Analiza I

Adisa Bolić, abolic@pmf.unsa.ba

Vj. br. 10. Monotoni nizovi. Rekurzivno zadani nizovi. Stolzov teorem.

Monotoni nizovi

- Za niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kažemo da je:
  a) strogo rastući ako je $a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N}$
  b) strogo opadajući ako je $a_{n+1} < a_n, \forall n \in \mathbb{N}$
  c) neopadajući ako je $a_{n+1} \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$
  d) nerastući ako je $a_{n+1} \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Ako niz zadovoljava neki od gore navedenih uslova, onda za njega kažemo da je monoton.

- Ako je niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **monoton i ograničen**, onda je on **kovergentan**.

[1] Dokazati da je niz $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$ konvergentan.

- Eulerova konstanta $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n))$
- $\epsilon_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n) - \gamma,\ \lim\limits_{n\to\infty}\epsilon_n = 0$

[2] Izračunati sljedeće limese:
  a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$
  b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \cdots + \frac{1}{3n+2}$

- Vrijedi $\forall x \in \mathbb{R}, (1 + \frac{1}{x}) > 0: \frac{1}{x+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$

[3] Dokazati da je niz $x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right), n \in \mathbb{N}$ konvergentan.

[4] Dokazati da niz $x_n = \frac{n!}{(2n-1)!!}, n \in \mathbb{N}$ konvergira i naći limes ovog niza.

[5] Niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zadan je sa $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + n + 1$ za $n \geq 1$. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{n^2}$.

- **Stolzov teorem:** Neka su $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ realni nizovi takvi da:
  - $y_{n+1} > y_n, \forall n \in \mathbb{N}$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$
  - postoji limes $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

Tada postoji i $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ i vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

[6] Neka je p proizvoljan prirodan broj. Izračunati

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$$

Zadaci za samostalan rad

[1] Dokazati da je niz $x_n = \left(1 + \frac{1}{1^2+1}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2+1}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right), n \in \mathbb{N}$ konvergentan.

[2] Dokazati da niz $x_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}, n \in \mathbb{N}$ konvergira i naći limes ovog niza.

[3] Dokazati da je niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zadan za $a_1 = 0, a_{n+1} = \sqrt{12 + a_n}$ za $n \geq 1$ konvergentan i odrediti mu limes.

[4] Dokazati da je niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zadan za $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right)$ za $n \geq 1$ konvergentan i odrediti mu limes.

[5] Uraditi zadatke od 1613-1619 iz Ušćumlić-Miličićeve zbirke zadataka za utvrđivanje Stolzovog teorema i njegovih posljedica.

[6] Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\cdot(n+1)}{n^3}$.