

Vj. br. 13. Realne funkcije jedne realne promjenjive.

- Funkcija, domen (definiciono područje), kodomen
- Slika (rang) funkcije
- Realna funkcija jedne realne promjenjive: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- Zadavanje funkcija: analitički (eksplicitno), implicitno, parametarski
- Grafik funkcije
- Operacije sa funkcijama, kompozicija funkcija
- Parnost, neparnost
- Periodičnost, osnovni period
- Trigonometrijske funkcije
- Monotonost, ograničenost, inverz

[1] Neka je

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), & -2\pi < x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < 2 \\ 2x - 2, & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Naći $f(-\pi)$, $f(0)$, $f(2)$ i skicirati grafik funkcije f .

[2] Odrediti definiciono područje funkcija:

- a) $f(x) = (x^2 - 2)\sqrt{\frac{x^2+2}{x^3-3}}$
- b) $f(x) = \sqrt{\cos(\sqrt{x})}$
- c) $f(x) = \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$
- d) $f(x) = \arcsin \frac{3x}{1+x}$
- e) $f(x) = \operatorname{ctg}(\pi x) + \arccos(3^x)$

[3] Odrediti definiciono područje i skup vrijednosti funkcije

$$f(x) = \log(1 - 2 \cos x)$$

[4] Ispitati periodičnost i odrediti osnovni period ako on postoji sljedećih funkcija:

- a) $f(x) = 3 \cos(4x - 2) + \cos^2 x + \sin^4(x) + \frac{1}{\ln(\sin^2 x)}$
- b) $g(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x}$

[5] Ispitati periodičnost Dirichletove funkcije

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

[6] Dokazati da je bijektivna i odrediti inverznu funkciju hiperboličke sinusne funkcije $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

[7] Neka je $l > 0$ realan broj. Dokazati da se svaka funkcija $f: (-l, l) \rightarrow \mathbb{R}$ može predstaviti u obliku zbira neke parne i neke neparne funkcije.

[8] Data je funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takva da postoji $T > 0$ za koje vrijedi $f(x + T) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Dokazati da je $2T$ period funkcije f .

Zadaci za samostalan rad

[1] Odrediti definiciono područje funkcija:

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

b) $f(x) = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$

c) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-2x+5}{x+2}} + \arcsin\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right) + \log_{\frac{x+1}{x-1}} \frac{3x+2}{2x-1}$

[2] Sa $f^n(x)$ označimo $(f \circ f \circ \dots \circ f)(x)$, gdje je f primijenjeno n puta. Odrediti $f^n(x)$ ako je $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

[3] Odrediti definiciono područje i rang funkcije $\ln(2 - 3 \sin x)$.

[4] Ispitati periodičnost hiperboličke kosinusne funkcije $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

[5] Riješiti nejednačinu

$$(f \circ g)(x) \leq (g \circ f)(x)$$

ako je $f(x) = 2^{-x} + 1, g(x) = 2x - 1$.

[6] Dokazati da je bijekcija i odrediti inverznu funkciju funkcije $f(x) = 4x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$.