

Vj. br. 15. Značajni limesi funkcija.

• **Neki značajni limesi:**

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, a > 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, a > 0$

[1] Dokazati da je $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

[2] Dokazati da je $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

[3] Dokazati da je $\frac{a^x - 1}{x} = \ln a, a > 0$.

[4] Izračunati sljedeće limese:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2};$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}};$
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2-1};$
- d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1};$
- e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x};$
- f) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x};$
- g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{x};$
- h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}, m, n \in \mathbb{N};$
- i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

j) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e};$

- Ako je $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0, \pm\infty$, pišemo $f(x) \sim k \cdot g(x)$ i pri graničnom procesu $\lim_{x \rightarrow a}$ možemo $f(x)$ zamijeniti sa $k \cdot g(x)$, a da limes ostane isti.

[5] Izračunati sljedeće limese:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{10x} - e^{5x}}{\sin 10x - \sin 5x};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x)}{5x};$

Zadaci za samostalan rad

[1] Izračunati sljedeće limese:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 6x};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3};$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^x;$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}};$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 4^x + 6^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}};$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4};$