컴퓨터 그래픽스
5. 3차원 그래픽스의 기하변환

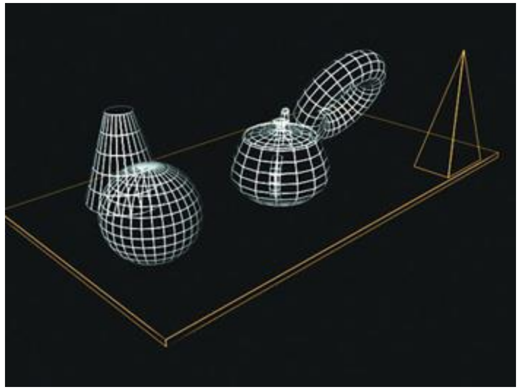
2023년 2학기

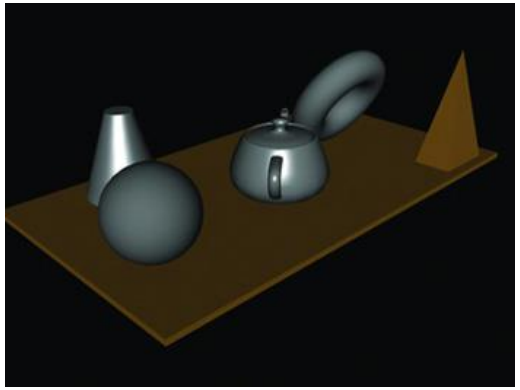
학습 내용

- **3차원 그래픽스 기하 변환과 뷰잉**
  - 3차원 그래픽스의 처리 과정
  - 3차원 기하 변환

3차원 그래픽스의 처리과정

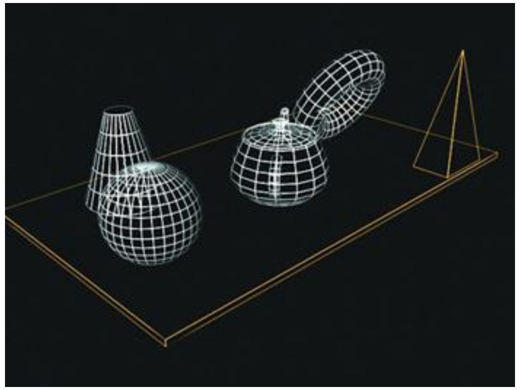
- **3차원 그래픽스**
  - 모델링 과정 (Modeling): 3차원 객체들을 형상화
  - 투영 과정 (Projection): 모델링한 객체들을 모니터와 같은 2차원 평면에 투영
  - 렌더링 과정 (Rendering): 객체에 현실감을 부여

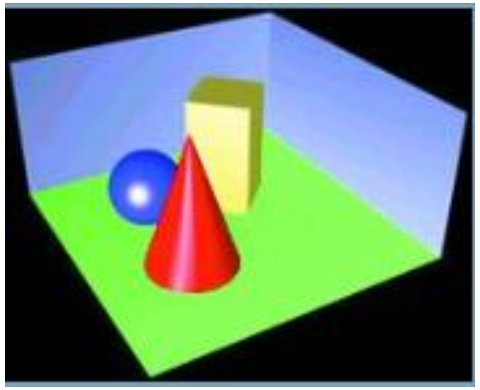


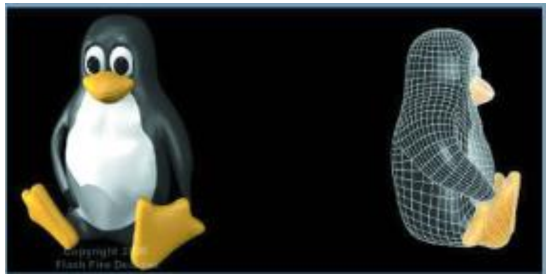


3차원 그래픽스의 처리과정

- **모델링 (Modeling)**
  - 3차원 객체들을 3차원 좌표계를 사용하여 표현하는 것
  - 모델링 방법:
    - 다각형 표면 모델링 (Polygon Surface Modeling)
    - 매개변수를 이용한 곡면 모델링 (Parametric Surface Modeling)
    - 와이어 프레임 (Wire-frame)
    - 솔리드 모델링 (Solid Modeling)
    - 스위핑 (Sweeping)
    - 프랙털 기하학 (Fractal Geometry)
    - 입자 시스템 (Particle System)

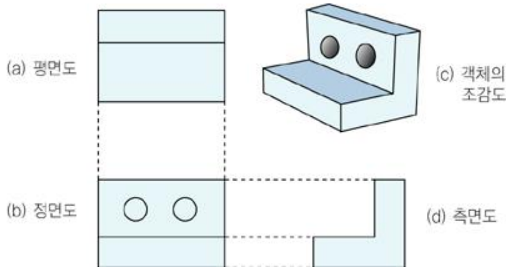




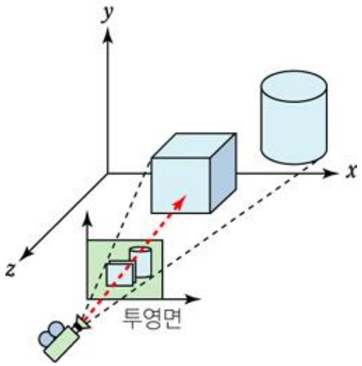


3차원 그래픽스의 처리과정

- Projection (투영)
  - 3차원 객체를 2차원 출력장치에 출력
    - 예) 3차원 공간의 원뿔 → 2차원의 삼각형 모양
  - 투영 종류:
    - Parallel Projection (평행투영)
      - 객체를 구성하는 각 요소들간의 상대적인 크기가 보존된다
      - 기계 설계, 건축 설계
    - Perspective Projection (원근투영)
      - 객체의 원근감이 잘 나타난다
      - 투영면에 보이는 2차원 객체의 크기는 3차원 객체와 투영면과의 거리에 반비례한다.
      - 건물의 조감도



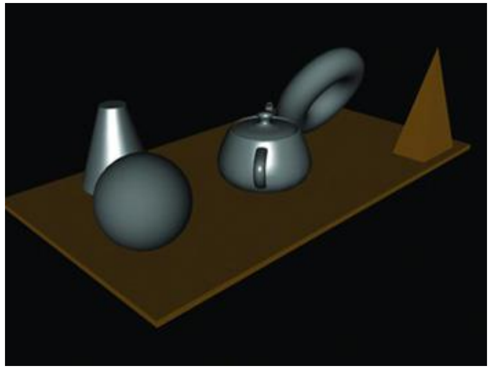
평행 투영



원근 투영

3차원 그래픽스의 처리과정

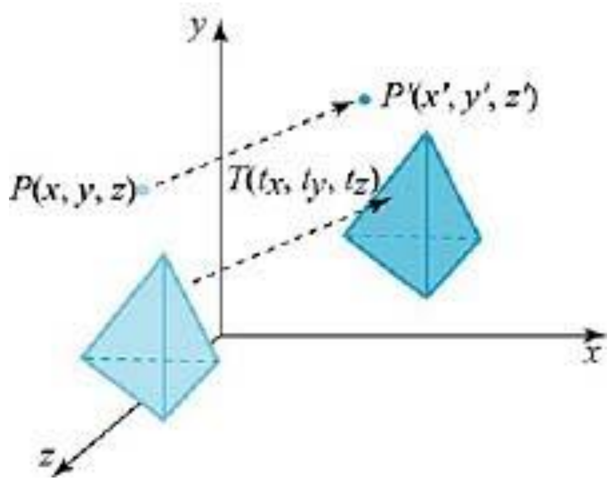
- **Rendering (렌더링)**
  - 투영된 그림을 렌더링하고 그림자나 색상의 변화를 표현하여 현실감 있는 그림을 만들어내는 과정
  - 렌더링 과정:
    - Hidden Surface Removal (은면제거): 보이지 않는 면 제거
    - Shading (쉐이딩): 객체의 색상과 명암 표현
    - Texture Mapping (텍스쳐 매핑): 객체에 이미지 매핑하기



3차원 기하변환: 이동

- **Translation (이동)**
  - 공간상의 한 점에 이동거리를 더하여 이동한다.
  - $x' = t_x + x$ $y' = t_y + y$ $z' = t_z + z$
  - $P' = T(t_x, t_y, t_z) \cdot P$ (t_x, t_y, t_z): 이동 벡터

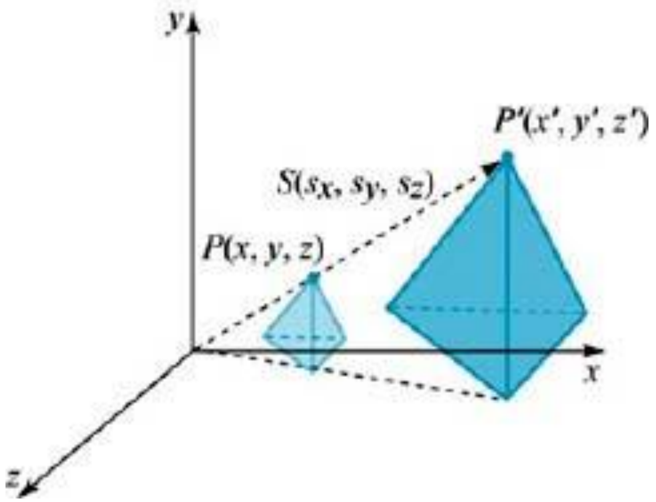
$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = T(t_x, t_y, t_z) \cdot P$$



3차원 기하변환: 신축

- **Scaling (신축)**
  - 객체의 크기를 확대 또는 축소, 비율 변화
  - $x' = s_x \cdot x$ $y' = s_y \cdot y$ $z' = s_z \cdot z$
  - $P' = S(s_x, s_y, s_z) \cdot P$ (s_x, s_y, s_z): 신축률

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = S(s_x, s_y, s_z) \cdot P$$

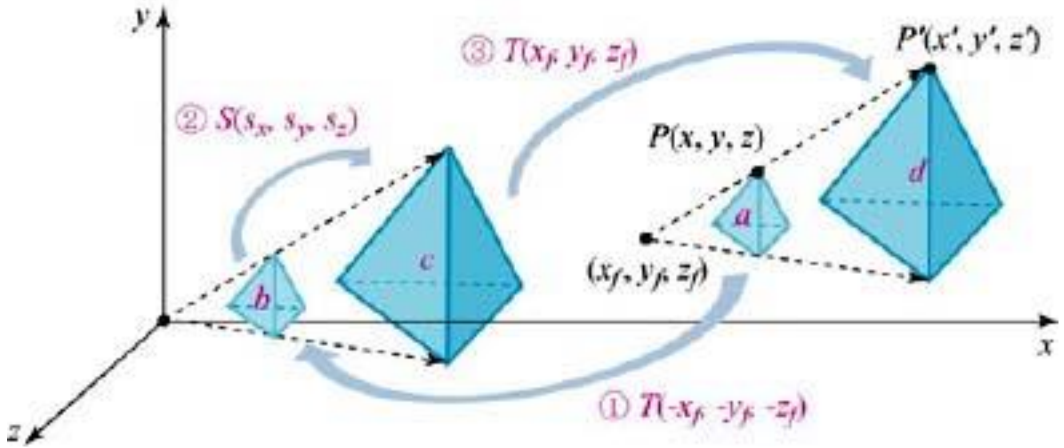


3차원 기하변환: 신축

– 임의의 점에 대한 신축 행렬 T

- Translation: $P' = (-x_f, -y_f, -z_f) \cdot P$
- Scaling: $P'' = (s_x, s_y, s_z) \cdot P'$
- Translation: $P''' = (x_f, y_f, z_f) \cdot P''$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & 0 & y_f \\ 0 & 0 & 1 & z_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -xf \\ 0 & 1 & 0 & -yf \\ 0 & 0 & 1 & -zf \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



3차원 기하변환: 회전

- **Rotation (회전)**
  - 객체를 기준 축 주위로 회전시킨다.

  - z-축 회전: $P' = R_z(\theta) \cdot P$
    - $x' = x\cos\theta - y\sin\theta$
    - $y' = x\sin\theta + y\cos\theta$
    - $z' = z$

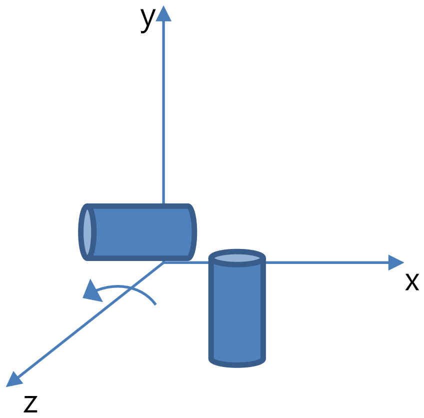
$$\begin{pmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  - x-축 회전 : $P' = R_x(\theta) \cdot P$
    - $x' = x$
    - $y' = y\cos\theta - z\sin\theta$
    - $z' = y\sin\theta + z\mathrm{con}\theta$

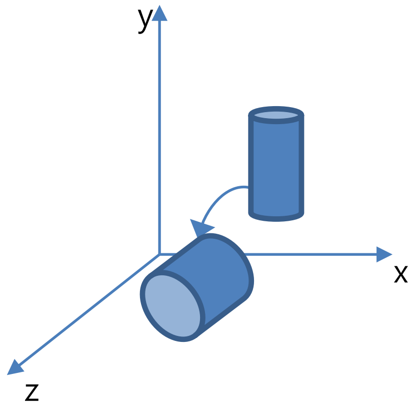
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s & 0 \\ 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  - y-축 회전 : $P' = R_y(\theta) \cdot P$
    - $x' = x\cos\theta + z\sin\theta$
    - $y' = y$
    - $z' = -x\sin\theta + z\cos\theta$

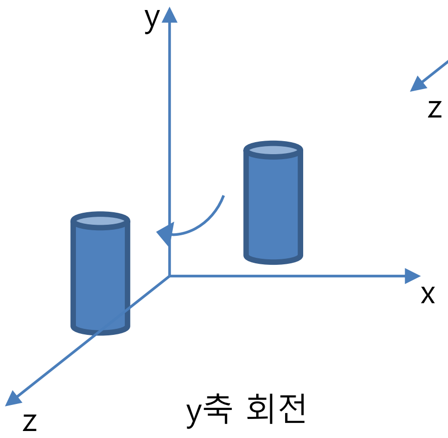
$$\begin{pmatrix} c & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



z축 회전



x축 회전



y축 회전

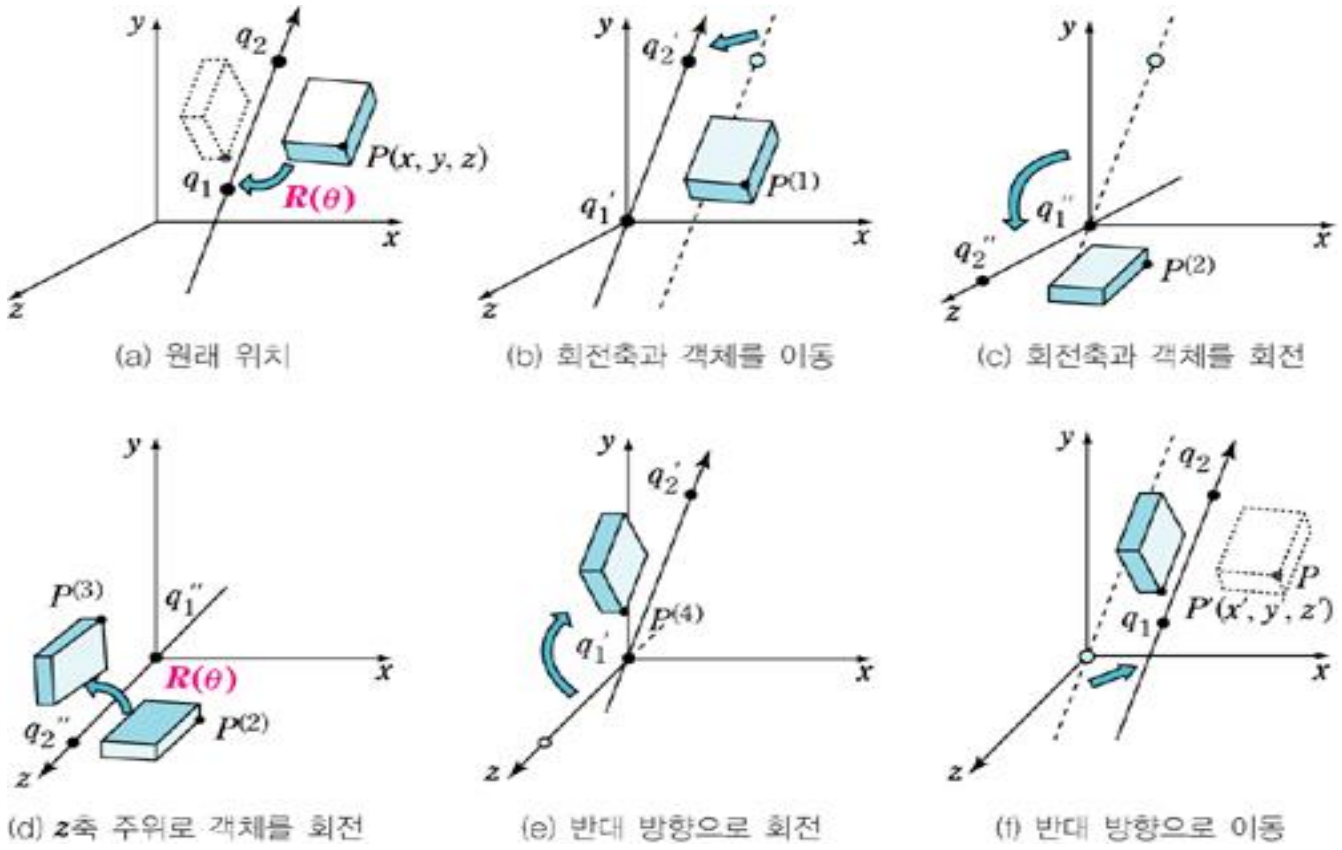
3차원 기하변환: 회전

- 임의의 축과 평행한 직선에 대한 회전
  - 회전축이 한 축이 되도록 이동
  - 그 축에 대해서 회전
  - 제자리로 역 이동

  예) x축에 평행한 회전축에 대하여 회전하려면: $R = T^{-1} \bullet R_x \bullet T$

- 축과 평행하지 않은 일반적인 직선에 대한 회전
  - 회전축이 원점을 지나도록 이동시킨다.
  - 회전축을 좌표축 가운데 하나와 일치하도록 회전시킨다.
  - 일치된 좌표축을 중심으로 회전시킨다.
  - 2단계의 반대방향으로 회전한다.
  - 1단계의 반대방향으로 이동시킨다.

3차원 기하변환: 회전

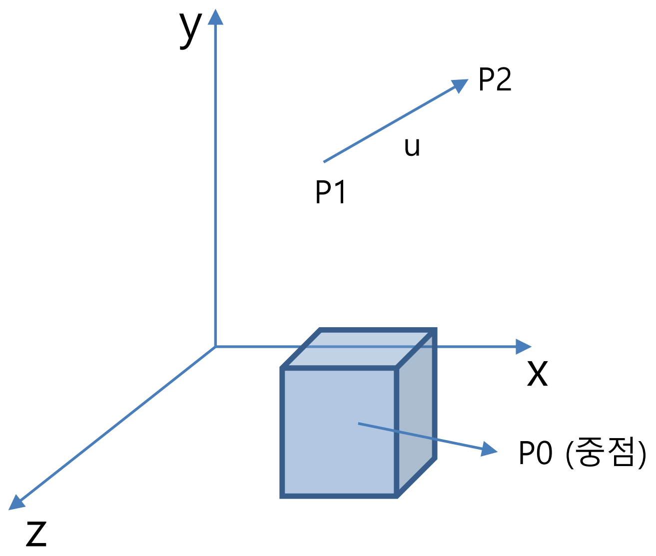


$$M = T(P_0)R_x(-\theta_x)R_y(-\theta_y)R_z(\theta)\ R_y(\theta_y)\ R_x(\theta_x)\ T(-P_0)$$

3차원 기하변환: 회전

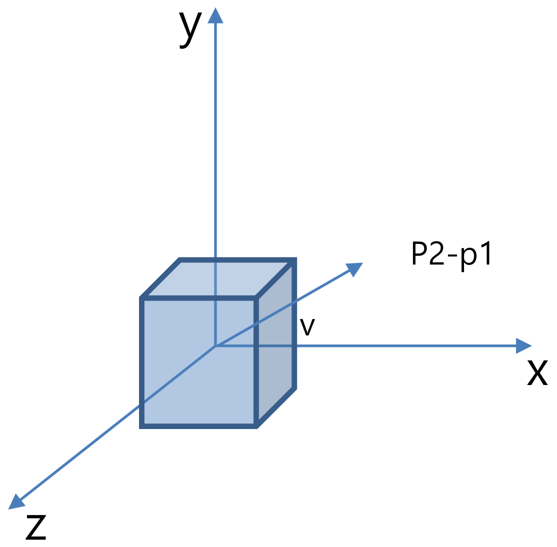
- 임의의 축에 대하여 회전하기 위하여
  - 회전축이 원점을 지나가도록 이동: T(-P1)

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & 0 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 & -z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



  - 회전축 벡터: $u = P2 - P1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$
  - u를 정규화 하기

$$v = \frac{u}{|u|} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$



- $v = (a_x, a_y, a_z)$, $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1$

3차원 기하변환: 회전

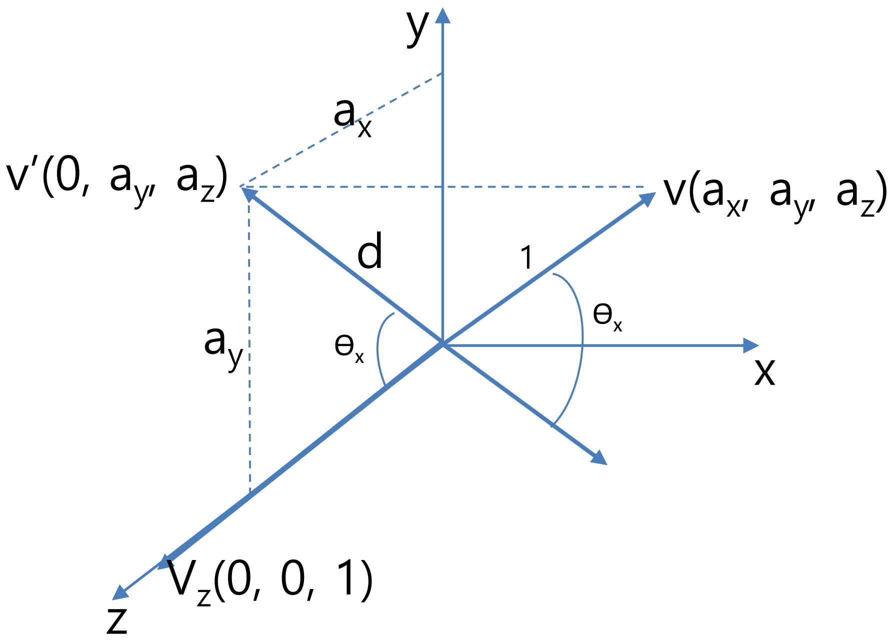
- **회전축이 xz평면에 놓이도록 x축 회전**
  - v′ 와 z축의 단위 벡터 v_z 사이의 내적: $v' \cdot v_z = |v'||v_z| \cos\theta_x$
    - $v' = \sqrt{a_y^2 + az^2}$ 이 값을 d라고 하면, $v_z = (0, 0, 1)$이고 $|v_z| = 1$

      수학적으로, $v' \cdot v_z = (0, a_y, a_z) \cdot (0, 0, 1) = a_z$

      따라서, $\cos\theta_x = \dfrac{v' \cdot v_z}{|v'||v_z|} = \dfrac{a_z}{d}$
  - v′ 와 z축의 단위 벡터 v_z 사이의 외적: $v' \times v_z = |v'||v_z|\, v_x \sin\theta_x$
    - 직교좌표 형식으로,

      $v' \times v_z = (0, a_y, a_z) \times (0, 0, 1) = (a_y, 0, 0) = a_y(1, 0, 0) = a_y \cdot v_x$

      따라서, $\sin\theta_x = \dfrac{v' \times v_z}{|v'||v_z|\, v_x} = \dfrac{a_y}{d}$
  - 따라서, x축에 대한 θ_x의 회전 행렬은
  - $R_x(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_z}{d} & -\frac{a_y}{d} & 0 \\ 0 & \frac{a_y}{d} & \frac{a_z}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



3차원 기하변환: 회전

- **회전축이 z축이 되도록 y축 회전**
  - v''와 z축의 단위 벡터 v_z 사이의 내적: $v'' \cdot v_z = |v''||v_z| \cos\theta_y$
    - $|v_z| = 1$, $|v''| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + az^2} = 1$

      수학적으로, $v'' \cdot v_z = (a_x, 0, d) \cdot (0, 0, 1) = d$ $\quad (d = \sqrt{a_y^2 + a_z^2})$

      따라서, $\cos\theta_y = \dfrac{v'' \cdot v_z}{|v''||v_z|} = d$

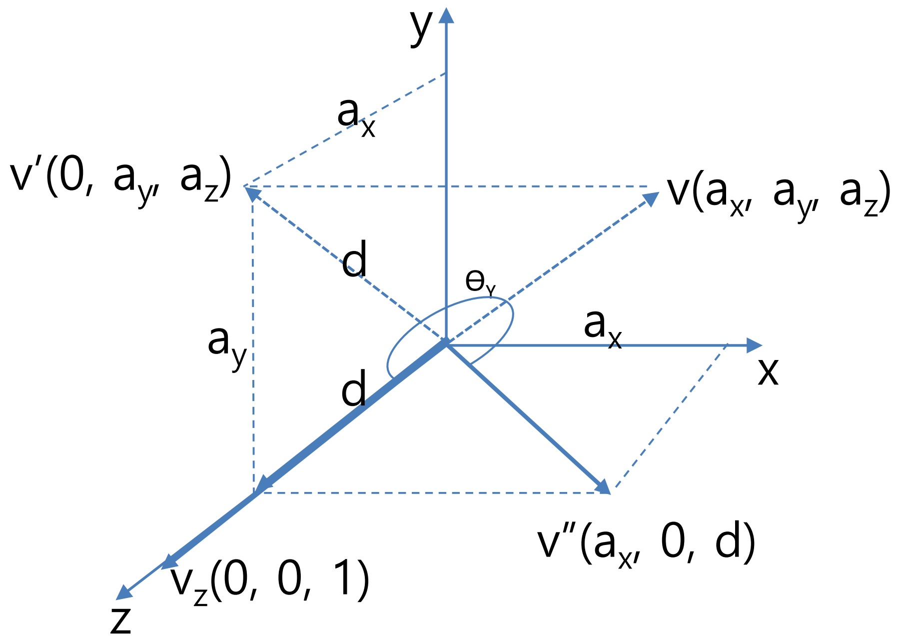
  - v''와 z축의 단위 벡터 v_z 사이의 외적: $v'' \times v_z = |v''||v_z|\, v_y \sin\theta_y$
    - 직교좌표 형식으로,

      $v'' \times v_z = (a_x, 0, d) \times (0, 0, 1) = (0, -a_x, 0) = -a_x(0, 1, 0)$

      따라서, $\sin\theta_y = \dfrac{v'' \times v_z}{|v''||v_z|\, v_y} = -a_x$

  - 따라서, y축에 대한 θ_y의 회전 행렬은

  - $R_y(\theta_y) = \begin{bmatrix} d & 0 & -a_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_x & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



3차원 기하변환: 회전

- **z축 회전**
  - $R_z\ (\theta_z) = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- **회전 후 제자리로 가기 위하여 역회전과 역 이동**
  - 역회전 $R_x\ (-\theta_x)$, $R_y\ (-\theta_y)$
  - 역이동 $T(P_0)$

- **최종적으로,**

$$M = T(P_0)R_x(-\theta_x)R_y(-\theta_y)R_z(\theta)\ R_y(\theta_y)\ R_x(\theta_x)\ T(-P_0)$$

기타 3차원 기하변환: 반사

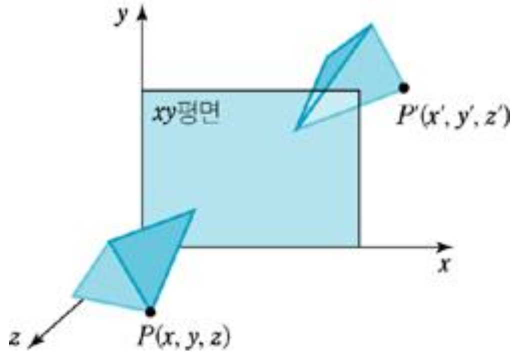
- **Reflection (반사)**
  - xy 평면에 반사
    - z축 값의 부호가 바뀐다.

      x′ = x, y′ = y, z ′ = −z
  - yz 평면에 반사
    - x축 값의 부호가 바뀐다.

      x′ = −x, y′ = y, z ′ = z
  - xz 평면에 반사
    - y축 값의 부호가 바뀐다.

      x′ = x, y′ = −y, z ′ = z
  - 원점에 반사
    - 모든 좌표값의 부호가 바뀐다.

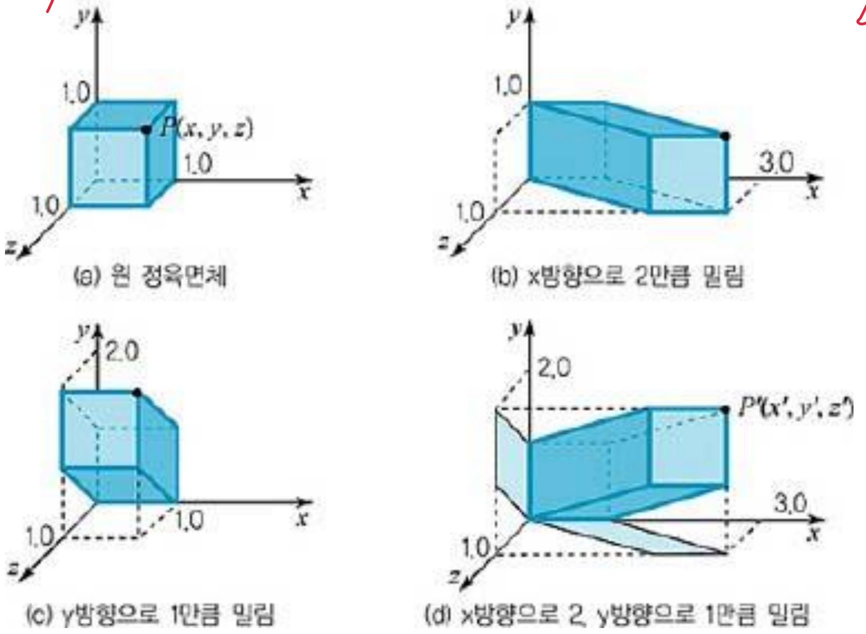
      x′ = −x, y′ = −y, z ′ = −z



기타 3차원 기하변환: 밀림

- **Shearing (밀림)**
  - x축을 기준으로 밀림 변환
    - $x' = x$
    - $y' = y + h_y x$
    - $z' = z + h_z x$
      - h_y, h_z: 각각 y축과 z축 방향으로 밀리는 정도
    - x축을 기준으로 한 밀림이므로 x값은 변함이 없다.
  - y축을 기준으로 밀림 변환
    - $x' = x + h_x y$
    - $y' = y$
    - $z' = z + h_z y$
      - h_x, h_z: 각각 x축과 z축 방향으로 밀리는 정도
    - y축을 기준으로 한 밀림이므로 y값은 변함이 없다.
  - z축을 기준으로 밀림 변환
    - $x' = x + h_x z$
    - $y' = y + h_y z$
    - $z' = z$
      - h_x, h_y: 각각 x축과 y축 방향으로 밀리는 정도
    - z축을 기준으로 한 밀림이므로 z값은 변함이 없다.

hxyz



Z축을 기준으로 하는 밀림 변환

이번 주에는

- **3차원 기하 변환**
  - 이동, 회전, 신축, 반사, 밀림

- **다음 주에는**
  - 투영
  - 뷰잉 변환