Analiza I

Adisa Bolić, abolic@pmf.unsa.ba

Vj. br. 21. Rast i pad funkcije, ekstremi. Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke. Asimptote krive.

I. Monotonost

- Dovoljan uslov za monotonost:
  - gdje je $f'(x) > 0$ funkcija raste
  - gdje je $f'(x) < 0$ funkcija opada

II. Ekstremi

- Ako postoji $\epsilon > 0$ takvo da je za svako $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$
$$f(x) \geq f(x_0)$$
kažemo da se u tački x_0 nalazi **lokalni minimum funkcije** f.
- Ako postoji $\epsilon > 0$ takvo da je za svako $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$
$$f(x) \leq f(x_0)$$
kažemo da se u tački x_0 nalazi **lokalni maksimum funkcije** f.
- Globalni vs. lokalni ekstremi
- Tačka x_0 u kojoj vrijedi $f'(x_0) = 0$ nazivamo **stacionarnom tačkom**. Stacionarne tačke mogu biti tačke **lokalnog minimuma, lokalnog maksimuma ili prevojne tačke**.
- Tačka x_0 u kojoj vrijedi $f'(x_0) = 0$ ili ne postoji $f'(x_0)$ se naziva **kritična tačka** funkcije.
- **(Fermaov teorem)** Svaka tačka **lokalnog ekstrema** je ujedno i **kritična tačka** (obrat ne vrijedi!)
- Primjeri: $|x|, x^3$

<u>**Uslov za lokalni maksimum**</u>

Ako je x_0 stacionarna tačka funkcije f i ako u lijevoj okolini tačke x_0 imamo rast funkcije (dakle $f' > 0$), a u desnoj okolini tačke x_0 imamo pad funkcije (dakle $f' < 0$) onda je x_0 tačka **lokalnog maksimuma funkcije** f.

<u>**Uslov za lokalni minimum**</u>

Ako je x_0 stacionarna tačka funkcije f i ako u lijevoj okolini tačke x_0 imamo pad funkcije (dakle $f' < 0$), a u desnoj okolini tačke x_0 imamo rast funkcije (dakle $f' > 0$) onda je x_0 tačka **lokalnog minimuma funkcije** f.

<u>Veza stacionarnih tačaka i ekstrema</u>

- Ako je x_0 stacionarna tačka funkcije f i ako je $f''(x_0) < 0$ u tački x_0 imamo **lokalni maksimum.**
- Ako je x_0 stacionarna tačka funkcije f i ako je $f''(x_0) > 0$ u tački x_0 imamo **lokalni minimum.**
- Ako je x_0 stacionarna tačka funkcije f i ako je $f''(x_0) = 0$ onda gledamo treći izvod, četvrti izvod... i tako dalje sve dok ne dođemo do izvoda koji je različit od 0.
  Ako je taj izvod **parnog reda** vrijedi: ako je on manji od 0 onda u x_0 imamo **lokalni maksimum**, a ako je veći od 0 onda u x_0 imamo **lokalni minimum**.
  Ako je taj izvod **neparnog reda** vrijedi: tačka x_0 je **prevojna tačka**.

[1] Odrediti intervale monotonosti funkcije $f(x) = x \ln x$ te lokalne ekstreme te funkcije.

[2] Naći lokalne ekstreme funkcije $f(x) = x^{1-\ln x}$.

[3] Ispitati tačku $x = 0$ za funkcije:

a) $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$

b) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & za\ x \neq 0 \\ 0, & za\ x = 0 \end{cases}$

[4] Dokazati da jednačina $\ln x = \frac{2(x-1)}{x+1}$ nema realnih rješenja za $x > 1$.

III. <u>Konveksnost i konkavnost</u>

- Geometrijsko značenje

<u>Definicija</u>: Za funkciju $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ kažemo da je konveksna ako je

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

za sve $x_1, x_2 \in (a, b)$ i sve $0 < \lambda < 1$.

Ako vrijedi suprotna nejednakost ($\geq$), za funkciju kažemo da je konkavna.

<u>Uslovi za konveksnost i konkavnost</u>

- Tamo gdje vrijedi $f'' > 0$, funkcija je **konveksna**.
- Tamo gdje vrijedi $f'' < 0$, funkcija je **konkavna**.

- **Prevojna tačka (tačka infleksije)** je tačka gdje funkcija mijenja konveksitet, tj. gdje prelazi iz konkavnog u konveksni oblik, ili obrnuto.
- **Potreban uslov** da bi x_0 bila prevojna tačka: $f''(x_0) = 0$ ili ne postoji $f''(x_0)$

[5] Odrediti intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije $f(x) = x^2 \ln x$ i naći prevojne tačke.

IV. <u>Asimptote krivih linija u ravni</u>

- Za pravu $x = a$ kažemo da je **vertikalna asimptota** krive $y = f(x)$ ako je
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \; ili - \infty$$
ili
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \; ili - \infty$$
Na primjer: $f(x) = \frac{1}{x}$ u tački $x = 0$.
- Za pravu $y = b$ kažemo da je **horizontalna asimptota** krive $y = f(x)$ ako je
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = b$$
ili
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = b$$
Na primjer: $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ u $y = 1$.
- Ako postoje
$$k = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$
i
$$l = \lim_{x\to +\infty} f(x) - kx$$
(pri čemu umjesto $+\infty$ možemo posmatrati i $-\infty$), onda za pravu $y = kx + l$ kažemo da je **kosa asimptota** krive $y = f(x)$.

Za $k = 0$ kosa asimptota je zapravo horizontalna asimptota.

[6] Odrediti asimptote krivih:

a) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x} + \frac{x}{1-x^2}$

b) $y = xe^{\frac{1}{x}}$

Zadaci za samostalan rad

[1] Odrediti intervale monotonosti i lokalne ekstreme sljedećih funkcija:

a) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

b) $f(x) = \sin^2 x$

c) $f(x) = x + \ln x$

d) $f(x) = x^4 + x^3$

[2] Dokazati nejednakost $e^x > 1 + x$ za $x \neq 0$.

[3] Odrediti intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije $f(x) = 4x^3 + 3x^2$ i naći prevojne tačke.

[4] Odrediti asimptote krive $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}$

[5] Naći prevojne tačke krive

$$y = \frac{x^4}{x^3 - 1}.$$

[6] Zbirka Miličić-Ušćumlić zadaci broj: 2495, 2498, 2502, 2525, 2554, 2556, 2674, 2685, 2691, 2698, 2711, 2860, 2865