

Vj. br. 14. Granične vrijednosti funkcija

- **Definicija:** Neka je x_0 tačka gomilanja domena D_f funkcije f . Kažemo da je

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$$

ako za svaku okolinu V tačke y_0 postoji okolina U tačke x_0 takva da je $f(U \setminus \{x_0\}) \subset V$, odnosno ako $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\epsilon)) > 0: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \epsilon$.

U slučaju beskonačnosti imamo da:

- vrijedi $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y_0$ ako $(\forall \epsilon > 0)(\exists M = M(\epsilon)) > 0: x > M \Rightarrow |f(x) - y_0| < \epsilon$.
- vrijedi $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$ ako $(\forall \epsilon > 0)(\exists M = M(\epsilon)) > 0: x < -M \Rightarrow |f(x) - y_0| < \epsilon$.

[1] Ako je $f(x) = 4x - 2$, dokazati da je $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

- **Lijevi i desni limes:** $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0^-)$ i $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0) = f(x_0^+)$

- **Limes postoji akko postoje lijevi i desni limes i jednaki su!**

- **Heineov teorem:** Limes $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ postoji akko za svaki niz $\{x_n\}$ koji konvergira ka a (kad $n \rightarrow \infty$), niz $\{f(x_n)\}$ konvergira ka A (kad $n \rightarrow \infty$).

[2] Odrediti $\lim_{\mathbb{N} \ni x \rightarrow \infty} x - |x|$, a zatim dokazati da $\lim_{x \rightarrow \infty} x - |x|$ ne postoji.

[3] Dokazati da funkcija $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ nema graničnu vrijednost kad $x \rightarrow 0$.

[4] Postoji li $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x)$?

[5] Dokazati da ne postoji limes ni u jednoj tački Dirichletove funkcije.

[6] Dokazati po definiciji da je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1} = 1.$$

[7] Dokazati po definiciji da je

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a.$$

- Za limese funkcija vrijede uobičajene aritmetičke operacije!

[8] Izračunati sljedeće limese:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 5x^2 - 2x - 1}{x^2 - 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{1-x}}$

e) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x - \ln|\operatorname{sh} x|)$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{10} - 1}{x}$

Zadaci za samostalan rad

[1] Izračunati sljedeće limese:

a) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x - \sqrt{x^2 - 3x + 4})$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^5 + 3}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x}$

[2] Dokazati po definiciji da je

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a.$$

[3] Dokazati da funkcija $f(x) = \sin x^2 + x$ nema limes kad $x \rightarrow \infty$.