

Vj. br. 19. Izvod parametarski i implicitno zadanih funkcija. Izvodi višeg reda.

Izvod parametarski zadane funkcije

Ako je $x = f(t)$, $y = g(t)$ onda je

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

[1] Odrediti $y'_x = \frac{dy}{dx}$ za funkciju zadanu parametarski

$$x = 2 \cos t, \quad y = t - \sin t$$

Izvod implicitno zadane funkcije

Ako je funkcija $y = y(x)$ zadana implicitnom jednačinom $F(x, y) = 0$, izvod y' nalazimo rješavanjem jednačine

$$\frac{dy}{dx} [F(x, y)] = 0$$

po y' .

[2] Odrediti $y'_x = \frac{dy}{dx}$ implicitno zadanih funkcija:

- a) $xy - \operatorname{tg} y = 0$
- b) $x^y = y^x$

Izvodi višeg reda

- Eksplicitno zadane funkcije: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$, $n = 2, 3, \dots$
- Parametarski zadane funkcije: ako je $x = f(t)$, $y = g(t)$ onda je $y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$. Slično se dobija $y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}$. Analogno se računaju izvodi viših redova.
- Implicitno zadane funkcije: slično kao za obični izvod y'

[1] Pokazati da funkcija

$$f(x) = \frac{e^{5x} + 2}{e^x}$$

zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$y''' - 13y' - 12y = 0$$

Leibnizova formula (analog Newtonove binomne formule za izvode)

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

[2] Odrediti n -ti izvod funkcija, pri čemu je n prirodan broj:

- a) $y = x^n$
- b) $y = \cos x$
- c) $y = x^2 e^{-x}$

[3] Odrediti $y'_x, y''_{xx}, y'''_{xxx}$ za funkciju definisanu sa $x = \ln(1 + t^2), y = t - \arctg t$.

[4] Odrediti y' i y'' funkcije $y = y(x)$ zadate sa $x^2 + y^2 = 1$.

Zadaci za samostalan rad

[1] Dokazati Leibnizovu formulu.

[2] Odrediti n -ti izvod funkcija, pri čemu je n prirodan broj:

- d) $y = e^{3x}$
- e) $y = \sin x$
- f) $y = x^3 e^{5x}$

[3] Odrediti y''''_{xxxx} za funkciju definisanu sa $x = \sin^3 t^2, y = e^t t^2$.

[4] Odrediti y''' funkcije $y = y(x)$ zadate sa $x^2 + y^2 = 1$.