Analiza I

Adisa Bolić, abolic@pmf.unsa.ba

Vj. br. 11. Redovi. Konvergencija redova.

- Za dati realni niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ možemo definisati red u oznaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ kao $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$. Brojeve $a_0, a_1, \ldots$ zovemo članovi red, a a_n je opći član reda. Niz $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ je niz parcijalnih suma reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i zadan je sa $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n, n \in \mathbb{N}_0$.
- Za red kažemo da konvergira ako konvergira njegov niz parcijalnih suma, inače red divergira. Ako red konvergira onda postoji $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ i kažemo da je S suma reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i pišemo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$.
- **Potreban uslov za konvergenciju reda**: Ako red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira onda je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
- **Hiperharmonijski red**: Red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergira za $p > 1$, a divergira za $p \leq 1$.
- Aritmetičke operacije sa redovima:
  - ako je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$ i $S \in \mathbb{R}$ onda je $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n = cS$ za $c \in \mathbb{R}$
  - ako je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S, \sum_{n=0}^{\infty} b_n = L$ i $S, L \in \mathbb{R}$ onda je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm b_n = S \pm L$

[1] Ispitati konvergenciju sljedećih redova:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$, za $a, q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} k + nd,\ k, d \in \mathbb{R}^+$

[2] Ispitati konvergenciju sljedećih redova i naći im sume ako konvergiraju:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

[3] Ispitati konvergenciju sljedećih redova:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{n}}{\sqrt[n]{n!}}$

[4] Da li je uslov $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ dovoljan za konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$?

Kriterij upoređivanja: Neka su $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ redovi sa pozitivnim članovima ($a_n > 0, b_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$) takvi da vrijedi $a_n \leq b_n$ počevši od nekad. Tada vrijedi:

a) ako red $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergira onda i red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira
b) ako red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergira onda i red $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergira

[5] Ispitati konvergenciju sljedećih redova:
- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}$
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$

Limes kriterij upoređivanja: Neka su $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ redovi takvi da $a_n > 0, b_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ i neka postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$. Tada:

1° Ako $l \in (0, +\infty)$ onda red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira akko red $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergira

2° Ako je $l = 0$ onda iz konvergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ slijedi konvergencija reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, a iz divergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ slijedi divergencija reda $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$

3° Ako je $l = +\infty$ onda iz konvergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ slijedi konvergencija reda $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, a iz divergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ slijedi divergencija reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

[6] Ispitati konvergenciju sljedećih redova:
- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+n^2+1}}{\sqrt{3n^5-n-2}}$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[n]{n^5}}$
- d) $\sum_{n=1}^{\infty} tg\left(\frac{\pi}{4n}\right)$

Zadaci za samostalan rad

Zadaci iz zbirki!