Analiza I

Adisa Bolić, abolic@pmf.unsa.ba

Vj. br. 2. Princip matematičke indukcije

- Peanovi aksiomi i aksiom matematičke indukcije

Princip matematičke indukcije: Neka je $n_0 \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je dat niz iskaza $P(n_0), P(n_0 + 1), P(n_0 + 2), \dots$ Da bi dokazali da je svaki od ovih iskaza tačan možemo koristiti princip matematičke indukcije:

1° Baza indukcije: dokažemo da je $P(n_0)$ tačan iskaz

2° Pretpostavka indukcije: pretpostavimo da je iskaz $P(n)$ tačan za neki prirodan broj $n \geq n_0$.

3° Korak indukcije: dokažemo da iz tačnosti iskaza $P(n)$ slijedi tačnost iskaza $P(n+1)$ za svaki prirodan broj $n \geq n_0$

4° Zaključak: na osnovu PMI (principa matematičke indukcije) zaključujemo da je $P(n)$ tačan iskaz za sve prirodne brojeve $n \geq n_0$.

Po potrebi, možemo u koraku 2° pretpostaviti da su $P(n_0), \dots, P(n)$ tačni iskazi za neko $n \geq n_0$.

[1] Matematičkom indukcijom dokazati:

a) $1^2 + 2^2 + \cdots n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

[2] Matematičkom indukcijom dokazati:

a) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{k}$ za svako $k \in \mathbb{N}$

b) $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$ za $n \geq 3 \in \mathbb{N}$

[3] Dokazati Bernoullijevu nejednakost

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

za svako $n \in \mathbb{N}$, pri čemu su $x_1, x_2, \dots, x_n$ realni brojevi istog znaka veći od -1.

- Specijalni slučaj Bernoullijeve nejednakosti za $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$

[4] Matematičkom indukcijom dokazati da vrijedi

$$\sin(x) + \sin(2x) + \cdots \sin(nx) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

za sve $n \in \mathbb{N}$ i sve $x \in \mathbb{R}\backslash\{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

[5] Koristeći se formulom

$$arctg(\alpha) + arctg(\beta) = arctg\left(\frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta}\right)$$

i principom matematičke indukcije, naći sumu

$$S_n = arctg\left(\frac{1}{2}\right) + arctg\left(\frac{1}{8}\right) + \cdots + arctg\left(\frac{1}{2n^2}\right)$$

Za samostalan rad

[1] Matematičkom indukcijom dokazati:

a) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

[2] Matematičkom indukcijom dokazati da vrijedi

$$\cos(x) + \cos(2x) + \cdots \cos(nx) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

za sve $n \in \mathbb{N}$ i sve $x \in \mathbb{R}\backslash\{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.