Содержание

Часть I

Приложение функции нескольких переменных

1. Касательные к пространственным прямым и касательные к поверхностям

Определение 1.1 (Касательная к пространственным кривым). *Пусть L — гладкая пространственная кривая без особых точек или*

$$L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad t \in U(t_0) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$x(t), y(t), z(t) \in C'(U(t_0)) \quad (x'_t, y'_t, z'_t) \neq (0, 0, 0)$$

Геометрически выглядит следующим образом

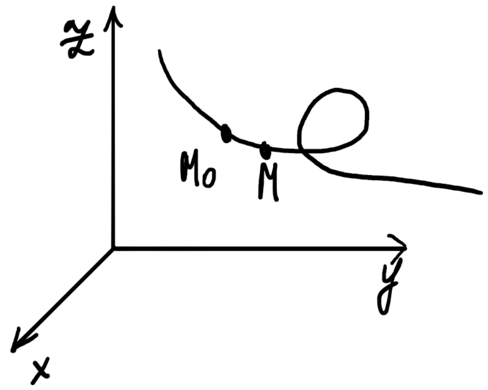


Рис. 1.

Обозначим

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \quad \text{при } t = t_0 \qquad \Delta t \neq 0,\ t = t_0 + \Delta t,\ \Delta t \in U(t_0)$$

Тогда уравнение касательной

$$MM_0 : \frac{x - x_0}{x(t_0 + \Delta t) - x_0} = \frac{y - y_0}{y(t_0 + \Delta t) - y_0} = \frac{z - z_0}{z(t_0 + \Delta t) - z_0}$$

Равенство выше является каноническим. Если разделить элементы на Δt и рассмотреть $\Delta t \to 0$ то получим следующее

$$l_0 : \frac{x - x_0}{x'_0} = \frac{y - y_0}{y'_0} = \frac{z - z_0}{z'_0}$$

Так как

$$\frac{x(t_0 - \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} \to x'_t(t_0) = x'_0 \qquad \Delta t \to 0$$

l_0 — касательная к кривой L в точке M_0
l_0 — кривая линия в пространстве $x'_0 \cdot y'_0 \cdot z'_0 \neq 0$

Определение 1.2.
Пусть $S : F(x, y, z) = 0$ — поверхность в пространстве.
$F(x, y, z)$ — непрерывная функ. в окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$
Плоскость $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ называется касательная плоскость к S в точке M_0 если

1) *$M_0 \in \pi$*

2) *Любая кривая линия $L \subset S, M_0 \in L$ гладкой кривой с направляющим вектором касательной $\vec{\tau} \neq \vec{0}$ выполняется условие*

$$\vec{n} \perp \vec{\tau}, \vec{n} = A, B, C \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{n}, \vec{\tau}) = 0$$

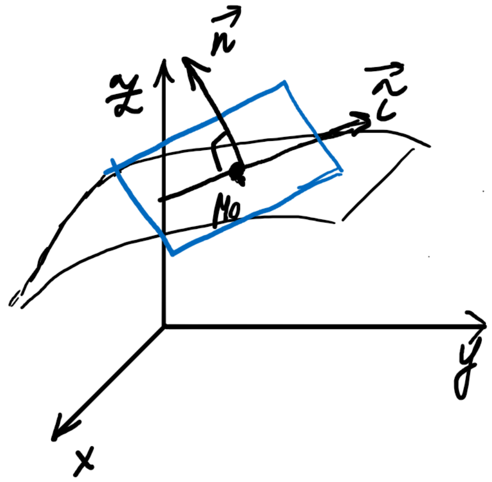


Рис. 2.

Теорема 1.1 (О существовании касательной плоскости). *Пусть*

$$F(x, y, z) \in C^1(U(M_0)), \quad F_x'^2(M_0) + F_y'^2(M_0) + F_z'^2(M_0) \neq 0$$

Тогда для поверхности $S : F(x, y, z) = 0,\ M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$ *существует касательная плоскость*

$$\pi : F_x'(M_0)\,(X - x_0) + F_y'(M_0)\,(Y - y_0)s + F_z'(M_0)\,(Z - z_0) = 0$$

Доказательство.

$$L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad t \in U(t_0) \quad x(t),\, y(t),\, z(t) \in C^1(U(t_0)) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0),\ z_0 = z(t_0), \quad M_0(x_0,\, y_0,\, z_0) \in L$$
$$\vec{\tau} = x_t'(t_0),\, y_t'(t_0),\, z_t'(t_0)$$
$$\vec{n} = F_x'(M_0),\, F_y'(M_0),\, F_z'(M_0)$$

Докажем, что скалярное произведение равно нулю

$L \subset S \Rightarrow \forall t \in U(t_0)\ F(x(t),\, y(t),\, z(t)) = 0$
Из дифференцируемости сложной функции получаем
$(F(x(t),\, y(t),\, z(t)))_t' = F_x'\, x_t' + F_y'\, y_t' + F_z'\, z_t'$
при $t = t_0$
$F_x'(M_0)\, x_t'(t_0) + F_y'(M_0)\, y_t'(t_0) + F_z'(M_0)\, z_t'(t_0) = 0 \ \Rightarrow\ (\vec{n}, \vec{\tau}) = 0$
$\Rightarrow\ \pi : F_x'(M_0)\,(X - x_0) + F_y'(M_0)\,(Y - y_0) + F_z'(M_0)\,(Z - z_0) = 0$

∎

Определение 1.3 (Градиент). *Градиент функции F в точке M_0 обозначается так*

$$\{F_x'(M_0);\ F_y'(M_0);\ F_z'(M_0)\} = \operatorname{grad} F|_{M_0}$$

Теорема 1.2. *(Существование касательной плоскости к явно заданной поверхности).*
Рассматривается случай явно заданной поверхности
Пусть $f(x, y) \in C^1(U(N_0)),\ N_0(x_0,\, y_0)$.
Тогда для явно заданной поверхности $S : z = f(x, y)$ *существует касательная плоскость в точке* $M_0(x_0,\, y_0,\, z_0)$, *где* $z_0 = f(N_0)$ *вида*

$$\pi : Z - z_0 = f_x'(N_0)\,(X - x_0) + f_y'(N_0)\,(Y - y_0)$$

Доказательство.

$S : f(x,y) - z = 0,\ F = f(x,y) - z$
$F'_x = (f(x,y) - z)'_x = f'_x(N)$
Аналогично для других производных
$F'_y = f'_x(N);\ F'_z = -1;$
Т.к. мы задали явную функцию F, то по теореме 1 получаем
$\pi : f'_x(N_0)(X - x_0) + f'_y(N_0)(Y - y_0) + f'_z(N_0)(Z - z_0) = 0$
$\pi : f'_x(N_0)(X - x_0) + f'_y(N_0)(Y - y_0) - (Z - z_0) = 0$, примечание $z_0 = f(x_0, y_0)$
$\pi : Z = f'(x_0, y_0) + f'_x(N_0)(X - x_0) + f'_y(N_0)(Y - y_0)$

■

Определение 1.4 (Нормаль к поверхности). *Пусть* $S : F(x,y,z) = 0,\ (x,y,z) \in U(M_0)$ *гладкая поврхность.* $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$.
Тогда нормаль $\vec{n}$ *к поверхности* S *в точке* M_0 *называется прямая линия* $n,\ M_0 \in n,\ n \perp \pi$*, где* π *— касательная плоскость*

Замечание 1.1. *Если в условии определения* $\nexists\ \operatorname{grad} F|_{M_0} \neq \overrightarrow{0}$*, то каноническое уравнение* n

$$n : \frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}$$

2. Экстремум функции нескольких переменных

Определение 2.1 (Экстремума ФНП). *Пусть функция $u = f(M) = f(x_1, \ldots, x_n)$ — является функцией n - переменных определённых в некоторой окрестности $U(M_0)$ и $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.*
Тогда

1) M_0 — точкой (локального) минимума функции $f(M)$, если
$\exists\delta > 0, \forall M \in U_\delta(M_0), \ f(M) \geqslant f(M_0)$

2) M_0 — точкой (локального) максимума функции $f(M)$, если
$\exists\delta > 0, \forall M \in U_\delta(M_0), \ f(M) \leqslant f(M_0)$

3) M_0 — точкой (локального) экстремума $f(M)$, если
$M_0 = \min f(M)$ *или* $M_0 = \max f(M)$

Определение 2.2 (Строгий экстремум функции нескольких переменных). *Пусть функция $u = f(M) = f(x_1, \ldots, x_n)$ — является функцией n - переменных определённых в некоторой окрестности $U(M_0)$ и $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$*
Тогда

1) M_0 — точкой строгого минимума функции $f(M)$, если
$\exists\delta > 0, \forall M \in \mathring{U}(M_0), \ f(M) > f(M_0)$

2) M_0 — точкой строгого максимума функции $f(M)$, если
$\exists\delta > 0, \forall M \in \mathring{U}(M_0), \ f(M) < f(M_0)$

3) M_0 — точкой строгого экстремума функции $f(M)$, если соблюдается пункт 1 или 2

Теорема 2.1 (Необходимое условие локального экстремума). *Пусть существует функция*

$$u = f(M) = f(x_1, \ldots, x_n), \ M \in U_0(M_0)$$
$$\text{где } M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0) \text{ и } \exists f'_{x_1}, \ldots, f'_{x_n}$$

Тогда если M_0 — точка локального экстремума, то

$$f'_{x_1}(M_0) = 0, \ldots, f'_{x_n}(M_0) = 0 \Leftrightarrow df(M_0) = 0$$

Доказательство. Пусть M_0 — минимум f(M), т.е.

$$\exists\delta > 0, \forall M \in U_\delta(M_0), \ f(M) \geqslant f(M_0)$$

Рассмотрим частную производную от первого аргумента через предел. Для этого возьмём точку $M(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0)$ в окрестности точки M_0, тогда получаем

$$f'_{x_1}(M_0) = \lim_{x_1 \to x_1^0} \left(\frac{f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{x_1 - x_1^0} \right)$$

Так как M_0 — минимум $f(M)$, то

$$f(M) - f(M_0) \geqslant 0$$

Осталось рассмотреть два случая для знаменателя

1) если $x_1 > x_1^0$, то $f'_{x_1} \geqslant 0$
2) если $x_1 < x_1^0$, то $f'_{x_1} \leqslant 0$

Из всего этого следует, что

$$f'_{x_1}(M_0) = 0$$

Аналогично доказываются случаи для других производных ■

Лемма 2.1 (О сохранении знака непрерывной функции). *Пусть*

$$u = \varphi(M) = \varphi(x_1, \dots, x_n) \in C(U(M_0))$$

и

1) $\varphi(M_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \ \forall M \in U_\delta(M_0) \ \varphi(M) > 0$
2) $\varphi(M_0) < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \ \forall M \in U_\delta(M_0) \ \varphi(M) < 0$

Доказательство.

1) Логика доказательства аналогична первому семестру

$$\varphi(M_0) > 0$$
$$\varepsilon = \frac{\varphi(M_0)}{2} > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall M \in U_\delta(M_0) \ |\varphi(M) - \varphi(M_0)| < \varepsilon$$

Расскроем знак модудя

$$\varphi(M_0) - \frac{\varphi(M_0)}{2} < \varphi(M) < \varphi(M_0) + \frac{\varphi(M_0)}{2}$$
$$\Rightarrow \forall M \in U_\delta(M_0) \ \varphi(M) > \frac{\varphi(M_0)}{2} > 0$$
$$\Rightarrow \varphi(M) > 0$$

2) Аналогично доказательству выше

■

Лемма 2.2 (О свойстве коэфициентов в квадратичной форме). *Пусть* $q(u,v) = Au^2 + 2Buv + Cv^2$ *— некая квадратичная форма (аналог* $q(u,v) = a_{uu}u^2 + a_{vv}v^2 + a_{uv}uv$*). Тогда*

1) $\forall (u,v) \neq (0;0)\ q(u,v) > 0 \Leftrightarrow A > 0,\ AC - B^2 > 0$ *— положительно определённая квадратичная форма*

2) $\forall (u,v) \neq (0;0)\ q(u,v) < 0 \Leftrightarrow A < 0,\ AC - B^2 > 0$ *— отрицательно определённая квадратичная форма*

Доказательство. Для доказательства воспользуемся критерием Сильвестра (2 семестр)
Распишем квадратичную форму для n переменных

$$q(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i u_j,\ a_{ij} = a_{ji}$$

Матрица для неё будет следующей

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}\ A_1^T = A_1$$

По критерию Сильвестра для квадратичной формы справедливо

1) $q > 0 :\ \Delta_1 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$

2) $q < 0 :\ \Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n > 0$

Если $n = 2$ то квадратичная форма имеет вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\ \Delta_1 = A,\ \Delta_2 = AC - B^2$$

Таким образом очевидо что если $q > 0$, то $A > 0,\ AC - B^2 > 0$
Аналогично для $q < 0$ следует $A = \Delta_1 < 0,\ AC - B^2 = \Delta_2 > 0$

■

Теорема 2.2 (Достаточное условие экстреума $f(x, y)$). *Пусть функция* $u = f(M) = f(x,y) \in C^2(U(M_0))$ *и* $df(M_0) = 0$.
Обозначим через $A = f''_{xx}(M_0),\ B = f''_{xy}(M_0),\ C = f''_{yy}(M_0),$ *Тогда*

1) $A > 0, AC - B^2 > 0$ *(т.е. квадратичная форма положительна)* $\Rightarrow M_0$ *— точка строгого минимума функции*

2) $A < 0, AC - B^2 > 0$ *(т.е. квадратичная форма отрицательна)* $\Rightarrow M_0$ *— точка строгого максимума функции*

3) $AC - B^2 < 0 \Rightarrow M_0$ *— не экстремум функции*

Доказательство. Воспользуемся формулой Тейлора для k = 1, тогда

$$\forall M \in U(M_0)\ \exists N \in [M_0, M],\ N \in U(M_0)$$
$$f(M) = f(M_0) + \frac{1}{1!}df(M_0) + \frac{1}{2!}d^2f(N),\ \text{где } M(x,y),\ M_0(x_0,y_0)$$
$$\Delta x = x - x_0 = dx,\ \Delta y = y - y_0 = dy$$

Распишем чему равны производые в формуле

$df(M_0) = f'_x(M_0) + f'_y(M_0) = 0$ (по условию)
$d^2f(N) = A_1d^2x + 2B_1dxdy + C_1d^2y,$ где $A_1 = f''_{xx}(M_0), B_1 = f''_{xy}(M_0), C_1 = f''_{yy}(M_0)$

Таким образом

1)) Для удобства введём
$\varphi_1(M) = f''_{xx}(M)$
Т.к. $A = f''_{xx}(M_0) = \varphi_1(M_0) > 0$ по условию, то по лемме 1 получаем
$\exists \delta_1 > 0\ \forall N_1 \in U_{\delta_1}(M_0) \Rightarrow \varphi_1(N) > 0$

) Для удобства введём
$\varphi_2(M) = f''_{xx}f''_{yy} - f''^2_{xy}$
Т.к. $AC - B^2 = \varphi_2(M_0) > 0$ по условию, то аналогично по лемме 1 получаем
$\exists \delta_2 > 0\ \forall N_2 \in U_{\delta_2}(M_0) \Rightarrow \varphi_2(N) > 0$

Объединим пункты выше в один

$$\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}\ \forall N \in U_\delta(M_0)\ \varphi_1 > 0,\ \varphi_2 > 0$$
$$\Rightarrow M \in U_\delta(M_0) \Rightarrow N \in U_\delta(M_0),\ A_1 > 0,\ A_1C_1 - B_1^2 > 0$$

Из строчки выше мы видим, что по лемме 2 в точке N квадратичная форма будет положительна другими словами

$d^2f(N) > 0$

Из формулы Тейлора и пункта выше следует

$\forall M \in \mathring{U}_\delta(M_0)\ f(M) - f(M_0) = \dfrac{1}{2!}d^2f(N) > 0$

Получаем

$f(M) > f(M_0),\ \forall M \in \mathring{U}_\delta(M_0) \Rightarrow M_0$ — точка минимума функции

2) Доказывается аналогично

3) Так как квадратичная форма знакопеременная, то найдётся такая $\delta > 0$, в окрестности которой будет справедливо $(A_1C_1 - B_1^2)(AC - B^2) > 0$, $(AC - B^2) < 0 \Rightarrow A_1C_1 - B_1^2 < 0 \Rightarrow B_1^2 - A_1C_1 > 0$
Помним, что

$$d^2f(N) = A_1d^2x + 2B_1dxdy + C_1d^2y$$

Так как $dy \neq 0$, то пусть $t = \frac{dx}{dy}$. Разделим равенство на d^2y, получим

$\dfrac{d^2f(N)}{d^2y} = A_1t^2 + 2B_1t + C_1 = [D = A_1C_1 - B_1^2 > 0] = A_1(t-\theta_1)(t-\theta_2)$

$\dfrac{d^2f(N)}{d^2y} = A_1(t-\theta_1)(t-\theta_2)$

$d^2f(N) = A_1(\Delta x - \theta_1\,\Delta y)(\Delta x - \theta_2\,\Delta y) \qquad dx = \Delta x \quad dy = \Delta y$

Из множителей можно выделить уравнения прямых и рассмотреть изменение знака у $d^2f(N)$ (метод интервалов)

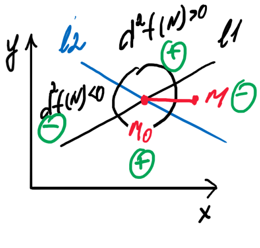


Рис. 3.

$$l_1:\ (x - x_0) - \theta_1\,(y - y_0) = 0$$
$$l_2:\ (x - x_0) - \theta_2\,(y - y_0) = 0$$

Таким образом мы видим

$$\forall \varepsilon < \delta,\, \varepsilon > 0 \qquad \begin{array}{l} \exists M_1 \; d^2 f(N_1) > 0 \; f(M) > f(M_1) \\ \exists M_2 \; d^2 f(N_2) > 0 \; f(M) < f(M_2) \end{array}$$

■

Теорема 2.3 (Достаточное условие экстремума функции n - переменных). *Пусть есть функция $u = f(M) = f(x_1, \ldots, x_n) \in C^2(U(M_0))$ и $df(M_0) = 0$.*
Обозначим $d^2 f(M_0) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} dx_i dx_j$, $a_{ij} = aji$
Тогда

1) $d^2 f(M_0) > 0 \Leftrightarrow \Delta_1 > 0, \ldots, \Delta_n > 0 \Rightarrow M_0$ — точка строгого минимума функции

2) $d^2 f(M_0) < 0 \Leftrightarrow \Delta_1 < 0, \ldots, \Delta_2 > 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n \Rightarrow M_0$ — точка строгого максимума функции

3) $d^2 f(M_0)$неопределённая форма $\Leftrightarrow$ вM_0 — нет экстремума функции

Доказательство. Аналогино доказательству предыдущей теоремы, воспользуемся формулой Тейлора

$$f(M) = f(M_0) + \frac{1}{1!} df(M_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(N),\; f(M) - f(M_0) = \frac{1}{2} d^2 f(N)$$

1)

$$\begin{aligned} &\Delta_1(M_0) > 0, \ldots, \Delta_n(M_0) > 0 \\ &\Rightarrow \text{ из критерия Сильвестра } \exists \delta > 0 \; \forall N \in U_\delta(M_0) \\ &\Rightarrow \Delta_1(N) > 0, \ldots, \Delta_n(N) > 0 \\ &\Rightarrow d^2 f(N) > 0 \\ &\Rightarrow f(M) > f(M_0),\; \forall M \in \mathring{U}_\delta(M_0) \Rightarrow M_0 \text{ — точка минимума функции} \end{aligned}$$

2) Доказывается аналогично

3) Принимаем без доказательств

■

Замечание 2.1. *Если квадратичная форма равна нулю, то требуются дополнительные исследования. Например взятие производной выше второй, рассмотрение точек в $\delta(M_0)$ окрестности*

3. Условные экстремумы ФНП

Пример 3.1. *Найти экстремум для функции* $u = x^2 + y^2$, *ограниченной поверхностью* $S : x + y = 1$

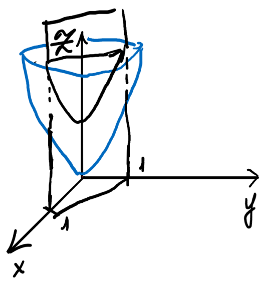


Рис. 4.

Решение

$$y = 1 - x \;\Rightarrow\; u = x^2 + 1 + x^2 - 2x$$

$$u'_x = 4x - 2 = 0 \qquad\qquad u''_x = 4 > 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad\qquad \text{точек нет}$$

Таким образом $M_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *— экстремум (строгий минимум)*

В следующем примере предыдущий алгоритм не работает.

Пример 3.2. *Найти экстремум для функции* $u = x$, *ограниченной поверхностью* $S : x^2 + y^2 = 1$

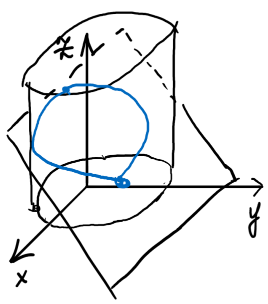


Рис. 5.

Если взять частную производную по x, то получим ($u'_x \neq 0$) что экстремум отсутствует, но по построению видно, что их два. Ошибка в том, что от "элипса"мы перешли к "отрезку"путём взятия производной.

Чтобы избавиться от этого параметризируем x и y следующим образом

$$\begin{cases} x = cos(t) \\ y = sin(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},\, t \in [0;\ 2\pi]$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} & u = cos(t) \\ & u'_t = -sin(t) \\ & t_{min} = 0,\ t_{max} = \pi, \text{ видно по построению} \\ & u''_t = -cos(t) \end{aligned}$$

Таким образом, ключевым моментом является сохранение гладкости функции при взятии производных (т.е. если)

Замечание 3.1 (Условие связи. Условное). *Условие свизи это функция(и) $\varphi_n(M)$, которая(ые) применяется(ются) к фукции $f(M)$, чтобы наложить ограничения (условия) на неё.*

Определение 3.1 (Условный экстремум). *Пусть $u = f(M) = f(x_1, \dots, x_n)$ определена в некоторой окрестности $U(M_0)$, $M(x_1^0, \dots, x_n^0)$ и выполнено условие связи $S : \varphi_1(M) = 0, \dots, \varphi_k(M) = 0$, $M_0 \in S$. Тогда*

1) *M_0 — точка локального условного минимума функции $f(M)$ при условии $M \in S \Leftrightarrow \exists \delta > 0\ \forall M \in U_\delta(M_0) \cap S\ f(M) \geqslant f(M_0)$*

2) *M_0 — точка локального условного максимума функции $f(M)$ при условии $M \in S \Leftrightarrow \exists \delta > 0\ \forall M \in U_\delta(M_0) \cap S\ f(M) \leqslant f(M_0)$*

3) *M_0 — точка условного экстремума функции $f(M) \Leftrightarrow M_0$ точка условного минимума или условного максимума*

Анлогичны будут рассуждения для строгого условного экстремума (помним, что он рассматривается в проколотой окрестности).

Повторимся, что условный экстремум отличается от обычного тем, что поиск ограничен S

Определение 3.2 (Формула Лагранжа задачи на усл. экстремум). *Пусть $f(M), \varphi_1(M), \ldots, \varphi_k(M)$ — функции n переменных $x_1, \ldots, x_n$, определенных в $U(M_0)$. Тогда функция*

$$L(M, \lambda) = f(M) + \lambda_1\varphi_1(M) + \cdots + \lambda_k\varphi_k(M)$$

называется функцией Лагранжа задачи на условный экстремум функции $f(M)$ при условии $M \in S : \varphi_1 = \cdots = \varphi_k = 0$

Формула Лагранжа позволяет связать функцию и дополнительное условие воедино, что очень удобно.

Теорема 3.1 (Необходимый признак условного экстремума). *Пусть*

$$f(M), \varphi_1(M), \ldots, \varphi_k(M) \in C^{-1}(U(M_0))$$

и M_0 — внутренняя точка гладкой части поверхности S

$$S : \varphi_1(M) = 0, \ldots, \varphi_k(M) = 0, \quad M_0 \in S$$

Обозначим через

$$L(M, \lambda) = f(M) + \lambda_1\varphi_1(M) + \cdots + \lambda_k\varphi_k(M)$$

функцию Лагранжа задачи на условный экстремум функции $f(M)$, где $M \in S$. Тогда, если точка M_0 — условный экстремум функции $f(M)$, то существует $\lambda_0(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_k^0)$, для которой

$$dL(M_0, \lambda_0) = 0, \text{ где } M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0),\ \lambda_0(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_k^0)$$

Доказательство. Рассмотрим следующий случай: $n = 2$, $k = 1$ (размерность пространства и количество функций задающих поверхность), то есть $u = f(x, y)$, $(x, y) \in U(M_0)$, $M_0(x_0, y_0)$, M_0 — точка условного экстремума $S : \varphi(x, y) = 0$
Так как $\varphi(x, y)$ — гладкая функция, то мы можем её параметризировать

$$S : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in U(t_0)$$

Тогда

$$M_0(x, y) = M_0(x(t_0), y(t_0)),\ x(t),\ y(t) \in C'(U(t_0))$$

И следовательно по условию

$$\forall t \in U(t_0)\ \varphi(x(t), y(t)) = 0$$

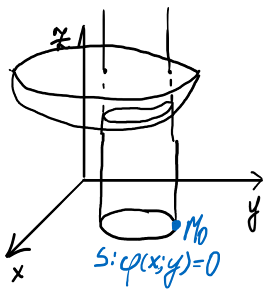


Рис. 6. вместо z тут u

При этом $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0,0)$, то есть параметризация "хорошая"(Важность факта можно понять из примера 2).
Таким образом задача на условный экстремум переходит в задачу на обычный экстремум функции $u = f(x(t), y(t))$ (таким образом получили функцию от одной переменной).
По формуле частной производной

$$u'(t) = f'_x\, x'_t + f'_y\, y'_t$$

Аналогично для $\varphi'(t)$.
Рассмотрим систему

$$\begin{cases} f'_x x'_t + f'_y y'_t = 0 \\ \varphi'_x x'_t + \varphi'_y y'_t = 0 \end{cases}$$

Так как M_0 - условный экстремум (по усл.), то t_0 - экстремум функции $u(t)$, значит $u'_t(t_0) = 0$, т.е. t_0 - решение первого уравнения системы. Причём мы имеем два решения: в t_0 и когда $x'_t,\ y'_t = 0$ (это справедливо, т.к. $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0,0)$)
Так как по условию $\varphi(t) = 0$, то и $\varphi'(t) = 0$ для любого t. Значит, второе уравнение справедливо всегда.
Получается по теореме Краммера следует

$$\begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ \varphi'_x & \varphi'_y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{f'_x(M_0)}{\varphi'_x(M_0)} = \frac{f'_y(M_0)}{\varphi'_y(M_0)} = -\lambda_0$$

Примечание. Если знаменатель равен нулю, то и числитель будет ему равен. Поэтому всё ОК
Таким образом из отношения можно получить следующию систему

$$\begin{cases} f'_x(M_0) + \lambda_0 \varphi'_x(M_0) = 0 \\ f'_y(M_0) + \lambda_0 \varphi'_y(M_0) = 0 \end{cases}$$

Добавим ещё одно уравнение из условия, получим

$$\begin{cases} f'_x(M_0) + \lambda_0\varphi'_x(M_0) = 0 \\ f'_y(M_0) + \lambda_0\varphi'_y(M_0) = 0 \\ \varphi(M_0) = 0 \end{cases}$$

Которая на самом деле ни что иное как

$$\begin{cases} L'_x(M_0, \lambda_0) = 0 \\ L'_y(M_0, \lambda_0) = 0 \\ L'_\lambda(M_0) = 0 \end{cases}$$

Если мы сложим все три равенства то получим производную функции Лагранжа, которая равна нулю

$$dL(M_0, \lambda_0) = 0$$

■

Теорема 3.2 (Достаточный признак усл. экстремума в общем случае). *Пусть*

$$\exists M(x_1, \ldots, x_n),\ \exists M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$$
$$f(M), \varphi_1(M), \ldots, \varphi_k(M) \in C^2(U(M_0))$$
$$L(M, \lambda) = f(M) + \lambda_1\varphi_1(M) + \cdots + \lambda_k\varphi_k(M)$$

и $\exists\lambda_0(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_k^0)$ *для которой* $dL(M_0, \lambda_0) = 0$ *Рассмотрим*

$$S:\ d\varphi_j(M_0) = 0 \quad j = 1, \ldots, k$$
$$S':\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta\varphi_j}{\delta x_j}\, dx_j \quad j = 1, \ldots, k$$

S' *— система* k *линейных однородных уравнений относительно* n *неизвестных* $dx_1, \ldots, dx_n$ *размерность* $m = n-r$, r *— ранг матрицы поэтому* $dx_1, \ldots, dx_n$ *– независимые (свободные) переменные.*
Второй дифференциал

$$d^2L = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta^2 L(M_0, \lambda_0)}{\delta x_i\, \delta x_j}\, dx_i\, dx_j = q(dx_1, \ldots, dx_m)$$

Тогда

1) $q \succ 0 \Rightarrow M_0$ — точка строгого условного минимума функции

2) $q \prec 0 \Rightarrow M_0$ — точка строгого условного максимума функции

3) q — неопределённая форма $\Rightarrow$ в M_0 нет экстремума

Доказательство. Принимаем без доказательств ■

Замечание 3.2. *Условие $q \succ 0$ или $q \prec 0$ проверяется с помощью критерия Сильвестра. Данный факт используется для доказательства теоремы.*

Замечание 3.3. *По аналогии со вторым параграфом. Требуются дополнительные исследования, если второй диференциал равен нулю.*

Пример 3.3. *Дано:*

$$u = x^2 + y^2 + z^2 \quad S:\ x\,y + z = 2$$

Решение:
Поверхность S можно описать одной гладкой функцией (т.е. $\varphi = x\,y + z - 2$). Тогда получаем

$$L = x^2 + y^2 + z^2 + 2\,\lambda\,(x\,y + z - 2)$$

Найдём частные производные

$$L'_x = 2\,x - 2\,\lambda\,y = 0 \quad L'_y = 2\,y - 2\,\lambda\,x = 0 \quad L'_z = 2\,z - 2\,\lambda$$
$$L'_\lambda = xy + z - 2 = 0$$

Решаем систему и получаем следующие подозрительные точки

$$\begin{array}{lll} M_0(0,\ 0,\ 2) & M_1(1,\ 1,\ 1) & M_2(-1,\ -1,\ 1) \\ \lambda_0 = 2 & \lambda_1 = 1 & \lambda_2 = -1 \end{array}$$

Теперь требуется проверить точки на экстремумы. Найдём производные

$$\begin{array}{lll} L''_{xx} = 2 & L''_{xy} = -2\,\lambda & L''_{xz} = 0 \\ L''_{yy} = 2 & L''_{yz} = 0 & \\ L''_{zz} = 2 & & \end{array}$$

Дважды продифференцируем функцию Лагранжа. Помним, что λ *– коэффициент. В итоге получаем*

$$d^2L = 2\,(dx)^2 + 2\,(dy)^2 + 2\,(dz)^2 - 4\lambda\,dx\,dy$$

Также S' : $y\,dx + x\,dy + dz = 0$

При подстановке M_0 *и с помощью значений из* S' *получаем значение функции Лагранжа.*

$$q_0 = 2\,(dx)^2 - 8\,dx\,dy + 2\,(dy)^2$$

по критерию Сильвестра q_0 *– знакопеременна. Значит в* M_0 *нет экстремума. При* $M_{1,2}$

$$q_{1,2} = 4\,(dx)^2 + 4\,(dy)^2$$

видим, что $M_{1,2}$ *– точка условного минимума*

4. Отыскание max и min значений для ФНП

Пример 4.1. *Найти экстремумы для функции* $u = x^2 + y^2$ *ограниченной поверхностью* $D : |x| + 2|y| \leqslant 5$

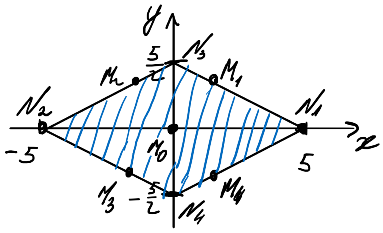


Рис. 7.

Таким образом, мы имеем дело с компактом (огр. множеством).

1) $u'_x = 2x = 0,\ u'_y = 2y = 0$
   $M_0(0,0),\ u(M_0) = 0$ — *минимум*

2) *Для удобства будем рассматривать первую четверть, так как компакт представляет собой ромб, который симметричен относительно осей (Замечание. Облатсть определена через 4 дифференцируемые функции).*

$$L_1 = x^2 + y^2 + \lambda(x + 2y - 5)$$
$$dL_1 = (2x + \lambda)dx + (2y + 2\lambda)dy + (x + 2y - 5)d\lambda = 0$$
$$\begin{cases} 2x + \lambda = 0,\ x = -\frac{\lambda}{2} \\ 2y + 2\lambda = 0,\ y = -\lambda \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

Подставим значения x и y в последнее уравнение, получим

$$\lambda = -2$$

следовательно экстремум в точке $M_1(1,2)$
Так как мы рассматриваем первую четветь, то в оставшихся трёх получим $M_2(-1,2),\ M_3(-1,-2),\ M_4(1,-2)$
Для данных точек значение функции

$$u(M_{1,2,3,4}) = 1 + 4 = 5$$

3) Так как функция компакта не является гладкой, то рассмотрим следующие точки:

$$N_1(5,0),\ N_2(-5,0) \qquad N_3(0,\frac{5}{2}),\ N_4(0,-\frac{5}{2})$$
$$u(N_{1,2}) = 25 \qquad u(N_{3,4}) = \frac{25}{4}$$

Таким образом $u_{max} = u(N_{1,2}) = 25$.
Окончательный ответ:

$$\forall (x,y) \in D,\ 0 \leqslant u(x,y) \leqslant 25$$

Замечание 4.1 (Как выглядит в общем случае). *Пусть* $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ *определена в замкнутой односвязанной области* $D : \varphi_1(M) \geqslant 0, \ldots, \varphi_k(M) \geqslant 0$

1) $M \in \mathring{D} : \varphi_1(M) > 0, \ldots, \varphi_k(M) > 0$
Должно соблюдаться $f(M),\ \varphi_1(M),\ \ldots,\ \varphi_k(M) \in C'(\mathring{D})$ *— гладкая по каждой части границы*
Для $df(M) = 0\ \exists M_1, \ldots, M_l \in \mathring{D}$ *— гладкая* n*-мерная часть*

2) Гладкая $(n-1)$ *мерная часть границы* D

$$\begin{array}{lll} L_1 = f + \lambda_1\varphi_1 & , \ldots, & L_k = f + \lambda_k\varphi_k \\ dL_1 = 0 & & dL_k = 0 \\ N_{11}, \ldots, N_{1l_1} + \lambda & & N_{11}, \ldots, N_{1l_k} + \lambda \end{array}$$

$\varphi_1(N_{11}) = 0, \varphi_2(N_{11}) > 0, \ldots, \varphi_k(N_{11}) > 0$

3) Гладкая $(n-2)$ *мерная часть границы* D*. Рассмотрим функции вида*

$$L = f(M) + \lambda_i\,\varphi_i(M) + \lambda_j\,\varphi_j(M)$$

$$\begin{array}{lll} S : \varphi_i(M) = 0, & \varphi_j(M) = 0 & (i \neq j) \\ 1 \leqslant i \leqslant k & & 1 \leqslant j \leqslant k \end{array}$$

Рассматриваем

$$dL(M, \lambda_i, \lambda_j) = 0$$

Получаем следующий набор точек $K_1,\ \ldots,\ K_s$

. . .)

n + 1) *Рассматриваем 0-мерное гладкое пространство (вершины или "плохие"точки). Получим следующее множетсво:* $P_1, \ \dots, \ P_q$

Таким образом, ответ:

$$U_{max} = max\{u(M_1), \ \dots, \ u(P_q)\}$$
$$U_{min} = min\{u(M_1), \ \dots, \ u(P_q)\}$$

Тут надо написать обощающий алгоритм, т.е. что по факту для поиска экстремумов мы рассматриваем множества различных функций Лагранжа для различного количества границ.

Часть II

Обыкновенные дифференциальные уравнения и их системы

5. Введение. Дифференциальные уравнения 1-го порядка

Определение 5.1 (Дифференциальное уравнение). *Уравнение вида $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ называют обыкновенным дифференциальным уранением n-го порядка. Решением называют функцию $y = y(x)$, которая n раз дифференцируема на интервале I:*

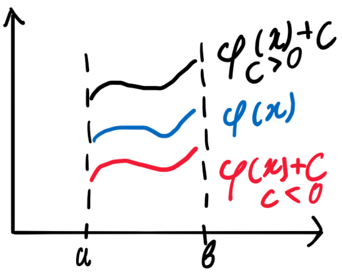
$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

Определение 5.2 (ДУ разрешённое относительно старшей производной). *Если дифференциальное уравнение имеет вид*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

то тогда его называют обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка разрешённого относительно старшей производной

Пример 5.1 (моделный). *Пусть $f(x) \in C'_{(a,b)}$, $y' = f(x)$ — дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешённое относительно 1й производной.*



Если $y = y(x)$ решение, то

$$y'(x) = f(x)$$

$$y = \int f(x)dx + C = \varphi(x) + C \quad x \in (a, b)$$

Если $y = \psi(x)$ решение ДУ, то

$$\exists C,\ \forall x \in (a, b) \quad \psi = \varphi(x) + C$$

Для любого $(x_0,\ y_0)$ в полосе, т.е. для $x_0 \in (a, b)$ существует решение $y = \varphi(x) - \varphi(x_0) + y_0$, $(y_0 \in \mathbb{R})$

Таким образом мы видим, что для одного дифференциального уравнения существует множетсво решений. Для конкретизации задачи используют условие Коши.

Определение 5.3 (Задача Коши). *Система вида*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \quad (\textit{конкретизация первообразной}) \end{cases}$$

Называется условием Коши, а задача о поиске решения это задача Коши

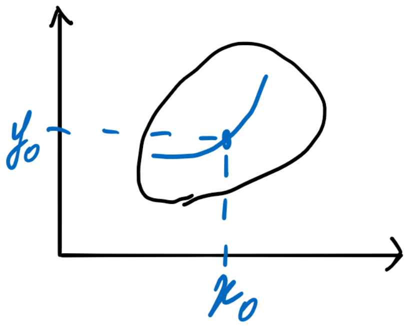


Рис. 8.

Теорема 5.1 (Сущ. и ед. решения задачи Коши для ДУ 1го порядка). *Пусть $f(x,y) \in C(U(M_0))$ и $\exists f'_y(M) \in C(U(M_0))$. Тогда существует такая $\delta > 0$ и существует решение $y' = y(x) \in U_\delta(M_0)$ задачи Коши с соответвующим условием $y' = f(x) \quad y(x_0) = y_0$ и такое решение в $U_\delta(x_0)$ единственно*

Доказательство. Принимаем без доказательств ∎

Определение 5.4 (Поле направлений ДУ). *Пусть*

$$y' = f(x,y), \quad f(x,y) \in C(D)$$

$M_0(x_0, y_0)$ — любая внутренняя точка области D. Запишем уравнение касательной к графику решения задачи Коши

$$l_0 : Y - y_0 = f(x_0, y_0)\,(X - x_0)$$

а задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

Пусть $\vec{\tau}$ *— единичный вектор касательной. Тогда множество* $\{\vec{\tau}\}$ *— поле направлений*

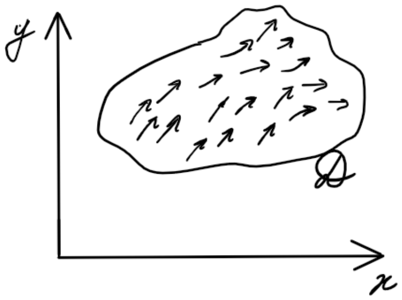


Рис. 9. Поле направлений

Вместе с понятием поля направлений вводят (для удобства) такую вещь как изоклины, т.е. линии, вдоль которых поле имеет одно и тоже направление. Задаётся уравнением $f(x,y) = C$

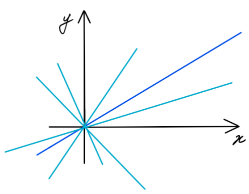
Тут важно заметить, что понятие поля направлений очень сильно связано с физикой, так как с помощью них можно легко описывать физические поля (эклектрическое, магнитное).

С помощью полей направлений доказывается теорема о единственности задачи Коши.

Пример 5.2. *Дано:*

$$y' = \frac{y}{x}$$

Требуется построить поле направлений.
Решение.



Изоклины для данного ДУ задаются уравнением

$$\frac{y}{x} = C$$

Получается, изоклины представляют собой прямые, проходящие через начало координат. Уравнение изоклин $y = Cx$.

Если подставлять пары $(x,\ y)$, то мы заметим, что вектора поля направлений совпадают с изоклинами.
Таким образом поле направлений состоит из множества прямых, проходящих через начало отсчёта (Точка (0, 0) выколотая).

Пример 5.3. *Дано*

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Требуется построить поле направлений.
Решение.
Изоклины для данного ДУ задаются уравнением

$$-\frac{x}{y} = C$$

Аналогично примеру выше, видим что изоклины проходят через начало координат.
Рассмотрим несколько изоклин.

1) *$C = -1$, тогда $y = x$. Прямая в первой и третьей четверти. Для неё значение углового коэфициента $k = -1$. Следовательно угол равен $\frac{3\pi}{4}$ для первой четверти*

2) *Рассмотрим $C \in (-\infty;\ -1)$, тогда нетрудно заметить, что угол φ соответственно изменялся для первой четверти от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{4}$ (оба не включительно).*

3) *Рассмотрим $C \in (-1;\ 0)$. Тогда угол φ соответственно изменялся для первой четверти от $\frac{3\pi}{4}$ до π.*

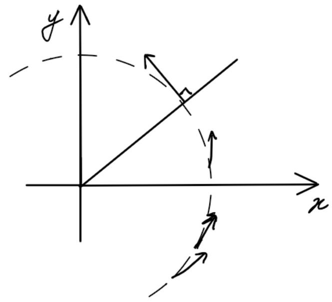


Рис. 10. Иллюстрация примера

Определение 5.5 (Общее решение). *Пусть* $y' = f(x, y)$ *— ДУ первого порядка. Функция* $y = \varphi(x, C)$ *называется общим решением этого ДУ если:*

1) $\forall C \in \mathbb{R}$ *y как функция от x является решением ДУ*

2) *Для любого решения* $y = y^*(x)$

$$\exists C^* \in \mathbb{R}, \quad y^*(x) \overset{(x)}{\equiv} \varphi(x, C^*)$$

Замечание 5.1. *Уравнение* $\Phi(x, y, C) = 0$ *— называется общим интегралом ДУ.* $y' = f(x, y)$ *если:*

1) *всякая неявная функция* $y = y(x, C)$ *при фиксированном C является решением ДУ*

2) *всякое решение задаётся неявной функцией* $y = y(x, C^*)$ *для некоторого* C^*

Пример 5.4. *Для* $y' = \frac{y}{x}$ *очевидно из рисунка, что общее решение*

$$y = C\,x$$

Пример 5.5. *Для* $y' = -\frac{x}{y}$ *очевидно из рисунка, что общий интеграл*

$$x^2 + y^2 = C^2$$

Общее решение отсутствует

Замечание 5.2. *Точка особая, если нарушается существование и единственность задачи Коши*

Замечание 5.3. $y = \varphi(x, C)$ *— «общее» решение,* $y = \hat{y}(x)$ *— особое решение по отношению к общему решению.*

Замечание 5.4. *Дано* $y' = f(x)$*, тогда*

$$y = \int f(x)\,dx + C$$

называется решением ДУ «в квадратурах».
Важно заметить, что интегралов может быть несколько. Например,

$$y^{(n)} = f(x)$$

интегрируется в квадратурах, через последовательное интегрирование. Другим примером является сумма интегралов.

6. ДУ в "дифференциалах". ДУ с разделяющимися переменными

Определение 6.1. *Пусть $M(x,y), N(x,y) \in C(D)$. Тогда уравнение вида*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

называется ДУ в "дифференциалах"при этом

1) *Решение этого ДУ - дифференциальные уравнения $y = y(x), x \in I$, где I — отрезок, причём*

$$\forall x \in I \quad M(x, y(x)) + N(x, y(x))y'(x) = 0$$

2) *кривая линия $L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in I$ — называется интегральной кривой для данного ДУ. Это эквивалентно следующенму*
   L – гладкая кривая и

$$\forall t \in I, \quad M(x(t), y(t))\, x'_t + N(x(t), y(t))\, y'_t = 0$$
$$dx = x'_t\, dt,\ dy(t) = y'_t\, dt$$

Замечание 6.1. *Есть связь между ДУ решённым относительно производной и ДУ в «дифференциалах»*

$$y' = f(x,y) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x,y)dx - dy = 0$$
$$Mdx + Ndy = 0| \div dx$$
$$M + Ny' = 0$$
$$y' = -\frac{M}{N}$$

Рассмотрим два примера отражающих этот факт.

Пример 6.1. *Дано*

$$y' = \frac{y}{x}$$

Тогда уравнение в «диференциалах»

$$y\,dx - x\,dy = 0$$

Только одна особая точка. Если $x = 0$, то интегральная кривая

Пример 6.2. *Дано*

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Тогда уравнение в «диференциалах»

$$y\,dy + x\,dx = 0$$

Интегральные кривые — замкнутые окружности

Определение 6.2. *ДУ вида $f(x)\,dx = g(y)\,dy$ — называется ДУ с разделёнными переменными. Причём $f(x) \in C(I),\ g(y) \in C(J)$.*
$I,\ J$ — интервалы

Теорема 6.1 (Общий интеграл ДУ с разделяющимися переменными). *В условиях определения выше пусть $F(x)$ первообразная к $f(x)$ на I, а $G(y)$ для $g(y)$ на J*
Тогда $F(x) = G(y) + C$ является общим интегралом ДУ $f(x)dx = g(y)dy$

Замечание 6.2. *В данной теореме мы просто говорим о взаимной связи первообразных с производными*

Доказательство. По условию:

$$L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in (\alpha; \beta)$$

Т.е. дана интегральная кривая ДУ $f(x)dx = g(y)dy$. Это эквивалентно

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad F(x(t)) = G(y(t)) + C$$

$\Rightarrow$ Рассмотрим $f(x(t))\,x'_t = g(y(t))\,y'_t$. Тогда

$$\begin{aligned} f(x(t))\,x'_t &= g(y(t))\,y'_t \\ (F(x(t)))'_t &= (G(y(t)))'_t \qquad \text{Зам. } (F(x(t)))' = f(x(t))\,x'_t] \\ (F(x(t)) - G(y(t)))'_t &= 0 \end{aligned}$$

Так как производная равна нулю, то при взятии первообразных справа будет константа, получаем

$$\exists C \equiv const \quad t \in (\alpha;\, \beta), \quad F(x(t)) = G(y(t)) + C$$

$\Leftarrow$ Если $\forall t \in (\alpha; \beta)\ F(x(t)) = G(y(t)) + C$ то

$$[F(x(t))]'_t = [G(y(t))]'_t + [C]'_t$$
$$f(x(t))\, x'_t = g(y(t))\, y'_t$$

Таким образом L — интегральная кривая ДУ $f(x)\, dx = g(y)\, dy$

$\blacksquare$

Замечание 6.3. *Решение в "квадратурах":*

$$\int f(x)\, dx = \int g(y)\, dy + C$$

Пример 6.3. *Дано $y\, dx - x\, dy = 0$. Решить ДУ.*

$$y\, dx - x\, dy = 0$$
$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$
$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$$
$$\ln(|x|) = \ln(|y|) - \ln(C_1) \qquad C = ln(C_1)$$
$$y = C\, x$$

Ответ: $y = C\, x$

Пример 6.4. *Дано*

$$x\, dx - y\, dy = 0$$

Требуется решить ДУ.
Решение

$$x\, dx - y\, dy = 0$$
$$\int x\, dx = -\int y\, dy$$

Для удобства возьмём константу $\frac{C^2}{2}$

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + \frac{C^2}{2}$$
$$x^2 + y^2 = C^2$$

Ответ: $x^2 + y^2 = C^2$

Определение 6.3. *ДУ вида*

$$y' = f(x)g(x) \qquad f(x),\ g(y) \in C$$

называется ДУ с разделяющимися переменными

Замечание 6.4 (Общий интеграл ДУ с разделяющимися переменными). *Возьмём $y' \mapsto \frac{dy}{dx}$. Заменим y' и умножим выражение из определения на dx, получим*

$$\begin{aligned} y' &= f(x)\,g(y) \\ \frac{dy}{dx} &= f(x)\,g(y) \\ dy &= f(x)\,g(y)\,dx \\ \frac{dy}{g(y)} &= f(x)\,dx \\ \int \frac{dy}{g(y)} &= \int f(x)\,dx + C \end{aligned}$$

Таким образом, получили общий интеграл.

Замечание. Было деление на $g(y)$. В общем случае также требуется рассматривать $g(y) = 0$

Пример 6.5. *Дано*

$$y' = \frac{y}{x}$$

Решение

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y}{x} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x} \\ \frac{dy}{y} &= \frac{dx}{x} \\ \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{x} \\ \ln|y| &= \ln|x| + \ln|C_1| \\ y &= C\,x \end{aligned}$$

Пример 6.6. *Дано*

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Решение

$$y' = -\frac{x}{y}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$
$$y\,dy = -x\,dx$$
$$\int y\,dy = -\int x\,dx$$
$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{C^2}{2}$$
$$y^2 + x^2 = C^2$$

Определение 6.4. *ДУ 1го порядка приводящееся к ДУ с разделяющимися переменными*

$$y' = f(a\,x + b\,y + c) \qquad a\,b \neq 0, \quad f(z) \in C_{(I)}$$

Замечание 6.5. *Введём*

$$z = a\,x + b\,y + C, \quad z = z(x)$$

Тогда

$$z' = a + b\,y' = [y' = f(z(x)) = f(x)] = a + b\,f(x)$$
$$z' = a + b\,f(x)$$
$$\frac{dz}{dx} = a + b\,f(x)$$
$$dx = \frac{dz}{a + b\,f(x)}$$
$$x + C = \int \frac{dz}{a + b\,f(x)}$$

Получаем систему

$$\begin{cases} x + C = \int \dfrac{dz}{a + b\,f(x)} \\ z = a\,x + b\,y + C \end{cases}$$

Отдельно требуется рассмотреть случай $a + b\,f(z) = 0$

Пример 6.7. *Дано*

$$y' = \cos(x - y)$$

Решение.

$$\begin{aligned} z &= x - y \\ z' &= 1 - y' \qquad y' = cos(z) \\ z' &= 1 - \cos(z) \end{aligned}$$

Получили ДУ с разделяющимися переменными. Решаем

$$\begin{aligned} \frac{dz}{1-\cos(z)} &= dx \\ \int \frac{dz}{1-\cos(z)} &= \int dx \\ \int \frac{dz}{2\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)} &= x + C \\ ctg\left(\frac{z}{2}\right) &= x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= 2\,arctg(-x - C) + 2\,\pi\,k \qquad k \in \mathbb{N} \\ x - y &= 2\,arctg(-x - C) + 2\,\pi\,k \qquad k \in \mathbb{N} \\ y &= x - 2\,arctg(-x - C) - 2\,\pi\,k \qquad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Не забываем, что мы делили. Следовательно, требуется рассмотреть частный случай. $1 - cos(z) = 0$

$$\begin{aligned} 1 - cos(z) &= 0 \\ cos(x - y) &= 1 \\ x - y &= -2\,\pi\,k \qquad k \in \mathbb{N} \\ y &= x + 2\,\pi\,k \qquad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Проверим является ли значение выше упущенным решением.

$$\begin{aligned} y' &= 1 \qquad \textit{(производная взята из равенства выше)} \\ cos(x - y) &= cos(-2\,\pi\,k) = 1 \qquad \textit{(подстановка в условие)} \end{aligned}$$

Левая и правая части условия равны, следовательно $y = x + 2\,\pi\,k$ *входит в множество решений.*

Множество решений выглядит следующим образом

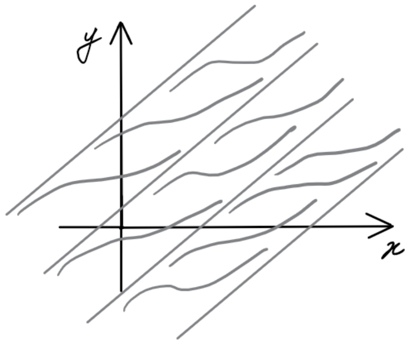


Рис. 11.

7. Однородные ДУ первого порядка

Определение 7.1. *Пусть функция $f(t)$ определена и непрерывна на некотором интервале и $f(t) \not\equiv t$. Тогда ДУ*

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

называются однородными ДУ первого порядка.

Замечание 7.1. *$F(x_1, \dots, x_n)$ называются однородными функциями веса k, если*

$$\forall t \in \mathbb{R}\ F(t\,x_1, t\,x_2, \dots, t\,x_n) = t^k\, F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Пример. $f(\frac{t\,y}{t\,x}) = f(\frac{y}{x})$ *— однородное ДУ веса* $k = 0$

Замечание 7.2 (Как решить однородное ДУ). *Дано*

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Введём

$$t(x) = t = \frac{y}{x}$$

Тогда тут опечатка?

$$y = t\,x, \quad y' = t'\,x + t = f(t)$$

Таким образом получаем ДУ с разделяюмися переменными

$$t' = \frac{f(t) - t}{x}$$

Решаем

$$\frac{dt}{dx} = \frac{f(t) - t}{x}$$

Так как мы будем делить на $f(t) - t$, то потребуется рассмотреть два случая

1) $f(t) - t \neq 0$

$$\int \frac{dt}{f(t) - t} = \int \frac{dx}{x}$$

$$ln(|x|) = \int \frac{dt}{f(t) - t} + ln(C)$$

$$\begin{cases} x = Ce^{\int \frac{dt}{f(t)-t}} \\ y = t\,x \end{cases}$$

2) $f(t) - t = 0$

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad f(\alpha) = \alpha, \quad y = \alpha\,x$$

$$y' = \alpha = f(\alpha) = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

Пример 7.1. *Дано*

$$y' = \frac{x\,y + y^2}{x^2}$$

Решение.

$$y' = \frac{x\,y + y^2}{x^2} = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Делаем замену

$$t = \frac{y}{x}, \quad y = t\,x \quad dy = x\,dt + t\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{x\,dt}{dx} + t = t'\,x + t$$

Подставляем и получаем

$$t'\,x + \cancel{t} = \cancel{t} + t^2$$

$$\frac{dt}{t^2} = \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{t} = \ln|x| - \ln(C) = -\frac{x}{y}$$

$$\frac{x}{y} = \ln\left(\frac{C}{x}\right) \qquad C \neq 0$$

$$y = \frac{x}{\ln\left(\frac{C}{x}\right)} \qquad C \neq 0$$

Также требуется рассмотреть частный случай, когда $t = 0$, тогда $y = 0$

Замечание 7.3. *Дано:*

$$y' = f\left(\frac{a_1\,x + b_1\,y + c_1}{a_2\,x + b_2\,y + c_2}\right)$$

где

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad c_1^2 + c_2^2 \neq 0$$

Вопрос. Как превести эту дробь к однородному ДУ 1-го порядка? $f\left(\frac{y}{x}\right)$
Ответ:
Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_1\,x + b_1\,y + c_1 = 0 \\ a_2\,x + b_2\,y + c_2 = 0 \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Тогда по теореме Крамера получим, что существует единственное решение $(\alpha;\ \beta)$ этой системы линейных алгебраических уравнений. Сделаем замену

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha \\ y = y_1 + \beta \end{cases}$$

Получим

$$\begin{aligned} a_1\,x + b_1\,y + c_1 &= a_1(x_1 + \alpha) + b_1(y_1 + \beta) + c_1 = \\ &= a_1\,x_1 + b_1\,y_1 + \underbrace{a_1\,\alpha + b_1\,\beta + c_1}_{0\ \textit{(как корни ур-я)}} = \\ &= a_1\,x_1 + b_1\,y_1 \end{aligned}$$

Помимо этого, если взять диференциалы от заменённых функций, получим

$$\begin{cases} dx = dx_1 \\ dy = dy_1 \end{cases}$$

Таким образом мы можем перейти к отношению линейных функций. Из первоначального уравнения получаем.

$$\begin{aligned} y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{a_1\,x + b_1\,y + c_1}{a_2\,x + b_2\,y + c_2}\right) = f\left(\frac{a_1\,x_1 + b_1\,y_1}{a_2\,x_1 + b_2\,y_1}\right) = \\ = f\left(\frac{a_1 + b_1\,\frac{y_1}{x_1}}{a_2\,x_1 + b_2\,\frac{y_1}{x_1}}\right) = g\left(\frac{y_1}{x_1}\right) \end{aligned}$$

Таким образом

$$\frac{dy_1}{dx_1} = g\left(\frac{y_1}{x_2}\right)$$

получили однородное ДУ 1-го порядка, где

$$\begin{cases} x_1 = x - \alpha \\ y_1 = y - \beta \end{cases}$$

Пример 7.2. *Дано*

$$y' = \frac{x + y + 1}{x - y}$$

Решение.

1) *Найдём коэфициенты α и β. Для этого рассмотрим систему.*

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 1 = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \qquad \textit{Получаем } \alpha = \beta = -\frac{1}{2}$$

2) Зная α и β Делаем замену x и y на

$$x = x_1 - \frac{1}{2} \qquad y = y_1 - \frac{1}{2}$$

Получаем

$$y' = \frac{x+y+1}{x-y} = \frac{x_1+y_1}{x_1-y_1}$$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1+y_1}{x_1-y_1}$$

3) Пусть $t = \frac{y_1}{x_1}$, следоватнльно $y_1 = t\,x_1$. Тогда

$$dy_1 = x_1\,dt + t\,dx_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dt}{dx_1}\,x_1 + t$$

А после замены $y_1 = t\,x_1$ справа получаем

$$\frac{x_1 + t\,x_1}{x_1 - t\,x_1} = \frac{1+t}{1-t}$$

Таким образом

$$\frac{dt}{dx_1}\,x_1 + t = \frac{1+t}{1-t}$$

$$\frac{dt}{dx_1}\,x_1 = \frac{1+t-t+t^2}{1-t}$$

$$\frac{1-t}{1+t^2}\,dt = \frac{dx_1}{x_1}$$

$$\int \frac{1-t}{1+t^2}\,dt = ln|x_1|$$

После интегрирования получаем

$$\ln|x_1| + C_1 = arctg(t) - \frac{1}{2}\,\ln|1+t^2|$$

Делаем обратную замену $t = \frac{y_1}{x_1}$, получаем

$$\ln|x_1| + C_1 = arctg\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - \frac{1}{2}\,\ln\left|1 + \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2\right|$$

$$\cancel{\ln|x_1|} + C_1 = arctg\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - \frac{1}{2}\,\ln|x_1^2 + y_1^2| + \cancel{\ln|x_1^2|}$$

Ответ

$$arctg\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - \frac{1}{2}\,\ln|x_1^2 + y_1^2| = C$$

8. Линейные дифференциальные уравнения. ДУ Бернулли

Определение 8.1 (Линейное ДУ). *ДУ вида*

$$a(x)\,y' + b(x)\,y + c(x) = 0$$

называется линейным диференциальным уравнением, а

$$y' + p(x)\,y = q(x)$$

является приведённой формой линейного ДУ первого порядка, где

$$p(x) \in C_{(a;\,b)} \quad q(x) \in C_{(a;\,b)}$$

Определение 8.2. *Пусть*

$$y' + p(x)\,y = q(x) \tag{1}$$
$$y' + p(x)\,y = 0 \tag{2}$$

ДУ (2) *- линейное однородное ДУ, соответствующее линейному ДУ* (1)

Замечание 8.1. *Метод Лагранжа для решения линейных неоднородных ДУ первого порядка, в вариации произвольной постоянной*
Дано

$$y' + p(x)\,y = q(x)$$

Решение

1) *Ищем решение для однородного уравнения*

$$\begin{aligned} y' + p(x)\,y = 0 \\ \frac{dy}{y} &= -p(x)\,dx \\ \ln(y) &= -\int p(x)\,dx + \ln(C) \\ y &= C\,v(x) \end{aligned}$$

Замечание. $v(x) = e^{-\int p(x)\,dx}$
Таким образом, получили ***частное*** *решение для однородного ДУ.*

2) *ищем решение первоначального ДУ в виде $y = C(x)\,v(x)$, где $C(x)$ — постоянная, зависящая от x (произвольная постоянная)*

$$y = C(x)\,v(x)$$
$$y' = C'\,v + C\,v'$$

Подставим в уравнение из условия

$$C'\,v + C\,v' + p\,C\,v = q$$
$$C'\,v + C\,(v' + p\,v) = q$$

Так как на первом шаге мы рассматривали $v' + p\,v = 0$, то уравнения выше получаем

$$C\,(v' + p\,v) = 0$$
$$C'\,v(x) = q(x)$$
$$C' = \frac{q(x)}{v(x)}$$
$$C(x) = \int \frac{q(x)}{v(x)}\,dx + const$$

Подставим значение $v(x)$ из шага 1, получим

$$C(x) = \int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx + const \qquad x \in (a;\,b)$$

Или

$$C(x) = u(x) + const$$

3) *полное решение ДУ имеет вид*

$$y = C(x)\,v(x) = (u(x) + C)\,v(x) = u(x)\,v(x) + C\,v(x)$$

В общем виде

$$y = y_{(\textit{частное решение неоднородного})} + C\,y_{(\textit{частное решение однородного})}$$

Замечание 8.2 (По поводу решения задач Коши). *Пусть*

$$p(x),\ q(x) \in C_{(a;\,b)}, \quad x_0 \in (a;\,b), \quad y_0 \in \mathbb{R}$$

Тогда задача Коши

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y'|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

имеет единственное решение, определённое на $(a;\ b)$ вида

$$y = \underbrace{e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}}_{v(x)} \left(\underbrace{y_0}_{c} + \underbrace{\int_{x_0}^{x} \underbrace{g(s)e^{\int_{x_0}^{s} p(t)dt} ds}_{\frac{g(s)}{v(s)}}}_{u(x)} \right)$$

Пример 8.1. *Дано*

$$xy' + y = 3x^3$$

Решение.
Делим на x получим

$$y' + \frac{y}{x} = 3x^2$$

1) *Решаем однородное уравнение. Находим решение для $\mathring{y} = v(x)$*

$$v' + \frac{v}{x} = 0$$
$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$$
$$\ln(v) = -\ln(x) + \ln(C)$$
$$v = \frac{C}{x} \text{ — общее решение}$$
$$\text{При } C = 1 \quad v(x) = \frac{1}{x} \text{ — частное решение}$$

2) *Решаем общее уравнение. где $y = C(x)\,v(x) = v(x)\,u(x)$*

$$\text{Так как } y = \frac{u}{x}, \text{ то } y' = \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2}$$

Подставляем в первоначальное уравнение. Получаем

$$\frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} + \frac{u}{x^2} = 3x^2$$
$$u' = 3x^3$$
$$u(x) = \frac{3}{4}x^4 + c$$

3) *Совмещаем результаты шагов 1 и 2. Получаем ответ*

$$y = \frac{3}{4}x^4 + \frac{c}{x} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Определение 8.3. *ДУ вида*

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^{\alpha} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0;\,1\}$$

называется ДУ Бернулли

Замечание 8.3 (Решение ДУ Бернулли). *ДУ Бернулли интегрируется методом Лагранжа в вариации произвольной постоянной*

1) *Ищем $v = v(x)$ частное решение соответствующее линейному однородному ДУ*

$$v' + p(x)\,v = 0$$
$$v(x) = e^{-\int p(x)\,dx}$$

2) *Ищем общее решение ДУ для $u = u(x)$, где $y = u(x)\,v(x)$*

$$u'\,v + \underbrace{u(v' + pv)}_{=0(\textit{см. зам. 2})} = qu^{\alpha}v^{\alpha}$$
$$u'\,v(x) = q(x)u^{\alpha}v^{\alpha}(x)$$

Замечание. Нам известно то, что с аргументом.
Далее разделим на $u^{\alpha}\,v(x)$

$$\frac{du}{u^{\alpha}} = q(x)\,v^{\alpha-1}(x)\,dx$$
$$\int \frac{du}{u^{\alpha}} = \int q(x)\,v^{\alpha-1}(x)\,dx$$
$$\frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \int q(x)\,v^{\alpha-1}(x)\,dx + C$$
$$u = u(x,\ C) = \left((1-\alpha)\left(\int q(x)\,v^{\alpha-1}(x)\,dx + C\right)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

3) *Таким образом, ответ*

$$y = u(x,\ C)\,v(x)$$

Пример 8.2. *Дано*

$$x\,y' - y = x\,y^2$$

Решение.
Для соответсвия ДУ Бернулли разделим на x. Получим

$$y' - \frac{y}{x} = y^2$$

Видим, что

$$p(x) = -\frac{1}{x}, \quad q(x) = 1, \quad \alpha = 2$$

1) *Ищем частное решение однородного ДУ*

$$v' - \frac{v}{x} = 0$$
$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}$$
$$\ln|v| = -\ln|x| + \ln(C)$$
$$v = C\,x$$

Если $C = 1$, то получаем частное решение $v(x) = x$

2) *Рассмотрим $y = u(x)\,v(x) = u\,x$*
Подставим в уравнение из условия, получим

$$u'\,x + u - u = u^2\,x^2$$
$$u' = u^2\,x$$
$$\frac{du}{u^2} = x\,dx$$
$$-\frac{1}{u} = \frac{x^2}{2} - C$$
$$u = \frac{1}{C - \frac{x^2}{2}}$$

3) *Ответ*

$$y = \frac{x}{C - \frac{x^2}{2}}$$
$$y = \frac{2\,x}{2\,C - x^2}$$

9. ДУ в полных дифференциалах

Определение 9.1. *ДУ вида*

$$M(x,\ y)\,dx + N(x,\ y)\,dy = 0 \qquad M(x,\ y),\ N(x,\ y) \in C'(D)$$

называется ДУ «в полных дифференциалах», если $\exists F(x,\ y) \in C^2(D)$ *для которой*

$$\begin{aligned} F'_x &= M(x,\ y) \\ F'_y &= N(x,\ y) \end{aligned}$$

то есть ДУ имеет вид $dF(x,\ y) = 0$

Примечание. Дифференциал

$$dF(x,\ y) = F'_x\,dx + F'_y\,dy = M\,dx + N\,dy$$

является полным, поэтому и название уравнения «в полных дифференциалах».

Теорема 9.1 (Об общем интеграле). *В условиях определения 1, уравнение* $F(x,\ y) = C$ *даёт общий интеграл ДУ* $dF(x,\ y) = 0$ *(предполагаем, что D-односвязная область (ограниченная простой замкнутой кривой))*

Доказательство. Интегральная кривая $dF(x,\ y) = 0$

$$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in I$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\exists C = const, \quad \forall t \in I, \quad F(x(t),\ y(t)) = C$$

$\Rightarrow$ По условию имеем

$$F'_x(x(t),\ y(t))\,x'_t + F'_y(x(t),\ y(t))\,y'_t = 0$$

Значит

$$\begin{gathered} (F(x(t), y(t)))' = 0, \quad t \in I \\ \Rightarrow \exists C = const \quad \forall t \in I \quad F(x(t),\ y(t)) = C \end{gathered}$$

$\Leftarrow$ По условию

$$\forall t \in I \quad F(x(t),\, y(t)) = C$$

Продиференцируем равенство, получим

$$F'_x\, x'_t + F'_y\, y'_t = 0$$

По определению следует, что
L — интегральная кривая ДУ $F'_x\, dy + F'_y\, dx = 0$ и значит $dF(x,y) = 0$

$\blacksquare$

Замечание 9.1 (решение задачи Коши).

$$\begin{cases} dF(x,y) = 0 \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

$F(x,y) = F(x_0,y_0)$ *(в неявном виде)*

Пример 9.1. *Дано*

$$F(x,y) = x^2\, y$$

Требуется вывести ДУ.
Решение.

$$F'_x = 2\, x\, y$$
$$F'_y = x^2$$

Тогда уравнение «в полных диференциалах» будет выглядеть так

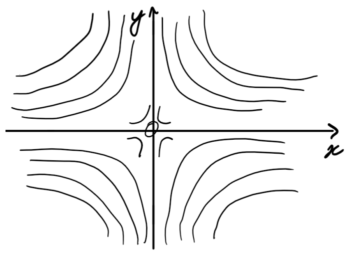


Рис. 12. Общее решение

$$2\, x\, y\, dx + x^2\, dy = 0$$
$$x^2\, y + x^2\, y = C_1$$
$$x^2\, y = C = \frac{C_1}{2}$$

Общее решение

$$y = \frac{C}{x^2}$$

Теорема 9.2 (О необходимом и достаточных усл. хар. ДУ в полн. диф.). *Пусть функции* $M(x,\ y)\quad N(x,\ y) \in C'(D)$, *где* D *односвязная замкнутая ограниченная область на* $\mathbb{R}^2$ *(граница* D *односвязанная замкнутая кривая). Тогда ДУ*

$$M(x,\ y)dx + N(x,\ y)dy = 0$$

является ДУ в полных дифференциалах. Это эквивалентно

$$M'_y = N'_x \qquad (\forall (x,\ y) \in \mathring{U}(D))$$

Доказательство. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ - внутренняя точка в области D

$\Rightarrow$ Пусть есть $F(x, y) \in C^2$ такая, что

$$F'_x = M(x,\ y), \quad F'_y = N(x,\ y) \quad \forall (x, y) \in \mathring{D}$$

Найдём $M'_y = F''_{xy} \in \mathring{D} \in C(\mathring{D})$ и $N'_x = F''_{yx} \in C(\mathring{D})$

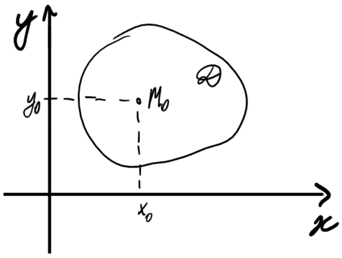


Рис. 13.

Так как они непрерывны, значит $F''_{xy} = F''_{yx}$. Из этого очевидно, что

$$M'_y = N'_x \qquad M'_y, N'_x \in \mathring{D}$$

$\Leftarrow$ По условию

$$\forall (x, y) \in \mathring{D} \quad M'_y(x, y) = N'_x(x, y)$$

и возьмём

$$(x_0,\ y_0) \in \mathring{D}, \quad U((x_0,\ y_0)) \subset D$$

Найдём частный интеграл F'_x, где $y = const$

$$F'_x = M(x, y) \quad \Rightarrow \quad F(x,\ y) = \int_{x_0}^{x} M(x;\, y)\, dx + \varphi(y)$$

Также

$$F'_y = \left(\int_{x_0}^{x} M(x,\ y)\,dx + \varphi(y)\right)'_y = \int_{x_0}^{x} M'_y(x,\ y)\,dx + \varphi'(y) \equiv N(x,\ y)$$

$$\int_{x_0}^{x} N'_x(x,\ y)\,dx = N(x,\ y)$$

$$\int_{x_0}^{x} N'(x,y)\,dx + \varphi'(y) \equiv N(x,y)$$

$$N(x,y)|_{x_0}^{x} + \varphi' \equiv N(x,y)$$

$$\cancel{N(x,y)} - N(x_0,y) + \varphi'_y \equiv \cancel{N(x,y)}$$

$$\varphi'_y = N(x_0,y)$$

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy$$

Таким образом

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)\,dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0,s)ds$$

Замечание. По поводу односвязанности.
Односвязность показывает то, что мы способны соединить точки P и P_0 внутри данной области.
Тогда $\exists F(x,y)$ определённая в $U(P_0)$

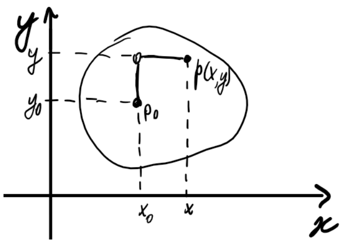


Рис. 14.

$$F'_x = M(x,y) \quad F'_y = N(x,y) \qquad (\forall (x,y) \in U(P_0))$$

«Двигаем» точку P_0 до P. Тогда

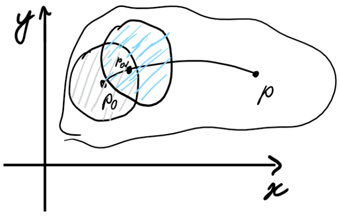


Рис. 15. «движение точки»

$$\exists F(x,y) \in \mathring{D} \qquad F'_x = M \qquad F'_y = N \quad (\forall (x,y) \in \mathring{D})$$

$\blacksquare$

Определение 9.2 (Интегрирующий множитель). *Пусть*

$$M(x,y),\ N(x,y) \in C'(D)$$

Тогда функцию $\mu = \mu(x,\ y)$ *называют интегрирующим множителем ДУ*

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

Или ($\Leftrightarrow$)
Существует $\mu(x,\ y)$ *— непрерывная функция, причём ДУ*

$$\mu\,M\,dx + \mu\,N\,dy = 0$$

является ДУ «в полных дифференциалах».
Или

$$u(x,\ y) \in C'(D) \qquad (\mu\,M)'_y = (\mu\,N)'_x$$

в односвязных компонентах области D *и частях* D

Замечание 9.2. *(отыскание интегрирующего множителя в некоторых случаях)*

1) *Пусть*

$$\frac{M'_y - N'_x}{N} = f(x)$$

Тогда существует интегрирующий множитель

$$\mu = \mu(x) \qquad \mu(x) = e^{\int f(x)dx}$$

2) А если

$$\frac{M'_y - N'_x}{M} = g(y)$$

Тогда существует интегрирующий множитель

$$\mu = \mu(y) \qquad \mu(y) = e^{-\int g(y) dy}$$

Доказательство.

1) Рассмотрим

$$\mu'_y\, M + \mu\, M'_y = \mu'_x\, N + \mu\, N'_x$$
$$\mu\,(M'_y - N'_x) = \mu'_x\, N - \mu'_y\, M$$

Если $\mu = \mu(x) \quad \mu'_y \equiv 0$, тогда

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{M'_y - N'_x}{N}\, dx = f(x)\, dx$$
$$\ln|\mu| = \int f(x)\, dx$$
$$\mu(x) = e^{\int f(x)\, dx}$$

2) Если

$$\mu = \mu(y) \Rightarrow \mu'_x \equiv 0$$

тогда

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{M'_y - N'_x}{M}\, dy = -g(y)\, dy$$
$$\mu(y) = e^{-\int g(y)\, dy}$$

■

Пример 9.2. *Дано*

$$x\, y\, dx + (x^2 + y^2)\, dy = 0$$

Решение

$$M = xy \qquad\qquad N = x^2 + y^2$$
$$M'_y = x \qquad\qquad N'_y = 2x$$

$$\frac{M'_y - N'_x}{M} = -\frac{x}{x\,y} = -\frac{1}{y} = g(y)$$

Из замечания выше следует

$$\exists\mu = \mu(y) = e^{\int g(y)dy} = e^{\int \frac{dy}{y}} = e^{\ln y} = y$$
$$\mu = y$$

Таким образом $y = \mu$. *Домножим равенство из условия на* y.

$$x\,y^2\,dx + (x^2y + y^3)\,dy = 0$$
$$M_1 = xy^2$$
$$N_1 = x^2y + y^3$$
$$M'_{1_y} = 2\,x\,y = N'_{1_x}$$

Таким образом получили ДУ в полных диференциалах.
Решаем его

$$\begin{cases} F'_x = xy^2 \\ F'_y = x^2y + y^3 \end{cases}$$

Возьмём первое уравнение и проинтегрируем его. Причём вместо константы добавим функцию от y *(можем т.к.* $(\varphi(y))'_x = C'_x = 0$*).*

$$F(x,\,y) = \int x\,y^2\,dx = y^2\int x\,dx = \frac{y^2x^2}{2} + \varphi(y)$$

Найдём $\varphi(y)$ *с помощью* F'_y

$$(\frac{1}{2}x^2y^2 + \varphi(y))'_y = x^2y + y^3$$
$$x^2y + \varphi'_y = x^2y + y^3$$
$$\varphi'_y = y^3 \quad \varphi(y) = \frac{y^4}{4}$$

Таким образом мы нашли $F(x,\,y)$. *Ответом является следующее уравнение*

$$\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 = C$$

10. ДУ Клеро и Лагранжа

Замечание 10.1 (По поводу параграфа (от автора)). *Если до этого мы рассматривали уравнения, разрешённые относительно производной, то в данном параграфе мы рассмотрим два вида ДУ, которые таковыми не являются.*

Определение 10.1. *Пусть функция*

$$\varphi(t) \in C'(I) \quad and \quad \varphi(t) \not\equiv t$$

Тогда ДУ вида

$$y = x\,y' + \varphi(y')$$

называют дифференциальным уравнением Клеро

Замечание 10.2 (Решение ДУ Клеро). *Дано*

$$y = x\,y'(x) + \varphi(y'(x))$$

Решение.
Продиференцируем по x. Получим

$$\cancel{y'_x(x)} = \cancel{y'_x(x)} + x\,y''_{xx}(x) + \varphi'_t(y')\,y''_{xx}$$

Примечание. Пишем индекс t, так как производная от сложной функции.
Таким образом

$$y''(x + \varphi'_t) \equiv 0$$

Рассмотрим 2 случая

1) $y''_{xx} = 0$ *Получаем*

$$\begin{aligned} (y'_x)' &\equiv 0 \\ y'_x &\equiv C \\ y &= C\,x + C_1 \end{aligned}$$

Требуется проверка, так как мы могли получить лишние решения после диференцирования (это не опечатка?) (могли появиться в самом начале, когда дифференцировали по x)

Проверка. Подставляем ответ в первоначальное решение.

$$C\,x + C_1 = C\,x + \varphi(C)$$
$$C_1 = \varphi(C)$$

Таким образом общее решение ДУ Клеро выглядит так

$$y = C\,x + \varphi(C)$$

Нетрудно заметить, что решение выглядит как семейство прямых линий.

2) *Рассмотрим второй множитель*

$$x + \varphi_t'(t) \equiv 0$$
$$x \equiv -\varphi_t'(t)$$

Нашли решение относительно x теперь найдём решение относительно y.
Пусть $y' = t$, тогда из уравнения условия

$$y = x\,t + \varphi(t)$$

Подставляем x получаем

$$y = -t\,\varphi_t' + \varphi$$

Таким образом, особое решение ДУ Клеро имеет вид

$$L: \begin{cases} x = -\varphi_t'(t) \\ y = \varphi - t\,\varphi_t' \end{cases}$$

что является уравнением прямой L.

Графически решение выглядит следующим образом

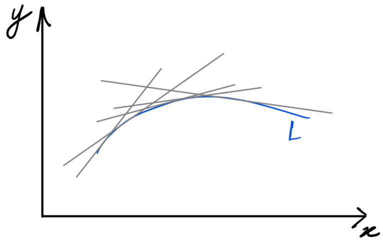


Рис. 16.

Замечание 10.3 (О геометрическом смысле ДУ Клеро). *Ищем кривую L, касательные к которой обладают некоторым свойством. Рисунок для условия в конце.*

Уравнение касательной к L в точке $(x,\ y) \in L$

$$Y - y = y'\,(X - x) = y'\,X - x\,y'$$

Уравнение относительно Y в общем виде

$$Y = k\,X + b, \quad \text{где} \quad k = y', \quad b = y - x\,y'$$

Объявим свойство касасательной как $b = \varphi(k)$. Тогда

$$\begin{aligned} y - x\,y' &= \varphi(y') \\ y &= x\,y' + \varphi(y') \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили уравнение Клеро.

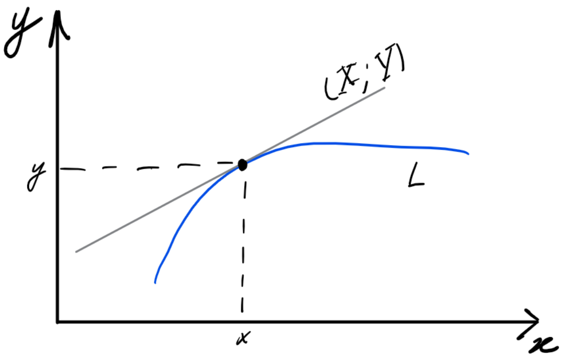


Рис. 17.

Определение 10.2. *Пусть есть функции*

$$(\varphi(t),\ \psi(t)) \in C'(I) \quad \varphi(t) \not\equiv t \text{ (функция нелинейна)}$$

Тогда уравнение вида

$$y = x\,\varphi(y') + \psi(y')$$

называют ДУ Лагранжа.

Замечание 1. Уравнение похоже на Клеро, но тут кривая связана с нормалями.

Замечание 2. Уравнение Лагранжа общий случай уравнения Клеро.

Замечание 10.4 (Как решать). *Дано*

$$y = x\,\varphi(y') + \psi(y')$$

Решение.

Введём следующую параметризацию

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Тогда формуле параметрически заданной функции получаем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = t \qquad \Rightarrow \qquad y'_t = t\,x'_t$$

Так как y'_x и y' одно и тоже, получаем из условия

$$y = x\,\varphi(t) + \psi(t)$$

Продиференцируем по t Получим

$$y'_t = x'_t\,\varphi + x\,\varphi'_t + \psi'_t$$

Помним, что $y'_t = t\,x'_t$. С учётом этого уравнение выше приобретает вид

$$\begin{aligned} x'_t\,\varphi + x\,\varphi'_t + \psi'_t &= t\,x'_t \\ x'_t\,(\varphi - t) + x\,\varphi'_t &= -\psi'_t \end{aligned}$$

Таким образом получили линейное ДУ 1-го порядка в приведённой форме. Решение (через метод Лагранжа)

$$x'_t + \frac{\varphi'_t}{\varphi - t}\,x = \frac{\psi'_t}{\varphi - t}$$

$$x'_0 + \frac{\varphi'_t}{\varphi - t}\,x_0 = 0$$

$$x'_0 = \frac{\varphi'_t}{t - \varphi}\,x_0$$

$$\frac{dx_0}{x_0} = \frac{\varphi'_t\,dt}{t - \varphi}$$

Интегрируем и получаем решение для однородного ДУ затем находим ответ для неодродного уравнения (x_1). Таким образом мы нашли

$$x = x_1(t) + C\,x_0(t)$$

Подставляем значение x в $y'_t = t\,x'_t$ или $y = x\,\varphi(t) + \psi(t)$ (оба варинта справедливы?). Получаем окончательный ответ.
Таким образом, общий интеграл ДУ Лагранжа

$$\begin{cases} x = x_1(t) + C\,x_0(t) \\ y = y_1(t) + C\,y_0(t) \end{cases}$$

Замечание. Нужно проверить

$$\frac{y'_t}{x'_t} = t$$

особое решение, когда $\varphi(t) - t = 0$

11. Диференциальные уравнения высшего порядка, доспукающие понижения порядка

Определение 11.1. *ДУ n-го порядка это уравнение вида*

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

решение которого является функцией $y = y(x),\ x \in I$, которая n раз диференцируема на I и справедливо

$$F(x, y, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

Определение 11.2. *Если*

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

то оно называется диферециалное уравнение n-го порядка рзрешённого относительно старшей производной

Пример 11.1 (Как можно описать множество решений). *Дано*

$$y^{(n)} = f(x),\ f(x) \in C(I),\ \text{где } I \text{ — интервал}$$

Для краткости запишем через эквивалентность

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) &\equiv f(x) && \\ (y^{(n-1)}(x))' &\equiv f(x) \qquad &\Leftrightarrow \qquad & y^{(n-1)}(x) = F_1(x) + C_1 \\ (y^{(n-2)}(x))'' &\equiv f(x) \qquad &\Leftrightarrow \qquad & y^{(n-2)}(x) = F_2(x) + C_1\, x + C_2 \end{aligned}$$

Из этого следует

$$\begin{aligned} y^{(n-3)} &= F_3(x) + \frac{C_1}{2}\, x^2 + C_2\, x + C_3 \\ &\dots \\ y &= F_n(x) + \frac{C_1}{(n+1)!}\, x^{n-1} + \dots + C_{n-1}\, x + C_n \\ y &= F_n(x) + C_1'\, x^{n-1} + \dots + C_{n-1}'\, x + C_n' \end{aligned}$$

где

$$F_n(x) = \underbrace{\int dx \int dx \cdots \int f(x) dx}_{n \text{ раз}}$$

Замечание. В последней строке сделана замена вида: $C_1' = \frac{C_1}{(n+1)!}\ \dots\ C_n' = C_n$.

Определение 11.3 (Общее решение). *Пусть* $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{n-1})$ *— ДУ n-го порядка.*
Тогда функция

$$y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$$

называется общим решением этого ДУ если

1) $\forall C_1, \dots, C_n$ $y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$ *является решением как функция от* x

2) *Для любого решения* $y = \varphi^*(x)$ *найдётся такой набор* $C_1^*, \dots, C_n^* \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$, *что* $\varphi^*(x) = \varphi(x, C_1^*, \dots, C_n^*)$. *То есть общее решение учитывает все наборы констант (все варианты решения)*

Определение 11.4 (Общий интеграл). *Если общее решение задано неявной функцией*

$$\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$$

то это общий интеграл

Определение 11.5 (Задача Коши для ДУ n-го порядка). *Она описывается следующим образом*

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y|_{x=x_0} = y_0, \; y'|_{x=x_0} = y_0', \; \dots, \; y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{n-1} \end{cases}$$

где функция $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ *определена в области* $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$,
а $M_0(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{n-1})$ *— внутренняя точка области* D

Теорема 11.1 (Сущ. и ед. задачи Коши для ДУ n-го порядка). *Пусть функция* $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ *определена в области* $D \in \mathbb{R}^{n+1}$ *и*

$$f(M), \; \frac{\delta f(M)}{\delta y}, \; \frac{\delta f(M)}{\delta y'}, \; \dots, \; \frac{\delta f(M)}{\delta y^{(n-1)}}$$

непреывны в некоторой окрестности $U(M_0) \subset D$, *где* $M_0(x_0, \; y_0, \; \dots, \; y_0^{(n-1)})$

Тогда $\exists \delta > 0$ *и существует единственная функция* $y = y(x)$, $x \in U_\delta(x_0)$, *которая является решением задачи Коши*

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y|_{x=x_0} = y_0, \; y'|_{x=x_0} = y_0', \; \dots, \; y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{n-1} \end{cases}$$

Доказательство. Принимаем без доказательств.
Примечание. Доказательсво аналогично случаю для одной переменной.
■

Замечание 11.1 (О ДУ допускающих понижение порядка). *Рассмотрим ДУ вида $F(x, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, т.е. не содержащих в явном виде y.*
Для них спаведлива следующая замена:

$$z = z(x) = y'(x),\ z'(x) = y''(x),\ \dots,\ z^{(n-1)}(x) = y^{(n)}(x)$$

Тогда

$$\begin{cases} F(x, z, \dots, z^{(n-1)}) = 0 \\ z = y' \end{cases}$$

Таким образом, общее решение

$$y' = z = z(x, C_1, \dots, C_{n-1})$$

Ответ

$$y = \int z(x, C_1, \dots, C_{n-1})\, dx + C_n$$

Пример 11.2. *Дано*

$$x^2\, y'' - (y')^2 = 0$$

Решение.
Замениям $z = y'$, $z' = y''$. Получаем

$$x^2\, z' - z^2 = 0$$

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2}$$

$$\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{x} - C_1$$

$$z = \frac{x}{C_1\, x + 1}$$

$$y' = \frac{x}{C_1\, x + 1}$$

$$y = \int \frac{x}{C_1\, x + 1}$$

Таким образом получаем

1) $C_1 = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2}{C_2}$

2) Для $C_1 \neq 0$ *получим*

$$y = \frac{1}{C_1} \int \frac{(C_1\, x + 1) - 1}{C_1\, x + 1}\, dx + C_2$$
$$y = \frac{x}{C_1} - \frac{1}{C_1^2}\, ln(|C_1\, x + 1|) + C_2$$

3) Частный случай $z = 0,\ y' = 0 \Rightarrow y = C_2$

Замечание 11.2. *Рассмотрим ДУ вида* $F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, *т.е. не содержащие в явном виде* $y, y', \ldots, y^{(k-1)},\ k \geqslant 2s.$
В данном случае всё аналогично предыдущему замечанию

$$z = y^{(k)}, z' = y^{(k+1)}, \ldots, z^{(n-k)} = y^{(n)}$$
$$\begin{cases} F(x, z, \ldots, z^{(n-k)}) = 0 \\ z = y^{(k)} \end{cases}$$

Таким образом, общее решение для z

$$z = z(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$$
$$F_k^{(k)} = z(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$$
$$y^{(k)} = F_k^{(k)}$$
$$y = F_k(x, C_1, \ldots, C_{n-k}) + C_{n-k+1}\, x^{k-1} + \cdots + C_n$$

Пример 11.3. *Дано*

$$x\, y''' - y'' = 0 \Rightarrow k = 2$$

Решение

$$\text{Пусть } z = y'',\ z' = y''' \text{ тогда}$$
$$x\, z' - z = 0$$
$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} + ln|C_1|$$
$$z = C_1\, x \text{Делаем обратную замену}$$
$$y'' = C_1\, x$$
$$y' = \frac{C_1\, x^2}{2} + C_2$$
$$y = \underbrace{\frac{C_1\, x^3}{6}}_{F_2(x, C_1)} + \underbrace{C_2\, x + C_3}_{\text{многочлен ст. } k-1}$$

По факту мы рассмотрели следующее уравнение в поле

$$y''' = \frac{y''}{x},\ D \in \mathbb{R}^4 \setminus \{x = 0\}$$

Замечание. Частный случай ($z = 0$) входит в общее решение. Таким образом, решение выше полное.

Замечание 11.3. *Рассмотрим ДУ вида $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ т.е. не содержащее x в явном виде.*
Аналогично делаем замену

$$\begin{gathered} y' = p(y) \\ \text{Отметим } y'_x(x) = p(y(x)) \text{ — сложная функция. Значит} \\ y'' = p'\,p \\ y''' = (p''\,p + (p')^2)\,p = f_2(p, p', p'') \\ \dots \\ y^{(k+1)} = f_k(p, p', \dots, p^{(k)}) \end{gathered}$$

Таким образом получаем следующую систему

$$\begin{cases} F(y,\ p,\ p'\,p,\ f_2(p,\ p',\ p''),\ \dots,\ f_k(p,\ p',\ \dots,\ p^{(k)})) = 0 \\ y' = p \end{cases}$$

Следовательно общее решение относительно p

$$p = p(y, C_1, \dots, C_{n-1})$$

Зная, что $y' = p$ получаем

$$\frac{dy}{p(y, C_1, \dots, C_{n-1})} = dx$$

Таким образом решение относительно x следующее

$$x = \int \frac{dy}{p(y, C_1, \dots, C_{n-1})} + C_n$$

Пример 11.4. *Дано*

$$y'' = 2\,y\,y'$$

Решение

$$\begin{aligned} y' &= p(y) \\ y'' &= p'\,p \\ p'\,p &= 2\,y\,p \\ p(p' - 2\,y) &= 0 \end{aligned}$$

Получаем два случая
Первый:

$$p = 0 \Rightarrow \; y' = 0, \; y = C_1$$

Второй:

$$\begin{aligned}
p' - 2\,y &= 0 \\
p' &= 2\,y \\
dp &= 2\,y\,dy \\
\int dp &= \int 2\,y\,dy \\
p = y' &= y^2 + C_1 \\
\frac{dy}{dx} &= y^2 + C_1 \\
\int dx &= \int \frac{dy}{y^2 + C_1} \\
x + C_2 &= \int \frac{dy}{y^2 + C_1}
\end{aligned}$$

При вычислении интеграла рассмотрим три случая

1) $C_1 = 0$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{y} &= x + C_2 \\
y &= -\frac{1}{x + C_2}
\end{aligned}$$

2) $C_1 > 0$

$$\begin{aligned}
x + C_2 &= \frac{1}{\sqrt{C_1}}\,arctg\left(\frac{y}{\sqrt{C_1}}\right) \\
y &= \sqrt{C_1}\,tg((x + C_2)\,\sqrt{C_1})
\end{aligned}$$

3) $C_1 < 0, \; C_1 = -|C_1|$

$$x + C_2 = \frac{1}{2\,\sqrt{|C_1|}}\,ln\left|\frac{y - \sqrt{|C_1|}}{y + \sqrt{|C_1|}}\right|$$

12. Линейные ДУ n-го порядка

Определение 12.1. *Пусть сущ. функции* $p_1(x),\ \ldots,\ p_n(x),\ f(x) \in C_{(a;\,b)}$. *Тогда ДУ вида*

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)\,y = f(x)$$

называется ликинейным ДУ n-го порядка с коэфициентами $p_1(x),\ \ldots,\ p_n(x)$ *и правой частью* $f(x)$

Теорема 12.1 (Сущ. и ед. задачи Коши для ЛДУ n-го порядка). *Пусть* $p_1(x),\ \ldots,\ p_n(x),\ f(x) \in C_{(a;\,b)}$.
Тогда $\forall x_0 \in (a;\,b)$, $\forall y_0,\ y_0',\ \ldots,\ y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$ *задача Коши*

$$\begin{cases} y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = f(x) \\ y|_{x=x_0} = y_0, \ldots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

имеет единственное решение $y = y(x)$, $x \in (a,\,b)$ *определённое на всём интервале* $(a;\,b)$.

Доказательство. Принимаем без доказательств

∎

Для более компактной записи введём следующее определение

Определение 12.2 (Линейный диференциальный оператор). *Перед тем как непосредственно вводить определение рассмотрим два случая.*

1) *Рассмотрим оператор диференцирования:* $\frac{d}{dx}$, *тогда его действие будет выглядеть так*

$$\frac{d}{dx}\,f(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

Данный оператор линейный, так как

) $(v+u)' = v' + u'$

) $(cu)' = c\,u'$

(Примечание. признак линейности см. во 2м сем.)

2) *Для другого оператора* $\frac{d^k}{dx^k}$ *действие будет выглядеть*

$$\frac{d^k}{dx^k}f(x) = \frac{d^k f(x)}{dx^k} = f^(k)(x)$$

Сам оператор также является линейным

Таким образом, очевидно, что в общем случае можно определить оператор

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x)E$$

это линейный диференциальный оператор n-го порядка, где

$$Ef(x) = f(x) \ E \text{ — единичный оператор}$$

Его действие на n раз диф. ф-ю $f(x)$

$$L = \frac{d^n f(x)}{dx^n} + p_1(x)\,\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x)\,\frac{df(x)}{dx} + p_n(x)\,f(x)$$

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + p_{n-1}\,(x)y' + p_n(x)\,y$$

Замечание 12.1. *Теперь ЛДУ n-го порядка можно описать так*

$$L(y) = f(x)$$

Замечание 12.2 (Линейность оператора L). .
Пусть

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x)\,\frac{d}{dx} + p_n(x)\,E$$

Тогда

1) $L(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = L(\varphi_1(x)) + L(\varphi_2(x))$

2) $L(C\,\varphi(x)) = C\,L(\varphi(x))$

3) $L(C_1\,\varphi_1(x) + C_2\,\varphi_2(x) + \dots + C_n\varphi_n(x)) = C_1\,L(\varphi_1(x)) + C_2\,L(\varphi_2(x)) + \dots + C_n\,L(\varphi_n(x))$

Доказательство.

1) Рассмотрим следующие тривиальные выражения

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) + \varphi_2(x) &= \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \\ (\varphi_1(x) + \varphi_2(x))' &= \varphi_1'(x) + \varphi_2'(x) \\ (\varphi_1(x) + \varphi_2(x))'' &= \varphi_1''(x) + \varphi_2''(x) \\ &\dots \\ (\varphi_1(x) + \varphi_2(x))^{(n)} &= \varphi_1^{(n)}(x) + \varphi_2^{(n)}(x) \end{aligned}$$

Каждую из строк соответственно умножим на $p_n,\ p_{n-1},\ \dots,\ p_1,\ 1$. Затем сложим все уравнения. И нетрудно заметить, что таким образом получаем

$$L(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = L(\varphi_1(x)) + L(\varphi_2(x))$$

2) аналогично доказывается (рассмотрим выражения $c\,\varphi, (c\,\varphi)^{(n)}$)

3) аналогично (или методом мат. индукции по k)

■

Определение 12.3.

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + p_{n-1}(x)\,y' + \dots + p_n(x)\,y = f(x) \qquad (3)$$
$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + p_{n-1}(x)\,y' + \dots + p_n(x)\,y = 0 \qquad (4)$$

ДУ (2) называют линейным однородным ДУ, а (1) лин. неоднородным ДУ
В краткой форме соответствует

$$L(y) = f(x)$$
$$L(y) = 0$$

Замечание 12.3. .
ЛОДУ — линейное однородное диференциальное уравнение
ЛНДУ — линейное неоднородное диференциальное уравнение

Теорема 12.2 (О линейности мн-ва решений ЛОДУ). *Пусть функции $p_1(x),\ \dots,\ p_n(x),\ f(x) \in C_{(a;\,b)}$ и $L(y) = y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + p_{n-1}\,(x)y' + \dots + p_n(x)\,y$. Тогда ЛОДУ $L(y) = 0$ имеет множество решений удвлетворяющие следующему свойству линейности.*
Если $\varphi_1(x),\ \dots,\ \varphi_k(x)$ решение $L(y) = 0$, то
$\forall C_1,\ \dots,\ C_k \in \mathbb{R}$ функция

$$y = C_1\,\varphi_1(x) + \dots + C_k\,\varphi_k(x)$$

является решением $L(y) = 0$

Замечание. *Количество решений произвольно и не обязательно равно n.*

Доказательство..
Дано

$$L(\varphi_1(x)) \equiv 0,\ \dots,\ L(\varphi_k(x)) \equiv 0$$

Тогда для $\forall C_1,\ \dots,\ C_k$ и свойствам из замечания 2 получаем

$$L(C_1\varphi_1(x) + \dots + C_n\,\varphi_n(x)) = C_1\,L(\varphi_1(x)) + \dots + C_n\,L(\varphi_n(x)) \equiv 0$$

Следовательно $y = C_1\,\varphi_1(x) + \dots + C_k\,\varphi_k(x)$ является решением $L(y) = 0$

■

13. Фундаментальная система решений ЛОДУ

Определение 13.1 (Линейно зависимая система функций). *Система функций* $\{\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_k(x)\}$ *определённая на* $(a;\ b)$ *называется линейно зависимой*

$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{array}{ll} \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R} & \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_k^2 \neq 0 \\ \forall x \in (a;\ b) & \alpha_1\,\varphi_1(x) + \cdots + \alpha_k\,\varphi_k(x) = 0 \end{array}$$

Примечание. Говорят: лин. зав. на интервале $(a;\ b)$*. Важно отметить, что мы рассматриваем систему на интервале.*

Пример 13.1. *Дана линейно зависимая система на* $\mathbb{R}$

$$\{x,\ x+1,\ x-1\}$$

Требуется найти набор коэфициентов.
Решение

$$\alpha\,x + \beta\,(x+1) + \gamma\,(x-1) \equiv 0$$
$$(\alpha+\beta+\gamma)\,x + \beta - \gamma \equiv 0$$

Очевидно, что решение будет тогда, когда выполнена следующая система

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

Таким образом, решение

$$\begin{cases} \alpha = -2\beta \\ \beta = \beta \\ \gamma = \beta \end{cases}$$

Ответом может быть, например, частный случай при $\beta = 1$ *тогда*
$\alpha = -2,\ \beta = 1,\ \gamma = 1$
$-2x + (x+1) + (x-1) \equiv 0$ — *система линейно зависима на* $\mathbb{R}$

Определение 13.2 (Линейно независимая система функций). *Система функций* $\{\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_k(x)\}$ *опр-на на* $(a; b)$ *называется линейно независимой на* $(a; b)$
Или

$$\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)\} \text{ не явл. лин. зав. на } (a; b)$$

Или

$$\forall x \in (a;\, b) \quad \alpha_1\, \varphi_1(x) + \cdots + \alpha_k\, \varphi_k(x) = 0$$
$$\text{Где } \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$$

Определение 13.3 (Фундаментальная система решений ЛОДУ).
.
Пусть

$$p_1(x), \ldots, p_n(x) \in C_{(a;b)}$$

ЛОДУ

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + p_{n-1}(x)\, y' + \cdots + p_n(x)\, y = 0$$

Система функций $\{\varphi_1(x),\, \ldots,\, \varphi_k(x)\}$ *определена на* $(a;\, b)$ *называется фундаментальной системой решений ЛОДУ* $L(y) = 0$
$\Leftrightarrow$

1) $L(\varphi_1(x)) \equiv 0, \ldots, L(\varphi_n(x)) \equiv 0$
   Где $x \in (a;\, b)$ *и* $\varphi_1,\, \ldots,\, \varphi_n$ *— решения ЛОДУ*

2) *число функций равно* $n = \{$*порядок ЛОДУ*$\}$

3) $\{\varphi_1(x),\, \ldots,\, \varphi_n(x)\}$ *- лин. незав. система на* $(a;\, b)$

Определение 13.4. *Пусть функции* $\varphi_1(x),\, \ldots,\, \varphi_n(x)$ n *раз дифф-мая функция на* $(a;\, b)$
Тогда функциональный определитель

$$W(x) = W(\varphi_1,\, \ldots,\, \varphi_n) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \ldots & \varphi_n \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \ldots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

называется определителем Вронского или Вронскиан для системы функций $\{\varphi_1(x),\, \ldots,\, \varphi_n(x)\}$

Теорема 13.1. *В условиях определения 4, если система функций*

$$\{\varphi_1(x),\, \ldots,\, \varphi_n(x)\} \quad \text{линейно зависима на } (a;\, b)$$

то

$$\forall \alpha \in (a;\, b), \quad W(x) = W(\varphi_1,\, \ldots,\, \varphi_n) = 0$$

Доказательство. $\exists\, \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$, причём $\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 \neq 0$ а также

$$\forall x \in (a;\, b) \quad \alpha_1\, \varphi_1(x) + \cdots + \alpha_k\, \varphi_k(x) = 0$$

Зафиксируем один из коэфициентов и будем считать, что $\alpha_1 \neq 0$ (в случаее, если другой коэфициент не равен нулю, то его можно поменять местами с α_1)

$$W = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \ldots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha_1} \begin{pmatrix} \alpha_1\, \varphi_1 & \ldots & \varphi_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1\, \varphi_1^{(n-1)} & \ldots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} =$$

$=$ [Добавляем к первому столбцу столбцы умноженные на $\alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$] $=$

$$= \frac{1}{\alpha_1} \begin{pmatrix} \alpha_1\, \varphi_1 + \cdots + \alpha_n\, \varphi_n & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1\, \varphi_1^{(n-1)} + \cdots + \alpha_n\, \varphi_n^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \ldots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\alpha_1} \begin{pmatrix} \alpha_1\, \varphi_1 + \cdots + \alpha_n\, \varphi_n & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\alpha_1\, \varphi_1 + \cdots + \alpha_n\, \varphi_n)^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \ldots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\alpha_1} \begin{pmatrix} 0 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n \\ 0 & \varphi_2' & \ldots & \varphi_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \varphi_2^{(n-1)} & \ldots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} = 0 \qquad \forall x \in (a;\, b)$$

■

Замечание 13.1. *Пусть $\{\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)\}$ n раз диференцируемая система функций на $(a;\ b)$, $W(x) = W(\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x))$ — вронскиан системы $\{\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)\}$*

Тогда если $\exists x_0 \in (a;\ b)$ $W(x_0) \neq 0$ то система $\{\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)\}$ линейна независима на $(a;\ b)$

Доказательство. Доказательство от противного.
Пусть $W(x_0) \neq 0$ и система линейно зависима на промежутке. Следовательно теореме выше получаем, что вронскиан равен нулю $\forall x \in (a\ b)$, следовательно, в частности, $W(x_0) = 0$, что противоречит первоначальному условию $W(x_0) \neq 0$. Таким образом, получаем противоречие и следовательно система линейно независима на интервале. ■

Вспомним теорему 1 из предыдущего параграфа (она нужна для доказательства следующей теоремы)

Теорема 13.2. *Пусть* $p_1(x),\ \ldots,\ p_n(x),\ f(x) \in C_{(a;\,b)}$.
Тогда $\forall x_0 \in (a;\, b)$, $\forall y_0,\ y_0',\ \ldots,\ y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$ *задача Коши*

$$\begin{cases} L(y) = y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)\, y = f(x) \\ y|_{x=x_0} = y_0, \ldots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

имеет единственное решение $y = y(x)$, $x \in (a,\, b)$ *определённое на всём интервале* $(a;\, b)$.

Теорема 13.3. *Пусть в условиях теоремы выше функции* $\{\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)\}$ *является решением ЛОДУ* $L(y) = 0$ *и* $\exists x_0 \in (a;\, b)$, $W(x_0) = 0$.

Тогда $\{\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)\}$ *линейно зависима на всём промежутке и (по т. 1)* $\forall x \in (a,\, b)\ W(x) = 0$

Доказательство. Рассмотрим алгебраическую систему уравнений относительно $C_1, \ldots, C_n$, получим

$$\begin{cases} C_1\, \varphi_1(x_0) + \cdots + C_n\, \varphi_n(x_0) = 0 \\ C_1\, \varphi_1'(x_0) + \cdots + C_n\, \varphi_n'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ C_1\, \varphi_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + C_n\, \varphi_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

n уравнений относительно n переменных $C_1, \ldots, C_n$ и $\Delta = W(x_0) = 0$. Значит ранг матрицы меньше n, следовательно существует бесконечное множество решений (см. 2 сем.), то есть

$$\exists (C_1^*,\ \ldots,\ C_n^*) \neq (0,\ \ldots,\ 0)$$

Рассмотрим

$$\varphi^*(x) = C_1^*\, \varphi_1(x_0) + \cdots + C_n^*\, \varphi_n(x_0)$$

$\varphi^*(x)$ — является решением задачи Коши

$$\begin{cases} L(y) = 0 \\ y|_{x=x_0} = 0, \ldots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = 0 \end{cases}$$

То есть

$$\varphi^*(x_0) = 0,\ (\varphi^*)'(x_0) = 0,\ \ldots,\ (\varphi^*)^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Очевидно, что для $y \equiv 0$, также является решением тойже задачи Коши на интервале. Примечание $L(y) = y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)\, y$. Из всего этого следует

$$\varphi^*(x_0) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in (a;\ b) \quad C_1^*\, \varphi_1(x) + \cdots + C_n^*\, \varphi_n(x) = 0$$

где $(C_1^*,\ \ldots,\ C_n^*) \neq (0,\ \ldots,\ 0)$.
Значит по определению линейно зависимой системы, получаем что система $\{\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)\}$ линейно зависима на $(a;\ b)$ ■

Теорема 13.4 (О существовании ФСР ЛОДУ n-го порядка). *Пусть функции $p_1(x),\ \ldots,\ p_n(x) \in C_{(a;\,b)}$, тогда существует набор функций $\{\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)\}$ являющийся ФСР для*

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)\, y = 0$$

Доказательство. Возьмём $x_0 \in (a;\ b)$ и рассмотрим n задач Коши вида:

$$\begin{array}{llll}
L(y) = 0 & L(y) = 0 & \ldots & L(y) = 0 \\
y|_{x=x_0} = 1 & y|_{x=x_0} = 0 & \ldots & y|_{x=x_0} = 0 \\
y'|_{x=x_0} = 0 & y'|_{x=x_0} = 1 & \ldots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ldots & y^{n-2}|_{x=x_0} = 0 \\
y^{n-1}|_{x=x_0} = 0 & y^{n-1}|_{x=x_0} = 0 & \ldots & y^{n-1}|_{x=x_0} = 1 \\
y = \varphi_1(x) & y = \varphi_2(x) & \ldots & y = \varphi_n(x) \\
x \in (a;\, b) & x \in (a;\, b) & \ldots & x \in (a;\, b)
\end{array}$$

Таким образом имеем следующий вронскиан

$$W(x_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

Из того, что определитель не равен нулю следует

1) $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n$ — решения $L(y) = 0$ на $x \in (a;\, b)$

2) Количество решений равно порядку ДУ ($L(y) = 0$), которое равно n

3) $\{\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n\}$ — линейно независимы на $(a;\, b)$ (по следствию к теореме 1)

Из этого по определению 3 следует, что $\{\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n\}$ — ФСР $L(y) = 0$
■

Теорема 13.5 (Формула Лиувилля). *Пусть* $p_1(x),\ \ldots,\ p_n(x) \in C_{(a;\,b)}$ *и* $\{\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)\}$ *— ФСР ЛОДУ* $L(y) = 0$.

Возьмём $x_0 \in (a;\ b)$ *и обозначим через* $W_0 = W(x_0) \neq 0$. *Тогда справедлива формула Лиувилля*

$$W(x) = W_0\, e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)\,dt}$$

Доказательство. Для наглядности рассмотрим случай $n = 2$, тогда

$$L(y) = y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = 0$$

Пусть $\{\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)\}$ — ФСР, то есть

$$\begin{cases} \varphi_1'' + p_1\,\varphi_1' + p_2\,\varphi_1 = 0 \\ \varphi_2'' + p_1\,\varphi_2' + p_2\,\varphi_2 = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим вронскиан и его производную.

$$W(x) = \begin{cases} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{cases} = \varphi_1\,\varphi_2' - \varphi_2\,\varphi_1'$$

$$W'(x) = \cancel{\varphi_1'\,\varphi_2'} + \varphi_1\,\varphi_2'' - \varphi_1''\,\varphi_2 - \cancel{\varphi_1'\,\varphi_2'}$$

Воспользуемся системой выше для замены φ_1'' и φ_2''. Получим.

$$\begin{cases} \varphi_1'' = -p_1\,\varphi_1' - p_2\,\varphi_1 \\ \varphi_2'' = -p_1\,\varphi_2' - p_2\,\varphi_2 \end{cases}$$

$$W'(x) = \varphi_1\,(-p_1\,\varphi_2' - p_2\,\varphi_2) + \varphi_2(p_1\,\varphi_1' + p_2\,\varphi_1)$$

$$W'(x) = -p_1\,(\varphi_1\,\varphi_2' - \varphi_1'\,\varphi_2) = -p_1\,W$$

Решаем тривиальное ДУ

$$\frac{dW}{dx} = -p_1(x)\,W$$

Очевидно

$$\int_{x_0}^{x} ln(W) = -\int_{x_0}^{x} p_1(t)\,dt$$

Ответ

$$W(x) = W(x_0)^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)\,dt}$$

■

14. Общее решение линейного ДУ n-го порядка

Теорема 14.1 (Об общем решении ЛОДУ n-го порядка). *Пусть*

$$p_1(x),\ \dots,\ p_n(x)\ \in C_{(a;\,b)}\ \textit{и}\ \{\varphi_1(x),\ \dots,\ \varphi_n(x)\}$$

ФСР ЛОДУ

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \dots + p_1\,y = 0$$

Тогда функция

$$y = C_1\,\varphi_1(x) + \dots + C_n\,\varphi_n(x)$$

описывает множетсво всех решений ЛОДУ $L(y) = 0$, то есть

1) $\forall\ C_1,\ \dots,\ C_n\ \in \mathbb{R} \qquad y = C_1\,\varphi_1 + \dots + C_n\,\varphi_n$ *— решение* $L(y) = 0$

2) $\forall y = \varphi^*(x)$ *— решение* $L(y) = 0$*. Тогда*

$$\exists\ C_1^*,\ \dots,\ C_n^*\ \in \mathbb{R} \quad x \in (a;\ b)$$
$$\varphi^*(x) = C_1^*\,\varphi_1 + \dots + C_n^*\,\varphi_n$$

Доказательство.

1) Дано $L(\varphi_1) = 0,\ \dots,\ L(\varphi_n) = 0$

$$\forall C_1,\ \dots,\ C_n \quad L(C_1\,\varphi_1 + \dots + C_n\,\varphi_n) = C_1\ \underbrace{L(\varphi_1)}_{=0} + \dots + C_n\ \underbrace{L(\varphi_n)}_{=0}$$

$$\Rightarrow\ y = C_1\,\varphi_1(x) + \dots + C_n\,\varphi_n(x) \quad \text{— решение } L(y) = 0, x \in (a;\ b)$$

2) Пусть $y = \varphi^*(x)$ — решение $L(y) = 0 \quad x \in (a;\ b)$
Возьмём точку $x_0 \in (a;\ b)$ и скажем, что

$$y_0 = \varphi_1^*(x_0),\ \dots,\ y_0^{(n-1)} = (\varphi_n^*)^{(n-1)}(x_0)$$

Тогда $y = \varphi^*(x)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} L(y) = y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)\,y = f(x) \\ y|_{x=x_0} = y_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

С другой строны будем искать решение этой задачи Коши в виде
$y = C_1\,\varphi_1(x) + \dots + C_n\,\varphi_n(x)$
тогда решение имеет вид

$$\begin{cases} C_1\,\varphi_1(x_0) + \dots + C_n\,\varphi_n(x_0) = y_0 \\ C_1\,\varphi_1'(x_0) + \dots + C_n\,\varphi_n'(x_0) = y_0' \\ \vdots \\ C_1\,\varphi_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n\,\varphi_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Это система n алгебраических уравнений относительно n переменных $C_1,\ \dots,\ C_n$, определитель которой $\Delta = W(x_0) \neq 0$, так как мы рассматриваем ФРС (система уравнений ленейно независима по определению).

По т. Крамера следует, что существует решение и притом единственное, то есть

$$\exists (C_1^*,\ \dots,\ C_n^*)$$

Следовательно $y = C_1^*\,\varphi_1(x) + \dots + C_n^*\,\varphi_n(x)$ — решение задачи Коши и для $\varphi^*(x)$ по теореме о существовании и единственности задачи Коши.

■

Теорема 14.2 (Об общем реешении ЛНДУ n-го порядка). *Пусть $p_1(x),\ \dots,\ p_n(x),\ f(x) \in (a;\,b)$ и $\{\varphi_1(x),\ \dots,\ \varphi_n(x)\}$ — ФСР ЛОДУ*

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)\,y = 0 \qquad x \in (a;\,b)$$

Обозначим через $\psi(x)$ некоторое решение ЛНДУ $L(y) = f(x)$. Тогда общее решение ЛНДУ имеет вид

$$y = \psi(x) + C_1\,\varphi_1(x) + \dots + C_n\,\varphi_n(x)$$

То есть

1) $\forall\, C_1,\ \dots,\ C_n\ \in \mathbb{R}\quad y = \psi + C_1\,\varphi_1 + \dots + C_n\,\varphi_n$ *является решением* $L(y) = f(x)$

2) *Для любого решения $\psi^*(x)$ ЛНДУ $L(y) = f(x)$*
$\exists\, C_1,\ \dots,\ C_n \quad x \in (a;\,b) \quad \psi^* = \psi + C_1^*\,\varphi_1 + \dots + C_n^*\,\varphi_n$

Доказательство.
$\forall x_0 \in (a;\, b),\ \exists y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)},\ \psi(x)$ — решение здачи Коши

$$\begin{cases} L(y) = f(x) \\ y|_{x=x_0} = y_0,\ y'|_{x=x_0} = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}, \end{cases}$$

По теореме о существовании и единственности задачи Коши

1) Аналогично доказательству выше имеем

$\forall\, C_1,\ \ldots,\ C_n$
$L(\psi + C_1\,\varphi_1 + \cdots + C_n\,\varphi_n) = \underbrace{L(\psi)}_{=f(x)} + C_1\,\underbrace{L(\varphi_1)}_{=0} + \cdots + C_n\,\underbrace{L(\varphi_n)}_{=0} = f(x)$

2) $y = \psi^*(x)$ решение $L(\psi^*) = f(x)$, с другой стороны $L(\psi) = f(x)$ тоже решение (по усл.)
Тогда рассмотрим следующее выражение

$$L(\psi^* - \psi) = [\text{по св-ву лин. оп.}] = L(\psi^*) - L(\psi) = f(x) - f(x) = 0$$

Значит $L(\psi^* - \psi)$ — ЛОДУ. Следовательно по теореме 1 для ЛОДУ справедливо

$$\exists\, C_1^*,\ \ldots,\ C_n^* \quad \forall x \in (a;\, b)\varphi^* = \psi^* - \psi = C_1^*\,\varphi_1 + \cdots + C_n^*\,\varphi_n$$

Нетрудно заметить и вывести

$$\psi^* = \psi + C_1^*\,\varphi_1 + \cdots + C_n^*\,\varphi_n$$

■

Замечание 14.1. *(Формула Даламбера) Общее решение неоднородного ДУ ищется по формуле Даламбера:*

$$y_{о.н} = y_{ч.н} + y_{о.о}$$

15. Метод вариации произвольных постоянных

Теорема 15.1. *Пусть*

$$p_1(x),\ \ldots,\ p_n(x),\ f(x) \in C_{(a;\,b)}$$

и изветна ФСР $\{\varphi_1(x), \ldots\ \varphi_n(x)\}$ *ЛОДУ*

$$L(y) = y^{(n)} + y^{(n-1)}\, p_1(x) + \cdots + y\, p_n(x) = 0$$

Ищем решение ЛНДУ $L(x) = f(x)$ *в виде*

$$y = C_1(x)\, \varphi_1(x) + \cdots + C_n(x)\, \varphi_n(x)$$

где функции $\{C_1(x), \ldots, C_n(x)\}$ *диференцируемые на* $(a;\, b)$ *и* $\{C_1'(x), \ldots, C_n'(x)\}$ *удовлетворяет следующим свойствам алгебраических уравнений*

$$\begin{cases} C_1'\, \varphi_1'(x) + \cdots + C_n'\, \varphi_n'(x) = 0 \\ C_1'\, \varphi_1'(x) + \cdots + C_n'\, \varphi_n'(x) = 0 \\ \vdots C_1'\, \varphi_1^{(n-2)}(x) + \cdots + C_n\, \varphi_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ C_1'\, \varphi_1^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n\, \varphi_n^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases}$$

Тогда такая система имеет решения

$$C_1' = u_1(x),\ \ldots,\ C_n = u_n(x)$$

$$y = \left[\left(\varphi_1(x) \int u_1(x)\, dx\right) + \cdots + \left(\varphi_n(x) \int u_n(x)\, dx\right)\right] + \left[C_1\, \varphi_1(x) + \cdots + C_n\, \varphi_n(x)\right]$$

где $C_1,\ \ldots,\ C_n$ *— константы.*
Примечание. Тут две суммы: одна с интегралом, другая без

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$y = C_1\, \varphi_1 + \cdots + C_n\, \varphi_n$$

Возьмём n производных, причём заметим, что φ, и C_1 зависимы от x.

Тогда получаем

$$
\begin{aligned}
y &= C_1\,\varphi_1 + \dots + C_n\,\varphi_n \\
y' &= C_1\,\varphi_1' + \dots + C_n\,\varphi_n' + \underbrace{C_1'\,\varphi_1 + \dots + C_n'\,\varphi_n}_{\equiv 0} \\
y'' &= C_1\,\varphi_1'' + \dots + C_n\,\varphi_n'' + \underbrace{C_1'\,\varphi_1' + \dots + C_n'\,\varphi_n'}_{\equiv 0} \\
&\vdots \\
y^{(n-2)} &= C_1\,\varphi_1^{(n-2)} + \dots + C_n\,\varphi_n^{(n-2)} + \underbrace{C_1'\,\varphi_1^{(n-3)} + \dots + C_n'\,\varphi_n^{(n-3)}}_{\equiv 0} \\
y^{(n-1)} &= C_1\,\varphi_1^{(n-1)} + \dots + C_n\,\varphi_n^{(n-1)} + \underbrace{C_1'\,\varphi_1^{(n-2)} + \dots + C_n'\,\varphi_n^{(n-2)}}_{\equiv f(x)}
\end{aligned}
$$

Таким образом

$$
\begin{aligned}
p_n\ * &\mid y = C_1\,\varphi_1 + \dots + C_n\,\varphi_n \\
p_{n-1}\ * &\mid y' = C_1\,\varphi_1' + \dots + C_n\,\varphi_n' \\
p_{n-2}\ * &\mid y'' = C_1\,\varphi_1'' + \dots + C_n\,\varphi_n'' \\
&\vdots \\
p_1\ * &\mid y^{(n-2)} = C_1\,\varphi_1^{(n-2)} + \dots + C_n\,\varphi_n^{(n-2)} \\
1\ * &\mid y^{(n-1)} = C_1\,\varphi_1^{(n-1)} + \dots + C_n\,\varphi_n^{(n-1)} + f(x)
\end{aligned}
$$

Сложим все функции, получим

$$
L(y) = C_1\ \underbrace{L(\varphi_1)}_{\equiv 0 (\text{ФСР})} + \dots + C_n\ \underbrace{L(\varphi_n)}_{\equiv 0 (\text{ФСР})} + f(x)
$$

Таким образом $L(y) = f(x)$. Значит уравнение в самом начале является решением ЛНДУ.

Теперь рассмотрим

$$
\begin{cases}
C_1'\,\varphi_1 + \dots + C_n'\,\varphi_n = 0 \\
C_1'\,\varphi_1' + \dots + C_n'\,\varphi_n' = 0 \\
\vdots \\
C_1'\,\varphi_1^{(n-3)} + \dots + C_n'\,\varphi_n^{(n-3)} = 0 \\
C_1'\,\varphi_1^{(n-2)} + \dots + C_n'\,\varphi_n^{(n-2)} = f(x)
\end{cases}
$$

Это система из n алгебраических уравнений относительно n переменных $C_1', \ldots, C_n'$. Видим, что определитель матрицы $\Delta = W(x) \neq 0$ $\forall x \in (a;\, b)$ (Т.к. $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ — ФСР). Следовательно, по теореме Крамера существует единственное решение

$$C_1' = u_1(x),\ \ldots,\ C_n' = u_n(x)$$

Таким образом

$$C_1(x) = \int u_1(x)\,dx + C_1,\ \ldots,\ C_n(x) = \int u_n(x)\,dx + C_n$$

Значит решение ЛНДУ

$$y = \left(\int u_1(x)\,dx + C_1\right)\varphi_1(x) + \cdots + \left(\int u_n(x)\,dx + C_n\right)\varphi_n(x)$$

Что аналогично

$$y = \left[\left(\varphi_1(x)\int u_1(x)\,dx\right) + \cdots + \left(\varphi_n(x)\int u_n(x)\,dx\right)\right] + [C_1\,\varphi_1(x) + \cdots + C_n\,\varphi_n(x)]$$

■

Замечание 15.1 (Нахождение произвольных постоянных и описание ответа). *Пользуясь методом Крамера* $x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$ *получаем*

$$u_k(x) = \frac{1}{W(x)}\begin{bmatrix} \varphi_1 & \ldots & 0 & \ldots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \ldots & 0 & \ldots & \varphi_n' \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \ldots & f(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)} \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^{(k+n)}\frac{W(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}, \varphi_{k+1} \ldots, \varphi_n)}{W(x)} f(x) =$$

$$= \frac{(-1)^{(k+n)} f(x)\,W_k(x)}{W(x)}$$

Для описания решения введём вспомогательную функцию

$$G(x,\, t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+n}\varphi_k(x)\,\frac{W_k(t)}{W(t)}$$

Примечание. *Переменная t введена, чтобы «разграничить» интегрируемые Вронскианы и $\varphi(x)$, который за интегралом. Тогда решение имеет вид*

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^{x} G(x,\, t)\, f(t)\, dt}_{y_{ч.н.}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k\,\varphi_k(x)}_{y_{о.о.}}$$

Пример 15.1. *Дано*

$$x\,y'' + y' = x$$

Решение.
Приведём к каноническому виду (делим на x)

$$y'' + \frac{y'}{x} = 1$$

Получили $L(y)$. Решаем в два этапа

1) *Рассматриваем однородное уравнение $L(y) = 0$*

$$y'' + \frac{y'}{x} = 0$$
$$y' = z, \qquad y'' = z'$$
$$z' + \frac{z}{x} = 0$$
$$\int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dx}{x}$$
$$\ln|z| = -\ln|x| + \ln C_1$$
$$z = y' = \frac{C_1}{x}$$
$$y = y_{o.o.} = C_1 \ln|x| + C_2$$

2) *Решаем неоднородное уравнение с произволными постоянными $C_1(x),\ C_2(x)$ и $\varphi_1,\ \varphi_2$*

$$y = C_1(x) \ln|x| + C_2(x)$$
$$\varphi_1 = \ln|x|, \qquad \varphi_2 = 1$$
$$\varphi_1' = \frac{1}{x}, \qquad \varphi_2' = 0$$

Накладываем 1 дополнительное условие $C_1' \ln|x| + C_2' = 0$

$$\begin{cases} C_1' \ln|x| + C_2' = 0 \\ C_1' \frac{1}{x} + C_2' 0 = 1 \quad (\textit{Из условия}) \end{cases}$$

Решаем

$$\begin{cases} C_1' \, ln|x| + C_2' = 0 \\ C_1' \, \frac{1}{x} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2' = -C_1' \, ln|x| \\ C_1' = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2' = -x \, ln|x| \\ C_1(x) = \frac{x^2}{2} + C_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2(x) = -\int x \, ln|x| \, dx \\ C_1(x) = \frac{x^2}{2} + C_1 \end{cases}$$

$$C_2(x) = -\int x \, ln|x| \, dx = \left[u = ln|x|, \quad dv = x \, dx; \qquad du = \frac{1}{x}, \quad v = \frac{x^2}{2} \right] =$$

$$= -\frac{x^2}{2} \, ln|x| + \frac{x^2}{4} + C_2$$

Зная значения $C_1(x)$ *и* $C_2(x)$ *получаем*

$$y = \frac{x^2}{2} \, ln|x| - \frac{x^2}{2} \, ln|x| + \frac{x^2}{4} + C_1 \, ln|x| + C_2$$

Ответ

$$y = \frac{x^2}{4} + C_1 \, ln|x| + C_2$$

16. Лин. диф. ур-я n-го порядка с постоянными коэфициентами

Определение 16.1.
ДУ вида

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + a_{n-1}(x)\, y' + \cdots + a_n(x)\, y = f(x)$$

где $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *(постояные),* $f(x) \in C_{(a;\,b)}$ *называются линейные ДУ n-го порядка с постояными коэфициентами (т.е. не зависящими от* x*)*

Замечание 16.1 (Основа метода реш. ДУ $L(y) = 0$).
Будем искать решения вида $y = e^{\alpha\, x}$*, тогда*

$$\begin{aligned} a_n \;*\; &|\; y = e^{\alpha x} \\ a_{n-1} \;*\; &|\; y' = \alpha e^{\alpha x} \\ &\vdots \\ a_1 \;*\; &|\; y^{(n-1)} = \alpha^{n-1} e^{\alpha x} \\ 1 \;*\; &|\; y^{(n)} = \alpha^n e^{\alpha x} \end{aligned}$$

Складываем, получаем

$$L(y) = e^{\alpha x}\, P(\alpha), \quad \text{где} \quad P(\alpha) = \alpha^n + a_1\, \alpha^{n-1} + \cdots + a_n$$

По условию $e^{\alpha x}$ *решение* $L(y) = 0$*. Это равносильно следующему утверждению* $P(\alpha) = 0$*, то есть* α *- корень многочлена* $P(\lambda)$*, где* λ *- переменая*

Определение 16.2.
Пусть

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + a_{n-1}(x)\, y' + \cdots + a_n(x)\, y = 0$$

— ЛОДУ с постоянными коэффициентами $a_1, \ldots, a_n$
Тогда многочлен

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\, \lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

называется характеристическим многочленом ЛОДУ $L(y) = 0$

Теорема 16.1 (ФСР, случай простых корней $P(\lambda)$).
Пусть

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\,\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

— характерестический многочлен ЛОДУ $L(y) = 0$ с постоянными коэффициентами.
Тогда если все корни $P(\lambda)$ вещественны и различны, то есть $\{\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n\}$ корни $P(\lambda)$ причём $\alpha_i \neq \alpha_j (i \neq j)$, то ФСР $L(y) = 0$ выглядит так

$$\{e^{\alpha_1 x},\ e^{\alpha_2 x},\ \ldots,\ e^{\alpha_n x}\}$$

Доказательство.
Для начала вспомним определение ФСР

1) $L(e^{\alpha_i x}) = 0 \qquad i = 1,\ \ldots,\ n$
2) функциий n-штук и это равно порядку ДУ $L(y) = 0$
3) Система функций $\{e^{\alpha_1 x},\ e^{\alpha_2 x},\ \ldots,\ e^{\alpha_n x}\}$ – линейно независима

Справедливость пункта 1 следует из замечания 1, соблюдение 2 – из условия. Значит требуется доказать корректность пункта 3.

Последнее будем доказывать от противного. Пусть система линейно зависима и пусть один из коэфициетов $C_1 \neq 0$. Рассмотрим

$$C_1\,e^{\alpha_1 x} + \cdots + C_n\,e^{\alpha_1 x} \equiv 0 \quad \mid\ \div\, e^{\alpha_1 x}$$
$$C_1\,e^{(\alpha_1 - \alpha_n)\,x} + \cdots + C_{n-1} e^{(\alpha_{n-1} - \alpha_n)\,x} + 1 \equiv 0 \quad \mid \mathrm{d}f$$
$$C_1\,(\alpha_1 - \alpha_n)\,e^{(\alpha_1 - \alpha_n)\,x} + \cdots + C_{n-1}\,(\alpha_{n-1} - \alpha_n)\,e^{(\alpha_{n-1} - \alpha_n)\,x} \equiv 0$$

Опять делим и диференцируем, и так до тех пор пока не получим

$$C_1\,\underbrace{(\alpha_1 - \alpha_n)}_{\neq 0}\,\underbrace{(\alpha_1 - \alpha_{n-1})}_{\neq 0}\,\ldots\,\underbrace{(\alpha_1 - \alpha_2)}_{\neq 0}\,e^{(\alpha_1 - \alpha_n)\,x} \equiv 0$$

Разности не равны нулю, так как все корни различны. Тогда остаётся только $C_1 = 0$, но в самом начале мы сказали, что $C_1 \neq 0$, получаем противоречие.

Значит $C_1 = \cdots = C_n = 0$, следовательно система линено не зависима, и она является ФСР.
∎

Пример 16.1.
Дано

$$y''' - 3y'' + 2y' = 0$$

Решение

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 3\,\lambda^2 + 2\,\lambda = \lambda\,(\lambda - 1)\,(\lambda - 2)$$

Таким образом, корни $P(\lambda)$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = 2$$

Значит ФСР и общее решение выглядят следующим образом

$$\{1, e^x, e^{2x}\} \qquad y = c_1 + c_2\,e^x + c_3\,e^{2x}$$

Замечание 16.2 («Напоминание»).
Характерестический многочлен

$$P(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{k_1}\ \ldots\ (\lambda - \alpha_s)^{k_s}\,(\lambda^2 + p_1\lambda + q_1)^{m_1} \ldots (\lambda^2 + p_t\,\lambda + q_t)^{m_t}$$

разложенный на линейные и квадратиные корни, где

1) *$\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_s$ все попарно различные вещественные корни соответствующей кратности $k_1,\ \ldots,\ k_s \quad s \geqslant 0 \quad s \in \{N \cup \{0\}\}$*

2) *Комплексные корни*

$$\lambda^2 + p\,\lambda + q = (\lambda - z_j)\,(\lambda - \bar{z}_j)$$
$$z_j = \alpha_{s+j} + i\,\beta_j \quad \bar{z}_j = \alpha_{s+j} - i\,\beta_j \quad \beta_j \geqslant 0$$

а $(z_j\ \bar{z}_j)$ — попарно различные пары комплексно сопряжённых корней кратности $m_j \quad j = 1,\ \ldots,\ t \quad t \geqslant 0 \quad t \in \{N \cup \{0\}\}$

Замечание 16.3. *Это «напоминание», так как оно анлогично критерию кратности из 2-го семестра.*
Замечание потребуется позже.

Лемма 16.1 (о действии линейного ДУ оператора на произведение).

Пусть

$$L(y) = y^{(n)} + a_1\,y^{(n-1)} + a_{n-1}\,y' + \cdots + a_n\,y \qquad y^{(n)} \mapsto \lambda^k \quad y \mapsto 1$$

Характеристический многочлен

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\,\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

Тогда $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ *и* $\forall u(x)$ *– n раз диференцируемой справедлива формула*

$$\begin{aligned} L(u(x)\, e^{\alpha x}) = e^{\alpha\, x}\, [u(x)\, P(\alpha) + \frac{1}{1!}\, u'(x)\, P'(\alpha) + \\ + \frac{1}{2!}\, u''(x)\, P''(\alpha) + \\ + \cdots + \\ + \frac{1}{n!}\, u^{(n)}(x)\, P^{(n)}(\alpha)] \end{aligned}$$

Доказательство.
Докажем случай для n=2,
тогда ЛОДУ и характеристический многочлен принимают следующий вид

$$L(y) = y'' + a_1\, y' + a_2\, y \qquad P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\, \lambda + a_2$$

решение и его производные

$$\begin{aligned} a_2 \mid \quad & y = u\, e^{\alpha x} \\ a_1 \mid \quad & y' = u'\, e^{\alpha x} + u\, \alpha e^{\alpha x} \\ 1 \mid \quad & y'' = u''\, e^{\alpha x} + 2\, u'\, \alpha\, e^{\alpha x} + u\, \alpha^2\, e^{\alpha x} \end{aligned}$$

Складываем всё и получаем

$$\begin{aligned} a_2\, y + a_1\, y' + y'' &= e^{\alpha\, x}\, (a_2\, u + a_1\, u' + a_1\, u\, \alpha + u'' + 2\, u'\, \alpha + u\, \alpha^2) \\ L(y) &= e^{\alpha\, x}\, (a_2\, u + u\, \alpha^2 + a_1\, u\, \alpha + a_1\, u' + 2\, u'\, \alpha + u'') \\ L(y) &= e^{\alpha\, x}\, (u\, (\alpha^2 + a_1\, \alpha + a_2) + u'\, (2\, \alpha + a_1) + u'') \end{aligned}$$

В нашем случае характеристический многочлен и его производные имеют следующий вид

$$\begin{aligned} & P_n(\lambda) = \lambda^2 + a_1\, \lambda + a_2 \\ & P_n'(\lambda) = 2\, \lambda + a_1 \\ & P_n''(\lambda) = 2 \end{aligned}$$

Делаем соответствующие замены в $L(y)$, получаем

$$L(y) = e^{\alpha x}\, \left(P(\alpha) + u'\, P'(\alpha) + \frac{1}{2}\, u^n P''(\alpha) \right)$$

■

Замечание 16.4 (Как работает доказательство в общем случае).
Не требуется на экзамене.
Производные корня раскладываются с помощью биномиальных коэффициентов. Затем аналогичным образом получаем $L(y)$. Потом мы видим, что характеристический многочлен и его производные в общем случае имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
P_n(\lambda) &= \lambda^n + a_1\,\lambda^{n-1} + \dots + a_n \\
P_n'(\lambda) &= n\,\lambda^{n-1} + a_1\,(n-1)\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \\
P_n''(\lambda) &= n\,(n-1)\,\lambda^{n-2} + a_1\,(n-1)\,(n-2)\,\lambda^{n-1} + \dots + 2!\,a_{n-2} \\
&\vdots \\
P_n^{(n)}(\lambda) &= n!
\end{aligned}$$

И из замены в $L(y)$ на формулы выше мы получаем справедливость теоремы в общем случае.

Теорема 16.2.
Пусть α корень кратности $k \geqslant 1$ характеристического многочлена $P(\lambda)$ ЛОДУ

$$L(y) = y^{(n)} + a_1\,y^{(n-1)} + a_{n-1}\,y' + \dots + a_n\,y = 0$$

с постоянными коэффициентами $\alpha_1, \ \dots, \ \alpha_n$
Тогда функции

$$\underbrace{\{e^{\alpha\,x}, \ x\,e^{\alpha\,x}, \ \dots, \ x^{k-1}\,e^{\alpha\,x}\}}_{k\ штук}$$

образуют линейно независимую систему решений $L(y) = 0$

Доказательство.
Пусть решение α, имеет вид

$$y = x^l\,e^{\alpha\,x} \qquad 0 \leqslant l \leqslant k-1$$

Тогда производные множителя у корня имеют следующий вид

$$u = x^l, \quad u' = l\,x^{l-1}, \quad \dots, \quad u^{(l)} = l!, \quad u^{(l+1)} = 0, \quad \dots, \quad u^{(n)} = 0$$

Значения характеристического многочлена и его производных ведут себя следующим образом.

$$P(\alpha) = 0, \quad \dots, \quad P^{(l)}(\alpha) = 0, \quad P^{(l+1)}(\alpha) = something, \quad \dots, \quad P^{(n)}(\alpha) = something$$

Последнее справедливо по формулировке критерия кратности корня (см. 2 семестр).

По лемме 1 получаем, что корень, включающий произведение, под действием линейного дифференциального оператора будет иметь следующий вид

$$L(x^l\,e^{\alpha\,x}) =$$
$$= e^{\alpha x}\left(x^l\cdot 0 + \frac{l\,x^{l-1}\cdot 0}{1!} + \dots + \frac{0\cdot l!}{l!} + \frac{0\cdot p^{(l+1)}(\alpha)}{(l+1)!} + \dots + \frac{0\cdot p^{(n)}(\alpha)}{n!}\right) =$$
$$= e^{\alpha x}\cdot 0 = 0$$

Таким образом, получаем что $e^{\alpha\,x}\,x^l$ решение $L(y)=0$.

Теперь докажем что система ЛНЗ.
Так как $0 \leqslant l \leqslant k-1$ значит

$$C_1\,e^{\alpha\,x} + C_2\,x\,e^{\alpha\,x} + \dots + C_k\,x^{k-1}\,e^{\alpha\,x} = 0$$

так как $e^{\alpha\,x}$ общий множитель и он не равен нулю, тогда очевидно

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad C_1 + C_2\,x + \dots + C_n\,x^{n-1} = 0$$

Сумма будет всегда равна нулю тогда и только тогда, когда

$$C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$$

Таким образом, система

$$\{e^{\alpha\,x},\ x\,e^{\alpha\,x},\ \dots,\ x^{k-1}\,e^{\alpha\,x}\}$$

— является ЛНЗ. ∎

Теорема 16.3 (Вклад в ФСР вещественных корней).
Если в условиях теоремы 2 $\alpha_1,\ \dots,\ \alpha_s$ вещественные корни характеристического многочлена $P(\lambda)$ обладают соотвествующими кратностями $k_1,\ \dots,\ k_s$ то набор функций

$$\{e^{\alpha_1\,x},\ x\,e^{\alpha_1\,x},\ \dots,\ x^{k_1-1}\,e^{\alpha_1\,x},\ \dots,\ e^{\alpha_s\,x},\ x\,e^{\alpha_s\,x},\ \dots,\ x^{k_s-1}\,e^{\alpha_s\,x}\}$$

образует ЛНЗ систему решений ДУ $L(y)=0$

Доказательство.
Данные функции являются решениями $L(y) = 0$ (по теореме 2). Таким образом, остаётся доказать их ЛНЗ на $\mathbb{R}$.
Докажем справедливость факта от противного.
Предположим, что линейная комбинация этих функций равна нулю

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P_1(x)\, e^{\alpha_1 x} + \dots + P_s(x)\, e^{\alpha_s x} \equiv 0$$

Также скажем следующее

$$P_1(x) = C_0\, x^k + \dots, \qquad C_0 \neq 0 \qquad k \leqslant k_1 - 1$$

Разделим линейную комбинацию на $e^{\alpha_s x}$, получим

$$P_1(x)\, e^{(\alpha_1 - \alpha_s)\, x} + \dots + P_s(x) \equiv 0 \qquad \deg P_s \leqslant k_s - 1$$

k_s раз диференцируем, получаем

$$Q_1(x)\, e^{(\alpha_1 - \alpha_s)\, x} + \dots + Q_{s-1}(x)\, e^{(\alpha_{s-1} - \alpha_s)\, x} \equiv 0$$

старший коэффициент у многочлена Q_1 равен

$$C_0\, (\alpha_1 - \alpha_s)^{k_s} \neq 0$$

Сама степень многочлена $\deg Q_1 = k$
аналогично для последующих страших кофициентов Q_i.
Повторяем деление и дифференцирование до тех пор пока не получим следующее

$$R_1(x)\, e^{(\alpha_1 - \alpha_s)\, x} \equiv 0$$

где старший коэфициент у R_1 равен

$$C_0\, (\alpha_1 - \alpha_s)^{k_s}\, (\alpha_1 - \alpha_{s-1})^{k_{s-1}}\, \dots\, (\alpha_1 - \alpha_2)^{k_2}$$

Для соблюдения тождества выше должно выполнятся $R_1(x) = 0$ (т.к. второй множитель не может быть равен нулю). Но значение $R_1(x)$ не может быть равно нулю, так как $C_0 \neq 0$, а также $\deg R_1 = k$ (справедливость последнего важна, так как в противном случае значение коэфициента не имело бы значения, т.к. после дифференцирований значение x^β равнялось нулю).
Таким образом, получаем противоречие, значит $P_1 \equiv 0, \dots, P_s \equiv 0$. Следовательно решения ЛНЗ. ■

Пример 16.2. *Дано*

$$y^{(5)} + 2\,y^{(4)} + y^{(3)} = 0$$

Решение.
Характеристический многочлен для этого уравнения следующий

$$P(\lambda) = \lambda^5 + 2\,\lambda^4 + \lambda^3 = \lambda^3(\lambda+1)^2$$

Получаем для него корни α *с кратностями* k

$$\alpha_1 = 0,\ k_1 = 3 \qquad \alpha_2 = -1,\ k_2 = 2$$

Значит ФСР

$$\{1,\ x,\ x^2,\ e^{-x},\ x\,e^{-x}\}$$

А общее решение ЛОДУ

$$y = C_1 + C_2\,x + C_3\,x^2 + (C_4 + C_5\,x)\,e^{-x}$$

17. Случай комплексных корней характеристического многочлена. Общий случай построения ФСР

Определение 17.1 (Комплексное число).

$$\alpha,\ \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha + \beta\, i \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Представление комплексного числа

$$e^{(\alpha+\beta\, i)\, x} = e^{\alpha\, x}\, (\cos(\beta\, x) + i\, \sin(\beta\, x))$$

Замечание

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} + e^{z_2}$$

Определение 17.2.
Пусть

$$u = u(x),\ v = v(x)$$

— функции вещественных переменных x, тогда

$$z = u(x) + i\, v(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

— комплексная функция от вещественных аргументов.
А также

$$(u + i\, v)'_x = u'_x + i\, v'_x$$

Замечание 17.1.

$$L(u + i\, v) = L(u) + i\, L(v)$$

Замечание 17.2.

$$(e^{(\alpha+i\,\beta)\, x})'_x = (\alpha + i\,\beta)\, e^{(\alpha+i\,\beta)\, x}$$

Доказательство.

$$\begin{gathered}(e^{(\alpha+i\,\beta)\, x})'_x = [\text{опр. } 1] = (e^{\alpha\, x}\, \cos(\beta\, x) + i\, e^{\alpha\, x}\, \sin(\beta\, x))'_x = \\ = (e^{\alpha\, x}\, \cos(\beta\, x))'_x + i\, (e^{\alpha\, x}\, \sin(\beta\, x))'_x = \\ = e^{\alpha\, x}\, (\alpha\, \cos(\beta\, x) - \beta\, \sin(\beta\, x)) + i\, e^{\alpha\, x}\, (\alpha\, \sin(\beta\, x) + \beta\, \cos(\beta\, x))\end{gathered}$$

С другой стороны

$$\begin{gathered}(\alpha + i\,\beta)\, e^{(\alpha+i\,\beta)\, x} = [\text{опр. } 1] = (\alpha + i\,\beta)\, e^{\alpha\, x}\, (\cos(\beta\, x) + i\, \sin(\beta\, x)) = \\ = e^{\alpha\, x}\, (\alpha\, \cos(\beta\, x) - \beta\, \sin(\beta\, x)) + i\, e^{\alpha\, x}\, (\alpha\, \sin(\beta\, x) + \beta\, \cos(\beta\, x))\end{gathered}$$

■

Теорема 17.1.
Пусть $\alpha \pm i\,\beta$ *— пара комплексно сопряжённых корней характеристического многочлена* $P(\lambda)$, $(\beta > 0)$ *кратности* $m \geqslant 1$
ЛОДУ $L(y) = 0$ *с постоянными коэффициентами (как в §12).*
Тогда функции

$$\{e^{\alpha\,x}\,\cos(\beta\,x),\; x\,e^{\alpha\,x}, \cos(\beta\,x),\; \dots,\; x^{m-1}\,e^{\alpha\,x}, \cos(\beta\,x),$$
$$e^{\alpha\,x}\,\sin(\beta\,x),\; x\,e^{\alpha\,x}, \sin(\beta\,x),\; \dots,\; x^{m-1}\,e^{\alpha\,x}, \sin(\beta\,x)\}$$

Образуют систему $2\,m$ *линейно независимых решений ЛОДУ* $L(y) = 0$

Доказательство.
Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 из предыдушего параграфа.
По условию
$$L(x^l\,e^{(\alpha+i\,\beta)\,x}) = 0 \qquad 0 \leqslant l \leqslant m-1$$
Тогда корень
$$y = x^l\,e^{(\alpha+i\,\beta)\,x} = x^l\,e^{\alpha\,x}\,(\cos(\alpha) + i\,\sin(\beta\,x)) \qquad 0 \leqslant l \leqslant m-1$$
В более общем виде (по определению 2) корень
$$y = u + i\,v$$
Тогда по свойству линейного оператора для комплексного числа получаем
$$L(u + i\,v) = L(u) + i\,L(v)$$
Так как $L(y) = 0$, то тогда и слагаемые, его состовляющие также равны нулю. Значит
$$u = x^l\,e^{\alpha\,x}\,\cos(\alpha) \qquad v = x^l\,e^{\alpha\,x}\,\sin(\beta\,x)$$
Являются решениями ДУ $L(y) = 0$.
Данные функции ЛНЗ над областью $\mathbb{C}$. Значит тем более функции ЛНЗ над $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. ■

Теорема 17.2 (Построение ФСР ЛОДУ n-го порядка с $const$ коэф).
Пусть
$$P(\lambda) = (\lambda + \alpha_1)^{k_1}\,\dots\,(\lambda + \alpha_s)^{k_s}\,(\lambda^2 + p_1\,\lambda + q_1)^{m_1}\,\dots\,(\lambda^2 + p_t\,\lambda + q_t)^{m_t}$$

характеристический многочлен ЛОДУ n-го порядка с потоянными коэфициентами, который соответсвует следующим уравнениям

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\,\lambda^{n-1} + \cdots + a_n, \quad L(y) = y^n + a_1\,y^{n-1} + \cdots + a_n$$

$\alpha_1\ \ldots,\ \alpha_s$ — попарно различные вещественные корни $P(\lambda)$ кратности $k_1,\ \ldots,\ k_s$ соответственно ($s \geqslant 0$). (Не путать α_i и a_i)
$(\lambda^2 + p\,\lambda + q)^m = (\lambda - z)\,(\lambda - \bar{z})$ пары $(z_1, \bar{z_1}) \ldots (z_t, \bar{z}_t)$ — все попарно различные корни кратности $m_1,\ \ldots,\ m_t$ соответственно ($t \geqslant 0$)

Замечание по поводу условия $\beta > 0$.

$$z_j = \alpha_{s+j} + i\,\beta_j \quad \beta_j > 0 \quad \bar{z_j} = \alpha_{s+j} - i\,\beta_j$$

Тогда

1) *Если $\alpha \in \mathbb{R}$, корнень кратности k, для $P\lambda$, тогда*

$$\{e^{\alpha\,x},\ x\,e^{\alpha\,x},\ \ldots,\ x^{k-1}\,e^{\alpha\,x}\}$$

2) *Если $\alpha{\pm}i\,\beta$, пара комплексно сопряжённых корней кратности $m \geqslant 1$, тогда*

$$\begin{gathered}\{e^{\alpha\,x}\,\cos(\beta\,x),\ x\,e^{\alpha\,x}\,\cos(\beta\,x),\ \ldots,\ x^{m-1}\,e^{\alpha\,x}\,\cos(\beta\,x),\\ e^{\alpha\,x}\,\sin(\beta\,x),\ x\,e^{\alpha\,x}\,\sin(\beta\,x),\ \ldots,\ x^{m-1}\,e^{\alpha\,x}\,\sin(\beta\,x)\}\end{gathered}$$

Всего будет $k_1 + \cdots + k_s + 2\,m_1 + \cdots + 2\,m_t = n$ решений. Все они образуют ФСР $L(y) = 0$

Доказательство.
Все эти n функций являются решением $L(y) = 0$. Их количество равно порядку ДУ $L(y) = 0$. Эти функции образуют ЛНЗ систему, так как функции

$$e^{\alpha_1\,x},\ \ldots,\ x^{k_1-1}\,e^{\alpha_1\,x},\ \ldots,\ e^{(\alpha_{s+1} \pm i\,\beta_1)\,x},\ \ldots,\ e^{(\alpha_{s+t} \pm i\,\beta_t)}\,x^{m_t-1}$$

ЛНЗ на $\mathbb{C}$, следовательно они ЛНЗ на $\mathbb{R}$. Таким образом они образуют ФСР (т.к. мы рассмотрели все три критерия). ∎

Пример 17.1.
Дано

$$P(\lambda) = \lambda^2\,(\lambda - 2)^3\,(\lambda + 1)^4\,(\lambda^2 + 2\,\lambda + 2)^2$$

Решение.
Видим, что корни характеристического многочлена имеют соответствующие кратности

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 = 0 & \alpha_2 = 2 & \alpha_3 = -1 & \alpha \pm i\,\beta = -2 \pm i \\ k_1 = 2 & k_2 = 3 & k_3 = 4 & m_1 = 2 \end{array}$$

Тогда ФСР

$$\{1,\ x,\ e^{2\,x},\ x\,e^{2\,x},\ x^2\,e^{2\,x},\ e^{-x},\ x\,e^{-x},\ x^2\,e^{-x},\ x^3\,e^{-x},\\ e^{-2\,x}\,\cos(x),\ e^{-2\,x}\,\sin(x),\ x\,e^{-2\,x}\,\cos(x),\ x\,e^{-2\,x}\,\sin(x)\}$$

$$n = k_1 + k_2 + k_3 + m_1 = 2 + 3 + 4 + 2 \cdot 2 = 13$$

Тогда общее решение выглядит так

$$y = C_1 + C_2\,x + (C_3 + C_4\,x + C_5\,x^2)\,e^{2\,x} + (C_6 + C_7\,x + C_8\,x^2 + C_9\,x^3)\,e^{-x} + \\ + (C_{10} + C_{11}\,x)\,e^{-2\,x}\,\cos(x) + (C_{12} + C_{13}\,x)\,e^{-2\,x}\,\sin(x)$$

18. Метод неопределённых коэф. для отыскания частного решения ЛОДУ n-го порядка с пост. коэф.

В параграфе рассмотрим уравнения вида

$$L(y) = P_m(x)e^{\alpha x} \quad L(y) = P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x \quad L(y) = Q_m(x)e^{\alpha x}\sin x$$

Теорема 18.1 (О суперпозиции частных решений). *Пусть $y_1(x), \ \ldots, \ y_k(x)$ - это частные решения соответствующих (1 к 1) ЛНДУ вида $L(y) = f_1(x), \ \ldots, \ L(y) = f_k(x)$*

Тогда для ЛНДУ вида

$$L(y) = A_1\, f_1(x) + \cdots + A_k\, f_k(x) \qquad A_1, \ \ldots, \ A_k \in \mathbb{R}$$

имеет частное решение вида

$$y = A_1\, y_1(x) + \cdots + A_k\, y_k(x)$$

Доказательство. Дано:

$$L(y) = f_1(x), \ \ldots, \ L(y) = f_k(x)$$

Тогда свойству линейного оператора

$$L(A_1\, y_1(x) + \cdots + A_k\, y_k(x)) = A_1\, L(y_1) + \cdots + A_k\, L(y_k) = A_1\, f_1(x) + \cdots + A_k\, f_k(x)$$

■

Лемма 18.1 (Алгебраическая). *Пусть*

$$Q_m(x) = C_0\, x^m + C_1\, x^{m-1} + \cdots + C_m \qquad C_0 \neq 0$$

многочлен степени $m \geqslant 0$.

Тогда для любых чисел $\delta_0 \neq 0, \delta_1, \ \ldots, \ \delta_n$ существует многочлен

$$u(x) = u_m(x) = A_0\, x^m + \cdots + A_n$$

степени m для которого

$$\delta_0\, u + \delta_1\, u' + \cdots + \delta_n\, u^{(n)} = Q_m(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

То есть

$$C_0\, x^m + C_1\, x^{m-1} + \cdots + C_m \equiv \delta_0\, u + \delta_1\, u' + \cdots + \delta_n\, u^{(n)}$$

Доказательство. Для доказательства достаточно рассмотреть случай $m = n$ так как

1) если $n < m$, то возьмём набор (так как числа любые по условию)

$$\delta_{n+1} = \cdots = \delta_m = 0$$

тогда многочлен $u_m(x)$ содержит n слагаемых

2) если $n > m$, то

$$u^{(m+1)} = 0, \ \ldots, \ u^{(n)} = 0$$

так как многочлен $Q(x)$ степни m (по условию). Это всё значит, что

$$\delta_0 \, u + \delta_1 \, u' + \cdots + \delta_n \, u^{(n)} \equiv Q_m(x)$$

два случая выше сводятся к $m = n$.
Для начала выразим коэфициенты $C_m, \ \ldots, \ C_1$ из $Q_m(x)$, получим

$$C_m = Q_m(x), \quad 1! \, C_{m-1} = Q'_m(x), \quad \ldots, \quad m! \, C_0 = Q^{(m)}(x)$$

Примечание. Последние не нулевые слагаемые у производных дают коэфициент в виде на постоянной $_i$ умноженной на факториал (из-за взятия производной у x^i)

Также по условию для $Q(x)$ и его производных существуют такие равенства

$$\begin{aligned}
Q_m(x) &= \delta_0 \, u(x) + \delta_1 \, u'(x) + \cdots + \delta_m \, u^{(m)}(x) \\
Q'_m(x) &= \delta_0 \, u'(x) + \delta_1 \, u''(x) + \cdots + \delta_{m-1} \, u^{(m)}(x) + 0 \\
&\ \vdots \\
Q_m^{(m)}(x) &= \delta_0 \, u^{(m)}(x)
\end{aligned}$$

Если мы подставим в качестве аргумента ноль в функцию $u(x)$ и аналогично способу выше выразим $A_m, \ \ldots, \ A_0$, то получим

$$A_m = u(0), \quad 1! \, A_{m-1} = u'(0), \quad \ldots, \quad m! \, A_0 = u^{(m!)}(0)$$

Теперь объединим всё таким образом, чтобы остались только $C_i, \ \delta_i, \ A_i$, получим систему

$$\begin{cases}
C_m = \delta_0 \, A_m + \delta_1 \, A_{m-1} + \cdots + m! \, \delta_m \, A_0 \\
1! \, C_{m-1} = 1! \, \delta_0 \, A_{m-1} + \delta_1 \, A_{m-1} + \cdots + m! \, \delta_{m-1} \, A_0 \\
\vdots \\
m! \, C_0 = m! \, \delta_0 \, A_0
\end{cases}$$

это алгебраическая система из $(m+1)$ уравнений относительно $(m+1)$ переменных $A_0,\ A_1,\ \dots,\ A_m$ и определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \delta_0 & * & * & * \\ 0 & 1!\,\delta_0 & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & m!\,\delta_m \end{vmatrix} = [\text{по свойству треугольной матрицы}] = \delta_0^{(m+1)}\,1!\,2!\,\dots\,m!$$

Так как $\delta_0 \neq 0$ (по условию), то $\Delta \neq 0$. Тогда по теореме Крамера существует единственное решение в виде $A_0,\ A_1,\ \dots,\ A_m$ и

$$\exists u(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \delta_0\,u + \delta_1\,u' + \dots + \delta_n\,us^{(n)} = Q_m(x)$$

■

Теорема 18.2. *Пусть*

$$L(y) = y^{(n)} + \alpha_1\,y^{(n-1)} + \dots + \alpha_n\,y = Q_m(x)\,e^{\alpha\,x}$$

ЛНДУ n-го порядка с постоянными коэфициентами $a_1,\ \dots,\ a_n$ и правой частью специального вида $Q_m(x)\,e^{\alpha\,x}$, где

$$Q_m(x) = C_0\,x^m + C_1\,x^{m-1} + \dots + C_m \qquad C_0 \neq 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

— многочлен степени $m \geqslant 0$.

Обозначим через $P(\lambda)$ характеристический многочлен этого ДУ и положим $k=0$, если $P(\alpha) \neq 0$ и k - кратность корня характеристического многочлена $P(\lambda)$, если $P(\alpha) = 0$

Тогда существует многочлен $u(x) = A_0\,x^m + \dots + A_m$ степени m для которого
$y = x^k\,e^{\alpha x}\,u(x)$ является часть решения ЛНДУ $L(y) = Q_m(x)\,e^{\alpha\,x}$

Доказательство. Так как k описывает кратность корня характеристического многочлена, то чевидно, что по критерию кратности корня следует

- Если $k = 0$, то $P(\alpha) \neq 0$
- Если $k \geqslant 1$, то $P(\alpha) = 0,\ \dots,\ P^{(k-1)}(\alpha) = 0,\ P^{(k)} \neq 0$

Как получили равентсво ниже? (Похоже на пар.12 т.2)

$$L(V(x)\,e^{\alpha\,x}) = e^{\alpha\,x}\,(V(x)\,P(\alpha) + \dots + \frac{1}{(k-1)!}\,V^{(k-1)}(x)\,P^{(k-1)}(\alpha) + \\ + \frac{1}{k!}\,V^{(k)}(x)\,P^{(k)}(\alpha) + \dots + \frac{1}{n}\,V^{(n)}(x)\,P^{(n)}(\alpha))$$

Обозначим

$$\delta_0 = \frac{1}{k!}\,P^{(k)}(\alpha) \neq 0, \quad \delta_1 = \frac{1}{(k+1)!}\,P^{(k+1)}(\alpha) \neq 0, \quad \dots, \quad \delta_{n-k} = \frac{1}{n!}\,P^{(n)}(\alpha)$$

тогда по лемме выше получаем

$$\exists \omega(x) = B_0\,x^m + \dots + B_m \\ \forall x \subset R \quad \delta_0\,\omega(x) + \delta_1\,\omega'(x) + \dots + \delta_{n-k}\,\omega^{(n-k)}(x) = Q_m(x)$$

Или последнее равенство в другом виде

$$L(V(x)\,e^{\alpha\,x}) = e^{\alpha\,x}\,(\delta_0\,\omega + \delta_1\,\omega' + \dots + \delta_{n-k}\,\omega^{(n-k)})$$

Тогда нетрудно заметить, что $V^{(k)}(x) = \omega(x)$. Также знаем, что (Откуда?)

$$V|_{x=x_0} = 0, \quad \dots, \quad V^{(k-1)}|_{x=x_0} = 0$$

Тогда

$$V(x) = A_0\,x^{m+k} + \dots + A_m\,x^k = x^k\,u(x) \qquad u(x) = A_1\,x^m + \dots + A_m$$

Таким обазом

$$L(x^k\,u(x)\,e^{\alpha\,x}) = e^{\alpha\,x}(\delta_0\,\omega(x) + \delta_1\,\omega'(x) + \dots + \delta_{n-k}\,\omega^{(n-k)}(x)) = e^{\alpha\,x}\,Q_m(x) \\ (\forall x \in \mathbb{R})$$

Значит $y = x^k\,u(x)\,e^{\alpha\,x}$ — частное решение $L(y) = Q_m\,e^{\alpha\,x}$

■

Пример 18.1. *Дано:*

$$y'' - 2\,y' + y = 12\,x\,e^x$$

Решение:

$$L(y) = Q_1(x)\,e^x \\ Q_1(x) = 12\,x, \quad \alpha = 1, \quad m = 1$$

1) Решаем однородное

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\,\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$
$$\lambda_1 = 1, \quad k_1 = 2$$
$$\lambda = \lambda_1 \quad \Rightarrow \quad k = 2$$
$$y_{o.o} = C_1\, e^x + C_2\, x\, e^x$$

2) Из шага 1 знаем, что $k = 2$, также из условия $m = 1, \quad \alpha = 1$. По теореме 2 получаем следующее решение

$$\psi(x) = x^2\,(A\,x + B)\, e^x$$

$$\begin{array}{lll} V = A\,x^3 + B\,x^2 & p = (\lambda - 1)^2 & = 0 \\ V' = 3\,A\,x^2 + 2B\,x & \dfrac{p'}{1!} = 2\,(\lambda - 1) & = 0 \\ V'' = 6\,A\,x + 2\,B & \dfrac{p''}{2!} = 1 & = 1 \\ & & \text{столбец при } \lambda = 1 \end{array}$$

$$L(V e^x) = e^x\,(0 \cdot 0 + V' \cdot 0 + (6\,A\,x + 2\,B) \cdot 1) = 12\,x\,e^x$$
$$6\,A\,x + 2\,B = 12\,x \quad \Rightarrow \quad A = 2,\ B = 0$$

Значит частное неоднородное решение

$$\psi(x) = 2\,x^3\,e^x = y_{ч.н}$$

3) Таким образом общее решение

$$y = (2\,x^3 + C_1 + C_2\,x)e^x$$

Теорема 18.3. *Пусть*

$$L(y) = y^{(n)} + \alpha_1\,y^{(n-1)} + \dots + \alpha_n\,y = Q_m(x)\,e^{\alpha\,x}\,\cos(\beta\,x) + R_m(x)\,e^{\alpha\,x}\,\sin(\beta\,x)$$

где $Q_m(x),\ R_m(x)$ - многочлены степени $\leqslant m$,

$$\alpha + \beta\,i \in \mathbb{C}, \quad \beta \neq 0$$

Если

$$P(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1\,\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$$

— характеристичекий многочлен то

- *если $k = 0$, то*

$$P(\alpha + \beta i) \neq 0$$

- *k — кратность корня $\alpha+\beta i$, если $P(\alpha+\beta i)=0$*

То тогда

$$\exists \quad u(x)=A_0\,x^m+\cdots+A_m, \quad v(x)=B_0\,x^m+\cdots+B_m$$

— многочлены степени $\leqslant m$ для которых

$$\psi(x)=x^k\,e^{\alpha\,x}(u(x)\,\cos(\beta\,x)+V\,\sin(\beta\,x))$$

является решением ЛНДУ

$$L(y)=e^{\alpha\,x}\,(Q_m(x)\,\cos(\beta\,x)+R_m(x)\,\sin(\beta\,x))$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательное ДУ

$$L(y)=(Q_m-i\,R_m)\,e^{(\alpha+i\,\beta)\,x}$$
$$\mathrm{Re}(Q_m-i\,R_m)\,e^{(\alpha+\beta\,i)\,x}=e^{\alpha\,x}(Q_m\,\cos(\beta\,x)+R_m\,\sin(\beta\,x))$$

По предыдущей теореме 2, следует что существуют мн-ны степени $\leqslant m$,

$$u(x)-\omega(x)=\underbrace{x^m+\cdots+A_m}_{u}-i\,\underbrace{(B_0\,x^m+\cdots+B_m)}_{v}$$

такой что

$$y(x)=x^k\,(u-i\,v)\,e^{(\alpha+\beta\,i)\,x}$$

является решением вспомогательного уравнения

$$L(y)=(Q_m-i\,R_m)\,e^{(\alpha+\beta\,i)\,x}$$

Непонятно!

$$\psi(x)=\mathrm{Re}(y(x))=x^ke^{\alpha x}(u(x)cos\beta x+V(x)sin\beta x)$$

является решением

$$L(y)=Re(Q_m-iR_m)e^{(\alpha+\beta i)}x=e^{\alpha x}(Q_mcos\alpha x+Q_msin\beta x)$$

■

Пример 18.2. *Дано:*

$$y''-2y'+y=4\,x\,\cos(x)$$

Решение:
Разобрать!!!

1) Ищем общее однородное

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 1$$
$$\lambda_{1,\,2} = \alpha \pm i\,\beta = \pm i \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1 \quad k_{1,\,2} = 1$$
$$y_{o.o} = C_1\,\cos(x) + C_2\,\sin(x)$$

2) Ищем частное решение $y'' + y = 4\,x\,\cos(x)$

$$m = 1, \quad \alpha \pm \beta i = \pm i, \quad k = 1$$
$$\psi(x) = x\,(A\,x + B)\,e^{i\,x} = u\,e^{i\,x}$$
$$L(ue^{i\,x}) = e^{i\,x}(u\,P(i) + u'\,p'(i) + \frac{u''}{2}\,P''(i))$$
$$\begin{array}{lll} u = Ax^2 + Bx & p = \lambda^2 + 1 & = 0 \\ u' = 2Ax + B & p' = 2\lambda & = 2 \\ V'' = 2A & \dfrac{p''}{2} = 1 & = 1 \\ & & \lambda = 1 \end{array}$$
$$L(u\,e^{ix}) = e^{i\,x}((u\,A\,i + 2\,B)2\,A) = 4\,x\,e^{i\,x}$$
$$4\,A_i = 4, \quad A = -i, \quad B = 1$$
$$\Rightarrow y_{.} = (-i\,x^2 + x)(\cos(\alpha) + i\,\sin(x))$$
$$\psi = Re\,y_{.} = x\,\cos(x) + x^2\,\sin(x)$$

3) Таким образом общее решение

$$y = x\,\cos(x) + x^2\,\sin(x) + C_1\,\cos(x) + C_2\,\sin(x)$$

19. Системы обыкновенных ДУ

Определение 19.1.
Система уравнений вида

$$F_i(x,\ y_1,\ y_1',\ \dots,\ y_1^{m_1},\ \dots,\ y_n,\ y_n',\ \dots,\ y_n^{m_n}) \equiv 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ n)$$

называют системой обыкновенных ДУ порядка $m = \max\{m_1,\ \dots,\ m_n\}$ *относительно функций* $y_1 = y_1(x),\ \dots,\ y_n = y_n(x)$. *Набор функций* $\{y_1,\ \dots,\ y_n\}$ *называется решением ДУ если при подстановке*

$$F_i(x,\ y_1,\ y_1',\ \dots,\ y_1^{m_1},\ \dots,\ y_n,\ y_n',\ \dots,\ y_1^{m_n}) \overset{(x)}{\equiv} 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ n)$$

то есть получается система верных функциональных тождеств

Теорема 19.1.
Всякая система ДУ из определения 1 эквивалентна некоторой системе обыкновенных ДУ 1-го порядка

Доказательство.
Введём

$$\begin{array}{llll}
z_{1,1} = y_1 & z_{1,2} = y_1' & \dots & z_{1,m_1} = y_1^{(m_1-1)} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
z_{n,1} = y_n & z_{n,2} = y_n' & \dots & z_{n,m_n} = y_n^{(m_n-1)}
\end{array}$$

Примечание. Всего получим $N = \sum_{i=1}^{n} m_i$ функций.
Таким образом, после замены на z получаем

$$F_i(x,\ z_{1,1},\ z_{1,2},\ \dots,\ z_{1,m_1},\ z_{1,m_1}',\ \dots,\ z_{n,1},\ z_{n,2},\ \dots,\ z_{n,m_n},\ z_{n,m_n}') \equiv 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ n)$$

Мы знаем, что $z_{i,1},\ z_{i,2}$ связаны межу собой и другими $z_{i,j}$, тогда

$$\begin{cases} z_{i,j}' = z_{i,j+1} \qquad 1 \leqslant i \leqslant n \quad 1 \leqslant j \leqslant m_i - 1 \\ F_i = 0 \end{cases}$$

Таким образом мы получили систему обыкновенных ДУ первого порядка относительно $z_{i,j}$ ■

Определение 19.2.
Система ДУ вида

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n) \\ \ldots \\ y_n' = f_n(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n) \end{cases}$$

Называют нормальной системой обыкновенных ДУ 1-го порядка

Замечание 19.1.
Введём

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \vec{y'} = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Тогда систему из определения выше можно описать так

$$\vec{y'} = \vec{f}(x,\ \vec{y})$$

Пример 19.1.
Дано

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + p_2(x)\,y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}\,y' + p_n(x)\,y = f(x)$$

Требуется перейти к нормальной ситеме обыкновенных ДУ 1-го порядка.
Решение.
Введём следующие функции

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad \ldots, \quad y_n = y^{(n-1)}$$

Тогда ответ

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = \ldots\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = \ldots\ \ldots\ y_n \\ y_n' = -p_n\,y_1 - p_{n-1}\,y_2 - \cdots - p_1\,y_n + f(x) \end{cases}$$

Теорема 19.2.
Пусть

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n) \end{cases}$$

— нормальная система относительно n фукций $y_1,\ \dots,\ y_n$ первого порядка

Тогда если функции

$$f_1,\ \dots,\ f_n, \qquad \frac{\delta f_i}{\delta y_j} \quad 1 \leqslant i \leqslant n \quad 1 \leqslant j \leqslant n$$

непрерывны в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, а $M_0(x_0,\ y_1^0,\ \dots,\ y_n^0)$ — внутренняя точка области D, то $\exists \delta > 0$ и существует единственное решение

$$(y_1(x),\ \dots,\ y_n(x)) \qquad x \in U_\delta(x_0)$$

удовлетворяющее следующим условиям задачи Коши

$$\begin{cases} \vec{y'} = \vec{f}'(x,\ \vec{y}) \\ \vec{y}|_{x=x_0} = \vec{y_0} = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Доказательство. Без доказательств ■

Замечание 19.2 (Как построить инетгральную кривую). *Выведем систему ДУ «в дифференциалах». Для этого рассмотрим*

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n) \end{cases}$$

в сокращенном виде

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, \vec{y}) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, \vec{y}) \end{cases}$$

Воспользуемся $dy_i = y_i'(x)\, dx$, получим

$$dx = \frac{dy_1}{f_1(x, \vec{y})} = \dots = \frac{dy_n}{f_n(x, \vec{y})}$$

или

$$1 = \frac{y_1'}{f_1(x, \vec{y})} = \dots = \frac{y_n'}{f_n(x, \vec{y})}$$

Если интегральная кривая L проходит через точку $M_0(x_0,\ y_1^0,\ \ldots,\ y_n^0)$ *то касательные к ней удовлетворяют системе линеных алгебраических уравнений*

$$X - x_0 = \frac{Y_1 - y_1^0}{f_1(M_0)} = \cdots = \frac{Y_n - y_n^0}{f_n(M_0)}$$

Замечание 19.3.
Систему ДУ можно свести к уравнению высокого порядка относительно одной функции с помощью метода исключения неизвестной.

Пример 19.2. *Дано*

$$\begin{cases} y' = x + z \\ z' = x + 2\,y + z \end{cases} \qquad \textit{Найти } (y(x),\ z(x))$$

Решение.
Продиференцируем первое уравнение по x, *а также выразим из него* z, *получим*

$$\begin{cases} y'' = 1 + z' = [z' = x + 2\,y + z] = 1 + x + 2\,y + z \\ z = y' - x \end{cases}$$

Заменяем (и исключаем) z *получаем*

$$y'' = 1 + x + 2\,y + y' - x$$
$$y'' - y' - 2\,y = 1$$

Таким образом, получили ЛНДУ. Решаем сначала соотвествующее однородное

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)\,(\lambda - 2)$$
$$\alpha_1 = -1 \quad \alpha_2 = 2 \quad k_{1,2} = 1$$

Получаем ФСР $\{e^{-x},\ e^{2\,x}\}$ *и тогда,*

$$y_{o.o.} = C_1\,e^{-x} + C_2\,e^{2x}$$

Теперь решаем неоднородное, по условию видим

$$\alpha = 0, \quad k = 0, \quad m = 0$$

Пусть

$$y = A, \quad \Rightarrow \quad y' = 0,\ y'' = 0$$
$$-2\,A = 1 \quad A = -\frac{1}{2}$$

Таким образом, ответ

$$y = -\frac{1}{2} + C_1\, e^{-x} + C_2\, e^{2\,x}$$
$$z = y' - x = -x - C_1\, e^{-x} + 2\, C_2\, e^{2\,x}$$

20. Система линейных ДУ

Определение 20.1. *Пусть для функций справедливо*

$$P_{i\,j}(x) \in C_{(a;\,b)} \qquad f_1(x),\ \ldots,\ f_n(x) \in C_{(a;\,b)}$$

Тогда система ДУ вида

$$\begin{cases} y_1' = P_{1\,1}(x)\,y_1 + \cdots + P_{1\,n}(x)\,y_n + f_1(x) \\ \ldots \\ y_1' = P_{n\,1}(x)\,y_1 + \cdots + P_{n\,n}(x)\,y_n + f_n(x) \end{cases}$$

называется линейной системой относительно n неизвестных функций $(y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x))$

Замечание 20.1. *Для краткости записи введём*

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \vec{y'} = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad P(x) = \begin{pmatrix} P_{1\,1}(x) & \ldots & P_{1\,n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n\,1}(x) & \ldots & P_{n\,n}(x) \end{pmatrix}$$

где $f\vec{(x)}$ *— столбец правых частей, а* $P(x)$ *— матрица коэфициентов. Таким образом система ДУ из определения 1 имеет вид*

$$\vec{y'} = P(x)\,\vec{y} + \vec{f}(x)$$

Теорема 20.1. *В условиях определения 1*

$$\forall x_0 \in (a;\,b) \quad \forall \vec{y_0} = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix}$$

существует единственное решение

$$\vec{y} = \vec{y}(x) \quad x \in (a;\,b)$$

задачи Коши

$$\begin{cases} \vec{y'} = P(x)\,\vec{y} + \vec{f}(x) \\ \vec{y}|_{x=x_0} = \vec{y_0} \end{cases}$$

Доказательство. Без доказательств ∎

Определение 20.2. *Пусть*

$$\{\vec{y_1}(x) \;\; \ldots,\; \vec{y_k}(x)\}$$

система функций в R^n *причём*

$$\vec{y_i}(x) = \begin{pmatrix} y_{i\,1} \\ \vdots \\ y_{i\,n} \end{pmatrix} \qquad x \in (a;\, b)$$

Тогда

- *система линейно зависима на интервале* $(a;\, b)$
  Другими словами

$$\exists \alpha_1,\; \ldots,\; \alpha_n \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \neq 0 \qquad \forall x \in (a;\, b) \quad \alpha_1\, \vec{y_1} + \cdots + \alpha_k\, \vec{y_k} = 0$$

- *Во всех остальных случаях система линейно не зависима на интервале*

Определение 20.3. *Пусть*

$$\vec{y'} = P(x)\, \vec{y}$$

— однородная система линейных ДУ, где $P(x)$ *— матрица коэфициентов, каждый из которых* $\in C_($*a*; *b*).

Тогда

$$\{\vec{y_1}(x),\; \ldots,\; \vec{y_n}(x)\}$$

— ФСР для $\vec{y'} = P(x)\, \vec{y}$*, если*

1) $\forall i \in (1,\; \ldots,\; n) \quad \vec{y_i'} = P(x)\, \vec{y_i} \qquad (\forall x \in (a;\, b))$

2) *Количество векторов системы решений соответствует порядку матрицы* $P(x)$

3) *Система лиенейно независима на* $(a;\, b)$

Теорема 20.2. *Пусть*

$$\vec{y'} = P(x)\, \vec{y} + \vec{f}(x)$$

— система линейных ДУ (как в определении 1)

Тогда существует ФСР $\{\vec{y_1}(x),\ \ldots,\ \vec{y_n}(x)\}$ *соответствующая линейному однородному ДУ* $\vec{y}' = P(x)\,\vec{y}$ *и решения* $\vec{\psi}(x)$, *такие что*

$$\vec{y} = \vec{\psi}(x) + C_1\,\vec{y_1}(x) + \cdots + C_n\,\vec{y_n}(x)$$

описывает множество всех решений данной системы линейных ДУ, где $C_1,\ \ldots,\ C_n$ *— произволные постоянные*

Доказательство. Без доказательств ■

21. Система линейных ДУ с const коэф.

Определение 21.1. *Система вида*

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}\,y_1 + \cdots + a_{1n}\,y_n + f_1(x) \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}\,y_1 + \cdots + a_{nn}\,y_n + f_n(x) \end{cases}$$

называется системой из n ЛДУ с постоянными коэфинциентами.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— матрица коэфициентов

Замечание 21.1.
Система из определения 1 сводится для каждой функции $y_i'(x)$ к ЛДУ n-го порядка

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = e^{\alpha x} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \vec{y'} = \alpha\,\vec{b}\,e^{\alpha\,x} \qquad \alpha\,\vec{b}\,e^{\alpha\,x} = A\,\vec{b}\,e^{\alpha\,x}$$

$$\Rightarrow \quad A\,\vec{b} = \alpha\,\vec{b}$$

Таким образом $\vec{b}$ собственный вектор, α собственное значение матрицы A, $\det(A - \alpha\,E) = 0$

$$(-1)^n\,det(A - \lambda\,E) = P_n(\lambda) = \lambda^n + p_1\,\lambda^{n-1} + \cdots + p_n$$

— характеристический многочлен.

Замечание 21.2.
Если $\alpha_1\ \dots\ \alpha_n \in \mathbb{R}$ — попарно различные корни характеристического многочленана (т.е. собственное значение матрицы A) $\vec{b_1}$, ..., $\vec{b_n}$ соотвествующие собственные векторы. Тогда

$$y = C_1\,\vec{b_1}\,e^{\alpha_1\,x} + \cdots + C_n\,\vec{b_n}\,e^{\alpha_n\,x}$$

— общее решение линейной диференциальной системой $\vec{y'} = A\,\vec{y}$

Пример ниже не разобран. Есть множество вопросов по решению. Не понятен ход действий.

Пример 21.1.
Дано

$$y_1 = y_1(t), \quad y_2 = y_2(t)$$
$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + 3\,t \\ y_2' = -4\,y_1 + y_2 + t\,e^{-t} \end{cases}$$

Решение.
Сначала рассматриваем соотвествующую однородную систему. Получаем следующий характеристический многочлен.

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$$

Его решения с кратностями

$$\alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 3, \quad k_{1,2} = 1$$

Ищем собственный вектор для $\lambda = \alpha_1 = -1$. *Получаем*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\,\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 0\,\alpha_1 + 0\,\alpha_2 = 0 \end{cases} \qquad 2\,\alpha = \beta$$

Таким образом собственный вектор

$$\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Частное решение

$$\vec{\varphi_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Аналогично для $\lambda = \alpha_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -2\beta_1 = \beta_2$$

Значение собственного вектора и частное решение

$$\vec{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{\varphi_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{3t}$$

Таким образом решение для однородной системы

$$\vec{y_{o.o.}} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{3\,t}$$

$$y_1'' = y_1' - y_2' + 3 = y_1' + 4\,y_2 - y_2 - t\,e^{-t} + 3 =$$
$$= y_1' + 4\,y_1 - y_1 + y_1' - 3\,t + 3 - t\,e^{-t}$$

Для нахождения значения y_1'' использовали следующие равенства

$$y_2 = y_1 - y_1' + 3\,t \quad \Leftrightarrow \quad y_1' = y_1 - y_2 + 3\,t$$
$$y_2' = -4\,y_1 + y_2 + t\,e^{-t}$$

Продолжаем дальше

$$L(y_1) = y_1'' - 2y_1' - 3y_1 = 3 - 3t - te^{-t}$$
$$P_2(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3(\lambda+1)(\lambda-3)$$
$$L(y) = 3 - 3t = Q_m(t)e^{\alpha t}, \quad m = 1, \alpha = 0, k = 0$$
$$\Psi_1 = At + Bs$$
$$\Psi_1' = A$$
$$\Psi_1 = t - \frac{5}{3}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - \lambda - 3 \\ 2\,\lambda - 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} = 3 \\ = 2 \end{matrix}$$

$$L(\Psi_1) = -3At - 3B - 2A = 3 - 3t, A = 1, B = -\frac{5}{3}$$
$$L(y) = -t\,e^{-t},\ m = 1,\ \alpha = -1,\ k = 1$$
$$\Psi_2 = (A\,t^2 + B\,t)\,e^{-t} = u\,e^{-t} \qquad \textit{где} \quad u = A\,t^2 + B\,t$$
$$u' = 2\,A\,t + B \quad u'' = 2\,A \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - \lambda - 3 \quad (0)$$

$=>; 2\lambda - 2(-4); (1)$
$L(\Psi_2) = e^{-t}(-8At - 4B + 2A) = te^{-t} =>$
$-8A = 1 => A = \frac{-1}{8}$
$2A - 4B = 0 => B = \frac{1}{16}$
$\Psi_2 = frac116(2t^2 + t)e^{-t}$
$y_1 = c_1e^{-t} + c_2e^{3t} + t - \frac{5}{3} - \frac{1}{16}(2t^2 + t)e^{-t}$
$y_1' = -c_1e^{-t} + 3c_2e^{3t} + 1 - \frac{1}{16}(-2t + t + 1)e^{-t}$
$y_2 = y_1 - y_1' + 3t$

$$\begin{cases} y_2 = 2c_1e^{-t} - 2ce^{3t} + 4t - \frac{8}{3} - \frac{1}{16}(4t^2 - 2t + 1)e^{-t} \\ y_1 = c_1e^{-t} + c_2e^{3t} + t - \frac{5}{3} - \frac{1}{16}(2t^2 + t)e^{-t} \end{cases}$$

Часть III

Числовые ряды

22. Основные определения

Замечание 22.1 (Некоторые случаи рядов).
Вещественное число можно представить в следующем виде

$$x \in \mathbb{R},\ x = A, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

где

$$a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}, \quad A \in \mathbb{Z}$$

Также запись выше эквивалентна следующему выражению

$$x = A + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$$

Из этого можно выделить конечную десятичную дробь

$$x_n = A, a_1\, a_2\, \dots\, a_n \in \mathbb{Q}$$

Связь рационального и действительного числа

$$\exists \lim_{n \to +\infty} x_n = x$$

Рассмотрим следующий случай (вывод убывающей геом. прогрессии). Пусть

$$b_n = b_1\, q^{n-1} \qquad |q| < 1$$

тогда

$$\begin{aligned}
S_n &= b_1 + \dots + b_n \\
S_n &= b_1 + q\,(b_1 + b_1\, q + \dots + b_1\, q^{n-2}) \\
S_n &= b_1 + q\,(b_1 + b_1\, q + \dots + b_1\, q^{n-2} + b_1\, q^{n-1}) - b_1\, q^n \\
S_n &= b_1 + q\, S_n - b_1\, q^n \\
S_n\,(1 - q) &= b_1\,(1 - q^n) \\
S_n &= b_1\, \frac{1 - q^n}{1 - q}
\end{aligned}$$

Зная что $|q| < 1$, получаем

$$b_1\, \frac{1 - q^n}{1 - q} \to \frac{b_1}{1 - q} \quad (n \to +\infty)$$

Значит, формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогресси равна

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_1\, q^{n-1} = \frac{b_1}{1-q}$$

Определение 22.1 (Числовой ряд).
Пусть $\{a_n\}$ — последовательность чисел, $a_n \in \mathbb{R}$. Тогда формальное выражение

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

называется числовым рядом, где

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$$

— члены ряда, а функция $n \mapsto a_n$ называется общим членом ряда.

Определение 22.2.
Пусть a_n - числовой ряд. Тогда:

1) *n-ная частичная сумма ряда имеет вид*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

2) *Если*

$$\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = S$$

то ряд называется сходящимся и S — его сумма. Пишем

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

3) *Если $\nexists \lim S_n$, в частности предел равен ∞, то ряд расходящийся и такой ряд не имеет суммы.*

Определение 22.3.
Пусть $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ — числовой ряд. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ ряд $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ нызывается n-ым остатком ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

Замечание 22.2.

- *Если ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится и его сумма равна* S, *то* $\forall n \in \mathbb{N}$ *его* n*-ый остаток сходится и его сумма* $S_k = S - S_n$.
- *Если ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *расходится, то* $\forall n \in N$ *его остаток тоже расходится.*

Замечание 22.3 (Свойства сходящихся рядов).

1) *Сумма сходящихся рядов равна сходящимуся ряду*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S^{(A)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = S^{(B)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n) = S^{(A)} + S^{(B)}$$

2) *При домножении сходящегося ряда на константу ряд остаётся сходящимся, а сумма увеличивается в разы домножаемой величены*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S \quad \Rightarrow \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha\, a_n = \alpha\, S$$

Доказательство.

1) $S_n^{(A+B)} = (S_n^{(A)} + S_n^{(B)}) \to (S^{(A)} + S^{(B)})$
Таким образом, $S_n^{(A+B)} \to S^{(A+B)}$

2) $S_n^{(\alpha\, A)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha\, a_n = \alpha\, S_n^{(A)} \to \alpha\, S^{(A)}$
Таким образом, $S^{(\alpha\, A)} \to \alpha\, S^{(A)}$

■

Теорема 22.1 (Необходимое условие сходимости).
Если ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S$$

то

$$\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Доказательство.
Из определения частичной суммы ряда следует

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$$

Тогда

$$\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

■

Замечание 22.4.
Если $a_n \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$, то ряд расходится.

Необходимый признак не доказывает, что ряд сходится, согласно ему. Он лишь показывает возможную(!) сходимость. А если признак указывает на расходимость, то он точно расходится.

Пример 22.1.
Дано

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ln(1+\frac{1}{n})$$

С одной стороны (через формулы эквивалентности б.м. функций (1 сем.))

$$a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \qquad (n \to \infty)$$

Значит

$$a_n \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

С другой

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) =$$
$$= \ln\left(\frac{\cancel{2}}{1}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\dots\frac{n+1}{\cancel{n}}\right) = \ln(n+1)$$

Таким образом

$$S_n = \ln(n+1) \to +\infty$$

Ряд расходится, хоть и пределы его слагаемых стремятся к нулю

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

Для доказательства сходимости используют следующие критерии

Теорема 22.2 (Критерий Коши сходимости числового ряда).
Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \forall p \in N \quad |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

Обратное утверждение также верно

Доказательство.
Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, то это эквивалентно

$$\exists \lim_{n\to+\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$$

По определению предела по Коши это эвивалентно

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall p \in N \quad |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

Последнее неравенство можно расписать

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

■

Теорема 22.3 (Признак абсолютной сходимости).
Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится.

Доказательство.
$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ сходится, следовательно по критерию Коши

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant \mathbb{N} \quad \forall p \geqslant 1 \quad ||a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}|| < \varepsilon$$

Воспользуемся неравенством треугольника, получим

$$||a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}|| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon$$

По критерию Коши ряд сходится. ■

Определение 22.4.
Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ сходится, ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся.

23. Признаки сходимости положительных рядов

Определение 23.1.
Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *называется положительным, что эквивалентно*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geqslant 0$$

Теорема 23.1.
Пусть $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *— положительный ряд, частичные суммы* S_n *которого ограничены сверху. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = S$ *сходится и его сумма равна*

$$S = \sup_{n \geqslant 1}(S_n)$$

Доказательство.
Так как ряд положительный, то очевидно что

$$\forall n \geqslant 1 \quad S_{n+1} = S_n + a_n \geqslant S_n$$

Значит последовательность $\{sS_n\}$ возрастает.
Также

$$\exists \lim_{n \to +\infty} S_n$$

это эквивалентно последовательности $\{S_n\}$, которая по условию ограничена сверху и её предел равен

$$S = \underset{n \geq 1}{sup}(S_n)$$

■

Ограниченность суммы сверху означает то, что она всегда стремится к некоторому значению, но не превосходит его. Если это мысленно представить, то станет очевиден факт того что ряд с таким свойством частичных сумм будет иметь на бесконечном промежутке конечное значение суммы, так как, например, слагаемые могут уменьшаться и становится очень малыми. Также данный факт был рассмотрен при доказательстве формулы для убывающей геометрической прогрессии (см. предыдущий параграф).

Теорема 23.2 (Признак сравнения сходимости рядов).
Пусть $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *— два ряда. При этом:*

1) $\forall n \geq 1 \quad a_n \geq 0$ *(ряд положительный)*

2) $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad |b_n| \leqslant a_n$

3) *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится*

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *сходитсся*

Доказательство.
Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится то по критерию Коши следует

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq n_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

Воспользуемся неравенством из условия и распишем его, пользуясь неравентсвом треугольника

$$|b_{n+1} + \cdots + b_{n+p}| \leqslant |b_{n+1}| + \cdots + |b_{n+p}| \leqslant a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}$$

Зная, что ряд a_n положительный, получим

$$a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

Объединим два неравенства выше и получим следующее неравентсво

$$|b_{n+1} + \cdots + b_{n+p}| < \varepsilon$$

По критерию Коши, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходится. ■

Следствие 23.1.
Если

$$\forall n \geq n_0 \quad 0 \leqslant b_n \leqslant a_n$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *расходится, то и* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *тоже расходится*

Доказательство.
От противного:
Если бы $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходился, то по теореме 2 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ — сходится. Получаем противоречие ■

Теорема 23.3 (Признак сравнения рядов в предельной форме).

Пусть

$$\forall n \geq 1 \quad a_n \geqslant 0, \quad b_n \geqslant 0 \quad \exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0 \quad (c > 0)$$

Тогда если ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *сходится, и наоборот.*

Доказательство.

$\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, а также по условию

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

Пусть $\varepsilon = \frac{c}{2}(\varepsilon > 0)$, тогда

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad \left|\frac{a_n}{b_n} - c\right| < \frac{c}{2}$$

Раскроем знак модуля в неравентстве, получим

$$\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3\,c}{2}$$

$$\forall n \geqslant n_0 \quad 0 < b_n < \frac{2}{c}\,a_n$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, тогда по теореме 2 ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходится.

$\Leftarrow$ Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходится, тогда аналогично получаем

$$\forall n \geq n_0 \quad a_n < \frac{3}{2}\,c\,b_n$$

По теореме 2 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится.

■

Замечание 23.1.
Теорема спрвадлива и для расходящихся рядов.
Если один из рядов расходится, то и другой расходится.

не разобран

Пример 23.1.

1) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$ *расходится* (1)

$\ln(1+t) \sim t (t \to 0) \Rightarrow [t = \frac{1}{n}] \Rightarrow \ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n} (n \to +\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$

Теперь, учитывая, что у нас есть ненулевой предел отношения элементов двух рядов, один из которых расходящийся, можно говорить, что расходится и второй, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *расходится*

2) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ *сходится.* $(S_n = 1 - \frac{1}{n+1}) \Rightarrow$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *сходится, т.к.* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = 1$

Теорема 23.4 (Признак Даламбера).
Пусть $\forall n \geq 1$ $a_n > 0$ *и*

1) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится если*

$$\exists q < 1 \quad \forall n \geqslant n_0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q \leqslant 1$$

2) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *расходится если*

$$\forall n \geqslant n_0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$$

Доказательство.

1) Дано

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1 \qquad (\forall n \geqslant n_0)$$

Из этого можно вывести следующую цепочку

$$a_n \leqslant a_{n-1}\, q \leqslant a_{n-2}\, q^2 \leqslant \cdots \leqslant a_{n_0}\, q^{n-n_0}$$

Рассмотрим цепочку как ряд и найдём его сумму

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_{n_0}\, q^{n-n_0} = a_{n_0} \sum_{k=0}^{+\infty} q^k$$

Так как $q < 1$, следовательно перед нами убывающая геометрическая прогрессия. По формуле сумма равна

$$a_{n_0} \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{a_{n_0}}{1-q}$$

Значит частичные суммы ряда ограниченны, следовательно по теореме 1, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится.

2) Дано

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 \qquad (\forall n \geqslant n_0)$$

Из этого следует

$$a_n \geqslant a_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant a_{n_0} > 0$$
$$a_n \geq a_{n_0} > 0 \qquad (n \to +\infty)$$

если бы $a_n \to 0$ (необходимое условие сходимости ряда), тогда по принципу сжатой переменной $a_{n_0} = 0$, но это не так, есть противоречие. Значит $a_n \nrightarrow 0 (n \to +\infty)$ и ряд расходится.

■

Теорема 23.5 (Признак Даламбера в предельной форме).
Пусть

$$\forall n \geqslant 1 \quad a_n > 0 \quad \exists \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$*:*

1) сходится, если $q < 1$

2) расходится, если $q > 1$

3) при $q = 1$ может сходиться или расходиться

Доказательство.

1) Дано

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \qquad q < 1$$

Возьмём

$$\varepsilon = \frac{1-q}{2} > 0$$

$\varepsilon > 0$ так как по условию $q < 1$.
Из определения предела по Коши получаем

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \qquad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - q\right| < \frac{1-q}{2}$$

Раскроем знак модуля, а также воспользуемся $q < 1$, и в итоге получим

$$q - \frac{1-q}{2} < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \frac{1-q}{2} = \frac{q+1}{2} = q^* < \frac{1+1}{2} = 1$$

$$\forall n \geqslant n_0 \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} < q^* < 1$$

Таким образом, по теореме 4 следует, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится

2) Дано

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \qquad q > 1$$

Аналогично выбираем занчение ε

$$\varepsilon = \frac{q-1}{2} > 0$$

Далее всё аналогично

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \qquad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - q\right| < \frac{q-1}{2}$$

$$q - \frac{q-1}{2} < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \frac{q-1}{2}$$

$$1 = \frac{1+1}{2} < q^* = \frac{q+1}{2} < \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\forall n \geqslant n_0 \qquad 1 < q^* < \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Аналогично по теореме 4 получаем, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ расходится

3) Дано

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \qquad q = 1$$

Для доказательства достаточно привести примеры сходящегося и расходящегося ряда для $q = 1$:

- Пример расходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \to 1 \quad (n \to +\infty)$$

- Пример сходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1 \quad (n \to +\infty)$$

Таким образом, при $q = 1$ существует неопределённость.

$\blacksquare$

Теорема 23.6 (Радикальный метод Коши).
Пусть

$$\forall n \geqslant 1 \quad a_n > 0 \quad \exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l, \quad l \in \mathbb{R}$$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$*:*

1) *сходится при* $l < 1$

2) *расходится при* $l > 1$

3) *может сходиться или расходиться при* $l = 1$

Доказательство.

1) Дано $l < 1$, тогда $0 \leqslant l < 1$
Возьмём значение $\varepsilon > 0$ и тогда по определению предела по Коши получим

$$\varepsilon = \frac{1-l}{2} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad |\sqrt[n]{a_n} - l| < \frac{1-l}{2}$$

Раскроем модуль

$$\sqrt[n]{a_n} < \frac{l+1}{2} = l^* < 1$$
$$a_n < (l^*)^n \quad (n \geqslant n_0) \quad l^* \in [0; 1]$$

ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} (l^*)^n$ сходится, т.к. это убывающая геометрическая прогрессия, следовательно по теореме 2 ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится.

2) Дано $l > 1$. Доказательство аналогино

$$\varepsilon = \frac{l-1}{2} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |\sqrt[n]{a_n} - l| < \frac{l-1}{2}$$
$$1 < l^* = \frac{l+1}{2} = l - \frac{l-1}{2} < \sqrt[n]{a_n} \quad (n \geqslant n_0)$$
$$\forall n \geqslant n_0 \quad a_n > 1 \quad a_n \nrightarrow 0 (n \to +\infty)$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ расходится

3) Для доказательства достаточно привести примеры сходящегося и расходящегося ряда

- ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 1$ расходится

$$a_n = 1, \quad \sqrt[n]{a_n} = 1, \quad \sqrt[n]{a_n} \to 1 \quad (n \to +\infty) \quad \Rightarrow \quad l = 1$$

- ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (т.к. гармонический ряд)

$$\sqrt[n]{a_n} = (\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{n}} = e^{-2\frac{\ln n}{n}} \to 1 \quad (n \to +\infty) \quad \Rightarrow \quad l = 1$$

■

Теорема 23.7 (Интегральный признак Коши).
Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

1) $f(x) \in C_{[1;+\infty)}$

2) $f(x)$ *убывает на* $[1; +\infty)$

3) $\forall x \in [1; +\infty) \quad f(x) > 0$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ *сходится* $\Leftrightarrow$ *несобственный интеграл* $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\, dx$ *сходится*

Доказательство.
Из условия

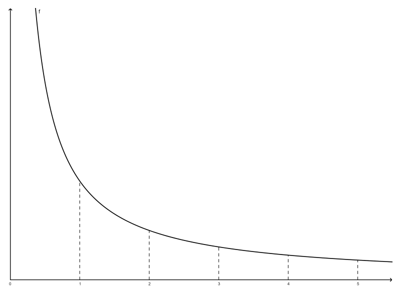


Рис. 18.

$$x \in [k; k+1], \quad f(k+1) < f(x) < f(k) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Следовательно

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k)$$
$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leqslant \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) = S_n$$
$$S_{n+1} - f(1) \leqslant \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant S_n$$

$\Rightarrow$ Дано $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ сходится, следовательно по теореме 1 $S_n \leqslant S$.
По аксиоме Архимеда

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad t > 1 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad t < n+1$$

ниже не понятно $F(t) = \int_1^t f(x)\,dx = \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant S_n \leqslant S$

$F(t) \nearrow$ т.к. $F' = f(x) \Rightarrow \exists \lim\limits_{t\to+\infty} = F \leq S \Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится

$\Leftarrow$ Дано $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = F$ сходится, тогда

$$S_n \leqslant f(1) + \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant f(1) + F$$

Очевидно что по теореме 1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ сходится.

∎

24. Сходимость знакопеременных рядов

Определение 24.1.
Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *называют знакопеременным, если существует бесконечно много* $n \in \mathbb{N} a_n > 0$ *и бесконечно много* $k \in \mathbb{N} a_k < 0$

Определение 24.2.
Ряд

$$\sum (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

называют знакочередующимся, если $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > 0$

Теорема 24.1 (признак Лейбница сходимость знакоперем. рядов).

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n > 0$

2) $\{a_n\} \searrow$ *строго, то есть* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} < a_n$

3) $\exists \lim\limits_{n \to \infty} = 0$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n = S$ *сходится,* S *- его сумма, при этом*

1) $a_1 - a_2 < S < a_1$

2) $\forall n \geqslant 1 \quad |S - S_n| < a_{n+1}$

Доказательство.
Рассмотрим $\{S_{2n}\}$ тогда

$$S_{2\,n} = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{>0} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{>0} + \dots + \underbrace{(a_{2\,n-1} - a_{2\,n})}_{>0}$$

Также заметим

$$S_{2\,(n+1)} - S_{2\,n} = a_{2\,n+1} - a_{2\,n+2} > 0 \quad \forall n \geqslant 1$$

Так как по условию $\{a_n\}$ возрастает строго, тогда $S_{2n} < S_{2(n+1)}$ и $\{S_{2n}\}$ строго возрастает.
Теперь рассмотрим другую группировку.

$$S_{2n} = \underbrace{a_1}_{>0} - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{>0} - \dots - \underbrace{(a_{2n-2} - a_{2n-1})}_{>0} - \underbrace{a_{2n}}_{>0}$$

Из этого следует

$$S_{2n} < a_1 \quad (n \geqslant 1) \qquad S_{2n} < a_1 - a_2 + a_3 (n \geqslant 2)$$

Значит S_{2n} ограниченна сверху. Тогда

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S = \sup_{n\geqslant 1} S_{2n} \leqslant a_1 - (a_2 - a_3) < a_1$$

Значит

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (\underbrace{S_{2n}}_{\to S} + \underbrace{a_{2n+1}}_{\to 0}) = S$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S < a_1$$

Таким образом

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_2 - a_3 + a_4 - \dots = a_1 - S < a_2$$

Значит $a_1 - a_2 < S$ (пункт 1 доказан)
Второй пункт доказывается аналогично

$$(-1)^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1} a_k = a_{n+1} - a_{n+2} + \dots = \underbrace{(-1)^n (S - S_n)}_{0 < a_{n+1} - a_{n+2} < a_{n+1}}$$

Таким образом $|S - S_n| < a_{n+1}$ ∎

не разобрано

Пример 24.1.
Доказ. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *сходится(не абсолютно)*
$\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *- ряд Лейбница*
Решение:
$a_n = \frac{1}{n} > 0, a_n \searrow$ *строго,* $a_n - > 0 (n - > \infty)$ $=>$ *по т.1 ряд Лейбница сходится*
Проверка на абс. сход.
$\sum_{n=1}^{+\infty} |\frac{(-1)^{n-1}}{n}| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$*расход. (гарм. ряд)*

не разобрано

Пример 24.2.
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ *- сходится абсолютно*
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{ln(n+1)}$ *- сходится (не абсолютно)*

не разобрано

Теорема 24.2 (Признак Дирихле).
Пусть $\sum_{n=1}^{infty} a_n\, b_n$ *- числовой ряд, удовлетворяющий следующим условиям:*

1) $\exists M > 0 : \forall n \in N|\sum_{k=1}^{n} a_k| \leq M$, *то есть частичная сумма ряда ограничена*

2) $\{b_n\} \to 0$, *то есть* $\forall n \geq 1, b_k > 0$; $\forall n \geq 1 b_{n+1} < b_n$; $\exists lim b_n = 0$
Тогда ряд $\sum_{n=1}^{infty} a_n b_n$ *сходится и его сумма* $|T| \leq M b_1$

не разобрано

Доказательство.
$T_n = a_1\, b_1 + \cdots + a_n\, b_n = (a_1\, b_1) + (a_1\, b_2 + a_2\, b_2 - a_1\, b_2) + (a_1\, b_3 + a_2\, b_3 + a_3\, b_3 - a_1\, b_3 - a_2\, b_3) + \cdots + a_1\, b_n + a_2\, b_n + \cdots + a_n\, b_n - a_1\, b_n - a_2\, b_n - \cdots - a_{n_1}\, b_n = = S_1 b_1 + S_2 b_2 + \cdots + S_n b_n - S_1 b_2 - S_2 b_3 - \cdots - S_{n_1} b_n = S_1(b_1 - b_2) + S_2(b_2 - b_3) + \cdots + S_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + S_n b_n$
$\sum_{k=1}^{infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} S_k(b_k - b_{k+1})$
$|S_k(b_k - b_{k+1})| < M(b_k - b_{k+1})$
$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \sum_{k=1}^{n} |S_k(b_k - b_{k+1})| < M \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = M(b_1 - b_n) \to M b_1$
По признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} S_k(b_k - b_{k+1}) = T$ - сходится
$T_n = \sum_{k=1}^{n-1} S_k(b_k - b_{k+1}) + S_n b_n \to T \Rightarrow \exists lim T_n = T$ ∎

Замечание 24.1.
Если

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} b_n, \qquad b_n \to 0$$

То значение суммы можно свести к следующему

$$a_n = (-1)^{n-1}, |S_n| \leqslant 1$$

Не разобран

Пример 24.3.
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{cos n\alpha}{n^\beta}$
$1)\alpha = 2\Pi k, k \in Z$ $cos(2\Pi nk) = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}, \beta \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{n^\beta}$ *расходится, иначе сходится*
$2)\alpha \neq 2\Pi k$
$a_n = cos n\alpha, b_n = \frac{1}{n^\beta} \to 0$ *при* $\beta > 0$
$S_n = cos\alpha + ... cos n\alpha$
$2cos\alpha S_n = 2cos^2\alpha + 2cos\alpha cos 2\alpha + ... + 2cos\alpha cos n\alpha = 1 + cos 2\alpha + cos\alpha +$

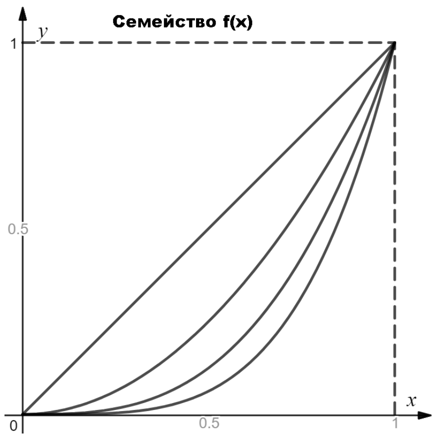
$cos3\alpha + ... + cos(n-1)\alpha + cos(n+1)\alpha = 1 + S_n - cosn\alpha + S_n - cos\alpha + cos(n+1)\alpha$
$2(1 - cos\alpha)S_n = 1 + cosn\alpha + cos\alpha - cos(n+1)\alpha$
$2(1 - cos\alpha)|S_n| = 4 \Rightarrow |S_n| \le \frac{2}{1-cos\alpha} = M \Rightarrow$ *ряд сходится*

Часть IV
Функциональные последовательности и ряды

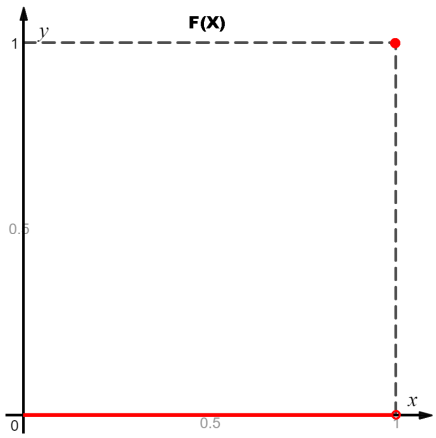
25. Равномерно сходящиеся функциональные последовательности

Определение 25.1. *Пусть* $\{f_n(x)\}$ *это последовательность функций, определённых в некоторой области* $D \subset \mathbb{R}$*, тогда говорят, что эта последовательность поточечно сходится к* $F(x), x \in D$
т.е. $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} = F(x), (x \in D) \Leftrightarrow \forall x \in D \ \exists \lim\limits_{n\to+\infty} = F(x)$
т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}, N = N(\varepsilon, x) \ \forall n > N \ |f_n(x) - F(x)| < \varepsilon$

Пример 25.1.



Семейство $f_n(x)$



$F(x)$

$f_n(x) = x^n, x \in [0;1]$

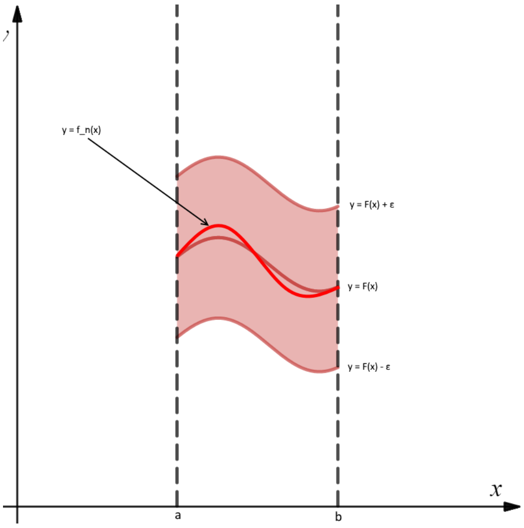
$$\lim_{n\to+\infty} x^n = F(x) \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, x \in [0;1) \\ 1, x = 1 \end{cases}$$

Определение 25.2. *Пусть* $\{f_n(x)\}$ *это последовательность функций, определённых в некоторой области* $D \subset \mathbb{R}$*, тогда говорят, что эта последовательность равномерно сходится к* $F(x), x \in D \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}, N = N(\varepsilon, x) \ \forall n > N \ \forall x \in D \ |f_n(x) - F(x)| < \varepsilon$

Отличие от поточечной сходимости получается только в том, что номер, с которого начинается пренебрежимо малое отставание от F не зависит от x

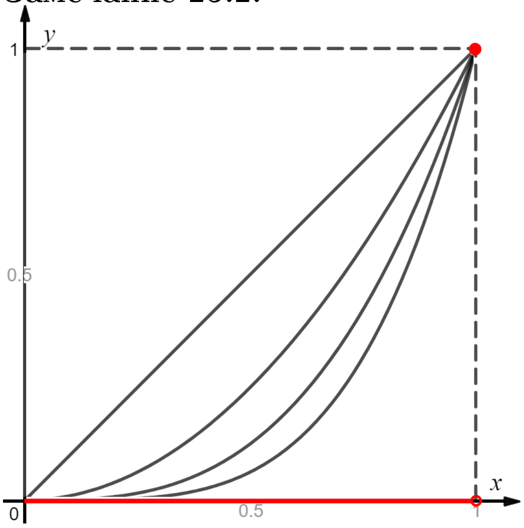
Обозначают: $f_n(x) \rightrightarrows F(x)(n \to +\infty; x \in D)$

Замечание 25.1 (Геометрический смысл равномерной сходимости).



$D = [a; b]$

Замечание 25.2.



$f_n(x) = x^n; x \in [0;1]$ $f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\to} F(x)$

$f_n(x) \not\rightrightarrows F(x)$, *где* $F(x) = \begin{cases} 0, x \in [0;1) \\ 1, x = 1 \end{cases}$ $\quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$

Теорема 25.1. *(Критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей) Пусть* $\{f_n(x)\}$ *- функциональная последова-*

тельность, где $x \in D$. *Тогда* $\{f_n(x)\}$ *равномерно стремится к* $F(x)$ *при* $n \to +\infty; x \in D \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq N\ \forall x \in D\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Доказательство.
$\Rightarrow$
Пусть $f_n(x)$ равномерно сходится к $F(x)$ для $n \to +\infty, x \in D \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall n \geq N\ \forall x \in D\ |f_n(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$;
$\Rightarrow \forall m \geq N\ \forall x \in D\ |f_m(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$
$|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - F(x) + F(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - F(x)| +$
$+ |f_m(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

$\Leftarrow$
$\forall \varepsilon\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n, m \geq N\ |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$
Тогда $\forall x \in D\ f_m(x) \underset{n \to +\infty}{\to} F(x)$ (по критерию Коши для числовой последовательности)
$\Rightarrow (m \to +\infty) \Rightarrow |f_n(x) - F(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow f_n(x) \rightrightarrows F(x)(n \to +\infty; x \in D)$
■

Теорема 25.2. *(О непрерывности предела равномерно сходящихся функциональных последовательностей) Пусть* $\forall n \geq 1$ *функции* $f_n(x) \in C_{[a;b]}$. *Тогда* $f_n(x) \rightrightarrows F(x)(n \to +\infty, x \in [a;b]) \Rightarrow F(x) \in C_{[a;b]}$

Доказательство. Надо доказать, что 1. $\forall x_0 \in [a;b]\ \exists \lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$и $\begin{cases} \exists F(a+0) = F(a) \\ \exists F(b-0) = F(b) \end{cases}$
Пусть $x_0 \in [a;b], f_n(x) \in C_{[a;b]} \Rightarrow$ [по теореме Кантора] $\Rightarrow$
$\Rightarrow f_n(x)$равномерно непрерывна на$[a;b] \forall n in \mathbb{N}$,
т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0, \delta = \delta(\varepsilon, n)\ \forall x, x_0 \in [a;b]\ |x - x_0| < \delta\ |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$
$f_n(x) \rightrightarrows F(x)(n \to +\infty; x \in D)$ для $\varepsilon > 0$
$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall x, x_0 \in [a;b] |f_n(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, |f_n(x_0) - F(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$
Для $n = N : |f_N(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{3}; |f_N(x_0) - F(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow |F(x) - F(x_0)| = |F(x) - f_N(x) + f_N(x) - F(x_0) - f_N(x_0) + f_N(x_0)| \leq$
$\leq |f_N(x) - F(x)| + |f_N(x_0) - F(x_0)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$
$\delta = \delta(\varepsilon, n)$, т.е. δ не зависит от x
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \exists \delta(\varepsilon, n) > 0\ \forall x, x_0 \in [a;b]\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$
$\Rightarrow F(x)$непрерывна на $[a;b]$ ■

Замечание 25.3. $\lim\limits_{x \to x_0}(\lim\limits_{n \to +\infty}(f_n(x))) = \lim\limits_{n \to +\infty}(\lim\limits_{x \to x_0}(f_n(x))) \Leftrightarrow F(x) \in C_{[a;b]}, x, x_0 \in [a;b]$

Теорема 25.3. *(Об интегрировании равномерно сходящихся функциональных последовательностей) Пусть функции* $f_n(x) \in C_[a;b]$ *и* $f_n(x) \rightrightarrows F(x), (n \to +\infty, x \in [a;b]) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b F(x)dx$$

Доказательство.
$f_n(x) \rightrightarrows F(x)(n \to +\infty; x \in [a;b]) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall x \in [a;b] |f_n(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

$$|\int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b F(x)dx| = |\int\limits_a^b f_n(x)dx - F(x)dx| \leq$$

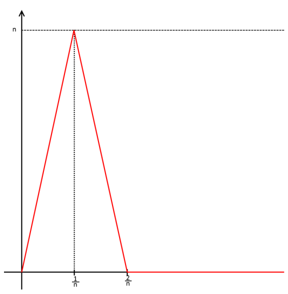
$$\leq |\int\limits_a^b f_n(x)dx - F(x)dx| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall x \in [a;b] |\int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b F(x)dx| \leq \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b F(x)dx \qquad \blacksquare$$

Замечание 25.4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)dx$

Замечание 25.5. *Теорема 3 неверна в случае поточечной, а не равномерной, сходимости.*



$f_n(x) \in C_{[0;1]}. f_n(x) \to 0(n \to +\infty; x \in [0;1])$
$\int\limits_0^1 f_n(x) =$ [как площадь треугольника] $= \frac{2}{n}\frac{n}{2} =$
$1 \to 1(n \to +\infty)$
Но при этом $\int\limits_0^1 F(x) = 0 \to 0(n \to +\infty) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx \neq \int\limits_a^b F(x)dx$$

Теорема 25.4. *(О дифференциировании равномерно сходящихся функциональных рядов) Пусть* $f_n(x) \in C^1_{[a;b]}$*, т.е.*$\exists f'_n(x) \in C_{[a;b]}$ *и выполнены условия:*

1) $f'_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)(n \to +\infty; x \in [a;b])$

2) $\exists x_0 \in [a;b]\ f_n(x_0) \to A(n \to +\infty)$

Тогда:

1) $\exists F(x) \in C^1_{[a;b]}\ f_n(x) \rightrightarrows F(x)(n \to +\infty; x \in [a;b])$

2) $F'(x) = \varphi'(x)(x \in [a;b])$

Доказательство. $F(x) = A + \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)dt$

$\begin{cases} f'_n(x) \in C_{[a;b]} \\ f'_n(x) \rightrightarrows \varphi(x) \end{cases} \Rightarrow$ [по теореме 2] $\Rightarrow \varphi(t) \in C_{[a;b]} \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi(t)$ интегрируема $\Rightarrow$ [по теореме Барроу] $\Rightarrow \exists F'(x) = \varphi(x)(x \in [a;b])$
$|f_n(x) - F(x)| = |\int\limits_{x_0}^{x} f'_n(t)dt + f_n(x_0) - A - \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)dt| =$
$= |\int\limits_{x_0}^{x}(f'_n(t) - \varphi(t))dt + f_n(x_0) - A| \leq |\int\limits_{x_0}^{x} |(f'_n(t) - \varphi(t))|dt| + |f_n(x_0) - A|$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_1\ \forall t \in [a;b] |f'_n(x) - \varphi(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ т.к. $f_n(t)$ сходится к $\varphi(t)$
Для $\varepsilon > 0 \exists N \geq N_1\ \forall n \geq N\ |f_n(x_0) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$
Итого:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |\int\limits_{x_0}^{x} |(f'_n(t) - \varphi(t))|dt| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} |\int\limits_{x_0}^{x} dt| =$
$= \frac{\varepsilon|x-x_0|}{2(b-a)} \leq \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2}$
Прибавим к этому, что $|f_n(x_0) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ и получим:
$|f_n(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
Итого:
$\forall x \in [a;b] |f_n(x) - F(x)| < \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n \geq N\ \forall x \in [a;b]\ |f_n(x) - F(x)| < \varepsilon \Rightarrow f_n(x) \rightrightarrows F(x), (n \to +\infty, x \in [a;b])$ 1я часть доказана Тут есть доказательство второй части, которое я пропустил или какой-то подвох? ■

26. Равномерно сходящиеся функциональные ряды

Определение 26.1. *Пусть $u_n(x)$ - функциональная последовательность, определённая на $D, x \in D$*
Тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ - функциональный ряд $x \in D$. Этот ряд сходится $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = S(x), x \in D$. При этом: $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ - сумма ряда $(x \in D)$. Т.е. ряд сходится к сумме S на $D \Leftrightarrow S_n(x) \to S(x)(n \to +\infty; x \in D)$

Определение 26.2. *В определении 1 говорят, что ряд равномерно сходится на области $D, D \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow S_n(x) \rightrightarrows S(x)(n \to +\infty, x \in D)$*

Теорема 26.1. *(Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда)*
Пусть $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x), x \in D, D \subset \mathbb{R}$. Тогда этот ряд равномерно сходитсян на $D \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall p \geq 1\ \forall x \in D\ |u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$

Доказательство. $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_n(x)$ - частичная сумма ряда, тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на $D \Leftrightarrow S_n(x) \rightrightarrows S(x)(n \to +\infty; x \in D) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ [критерий Коши для функциональных последовательностей] $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall p \geq 1\ \forall x \in D\ |u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$ ■

Теорема 26.2. *(О непрерывности суммы равномерно сходящегося функционального ряда)*
Пусть $\forall n \geq 1\ u_n(x) \in C_{[a;b]}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = S(x)$ равномерно сходится к сумме $S(x)$ на $[a;b]$. Тогда $S(x) \in C_{[a;b]}$

Доказательство. Рассмотрим частичные суммы $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) = u_1(x)(\in C_{[a;b]}) + \cdots + u_n(x)(\in C_{[a;b]}) \in C_{[a;b]}$
$S_n(x) \rightrightarrows \S(x)(n \to +\infty; x \in [a;b]) \Rightarrow$ [по теореме 2 предыдущего параграфа] $\Rightarrow$
$S(x) \in C_{[a;b]}$ ■

Теорема 26.3. *(О почленном интегрировании равномерно сходящихся рядов)*

Пусть $\forall n \geq 1, u_n(x) \in C_{[a;b]}$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = S(x)$ *равномерно сходится на* $[a;b]$

Тогда $\int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_a^b u_n(x)$

Доказательство.

$S_n(x) \rightrightarrows S(x)(n \to +\infty; x \in [a;b])\forall n \geq 1\ s_n(x) in C_{[a;b]} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по теореме 2 $\Rightarrow S(x) \in C_{[a;b]}$ (т.е. все интегралы существуют)

По теореме 3 предыдущего параграфа $\int\limits_a^b S_n(x) \rightrightarrows \int\limits_a^b S(x)(n \to +\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_a^b S_n(x) = \int\limits_a^b (\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x))dx = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_a^b u_k(x)dx$ - частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_a^b u_n(x)dx$. Она будет стремиться к сумме $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_a^b u_n(x)dx = \int\limits_a^b S(x)dx$

■

Замечание 26.1. $\forall x \in [a;b]$ *в условиях теоремы 3* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_a^x u_k(t)dt = \int\limits_a^x S(t)dt$

Теорема 26.4. *(О почленном дифференциировании равномерно сходящихся функциональных рядов) Пусть* $\forall n \geq 1$ *функции* $u_n(x) \in C^1_{[a;b]}$ *и выполняются следущие условия:*

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ *равномерно сходится на* $[a;b]$

2) $\exists x_0 \in [a;b]\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0) = A, A \in \mathbb{R}$

Тогда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится к функции* $S(x) \in C^1_{[a;b]}$*на*$[a;b]$

2) $S'(x) = \varphi(x), x \in [a;b]$, *в частности:*

   - $S'(a+0) = \varphi(a)$
   - $S'(b-0) = \varphi(b)$

Доказательство. $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k'(x) \rightrightarrows \varphi(x)(n \to +\infty x \in [a;b]) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} (\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x))' \rightrightarrows \varphi(x)(n \to +\infty x \in [a;b]) \\ \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x_0) \to A(n \to +\infty) \end{matrix}\right| \Rightarrow [\text{по теореме 4 §1}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) \rightrightarrows S(x)(n \to +\infty x \in [a;b]) \quad (1) \\ S'(x) = \varphi(x), x \in [a;b] \end{cases}$$

$\varphi(x) \in C_{[a;b]} \Rightarrow S(x) \in C^1_{[a;b]}$

Из (1) $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = S(x)$ равномерно сходится на отрезке $[a;b]$ ■

Теорема 26.5. *(Достаточный признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов) Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *- функциональный ряд для* $x \in D, D \subset \mathbb{R}$

Тогда, если найдется числовой ряд $\exists \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$*, который удовлетворяет:*

1) $\forall x \in D \; \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n(x)| \leq a_n$

2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится*

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится на* D

Доказательство. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится $\Rightarrow$ [по критерию Коши] $\Rightarrow$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \; \forall p \geq 1 \quad |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$
$0 \leq u_n(x) \leq a_n \Rightarrow \forall n \geq 1 \quad a_n \geq 0;$
$\forall x \in D \quad |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| \leq |u_{n+1}(x)| + \dots + |u_{n+p}(x)| \leq$
$\leq a_{n+1} + \dots + a_{n+p} = |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \; \forall p \geq 1 \quad |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow$ [по теореме 1 §] $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на D ■

27. Степенные ряды

Определение 27.1. *Функциональный ряд вида* $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(x-\alpha)^n = C_0 + C_1(x-\alpha) + ... + C_n(x-\alpha)^n + ...$ *называется степенным рядом,* α *- центр ряда,* $C_0, C_1, ...$ *- коэффициенты ряда.*

Замечание 27.1. $t = x - \alpha \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} C_n(x-\alpha)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n t^n$ *- переместили центр в* 0

Теорема 27.1 (1-я Теорема Абеля). *Пусть степенной ряд* $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(x-\alpha)^n$ *сходится при* $x = x_0 \neq \alpha$
Тогда $\forall n, |x-\alpha| < |x_0 - \alpha|$ *данный ряд сходится, причём абсолютно, в точке* x

Доказательство. $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(x-\alpha)^n$ сходится $\Rightarrow \exists lim C_n(x_0-\alpha)^n = 0$ (необходимый признак сходимости)
$\Rightarrow C_n(x_0-\alpha)^n$ ограничена $\Rightarrow \exists M > 0 : \forall n \geq 0 |C_n(x_0-\alpha)^n| \leq M \Rightarrow |C_n||(x_0-\alpha)| \leq M$
Возьмём $x : |x-\alpha| < |x_0-\alpha|$ и пусть $q = \frac{|x-\alpha|}{x_0-\alpha} \Rightarrow 0 \leq q < 1$
Тогда $\forall n \geq 0 |C_n(x-\alpha)^n| = |C_n||x-\alpha|^n = |C_n||x_0-\alpha|^n q^n \leq M q^n$
Ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} M q^n = \frac{1}{1-q}$ сходится, следовательно ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(x-\alpha)^n$ сходится абсолютно по признаку сравнимости
■

Замечание 27.2 (Следствие). *Пусть ряд* $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(x-\alpha)^n$ *расходится при* $x_1 \neq a$, *тогда* $\forall x |x-\alpha| > |x_1-\alpha|$ *ряд расходится*

Доказательство. От противного:
Если в условиях следствия $\exists x_0 : |x_0-\alpha| > |x_1-\alpha|$ и ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(x_0-\alpha)^n$ сходится, то по теореме ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(x_1-\alpha)^n$ сходится абсолютно, что противоречит условию.
ч.т.д
■

Замечание 27.3.

Теорема 27.2 (О существовании радиуса сходимости степенного ряда).
Пусть $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(x-a)^n$ *- степенной ряд*
Тогда $\exists R, o \leq R \leq +\infty$, *для которого:*
1) $\forall x |x-a| < R$ *ряд сходится в* x
2) $\forall x |x-a| > R$ *ряд расходится в* x
При этом R *- радиус сходимости, а* $(a-R; a+R)$ *- интервал сходимости.*

Доказательство. Если ряд сходится только в a, $R = 0$
Если ряд сходится при $\forall x$, $R = +\infty$
Рассмотрим третий случай
$\exists x_0 \neq a$ и ряд сходится в x_0
$\exists x_1 \neq a$ и ряд расходится в x_1
Для упрощения доказательства перейдём к ряду с центром 0: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x_n$
Не умаляя общности можно считать, что $x_1 > 0$. Пусть $E = \{\alpha > 0 | \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x_n - \text{расходится}\}$
$R = \inf E \geq x_0 > 0 \Rightarrow R > 0$. Тогда нужно доказать, что: $\begin{cases} x > R \Rightarrow \text{ряд расходится} \\ |x| < R \Rightarrow \text{ряд сходится} \end{cases}$

1) $\forall x : \quad 0 \leq |x| < R$ - ряд сходится
2) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists x_\varepsilon \quad R < x_\varepsilon < R + \varepsilon$ ряд расходится в x_ε Возьмём $x > R$. $\quad \varepsilon = x - R > 0 \Rightarrow \exists x_\varepsilon \in E \quad R < x_\varepsilon < x \Rightarrow$ [по теореме 2] $\Rightarrow$ ряд расходится в x.

Итого: $\begin{cases} \forall x < R - \text{ряд сходится} \\ \forall x > R - \text{ряд расходится} \end{cases} \Rightarrow$ доказано для $x > 0$. Аналогично доказывается, для $x < 0 \Rightarrow R$ - радиус сходимости ряда ∎

Замечание 27.4. *(вычисление радиуса сходимости ряда)*
Пусть ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n$

1) $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} |\frac{c_{n+1}}{c_n}| = Q \Rightarrow R = \frac{1}{Q} \quad (Q = 0 \Rightarrow R = +\infty; Q = \infty \Rightarrow R = 0)$

2) $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{c_n} = L \Rightarrow R = \frac{1}{L} \quad (L = 0 \Rightarrow R = +\infty; L = \infty \Rightarrow R = 0)$

Доказательство.

1) Рассмотрим ряд: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |c_n||x-a|^n$
$a_n = |c_n||x-a|^n \geq 0(x \neq a, c_n > 0) \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|c_{n+1}||x-a|^{n+1}}{|c_n||x-a|^n} = |x-a| \cdot |\frac{c_{n+1}}{c_n}| \to |x-a| \cdot Q = q$
По признаку Даламбера: $\begin{cases} q < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится} \Leftrightarrow |x-a| \cdot Q < 1 \Leftrightarrow |x-a| < \frac{1}{Q} \\ q > 1 \Rightarrow \text{ряд расходится} \Leftrightarrow |x-a| \cdot Q > 1 \Leftrightarrow |x-a| > \frac{1}{Q} \end{cases}$

2) $\sqrt[n]{a_n} = |x-a| \sqrt[n]{|c_n|} \to |x-a| \cdot L = l$
По признаку Коши: $\begin{cases} l < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится} \Leftrightarrow |x-a| \cdot L < 1 \Leftrightarrow |x-a| < \frac{1}{L} \\ l > 1 \Rightarrow \text{ряд расходится} \Leftrightarrow |x-a| \cdot L > 1 \Leftrightarrow |x-a| > \frac{1}{L} \end{cases}$

■

Пример 27.1.

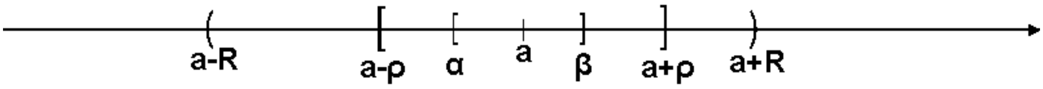
1) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \frac{c_{n+1}}{c_n} \to 1 \Rightarrow R = 1 \Rightarrow (-1; 1)$ - *интервал сходимости*

2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow R = +\infty \Rightarrow$ *сходится* $\forall x \in \mathbb{R}$

3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n! \cdot x^n \quad \frac{c_{n+1}}{c_n} \to +\infty \Rightarrow R = 0 \Rightarrow$ *сходится тлько при* $x = 0$

Теорема 27.3. *(Вторая теорема Абеля) Пусть* $R > 0$ *- радиус сходимости степенного ряда* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n$.
Тогда $\forall [\alpha; \beta] \subset (a-R; a+R)$ *ряд* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n$ *сходится равномерно на* $[\alpha; \beta]$

Доказательство.



$\exists \rho < R : [\alpha; \beta] \subset [a-\rho; a+\rho]$, т.е. $a-\rho \leq \alpha < \beta \leq a+\rho, \rho \geq \max |a-\alpha|; |a-\beta|$
$\forall x \in [\alpha; \beta] \quad |c_n(x-a)^n| = |c_n||x-a|^n < |c_n| \cdot \rho^n$
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n$ – сходится равномерно на $[\alpha; \beta]$
Сложность была в том, чтобы сделать отрезок сходимости симметричным относительно центра ряда ■

Следствие 27.1.
Пусть $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n, x \in (a-R; a+R), R > 0.$
Тогда $S(x) \in C_{(a-R;a+R)}$

Доказательство. $c_n(x-a)^n \in C_{(a-R;a+R)}$, возьмём $x_0 \in (a-R; a+R), x_0 \in (\alpha; \beta)$, при этом $[\alpha; \beta] \subset (a-R; a+R) \Rightarrow$ ряд сходится равномерно для $[\alpha; \beta] \Rightarrow S(x) \in C_{[\alpha;\beta]} \Rightarrow S(x)$ непрерывна в x_0 ■

Следствие 27.2.
Пусть $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n, R > 0, x \in (a-R; a+R).$
Тогда $\forall [\alpha; \beta] \subset (a-R; a+R) \int\limits_{\alpha}^{\beta} S(x)dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n \cdot \frac{(\beta-a)^{n+1} - (\alpha-a)^{n+1}}{n+1}$, *т.к. ряд сходится равномерно на* $[\alpha; \beta]$
Если $\alpha = a; \beta = t : \int\limits_{a}^{t} S(x)dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1}(t-a)^{n+1}, |t-a| < R$

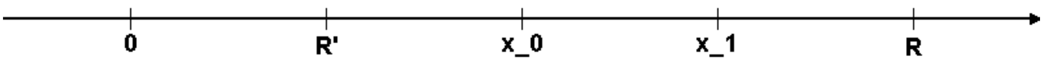
Теорема 27.4. *(О почленном дифференциировании степенного ряда) Пусть* $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n, R > 0, x \in (a-R; a+R).$
Тогда

1) $S(x) \in C_1^{(a-R;a+R)}$

2) $S'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c'_n((x-a)^n)' = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} (m+1)c_{m+1}(x-a)^m, x \in (a-R; a+R)$

Причём радиус сходимости этого ряда $R' = R$

Доказательство.От противного: предположим, что $R' < R$
Для простоты положим $a = 0$. Возьмём $x_0 \in (R'; R)$ и $R' < x_0 < x_1 < R, q = \frac{x_1}{x_0} > 1$



$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x_0^n$ абсолютно сходится, т.к. $0 < x_0 < R$
$|(n+1)c_{n+1}x_1^n| = (n+1)|c_{n+1}||x_1|^n \leq \frac{(n+1)|c_{n+1}|}{q^n} \cdot x_1^n$
$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n+1}{q^n} =$ [По правилу Лопиталя для $lim \frac{+\infty}{+\infty}$] $= \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{q^t \ln(q)} = 0 \Rightarrow$
$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 0 < \frac{n+1}{q^n} < 1 \Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad |(n+1)c_{n+1}x_0^n| < |c_{n+1}|x_1^n$
Ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |c_{n+1}|x_1^n$ - сходится при $0 < x_1 < R \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)c_{n+1}x_0^n$ - абсолютно сходится по признаку сравнения. Но $x_0 > R' \Rightarrow$ ряд расходится.
Противоречие $\Rightarrow R' = R$
$S'(x) \in C_{(a-R;a+R)} \Rightarrow S(x) \in C^1_{(a-R;a+R)}$ ■

Следствие 27.3. *Пусть* $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n, R > 0, x \in (a-R; a+R)$.
Тогда $\forall k \geq 1 \in \mathbb{N} \quad S(x) \in C^k_{(a-R;a+R)}, S^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} \cdot c_{n+k}(x-a)^n, x \in (a-R; a+R)$, *т.е.* $S(x) \in C^{+\infty}_{(a-R;a+R)}$ *- бесконечно дифференциируема*

Пример 27.2.
$|x| < 1$
$\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!k!} \cdot x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c^k_{n+k} x^n$

Теорема 27.5. *(Третья теорема Абеля) Пустья числовой ряд* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n = S$ *сходится,* $S \in \mathbb{R}$

Рассмотрим степенной ряд $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, |x| < 1$, *т.е.* $x \in (-1; 1)$

Тогда $\exists \lim\limits_{x \to 1-0} S(x) = S$, *т.е.* $S(x)$ *непрерывна слева в* $x = 1$

Пример 27.3.

1) $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n \Rightarrow \frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$

   $\ln(x+1) = \int\limits_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$

   $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ - *сходится* $\Rightarrow$ *[по теореме 5]* $\Rightarrow S = \lim \lim\limits_{x \to 1-0} \ln(1 + x) = \ln 2$

2) $\frac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}, |x| < 1$

   $\arctan(x) = \int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, |x| < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = [\textit{по теореме 5}] = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

28. Разложение функции в ряд Тейлора

Теорема 28.1. *(О разложении функции в степенной ряд)*
Пусть функция $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n, x \in U_\delta(a), \delta > 0$
Тогда такое разложение единственное и его коэффициенты вычисляются по формуле: $\begin{cases} c_0 = f(a) \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \frac{f(a)}{n!} \end{cases}$ *, где a - фиксированная точка*

Доказательство.
$f(x)$ - сумма степенного ряда $\Rightarrow f(x) \in C^\infty(U_\delta(a))$

1) $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n + \dots$ при $x = a : f(a) = c_0$
2) Продифференциируем: $f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + \dots + nc_n(x-a)^{n-1} + \dots$
$x = a : f'(a) = c_1$

$\vdots$

n) $f^{(n)}(x) = n!c_n + \frac{(n+1)!}{1!}c_{n+1}(x-a) + \dots + \frac{(n+k)!}{k!}c_{n+k}(x-a)^k + \dots$
$x = a : f^{(n)}(a) = n!c_n \Rightarrow c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ $(n \in \mathbb{N})$

■

Определение 28.1. *Пусть функция* $f(x) \in C^\infty(U_\delta(a))$
Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ *называется рядом Тейлора функции* $f(x)$ *в* $(\cdot)a$.

$$f(x) \to \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Замечание 28.1.
$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}, f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}); f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$
$\forall k \in \mathbb{N} \quad f^{(k)}(0) = 0 \Rightarrow$ *нулевой ряд Тейлора в окрестности нуля*
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0, x \in \mathbb{R} \neq f(x)$ *при* $x \neq 0$

Замечание 28.2. $f(x) \in C^n(U_\delta(a))$ *и* $\exists f^{(n+1)}$ *для* $x \in U_\delta(a) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall x \in U_\delta(a)\ \exists \xi \in U_\delta(a), \xi \in [a; x]$
$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n(x); R_n(x) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$
$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ *- остаточный член в формуле Тейлора (в данном случае остаточный член представлен в форме Лагранжа)*

Теорема 28.2. *(Критерий разложимости функции в ряд Тейлора) Пусть функция* $f(x) \in C^\infty(U_\delta(a)), R > 0$
Тогда $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, x \in (a-R; a+R) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall x \in (a-R; a+R) \exists \lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$

Доказательство.

$\Rightarrow$

Пусть $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall x \in (a-R; a+R) \ \exists \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \lim \lim\limits_{n\to+\infty} (f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \lim \lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0 (x \in (a-R; a+R))$

$\Leftarrow$

$\forall x \in (a-R; a+R) \ \exists \lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0 \ \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to+\infty} (f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k) =$
$= \lim\limits_{n\to+\infty} f(x) - \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(x) - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall x \in (a-R; a+R) f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

■

Замечание 28.3. *(Таблица разложений)*

1) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad R = +\infty$

2) $\cos(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad R = +\infty$

3) $\sin(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R = +\infty$

4) $(1+x)^\mu = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{n!}x^n, \quad R = 1, \mu \in \mathbb{R}\backslash(\mathbb{N} \cup 0)$

5) $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad R = 1$

6) $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n, \quad R = 1$

$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1), (2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n$

7) $\ln(1+x) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n}, \quad R = 1$

8) $\arctan(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R = 1$

9) $\arcsin(x) = x + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad R = 1$

Пример 28.1.

$f(x) = \frac{x}{x^2+x-2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, c_n =?, x \in ?$ $\frac{x}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x+(2A-B)}{x^2+x-2}$

$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = \frac{2}{3} \end{cases}$ $f(x) = \frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{3(x+2)} = -\frac{1}{3} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{1}{3} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n} =$

$= \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3}(\frac{(-1)^n}{2^n} - 1) x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \Rightarrow c_n = \frac{1}{3}(\frac{(-1)^n}{2^n} - 1) \Rightarrow R = 1$

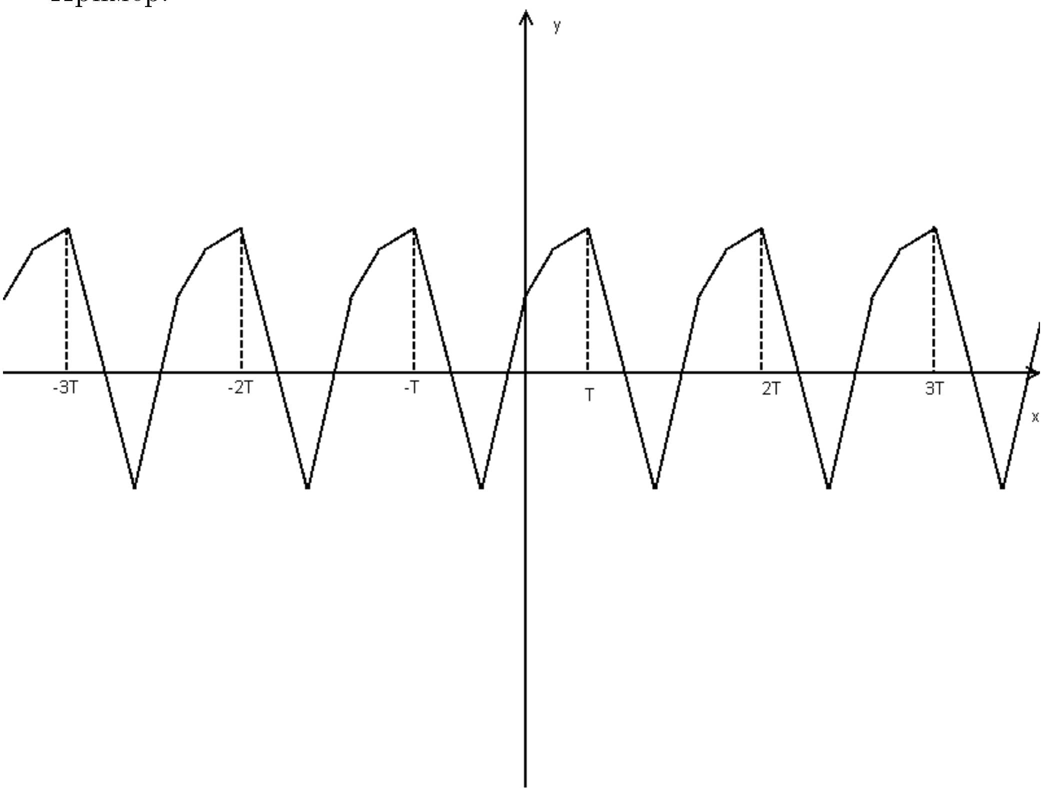
Часть V

Ряды Фурье

29. Основные определения

Определение 29.1. *Пусть функция $f(x)$ определена на $\mathbb{R}$ и $\exists T > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} f(x+T) = f(x)$. Тогда функция $f(x)$ называется $T-$периодической функцией, а T –её период. Причём:*
$\forall k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \quad T' = kT$ *тоже период $f(x)$, т.к.* $\forall x \in \mathbb{R} f(x+T') = f(x)$

Пример:



Замечание 29.1. *Функция $f(x) = const$ периодична, причём период - любое число*

Определение 29.2. *Пусть функция $f(x)$ определена на $\mathbb{R}$, T-периодична, $T > 0$ и $\forall [a; b]$ $\exists \int\limits_a^b f(x)dx$, тогда $f(x) \in R_T$ (функция $f(x)$ тоносится к классу периодично интегрируемых (или интегрируемых на периоде))*

Лемма 29.1. *Пусть функция* $f(x) \in R_T,\ T > 0$, *тогда* $\forall a \in \mathbb{R} \int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx$

Доказательство. $\int\limits_T^{a+T} f(x)dx = [x = u + T \Rightarrow u\big|_0^a, du = dx] = [f(x) = f(u+T) = f(u)] = \int\limits_0^a f(u)du = -\int\limits_a^0 f(x)dx$

По аддитивности интегралов $\int\limits_a^{a+T} = \int\limits_a^0 + \int\limits_0^T + \int\limits_T^{a+T} = \int\limits_0^T$ ■

Определение 29.3. *(Тригонометрическая система функций)*
$u = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$ - *тригонометрическая система функций*

Определение 29.4. $T_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) + A$ - *тригонометрический ряд*

30. Ряды Фурье

Определение 30.1. *Если у функции $f(x)$ на $[a;b]$ не бесконечное число разрывов первого рода, а других не имеет, то она называется кусочно-непрерывной (далее к-н)на этом промежутке.*
Если функция $f(x)$ к-н на $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке, т.е. $\exists \quad \int\limits_a^b f(x)dx, f(x) \in R_[a;b]$

Замечание 30.1.
$\forall f(x), g(x)$ *- к-н на $[a;b]$ функций справедливо $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ - тоже к-н на $[a;b]$*

Определение 30.2. *Пусть $f(x), g(x)$ - к-н функции на $[a;b]$. Тогда их калярным произведением называется* $(f(x); g(x)) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$

Определение 30.3. *Пусть $f(x)$ - к-н функция на $[a;b]$. Тогда нормой функции $\|f(x)\|$ называется* $\|f(x)\| = \sqrt{(f(x); f(x))} = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)dx}$

Определение 30.4. *Пусть $f(x), g(x)$ - к-н функции на $[a;b]$, тогда $f(x), g(x)$ называются ортогональными* $\Leftrightarrow (f(x), g(x)) = 0$

Замечание 30.2. *(Свойства скалярного произведения функций)*
Пусть $f(x), g(x), \varphi(x)$ - к-н на $[a;b]$ функции, тогда на $[a;b]$ выполняются следующие свойства:

1) $(f(x); g(x)) = (g(x); f(x))$

2) $(\lambda f(x); g(x)) = \lambda(f(x); g(x)), \quad \lambda$ *- костанта*

3) $(f(x) + \varphi(x); g(x)) = (f(x); g(x)) + (\varphi(x); g(x))$

4) $\|f(x)\| \geq 0$

5) $\|\lambda f(x)\| = \lambda\|f(x)\|, \quad \lambda$ *- константа*

6) $\|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\|$

7) $\|(f(x); g(x))\| \leq \|f(x)\| \cdot \|g(x)\|$ *(Неравенство Буняковского-Коши)*

Определение 30.5. *Система функций $\{\varphi_0, \ldots \varphi_n \ldots\}$ называется ортогональной* $\Leftrightarrow \forall i, j \in \mathbb{N} \cup 0 (i \neq j) \quad (\varphi_i; \varphi_j) = 0$

Теорема 30.1. *Пусть* $f(x)$ *- функция, а* $\{\varphi_0, \dots \varphi_n \dots\}$ *- система функций, заданные на* $[a;b]$. $f(x)$ *можно представить в виде ряда* $\sum\limits_{k=1} nc_k\varphi_k(x)$. *Тогда* $c_k = \frac{(f;\varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}$

Доказательство. $(f;\varphi_k) = (c_0\varphi_0+c_1\varphi_1+\dots+c_k\varphi_k+\dots;\varphi_k) = c_0(\varphi_0;\varphi_k)+ c_1(\varphi_1;\varphi_k)+\dots+c_k(\varphi_k;\varphi_k)+\dots =$ [в силу ортогональности системы] $= c_0\cdot 0+c_1\cdot 0+\dots+c_k\cdot\|\varphi_k\|^2 = c_k\cdot\|\varphi_k\|^2 \Rightarrow (f;\varphi_k) = c_k\cdot\|\varphi_k\|^2 \Rightarrow c_k = \frac{(f;\varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}$
■

Определение 30.6. *Ряд в условиях теоремы 1 называется обобщённым рядом Фурье по ортогональной системе функций* $\{\varphi_0, \dots \varphi_n \dots\}$

Замечание 30.3. *Тригонометрическая система функций (*$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$*) ортогональна на* $[-\pi;\pi]$

Доказательство. Для доказательства этого надо доказать пять равенств:

1) $(1;\cos nx) = 0$
2) $(1;\sin nx) = 0$
3) $(\sin nx;\cos kx) = 0$
4) $(\sin nx;\sin kx) = 0, k \neq n$
5) $(\cos nx;\cos kx) = 0, k \neq n$

1) $(1;\cos nx) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx =$ [как интеграл от чётной функции по симметричному промежутку] $= 2\int\limits_{0}^{\pi} \cos nx dx = \frac{2}{n}\sin nx\Big|_0^\pi = 0$
2) $(1;\sin nx) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx =$ [как интеграл от нечётной функции по симметричному промежутку] $= 0$
3) $(1;\sin nx) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos nx dx =$ [$\sin nx$ - нечётная, $\cos nx$ - чётная $\Rightarrow$ произведение - нечётная $\Rightarrow$ как интеграл от нечётной функции по симметричному промежутку] $= 0$

4) $(\sin nx; \sin kx) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin kx dx =$ [произведение нечётных - чётная $\Rightarrow$ как интеграл от чётной функции по симметричному промежутку] $= 2\int\limits_{0}^{\pi} \sin nx \cdot \sin kx dx = 2\int\limits_{0}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos((n-k)x) - \cos((n+k)x)dx = \frac{\sin((n-k)x)}{n-k}\Big|_0^{\pi} - \frac{\sin((n+k)x)}{n+k}\Big|_0^{\pi} = 0 - 0 = 0$

5) $(\cos nx; \cos kx) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos kx dx =$ [произведение чётных - чётная $\Rightarrow$ как интеграл от чётной функции по симметричному промежутку] $= 2\int\limits_{0}^{\pi} \cos nx \cdot \cos kx dx = 2\int\limits_{0}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos((n-k)x) + \cos((n+k)x)dx = \frac{\sin((n-k)x)}{n-k}\Big|_0^{\pi} + \frac{\sin((n+k)x)}{n+k}\Big|_0^{\pi} = 0 + 0 = 0$

■

Определение 30.7. *Обобщённый ряд Фурье функции $f(x)$ по тригонометрической системе функций называется тригонометрическим рядом Фурье:* $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$

Замечание 30.4. *Коэффициенты тригонометрического ряда Фурье вычисляются по формуле:*

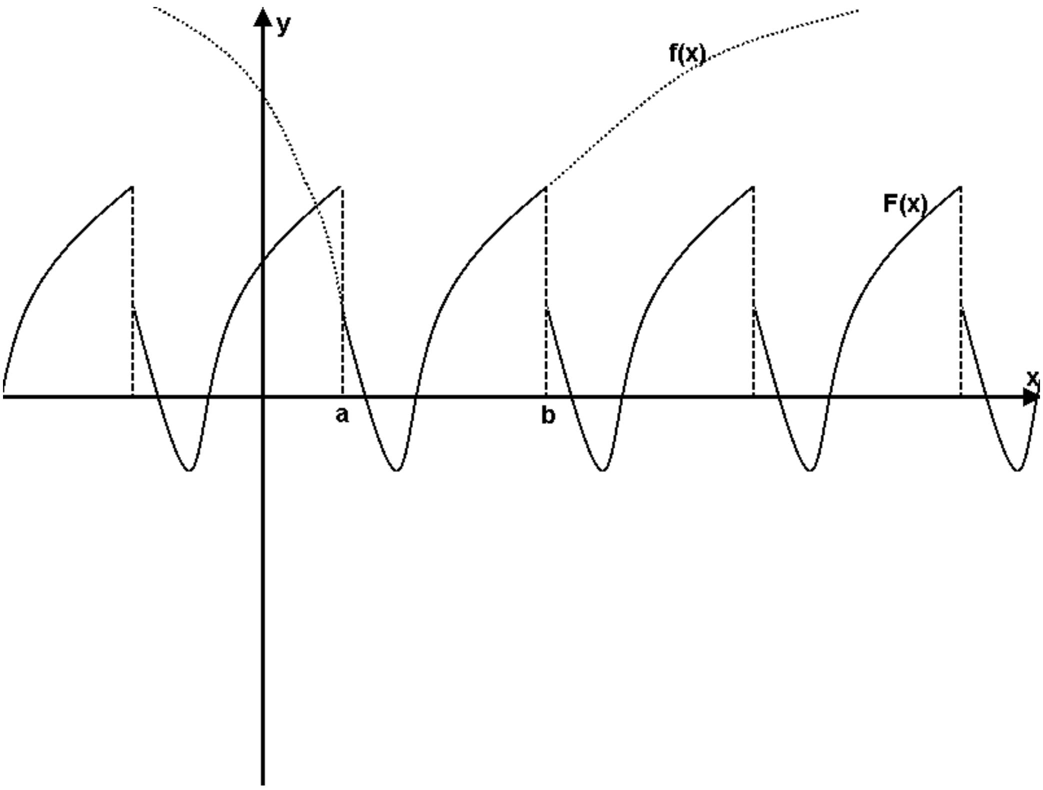
$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$

$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$

Определение 30.8. *$f(x)$ - кусочно-монотонна на $[a; b] \Leftrightarrow [a; b]$ можно разбить на конечное число частичных итервалов, на каждом из которых в отдельности $f(x)$ монотонна.*

Замечание 30.5. *Если $f(x)$ к-н и кусочно-монотонна на $[a; b]$, то говорят, что она удовлетворяет условиям Дирихле*

Определение 30.9. *(Периодическое продолжение) Пусть $f(x)$ определена на $[a; b]$, тогда введём функцию $F(x)$, такую что $\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad F(x_0) = f(a + (||x_0| - [\frac{|x_0|}{|a-b|}]| \cdot |a - b|))$. Тогда $F(x)$ называется периодическим продолжением $f(x)$.*



Замечание 30.6. *Периодическое продолжение функции в условиях определения 9 T-периодично,* $T = |a - b|$

Теорема 30.2. *Пусть* $f(x)$ *удовлетворяет условиям Дирихле на* $[-\pi; \pi]$. *Тогда* $\forall x_0 \in [-\pi; \pi]$ *её ряд Фурье сходится, причём если* x_0*:*

- *Точка непрерывности* $f(x)$, *то ряд сходится к* $f(x)$
- *Точка разрыва первого рода к* $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$
- $x_0 = \pm\pi$ *к* $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$

Без доказательства Также этот ряд сходится к периодическому продолжению $F(x)$ *функции* $f(x)$*на всей числовой оси, а в точках разрыва первого рода к* $\frac{F(x-0)+F(x+0)}{2}$

Замечание 30.7.
- $f(x)$ *- чётная* $\Rightarrow b_n = 0 \Rightarrow$ *в ряду Фурье только косинусы*
- $f(x)$ *- нечётная* $\Rightarrow a_n = 0 \Rightarrow$ *в ряду Фурье только синусы*

Замечание 30.8. *В случае, если $f(x)$ задана только на промежутке $[0;\pi]$ существует два варианта:*

1) *Продолжить $f(x)$ на $[-\pi;0]$ чётным образом $\Rightarrow$ на $[-\pi;\pi]$ функция чётная. В таком случае говорят, что функцию $f(x)$ на $[0;\pi]$ разложили по косинусам*

2) *Продолжить $f(x)$ на $[-\pi;0]$ нечётным образом $\Rightarrow$ на $[-\pi;\pi]$ функция нечётная. В таком случае говорят, что функцию $f(x)$ на $[0;\pi]$ разложили по синусам*

Замечание 30.9. *Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на $[-l;l]$. Тогда разложение $f(x)$ выглядит следующим образом:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\frac{nx\pi}{l}) + b_n \sin(\frac{nx\pi}{l})$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos(\frac{nx\pi}{l})dx; \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin(\frac{nx\pi}{l})dx$$

Доказательство. Введём $t = \frac{x\pi}{l} \Rightarrow t \in [-\pi;\pi]$ и функцию $F(t(x)) = f(x)\forall x \in [-l;l]$. $F(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле на $[-\pi;\pi] \Rightarrow$
$\Rightarrow F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)$, где $a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos(nt)dt$; $b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin(nt)dt$
$t \to x \Rightarrow F(t) \to f(x)$
$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(\frac{nx\pi}{l}) + b_n\sin(\frac{nx\pi}{l})$;
$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos(\frac{nx\pi}{l})\cdot\frac{\pi}{l}dx = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos(\frac{nx\pi}{l})dx$
$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin(\frac{nx\pi}{l})\cdot\frac{\pi}{l}dx = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin(\frac{nx\pi}{l})dx$ ■

Замечание 30.10. *Пусть $f(x)$ определена и удовлетворяет условиям Дирихле на $[0;l]$. Тогда:*

- *её разложение по косинусам на $[0;l]$: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(\frac{nx\pi}{l})$, $a_n = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\cos(\frac{nx\pi}{l})dx$*

- *её разложение по синусам на* $[0;l]$*:* $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(\frac{nx\pi}{l}), b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin(\frac{nx\pi}{l})dx$

31. Обобщённый ряд Фурье по ортогональной системе функций

Определение 31.1. *Пусть функция $f(x)$ определена на $[a;b]$. Говорят, что $f(x)$ из класса функций, интегрируемых "с квадратом"$\Leftrightarrow \exists \int\limits_a^b |f(x)|dx$ и $\exists \int\limits_a^b f^2(x)dx$. Заметим что, если $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на $[a;b]$ то она интегрируема "с квадратом"*

Определение 31.2. *Система функций $\{\varphi_1(x);\ldots;\varphi_n;\ldots\}$ определённых и мнтегрируемых с квадратом на $[a;b]$, а также удовлетворяющих условиям ортогональностиназывается общей ортогональной системой функций. При этом: $\forall n \in \mathbb{N} \|\varphi_n(x)\|^2 = \lambda_n^2 = \int\limits_a^b \varphi_n^2(x)dx > 0$*

Определение 31.3. *Пусть $U = \{\varphi_1(x);\ldots;\varphi_n;\ldots\}$ - общая ортогональная система функций на $[a;b]$ и функция $f(x)$ интегрируема с квадратом на $[a;b]$. Тогда $a_n = \frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_a^b f(x)\varphi_n(x)dx$ называют коэффициентами Фурье функции $f(x)$ по системе функций U.*
При этом ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\varphi_n(x)$ - обобщённый ряд Фурье функции $f(x)$ по системе U

Замечание 31.1. *Если $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n\varphi_n(x), x \in [a;b]$ и ряд равномерно сходится к $f(x), x \in [a;b]$, то такое разложение единственно и $\forall n \in$ $\ltimes c_n = a_n$*

Доказательство.(Схема)
$\forall k : \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n\varphi_n(x)\varphi_k(x) = f(x)\varphi_k(x)$ - равномерно сходящийся ряд к сумме $f(x)\varphi_k(x) \Rightarrow$ [Почленно интегрируем] $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n(\varphi_n(x;\varphi_k(x))) = (f;\varphi_k(x))$, т.к. равноемерно сходящиеся ряды можно почленно интегрировать.
$(\varphi_i(x);\varphi_j(x)) = \begin{cases} 0, n \neq k \\ \lambda_k^2, k = n \end{cases} \Rightarrow c_k\lambda_k^2 = \int\limits_a^b f(x)\varphi_k(x)dx \Rightarrow c_k = \frac{1}{\lambda_k^2}\int\limits_a^b f(x)\varphi_k(x)dx = a_k$ ■

Определение 31.4. *Пусть $f(x)$ интегрируема с квадратом на $[a;b]$ и $U = \{\varphi_1(x);\ldots;\varphi_n;\ldots\}$ - общая ортогональная система функций на*

$[a;b]$. *Тога для любых чисел $c_1 \dots c_n$ положим $\delta_n^2 = \int\limits_a^b (f(x) - \sum\limits_{k=1}^n c_k\varphi_k(x))^2dx$, тогда δ_n^2 - среднеквадратичное отклонение функции $f(x)$ от многочлена $\sum\limits_{k=1}^n c_k\varphi_k(x)$*

Теорема 31.1. *(об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье)*
В условиях определения 4 минимум $\min\limits_{c_1\dots c_n}\delta_n^2$ достигается при $c_k = a_k (k = 1\dots n)$, где a_k - коэффициенты Фурье функции $f(x)$ на $[a;b]$

Доказательство. $\delta_n^2 = \int\limits_a^b (f(x) - \sum\limits_{k=1}^n c_k\varphi_k(x))^2dx = \int\limits_a^b f^2(x)dx - 2\sum\limits_{k=1}^n c_k(f(x);\varphi_k(x)) + \sum\limits_{k=1}^n\sum\limits_{l=1}^n c_kc_l(\varphi_k(x);\varphi_l(x)) = \int\limits_a^b f^2(x)dx - 2\sum\limits_{k=1}^n \lambda_k^2a_kc_k + \sum\limits_{k=1}^n c_k^2\lambda_k^2 = [\lambda_k^2c_k^2 - 2(\lambda_k^2c_k)a_k + \lambda_k^2a_k^2 - \lambda_k^2a_k^2 = \lambda_k^2(c_k - a_k)^2 - \lambda_k^2a_k^2] = \int\limits_a^b f^2(x)dx + \sum\limits_{k=1}^n \lambda_k^2(c_k - a_k)^2 - \sum\limits_{k=1}^n \lambda_k^2a_k^2 \geq \int\limits_a^b f^2(x) - \sum\limits_{k=1}^n \lambda_k^2a_k^2 = \min\limits_{c_1\dots c_n}\delta_n^2$ и равенство достигается при $c_k = a_k(k = 1\dots) \Rightarrow \min\limits_{c_1\dots c_n}\delta_n^2 = \int\limits_a^b f^2(x)dx - \sum\limits_{k=1}^n \lambda_k^2a_k^2 = \delta_n^2(a_1\dots a_n)$ ■

Следствие 31.1. *(Неравенство Бесселя)*
Пусть функция $f(x)$ интегрируема с квадратом на $[a;b]$ и $U = \{\varphi_n(x)\}$ ортогональная система функций на $[a;b]$ в смысле определения 2. Тогда $\sum\limits_{k=1}^n \lambda_k^2a_k^2 \leq \int\limits_a^b f^2(x)dx$, где $a_k = \frac{1}{\lambda_k^2}\int\limits_a^b f(x)\varphi_k(x)dx$ - коэффициенты Фурье функции $f(x)$, а число n - произвольно. И, следовательно, числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2a_k^2$ сходится и его сумма $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^2a_k^2 \leq \int\limits_a^b f^2(x)dx$

Доказательство. $\delta_n^2(c_1\dots c_n) \geq 0 \Rightarrow \delta_n^2(a_1\dots a_n = \sum\limits_{k=1}^n \lambda_k^2a_k^2 - \int\limits_a^b f^2(x)dx \geq 0 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^n \lambda_k^2a_k^2 \leq \int\limits_a^b f^2(x)dx$
Ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^2a_k^2$ положительный ряд, частичные суммы которого ограничены сверху $\Rightarrow$ ряд сходится $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^2a_k^2 = \sup\sum\limits_{k=1}^n\lambda_k^2a_k^2 \leq \int\limits_a^b f^2(x)dx$ ■

Следствие 31.2. *В условиях теоремы 1 $\frac{1}{\lambda_k^2}\int\limits_a^b f(x)\varphi_k(x)dx \to 0(k \to +\infty)$*

Доказательство. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 a_k^2$ сходится $\Rightarrow$ $\lambda_k^2 a_k^2 \to 0 \Rightarrow \lambda_k a_k \to 0 \Rightarrow$ $\frac{1}{\lambda_k^2} \int\limits_a^b f(x)\varphi_k(x)dx \to 0 (k \to +\infty)$ ■

32. Равенство Парсеваля

Определение 32.1. *Система функций* $U = \{\varphi_n(x)\}$ *называется полной, если* $\forall f(x)$*, удовлетворяющей условиям разложимости в ряд Фурье по системе* U*, справеливо равенство Парсеваля:* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 a_k^2 = \int\limits_a^b f^2(x)dx$

Замечание 32.1. *Пусть задана полная система ортогональных функций* $\{\varphi_n\}$ *на* $[a;b]$*, тогда, если функция* $f(x) \in C_{[a;b]}$*, то, если* $\forall k \in \ltimes \quad f(x)$ *ортогональна* $\varphi_k(x)$*, то* $\forall x \in [a;b] \quad f(x) = 0$

Доказательство. $a_k = \frac{1}{\lambda_k}(f(x); \varphi_k(x)) = 0 \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k \varphi_k(x) = 0 = f(x)$ ■

Пример 32.1. $\lambda_0^2 = \int\limits_0^{2\pi} 1^2 dx = 2\pi; \lambda_{n,\cos} = \int\limits_0^{2\pi} \cos^2(nx)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos(2nx))dx = \pi; \lambda_{n,\sin} = \int\limits_0^{2\pi} \sin^2(nx)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos(2nx))dx = \pi$

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$*, тогда* $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} f^2(x)dx$

- равенство Парсеваля для тригонометрических функций.

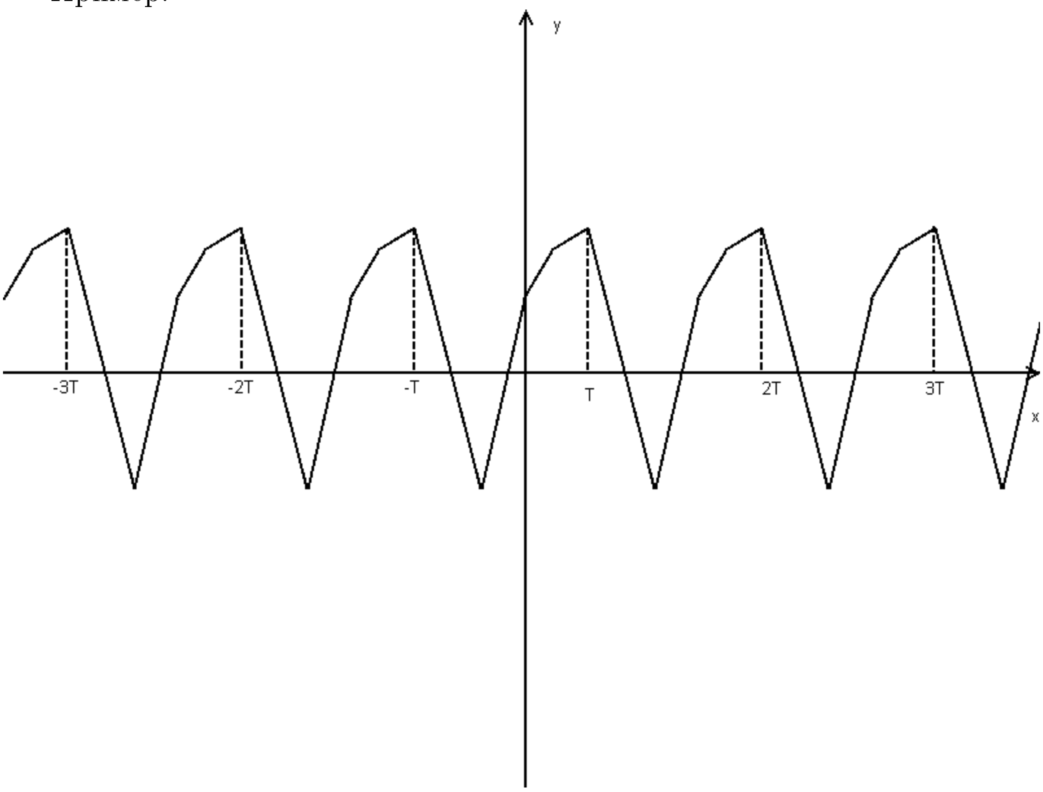
Следовательно: $\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \to 0(n \to +\infty); \quad \int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx \to 0(n \to +\infty)$

Часть VI
Ряды Фурье

33. Основные определения

Определение 33.1. *Пусть функция $f(x)$ определена на $\mathbb{R}$ и $\exists T > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} f(x+T) = f(x)$. Тогда функция $f(x)$ называется $T-$периодической функцией, а T –её период. Причём:*
$\forall k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \quad T' = kT$ тоже период $f(x)$, т.к. $\forall x \in \mathbb{R} f(x+T') = f(x)$

Пример:



Замечание 33.1. *Функция $f(x) = const$ периодична, причём период - любое число*

Определение 33.2. *Пусть функция $f(x)$ определена на $\mathbb{R}$, T-периодична, $T > 0$ и $\forall [a;b]\ \exists \int\limits_a^b f(x)dx$, тогда $f(x) \in R_T$ (функция $f(x)$ тоносится к классу периодично интегрируемых (или интегрируемых на периоде))*

Лемма 33.1. *Пусть функция* $f(x) \in R_T,\ T > 0$, *тогда* $\forall a \in \mathbb{R}\ \int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx$

Доказательство. $\int\limits_T^{a+T} f(x)dx = [x = u + T \Rightarrow u\big|_0^a, du = dx] = [f(x) = f(u+T) = f(u)] = \int\limits_0^a f(u)du = -\int\limits_a^0 f(x)dx$

По аддитивности интегралов $\int\limits_a^{a+T} = \int\limits_a^0 + \int\limits_0^T + \int\limits_T^{a+T} = \int\limits_0^T$ ■

Определение 33.3. *(Тригонометрическая система функций)*
$u = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$ - *тригонометрическая система функций*

Определение 33.4. $T_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) + A$ - *тригонометрический ряд*

34. Ряды Фурье

Определение 34.1. *Если у функции $f(x)$ на $[a;b]$ не бесконечное число разрывов первого рода, а других не имеет, то она называется кусочно-непрерывной (далее к-н)на этом промежутке.*
Если функция $f(x)$ к-н на $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке, т.е. $\exists \quad \int\limits_a^b f(x)dx, f(x) \in R_[a;b]$

Замечание 34.1.
$\forall f(x), g(x)$ *- к-н на $[a;b]$ функций справедливо $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ - тоже к-н на $[a;b]$*

Определение 34.2. *Пусть $f(x), g(x)$ - к-н функции на $[a;b]$. Тогда их калярным произведением называется* $(f(x);g(x)) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$

Определение 34.3. *Пусть $f(x)$ - к-н функция на $[a;b]$. Тогда нормой функции $\|f(x)\|$ называется* $\|f(x)\| = \sqrt{(f(x);f(x))} = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)dx}$

Определение 34.4. *Пусть $f(x), g(x)$ - к-н функции на $[a;b]$, тогда $f(x), g(x)$ называются ортогональными* $\Leftrightarrow (f(x), g(x)) = 0$

Замечание 34.2. *(Свойства скалярного произведения функций)*
Пусть $f(x), g(x), \varphi(x)$ - к-н на $[a;b]$ функции, тогда на $[a;b]$ выполняются следующие свойства:

1) $(f(x);g(x)) = (g(x);f(x))$

2) $(\lambda f(x);g(x)) = \lambda(f(x);g(x)), \quad \lambda$ *- костанта*

3) $(f(x) + \varphi(x);g(x)) = (f(x);g(x)) + (\varphi(x);g(x))$

4) $\|f(x)\| \geq 0$

5) $\|\lambda f(x)\| = \lambda\|f(x)\|, \quad \lambda$ *- константа*

6) $\|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\|$

7) $\|(f(x);g(x))\| \leq \|f(x)\| \cdot \|g(x)\|$ *(Неравенство Буняковского-Коши)*

Определение 34.5. *Система функций $\{\varphi_0, \ldots \varphi_n \ldots\}$ называется ортогональной* $\Leftrightarrow \forall i,j \in \mathbb{N} \cup 0 (i \neq j) \quad (\varphi_i;\varphi_j) = 0$

Теорема 34.1. *Пусть $f(x)$ - функция, а $\{\varphi_0, \dots \varphi_n \dots\}$ - система функций, заданные на $[a;b]$. $f(x)$ можно представить в виде ряда $\sum\limits_{k=1} nc_k\varphi_k(x)$. Тогда $c_k = \frac{(f;\varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}$*

Доказательство. $(f;\varphi_k) = (c_0\varphi_0+c_1\varphi_1+\dots+c_k\varphi_k+\dots;\varphi_k) = c_0(\varphi_0;\varphi_k)+c_1(\varphi_1;\varphi_k)+\dots+c_k(\varphi_k;\varphi_k)+\dots =$ [в силу ортогональности системы] $= c_0\cdot 0+c_1\cdot 0+\dots+c_k\cdot\|\varphi_k\|^2 = c_k\cdot\|\varphi_k\|^2 \Rightarrow (f;\varphi_k) = c_k\cdot\|\varphi_k\|^2 \Rightarrow c_k = \frac{(f;\varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}$
■

Определение 34.6. *Ряд в условиях теоремы 1 называется обобщённым рядом Фурье по ортогональной системе функций $\{\varphi_0, \dots \varphi_n \dots\}$*

Замечание 34.3. *Тригонометрическая система функций ($\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$) ортогональна на $[-\pi;\pi]$*

Доказательство. Для доказательства этого надо доказать пять равенств:

1) $(1;\cos nx) = 0$

2) $(1;\sin nx) = 0$

3) $(\sin nx;\cos kx) = 0$

4) $(\sin nx;\sin kx) = 0, k \neq n$

5) $(\cos nx;\cos kx) = 0, k \neq n$

1) $(1;\cos nx) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx =$ [как интеграл от чётной функции по симметричному промежутку] $= 2\int\limits_{0}^{\pi}\cos nx dx = \frac{2}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} = 0$

2) $(1;\sin nx) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx =$ [как интеграл от нечётной функции по симметричному промежутку] $= 0$

3) $(1;\sin nx) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\cos nx dx =$ [$\sin nx$ - нечётная, $\cos nx$ - чётная $\Rightarrow$ произведение - нечётная $\Rightarrow$ как интеграл от нечётной функции по симметричному промежутку] $= 0$

4) $(\sin nx; \sin kx) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin kx dx =$ [произведение нечётных - чётная $\Rightarrow$ как интеграл от чётной функции по симметричному промежутку] $= 2\int\limits_{0}^{\pi} \sin nx \cdot \sin kx dx = 2\int\limits_{0}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos((n-k)x) - \cos((n+k)x)dx = \frac{\sin((n-k)x)}{n-k}\Big|_0^\pi - \frac{\sin((n+k)x)}{n+k}\Big|_0^\pi = 0 - 0 = 0$

5) $(\cos nx; \cos kx) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos kx dx =$ [произведение чётных - чётная $\Rightarrow$ как интеграл от чётной функции по симметричному промежутку] $= 2\int\limits_{0}^{\pi} \cos nx \cdot \cos kx dx = 2\int\limits_{0}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos((n-k)x) + \cos((n+k)x)dx = \frac{\sin((n-k)x)}{n-k}\Big|_0^\pi + \frac{\sin((n+k)x)}{n+k}\Big|_0^\pi = 0 + 0 = 0$

■

Определение 34.7. *Обобщённый ряд Фурье функции $f(x)$ по тригонометрической системе функций называется тригонометрическим рядом Фурье:* $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$

Замечание 34.4. *Коэффициенты тригонометрического ряда Фурье вычисляются по формуле:*

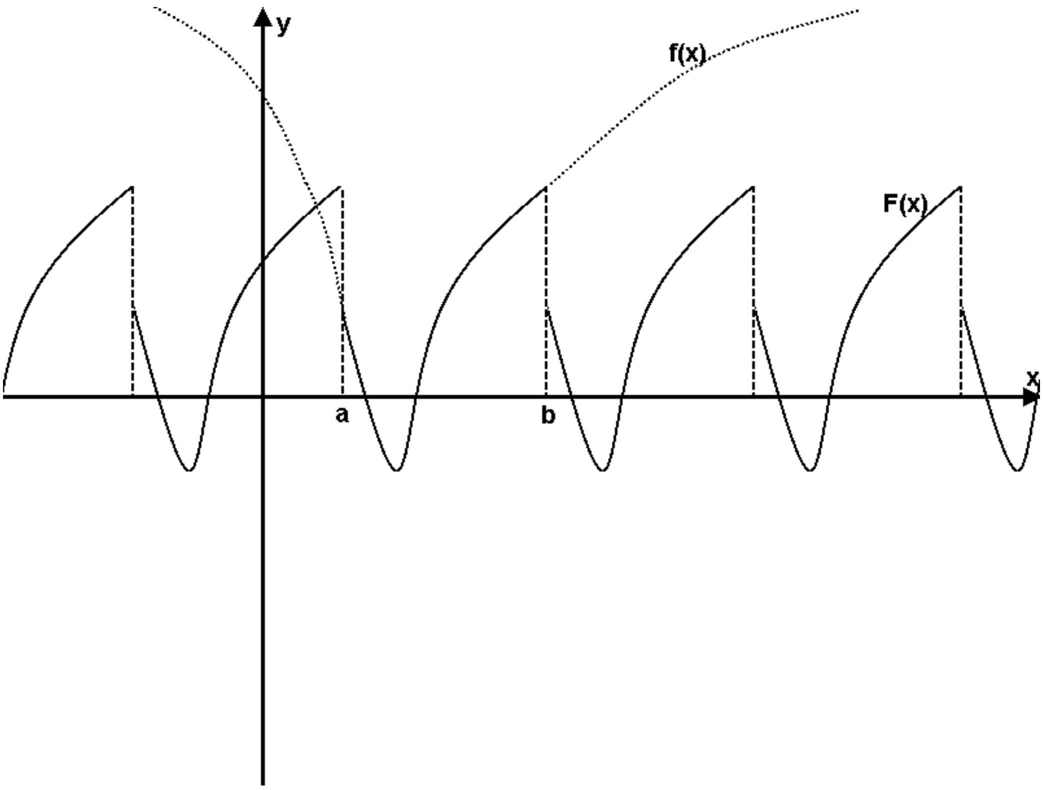
$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$

$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$

Определение 34.8. $f(x)$ *- кусочно-монотонна на* $[a; b] \Leftrightarrow [a; b]$ *можно разбить на конечное число частичных итервалов, на каждом из которых в отдельности* $f(x)$ *монотонна.*

Замечание 34.5. *Если* $f(x)$ *к-н и кусочно-монотонна на* $[a; b]$*, то говорят, что она удовлетворяет условиям Дирихле*

Определение 34.9. *(Периодическое продолжение) Пусть* $f(x)$ *определена на* $[a; b]$*, тогда введём функцию* $F(x)$*, такую что* $\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad F(x_0) = f(a + (||x_0| - [\frac{|x_0|}{|a-b|}]| \cdot |a-b|))$. *Тогда* $F(x)$ *называется периодическим продолжением* $f(x)$.



Замечание 34.6. *Периодическое продолжение функции в условиях определения 9 T-периодично,* $T = |a - b|$

Теорема 34.2. *Пусть* $f(x)$ *удовлетворяет условиям Дирихле на* $[-\pi; \pi]$. *Тогда* $\forall x_0 \in [-\pi; \pi]$ *её ряд Фурье сходится, причём если* x_0*:*

- *Точка непрерывности* $f(x)$, *то ряд сходится к* $f(x)$
- *Точка разрыва первого рода к* $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$
- $x_0 = \pm\pi$ *к* $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$

Без доказательства Также этот ряд сходится к периодическому продолжению $F(x)$ *функции* $f(x)$*на всей числовой оси, а в точках разрыва первого рода к* $\frac{F(x-0)+F(x+0)}{2}$

Замечание 34.7.

- $f(x)$ *- чётная* $\Rightarrow b_n = 0 \Rightarrow$ *в ряду Фурье только косинусы*
- $f(x)$ *- нечётная* $\Rightarrow a_n = 0 \Rightarrow$ *в ряду Фурье только синусы*

Замечание 34.8. *В случае, если $f(x)$ задана только на промежутке $[0;\pi]$ существует два варианта:*

1) *Продолжить $f(x)$ на $[-\pi;0]$ чётным образом $\Rightarrow$ на $[-\pi;\pi]$ функция чётная. В таком случае говорят, что функцию $f(x)$ на $[0;\pi]$ разложили по косинусам*

2) *Продолжить $f(x)$ на $[-\pi;0]$ нечётным образом $\Rightarrow$ на $[-\pi;\pi]$ функция нечётная. В таком случае говорят, что функцию $f(x)$ на $[0;\pi]$ разложили по синусам*

Замечание 34.9. *Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на $[-l;l]$. Тогда разложение $f(x)$ выглядит следующим образом:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\frac{nx\pi}{l}) + b_n \sin(\frac{nx\pi}{l})$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos(\frac{nx\pi}{l})dx; \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin(\frac{nx\pi}{l})dx$$

Доказательство. Введём $t = \frac{x\pi}{l} \Rightarrow t \in [-\pi;\pi]$ и функцию $F(t(x)) = f(x) \forall x \in [-l;l]$. $F(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле на $[-\pi;\pi] \Rightarrow$
$\Rightarrow F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$, где $a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos(nt)dt$; $b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin(nt)dt$
$t \to x \Rightarrow F(t) \to f(x)$
$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\frac{nx\pi}{l}) + b_n \sin(\frac{nx\pi}{l})$;
$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos(\frac{nx\pi}{l})\cdot\frac{\pi}{l}dx = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos(\frac{nx\pi}{l})dx$
$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin(\frac{nx\pi}{l})\cdot\frac{\pi}{l}dx = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin(\frac{nx\pi}{l})dx$ ■

Замечание 34.10. *Пусть $f(x)$ определена и удовлетворяет условиям Дирихле на $[0;l]$. Тогда:*

- *её разложение по косинусам на $[0;l]$: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\frac{nx\pi}{l})$, $a_n = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\cos(\frac{nx\pi}{l})dx$*

- *её разложение по синусам на* $[0;l]$*:* $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(\frac{nx\pi}{l}), b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin(\frac{nx\pi}{l})dx$

35. Обобщённый ряд Фурье по ортогональной системе функций

Определение 35.1. *Пусть функция $f(x)$ определена на $[a;b]$. Говорят, что $f(x)$ из класса функций, интегрируемых "с квадратом"$\Leftrightarrow \exists \int\limits_a^b |f(x)|dx$ и $\exists \int\limits_a^b f^2(x)dx$. Заметим что, если $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на $[a;b]$ то она интегрируема "с квадратом"*

Определение 35.2. *Система функций $\{\varphi_1(x);\dots;\varphi_n;\dots\}$ определённых и мнтегрируемых с квадратом на $[a;b]$, а также удовлетворяющих условиям ортогональностиназывается общей ортогональной системой функций. При этом: $\forall n \in \mathbb{N} \|\varphi_n(x)\|^2 = \lambda_n^2 = \int\limits_a^b \varphi_n^2(x)dx > 0$*

Определение 35.3. *Пусть $U = \{\varphi_1(x);\dots;\varphi_n;\dots\}$ - общая ортогональная система функций на $[a;b]$ и функция $f(x)$ интегрируема с квадратом на $[a;b]$. Тогда $a_n = \frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_a^b f(x)\varphi_n(x)dx$ называют коэффициентами Фурье функции $f(x)$ по системе функций U.*
При этом ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\varphi_n(x)$ - обобщённый ряд Фурье функции $f(x)$ по системе U

Замечание 35.1. *Если $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n\varphi_n(x), x \in [a;b]$ и ряд равномерно сходится к $f(x), x \in [a;b]$, то такое разложение единственно и $\forall n \in$ $\ltimes c_n = a_n$*

Доказательство.(Схема)
$\forall k : \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n\varphi_n(x)\varphi_k(x) = f(x)\varphi_k(x)$ - равномерно сходящийся ряд к сумме $f(x)\varphi_k(x) \Rightarrow$ [Почленно интегрируем] $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n(\varphi_n(x;\varphi_k(x))) = (f;\varphi_k(x))$, т.к. равноемерно сходящиеся ряды можно почленно интегрировать.
$(\varphi_i(x);\varphi_j(x)) = \begin{cases} 0, n \neq k \\ \lambda_k^2, k = n \end{cases} \Rightarrow c_k\lambda_k^2 = \int\limits_a^b f(x)\varphi_k(x)dx \Rightarrow c_k = \frac{1}{\lambda_k^2}\int\limits_a^b f(x)\varphi_k(x)dx = a_k$ ■

Определение 35.4. *Пусть $f(x)$ интегрируема с квадратом на $[a;b]$ и $U = \{\varphi_1(x);\dots;\varphi_n;\dots\}$ - общая ортогональная система функций на*

$[a;b]$. *Тога для любых чисел* $c_1 \dots c_n$ *положим* $\delta_n^2 = \int\limits_a^b (f(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x))^2 dx$, *тогда* δ_n^2 *- среднеквадратичное отклонение функции* $f(x)$ *от многочлена* $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)$

Теорема 35.1. *(об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье)*
В условиях определения 4 минимум $\min\limits_{c_1 \dots c_n} \delta_n^2$ *достигается при* $c_k = a_k (k = 1 \dots n)$, *где* a_k *- коэффициенты Фурье функции* $f(x)$ *на* $[a;b]$

Доказательство. $\delta_n^2 = \int\limits_a^b (f(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x))^2 dx = \int\limits_a^b f^2(x)dx - 2\sum\limits_{k=1}^{n} c_k(f(x);\varphi_k(x)) + \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{n} c_k c_l(\varphi_k(x);\varphi_l(x)) = \int\limits_a^b f^2(x)dx - 2\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k^2 a_k c_k + \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2\lambda_k^2 = [\lambda_k^2 c_k^2 - 2(\lambda_k^2 c_k)a_k + \lambda_k^2 a_k^2 - \lambda_k^2 a_k^2 = \lambda_k^2(c_k - a_k)^2 - \lambda_k^2 a_k^2] = \int\limits_a^b f^2(x)dx + \sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k^2(c_k - a_k)^2 - \sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k^2 a_k^2 \geq \int\limits_a^b f^2(x) - \sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k^2 a_k^2 = \min\limits_{c_1 \dots c_n}\delta_n^2$ и равенство достигается при $c_k = a_k (k = 1 \dots) \Rightarrow \min\limits_{c_1 \dots c_n}\delta_n^2 = \int\limits_a^b f^2(x)dx - \sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k^2 a_k^2 = \delta_n^2(a_1 \dots a_n)$ ■

Следствие 35.1. *(Неравенство Бесселя)*
Пусть функция $f(x)$ *интегрируема с квадратом на* $[a;b]$ *и* $U = \{\varphi_n(x)\}$ *ортогональная система функций на* $[a;b]$ *в смысле определения 2. Тогда* $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k^2 a_k^2 \leq \int\limits_a^b f^2(x)dx$, *где* $a_k = \frac{1}{\lambda_k^2}\int\limits_a^b f(x)\varphi_k(x)dx$ *- коэффициенты Фурье функции* $f(x)$, *а число* n *- произвольно. И, следовательно, числовой ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^2 a_k^2$ *сходится и его сумма* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^2 a_k^2 \leq \int\limits_a^b f^2(x)dx$

Доказательство. $\delta_n^2(c_1 \dots c_n) \geq 0 \Rightarrow \delta_n^2(a_1 \dots a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k^2 a_k^2 - \int\limits_a^b f^2(x)dx \geq 0 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k^2 a_k^2 \leq \int\limits_a^b f^2(x)dx$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^2 a_k^2$ положительный ряд, частичные суммы которого ограничены сверху $\Rightarrow$ ряд сходится $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^2 a_k^2 = \sup\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k^2 a_k^2 \leq \int\limits_a^b f^2(x)dx$ ■

Следствие 35.2. *В условиях теоремы 1* $\frac{1}{\lambda_k^2}\int\limits_a^b f(x)\varphi_k(x)dx \to 0 (k \to +\infty)$

Доказательство. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 a_k^2$ сходится $\Rightarrow$ $\lambda_k^2 a_k^2 \to 0 \Rightarrow \lambda_k a_k \to 0 \Rightarrow$ $\frac{1}{\lambda_k^2} \int\limits_a^b f(x)\varphi_k(x)dx \to 0 (k \to +\infty)$ ■

36. Равенство Парсеваля

Определение 36.1. *Система функций* $U = \{\varphi_n(x)\}$ *называется полной, если* $\forall f(x)$*, удовлетворяющей условиям разложимости в ряд Фурье по системе* U*, справеливо равенство Парсеваля:* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 a_k^2 = \int\limits_a^b f^2(x)dx$

Замечание 36.1. *Пусть задана полная система ортогональных функций* $\{\varphi_n\}$ *на* $[a;b]$*, тогда, если функция* $f(x) \in C_{[a;b]}$*, то, если* $\forall k \in \ltimes \quad f(x)$ *ортогональна* $\varphi_k(x)$*, то* $\forall x \in [a;b] \quad f(x) = 0$

Доказательство. $a_k = \frac{1}{\lambda_k}(f(x); \varphi_k(x)) = 0 \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k \varphi_k(x) = 0 = f(x)$ ∎

Пример 36.1. $\lambda_0^2 = \int\limits_0^{2\pi} 1^2 dx = 2\pi; \lambda_{n,\cos} = \int\limits_0^{2\pi} \cos^2(nx)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos(2nx))dx = \pi; \lambda_{n,\sin} = \int\limits_0^{2\pi} \sin^2(nx)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos(2nx))dx = \pi$

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$*, тогда* $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} f^2(x)dx$
- равенство Парсеваля для тригонометрических функций.
Следовательно: $\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \to 0(n \to +\infty); \quad \int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx \to 0(n \to +\infty)$