пост. коэф.

В параграфе рассмотрим уравнения вида

$$L(y) = P_m(x)e^{\alpha x} \quad L(y) = P_m(x)e^{\alpha x} \cos \beta x \quad L(y) = Q_m(x)e^{\alpha x} \sin x$$

**Теорема 18.1 (О суперпозиции частных решений).** Пусть  $y_1(x), \dots, y_k(x)$  - это частные решения соответствующих (1 к 1) ЛНДУ вида  $L(y) = f_1(x), \dots, L(y) = f_k(x)$

Тогда для ЛНДУ вида

$$L(y) = A_1 f_1(x) + \dots + A_k f_k(x) \quad A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}$$

имеет частное решение вида

$$y = A_1 y_1(x) + \dots + A_k y_k(x)$$

**Доказательство.** Дано:

$$L(y) = f_1(x), \dots, L(y) = f_k(x)$$

Тогда свойству линейного оператора

$$L(A_1 y_1(x) + \dots + A_k y_k(x)) = A_1 L(y_1) + \dots + A_k L(y_k) = A_1 f_1(x) + \dots + A_k f_k(x)$$

■

**Лемма 18.1 (Алгебраическая).** Пусть

$$Q_m(x) = C_0 x^m + C_1 x^{m-1} + \dots + C_m \quad C_0 \neq 0$$

многочлен степени  $m \geq 0$ .

Тогда для любых чисел  $\delta_0 \neq 0, \delta_1, \dots, \delta_n$  существует многочлен

$$u(x) = u_m(x) = A_0 x^m + \dots + A_n$$

степени  $m$  для которого

$$\delta_0 u + \delta_1 u' + \dots + \delta_n u^{(n)} = Q_m(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

То есть

$$C_0 x^m + C_1 x^{m-1} + \dots + C_m \equiv \delta_0 u + \delta_1 u' + \dots + \delta_n u^{(n)}$$

**Доказательство.** Для доказательства достаточно рассмотреть случай  $m = n$  так как

- 1) если  $n < m$ , то возьмём набор (так как числа любые по условию)

$$\delta_{n+1} = \dots = \delta_m = 0$$

тогда многочлен  $u_m(x)$  содержит  $n$  слагаемых

- 2) если  $n > m$ , то

$$u^{(m+1)} = 0, \dots, u^{(n)} = 0$$

так как многочлен  $Q(x)$  степени  $m$  (по условию). Это всё значит, что

$$\delta_0 u + \delta_1 u' + \dots + \delta_n u^{(n)} \equiv Q_m(x)$$

два случая выше сводятся к  $m = n$ .

Для начала выразим коэффициенты  $C_m, \dots, C_1$  из  $Q_m(x)$ , получим

$$C_m = Q_m(x), \quad 1! C_{m-1} = Q'_m(x), \quad \dots, \quad m! C_0 = Q^{(m)}(x)$$

**Примечание.** Последние не нулевые слагаемые у производных дают коэффициент в виде на постоянной  $i$  умноженной на факториал (из-за взятия производной у  $x^i$ )

Также по условию для  $Q(x)$  и его производных существуют такие равенства

$$\begin{aligned} Q_m(x) &= \delta_0 u(x) + \delta_1 u'(x) + \dots + \delta_m u^{(m)}(x) \\ Q'_m(x) &= \delta_0 u'(x) + \delta_1 u''(x) + \dots + \delta_{m-1} u^{(m)}(x) + 0 \\ &\vdots \\ Q^{(m)}_m(x) &= \delta_0 u^{(m)}(x) \end{aligned}$$

Если мы подставим в качестве аргумента ноль в функцию  $u(x)$  и аналогично способу выше выразим  $A_m, \dots, A_0$ , то получим

$$A_m = u(0), \quad 1! A_{m-1} = u'(0), \quad \dots, \quad m! A_0 = u^{(m)}(0)$$

Теперь объединим всё таким образом, чтобы остались только  $C_i, \delta_i, A_i$ , получим систему

$$\begin{cases} C_m = \delta_0 A_m + \delta_1 A_{m-1} + \dots + m! \delta_m A_0 \\ 1! C_{m-1} = 1! \delta_0 A_{m-1} + \delta_1 A_{m-1} + \dots + m! \delta_{m-1} A_0 \\ \vdots \\ m! C_0 = m! \delta_0 A_0 \end{cases}$$

это алгебраическая система из  $(m+1)$  уравнений относительно  $(m+1)$  переменных  $A_0, A_1, \dots, A_m$  и определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \delta_0 & * & * & * \\ 0 & 1! \delta_0 & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & m! \delta_m \end{vmatrix} = [\text{по свойству треугольной матрицы}] = \delta_0^{(m+1)} 1! 2! \dots m!$$

Так как  $\delta_0 \neq 0$  (по условию), то  $\Delta \neq 0$ . Тогда по теореме Крамера существует единственное решение в виде  $A_0, A_1, \dots, A_m$  и

$$\exists u(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \delta_0 u + \delta_1 u' + \dots + \delta_n u^{(n)} = Q_m(x)$$

■

**Теорема 18.2.** Пусть

$$L(y) = y^{(n)} + \alpha_1 y^{(n-1)} + \dots + \alpha_n y = Q_m(x) e^{\alpha x}$$

ЛНДУ  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами  $a_1, \dots, a_n$  и правой частью специального вида  $Q_m(x) e^{\alpha x}$ , где

$$Q_m(x) = C_0 x^m + C_1 x^{m-1} + \dots + C_m \quad C_0 \neq 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

— многочлен степени  $m \geq 0$ .

Обозначим через  $P(\lambda)$  характеристический многочлен этого ДУ и положим  $k = 0$ , если  $P(\alpha) \neq 0$  и  $k$  - кратность корня характеристического многочлена  $P(\lambda)$ , если  $P(\alpha) = 0$

Тогда существует многочлен  $u(x) = A_0 x^m + \dots + A_m$  степени  $m$  для которого  $y = x^k e^{\alpha x} u(x)$  является частъ решения ЛНДУ  $L(y) = Q_m(x) e^{\alpha x}$

**Доказательство.** Так как  $k$  описывает кратность корня характеристического многочлена, то очевидно, что по критерию кратности корня следует

- Если  $k = 0$ , то  $P(\alpha) \neq 0$
- Если  $k \geq 1$ , то  $P(\alpha) = 0, \dots, P^{(k-1)}(\alpha) = 0, P^{(k)}(\alpha) \neq 0$

Как получили равенство ниже? (Похоже на пар.12 т.2)

$$L(V(x) e^{\alpha x}) = e^{\alpha x} (V(x) P(\alpha) + \dots + \frac{1}{(k-1)!} V^{(k-1)}(x) P^{(k-1)}(\alpha) + \frac{1}{k!} V^{(k)}(x) P^{(k)}(\alpha) + \dots + \frac{1}{n!} V^{(n)}(x) P^{(n)}(\alpha))$$

Обозначим

$$\delta_0 = \frac{1}{k!} P^{(k)}(\alpha) \neq 0, \quad \delta_1 = \frac{1}{(k+1)!} P^{(k+1)}(\alpha) \neq 0, \quad \dots, \quad \delta_{n-k} = \frac{1}{n!} P^{(n)}(\alpha)$$

тогда по лемме выше получаем

$$\begin{aligned} \exists \omega(x) = B_0 x^m + \dots + B_m \\ \forall x \subset R \quad \delta_0 \omega(x) + \delta_1 \omega'(x) + \dots + \delta_{n-k} \omega^{(n-k)}(x) = Q_m(x) \end{aligned}$$

Или последнее равенство в другом виде

$$L(V(x) e^{\alpha x}) = e^{\alpha x} (\delta_0 \omega + \delta_1 \omega' + \dots + \delta_{n-k} \omega^{(n-k)})$$

Тогда нетрудно заметить, что  $V^{(k)}(x) = \omega(x)$ . Также знаем, что (Откуда?)

$$V|_{x=x_0} = 0, \quad \dots, \quad V^{(k-1)}|_{x=x_0} = 0$$

Тогда

$$V(x) = A_0 x^{m+k} + \dots + A_m x^k = x^k u(x) \quad u(x) = A_1 x^m + \dots + A_m$$

Таким образом

$$L(x^k u(x) e^{\alpha x}) = e^{\alpha x} (\delta_0 \omega(x) + \delta_1 \omega'(x) + \dots + \delta_{n-k} \omega^{(n-k)}(x)) = e^{\alpha x} Q_m(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Значит  $y = x^k u(x) e^{\alpha x}$  — частное решение  $L(y) = Q_m e^{\alpha x}$

■

**Пример 18.1.** Дано:

$$y'' - 2y' + y = 12x e^x$$

Решение:

$$\begin{aligned} L(y) &= Q_1(x) e^x \\ Q_1(x) &= 12x, \quad \alpha = 1, \quad m = 1 \end{aligned}$$

1) Решаем однородное

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 \\ \lambda_1 &= 1, \quad k_1 = 2 \\ \lambda &= \lambda_1 \Rightarrow k = 2 \\ y_{o.o} &= C_1 e^x + C_2 x e^x \end{aligned}$$

2) Из шага 1 знаем, что  $k = 2$ , также из условия  $m = 1, \quad \alpha = 1$ .  
По теореме 2 получаем следующее решение

$$\begin{aligned} \psi(x) &= x^2 (Ax + B) e^x \\ V &= Ax^3 + Bx^2 \quad p = (\lambda - 1)^2 = 0 \\ V' &= 3Ax^2 + 2Bx \quad \frac{p'}{1!} = 2(\lambda - 1) = 0 \\ V'' &= 6Ax + 2B \quad \frac{p''}{2!} = 1 = 1 \end{aligned}$$

столбец при  $\lambda = 1$

$$\begin{aligned} L(Ve^x) &= e^x (0 \cdot 0 + V' \cdot 0 + (6Ax + 2B) \cdot 1) = 12x e^x \\ 6Ax + 2B &= 12x \Rightarrow A = 2, B = 0 \end{aligned}$$

Значит частное неоднородное решение

$$\psi(x) = 2x^3 e^x = y_{ч.н}$$

3) Таким образом общее решение

$$y = (2x^3 + C_1 + C_2 x)e^x$$

**Теорема 18.3.** Пусть

$$L(y) = y^{(n)} + \alpha_1 y^{(n-1)} + \dots + \alpha_n y = Q_m(x) \cos(\beta x) + R_m(x) e^{\beta x}$$

где  $Q_m(x), R_m(x)$  - многочлены степени  $\leq m$ ,

$$\alpha + \beta i \in \mathbb{C}, \quad \beta \neq 0$$

Если

$$P(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$$

— характеристический многочлен то

- если  $k = 0$ , то

$$P(\alpha + \beta i) \neq 0$$

- $k$  — кратность корня  $\alpha + \beta i$ , если  $P(\alpha + \beta i) = 0$

То тогда

$$\exists \quad u(x) = A_0 x^m + \dots + A_m, \quad v(x) = B_0 x^m + \dots + B_m$$

— многочлены степени  $\leq m$  для которых

$$\psi(x) = x^k e^{\alpha x} (u(x) \cos(\beta x) + V \sin(\beta x))$$

является решением ЛНДУ

$$L(y) = e^{\alpha x} (Q_m(x) \cos(\beta x) + R_m(x) \sin(\beta x))$$

**Доказательство.** Рассмотрим вспомогательное ДУ

$$L(y) = (Q_m - i R_m) e^{(\alpha + i \beta) x}$$

$$\operatorname{Re}(Q_m - i R_m) e^{(\alpha + \beta i) x} = e^{\alpha x} (Q_m \cos(\alpha x) + R_m \sin(\beta x))$$

По предыдущей теореме 2, следует что существуют мн-ны степени  $\leq m$ ,

$$u(x) - \omega(x) = \underbrace{x^m + \dots + A_m}_u - i \underbrace{(B_0 x^m + \dots + B_m)}_v$$

такой что

$$y(x) = x^k (u - i v) e^{(\alpha + \beta i) x}$$

является решением вспомогательного уравнения

$$L(y) = (Q_m - i R_m) e^{(\alpha + \beta i) x}$$

**Непонятно!**

$$\psi(x) - \operatorname{Re}(y(x)) = x^k e^{\alpha x} (u(x) \cos \beta x + V(x) \sin \beta x)$$

является решением

$$L(y) = \operatorname{Re}(Q_m - i R_m) e^{(\alpha + \beta i) x} = e^{\alpha x} (Q_m \cos \alpha x + Q_m \sin \beta x)$$

■

**Пример 18.2.** Дано:

$$y'' - 2y' + y = 4x \cos(x)$$

Решение:

**Разобрать!!!**



1) Ищем общее однородное

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta = \pm i \Rightarrow \alpha = 0, \quad \beta = 1 \quad k_{1,2} = 1$$

$$y_{o.o} = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$$

2) Ищем частное решение  $y'' + y = 4x \cos(x)$

$$m = 1, \quad \alpha \pm \beta i = \pm i, \quad k = 1$$

$$\psi(x) = x(Ax + B)e^{ix} = ue^{ix}$$

$$L(ue^{ix}) = e^{ix}(uP(i) + u'p'(i) + \frac{u''}{2}P''(i))$$

$$u = Ax^2 + Bx \quad p = \lambda^2 + 1 \quad = 0$$

$$u' = 2Ax + B \quad p' = 2\lambda \quad = 2$$

$$V'' = 2A \quad \frac{p''}{2} = 1 \quad = 1$$

$$\lambda = 1$$

$$L(ue^{ix}) = e^{ix}((uAi + 2B)2A) = 4xe^{ix}$$

$$4Ai = 4, \quad A = -i, \quad B = 1$$

$$\Rightarrow y. = (-ix^2 + x)(\cos(\alpha) + i\sin(x))$$

$$\psi = \operatorname{Re} y. = x \cos(x) + x^2 \sin(x)$$

3) Таким образом общее решение

$$y = x \cos(x) + x^2 \sin(x) + C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$$

## 19. Системы обыкновенных ДУ

### Определение 19.1.

Система уравнений вида

$$F_i(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{m_1}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{m_n}) \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

называют системой обыкновенных ДУ порядка  $m = \max\{m_1, \dots, m_n\}$  относительно функций  $y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x)$ . Набор функций  $\{y_1, \dots, y_n\}$  называется решением ДУ если при подстановке

$$F_i(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{m_1}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{m_n}) \stackrel{(x)}{=} 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

то есть получается система верных функциональных тождеств

### Теорема 19.1.

Всякая система ДУ из определения 1 эквивалентна некоторой системе обыкновенных ДУ 1-го порядка

### Доказательство.

Введём

$$\begin{array}{cccc} z_{1,1} = y_1 & z_{1,2} = y_1' & \dots & z_{1,m_1} = y_1^{(m_1-1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z_{n,1} = y_n & z_{n,2} = y_n' & \dots & z_{n,m_n} = y_n^{(m_n-1)} \end{array}$$

Примечание. Всего получим  $N = \sum_{i=1}^n m_i$  функций.

Таким образом, после замены на  $z$  получаем

$$F_i(x, z_{1,1}, z_{1,2}, \dots, z_{1,m_1}, z_{1,m_1}', \dots, z_{n,1}, z_{n,2}, \dots, z_{n,m_n}, z_{n,m_n}') \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Мы знаем, что  $z_{i,1}, z_{i,2}$  связаны между собой и другими  $z_{i,j}$ , тогда

$$\begin{cases} z_{i,j}' = z_{i,j+1} & 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq j \leq m_i - 1 \\ F_i = 0 \end{cases}$$

Таким образом мы получили систему обыкновенных ДУ первого порядка относительно  $z_{i,j}$  ■

**Определение 19.2.**

Система ДУ вида

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ y'_n = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Называют нормальной системой обыкновенных ДУ 1-го порядка

**Замечание 19.1.**

Введём

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Тогда систему из определения выше можно описать так

$$\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$$

**Пример 19.1.**

Дано

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n(x) y = f(x)$$

Требуется перейти к нормальной системе обыкновенных ДУ 1-го порядка.

Решение.

Введём следующие функции

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad \dots, \quad y_n = y^{(n-1)}$$

Тогда ответ

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = \dots y_3 \\ \vdots \\ y'_{n-1} = \dots y_n \\ y'_n = -p_n y_1 - p_{n-1} y_2 - \dots - p_1 y_n + f(x) \end{cases}$$

**Теорема 19.2.**

Пусть

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y'_n = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

— нормальная система относительно  $n$  функций  $y_1, \dots, y_n$  первого порядка

Тогда если функции

$$f_1, \dots, f_n, \quad \frac{\delta f_i}{\delta y_j} \quad 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq j \leq n$$

непрерывны в области  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , а  $M_0(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0)$  — внутренняя точка области  $D$ , то  $\exists \delta > 0$  и существует единственное решение

$$(y_1(x), \dots, y_n(x)) \quad x \in U_\delta(x_0)$$

удовлетворяющее следующим условиям задачи Коши

$$\begin{cases} \vec{y}' = \vec{f}'(x, \vec{y}) \\ \vec{y}|_{x=x_0} = \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

**Доказательство.** Без доказательств ■

**Замечание 19.2 (Как построить интегральную кривую).** Выведем систему ДУ «в дифференциалах». Для этого рассмотрим

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

в сокращенном виде

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, \vec{y}) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, \vec{y}) \end{cases}$$

Воспользуемся  $dy_i = y_i'(x) dx$ , получим

$$dx = \frac{dy_1}{f_1(x, \vec{y})} = \dots = \frac{dy_n}{f_n(x, \vec{y})}$$

или

$$1 = \frac{y_1'}{f_1(x, \vec{y})} = \dots = \frac{y_n'}{f_n(x, \vec{y})}$$

Если интегральная кривая  $L$  проходит через точку  $M_0(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0)$  то касательные к ней удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений

$$X - x_0 = \frac{Y_1 - y_1^0}{f_1(M_0)} = \dots = \frac{Y_n - y_n^0}{f_n(M_0)}$$

### Замечание 19.3.

Систему ДУ можно свести к уравнению высокого порядка относительно одной функции с помощью метода исключения неизвестной.

**Пример 19.2.** Дано

$$\begin{cases} y' = x + z \\ z' = x + 2y + z \end{cases} \quad \text{Найти } (y(x), z(x))$$

Решение.

Продифференцируем первое уравнение по  $x$ , а также выразим из него  $z$ , получим

$$\begin{cases} y'' = 1 + z' = [z' = x + 2y + z] = 1 + x + 2y + z \\ z = y' - x \end{cases}$$

Заменяем (и исключаем)  $z$  получаем

$$\begin{aligned} y'' &= 1 + x + 2y + y' - x \\ y'' - y' - 2y &= 1 \end{aligned}$$

Таким образом, получили ЛНДУ. Решаем сначала соответствующее однородное

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2) \\ \alpha_1 &= -1 \quad \alpha_2 = 2 \quad k_{1,2} = 1 \end{aligned}$$

Получаем ФСР  $\{e^{-x}, e^{2x}\}$  и тогда,

$$y_{o.o.} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

Теперь решаем неоднородное, по условию видим

$$\alpha = 0, \quad k = 0, \quad m = 0$$

Пусть

$$\begin{aligned} y &= A, \quad \Rightarrow \quad y' = 0, \quad y'' = 0 \\ -2A &= 1 \quad A = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

*Таким образом, ответ*

$$y = -\frac{1}{2} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

$$z = y' - x = -x - C_1 e^{-x} + 2 C_2 e^{2x}$$

## 20. Система линейных ДУ

**Определение 20.1.** Пусть для функций справедливо

$$P_{ij}(x) \in C_{(a;b)} \quad f_1(x), \dots, f_n(x) \in C_{(a;b)}$$

Тогда система ДУ вида

$$\begin{cases} y_1' = P_{11}(x)y_1 + \dots + P_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ \dots \\ y_n' = P_{n1}(x)y_1 + \dots + P_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases}$$

называется линейной системой относительно  $n$  неизвестных функций  $(y_1(x), \dots, y_n(x))$

**Замечание 20.1.** Для краткости записи введём

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad P(x) = \begin{pmatrix} P_{11}(x) & \dots & P_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1}(x) & \dots & P_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

где  $\vec{f}(x)$  — столбец правых частей, а  $P(x)$  — матрица коэффициентов. Таким образом система ДУ из определения 1 имеет вид

$$\vec{y}' = P(x)\vec{y} + \vec{f}(x)$$

**Теорема 20.1.** В условиях определения 1

$$\forall x_0 \in (a; b) \quad \forall \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix}$$

существует единственное решение

$$\vec{y} = \vec{y}(x) \quad x \in (a; b)$$

задачи Коши

$$\begin{cases} \vec{y}' = P(x)\vec{y} + \vec{f}(x) \\ \vec{y}|_{x=x_0} = \vec{y}_0 \end{cases}$$

**Доказательство.** Без доказательств ■

**Определение 20.2.** Пусть

$$\{\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_k(x)\}$$

система функций в  $R^n$  причём

$$\vec{y}_i(x) = \begin{pmatrix} y_{i1} \\ \vdots \\ y_{in} \end{pmatrix} \quad x \in (a; b)$$

Тогда

- система линейно зависима на интервале  $(a; b)$   
Другими словами

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \neq 0 \quad \forall x \in (a; b) \quad \alpha_1 \vec{y}_1 + \dots + \alpha_k \vec{y}_k = 0$$

- Во всех остальных случаях система линейно не зависима на интервале

**Определение 20.3.** Пусть

$$\vec{y}' = P(x) \vec{y}$$

— однородная система линейных ДУ, где  $P(x)$  — матрица коэффициентов, каждый из которых  $\in C(a; b)$ .

Тогда

$$\{\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_n(x)\}$$

— ФСР для  $\vec{y}' = P(x) \vec{y}$ , если

$$1) \quad \forall i \in (1, \dots, n) \quad \vec{y}'_i = P(x) \vec{y}_i \quad (\forall x \in (a; b))$$

2) Количество векторов системы решений соответствует порядку матрицы  $P(x)$

3) Система линейно независима на  $(a; b)$

**Теорема 20.2.** Пусть

$$\vec{y}' = P(x) \vec{y} + \vec{f}(x)$$



— система линейных ДУ (как в определении 1)

Тогда существует ФСР  $\{\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_n(x)\}$  соответствующая линейному однородному ДУ  $\vec{y}' = P(x)\vec{y}$  и решения  $\vec{\psi}(x)$ , такие что

$$\vec{y} = \vec{\psi}(x) + C_1 \vec{y}_1(x) + \dots + C_n \vec{y}_n(x)$$

описывает множество всех решений данной системы линейных ДУ, где  $C_1, \dots, C_n$  — произвольные постоянные

**Доказательство.** Без доказательств

■

## 21. Система линейных ДУ с const коэф.

**Определение 21.1.** Система вида

$$\begin{cases} y_1' = a_{11} y_1 + \dots + a_{1n} y_n + f_1(x) \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1} y_1 + \dots + a_{nn} y_n + f_n(x) \end{cases}$$

называется системой из  $n$  ЛДУ с постоянными коэффициентами.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— матрица коэффициентов

**Замечание 21.1.**

Система из определения 1 сводится для каждой функции  $y_i'(x)$  к ЛДУ  $n$ -го порядка

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = e^{\alpha x} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \vec{y}' = \alpha \vec{b} e^{\alpha x} \quad \alpha \vec{b} e^{\alpha x} = A \vec{b} e^{\alpha x} \\ \Rightarrow \quad A \vec{b} = \alpha \vec{b}$$

Таким образом  $\vec{b}$  собственный вектор,  $\alpha$  собственное значение матрицы  $A$ ,  $\det(A - \alpha E) = 0$

$$(-1)^n \det(A - \lambda E) = P_n(\lambda) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n$$

— характеристический многочлен.

**Замечание 21.2.**

Если  $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$  — попарно различные корни характеристического многочлена (т.е. собственное значение матрицы  $A$ )  $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$  соответствующие собственные векторы. Тогда

$$y = C_1 \vec{b}_1 e^{\alpha_1 x} + \dots + C_n \vec{b}_n e^{\alpha_n x}$$

— общее решение линейной дифференциальной системой  $\vec{y}' = A \vec{y}$

Пример ниже не разобран. Есть множество вопросов по решению. Не понятен ход действий.

**Пример 21.1.**

*Дано*

$$y_1 = y_1(t), \quad y_2 = y_2(t)$$

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + 3t \\ y_2' = -4y_1 + y_2 + te^{-t} \end{cases}$$

*Решение.*

Сначала рассматриваем соответствующую однородную систему. Получаем следующий характеристический многочлен.

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 4 = (\lambda+1)(\lambda-3)$$

Его решения с кратностями

$$\alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 3, \quad k_{1,2} = 1$$

Ищем собственный вектор для  $\lambda = \alpha_1 = -1$ . Получаем

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 = 0 \end{cases} \quad 2\alpha = \beta$$

Таким образом собственный вектор

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Частное решение

$$\vec{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Аналогично для  $\lambda = \alpha_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -2\beta_1 = \beta_2$$

Значение собственного вектора и частное решение

$$\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{3t}$$

Таким образом решение для однородной системы

$$y_{o.o.} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{3t}$$

$$\begin{aligned} y_1'' &= y_1' - y_2' + 3 = y_1' + 4y_2 - y_2 - te^{-t} + 3 = \\ &= y_1' + 4y_1 - y_1 + y_1' - 3t + 3 - te^{-t} \end{aligned}$$

Для нахождения значения  $y_1''$  использовали следующие равенства

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 - y_1' + 3t \quad \Leftrightarrow \quad y_1' = y_1 - y_2 + 3t \\ y_2' &= -4y_1 + y_2 + te^{-t} \end{aligned}$$

Продолжаем дальше

$$\begin{aligned} L(y_1) &= y_1'' - 2y_1' - 3y_1 = 3 - 3t - te^{-t} \\ P_2(\lambda) &= \lambda^2 - 2\lambda - 3(\lambda + 1)(\lambda - 3) \\ L(y) &= 3 - 3t = Q_m(t)e^{\alpha t}, \quad m = 1, \alpha = 0, k = 0 \\ \Psi_1 &= At + Bs \\ \Psi_1' &= A \\ \Psi_1 &= t - \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lambda^2 - \lambda - 3 = 3 \\ 2\lambda - 2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L(\Psi_1) &= -3At - 3B - 2A = 3 - 3t, A = 1, B = -\frac{5}{3} \\ L(y) &= -te^{-t}, \quad m = 1, \alpha = -1, k = 1 \\ \Psi_2 &= (At^2 + Bt)e^{-t} = ue^{-t} \quad \text{где} \quad u = At^2 + Bt \\ u' &= 2At + B \quad u'' = 2A \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - \lambda - 3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &=> 2\lambda - 2(-4) = 1 \\ L(\Psi_2) &= e^{-t}(-8At - 4B + 2A) = te^{-t} => \\ -8A &= 1 => A = -\frac{1}{8} \\ 2A - 4B &= 0 => B = \frac{1}{16} \\ \Psi_2 &= \frac{1}{16}(2t^2 + t)e^{-t} \\ y_1 &= c_1e^{-t} + c_2e^{3t} + t - \frac{5}{3} - \frac{1}{16}(2t^2 + t)e^{-t} \\ y_1' &= -c_1e^{-t} + 3c_2e^{3t} + 1 - \frac{1}{16}(-2t + t + 1)e^{-t} \\ y_2 &= y_1 - y_1' + 3t \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y_2 = 2c_1e^{-t} - 2ce^{3t} + 4t - \frac{8}{3} - \frac{1}{16}(4t^2 - 2t + 1)e^{-t} \\ y_1 = c_1e^{-t} + c_2e^{3t} + t - \frac{5}{3} - \frac{1}{16}(2t^2 + t)e^{-t} \end{cases}$$

## Часть III

# Числовые ряды

## 22. Основные определения

**Замечание 22.1 (Некоторые случаи рядов).**

*Вещественное число можно представить в следующем виде*

$$x \in \mathbb{R}, \quad x = A, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

где

$$a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}, \quad A \in \mathbb{Z}$$

*Также запись выше эквивалентна следующему выражению*

$$x = A + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$$

*Из этого можно выделить конечную десятичную дробь*

$$x_n = A, a_1 a_2 \dots a_n \in \mathbb{Q}$$

*Связь рационального и действительного числа*

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$$

*Рассмотрим следующий случай (вывод убывающей геом. прогрессии).*

*Пусть*

$$b_n = b_1 q^{n-1} \quad |q| < 1$$

*тогда*

$$S_n = b_1 + \dots + b_n$$

$$S_n = b_1 + q(b_1 + b_1 q + \dots + b_1 q^{n-2})$$

$$S_n = b_1 + q(b_1 + b_1 q + \dots + b_1 q^{n-2} + b_1 q^{n-1}) - b_1 q^n$$

$$S_n = b_1 + q S_n - b_1 q^n$$

$$S_n(1 - q) = b_1(1 - q^n)$$

$$S_n = b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

*Зная что  $|q| < 1$ , получаем*

$$b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \rightarrow \frac{b_1}{1 - q} \quad (n \rightarrow +\infty)$$

Значит, формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_1 q^{n-1} = \frac{b_1}{1-q}$$

**Определение 22.1 (Числовой ряд).**

Пусть  $\{a_n\}$  — последовательность чисел,  $a_n \in \mathbb{R}$ . Тогда формальное выражение

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

называется числовым рядом, где

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

— члены ряда, а функция  $n \mapsto a_n$  называется общим членом ряда.

**Определение 22.2.**

Пусть  $a_n$  — числовой ряд. Тогда:

1)  $n$ -ная частичная сумма ряда имеет вид

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

2) Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = S$$

то ряд называется сходящимся и  $S$  — его сумма. Пишем

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

3) Если  $\nexists \lim S_n$ , в частности предел равен  $\infty$ , то ряд расходящийся и такой ряд не имеет суммы.

**Определение 22.3.**

Пусть  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  — числовой ряд. Тогда  $\forall n \in \mathbb{N}$  ряд  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$  называется  $n$ -ым остатком ряда  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

**Замечание 22.2.**

- Если ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится и его сумма равна  $S$ , то  $\forall n \in \mathbb{N}$  его  $n$ -ый остаток сходится и его сумма  $S_k = S - S_n$ .
- Если ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  расходится, то  $\forall n \in \mathbb{N}$  его остаток тоже расходится.

**Замечание 22.3 (Свойства сходящихся рядов).**

1) Сумма сходящихся рядов равна сходящемуся ряду

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S^{(A)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = S^{(B)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = S^{(A)} + S^{(B)}$$

2) При домножении сходящегося ряда на константу ряд остаётся сходящимся, а сумма увеличивается в разы домножаемой величины

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha a_n = \alpha S$$

**Доказательство.**

$$1) S_n^{(A+B)} = (S_n^{(A)} + S_n^{(B)}) \rightarrow (S^{(A)} + S^{(B)})$$

Таким образом,  $S_n^{(A+B)} \rightarrow S^{(A+B)}$

$$2) S_n^{(\alpha A)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha a_n = \alpha S_n^{(A)} \rightarrow \alpha S^{(A)}$$

Таким образом,  $S^{(\alpha A)} \rightarrow \alpha S^{(A)}$

■

**Теорема 22.1 (Необходимое условие сходимости).**

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S$$

то

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

**Доказательство.**

Из определения частичной суммы ряда следует

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$$

Тогда

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

■

**Замечание 22.4.**

Если  $a_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то ряд расходится.

Необходимый признак не доказывает, что ряд сходится, согласно ему. Он лишь показывает возможную(!) сходимость. А если признак указывает на расходимость, то он точно расходится.

**Пример 22.1.**

Дано

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

С одной стороны (через формулы эквивалентности б.м. функций (1 сем.))

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \quad (n \rightarrow \infty)$$

Значит

$$a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

С другой

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \\ &= \ln\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \dots \frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) \end{aligned}$$

Таким образом

$$S_n = \ln(n+1) \rightarrow +\infty$$

Ряд расходится, хоть и пределы его слагаемых стремятся к нулю

$$a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

Для доказательства сходимости используют следующие критерии

**Теорема 22.2 (Критерий Коши сходимости числового ряда).**

Если ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

Обратное утверждение также верно



**Доказательство.**

Если ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится, то это эквивалентно

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$$

По определению предела по Коши это эквивалентно

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

Последнее неравенство можно расписать

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

■

**Теорема 22.3 (Признак абсолютной сходимости).**

Если ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$  сходится, то и ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится.

**Доказательство.**

$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$  сходится, следовательно по критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall p \geq 1 \quad ||a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}|| < \varepsilon$$

Воспользуемся неравенством треугольника, получим

$$||a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}|| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon$$

По критерию Коши ряд сходится.

■

**Определение 22.4.**

Если ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$  сходится, ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  называется абсолютно сходящимся.

## 23. Признаки сходимости положительных рядов

### Определение 23.1.

Числовой ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  называется положительным, что эквивалентно

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq 0$$

### Теорема 23.1.

Пусть  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  — положительный ряд, частичные суммы  $S_n$  которого ограничены сверху. Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S$  сходится и его сумма равна

$$S = \sup_{n \geq 1} (S_n)$$

### Доказательство.

Так как ряд положительный, то очевидно что

$$\forall n \geq 1 \quad S_{n+1} = S_n + a_n \geq S_n$$

Значит последовательность  $\{S_n\}$  возрастает.

Также

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

это эквивалентно последовательности  $\{S_n\}$ , которая по условию ограничена сверху и её предел равен

$$S = \sup_{n \geq 1} (S_n)$$

■

Ограниченность суммы сверху означает то, что она всегда стремится к некоторому значению, но не превосходит его. Если это мысленно представить, то станет очевиден факт того что ряд с таким свойством частичных сумм будет иметь на бесконечном промежутке конечное значение суммы, так как, например, слагаемые могут уменьшаться и становятся очень малыми. Также данный факт был рассмотрен при доказательстве формулы для убывающей геометрической прогрессии (см. предыдущий параграф).

**Теорема 23.2 (Признак сравнения сходимости рядов).**

Пусть  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  — два ряда. При этом:

1)  $\forall n \geq 1 \quad a_n \geq 0$  (ряд положительный)

2)  $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |b_n| \leq a_n$

3) Ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится

Тогда  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  сходится

**Доказательство.**

Ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится то по критерию Коши следует

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq n_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

Воспользуемся неравенством из условия и распишем его, пользуясь неравенством треугольника

$$|b_{n+1} + \dots + b_{n+p}| \leq |b_{n+1}| + \dots + |b_{n+p}| \leq a_{n+1} + \dots + a_{n+p}$$

Зная, что ряд  $a_n$  положительный, получим

$$a_{n+1} + \dots + a_{n+p} = |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

Объединим два неравенства выше и получим следующее неравенство

$$|b_{n+1} + \dots + b_{n+p}| < \varepsilon$$

По критерию Коши, ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  сходится. ■

**Следствие 23.1.**

Если

$$\forall n \geq n_0 \quad 0 \leq b_n \leq a_n$$

и ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  расходится, то и  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  тоже расходится

**Доказательство.**

От противного:

Если бы  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходилась, то по теореме 2  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  — сходится. Получаем противоречие ■

**Теорема 23.3 (Признак сравнения рядов в предельной форме).**

Пусть

$$\forall n \geq 1 \quad a_n \geq 0, \quad b_n \geq 0 \quad \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0 \quad (c > 0)$$

Тогда если ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится, то ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  сходится, и наоборот.

**Доказательство.**

$\Rightarrow$   $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится, а также по условию

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

Пусть  $\varepsilon = \frac{c}{2} (\varepsilon > 0)$ , тогда

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < \frac{c}{2}$$

Раскроем знак модуля в неравенстве, получим

$$\begin{aligned} \frac{c}{2} &< \frac{a_n}{b_n} < \frac{3c}{2} \\ \forall n \geq n_0 \quad 0 < b_n &< \frac{2}{c} a_n \end{aligned}$$

Ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится, тогда по теореме 2 ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  сходится.

$\Leftarrow$  Ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  сходится, тогда аналогично получаем

$$\forall n \geq n_0 \quad a_n < \frac{3}{2} c b_n$$

По теореме 2  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится.

■

**Замечание 23.1.**

Теорема справедлива и для расходящихся рядов.

Если один из рядов расходится, то и другой расходится.

не разобран

**Пример 23.1.**

1) ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$  расходится (1)

$$\ln(1+t) \sim t(t \rightarrow 0) \Rightarrow [t = \frac{1}{n}] \Rightarrow \ln(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}(n \rightarrow +\infty) \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$$

Теперь, учитывая, что у нас есть ненулевой предел отношения элементов двух рядов, один из которых расходящийся, можно говорить, что расходится и второй, т.е. ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  расходится

2) ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$  сходится.  $(S_n = 1 - \frac{1}{n+1}) \Rightarrow$  ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  сходится,

$$\text{т.к. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

**Теорема 23.4 (Признак Даламбера).**

Пусть  $\forall n \geq 1 \ a_n > 0$  и

1) ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится если

$$\exists q < 1 \quad \forall n \geq n_0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$$

2) ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  расходится если

$$\forall n \geq n_0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

**Доказательство.**

1) Дано

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \quad (\forall n \geq n_0)$$

Из этого можно вывести следующую цепочку

$$a_n \leq a_{n-1} q \leq a_{n-2} q^2 \leq \dots \leq a_{n_0} q^{n-n_0}$$

Рассмотрим цепочку как ряд и найдём его сумму

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_{n_0} q^{n-n_0} = a_{n_0} \sum_{k=0}^{+\infty} q^k$$

Так как  $q < 1$ , следовательно перед нами убывающая геометрическая прогрессия. По формуле сумма равна

$$a_{n_0} \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{a_{n_0}}{1-q}$$

Значит частичные суммы ряда ограничены, следовательно по теореме 1, ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится.

2) Дано

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad (\forall n \geq n_0)$$

Из этого следует

$$\begin{aligned} a_n &\geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_{n_0} > 0 \\ a_n &\geq a_{n_0} > 0 \quad (n \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

если бы  $a_n \rightarrow 0$  (необходимое условие сходимости ряда), тогда по принципу сжатой переменной  $a_{n_0} = 0$ , но это не так, есть противоречие. Значит  $a_n \not\rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty)$  и ряд расходится.

■

### Теорема 23.5 (Признак Даламбера в предельной форме).

Пусть

$$\forall n \geq 1 \quad a_n > 0 \quad \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

тогда ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ :

- 1) *сходится, если  $q < 1$*
- 2) *расходится, если  $q > 1$*
- 3) *при  $q = 1$  может сходиться или расходиться*

**Доказательство.**

1) Дано

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad q < 1$$

Возьмём

$$\varepsilon = \frac{1-q}{2} > 0$$

$\varepsilon > 0$  так как по условию  $q < 1$ .

Из определения предела по Коши получаем

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \frac{1-q}{2}$$

Раскроем знак модуля, а также воспользуемся  $q < 1$ , и в итоге получим

$$\begin{aligned} q - \frac{1-q}{2} &< \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \frac{1-q}{2} = \frac{q+1}{2} = q^* < \frac{1+1}{2} = 1 \\ \forall n \geq n_0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} &< q^* < 1 \end{aligned}$$

Таким образом, по теореме 4 следует, что  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится

2) Дано

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad q > 1$$

Аналогично выбираем значение  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{q-1}{2} > 0$$

Далее всё аналогично

$$\begin{aligned} \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| &< \frac{q-1}{2} \\ q - \frac{q-1}{2} &< \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \frac{q-1}{2} \\ 1 = \frac{1+1}{2} &< q^* = \frac{q+1}{2} < \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ \forall n \geq n_0 \quad 1 &< q^* < \frac{a_{n+1}}{a_n} \end{aligned}$$

Аналогично по теореме 4 получаем, что  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  расходится

3) Дано

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad q = 1$$

Для доказательства достаточно привести примеры сходящегося и расходящегося ряда для  $q = 1$ :

- Пример расходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

- Пример сходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

Таким образом, при  $q = 1$  существует неопределённость.

■

### Теорема 23.6 (Радикальный метод Коши).

Пусть

$$\forall n \geq 1 \quad a_n > 0 \quad \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l, \quad l \in \mathbb{R}$$

Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ :

- 1) сходится при  $l < 1$
- 2) расходится при  $l > 1$
- 3) может сходиться или расходиться при  $l = 1$

### Доказательство.

- 1) Дано  $l < 1$ , тогда  $0 \leq l < 1$

Возьмём значение  $\varepsilon > 0$  и тогда по определению предела по Коши получим

$$\varepsilon = \frac{1-l}{2} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |\sqrt[n]{a_n} - l| < \frac{1-l}{2}$$

Раскроем модуль

$$\sqrt[n]{a_n} < \frac{l+1}{2} = l^* < 1$$

$$a_n < (l^*)^n \quad (n \geq n_0) \quad l^* \in [0; 1]$$

ряд  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (l^*)^n$  сходится, т.к. это убывающая геометрическая прогрессия,

следовательно по теореме 2 ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится.



2) Дано  $l > 1$ . Доказательство аналогично

$$\varepsilon = \frac{l-1}{2} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |\sqrt[n]{a_n} - l| < \frac{l-1}{2}$$

$$1 < l^* = \frac{l+1}{2} = l - \frac{l-1}{2} < \sqrt[n]{a_n} \quad (n \geq n_0)$$

$$\forall n \geq n_0 \quad a_n > 1 \quad a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

Таким образом, ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  расходится

3) Для доказательства достаточно привести примеры сходящегося и расходящегося ряда

- ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$  расходится

$$a_n = 1, \quad \sqrt[n]{a_n} = 1, \quad \sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow +\infty) \quad \Rightarrow \quad l = 1$$

- ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  сходится (т.к. гармонический ряд)

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{-2\frac{\ln n}{n}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow +\infty) \quad \Rightarrow \quad l = 1$$

■

### Теорема 23.7 (Интегральный признак Коши).

Пусть функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям:

- 1)  $f(x) \in C_{[1;+\infty)}$
- 2)  $f(x)$  убывает на  $[1;+\infty)$
- 3)  $\forall x \in [1;+\infty) \quad f(x) > 0$

Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$  сходится  $\Leftrightarrow$  несобственный интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  сходится

**Доказательство.**

Из условия

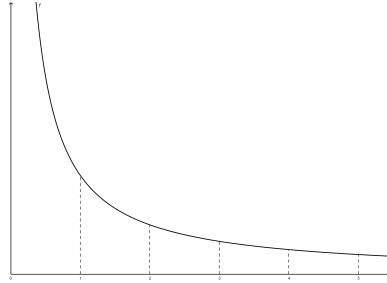


Рис. 18.

$$x \in [k; k+1], \quad f(k+1) < f(x) < f(k) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Следовательно

$$\begin{aligned} f(k+1) &\leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k) \\ \sum_{k=1}^n f(k+1) &\leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) = S_n \\ S_{n+1} - f(1) &\leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq S_n \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Дано  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$  сходится, следовательно по теореме 1  $S_n \leq S$ .

По аксиоме Архимеда

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad t > 1 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad t < n+1$$

**ниже не понятно**  $F(t) = \int_1^t f(x) dx = \int_1^{n+1} f(x) dx \leq S_n \leq S$

$$F(t) \nearrow \text{т.к. } F' = f(x) \Rightarrow \exists \lim_{t \rightarrow +\infty} = F \leq S \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ сходится}$$

$\Leftarrow$  Дано  $\int_1^{+\infty} f(x) dx = F$  сходится, тогда

$$S_n \leq f(1) + \int_1^{n+1} f(x) dx \leq f(1) + F$$

Очевидно что по теореме 1 ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$  сходится.

■

## 24. Сходимость знакопеременных рядов

### Определение 24.1.

Ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  называют *знакопеременным*, если существует бесконечно много  $n \in \mathbb{N}$   $a_n > 0$  и бесконечно много  $k \in \mathbb{N}$   $a_k < 0$

### Определение 24.2.

Ряд

$$\sum (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

называют *знакопередающимся*, если  $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > 0$

**Теорема 24.1 (признак Лейбница сходимость знакоперем. рядов).**

Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n > 0$
- 2)  $\{a_n\} \searrow$  строго, то есть  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} < a_n$
- 3)  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} = 0$

Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n = S$  сходится,  $S$  - его сумма, при этом

- 1)  $a_1 - a_2 < S < a_1$
- 2)  $\forall n \geq 1 \quad |S - S_n| < a_{n+1}$

### Доказательство.

Рассмотрим  $\{S_{2n}\}$  тогда

$$S_{2n} = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{>0} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{>0} + \dots + \underbrace{(a_{2n-1} - a_{2n})}_{>0}$$

Также заметим

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} > 0 \quad \forall n \geq 1$$

Так как по условию  $\{a_n\}$  возрастает строго, тогда  $S_{2n} < S_{2(n+1)}$  и  $\{S_{2n}\}$  строго возрастает.

Теперь рассмотрим другую группировку.

$$S_{2n} = \underbrace{a_1}_{>0} - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{>0} - \dots - \underbrace{(a_{2n-2} - a_{2n-1})}_{>0} - \underbrace{a_{2n}}_{>0}$$

Из этого следует

$$S_{2n} < a_1 \quad (n \geq 1) \quad S_{2n} < a_1 - a_2 + a_3 \quad (n \geq 2)$$

Значит  $S_{2n}$  ограничена сверху. Тогда

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S = \sup_{n \geq 1} S_{2n} \leq a_1 - (a_2 - a_3) < a_1$$

Значит

$$\begin{aligned} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\underbrace{S_{2n}}_{\rightarrow S} + \underbrace{a_{2n+1}}_{\rightarrow 0}) = S \\ \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= S < a_1 \end{aligned}$$

Таким образом

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_2 - a_3 + a_4 - \dots = a_1 - S < a_2$$

Значит  $a_1 - a_2 < S$  (пункт 1 доказан)

Второй пункт доказывается аналогично

$$(-1)^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1} a_k = a_{n+1} - a_{n+2} + \dots = \underbrace{(-1)^n (S - S_n)}_{0 < a_{n+1} - a_{n+2} < a_{n+1}}$$

Таким образом  $|S - S_n| < a_{n+1}$

не разобрано

### Пример 24.1.

Доказ.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  сходится (не абсолютно)

$\frac{(-1)^{n-1}}{n}$  - ряд Лейбница

Решение:

$a_n = \frac{1}{n} > 0, a_n \searrow$  строго,  $a_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \Rightarrow$  по т.1 ряд Лейбница сходится

Проверка на абс. сход.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ расход. (гарм. ряд)}$$

не разобрано

### Пример 24.2.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$  - сходится абсолютно

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$  - сходится (не абсолютно)

не разобрано

**Теорема 24.2 (Признак Дирихле).**

Пусть  $\sum_{n=1}^{infy} a_n b_n$  - числовой ряд, удовлетворяющий следующим условиям:

1)  $\exists M > 0 : \forall n \in N | \sum_{k=1}^n a_k | \leq M$ , то есть частичная сумма ряда ограничена

2)  $\{b_n\} \rightarrow 0$ , то есть  $\forall n \geq 1, b_k > 0; \forall n \geq 1 b_{n+1} < b_n; \exists \lim b_n = 0$   
Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{infy} a_n b_n$  сходится и его сумма  $|T| \leq Mb_1$

не разобрано

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} T_n &= a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = (a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_2 - a_1 b_2) + (a_1 b_3 + a_2 b_3 + a_3 b_3 - \\ &a_1 b_3 - a_2 b_3) + \dots + a_1 b_n + a_2 b_n + \dots + a_n b_n - a_1 b_n - a_2 b_n - \dots - a_{n-1} b_n = \\ &= S_1 b_1 + S_2 b_2 + \dots + S_n b_n - S_1 b_2 - S_2 b_3 - \dots - S_{n-1} b_n = S_1(b_1 - b_2) + S_2(b_2 - \\ &b_3) + \dots + S_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + S_n b_n \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{infy} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} S_k(b_k - b_{k+1})$$

$$|S_k(b_k - b_{k+1})| < M(b_k - b_{k+1})$$

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \sum_{k=1}^n |S_k(b_k - b_{k+1})| < M \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = M(b_1 - b_n) \rightarrow Mb_1$$

По признаку сравнения ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} S_k(b_k - b_{k+1}) = T$  - сходится

$$T_n = \sum_{k=1}^{n-1} S_k(b_k - b_{k+1}) + S_n b_n \rightarrow T \Rightarrow \exists \lim T_n = T \quad \blacksquare$$

**Замечание 24.1.**

Если

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} b_n, \quad b_n \rightarrow 0$$

То значение суммы можно свести к следующему

$$a_n = (-1)^{n-1}, |S_n| \leq 1$$

Не разобран

**Пример 24.3.**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^\beta}$$

1)  $\alpha = 2\pi k, k \in Z \cos(2\pi nk) = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}, \beta \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{n^\beta}$  расходится, иначе сходится

2)  $\alpha \neq 2\pi k$

$$a_n = \cos n\alpha, b_n = \frac{1}{n^\beta} \rightarrow 0 \text{ при } \beta > 0$$

$$S_n = \cos \alpha + \dots \cos n\alpha$$

$$2\cos \alpha S_n = 2\cos^2 \alpha + 2\cos \alpha \cos 2\alpha + \dots + 2\cos \alpha \cos n\alpha = 1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha +$$

$$\begin{aligned}
& \cos 3\alpha + \dots + \cos(n-1)\alpha + \cos(n+1)\alpha = 1 + S_n - \cos n\alpha + S_n - \cos\alpha + \cos(n+1)\alpha \\
& 2(1 - \cos\alpha)S_n = 1 + \cos n\alpha + \cos\alpha - \cos(n+1)\alpha \\
& 2(1 - \cos\alpha)|S_n| = 4 \Rightarrow |S_n| \leq \frac{2}{1 - \cos\alpha} = M \Rightarrow \text{ряд сходится}
\end{aligned}$$

## Часть IV

# Функциональные последовательности и ряды

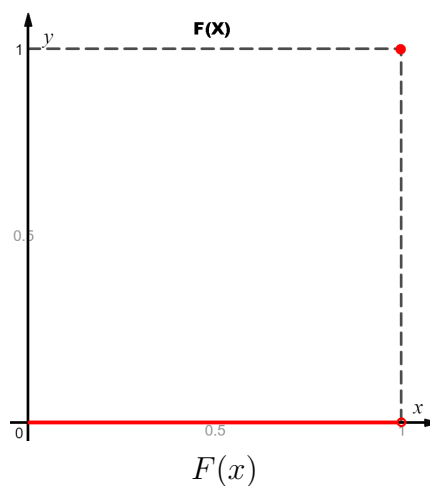
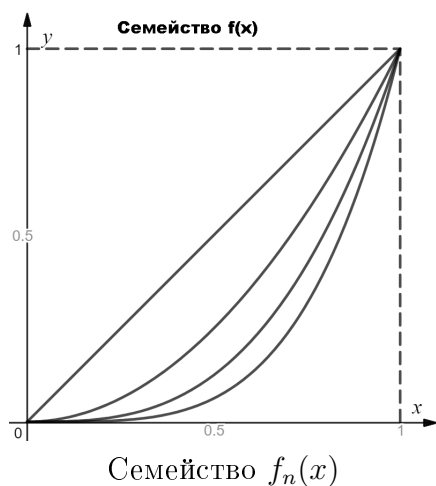
## 25. Равномерно сходящиеся функциональные последовательности

**Определение 25.1.** Пусть  $\{f_n(x)\}$  это последовательность функций, определённых в некоторой области  $D \subset \mathbb{R}$ , тогда говорят, что эта последовательность поточечно сходится к  $F(x), x \in D$

т.е.  $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = F(x), (x \in D) \Leftrightarrow \forall x \in D \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = F(x)$

т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, N = N(\varepsilon, x) \forall n > N |f_n(x) - F(x)| < \varepsilon$

**Пример 25.1.**



$$f_n(x) = x^n, x \in [0; 1]$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = F(x) \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

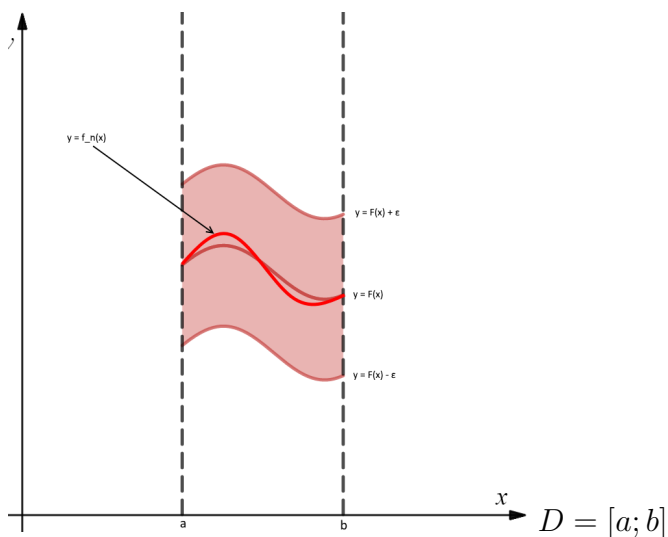
**Определение 25.2.** Пусть  $\{f_n(x)\}$  это последовательность функций, определённых в некоторой области  $D \subset \mathbb{R}$ , тогда говорят, что эта последовательность равномерно сходится к  $F(x), x \in D \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, N = N(\varepsilon, x) \forall n > N \forall x \in D |f_n(x) - F(x)| < \varepsilon$

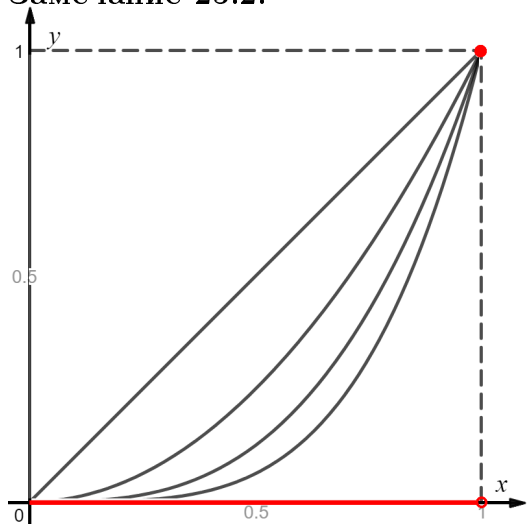
Отличие от поточечной сходимости получается только в том, что номер, с которого начинается пренебрежимо малое отставание от  $F$  не зависит от  $x$

Обозначают:  $f_n(x) \Rightarrow F(x) (n \rightarrow +\infty; x \in D)$

**Замечание 25.1** (Геометрический смысл равномерной сходимости).



**Замечание 25.2.**



$$f_n(x) = x^n; x \in [0; 1] \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F(x)$$

$$f_n(x) \not\Rightarrow F(x), \text{ где } F(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases} \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$$

**Теорема 25.1** (Критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей). Пусть  $\{f_n(x)\}$  - функциональная последовательность, где  $x \in D$ . Тогда



$\{f_n(x)\}$  равномерно стремится к  $F(x)$  при  $n \rightarrow +\infty; x \in D \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N \forall x \in D |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

**Доказательство.**

$\Rightarrow$

Пусть  $f_n(x)$  равномерно сходится к  $F(x)$  для  $n \rightarrow +\infty, x \in D \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \forall n \geq N \forall x \in D |f_n(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{2};$   
 $\Rightarrow \forall m \geq N \forall x \in D |f_m(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$   
 $|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - F(x) + F(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - F(x)| +$   
 $+ |f_m(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

$\Leftarrow$

$\forall \varepsilon \exists N(\varepsilon) \forall n, m \geq N |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$   
Тогда  $\forall x \in D f_m(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F(x)$  (по критерию Коши для числовой последовательности)  
 $\Rightarrow (m \rightarrow +\infty) \Rightarrow |f_n(x) - F(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow f_n(x) \rightrightarrows F(x) (n \rightarrow +\infty; x \in D)$

■

**Теорема 25.2 (О непрерывности предела равномерно сходящихся функциональн**

Пусть  $\forall n \geq 1$  функции  $f_n(x) \in C_{[a;b]}$ .

Тогда  $f_n(x) \rightrightarrows F(x) (n \rightarrow +\infty, x \in [a; b]) \Rightarrow F(x) \in C_{[a;b]}$

**Доказательство.** Надо доказать, что 1.  $\forall x_0 \in [a; b] \exists \lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0)$  и  $\begin{cases} \exists F(a+0) = F(a) \\ \exists F(b-0) = F(b) \end{cases}$

Пусть  $x_0 \in [a; b], f_n(x) \in C_{[a;b]} \Rightarrow$  [по теореме Кантора]  $\Rightarrow$

$\Rightarrow f_n(x)$  равномерно непрерывна на  $[a; b] \forall n \in \mathbb{N}$ ,

т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \delta = \delta(\varepsilon, n) \forall x, x_0 \in [a; b] |x - x_0| < \delta |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$f_n(x) \rightrightarrows F(x) (n \rightarrow +\infty; x \in D)$  для  $\varepsilon > 0$

$\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall x, x_0 \in [a; b] |f_n(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, |f_n(x_0) - F(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Для  $n = N: |f_N(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{3}; |f_N(x_0) - F(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow |F(x) - F(x_0)| = |F(x) - f_N(x) + f_N(x) - F(x_0) - f_N(x_0) + f_N(x_0)| \leq$   
 $\leq |f_N(x) - F(x)| + |f_N(x_0) - F(x_0)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

$\delta = \delta(\varepsilon, n)$ , т.е.  $\delta$  не зависит от  $x$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \exists \delta(\varepsilon, n) > 0 \forall x, x_0 \in [a; b] |x - x_0| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$

$\Rightarrow F(x)$  непрерывна на  $[a; b]$  ■

**Замечание 25.3.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(x))) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lim_{x \rightarrow x_0} (f_n(x))) \Leftrightarrow F(x) \in C_{[a;b]}, x, x_0 \in [a; b]$

**Теорема 25.3 (Об интегрировании равномерно сходящихся функциональных по**

Пусть функции  $f_n(x) \in C_{[a;b]}$  и  $f_n(x) \rightrightarrows F(x), (n \rightarrow +\infty, x \in [a; b]) \Rightarrow$

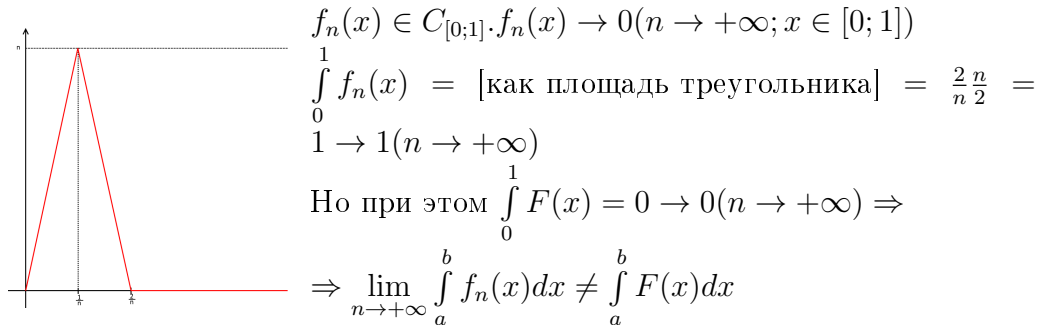
$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b F(x) dx$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned}
 & f_n(x) \Rightarrow F(x) (n \rightarrow +\infty; x \in [a; b]) \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall x \in [a; b] |f_n(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \\
 & \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b F(x) dx \right| = \left| \int_a^b f_n(x) dx - F(x) dx \right| \leq \\
 & \leq \left| \int_a^b f_n(x) dx - F(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall x \in [a; b] \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b F(x) dx \right| \leq \varepsilon \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b F(x) dx \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

**Замечание 25.4.**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$

**Замечание 25.5.** Теорема 3 неверна в случае поточечной, а не равномерной, сходимости.



**Теорема 25.4 (О дифференцировании равномерно сходящихся функциональных рядов)**  
 Пусть  $f_n(x) \in C_{[a;b]}^1$ , т.е.  $\exists f'_n(x) \in C_{[a;b]}$  и выполнены условия:

- 1)  $f'_n(x) \Rightarrow \varphi(x) (n \rightarrow +\infty; x \in [a; b])$
- 2)  $\exists x_0 \in [a; b] f_n(x_0) \rightarrow A (n \rightarrow +\infty)$

Тогда:

- 1)  $\exists F(x) \in C_{[a;b]}^1 f_n(x) \Rightarrow F(x) (n \rightarrow +\infty; x \in [a; b])$

$$2) F'(x) = \varphi'(x) (x \in [a; b])$$

**Доказательство.**  $F(x) = A + \int_{x_0}^x \varphi(t) dt$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} f'_n(x) \in C_{[a;b]} \\ f'_n(x) \Rightarrow \varphi(x) \end{cases} \Rightarrow [\text{по теореме 2}] \Rightarrow \varphi(t) \in C_{[a;b]} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \varphi(t) \text{ интегрируема} \Rightarrow [\text{по теореме Барроу}] \Rightarrow \exists F'(x) = \varphi(x) (x \in [a; b]) \\ & |f_n(x) - F(x)| = \left| \int_{x_0}^x f'_n(t) dt + f_n(x_0) - A - \int_{x_0}^x \varphi(t) dt \right| = \\ & = \left| \int_{x_0}^x (f'_n(t) - \varphi(t)) dt + f_n(x_0) - A \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |(f'_n(t) - \varphi(t))| dt \right| + |f_n(x_0) - A| \\ & \forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq N_1 \forall t \in [a; b] |f'_n(t) - \varphi(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \text{ т.к. } f_n(t) \\ & \text{сходится к } \varphi(t) \end{aligned}$$

Для  $\varepsilon > 0 \exists N \geq N_1 \forall n \geq N |f_n(x_0) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$

Итого:

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq N \left| \int_{x_0}^x |(f'_n(t) - \varphi(t))| dt \right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \left| \int_{x_0}^x dt \right| = \\ & = \frac{\varepsilon|x-x_0|}{2(b-a)} \leq \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Прибавим к этому, что  $|f_n(x_0) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$  и получим:

$$|f_n(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Итого:

$$\forall x \in [a; b] |f_n(x) - F(x)| < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geq N \forall x \in [a; b] |f_n(x) - F(x)| < \varepsilon \Rightarrow f_n(x) \Rightarrow F(x), (n \rightarrow +\infty, x \in [a; b])$  1я часть доказана **Тут есть доказательство второй части, которое я пропустил или какой-то подвох?** ■

## 26. Равномерно сходящиеся функциональные ряды

**Определение 26.1.** Пусть  $u_n(x)$  - функциональная последовательность, определённая на  $D, x \in D$

Тогда  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  - функциональный ряд  $x \in D$ . Этот ряд сходится  $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = S(x), x \in D$ . При этом:  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  - сумма ряда ( $x \in D$ ). Т.е. ряд сходится к сумме  $S$  на  $D \Leftrightarrow S_n(x) \rightarrow S(x) (n \rightarrow +\infty; x \in D)$

**Определение 26.2.** В определении 1 говорят, что ряд равномерно сходится на области  $D, D \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow S_n(x) \Rightarrow S(x) (n \rightarrow +\infty, x \in D)$

**Теорема 26.1.** (Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда)

Пусть  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x), x \in D, D \subset \mathbb{R}$ . Тогда этот ряд равномерно сходится на  $D \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall p \geq 1 \forall x \in D |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$

**Доказательство.**  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$  - частичная сумма ряда, тогда  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

равномерно сходится на  $D \Leftrightarrow S_n(x) \Rightarrow S(x) (n \rightarrow +\infty; x \in D) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [\text{критерий Коши для функциональных последовательностей}] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall p \geq 1 \forall x \in D |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon \blacksquare$

**Теорема 26.2.** (О непрерывности суммы равномерно сходящегося функционального ряда)

Пусть  $\forall n \geq 1 u_n(x) \in C_{[a;b]}$  и ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = S(x)$  равномерно сходится к сумме  $S(x)$  на  $[a;b]$ . Тогда  $S(x) \in C_{[a;b]}$

**Доказательство.** Рассмотрим частичные суммы  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) =$

$u_1(x) (\in C_{[a;b]}) + \dots + u_n(x) (\in C_{[a;b]}) \in C_{[a;b]}$

$S_n(x) \Rightarrow S(x) (n \rightarrow +\infty; x \in [a;b]) \Rightarrow [\text{по теореме 2 предыдущего параграфа}] \Rightarrow S(x) \in C_{[a;b]} \blacksquare$

**Теорема 26.3.** (О почленном интегрировании равномерно сходящихся рядов)

Пусть  $\forall n \geq 1, u_n(x) \in C_{[a;b]}$  и ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = S(x)$  равномерно сходится на  $[a; b]$   
 Тогда  $\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)$

**Доказательство.**

$S_n(x) \Rightarrow S(x) (n \rightarrow +\infty; x \in [a; b]) \forall n \geq 1$   $s_n(x) \in C_{[a;b]} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  по теореме 2  $\Rightarrow S(x) \in C_{[a;b]}$  (т.е. все интегралы существуют)

По теореме 3 предыдущего параграфа  $\int_a^b S_n(x) \Rightarrow \int_a^b S(x) (n \rightarrow +\infty) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \int_a^b S_n(x) = \int_a^b (\sum_{k=1}^n u_k(x))dx = \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x)dx$  - частичная сумма ряда  
 $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)dx$ . Она будет стремиться к сумме  $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx$   
 ■

**Замечание 26.1.**  $\forall x \in [a; b]$  в условиях теоремы  $\exists \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^x u_k(t)dt = \int_a^x S(t)dt$

**Теорема 26.4.** (О почленном дифференцировании равномерно сходящихся функциональных рядов) Пусть  $\forall n \geq 1$  функции  $u_n(x) \in C_{[a;b]}^1$  и выполняются следующие условия:

- 1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) \Rightarrow \varphi(x)$  равномерно сходится на  $[a; b]$
- 2)  $\exists x_0 \in [a; b] \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0) = A, A \in \mathbb{R}$

Тогда:

- 1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  равномерно сходится к функции  $S(x) \in C_{[a;b]}^1$  на  $[a; b]$
- 2)  $S'(x) = \varphi(x), x \in [a; b]$ , в частности:
  - $S'(a+0) = \varphi(a)$
  - $S'(b-0) = \varphi(b)$

**Доказательство.**  $\sum_{k=1}^n u'_k(x) \Rightarrow \varphi(x)(n \rightarrow +\infty, x \in [a; b]) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \left( \sum_{k=1}^n u_k(x) \right)' \Rightarrow \varphi(x)(n \rightarrow +\infty, x \in [a; b]) \left| \begin{array}{l} \Rightarrow [\text{по теореме 4 §1}] \Rightarrow \\ \sum_{k=1}^n u_k(x_0) \rightarrow A(n \rightarrow +\infty) \end{array} \right.$   
 $\Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^n u_k(x) \Rightarrow S(x)(n \rightarrow +\infty, x \in [a; b]) & (1) \\ S'(x) = \varphi(x), x \in [a; b] \\ \varphi(x) \in C_{[a; b]}^1 \Rightarrow S(x) \in C_{[a; b]}^1 \end{cases}$   
Из (1)  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) = S(x)$  равномерно сходится на отрезке  $[a; b]$  ■

**Теорема 26.5.** (Достаточный признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов) Пусть  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  - функциональный ряд для  $x \in D, D \subset \mathbb{R}$

Тогда, если найдется числовой ряд  $\exists \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ , который удовлетворяет:

$$1) \forall x \in D \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n(x)| \leq a_n$$

$$2) \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ сходится}$$

Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  равномерно сходится на  $D$

**Доказательство.** Ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится  $\Rightarrow$  [по критерию Коши]  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall p \geq 1 \quad |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$   
 $0 \leq u_n(x) \leq a_n \Rightarrow \forall n \geq 1 \quad a_n \geq 0;$   
 $\forall x \in D \quad |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| \leq |u_{n+1}(x)| + \dots + |u_{n+p}(x)| \leq$   
 $\leq a_{n+1} + \dots + a_{n+p} = |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall p \geq 1 \quad |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  [по теореме 1 §]  $\Rightarrow$  ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  равномерно сходится на  $D$  ■

## 27. Степенные ряды

**Определение 27.1.** Функциональный ряд вида  $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(x-\alpha)^n = C_0 + C_1(x-\alpha) + \dots + C_n(x-\alpha)^n + \dots$  называется степенным рядом,  $\alpha$  - центр ряда,  $C_0, C_1, \dots$  - коэффициенты ряда.

**Замечание 27.1.**  $t = x - \alpha \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} C_n(x-\alpha)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n t^n$  - переместили центр в 0

**Теорема 27.1 (1-я Теорема Абеля).** Пусть степенной ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(x-\alpha)^n$  сходится при  $x = x_0 \neq \alpha$   
Тогда  $\forall n, |x - \alpha| < |x_0 - \alpha|$  данный ряд сходится, причём абсолютно, в точке  $x$

**Доказательство.**  $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(x-\alpha)^n$  сходится  $\Rightarrow \exists \lim C_n(x_0 - \alpha)^n = 0$  (необходимый признак сходимости)  
 $\Rightarrow C_n(x_0 - \alpha)^n$  ограничена  $\Rightarrow \exists M > 0 : \forall n \geq 0 |C_n(x_0 - \alpha)^n| \leq M \Rightarrow |C_n| |x_0 - \alpha|^n \leq M$   
Возьмём  $x : |x - \alpha| < |x_0 - \alpha|$  и пусть  $q = \frac{|x-\alpha|}{|x_0-\alpha|} \Rightarrow 0 \leq q < 1$   
Тогда  $\forall n \geq 0 |C_n(x-\alpha)^n| = |C_n| |x-\alpha|^n = |C_n| |x_0-\alpha|^n q^n \leq M q^n$   
Ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} M q^n = \frac{1}{1-q}$  сходится, следовательно ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(x-\alpha)^n$  сходится абсолютно по признаку сравнимости

■

**Замечание 27.2 (Следствие).** Пусть ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(x-\alpha)^n$  расходится при  $x_1 \neq \alpha$ , тогда  $\forall x |x - \alpha| > |x_1 - \alpha|$  ряд расходится

**Доказательство.** От противного:

Если в условиях следствия  $\exists x_0 : |x_0 - \alpha| > |x_1 - \alpha|$  и ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(x_0 - \alpha)^n$  сходится, то по теореме ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(x_1 - \alpha)^n$  сходится абсолютно, что противоречит условию.

ч.т.д

■

**Замечание 27.3.** TODO вставить рисунок

**Теорема 27.2 (О существовании радиуса сходимости степенного ряда).**  
Пусть  $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(x-\alpha)^n$  - степенной ряд  
Тогда  $\exists R, 0 \leq R \leq +\infty$ , для которого:

- 1)  $\forall x |x - \alpha| < R$  ряд сходится в  $x$   
2)  $\forall x |x - \alpha| > R$  ряд расходится в  $x$

**Доказательство.** Если ряд сходится только в  $\alpha$ ,  $R = 0$

Если ряд сходится при  $\forall x$ ,  $R = +\infty$

Рассмотрим третий случай

$\exists x_0 \neq \alpha$  и ряд сходится в  $x_0$

$\exists x_1 \neq \alpha$  и ряд расходится в  $x_1$

■



## 28. Разложение функции в ряд Тейлора

**Теорема 28.1.** (О разложении функции в степенной ряд)

Пусть функция  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n, x \in U_\delta(a), \delta > 0$

Тогда такое разложение единственное и его коэффициенты вычисляются по формуле:  $\begin{cases} c_0 = f(a) \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \end{cases}$ , где  $a$  - фиксированная точка

**Доказательство.**

$f(x)$  - сумма степенного ряда  $\Rightarrow f(x) \in C^\infty(U_\delta(a))$

- 1)  $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n + \dots$  при  $x = a : f(a) = c_0$
- 2) Продифференцируем:  $f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + \dots + nc_n(x-a)^{n-1} + \dots$   
 $x = a : f'(a) = c_1$
- $\vdots$
- $n) f^{(n)}(x) = n!c_n + \frac{(n+1)!}{1!}c_{n+1}(x-a) + \dots + \frac{(n+k)!}{k!}c_{n+k}(x-a)^k + \dots$   
 $x = a : f^{(n)}(a) = n!c_n \Rightarrow c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N})$

■

**Определение 28.1.** Пусть функция  $f(x) \in C^\infty(U_\delta(a))$

Тогда ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$  называется рядом Тейлора функции  $f(x)$  в  $(\cdot)a$ .

$$f(x) \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

**Замечание 28.1.**

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}, f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}); f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

$\forall k \in \mathbb{N} \quad f^{(k)}(0) = 0 \Rightarrow$  нулевой ряд Тейлора в окрестности нуля

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0, x \in \mathbb{R} \neq f(x) \text{ при } x \neq 0$$

**Замечание 28.2.**  $f(x) \in C^n(U_\delta(a))$  и  $\exists f^{(n+1)}$  для  $x \in U_\delta(a) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x \in U_\delta(a) \exists \xi \in U_\delta(a), \xi \in [a; x]$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n(x); R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$  - остаточный член в формуле Тейлора (в данном случае остаточный член представлен в форме Лагранжа)

**Теорема 28.2.** (Критерий разложимости функции в ряд Тейлора) Пусть функция  $f(x) \in C^\infty(U_\delta(a))$ ,  $R > 0$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n, x \in (a-R; a+R) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall x \in (a-R; a+R) \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0 \end{aligned}$$

**Доказательство.**

( $\Rightarrow$ )

$$\begin{aligned} \text{Пусть } f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall x \in (a-R; a+R) \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} (f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0 (x \in (a-R; a+R)) \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ )

$$\begin{aligned} \forall x \in (a-R; a+R) \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0 &\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall x \in (a-R; a+R) f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \end{aligned}$$

■

**Замечание 28.3.** (Таблица разложений)

$$1) e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad R = +\infty$$

$$2) \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad R = +\infty$$

$$3) \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R = +\infty$$

$$4) (1+x)^\mu = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-n+1)}{n!} x^n, \quad R = 1, \mu \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{N} \cup 0)$$

$$5) \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad R = 1$$

$$6) \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n, \quad R = 1$$

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1), (2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n$$

$$7) \ln(1+x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n}, \quad R = 1$$

$$8) \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R = 1$$

$$9) \arcsin(x) = x + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad R = 1$$

**Пример 28.1.**

$$f(x) = \frac{x}{x^2+x-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, c_n = ?, x \in ? \quad \frac{x}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x+(2A-B)}{x^2+x-2}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=\frac{2}{3} \end{cases} \quad f(x) = \frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{3(x+2)} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{3} \left( \frac{(-1)^n}{2^n} - 1 \right) \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \Rightarrow c_n = \frac{1}{3} \left( \frac{(-1)^n}{2^n} - 1 \right) \Rightarrow R = 1$$