Analiza I

Adisa Bolić, abolic@pmf.unsa.ba

Vj. br. 4. Polje realnih brojeva. Ograničenost skupova. Infimum i supremum

- Načini zadavanja realnih brojeva: aksiomatski i konstruktivno
  Aksiomatsko zadavanje: cilj je da $\mathbb{R}$ bude polje (polje $(\mathbb{R},+,\cdot)$), totalno uređeno (polje $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$), da operacije budu kompatibilne s uređajem

- Iz aksioma se npr. dokaže:

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$$

$$x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0$$

$$0 < 1$$

- Podskupovi i intervali u $\mathbb{R}$
- Skupovi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$

- Najmanji i najveći element skupa
- Minimalni i maksimalni element skupa

- Donja i gornja granica skupa

  Definicija: Skup $S \subset \mathbb{R}$ je ograničen odozgo (odozdo) ako postoji $M \in \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{R}$) takav da $(\forall x \in S)\ x \leq M\ (m \leq x)$. Kažemo da je M (m) gornja (donja) granica skupa S.

- Ograničen skup

  Definicija: Skup $S \subset \mathbb{R}$ je ograničen ako ima i gornju i donju granicu. Skup S je ograničen odozgo ako ima gornju granicu. Skup S je ograničen odozdo ako ima donju granicu.

- Infimum i supremum skupa

  Definicija: Supremum skupa $S \subset \mathbb{R}$ je njegova najmanja gornja granica, dok je infimum skupa S njegova najveća donja granica. Označavaju se redom sa $\sup S$ i $\inf S$.

Ako supremum (infimum) skupa $S \in \mathbb{R}$ pripada skupu S onda je to ujedno maksimum (minimum) tog skupa.

- Primjer: $I = (0, 1]$

[1] Ispitati da li skupovi A i B imaju infimum, supremum, minimimum i maksimum u $\mathbb{R}$, ako je $A = \{x \in \mathbb{R}: |x - 4| \leq 5\}$ i $B = \{x \in \mathbb{R}: 5|x| - |x^2| - 6 > 0\}$.

[2] Odrediti infimum, supremum, minimum i maksimum (ako postoje) sljedećih podskupova od $\mathbb{R}$:

a) $S_1 = \{x \in \mathbb{N}: 1 \leq 3^x < 25\}$
b) $S_2 = \{x \in \mathbb{Q}: 1 \leq 3^x < 25\}$
c) $S_3 = \{x^2 \in \mathbb{R}: -2 < x < 2\}$
d) $S_4 = \left\{\frac{1}{x^2+1} \mid x \in \mathbb{R}\right\}$
e) $S_6 = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

[3] Odrediti infimum, supremum, minimum i maksimum (ako postoje) skupa

$$X = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Zadaci za samostalan rad

[1] Dokazati da je skup $X = \left\{x \in \mathbb{R}: x = \frac{\sqrt{t(t-1)}}{2t+1}, t > 0\right\}$ ograničen.

[2] Neka je $S = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}, m < n\right\}$. Dokazati da S nema ni najmanjeg ni najvećeg elementa. Naći $\inf S$ i $\sup S$.

[3] Odrediti infimum, supremum, minimum i maksimum (ako postoje) sljedećih podskupova od $\mathbb{R}$:

a) $S_1 = \left\{\frac{n^2+2}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$
b) $S_2 = \left\{\frac{x^2-4}{x^2+4} \mid x \in \mathbb{R}\right\}$
c) $S_3 = \left\{\frac{2x^2+2x-1}{x^2+x} \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}\right\}$