Analiza I

TIPS 'N TRICKS

1. Parcijala

Uvod u limese

Neodređeni oblici:

$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 1^{\infty}, \infty^0, 0^0, \infty - \infty, \infty \cdot 0$

$\frac{\text{nešto}}{\infty} = 0$, osim ako je $\frac{\infty}{\infty}$

$\frac{\text{nešto}}{0^{\pm}} = \pm\infty$, osim ako je $\frac{0}{0}$

Tablični limesi

$$\lim_{n \to \infty} a^n = \begin{cases} 0, & -1 < a < 1 \\ +\infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ \text{N.P.} (\pm 1), & a = -1 \\ \text{N.P.} (\pm\infty), & a < -1 \end{cases}$$

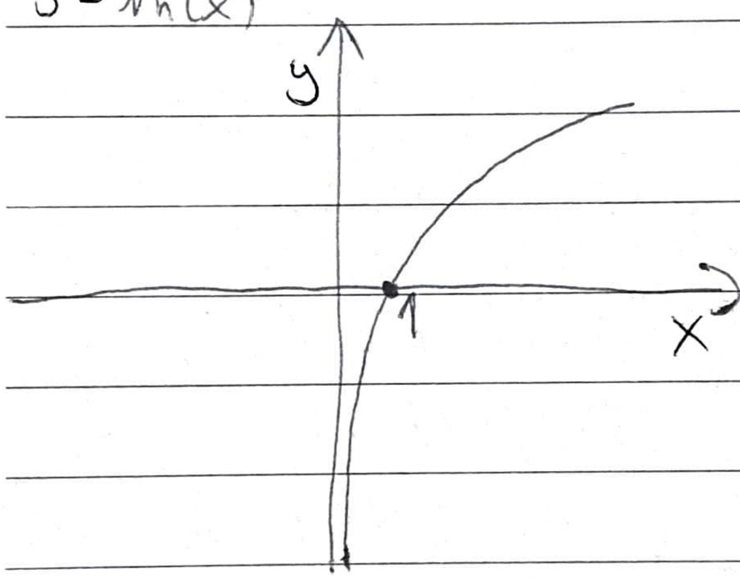
Čim se pojavi neka suma (ili proizvod) treba prebrojati broj članova u toj sumi (ili proizvodu).

Treba razlikovati situacije kada je broj članova fiksan i kada broj članova zavisi od n.

Ako je fiksan, onda je algebra srednje škole dozvoljena.
Ako nije, onda se koristi neki teorem.

Kada vidimo neki izraz koji ima korjen ili je komplikovan, a hoćemo da ga štimamo na „1^{∞}" odnosno $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, hoćemo da pojednostavimo izraz, da sklonimo korjen skroz. Odnosno, kada imamo polinome, možemo štimati sa $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ oblikom.

$y = \ln(x)$



D.P. $x > 0$

$\ln(0) = -\infty$

$\ln(1) = 0$

$\ln(e^x) = x$

$\ln(0) \neq$ nedefinisano

$\ln(+\infty) = +\infty$

Osobine logaritama:

1° $n \cdot \ln(x) = \ln(x^n)$, $x > 0$

2° $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$, $a, b > 0$

3° $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$, $a, b > 0$

ln i limes mogu zamjeniti mjesta jer je ln neprekidna funkcija.

$$\cosh = \frac{e^{n}+e^{-n}}{2}$$

$$\sinh = \frac{e^{n}-e^{-n}}{2}$$

$$\mathrm{tgh} = \frac{\frac{e^{n}-e^{-n}}{\cancel{2}}}{\frac{e^{n}+e^{-n}}{\cancel{2}}} = \frac{e^{n}-e^{-n}}{e^{n}+e^{-n}}$$

$$\mathrm{ctgh} = \frac{\frac{e^{n}+e^{-n}}{\cancel{2}}}{\frac{e^{n}-e^{-n}}{\cancel{2}}} = \frac{e^{n}+e^{-n}}{e^{n}-e^{-n}}$$

Štolcov teorem

Neka je $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$. Ukoliko vrijedi:

1) $y_{n+1} > y_n$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$

Tada je $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ akko $\lim \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ postoji kao konačan ili beskonačan.

(Ne može da divergira u širem smislu)

Tablični limes:

$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0$

Hijerarhija beskonačnosti

n^n – 1. najbrža

$n!$ – 2. najbrža

a^n – 3. najbrža, $a > 0 \to$ eksponencijalna f-ija

n^α – 4. najbrža, $\alpha > 0$

$\ln(n)$ – 5. (najsporija)

Svaki limes oblika „∞^0" se može uraditi ln-iranjem pa štolcom. Ako je varijabilan broj članova ide ln, pa treba štolcom. Ako bude fiksan broj članova, može bez ln-a.

$\lim_{n \to \infty} \sin(n)$ – ne postoji

Limes ne postoji, ali je ograničen između -1 i 1.

Kvadrat pod nekim korijenom može se izvući van korijena. Npr. $\frac{\sqrt[5]{a^n}}{\sqrt[3]{e^{2n}}} = \left(\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{e^2}}\right)^n$

Limes niza geometrijske sume:

$$q^1 + q^2 + \dots + q^n = q \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$q^1 + q^2 + \dots + q^{20n-1} = q \cdot \frac{1-q^{20-1}}{1-q}$$

1

$$q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^n = \left(q \cdot \frac{1-q^n}{1-q}\right) + 1$$

$-1 < q < 1$ - Konvergira

$q > 1$ - divergira u užem smislu

Podnizovi, tačke gomilanja niza (limes podnizova)

Najveća (Najmanja) tačka gomilanja niza a_n naziva se gornji (donji) limes ili limes superior (inferior) i označava se: $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$ ($\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$)

Limes niza a_n postoji ako vrijedi da
$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$

1° podjela:
$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n =$ konačan broj | niz a_n konvergira

2° podjela
$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (ili $-\infty$) | niz a_n divergira u užem smislu

3° podjela
$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \neq \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$ | niz a_n divergira u širem smislu

Indikator da treba tražiti podnizove je činjenica da neki član u nizu pod limesom može davati različite rezultate u ovisnosti o n-u.

Tablični limes:

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\ln(n)\right]=\gamma$$ – eulerova const.

bitno je da su ova dva ista

Suma u ovom limesu mora da zavisi od n.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\underbrace{\frac{1}{2023n}}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\underbrace{\frac{1}{n+2022n}}\right]$$

Razna se po prvom članu

Formula za traženje broja članova neke sume:

$$N=\frac{\text{najveći index}-\text{najmanji index}}{\text{diferencija indexa}}+1$$

Index je ono po čemu razlikujemo sabirak od sabirka.

$$N=\frac{2022n-1}{1}+1=2022n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2023n}-\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2023n}-\ln(2023n)}_{\gamma-\varepsilon_{1n}}+\ln(2023n)-\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln(n)\right.}_{\gamma-\varepsilon_{2n}}+\ln(n)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\cancel{\gamma} - \varepsilon_{1n} + \ln(2023n) - \cancel{\gamma} + \varepsilon_{2n} - \ln(n)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\ln\left(\frac{2023\cancel{n}}{\cancel{n}}\right) - \overset{\to 0}{\cancel{\varepsilon_{1n}}} + \overset{\to 0}{\cancel{\varepsilon_{2n}}}\right] =$$

$$= \ln(2023)$$

Monotonost fazoni

Ako je niz zadan kao suma, treba pokušati

$N \cdot$ najmanji sabirak $\leq a_n \leq N \cdot$ najveći sabirak

Ako se desi ukliještenje onda niz a_n konvergira.

Parcijalni razlomci

$R(x)$ - racionalna funkcija

$R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, $P_m(x)$, $Q_n(x)$ su polinomi

Racionalna funkcija može biti prava ili neprava.

Prava će se desiti ako $n > m$.

Neprava će se desiti ako $m \geq n$.

U nizovima će trebati samo prava racionalna

Prava racionalna f-ija se u većini slučajeva može rastaviti na parcijalne razlomke.

Primjeri:

$$1^\circ \quad \frac{x+1}{x^3 - x^2} = \frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \underbrace{\frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}} \to \text{ova dvojica daju } x^2$$

$$2^\circ \quad \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$3^\circ \quad \frac{3x+4}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1}$$

$$4^\circ \quad \frac{x-1}{(x+4)^3(x^2+9)^2} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{(x+4)^2} + \frac{C}{(x+4)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+9} + \frac{Fx+G}{(x^2+9)^2}$$

$$5^\circ \quad \frac{-x^2+11}{x(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

6° $\frac{3x+1}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} \quad / (x+1)(x+3)$

$3x+1 \equiv A(x+3) + B(x+1)$

$3x+1 \equiv Ax + 3A + Bx + B$

$3x+1 \equiv x(A+B) + 3A + B$

$A+B=3 \Rightarrow B = 3-A$

$3A+B=1$

$\boxed{\begin{aligned} A &= -1 \\ B &= 4 \end{aligned}}$

$\frac{3x+1}{(x+1)(x+3)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{4}{x+3}$

Hint: Tražimo uvijek prvo monotonost kod suma ili proizvoda, da bi mogli odrediti tražimo li (~~[illegible]~~) gornju ili donju granicu.

Rekurzivni nizovi

I Raspisati par članova pa na osnovu njih pretpostaviti monotonost

II Iz pretpostavke o monotonosti dobiti ograničenost

III Dokazati indukcijom da je pretpostavka tačna

IV Naći limes koristeći činjenice:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n_3} = \ldots = A$$

Napomena:

Ako niz opada, indukcijom dokazujemo da su svi članovi niza veći od donje granice.

Ako niz raste, dokazujemo da su svi članovi niza manji od gornje granice.

TABLIČNO: $\ln(1+x) < x, x>1$

Zaokruženo 7 puta ⇑⇑⇑⇑⇑

Redovi

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \} \text{Opći član reda} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Ako je S konačan broj, red konvergira.
Ako je $+\infty$ ili $-\infty$, red divergira u užem smislu.
Ako S ne postoji divergira u širem smislu.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \quad K$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \infty \quad D_u$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad D_š$$

(Suma zadnjeg ne postoji jer ne znamo jel 1 ili -1 zadnji)

Vrste redova

1 Pozitivni ili nenegativni redovi $a_n > 0$ poz. $a_n \geq 0$ nneg.

Oblik je: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Kriterij za pozitivne:

1) Dalamberov kriterij
2) Košijev korjeni kriterij
3) Rabeov kriterij
4) Košijev kondenzacioni kriterij
5) Poredbeni 1
6) Poredbeni 2 → Ovaj je najčešći
7) Poredbeni 3

② Alternirajući redovi

Oblik je: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$, $a_n \geq 0$

$= -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \ldots$

Kriterij za alternirajuće:

1) Kriterij obične konvergencije (Leibnitzov test)
2) Apsolutna konvergencija
3) Konstatuje se uslovna

③ Redovi sa članovima proizvoljnog znaka

Ovakvi redovi imaju npr. 3 pozitivna pa 5 negativnih pa 7 pozitivnih sabiraka itd.

Kriterij za redove sa č, p, z, i:

1) Obična konvergencija (Abel i Dirichlet)

2) Apsolutna konvergencija

3) Konstatuje se uslovna

Za svaku vrstu redova koristiti isključivo kriterije namjenjene za tu vrstu.

Kriterij za pozitivne redove

1) Dalamberov

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} <1, & K \\ >1, & D \\ =1, & \text{nema odg. - pokušati drugi} \end{cases}$$

Dalambera koristimo kada vidimo neki proizvod, faktorijele i slično.

2) Košijev korijeni

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} <1, & K \\ >1, & D \\ =1, & \text{nema odg. - pokušati drugi} \end{cases}$$

Košijev korijeni je najbolje koristiti kada se ima $(\text{Nešto})^n$. Ako ima faktorijele, ne koristiti ovaj kriterij.

3) Rabeov kriterij

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \begin{cases} <1, & D \\ >1, & K \\ =1, & \text{nema odg. - pokušati drugi} \end{cases}$$

Rabeov kriterij koristiš kada Dalamberov kriterij da rezultat 1.

Test divergencije:

Ako je limes općeg člana različit od nule odnosno ako $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, onda red 100% divergira.
Ako se dobije da $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ima smisla ispitivati konvergenciju (može se dobiti da konvergira ili divergira)

Test divergencije radimo ako vidimo da opći član možda ne teži nuli.

Ako u zadatku sa $n!$ ne pomažu kriterij, zgodno je upotrijebiti: Stirlingovu formulu:

$$n! \sim \sqrt{2n\pi} \cdot n^n \cdot e^{-n}, \quad n \to \infty$$

4) Košijev kondenzationi

Neka je dat pozitivni red i neka vrijede dva uslova za $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

1° $a_{n+1} < a_n$ ($M \downarrow$)

2° $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Tada je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$

Ovaj kriterij je koristan za $\ln(n)$ pod redom.

$(\ln(2^n) \to n\ln(2))$

Oprez: Kada želimo da se rješimo neke funkcije ~~xxxxxxxxxx~~ u nejednakosti, moramo da pazimo da li je funkcija rastuća ili padajuća. Ako je funkcija rastuća, znak se ne mijenja. A ako je padajuća, znak se mijenja.

Ako vidimo nešto kao $\ln(n!)$, ne pomaže Košijev kondenzacioni, većinom ide Stirling.

5) Poredbeni 2

Neka su data dva pozitivna reda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$\downarrow$ zadani red $\qquad$ $\downarrow$ „izmišljeni" red

Red b_n se „izmišlja" tako što u redu a_n zanemarimo članove koji su „nebitni".

Npr. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n+n^2+n^3}{n^2+n^5} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, (K)

Zanemarili smo $1, n$ i n^2 jer su dosta manji od n^3 u brojniku. Analogno za nazivnik.

Dakle, ako vrijedi za $K = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$, $0 < K < \infty$. Tada je:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Asimptotske relacije koje možemo koristiti pri rješavanju pozitivnih redova:

$\sin x \sim x, \ x \to 0$

$\arcsin x \sim x, \ x \to 0$

$\operatorname{tg} x \sim x, \ x \to 0$

$\operatorname{arctg} x \sim x, \ x \to 0$

$\ln(1+x) \sim x, \ x \to 0$

Alternirajući redovi

Oblik: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$, gdje je $a_n \geq 0$.

Kriteriji konvergencije:

1) Apsolutna konvergencija

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \cdot a_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ gdje je } a_n \geq 0$$

Bilo koji kriterij iz pozitivnih redova se može iskoristiti.

1° Ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (K), tada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ (K) apsolutno i obično

2° Ako taj isti red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (D), tada taj alternirajući red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ apsolutno ne konvergira.

2) Obična konvergencija (Leibnitzov test)

Ako vrijede dva uslova:

1° $a_{n+1} < a_n$ (M↘)

2° $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Ako su ova dva uslova zadovoljena, tada red Ⓚ obično po Leibnitzu.

3) Uslovna konvergencija

Za red koji konvergira obično, ali apsolutno ne konvergira, kažemo da konvergira uslovno.

Hint: Ako nas zadatak pita za sve vrste konvergencije (apsolutna, obična i uslovna) onda treba krenuti od apsolutne.

Radi lakšeg računa u zadacima, dozvoljeno je pomjeranje brojača.

Ako nam se bude tražila suma u zadatku, ili je geometrijska ili su parcijalni razlomci.

1° $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

2° $S = \lim_{n\to\infty} S_n$

Bitne formule:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}, \quad -1 < q < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad -1 < q < 1$$

Redovi sa članovima proizvoljnog znaka

1) **Abelov kriterij** (Obične konvergencije)

Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ (K) ako su ispunjeni uslovi:

1° Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (K)

2° niz b_n je monoton i ograničen.

Ako nisu ispunjeni uslovi Abela, ne znamo ništa o konvergenciji.

Abela možemo koristiti za bilo koje redove, ali većinom to budu alternirajući.

2) Dirichletov kriterij

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ (K) po Dirichletu, ako vrijedi:

1° niz b_n monotono teži nuli

2° niz S_n n-tih parcijalnih suma reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je ograničen $(|S_n| \leq M, M \in \mathbb{R}^+)$

Tipovi zadataka za Dirichleta:

1° TIP $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n}_{a_n} \cdot \underbrace{b_n}_{M\searrow \text{ u nulu}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = -1+1-1+1+\dots \qquad |S_n| \leq 1$$

$$\underline{2^\circ \text{TIP}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}_{a_n} \cdot \underbrace{b_n}_{M\downarrow \text{ u nulu}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} = -1-1+1+1+\ldots \quad |S_n| \leq 2$$

$$\underline{3^\circ \text{TIP}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sin(n \cdot t)}_{a_n} \cdot \underbrace{b_n}_{M\downarrow \text{ u nulu}}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n \cdot t)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(k \cdot t) = \frac{\sin(n \cdot \frac{t}{2}) \cdot \sin((n+1) \frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}$$

$$|S_n| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{t}{2})|}$$

* Ova suma se dokaže koristeći PMI *

4° TIP $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\cos(n\cdot t)}_{a_n} \cdot \underbrace{b_n}_{M\downarrow \text{ u nulu}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\cdot t)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \cos(k\cdot t) = \frac{\sin\left(n\frac{t}{2}\right)\cos\left((n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$|S_n| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|}$$

Bitno: Brojač za sume redova u 3° i 4° tipu moraju uvijek da kreću od 1.

Zadnji kriterij za pozitivne redove

1) **Poredbeni 1**

Neka su data dva reda:

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{\text{zadani red}} \quad \text{i} \quad \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}_{\text{„izmišljeni" red}}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ se izmišlja tako što se iz a_n izbace nebitni članovi, ali da naredne nejednakosti imaju smisla.

1) Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, i vrijedi da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, tada i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

2) Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira i vrijedi da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \geq \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ onda i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira

Posmatrajmo neke činjenice:

$0 \leq x \leq 1$ onda $x \geq x^2$

$0 \leq |\sin x| \leq 1 \to$ Ova nejednakost se koristi za K

$|\sin x| \geq \sin^2 x \to$ Ova nejednakost se koristi za D

$0 \leq |\cos x| \leq 1 \to$ Ova nejednakost se koristi za K

$|\cos x| \geq \cos^2 x \to$ Ova nejednakost se koristi za D

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

→ Ovo zapamtiti!

Hint: Kada se traži suma, treba uraditi apsolutnu konvergenciju prvo, zato što ako red konvergira apsolutno, možemo mijenjati poredak članova reda, i suma se nikad neće promijeniti.