Analiza I

Adisa Bolić, abolic@pmf.unsa.ba

## Vj. br. 12. Kriteriji konvergencije redova

- **D'Alamberov kriterij:** Ako je dat red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ takav da postoji $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = L$, onda vrijedi:
  - 1° ako je $L < 1$ onda je red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergentan
  - 2° ako je $L > 1$ (uključuje i slučaj $L = +\infty$) onda je red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$divergentan
  - 3° ako je $L = 1$ onda je pitanje konvergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i dalje otvoreno

- **Caucyhev kriterij:** Ako je dat red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ takav da postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$, onda vrijedi:
  - 1° ako je $L < 1$ onda je red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergentan
  - 2° ako je $L > 1$ (uključuje i slučaj $L = +\infty$) onda je red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$divergentan
  - 3° ako je $L = 1$ onda je pitanje konvergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i dalje otvoreno

- **Raabeov kriterij:** Ako je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ red sa pozitivnim članovima takav da postoji $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = L$, onda vrijedi:
  - 1° ako je $L > 1$ (uključuje i slučaj $L = +\infty$) onda je red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergentan
  - 2° ako je $L < 1$ onda je red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergentan
  - 3° ako je $L = 1$ onda je pitanje konvergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i dalje otvoreno

[1] Ispitati konvergenciju sljedećih redova:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

c) $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{n(n+1)}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

[2] Ispitati konvergenciju sljedećih redova:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$

- **Gaussov kriterij:** Ako je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ red sa pozitivnim članovima takav da $\exists \lambda, \gamma, \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$ i ograničen niz $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tako da vrijedi
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\gamma}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\epsilon}}$$
onda vrijedi:

  1° ako je $\lambda > 1$ onda je red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergentan
  2° ako je $\lambda < 1$ onda je red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergentan
  3° ako je $\lambda = 1$ i $\gamma > 1$ onda je red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergentan
  4° ako je $\lambda = 1$ i $\gamma \leq 1$ onda je red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergentan

[3] Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2$.

**Redovi sa elementima proizvoljnog znaka**

- **Apsolutna konvergencija:** Red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ se naziva apsolutno konvergentnim ako red $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergira.
- **Teorema:** Ako je red apsolutno konvergentan, onda je on i konvergentan. Obrat ne važi nužno.

**Leibnizov kriterij:** Ako je $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ realan niz koji počevši od nekad monotono teži $0$, onda red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergira.

**Abelov kriterij:** Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergira, ako konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a niz $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je monoton i ograničen.

**Dirichleov kriterij:** Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergira, ako niz $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ počevši od nekad monotono teži $0$, a niz parcijalnih suma reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je ograničen.

[4] Ispitati konvergenciju sljedećih redova:

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+2)\sqrt[3]{n+1}}$
e) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

**Zadaci za samostalan rad**

Zadaci iz zbirki!