

컴퓨터 그래픽스

3. 2차원 그래픽스의 변환

2023년 2학기

학습 내용

- 2차원 그래픽스 변환
 - 기본 변환: 이동, 회전, 신축
 - 그 외, 반사, 밀림

기본 기하 변환

- 기본 기하 변환
 - 이동 (Translation)
 - 회전 (Rotation)
 - 신축 (Scale, 크기 변환)
- 동차좌표계를 이용하여 변환 적용 (2차원 → 3x3 행렬 사용)

기본 기하 변환: 이동

- Translation (이동)

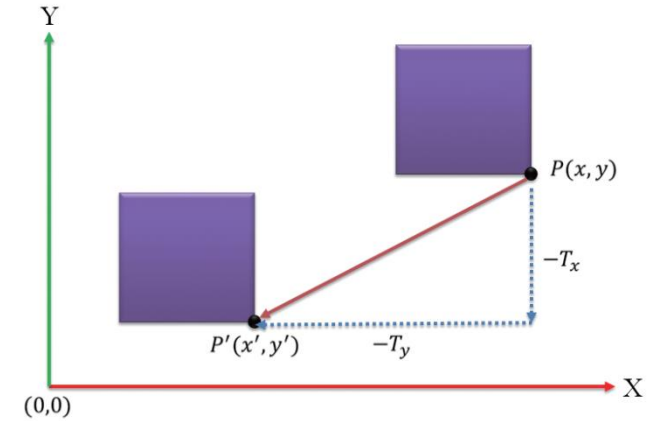
- 좌표계의 한 곳에서 다른 곳으로 직선 경로를 따라 객체의 위치를 바꾼다.
- 객체의 크기나 모양, 방향 등은 바뀌지 않는다.
- $P(x, y) \rightarrow P'(x', y')$

$$x' = t_x + x \quad y' = t_y + y$$

(t_x, t_y) : 이동 벡터 (translation vector)

행렬을 사용하면

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



기본 기하 변환: 신축

- Scaling (신축, 확대/축소)
 - 객체의 크기를 확대/축소 시킨다.
 - 객체의 크기뿐 아니라 기준점 (원점)으로부터의 위치도 비율에 따라 변한다.
 - $P(x, y) \rightarrow P'(x', y')$

$$x' = s_x \cdot x$$

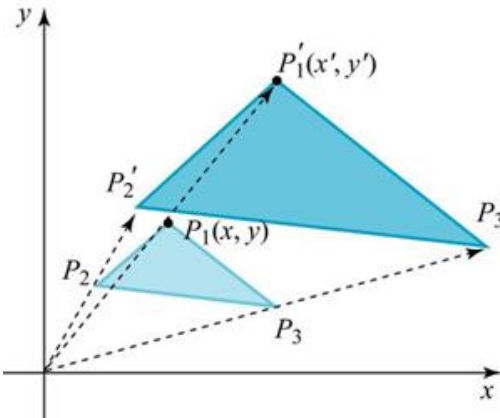
$$y' = s_y \cdot y$$

$$(s_x, s_y): \text{신축률 (scaling factor)}$$

행렬을 사용하면

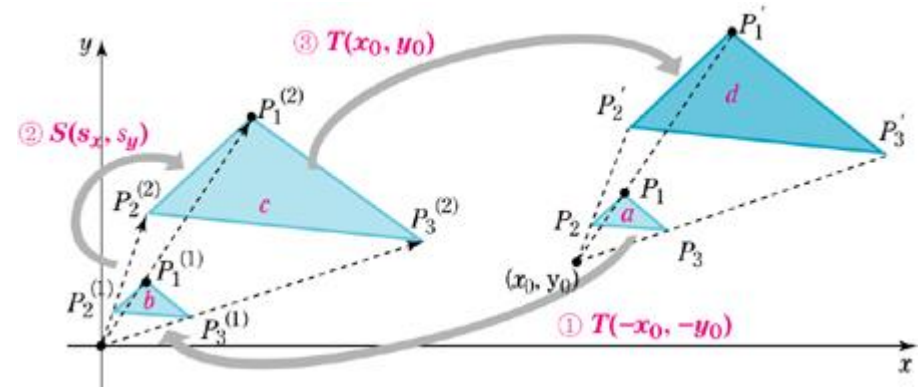
$$P' = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- $s > 1$: 확대
- $s = 1$: 유지
- $0 < s < 1$: 축소
- $s < 0$: 반전



기본 기하 변환: 신축

- 임의의 점 (x_0, y_0) 에 대하여 신축률 (s_x, s_y) 만큼 신축
 - 신축 기준점을 원점이 되도록 객체를 이동: $T(-x_0, -y_0)$
 - 원점에 대하여 신축: $S(s_x, s_y)$
 - 제자리로 이동: $T(x_0, y_0)$



기본 기하 변환: 회전

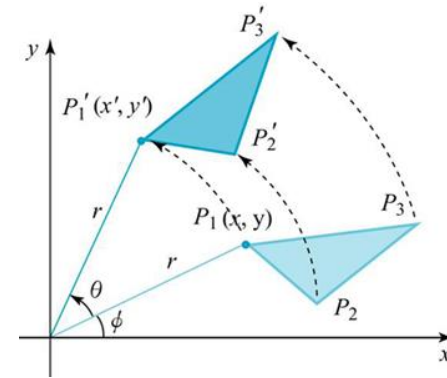
- Rotation (회전)

- xy평면에서 원 경로를 따라 객체를 재배치
- 객체의 모양 변화는 없이 객체가 놓여있는 방향이 변한다.
 - $x = r \cos \Phi, y = r \sin \Phi$
- $P(x, y) \rightarrow P'(x', y')$
 - $x' = r \cos(\Phi + \theta) = \underline{r \cos \Phi \cos \theta} - \underline{r \sin \Phi \sin \theta} = x \cos \theta - y \sin \theta$
 - $y' = r \sin(\Phi + \theta) = \underline{r \cos \Phi \sin \theta} + \underline{r \sin \Phi \cos \theta} = x \sin \theta + y \cos \theta$

회전각 : θ , 회전점 (Pivot Point): (x_r, y_r)

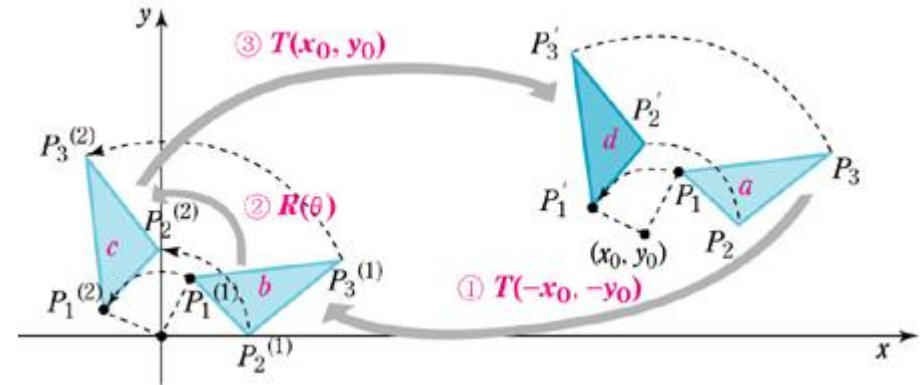
- 행렬을 사용하면

$$P' = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



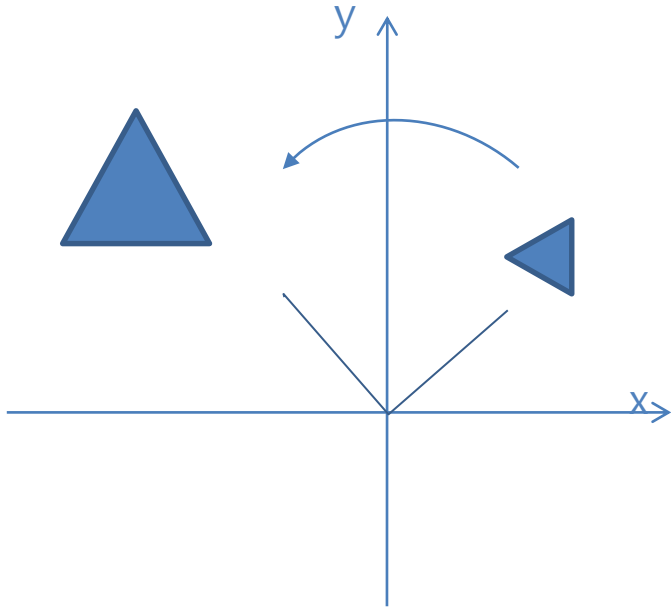
기본 기하 변환: 회전

- 임의의 점 (x_0, y_0) 에 대하여 θ 만큼 회전
 - 회전 중심점이 원점이 되도록 객체를 이동: $T(-x_0, -y_0)$
 - 원점을 중심으로 θ 만큼 회전: $R(\theta)$
 - 반대 방향으로 이동: $T(x_0, y_0)$



기본 기하 변환

- 기하 변환 예)



- (0, 1)에 대하여 시계반대방향으로 90도 회전 후,
- 2배 스케일
- 삼각형 좌표값 (5, 7) (10, 5) (8, 10)
→ 변환 좌표값은?

$$T(4, -1)$$

$$R(90^\circ)$$

$$S(2)$$

$$T(0, 1)$$

동차 좌표계 (Homogeneous Coordinate System)

- 동차 좌표계

- n차원의 공간을 n+1의 좌표로 표현하는 좌표계
- 여러 단계의 변환 행렬을 하나로 결합하여 표현할 수 있게 한다.
- 순차적인 기하 변환을 처리할 때 각 단계별 좌표 값을 구하지 않고 바로 계산 하려면 행렬의 합(A)을 제거해야 한다.

- $P_2 = M \cdot P_1 + A_1$

- $P_3 = M_2 P_2 + A_2 = M_2(M_1 P_1 + A_1) + A_2 = M_2 M_1 P_1 + M_2 A_1 + A_2$

- 동차 좌표계를 이용하여 기본 변환을 행렬 곱으로만 표현한다 → 변환을 간단히 처리, 계산량을 줄일 수 있다.
즉,

$$\begin{aligned} P_n &= M_{n-1} \cdot P_{n-1} = M_{n-1} \cdot M_{n-2} \cdot P_{n-2} = \dots \\ &= M_{n-1} \cdot M_{n-2} \cdot \dots \cdot M_1 \cdot P_1 \\ &= M \cdot P_1 \end{aligned}$$

- 2차원의 데이터 $v = (v1, v2)$ 가 있을 때, 이 데이터의 동차 좌표는 $V' = (v1, v2, p)$
 - $p = 0 \rightarrow v'$ 는 벡터
 - $p \neq 0 \rightarrow v'$ 는 점
 - 동차 좌표계에서 다음의 점들은 모두 같은 점이다.
 - $(5, 1, 1) = (10, 2, 2) = (15, 3, 3) = (20, 4, 4) \dots$

동차 좌표계 (Homogeneous Coordinate System)

- 행렬식

- 2차원의 점 $P(x, y)$ 를 동차 좌표계로 표현하면 차원이 하나 증가된다.
 - 즉, $P(h \cdot x, h \cdot y, h)$ ($h \neq 0$), h 는 임의의 값
 - 한 점은 동차 좌표계에서 h 의 값에 따라 여러 개의 좌표로 표현될 수 있다.
 - 동차 좌표계에서 한 점의 좌표 $P(X, Y, h)$ 로 주어지면 \rightarrow 2차원 기하 평면에서 $P(\frac{X}{h}, \frac{Y}{h})$ 로 대응된다.
 - $P(x_1, y_1, h_1), P(x_2, y_2, h_2)$ 로 주어질 때, $(\frac{x_1}{h_1}, \frac{y_1}{h_1}) = (\frac{x_2}{h_2}, \frac{y_2}{h_2})$ 이면 2차원 기하 평면에서 동일한 점이 된다.
 - $h = 1$ 이면 $(x, y) \rightarrow (x, y, 1)$

- 이동의 3차원 행렬: $T(t_x, t_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- 회전의 3차원 행렬: $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

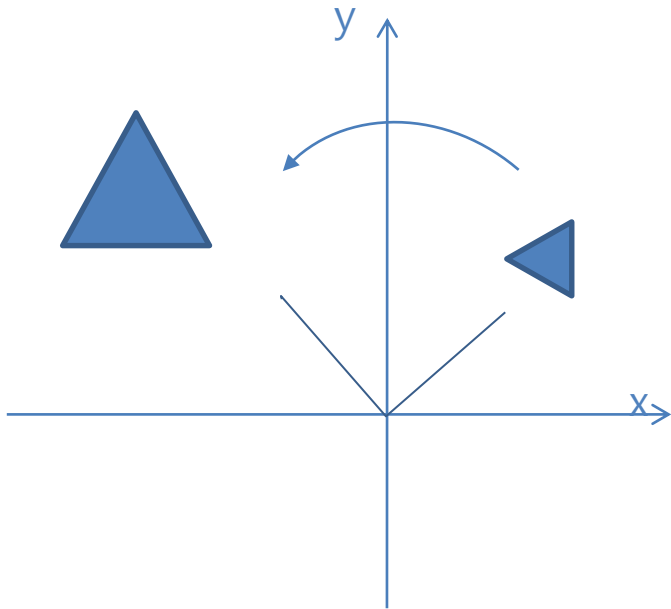
- 신축의 3차원 행렬: $S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

동차 좌표계 (Homogeneous Coordinate System)

- 연속된 기본 변환을 동차 좌표계를 사용하여 하나의 행렬로 나타낼 수 있다.
 - 하나의 변환 행렬로 표현한 합성 변환에서는 한번의 행렬 곱셈만 필요하다
 - 이동: 연속적으로 2번 이동하는 경우
$$P' = T(t_{x2}, t_{y2}) \cdot T(t_{x1}, t_{y1}) \cdot P = T(t_{x2} + t_{x1}, t_{y2} + t_{y1}) \cdot P$$
 - 신축: 연속적으로 2번 신축하는 경우
$$P' = S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot S(s_{x1}, s_{y1}) \cdot P = S(s_{x2} \cdot s_{x1}, s_{y2} \cdot s_{y1}) \cdot P$$
 - 회전 : 연속적으로 2번 회전하는 경우
$$P' = R(\theta_2) \cdot R(\theta_1) \cdot P = R(\theta_2 + \theta_1) \cdot P$$
 - 임의의 점 (x_0, y_0) 에 대하여 신축 (s_x, s_y) 하는 경우
 - $P' = T(x_0, y_0) \cdot S(s_x, s_y) \cdot T(-x_0, -y_0) \cdot P$
 - 행렬의 곱셈에서 결합법칙은 성립한다.
 - $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
 - 교환 법칙은 성립하지 않는다.
 - $A \cdot B \neq B \cdot A$
 - 단, 같은 종류의 기하변환에서 교환 법칙은 성립한다.

기본 기하 변환

- 기하 변환 예) 동차좌표계 적용하여



- (0, 1)에 대하여 시계반대방향으로 90도 회전 후,
 - 2배 스케일
 - 삼각형 좌표값 (5, 7) (10, 5) (8, 10)
- 변환 좌표값은?

$$\begin{matrix} T \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} S \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} R \\ \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} T \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = M$$

기타 기하 변환: 반사

- Reflection (반사): 거울 영상

- 고정점에 대하여 객체가 반대방향으로 변환되는 것

- $y=0$ (x축)에 대하여 반사

- y 좌표값 부호 변경

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $x=0$ (y축)에 대하여 반사

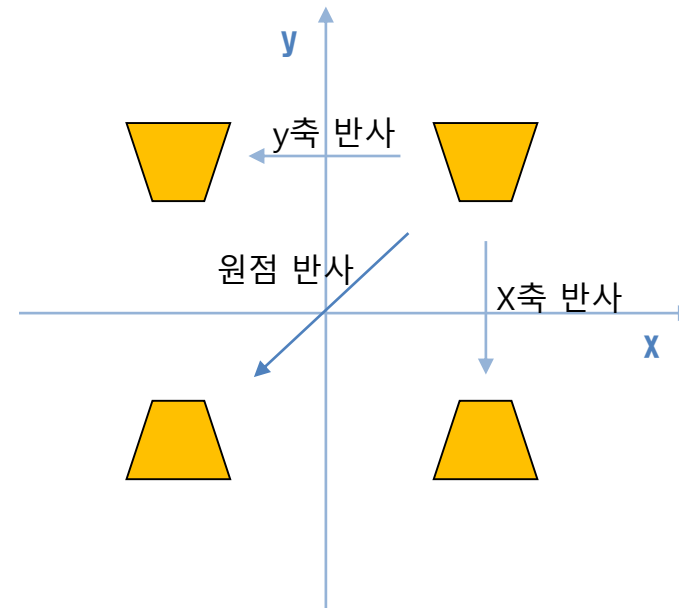
- x 좌표값 부호 변경

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 원점 (0,0)에 대하여 반사

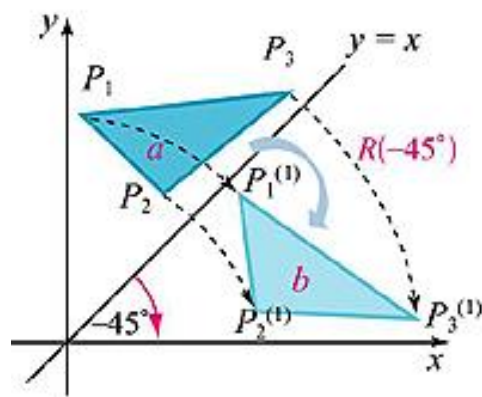
- 모두 변경

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

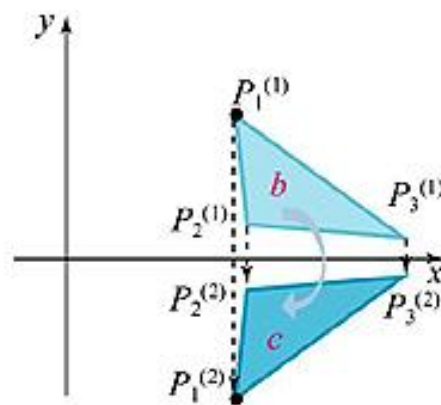


기타 기하 변환: 반사

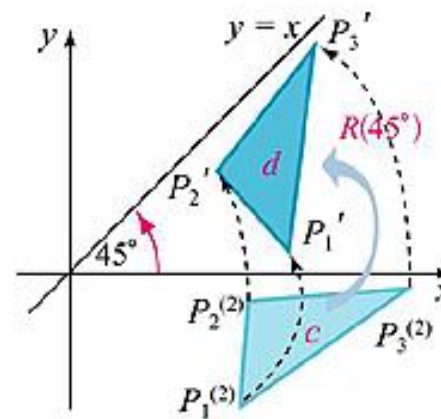
- $y = x$ 에 대한 반사
 - 시계방향으로 45° 회전
 - X축에 대하여 반사
 - 시계 반대 방향으로 45° 회전
- $y = -x$ 에 대한 반사



(a) 다각형과 반사축을 회전



(b) 반사축을 기준으로 반사



(c) 반대방향으로 회전

기타 기하 변환: 반사

- $y = mx + b$ 에 대하여 반사

$(0, -b)$ y절

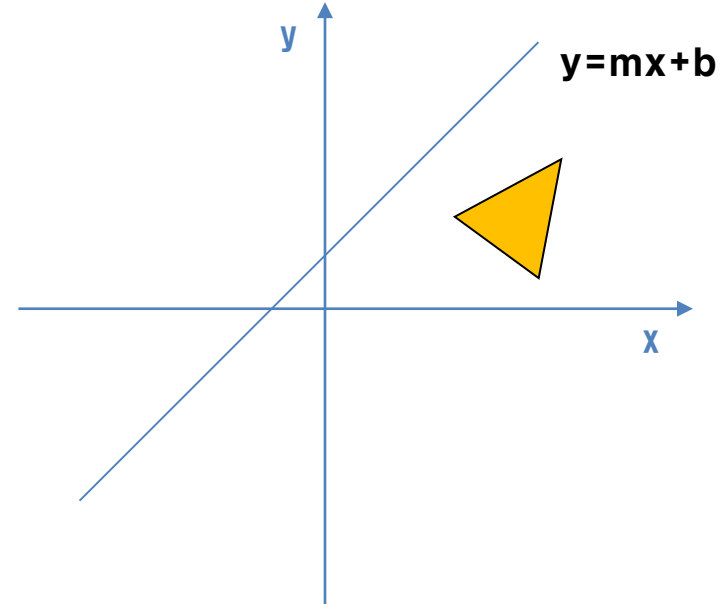
$(-b)$ R

$(-x)$ Re

(0) R

$(0, b)$ T

- 예) $y = x + 2$ 직선에 대하여 선분 $(0, 5)$ $(8, 2)$ 반사



기타 기하 변환: 밀림

- 밀림 (Shearing)

- 2차원 평면상에서 객체의 한 부분을 고정시키고 다른 부분을 밀어서 생기는 변환
 - 고정된 지점에서 멀수록 밀리는 거리가 커진다. (고정된 지점과의 거리에 비례하여 밀리는 경우가 결정된다)

- x축에 대한 밀림:

$$x' = x + h_x \cdot y$$
$$y' = y$$

(h_x : 밀림 비율)

$$\begin{bmatrix} 1 & h_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- y축에 대한 밀림:

$$x' = x$$
$$y' = y + h_y \cdot x$$

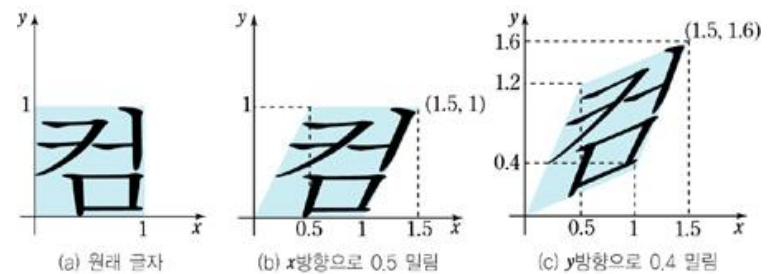
(h_y : 밀림 비율)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & h_x & 0 \\ h_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 행렬을 사용하면,

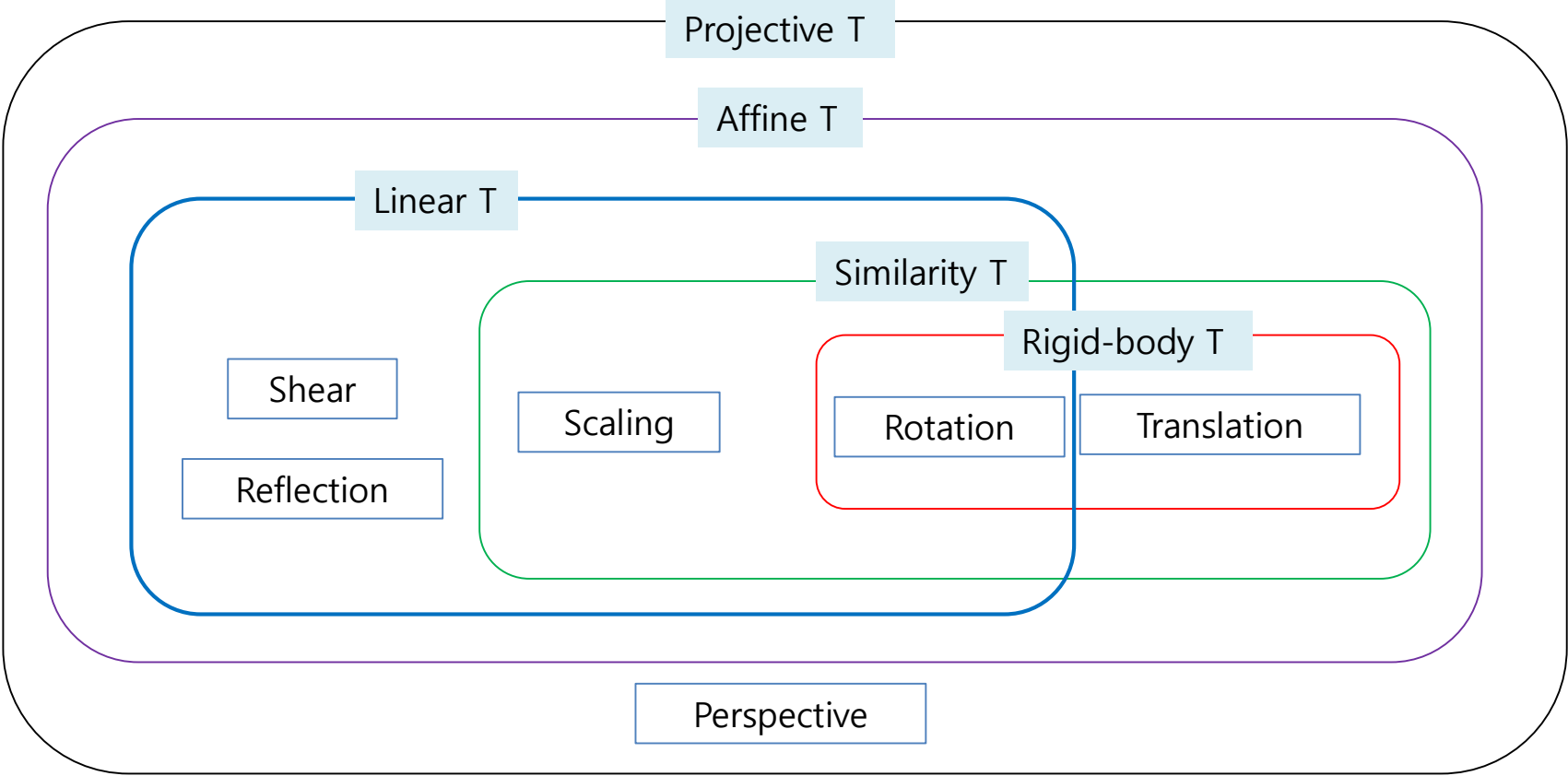
$$P' =$$



변환 유형

- 강체 변환 (Rigid-body Transformation): 크기와 각도 보존
 - 이동, 회전
- 유사 변환 (Similarity Transformation): 모양이 유사한 변환
 - 이동, 회전, 신축
- 선형 변환 (Linear Transformation): 선형성을 보존하는 변환
 - 선형성: 벡터 공간에서 다음의 연산성질을 보존하며 사상하는 변환
 - $T(u+v) = T(u) + T(v)$
 - $T(cu) = cT(u)$
 - 회전, 신축, 반사, 밀림
 - 이동 변환은 선형 변환이 아님
- 어파인 변환(Affine Transformation): 직선, 길이의 비, 평행성을 보존하는 변환
 - 이동, 회전, 신축, 반사, 밀림
- 원근 변환 (Projective Transformation): 원근감을 표시하는 변환
 - 투영 변환

변환 유형



이번주에는

- 2차원 그래픽스 변환
 - 기본 변환: 이동, 회전, 신축
 - 기타 변환: 반사, 밀림
- 다음 시간에는
 - 윈도우와 뷰포트
 - 클리핑