Analiza I

Adisa Bolić, abolic@pmf.unsa.ba

Vj. br. 8. Osnovni limesi. Aritmetičke operacije sa limesima. Teorem o uklještenju.

- Ako su $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nizovi realnih brojeva takvi da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ i $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$ pri čemu su A i B realni brojevi, onda je:

    i. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm b_n = A \pm B$
    ii. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\, b_n = AB$
    iii. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, ako je $b_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ i $B \neq 0$

- Neki od osnovnih limesa su:
    - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ \forall a \in \mathbb{R}, a > 0$
    - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
    - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 1$
    - $\lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = \begin{cases} 0,\ |q| < 1 \\ 1,\ q = 1 \\ +\infty,\ |q| > 1 \end{cases}$
    - $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = \begin{cases} 0,\ k < 0 \\ 1,\ k = 0 \\ +\infty,\ k > 0 \end{cases}$
    - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \forall a, k \in \mathbb{R}, a > 1$
    - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0,\ \forall a \in \mathbb{R}$
    - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^k} = 0,\ \forall a, k \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1, k > 0$
    - $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

[1] Dokazati da je:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \forall a, k \in \mathbb{R}, a > 1$

Ostale osnovne limese dokazati za vježbu kući! Možete koristiti i literaturu (Ljaško).

[2] Izračunati sljedeći limes i generalizirati zaključke:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{7n^3 - 2n^2 + 5n + 3}{-2n^3 + 9n + 20}$$

[3] Izračunati sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^3-2n}{50n^2+10n+2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^3-2n}{50n^5+10n+2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+5n-2}{\sqrt{n^4+2}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+5n-2}{\sqrt{n^5+2}}$

[4] Izračunati sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^3+n^2+1} - \sqrt[3]{n^3-n^2+1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n - \sqrt{n^3-n^2}$

[5] Izračunati sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+5^n}{n^2+5^{n+1}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n-3\cdot 5^n+7^{n+2}}{(3.2)^n+7^n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!+(n-2)!}{(n+1)!+(n+2)!}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n}(5-0.33^n)$

Teorema o uklještenju („sendvič teorema“): Neka su $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nizovi realnih brojeva takvi da vrijedi $a_n \le b_n \le c_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A, A \in \mathbb{R}$ onda je i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

Napomena: dovoljno je da $a_n \le b_n \le c_n$ počevši od nekad, tj. , $\forall n \ge n_0 \in \mathbb{N}$

[6] Izračunati sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3n}\cos(5n) - \frac{5n}{2n+3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log(1+\mathrm{n}^{30}+2n^{50})}{\sqrt[75]{n}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

[7] Koji od sljedećih izraza je veći za dovoljno veliko n:

a) $500000n + 10^{1024}$ ili $0.0000000000001n^2$

b) 1.1^n ili n^{1000}

c) 10000^n ili $n!$

Zadaci za samostalan rad

[1] Zbirke!