Analiza I

Adisa Bolić, abolic@pmf.unsa.ba

Vj. br. 17. Uniformna neprekidnost funkcija. Diferencijalni račun – definicija izvoda funkcije i računanje izvoda

Definicija (uniformna neprekidnost funkcije): Za funkciju f kažemo da je uniformno neprekidna na skupu D ako je ona definisana na D i ako

$$(\forall \epsilon > 0)\, \exists \delta = \delta(\epsilon): (\forall x', x'' \in D)\, |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \epsilon$$

- Ako je funkcija uniformno neprekidna na nekom skupu, onda je ona i neprekidna u svakoj tački tog skupa, dok obrat ne mora da važi.

Cantorov teorem: Ako je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a,b]$, onda je ona tu i uniformno neprekidna.

Teorem (Heine): Funkcija f je uniformno neprekidna na skupu D akko za svaka dva niza $(x_{n'})$ i $(x_{n''})$ na D takva da razlika $|x_{n'} - x_{n''}| \to 0\ (n \to \infty)$, vrijedi da razlika $|f(x_{n'}) - f(x_{n''})| \to 0\ (n \to \infty)$.

[1] Ispitati uniformnu neprekidnost funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ na skupu $(0, 1)$.

[2] Ispitati uniformno neprekidnost funkcija :

a) $f(x) = \frac{3x}{10-x^2}\ (-2 \le x \le 3)$

b) $f(x) = \ln x\ \ (0 < x < 1)$

[3] Dokazati da je funkcija $f(x) = \sqrt{x}$ uniformno neprekidna na intervalu $[1, +\infty)$.

[4] Dokazati da funkcija $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ nije uniformno neprekidna na intervalu $\left(0, \frac{2}{\pi}\right)$.

Diferencijalni račun – definicija izvoda funkcije i računanje izvoda

- **Geometrijski problem:** kako naći nagib tangente na krivu u datoj tački
- **Definicija:** Neka je $f(x)$ realna funkcija koja je definisana u okolini tačke $x_0 \in \mathbb{R}$. Ako postoji i konačan je limes $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ onda kažemo da je f diferencijabilna u tački x_0 i izvod označavamo sa $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. Često ćemo umjesto Δx koristiti oznaku h.
- **Jednostrani izvodi:**
  - Lijevi izvod: $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{\Delta x\to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
  - Desni izvod: $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{\Delta x\to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

- Izvod $f'(x)$ postoji akko postoje lijevi i desni izvodi i jednaki su

Veza između neprekidnosti i diferencijabilnosti

- Ako je funkcija f diferencijabilna u tački x_0, onda je ona i neprekidna u tački x_0. Obrat ne mora da važi.

[1] Dokazati:

a) $c' = 0$

b) $x' = 1$

c) $(x^n)' = nx^{n-1}$

d) $(a^x)' = a^x \ln a \ \ (a > 0)$

e) $(e^x)' = e^x$

f) $(\sin x)' = \cos x$

[2] Ispitati u kojim tačkama je funkcija $f(x) = |x|$ neprekidna, a u kojim je diferencijabilna?

[3] Izračunati po definiciji $f'(2)$ ako je

a) $f(x) = x^2 - 3x + 4$

b) $f(x) = \ln x - x$

[4] Izračunati ako postoji izvod u tački $x = 0$ funkcija

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

[5] Neka je

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Da li postoji $f'(0)$?

Zadaci za samostalan rad

[1] Dokazati da je funkcija $f(x) = \sin x$ uniformno neprekidna na $\mathbb{R}$.

[2] Ispitati uniformnu neprekidnost funkcije $f(x) = x^2$ na $\mathbb{R}$.

[3] Dokazati:

a) $(\cos x)' = -\sin x$

b) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

c) $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$

d) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

[4] Odrediti izvod ako postoji sljedećih funkcija na $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^2 + 3x + 1$

b) $f(x) = x + \sin x$