

# 컴퓨터 그래픽스

## 7. 3차원 객체의 모델링

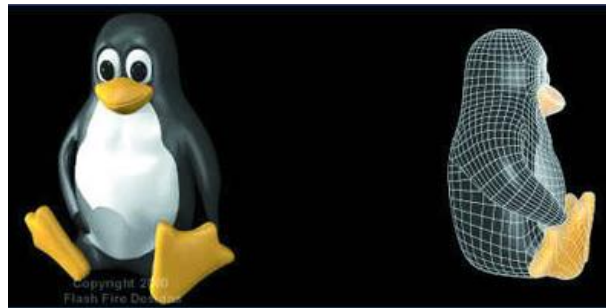
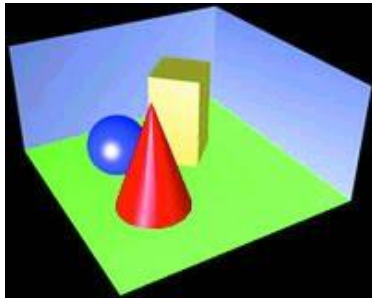
2023년 2학기

# 학습 내용

- 3차원 객체의 모델링
  - 다각형 면
  - 평면 방정식
  - 스플라인

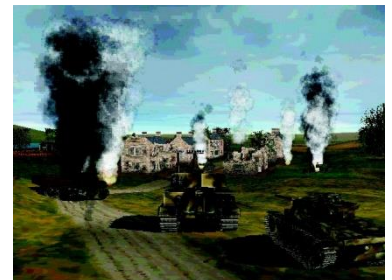
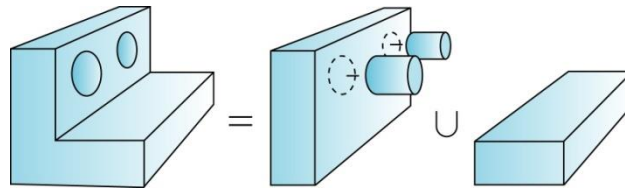
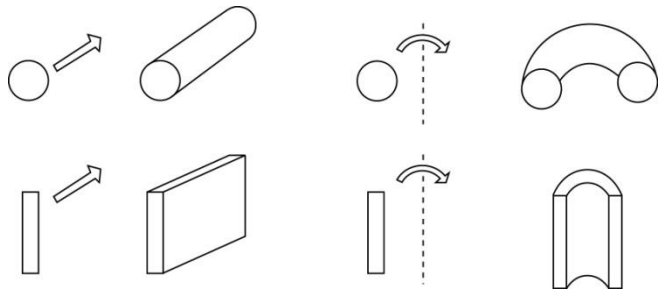
# 객체 모델링

- 3차원 객체 표현
  - 다각형 면이나 2차 곡면을 이용하여 객체 표현
    - 매시 (Mesh, 삼각형이나 사각형을 서로 연결하여 사용)로 표현
  - 임의의 모양을 가진 3차원 객체를 표현
  - 곡선 또는 곡면 함수를 이용하여 부드러운 물체 표현
    - Bezier 곡선, 스플라인(Spline), NURBS 곡선 및 곡면



# 객체 모델링

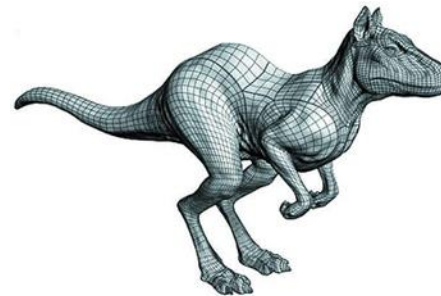
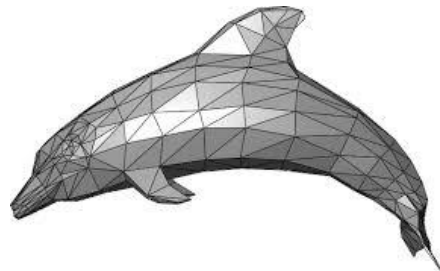
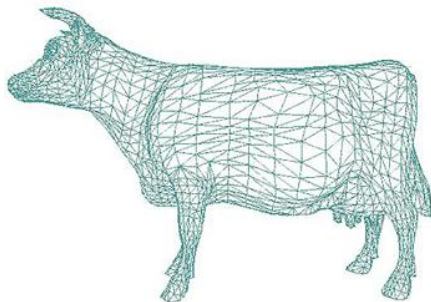
- 스위핑 (Sweeping) 기법을 이용
  - 간단한 평면 도형을 공간상에서 이동 또는 회전시켜 복잡한 3차원 객체를 생성하는 기법
  - 원 → 원기둥, 도우넛...
- [CSG](#) (Constructive Solid Geometry, 조립적 입체기하학) 기법 이용
  - 기본적인 3차원 개체들을 집합 연산시켜 새로운 객체를 만들어내고, 이를 반복함 으로서 점차 복잡한 객체를 생성한다.
- [프랙탈](#) 기하학 또는 [입자시스템](#) 이용
  - 기본 객체를 규칙에 따라 반복적으로 처리하여 자연물과 같은 불규칙적인 모습의 객체를 규칙적으로 모델링한다.



# 다각형 면 모델링

- 다각형 매시 표현

- 곡면을 삼각형이나 사각형으로 구성된 그물 형태로 표현한 그래픽 표현 기법
  - 삼각 매시법 (Triangular Mesh): 삼각형을 이용하여 곡면을 표현하는 기법
    - 가장 간단한 다각형인 삼각형을 이용
    - 수학 함수로 모델링 한 곡면인 경우에도 다각형 매시를 사용하여 렌더링
      - » 1초당 렌더링 할 수 있는 삼각형의 개수를 통하여 가속기의 성능을 표현한다.
  - 사각 매시법 (Quadrilateral Mesh): 사각형을 이용
    - 일반적으로 4개의 점은 한 평면 위에 놓이지 않는다.
    - 2개의 삼각형으로 분할하여 각각의 평면 방정식을 사용
- 삼각형 면: 1차 방정식 ( $Ax + By + Cz + D = 0$ )를 이용
  - 공간상에 일직선상에 놓여있지 않은 3점을 이용하여 하나의 평면을 구성

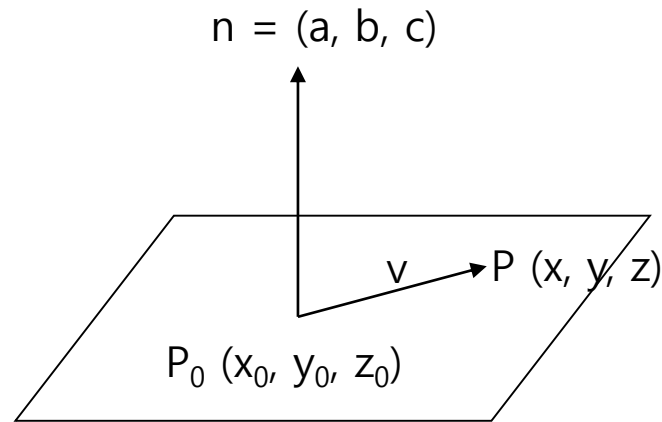


# 평면 방정식

- 다각형 면은 평면으로 구성

- 평면 방정식 유도:

- $P_0(x_0, y_0, z_0)$ : 평면 위의 점, 벡터  $n(a, b, c)$ : 평면에 수직인 벡터
      - 임의의 점  $P(x, y, z)$ 가 평면 위의 점이라면, 벡터  $v = P - P_0$ 도 평면 위의 벡터이다.
      - $n \cdot v = 0$
      - $a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$
      - $ax + by + cz + d = 0, \quad d = -ax_0 - by_0 - cz_0$
      - $n \cdot p + d = 0$



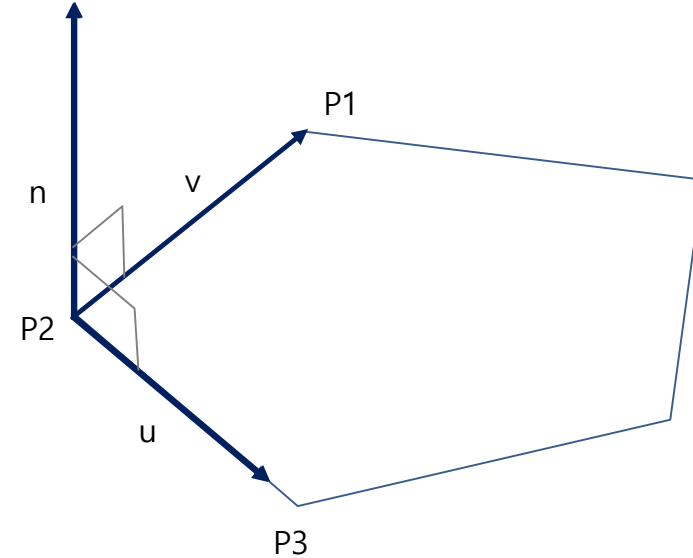
# 세 점을 사용하여 법선 벡터 구하기

- 폴리곤의 정점 자료에서 법선 구하기
  - 폴리곤의 법선 벡터
    - 2개의 인접한 엣지로 외적을 구한 후 정규화한다.

```
void computeNormal (vector p1, vector p2, vector p3)
{
    vector u, v, n;
    u = p3 - p2;
    v = p1 - p2;
    n = crossProduct (u, v);
    normalize (n);
}
```

```
vector crossProduct (vector a, vector b)
{
    vector c = (a[1]*b[2] - a[2]*b[1],    a[2]*b[0] - a[0]*b[2],    a[0]*b[1] - a[1]*b[0]);

    return c;
}
```



# 평면 방정식

## • 평면상의 임의의 세 점으로 평면 방정식 구하기

- 임의의 세 점  $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $P_3(x_3, y_3, z_3)$  으로 평면 구성할 때, 평면 방정식은

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

- 세 점을 위의 방정식에 대입하면,

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$$

$$Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0$$

크레이머의 법칙에 의해서

$$A = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} x_1 & 1 & z_1 \\ x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad D = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

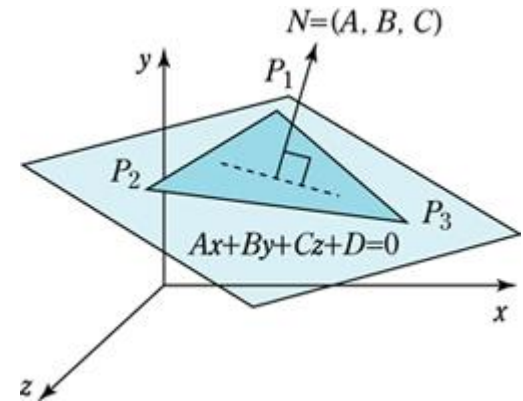
→

$$A = y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1) + y_3(z_1 - z_2)$$

$$B = z_1(x_2 - x_3) + z_2(x_3 - x_1) + z_3(x_1 - x_2)$$

$$C = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$$

$$D = -x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) - x_2(y_3 z_1 - y_1 z_3) - x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1)$$





# 크레이머 법칙

- 크레이머 법칙
  - 연립방정식  $Ax = b$ 는

정칙 행렬  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$  과 두 벡터  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$        $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

로 세워져 있다.

A의 j번째 열을 b로 대체한 행렬을  $A_j$ 라고 하면,

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} \quad (j = 1, \dots, n)$$

## 평면 방정식

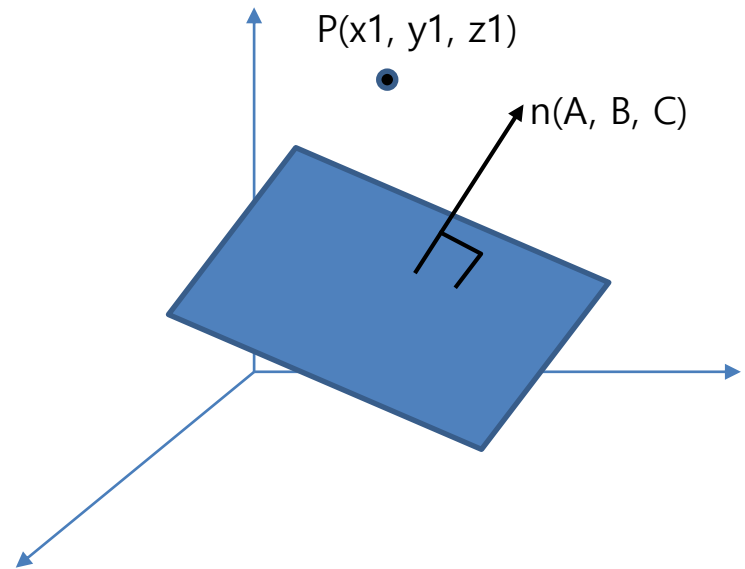
- 공간상에 점과 평면과의 관계

- 점 P가  $Ax + By + Cz + D < 0$ 이면 → 평면의 안쪽
- 점 P가  $Ax + By + Cz + D = 0$ 이면 → 평면 위
- 점 P가  $Ax + By + Cz + D > 0$ 이면 → 평면의 바깥쪽

- 점과 평면과의 거리

- 한 점 P ( $x_1, y_1, z_1$ )과 평면  $Ax + By + Cz + D = 0$  와의 거리는

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



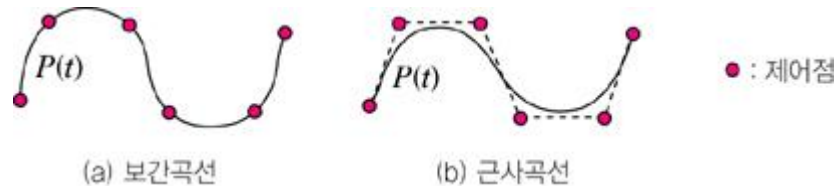
# 스플라인 곡선

- 스플라인 (Spline)

- 간단한 다항식(Polynomial)으로 표현되는 부드러운 형태의 곡선
- 곡선의 중요한 위치를 나타내는 제어점을 지정하여 곡선의 형태를 만들 수 있다.
- 용도: 곡선 설계, 곡면 설계, 애니메이션의 동작 경로

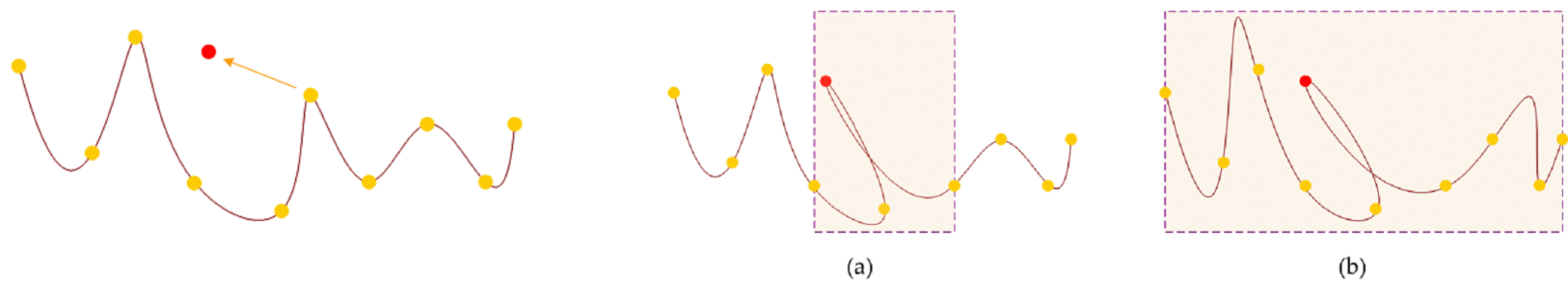
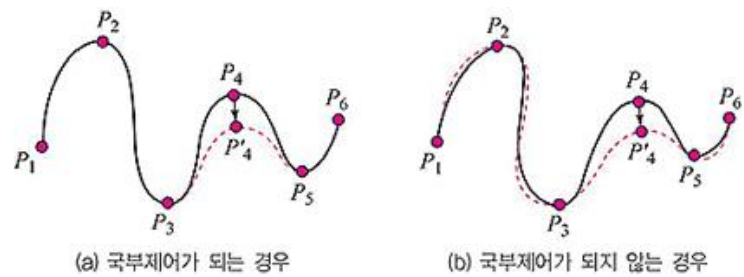
- 스플라인 종류

- 보간 스플라인 (Interpolate spline): 주어진 점을 모두 지나는 부드러운 곡선
  - 일반 스플라인 곡선
- 근사 스플라인 (Approximate spline): 주어진 점들을 지나지 않으면서 제어점을 연결하는 선들의 모양에 근사하는 부드러운 곡선
  - 부드러움을 위해 제어점을 통과하지 않고 제어점은 곡선을 끌어당기는 역할을 한다.
  - 베지어 곡선, B-스플라인 곡선, NURBS 곡선



# 스플라인 곡선

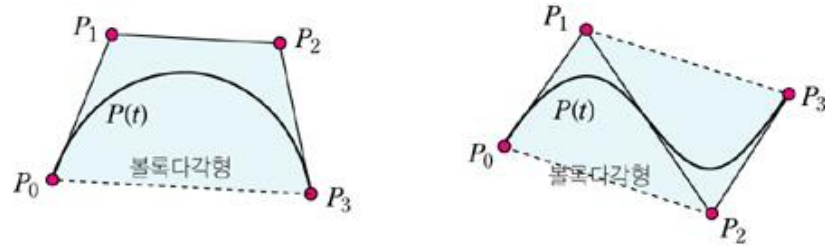
- Locality (곡선의 부분 제어): 제어점 하나가 바뀔 때 영향을 미치는 부분
  - 제어점 하나를 이동시켰을 때, 제어점과 인접한 일부분의 모양만 바뀌면 부분 제어 가능
  - 제어점 하나를 이동시켰을 때, 곡선 전체의 모양이 바뀌면 부분 제어가 가능하지 않다.



# 스플라인 곡선

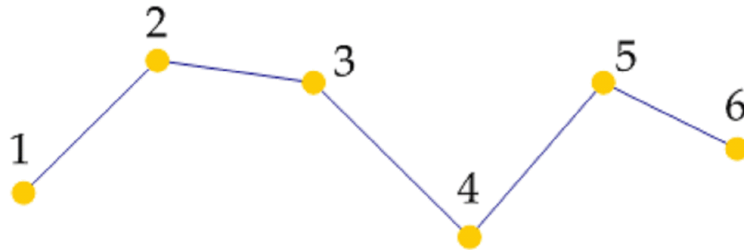
- Convex hull (볼록 다각형):

- 제어점들을 모두 둘러싸고 있는 최소 면적의 볼록한 형태의 경계
  - 구간별 3차 다항식: 4개의 인접한 제어점
  - 구간별 2차 다항식: 3개의 인접한 제어점
- 스플라인 곡선이 항상 볼록다각형 내부에 존재  $\rightarrow$  곡선의 형태 파악



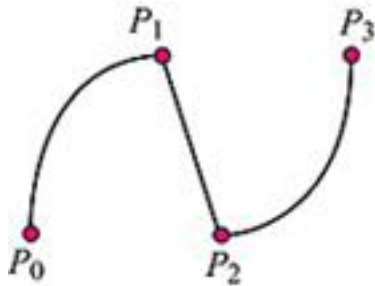
- Control graph (제어 그래프):

- 근사 곡선에서 제어점들을 연결한 직선 형태

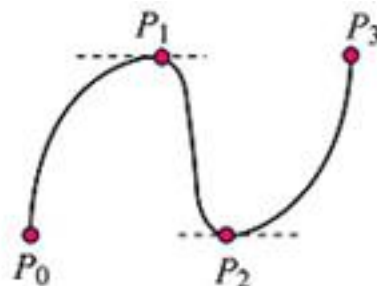


# 스플라인 곡선의 연속성

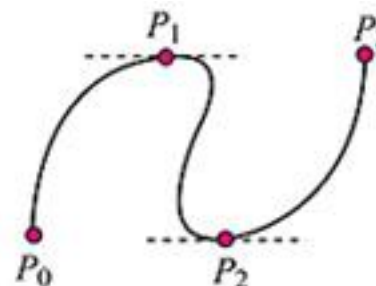
- 스플라인 곡선  $P(x, y, z)$ 의 매개변수 형태
  - $x = x(u), y = y(u), z = z(u) \quad 0 \leq u \leq 1$
  - $n$ 차 스플라인: 변수  $x, y, z$  가 매개변수  $u$ 의  $n$ 차식으로 표현되는 스플라인
- Continuity: 분할된 곡선을 연결하여 하나의 긴 곡선을 설계할 때 연결되는 지점에 다양한 연결 조건
  - $C^0$ 연속성: 두 곡선이 단순히 연결, 양쪽 곡선의 좌표 값이 동일
  - $C^1$ 연속성: 곡선의 기울기가 동일, 즉, 1차 도함수가 동일 (접선 벡터의 방향이 동일하다)
  - $C^2$ 연속성: 양쪽 곡선의 곡률이 동일, 즉, 1차 및 2차 도함수가 동일



(a) 곡선의  $C^0$  연속성



(b) 곡선의  $C^1$  연속성



(c) 곡선의  $C^2$  연속성

## 3차 스플라인 곡선

- 변수  $x, y, z$ 가 매개변수  $u$ 의 3차 식으로 표현
  - $n+1$ 개의 제어점이 주어지고 이들 제어점을 보간하는  $n$ 개의 곡선으로 구성
  - $C^1$  및  $C^2$  연속성을 만족
  - 다음의 다항식을 만족

$$x(u) = a_x u^3 + b_x u^2 + c_x u + d_x$$

$$y(u) = a_y u^3 + b_y u^2 + c_y u + d_y$$

$$z(u) = a_z u^3 + b_z u^2 + c_z u + d_z$$

$$\text{단, } 0 \leq u \leq 1$$

- 위의 식의 행렬

$$x(u) = [u^3 \ u^2 \ u \ 1] \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ b_x \\ c_x \\ d_x \end{bmatrix}$$

$$= U \cdot C$$

$$= U \cdot M_{\text{spline}} \cdot M_{\text{geom}}$$

( $U$ : 매개변수  $u$ 의 행렬,  $C$ : 계수 행렬)

( $M_{\text{geom}}$ : 경계조건 행렬,  $M_{\text{spline}}$ : 커브의 모양을 나타내는 행렬)

# 허마이트 스플라인 (Hermite Splines)

- 스플라인 조건:
  - 제어점과 기울기 값에 의해서 스플라인 커브를 결정
  - 두 끝점에 관계되기 때문에 부분적으로 바꿀 수 있다.
  - $P(u)$ : 제어점  $p_k$ 와  $p_{k+1}$  사이의 매개변수 3차원 함수

$$\begin{aligned} P(0) &= p_k & d \\ P(1) &= p_{k+1} & a+b+c+d \\ P'(0) &= Dp_k & c \\ P'(1) &= Dp_{k+1} & 3a+2b+c \end{aligned}$$

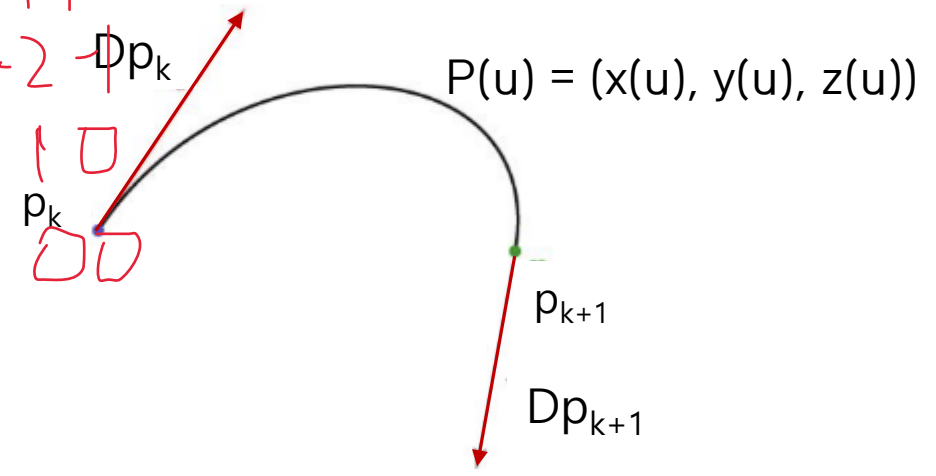
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

•  $P(u) = au^3 + bu^2 + cu + d$   $0 \leq u \leq 1$

행렬:  $P(u) = [u^3 \ u^2 \ u \ 1] \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$

•  $P'(u) = 3au^2 + 2bu + c$

행렬:  $P'(u) = [3u^2 \ 2u \ 1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$





# 허마이트 스플라인 (Hermite Splines)

- 위의 식에서  $u$ 에 0과 1을 넣어 다시 풀면,

$$\begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P'(0) \\ P'(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_k \\ p_{k+1} \\ Dp_k \\ Dp_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a+b+c+d \\ c \\ 3a+2b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ Dp_k \\ Dp_{k+1} \end{bmatrix}$$

-  $P(u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ Dp_k \\ Dp_{k+1} \end{bmatrix}$

# 카디널 스플라인 (Cardinal Splines)

- 스플라인 조건:

- 각 곡선 부분의 경계에서 지정된 끝점 접선으로 3차 곡선들을 보간한다
- 제어점의 기울기 값은 두 이웃 제어점 좌표로부터 계산된다.

- 4개의 연속되는 제어점으로 지정

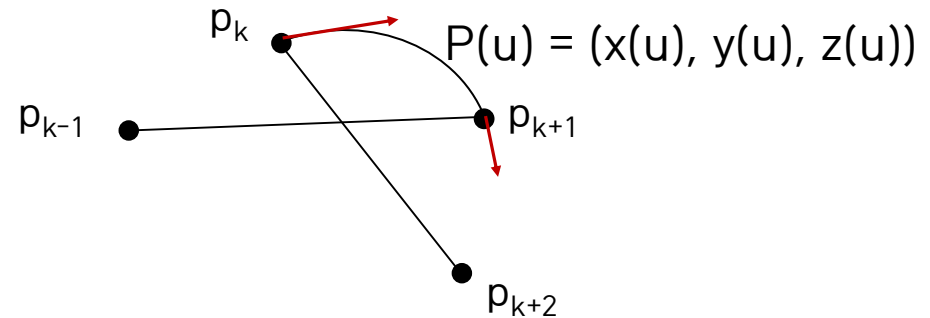
- 중간 두 제어점은 부분 끝점
- 다른 두 제어점은 끝점 기울기 계산에 사용

- $P(0) = p_k$

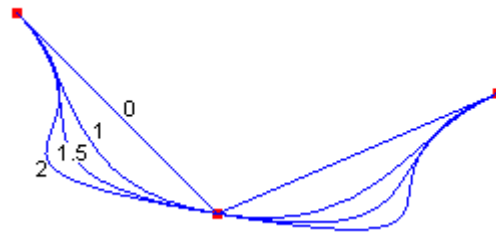
- $P(1) = p_{k+1}$

- $P'(0) = \frac{1}{2} * (1-t) * (p_{k+1} - p_{k-1})$

- $P'(1) = \frac{1}{2} * (1-t) * (p_{k+2} - p_k)$



- t (tension, 장력 매개변수): 스플라인이 입력 제어점에 얼마나 느슨하게 또는 단단하게 맞춰지는 지 제어
  - » t = 0: 직선
  - » t = 1: 굽힘이 가장 적은 경로
  - » t > 1: 굽힘이 더 긴 경로



# 카디널 스플라인 (Cardinal Splines)

- 위의 식을 행렬로 풀면  $s=(1/2)*(1-t)$

$$\begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P'(0) \\ P'(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_k \\ p_{k+1} \\ s(p_{k-1} - p_{k+1}) \\ s(p_{k+2} - p_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ s(P_{k-1} - P_{k+1}) \\ s(P_{k+2} - P_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2P_k - 2P_{k+1} + s(P_{k-1} - P_{k+1}) + s(P_{k+2} - P_k) \\ -3P_k + 3P_{k+1} - 2s(P_{k-1} - P_{k+1}) - s(P_{k+2} - P_k) \\ s(P_{k-1} - P_{k+1}) \\ P_k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -s & 2-s & s-2 & s \\ 2s & s-3 & 3-2s & -s \\ -s & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{k-1} \\ P_k \\ P_{k+1} \\ P_{k+2} \end{pmatrix}$$

$$P(u) = U \cdot M_g \cdot M_s$$

# 캐트멀롬 스플라인 (Catmull-Rom Splines)

- 캐트멀롬 스플라인

- 카디널 스플라인의 특별한 경우

- 균일하게 점이 이동한다고 가정한 경우

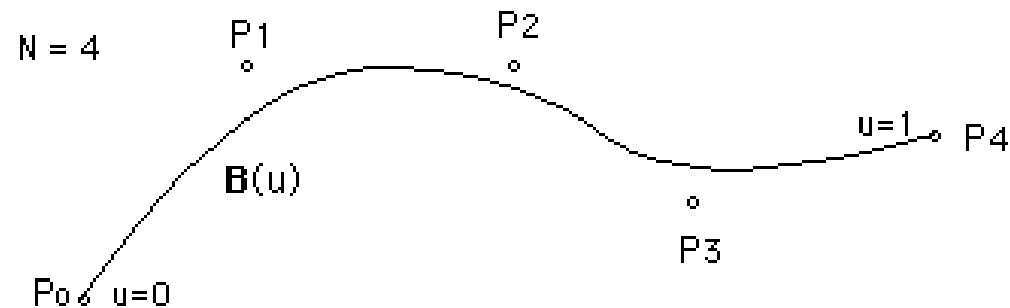
- $P'(0) = \frac{1}{2}^* (p_{k+1} - p_{k-1})$

- $P'(1) = \frac{1}{2}^* (p_{k+2} - p_k)$

로 설정하여 스플라인을 구성하는 점들을 찾아낸다.

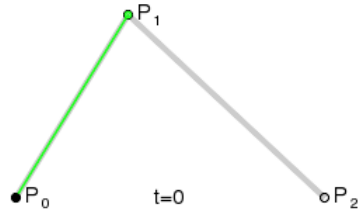
# 베지에 곡선 (Bezier Curves)

- 다항식으로 표현되는 근사곡선
  - CAD에서 많이 사용되는 커브
  - 주어진 제어점의 위치에 의해 곡선의 형태가 결정되는 근사곡선
  - 어떤 숫자의 제어점에도 베지에 커브는 적용될 수 있다.
  - 제어점의 수는 베지에 다항식의 차수를 결정
    - 2개의 제어점: 두 점 사이의 선분
    - 3개의 제어점: 2차원 곡선
    - 4개의 제어점: 3차원 곡선

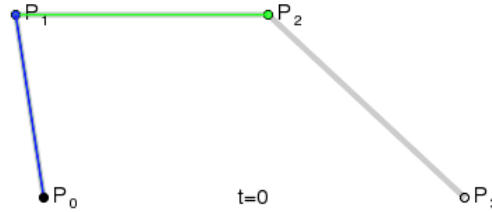


# 베지에 곡선 (Bezier Curves)

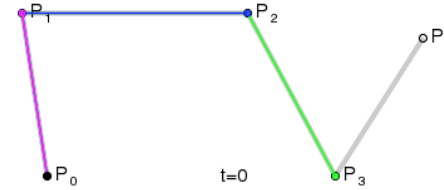
- 제어점 중 처음과 끝 점을 빼고는 보통 어느 조절점과도 만나지 않는다.



2차원 커브



3차원 커브



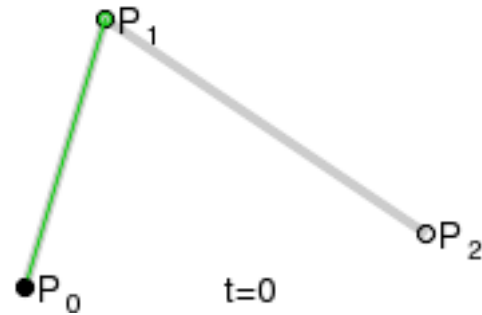
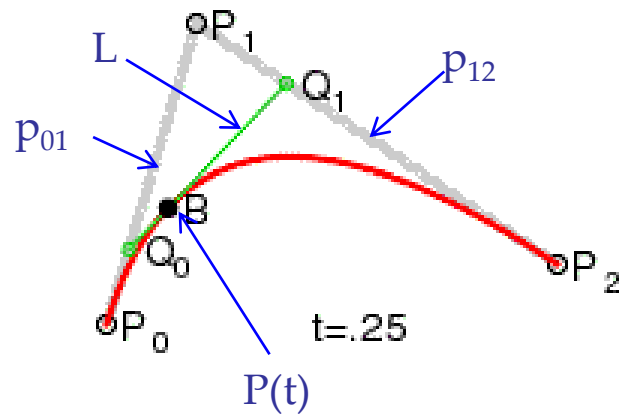
4차원 커브

- 곡선은, 항상 제어점으로 이루어진 다각형 안에 들어가고, 곡선이 조절점들 사이에서 크게 벗어나지 않는다.
- 배합함수(Blending Function)
  - 어느 한 점에서 각 제어점이 미치는 영향
  - 제어점의 차수보다 하나 작은 다항식

# 베지에 곡선 (Bezier Curves)

- 3개의 제어점을 가진 베지에 곡선

- $p_{01}(t) = (1 - t)p_0 + tp_1$
- $p_{12}(t) = (1 - t)p_1 + tp_2$
- $p(t) = (1 - t)p_{01}(t) + tp_{12}(t)$



# 베지에 곡선 (Bezier Curves)

- 4개의 제어점을 가진 베지에 곡선

- $p_{012}(t) = (1 - t)p_{01}(t) + tp_{12}(t)$

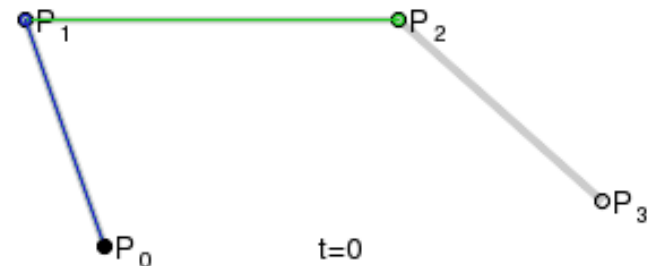
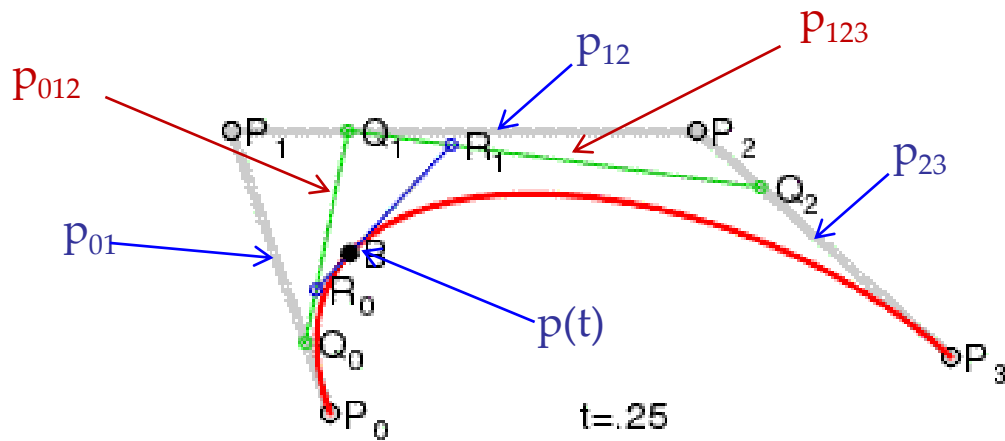
- $p_{123}(t) = (1 - t)p_{12}(t) + tp_{23}(t)$

- $p(t) = (1 - t)p_{012}(t) + tp_{123}(t)$

$$= (1 - t)\{(1 - t)p_{01}(t) + tp_{12}(t)\} + t\{(1 - t)p_{12}(t) + tp_{23}(t)\}$$

$$= (1 - t)[(1 - t)\{(1 - t)p_0 + tp_1\} + t\{(1 - t)p_1 + tp_2\}] + t[(1 - t)\{(1 - t)p_1 + tp_2\} + t\{(1 - t)p_2 + tp_3\}]$$

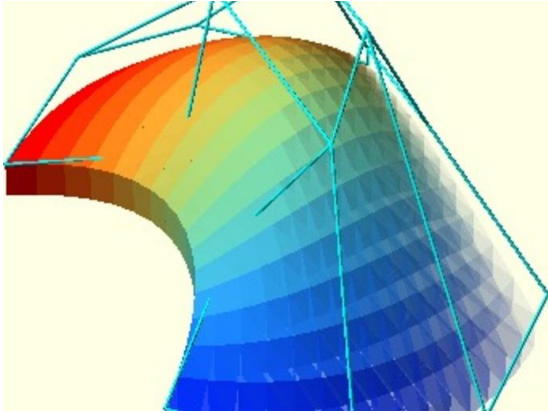
$$= p_0(1 - t)^3 + 3p_1t(1 - t)^2 + 3p_2t^2(1 - t) + p_3t^3$$



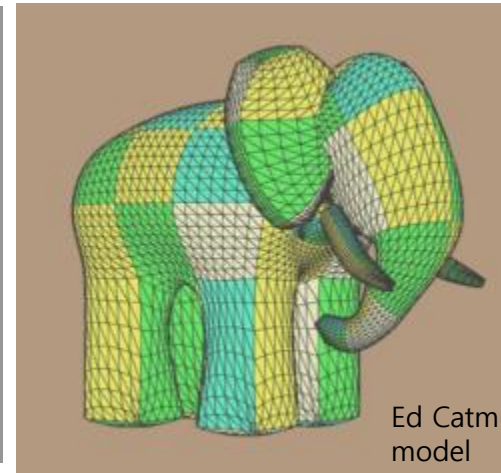
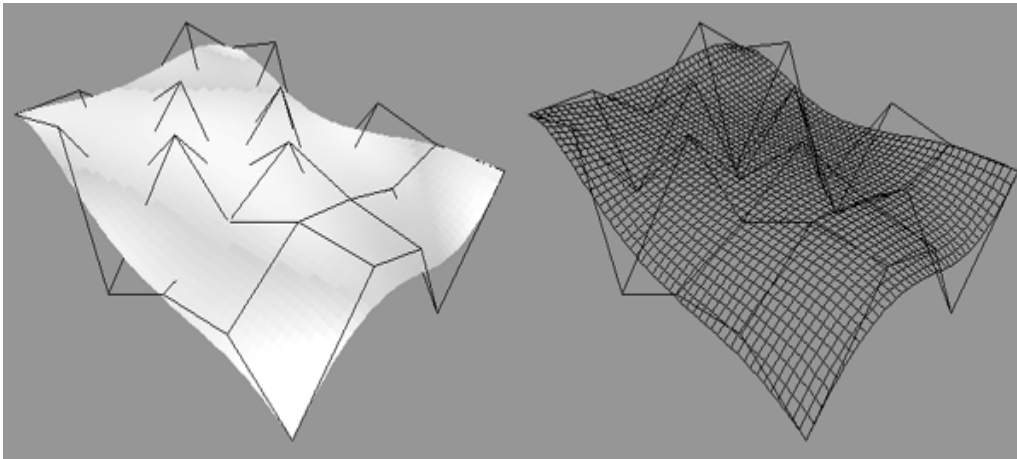
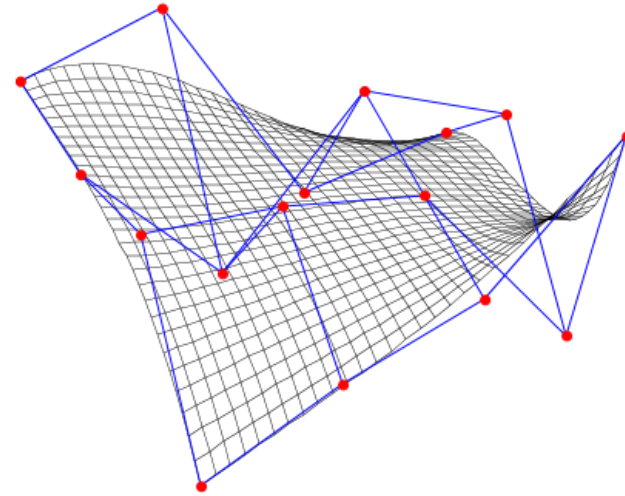


# 베지에 곡선 (Bezier Curves)

- 베지에 곡선/곡면으로 생성된 객체



Willian A Adams  
Bezier surfac



Ed Catmull's "Gumbo"  
model

## 이번 주에는

- 3차원 객체
  - 다각형 면
  - 스플라인
- 다음 시간에는
  - 은면제거