Analiza I

Adisa Bolić, abolic@pmf.unsa.ba

Vj. br. 7. Konvergencija nizova i granična vrijednost niza

- Preostali zadaci sa Vježbi br. 6. vezani za ograničenost nizova

Granična vrijednost (limes): opći koncept, pojam ε-okoline, konvergencija i divergencija

- Za niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kažemo da **konvergira** akko $\exists a \in \mathbb{R}$: $(\forall\epsilon > 0)(\exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N})$: $(\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N})$ $|a_n - a| < \epsilon$. U tom slučaju broj a nazivamo **graničnom vrijednosti** ili **limesom** niza a_n i pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ili $a_n \to a$ $(n \to \infty)$.

- Za $a \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$ interval $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ nazivamo **ϵ-okolinom** broja a.

- Ako niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nije konvergentan, kažemo da je **divergentan (ili da divergira)**.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ili $-\infty$ (određena divergencija)

- Za niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kažemo da teži u $+\infty$ i pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ako vrijedi $(\forall M > 0)(\exists n_0(M) \in \mathbb{N})$: $(\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N})$ $a_n > M$.

- Za niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kažemo da teži u $-\infty$ i pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ako vrijedi $(\forall M > 0)(\exists n_0(M) \in \mathbb{N})$: $(\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N})$ $a_n < -M$.

[1] Dokazati po definiciji da je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

[2] Dokazati po definiciji da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ za $x_n = \frac{n}{n+1}$.

[3] Dokazati po definiciji da je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+2}{7n+4} = \frac{2}{7}$. Naći $n_0(\varepsilon)$ ako je $\varepsilon = 0.00001$.

[4] Dokazati po definiciji da je $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{\sqrt{n}} = +\infty$.

[5] Dokazati da niz $(-1)^n, n \in \mathbb{N}$ divergira.

- Beskonačno velik niz: ako $|a_n| \to \infty$
- Beskonačno mal niz: ako : ako $a_n \to 0$

[6] Dokazati da niz x_n zadan sa $x_n = n^{(-1)^n}$ nije ograničen, a ipak nije beskonačno veliki kad $n \to \infty$.

Zadaci za samostalan rad

[1] Dokazati po definiciji da je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$.

[2] Dokazati po definiciji da je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{3n^2+2n+1} = \frac{2}{3}$.

[3] Dokazati po definiciji da je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n^2-1}{n} = -\infty$.

[4] Dokazati da niz $x_n = n \cdot (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ divergira.

[5] Dokzati po definiciji da je niz $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, n \in \mathbb{N}$ beskonačno mal.