Analiza I

Adisa Bolić, abolic@pmf.unsa.ba

Vj. br. 9. Tačke gomilanja. Limes inferior i limes superior. Fundamentalni niz.

- Ako su $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ realni nizovi takvi da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, a niz $\{b_n\}$ je ograničen, onda je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

- Vrijede sljedeće nejednakosti:
    - $\forall x \in \mathbb{R}: |sinx| \leq |x|$
    - $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]: \frac{2}{\pi}x \leq sinx$
    - $\forall x > 0: 1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$

[1] Izračunati sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot sin^2(\frac{1}{n})$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n(n-1)} \cdot \cos(2n^2 + 3)$

- Neka je $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz realnih brojeva. Za $A \in \mathbb{R}$ kažemo da je **tačka gomilanja** niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ akko svaka ϵ-okolina $(A-\epsilon, A+\epsilon)$ (za $\forall\epsilon > 0$) sadrži beskonačno mnogo članova niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

- Neka je $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ realan niz ograničen odozgo (odozdo). Neka je skup G skup njegovih tačaka gomilanja. Tada je limes superior (inferior) u oznaci $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ ($\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$) ili $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ ($\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$) definisan sa $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\sup G)$ ($\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\inf G)$). Ako niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nije ograničen odozgo (odozdo), onda definišemo $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ($\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$).

- Niz realnih brojeva $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan akko je ograničen i vrijedi $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$.

[2] Odrediti tačke gomilanja niza $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$. Također odrediti $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ i $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$. Da li je ovaj niz konvergentan?

- Neka je $n_1 < n_2 < \cdots$ niz prirodnih brojeva. Tada $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \dots\}$ nazivamo podniz niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
- Broj $a \in \mathbb{R}$ je tačka gomilanja niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ akko postoji podniz ovog niza koji konvergira ka a.

[3] Odrediti limes inferior i limes superior niza $a_n = (-1)^{n-1}(2 + \frac{3}{n}), n \in \mathbb{N}$. Da li je ovaj niz konvergentan?

- Niz $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergira i vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828182845 \ldots$

- Neka su $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nizovi realnih brojeva za koje vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$. Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e$.

[4] Izračunati sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{4n}\right)^{2n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-2}{n^2+3}\right)^{3n^2+1}$

- **Fundamentalni niz:** Za realni niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kažemo da je fundamentalni (Cauchyev) akko:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq n_0): |x_n - x_m| < \epsilon \iff$$
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N}): |x_{n+p} - x_n| < \epsilon$$

- **Cauchyev kriterij:** Niz realnih brojeva je konvergentan akko je Cauchyev.

[5] Dokazati da je niz $x_n = \frac{\cos(1)}{3} + \frac{\cos(2)}{3^2} + \cdots + \frac{\cos(n)}{3^n}, n \in \mathbb{N}$ konvergentan.

[6] Dokazati da niz $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ divergira.

Zadaci za samostalan rad

[1] Izračunati sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos(n)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+2n-1}{3n+2} \cdot \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

[2] Naći tačke gomilanja niza:

a) $x_n = (-1)^{n+1} + \frac{1}{n}$

b) $x_n = \cos^n n\pi$

[3] Naći opći član nekog niza koji ima tačke gomilanja 5 i −5.

[4] Odrediti limes inferior i limes superior niza $a_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}, n \in \mathbb{N}$. Da li je ovaj niz konvergentan?

[5] Dokazati da je niz $x_n = \frac{\cos(1)}{2} + \frac{\cos(2)}{2^2} + \cdots + \frac{\cos(n)}{2^n}, n \in \mathbb{N}$ konvergentan.