Analiza I

Adisa Bolić, abolic@pmf.unsa.ba

Vj. br. 22. Taylorova formula

- Taylorova formula je **aproksimacija funkcije polinomom** u nekoj tački domena funkcije
- Polinom
$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n$$
ima izvod svakog reda za svako $x \in \mathbb{R}$.
- Pretpostavimo da funkcija f ima $(n+1)$. izvod u tački $a \in D_f$. Pitanje je kako odrediti polinom P_n koji će u tački $x = a$ imati jednaku vrijednost kao i funkcija f i za koji vrijedi da su vrijednosti prvih n izvoda jednake odgovarajućim vrijednostima izvoda funkcije f, tj. da vrijedi
$$P_n(a) = f(a), \qquad P_n'(a) = f'(a), \qquad P_n''(a) = f''(a), \dots, \qquad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$
- Odgovor na to pitanje daje Taylorov polinom. Ispostavi se da vrijedi $a_0 = f(a), a_1 = \frac{f'(a)}{1!}, a_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \dots, a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$
- Polinom
$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
zove se **Taylorov polinom funkcije f u tački a.**
- Glavno pitanje: u kakvoj su vezi funkcija f i odgovarajući Taylorov polinom P_n?
Sa $R_n(x)$ označimo n-ti ostatak definisan sa
$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$
Ako je $R_n(x) \approx 0$, onda je $f(x) \approx P_n(x)$, što i jeste cilj. Ta aproksimacija je važna jer su polinomi "najjednostavnije" funkcije, za koje je lagano računati vrijednosti, kao i vrijednosti izvoda.

  Pokaže se da se $R_n(x)$ može zapisati u takozvanom Lagrangeovom obliku
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, za\ a < c < x,$$
odnosno
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, za\ \theta \in (0,1).$$
Vrijedi da $R_n(x) \to 0$ kad $n \to 0$.
- Za $a = 0$ Taylorov polinom se još naziva i MacLaurinov polinom
- Dakle **Taylorova formula funkcije f** u tački $x = a$ je
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \qquad 0 < \theta < 1$$
- Za $a = 0$ Taylorova formula se još naziva i MacLaurinovova formula

[1] Odrediti MacLaurinovu formulu za funkcije:

a) $f(x) = e^x$

b) $f(x) = \sin(x)$

[2] Napisati Taylorov polinom u tački $a = 2$ funkcije $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 2$.

[3] Napisati MacLaurinov polinom 6. stepena funkcije $f(x) = \operatorname{ch} x$.

[4] Da li postoji interval $[-a, a]$ promjenjive x u kome će MacLaurinov polinom 4. stepena aproksimirati funkciju $f(x) = \cos x$ sa greškom manjom od $\epsilon = 10^{-5}$?

Zadaci za samostalan rad

[1] Odrediti MacLaurinovu formulu za funkcije:

c) $f(x) = \cos(x)$

d) $f(x) = \ln(1 + x)$

[2] Funkciju $f(x) = e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)$ razviti u MacLaurinovu formulu sa ostatkom u Lagrangeovom obliku.