Analiza I

Adisa Bolić, abolic@pmf.unsa.ba

Vj. br. 20. L'Hopitalovo pravilo. Osnovne teoreme diferencijalnog računa.

Rolleov teorem:

Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na intervalu $[a,b]$ i diferencijabilna na intervalu (a,b) takva da je $f(a) = f(b)$. Tada postoji $c \in (a,b)$ takvo da je $f'(c) = 0$.

Geometrijsko značenje: postoji tangenta na krivu paralelna x-osi

[1] U kojoj je tački tangenta krive $y = 4 - x^2$ paralelna tetivi $AB, A(-2,0), B(1,3)$.

[2] Da li funkcija $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ ispunjava uslove Rolleovog teorema na intervalu $[-1,1]$?

[3] Data je realna funkcija $f(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-100)$. Dokazati da jednačina $f'(x) = 0$ ima bar 99 različitih rješenja i odrediti intervale u kojima se ta rješenja nalaze.

Lagrangeov teorem: (poopćenje Rolleovog teorema)

Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na intervalu $[a,b]$ i diferencijabilna na intervalu (a,b). Tada postoji $c \in (a,b)$ takvo da je $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Geometrijsko značenje: postoji tangenta na krivu paralelna pravoj koja prolazi kroz tačke $(a, f(a)), (b, f(b))$.

[4] Dokazati da za $\forall a > 0$ vrijedi $\frac{1}{a+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right) < \frac{1}{a}$.

Cauchyev teorem: (poopćenje Lagrangeovog teorema)

Neka su $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije na intervalu $[a,b]$ i diferencijabilne na intervalu (a,b) takve da je $g'(x) \neq 0$ i $f'(x) \neq 0$ za sve $x \in (a,b)$ i vrijedi $g(a) \neq g(b)$. Tada postoji $c \in (a,b)$ takvo da je $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

[5] Dokazati nejednakost $\frac{xy+1}{y} < \frac{\ln\frac{x}{y}}{\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y} < \frac{xy+1}{x}$ za sve $0 < x < y$.

L'Hopitalovo pravilo: Ako su f i g diferencijabilne funkcije na intervalu $(a,b)(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ (osim eventualno u tački $c \in (a,b)$) i ako je $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0, \pm\infty$ i $g'(x) \neq 0$ za sve $x \in (a,b), x \neq c$ i ako postoji $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ onda je:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ukratko: kod situacija $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ vrijedi da je (osim u iznimnim situacijama):

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Situacije $0 \cdot \infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$ se jednostavno svode na $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.

[6] Izračunati limese upotrebom L'Hopitalovog pravila:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$
b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$
c) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$
d) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^3+3x^2-4}$
e) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$
f) $\lim_{x\to 0} x \ln x$
g) $\lim_{x\to 0} x^x$

[7] Može li se primijeniti L'Hopitalovo pravilo na limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}?$$

Koliko iznosi taj limes?

Zadaci za samostalan rad

[1] Korištenjem Lagrangeovog teorema dokazati da vrijedi $\frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a \leq \frac{b-a}{b}$ za $0 < a \leq b < \frac{\pi}{2}$.

[2] Jesi li ispunjeni uslovi Cauchyevog teorema za funkcije $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$ na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$? Ako jesu, primijeniti teorem i odrediti vrijednost broja c.

[3] Izračunati limese:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 2^x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} (\frac{1}{\operatorname{th} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x})$

[4] Preraditi sljedeće lekcije iz zbirke Miličić-Uščumlić (iz poglavlja vezanog za diferencijalni račun): 1 (izvodi), 2 (diferencijal i njegova primjena), 3 (viši izvodi i diferencijali), 5 (teoreme o argumentu funkcije), 6 (L'Hopitalovo pravilo)