



ELEMENTS FINIS

PROJET D'UNE GRILLE DE POUTRES

Réalisé par :

Zijie LI

Chao PAN

Encadrée par :

Monsieur Jeremy Bleyer

Février 2020

Question 1 : Équations d'équilibre

On suppose que la grille de poutres ne supporte qu'une force distribuée verticale f_z , les équations d'équilibre peuvent être exprimées comme suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dV}{dx} = f_z \\ \frac{dM}{dx} + V = 0 \\ \frac{dT}{dx} = 0 \end{cases}$$

En considérant une cinématique d'Euler-Bernoulli pour les poutres, on néglige donc l'énergie de déformation contribué par la déformation axiale et la déformation de cisaillement transverse. Le TTV pour un champ de déplacement virtuel caractérisé par $(\hat{\omega}, \hat{\theta}_x, \hat{\theta}_y)$ peut être écrit en équation suivante :

$$W_{def} = \int_0^l (M\hat{\chi} + T\hat{\psi}) dx = \int_0^l (f_z\hat{\omega} + c_x\hat{\theta}_x + c_y\hat{\theta}_y) = W_{ext}$$

D'où :

χ : Courbure de flexion, $\chi = \frac{d^2\omega}{dx^2}$;

ψ : Déformation de torsion, $\psi = \frac{d\theta_y}{dx}$;

ω : Déplacement vertical ;

θ_x : Angle de flexion, $\theta_x = \omega'$;

θ_y : Angle de rotation.

Question 2 : Matrice Be

On suppose que l'angle de rotation θ_y respecte l'interpolation linéaire et le déplacement vertical ω respecte l'interpolation Hermite. Les déplacements peuvent être exprimés par les formules suivantes :

$$\omega(x) = N_{flex,1}(x)\omega^1 + N_{flex,2}(x)\theta_x^1 + N_{flex,3}(x)\omega^2 + N_{flex,4}(x)\theta_x^1$$

$$\theta_y(x) = \theta_y^1 + \frac{x}{l}(\theta_y^2 - \theta_y^1)$$

On rappelle que $\chi = \frac{d^2\omega}{dx^2}$ et $\psi = \frac{d\theta_y}{dx}$:

$$\begin{Bmatrix} \chi \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{d^2\omega(x)}{dx^2} \\ \frac{d\theta_y(x)}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{flex,1}'' & N_{flex,2}'' & 0 & N_{flex,3}'' & N_{flex,4}'' & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega^1 \\ \theta_x^1 \\ \theta_y^1 \\ \omega^2 \\ \theta_x^2 \\ \theta_y^2 \end{Bmatrix}$$

La matrice permettant de calculer les déformations B_e s'écrit donc :

$$B_e^{loc}(x) = \begin{bmatrix} N_{flex,1}'' & N_{flex,2}'' & 0 & N_{flex,3}'' & N_{flex,4}'' & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} \end{bmatrix}$$

Question 3 : Matrice de rigidité et vecteurs d'efforts distribués

3.1 Matrice de rigidité

Calcul du travail déformation :

$$\begin{aligned} W_{def} &= \int_0^l (EI\chi\hat{\chi} + GI_p\hat{\psi}) \\ &= \int_0^l \{\chi \ \psi\} \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & GI_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\chi} \\ \hat{\psi} \end{Bmatrix} dx \\ &= \{u_e^{loc}\}^T \int_0^l ([B_e^{loc}]^T \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & GI_p \end{bmatrix} [B_e^{loc}]) dx \{\hat{u}_e^{loc}\} \end{aligned}$$

D'où :

E : Module d'Young

G : Module de cisaillement

I : Moment d'inertie axial

I_p : Moment d'inertie de torsion

La matrice de rigidité élémentaire s'écrit donc :

$$\begin{aligned} K_e^{loc} &= \int_0^l \left([B_e^{loc}]^T \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & GI_p \end{bmatrix} [B_e^{loc}] \right) dx \\ &= \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} 12EI & 6EI l & 0 & -12EI & 6EI l & 0 \\ 6EI l & 4EI l^2 & 0 & -6EI l & 2EI l^2 & 0 \\ 0 & 0 & GI_p l^2 & 0 & 0 & -GI_p l^2 \\ -12EI & -6EI l & 0 & 12EI & -6EI l & 0 \\ 6EI l & 2EI l^2 & 0 & -6EI l & 4EI l^2 & 0 \\ 0 & 0 & -GI_p l^2 & 0 & 0 & GI_p l^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.2 Vecteurs d'efforts distribués

Le travail des efforts extérieurs est :

$$W_{ext} = \int_0^l (f_z \hat{\omega} + c_x \hat{\theta}_x + c_y \hat{\theta}_y) = f_z \int_0^l \hat{\omega} dx + c_x \int_0^l \hat{\theta}_x dx + c_y \int_0^l \hat{\theta}_y dx$$

On a une interpolation cubique du déplacement vertical de la forme :

$$\omega(x) = N_{flex,1}(x)\omega^1 + N_{flex,2}(x)\theta^1 + N_{flex,3}(x)\omega^2 + N_{flex,4}(x)\theta^2$$

Donc :

$$\int_0^l \hat{\omega} dx = \frac{l}{2} \omega^1 + \frac{12}{l^2} \theta^1 + \frac{l}{2} \omega^2 - \frac{12}{l^2} \theta^2$$

Sachant que $\theta(x) = \omega'(x)$:

$$\begin{aligned} \int_0^l \hat{\theta}_x dx &= N_{flex,1}(x) \Big|_0^l \omega^1 + N_{flex,2}(x) \Big|_0^l \theta^1 + N_{flex,3}(x) \Big|_0^l \omega^2 + N_{flex,4}(x) \Big|_0^l \theta^2 \\ &= -\omega^1 + \omega^2 \end{aligned}$$

L'angle de rotation θ_y respecte l'interpolation linéaire :

$$\theta_y(x) = \theta_y^1 + \frac{x}{l} (\theta_y^2 - \theta_y^1)$$

Donc :

$$\int_0^l \hat{\theta}_y dx = \frac{l}{2} \theta_y^1 + \frac{l}{2} \theta_y^2$$

Soit donc au final :

$$\begin{aligned} W_{ext} &= [f_z \quad c_x \quad c_y] \begin{bmatrix} \frac{l}{2} & \frac{l^2}{12} & 0 & \frac{l}{2} & \frac{-l^2}{12} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{2} & 0 & 0 & \frac{l}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega^1 \\ \theta_x^1 \\ \theta_y^1 \\ \omega^2 \\ \theta_x^2 \\ \theta_y^2 \end{Bmatrix} \\ &= \left\{ \frac{l}{2} f_z - c_x \quad \frac{l^2}{12} f_z \quad \frac{l}{2} c_y \quad \frac{l}{2} f_z + c_x \quad \frac{-l^2}{12} f_z \quad \frac{l}{2} c_y \right\} \{u_e^{loc}\} \\ &= \{u_e^{loc}\} \end{aligned}$$

Vecteur des efforts extérieurs :

$$\begin{aligned} \{F\} &= \{V_1 \quad M_1 \quad T_1 \quad V_2 \quad M_2 \quad T_2\} \\ &= \left\{ \frac{l}{2} f_z - c_x \quad \frac{l^2}{12} f_z \quad \frac{l}{2} c_y \quad \frac{l}{2} f_z + c_x \quad \frac{-l^2}{12} f_z \quad \frac{l}{2} c_y \right\} \end{aligned}$$

Q4 : Création d'élément Grid3D

Voir le script grid3d.py

Q5 Vérification le cas avec la flexion dans une direction

Nous fixons le déplacement vertical du côté gauche et droite pour un grillage, et nous n'appliquons qu'une force répartie uniforme q sur les poutres horizontales (voir figure suivante) :

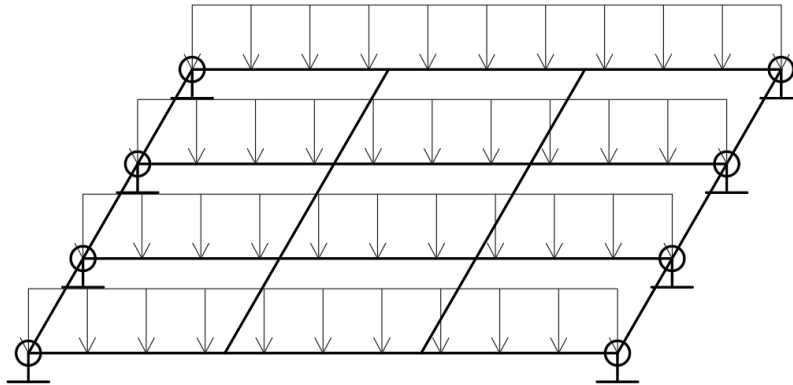


Figure 1 : Schéma de la grille sous charge

Dans ce cas-là, cette plaque est équivalente à une poutre sur deux appuis simples (voir figure suivante), dont la flèche vaut $\frac{5}{384EI} ql^4$.

Sachant que $q = 1000 \text{ kN}$, $E = 210 \text{ GPa}$, $l = 1 \text{ m}$ et la section de poutre est de $0.1 \times 0.1 \text{ m}$, la flèche de poutre sur deux appuis simples vaut 0.007440 m

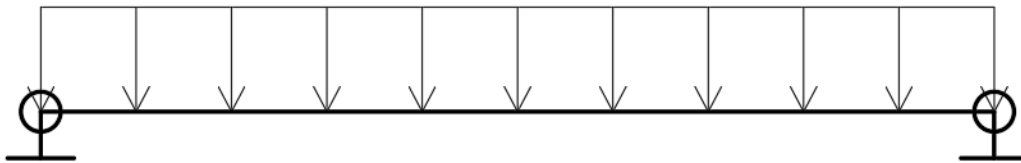
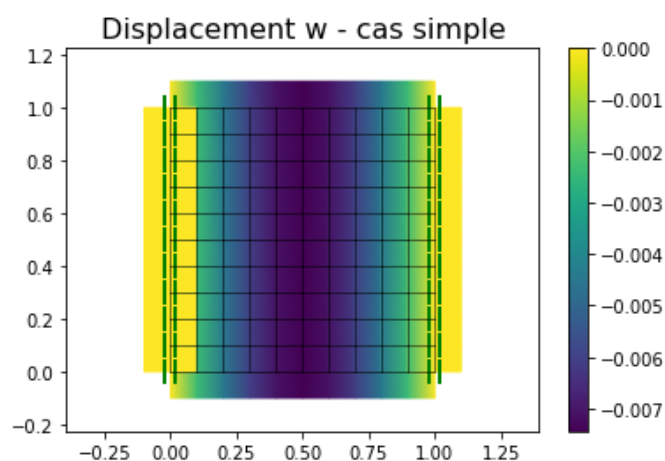


Figure 2 : Charge uniformément répartie

Nous réalisons une modélisation d'un grillage avec poutres 10×10 et obtenons la flèche au milieu qui vaut 0.00744m . Nous remarquons que la flèche du grillage est égale à celle de poutre simplement appuyée. La solution pour ce cas simple est donc validée.



Flèche au mi-travée d'un grillage: 0.007440

Figure 3 : Résultat de la flèche au mi- travée de la grille

Q6 : Vérification le cas avec la flexion dans deux directions

Pour vérifier le cas pour lequel la flexion se produit dans deux directions, nous considérons un grillage de dimensions $1\text{m} \times 1\text{m}$ avec 2 poutres réparties uniformément dans deux directions (voir figure suivante).

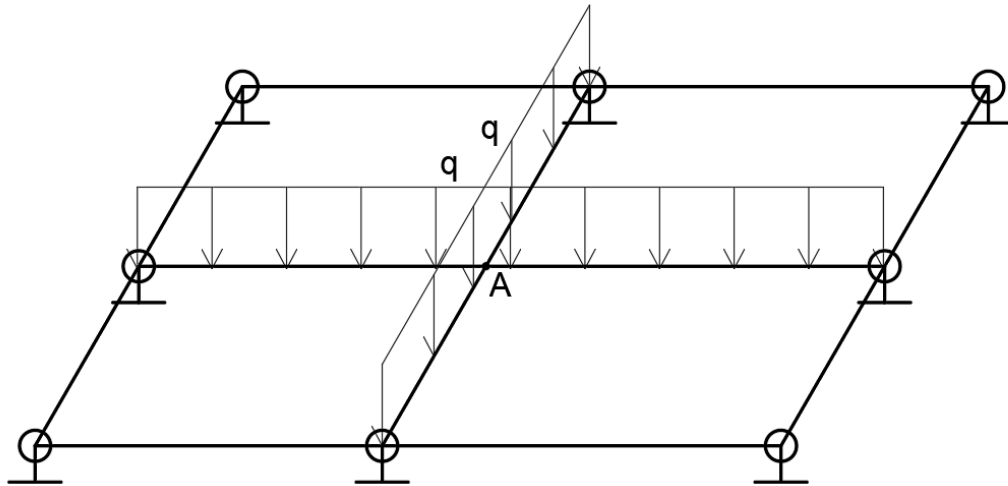


Figure 4 : Schéma de la grille sous charge avec en discretization

Une charge distribuée uniforme $q = 1000 \text{ kN}$ est posée sur les poutres internes. Sachant que le grillage est carré et les poutres sont réparties uniformément, le point conjoint A se situe donc tous à mi-travée et il n'existe pas de l'interaction des poutres. Nous pouvons donc calculer la flèche au point A avec un cas plus simple comme suivant :

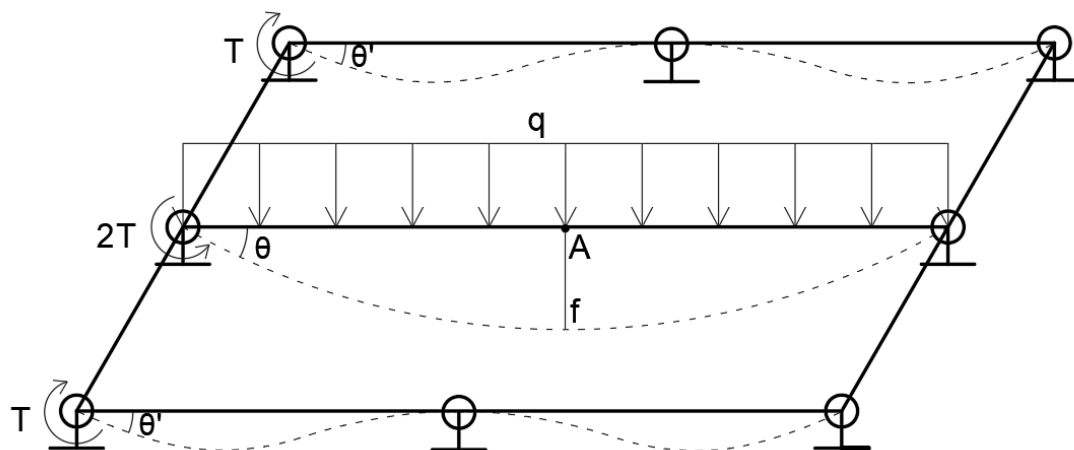


Figure 5 : Schéma de la grille sous charge avec en discretization

À l'aide de connaissances d'élément fini de poutre, nous pouvons déduire :

$$\theta' = \frac{1}{8EI} Tl$$

$$\theta = \frac{1}{24EI} ql^3 - \frac{Tl}{EI}$$

Les poutres à gauche et à droite subissent une torsion T , donc :

$$\theta - \theta' = \frac{Tl}{2GI_p}$$

D'où :

$$G = E / (2 + 2\nu)$$

Sachant que les poutres ont une section carrée, on a $I_p = 2I$.

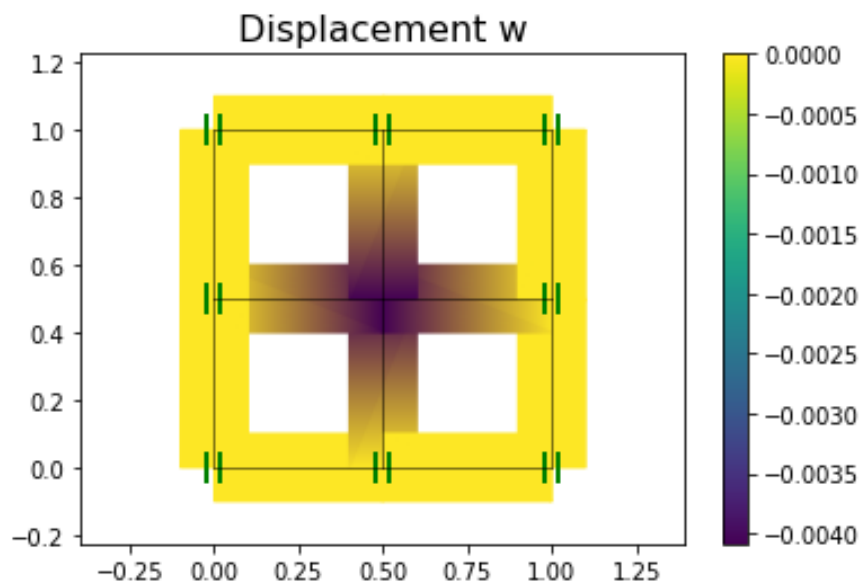
Avec ces équations précédentes, nous pouvons déduire la valeur de torsion T , qui vaut :

$$T = \frac{ql^2}{3(13 + 4\nu)}$$

Et la flèche au point A :

$$\frac{5}{384EI} ql^4 - \frac{1}{4EI} Tl^2 = \left(\frac{5}{384} - \frac{1}{12(13 + 4\nu)} \right) \frac{ql^4}{EI} = 0.004087 \text{ m}$$

Nous réalisons une modélisation d'un grillage avec poutres 1×1 et obtenons la flèche aux points conjoints qui vaut 0.004087m. La solution pour le cas avec la flexion dans deux directions est donc validée.



Flèche aux points conjoints de grillage: 0.004087

Figure 6 : Résultat de la flèche au mi- travée de la grille

Q7 : Comparaison des résultats grillage-plaque

1) Modélisation de plaque mince en flexion

Hypothèse

- Déplacements latéraux et les rotations de la mi- épaisseur sont petits ($w \ll t$ et $\theta \ll 1$)
- Les dimensions sont grandes par rapport à l'épaisseur ($a/t > 10$ et $b/t > 10$)
- Matériau homogène, isotrope et élastique linéaire
- Lignes droites normales au plan mi- épaisseur demeurent droites après chargement (flexion des poutres)
- Déplacement suivant l'épaisseur seulement
- Surface à la mi- épaisseur est un plan neutre

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$$

- La contrainte normale à la surface de la mi- épaisseur est négligeable

$$\sigma_z = 0$$

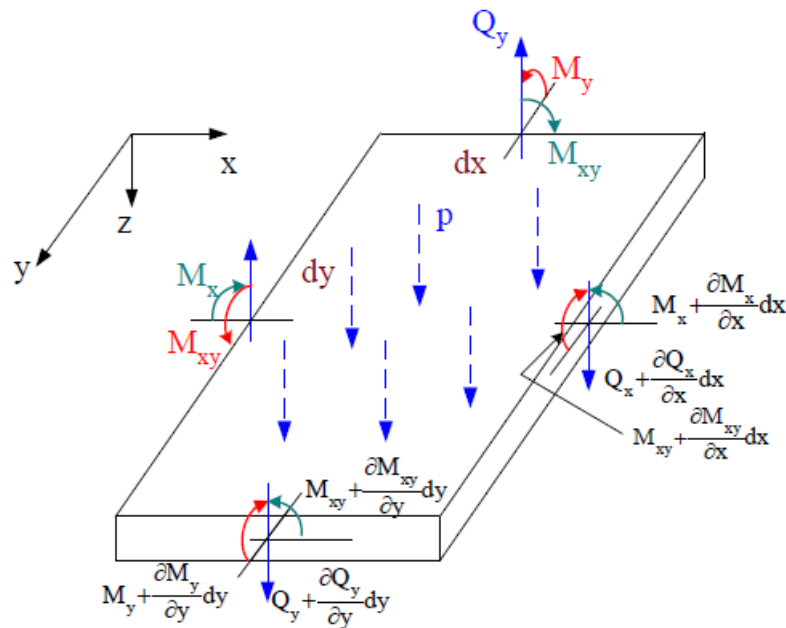


Figure 7 : Schéma de forces et moments dans une plaque

Équilibre des forces :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} + p = 0$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} = Q_x$$

Relations entre le déplacement et les moments

$$M_x = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$M_y = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

D'où D est la rigidité en flexion de la plaque :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

Donc,

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p = 0$$

On en déduit une équation du déplacement avec différence de Lagrange par rapport à la plaque :

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}$$

Pour une plaque simplement appuyée, les conditions limites sont :

$$w = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et } x = a$$

$$w = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ pour } y = 0 \text{ et } y = b$$

On utilise la méthode de Navier pour résoudre l'équation aux dérivées partielles. Il s'agit de la charge latérale (double série trigonométrique)

$$p = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn}}{\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

Sous chargement uniforme $p(x, y) = p_0$

$$p_{mn} = \frac{4p_0}{ab} \int_0^b \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{16p_0}{\pi^2 mn} \text{ où } m, n = 1, 3, 5 \dots$$

$$w = \frac{16p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

Pour obtenir la flèche maximale de plaque, on prend $x = \frac{a}{2}$ et $y = \frac{b}{2}$. À l'aide de Python, nous avons obtenu la flèche maximale des plaques dont la largeur égale à 1m et la longueur varie de 1m à 10m. Les valeurs de paramètres que nous avons choisies sont :

- Module d'Young : $E = 210 \text{ GPa}$
- Dimensions de plaque : $a = b = 1 \text{ m}$
- Épaisseur de plaque : $h = 0.1 \text{ m}$
- Coefficient de Poisson : $\mu = 0.3$
- Charge : $q = 1000 \text{ kN/m}^2$

Les résultats sont montrés dans la figure suivante :

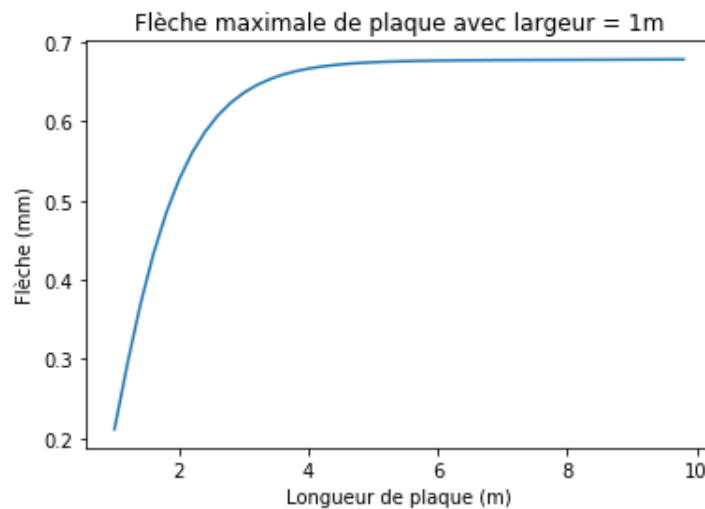


Figure 8 : Courbure de la flèche en fonction de la longueur de la plaque

Pour une plaque carrée ($a=b=1\text{m}$) :

$$f = 0.000211 \text{ m}$$

Pour une plaque très allongée ($a=1\text{m}$, $b=10\text{m}$) :

$$f = 0.000678 \text{ m}$$

2) Identification des paramètres

Paramètres de plaque :

- Largeur : L
- Longueur : H
- Épaisseur : h_{plaque}
- Charge : q_{plaque}

Paramètres de grillage :

- Nombre de poutres au travers de largeur de plaque : N_x
- Nombre de poutres au travers de longueur de plaque : N_y
- Largeur : b
- Épaisseur : h

- Charge linéaire : q

Pour assurer que les poutres de grillage ont tous la même largeur, on a :

$$b = \frac{L}{N_x} = \frac{H}{N_y}$$

Soit :

$$N_y = \frac{HN_x}{L}$$

Pour redistribuer la charge superficielle de plaque aux charges linéaires de poutres, on a :

$$q = \frac{q_{\text{plaque}}HL}{N_xH + N_yL} = \frac{q_{\text{plaque}}}{\frac{N_x}{L} + \frac{N_y}{H}} = \frac{bq_{\text{plaque}}}{2}$$

La hauteur de poutre égale à celle de plaque, soit :

$$h = h_{\text{plaque}}$$

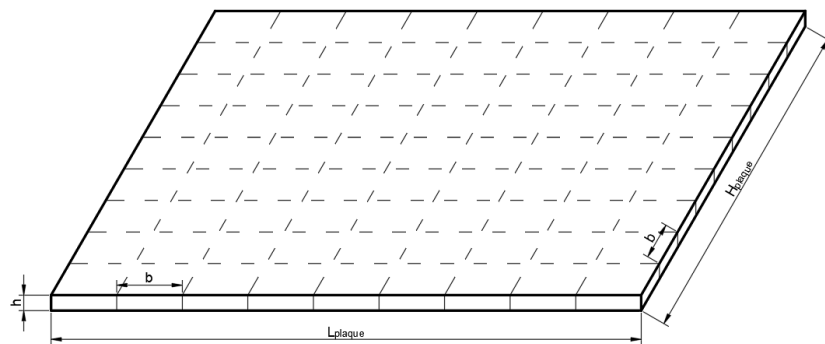


Figure 9 : Schéma de la plaque

À l'aide des formules précédentes, nous pouvons identifier les paramètres du grillage avec les paramètres de plaque que nous avons pris dans la section précédente. Nous prenons $N_x = 10$ et puis réalisons une modélisation d'un grillage carré avec l'élément Grid3D. Les flèches des poutres sont montrées dans la figure suivante :

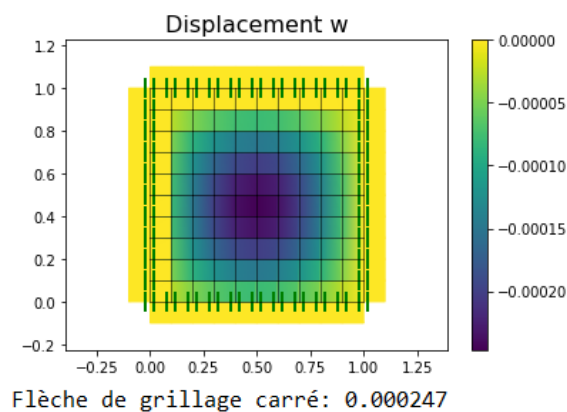


Figure 10 : Résultat de la flèche au mi- travée de la grille

Nous remarquons que la flèche maximale du grillage est de 0.00246 m, qui est proche de celle de plaque, qui vaut 0.000211 m, cela justifie notre identification des paramètres du grillage.

3) Influence de taille de maillage

Nous prenons deux plaques différentes pour étudier l'influence de taille de maillage. Une plaque carrée avec $L_{\text{plaque}} = H_{\text{plaque}} = 1\text{m}$, et une plaque allongée avec $L_{\text{plaque}} = 1\text{m}$, $H_{\text{plaque}} = 5\text{m}$.

Nous varions le nombre d'éléments N_x de 2 à 20 et puis comparons leur flèche à celle calculée avec la plaque mince. Les résultats sont montrés dans les figures suivantes :

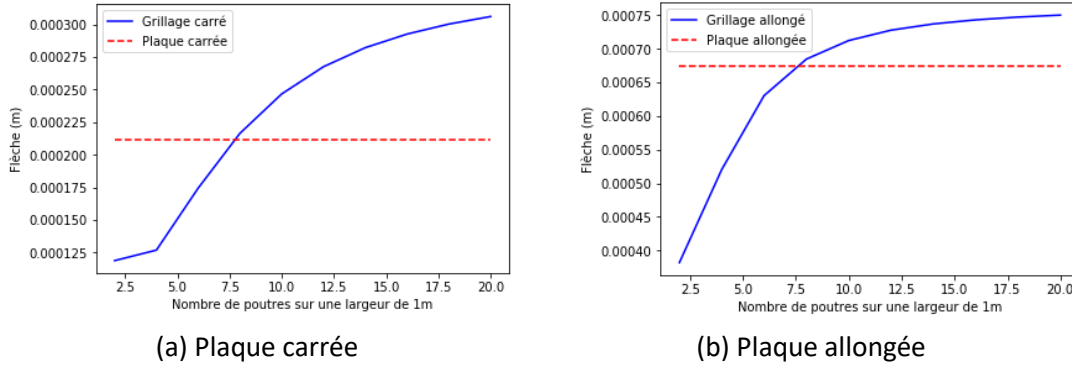


Figure 11 : Influence du nombre d'éléments

Nous remarquons que la flèche maximale du grillage varie beaucoup en fonction de taille de maillage, cela est probablement causé par notre méthode de calcul d'inertie de torsion. Nous avons calculé l'inertie de torsion avec la formule suivante :

$$J = \frac{hb^3}{12} + \frac{bh^3}{12}$$

Et la raideur de torsion vaut $G \times J$.

En fait cette équation n'est que valable quand la section de poutre est presque carrée. Quand la taille de maille du grillage est grande (cas (a)), nous surestimons la raideur de torsion des poutres. De ce fait, la flèche du grillage est moins grande que le résultat théorique de plaque. Par contre, si nous prenons un maillage trop fin (cas (c)), nous dégradons la raideur de torsion des poutres, et donc la flèche du grillage est plus grande que le résultat théorique de plaque.

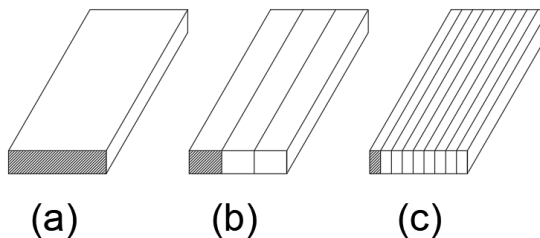


Figure 12 : Maillage de la grille

Nous remarquons aussi que le croisement de courbe du grillage et de courbe de plaque a lieu quand N_x égale plutôt à 8. Dans ce cas-là, les dimensions de section des poutres sont : $b = 0.125\text{ m}$ et $h = 0.1\text{ m}$. Nous réalisons une modernisation du grillage et utilisons ces

dimensions pour la section de poutre. Pour comparer, nous réalisons aussi une modernisation du grillage avec les poutres de section carré ($b = h = 0.1 \text{ m}$). Nous varions la longueur de grillage et comparons leur flèche à la flèche théorique de plaque mince. Les résultats sont montrés dans les figures suivantes :

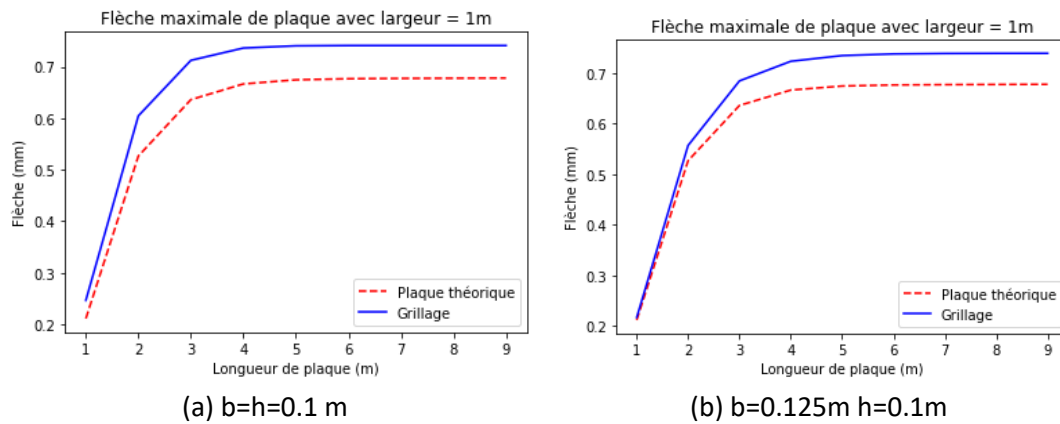


Figure 13 : Flèche maximale en fonction de la longueur de la plaque

Nous remarquons que les courbes théoriques et de modernisation s'accordent mieux pour le deuxième cas ($b=0.125 \text{ m}$).

Nous constatons aussi que la modernisation du grillage fonctionne mieux pour la plaque carrée (longueur de plaque = 1 m). Le tableau suivant montre la flèche maximale du grillage et de calcul théorique.

Tableau 1 : Résultat de la flèche maximale du grillage et de calcul théorique

Plaque	Simulation grillage	Théorique	Poutre simplement appuyée (L=1m)
Carrée (L=H=1m)	0.216 mm	0.211 mm	0.744 mm
Allongée (L=1m, H=10m)	0.739 mm	0.678 mm	

La flèche de grillage carré est proche de la valeur théorique et la flèche de grillage allongé a une petite différence de la valeur théorique, cependant elle est presque identique à la flèche maximale de poutre simplement appuyée, cela est plutôt raisonnable car un grillage très allongé peut être considéré comme un grillage dont la flexion se produit uniquement dans une direction. La flèche théorique maximale d'une plaque allongée est un peu moins que la flèche d'une poutre simplement appuyée parce que le calcul théorique compte toujours le coefficient de Poisson. Si le coefficient de Poisson $\mu = 0$, la flèche théorique de plaque allongée vaut 0.000745 m, qui correspond donc à la flèche de poutre simplement appuyée ainsi de grillage allongé.

Q8 : Comparaison des fréquences propres de vibration

L'équation qui gouverne les vibrations est donnée par le modèle de Kirchhoff-Love :

$$D\Delta\Delta w + c\dot{w} + m\ddot{w} = f(x, y, t)$$

La masse surfacique ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$) du matériau

$$m = \rho h$$

$f(x, y, t)$ représente les efforts surfaciques extérieurs appliqués à la plaque ($N \cdot m^{-2}$) et c est un coefficient d'amortissement visqueux

$$\Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

On s'intéresse dans un premier temps aux vibrations libres et non-amorties de la plaque

$$f(x, y, t) = 0$$

$$c = 0$$

On recherche alors les mouvements harmoniques, dont la solution sous la forme

$$w(x, y, t) = \Phi(x, y)e^{i\omega t} \text{ où } \omega \text{ est une pulsation}$$

$$\Delta\Delta \Phi - \frac{m\omega^2}{D} \Phi = 0$$

$$\Phi_{m,n}(x, y) = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

À chacune de ces fonctions propres correspond une pulsation propre, qui est à la fréquence des oscillations du mode considéré :

$$\omega_{m,n} = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{m} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}$$

Pour établir la matrice de masse élémentaire, on ne prend que la flexion en compte. C'est-à-dire que, l'influence de torsion est négligeable. Donc, le bloc $\{3, 6\} \times \{3, 6\}$ est égal 0.

$$[M_e^{flex}] = \rho S \int_0^l [N_{flex}(x)]^T [N_{flex}(x)] dx = \rho S l \begin{vmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11}{210}l & \frac{9}{70} & -\frac{13}{420}l \\ \frac{11}{210}l & \frac{1}{105}l^2 & \frac{13}{140}l & -\frac{1}{140}l^2 \\ \frac{9}{70} & \frac{13}{140}l & \frac{13}{35} & -\frac{11}{210}l \\ -\frac{13}{420}l & -\frac{1}{140}l^2 & -\frac{11}{210}l & -\frac{1}{105}l^2 \end{vmatrix}$$

C'est le bloc $\{1, 2, 4, 5\} \times \{1, 2, 4, 5\}$ = matrice élémentaire liée à la flexion pure.

Par ailleurs, pendant l'implémentation du code de la grille, on considère que la section doit être une moitié de $b \times h$, parce que la grille est discrétisée en plusieurs de poutres, il y a une section en superposition entre une poutre horizontale et celle-ci verticale. Donc, il faut prendre une moitié afin d'éviter un calcul double.

On implémente le code pour calculer la fréquence de la grille ainsi que celle de la plaque dans deux cas, un carré (1m×1m) et un rectangle (1m×5m)

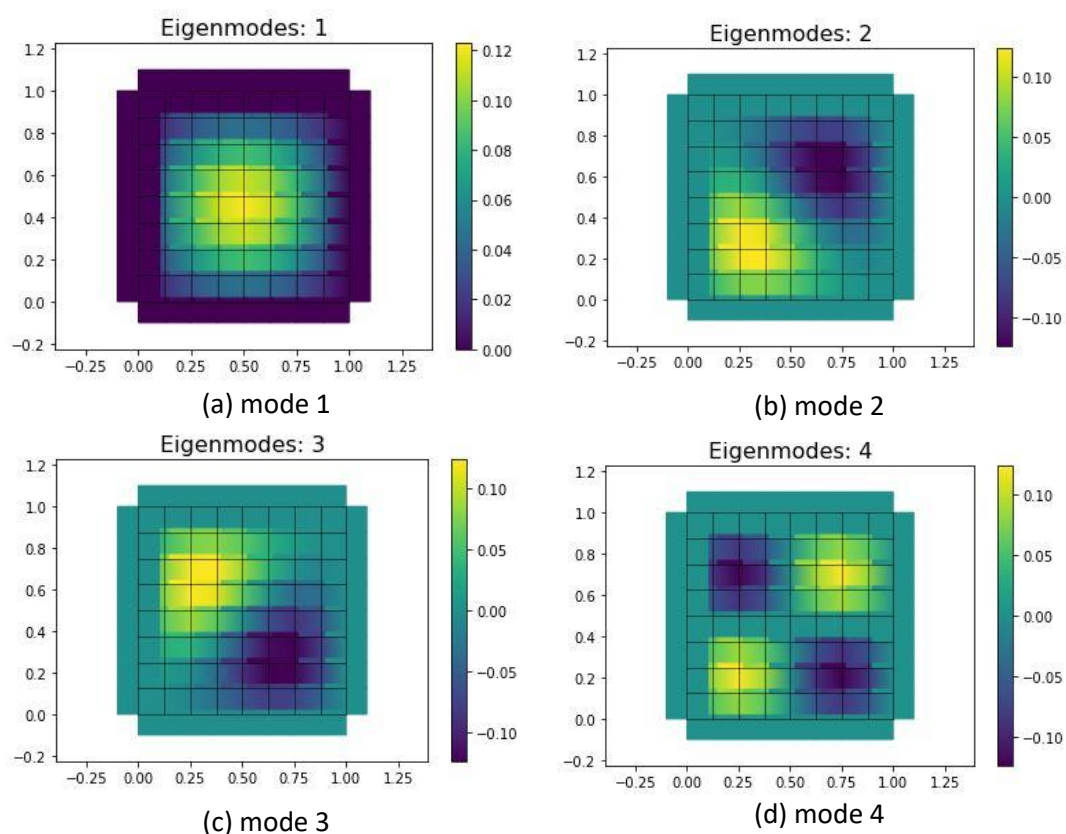


Figure 14 : Modes propres de la grille carrée

De plus, on compare la fréquence de la plaque et celle de la grille. En fonction de l'écart petit, notre modélisation est bonne.

Tableau 2 : Résultat de la fréquence de la plaque et celle de la grille dans un cas carré

Modes	Fréquence (Hz)		Écart (%)
	Grille	Plaque	
1	824.76	838.43	1.63
2	2025.24	2096.07	3.37
3	2025.24	2096.07	3.37
4	3228.10	3353.72	3.74

De même façon, on s'intéresse au cas rectangulaire

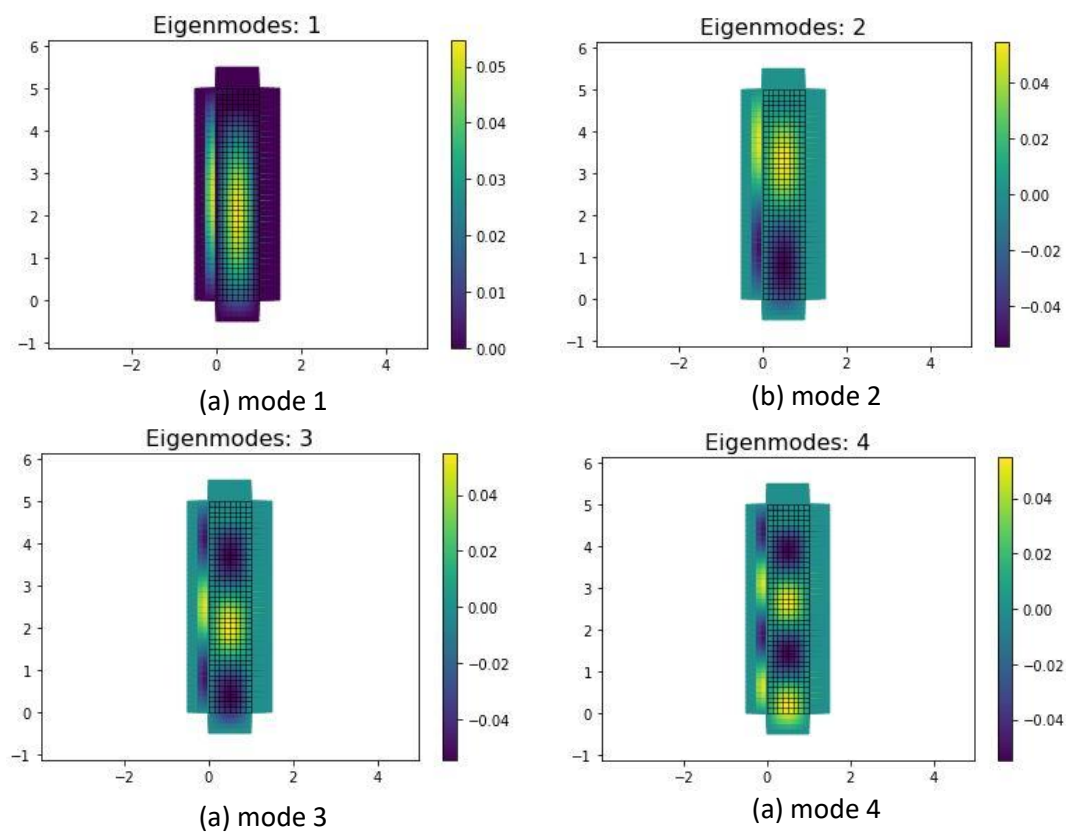


Figure 15 : Modes propres de la grille rectangulaire

De plus, on compare la fréquence de la plaque et celle de la grille. En fonction de l'écart petit, notre modélisation est bonne.

Tableau 3 : Résultat de la fréquence de la plaque et celle de la grille dans un cas rectangulaire

Modes	Fréquence (Hz)		Écart (%)
	Grille	Plaque	
1	417.30	435.98	4.49
2	468.73	486.29	3.61
3	552.67	570.13	3.06
4	667.88	687.51	2.86