

Results of project 2 – part 2

SIBOYABASORE Cédric

December 2019

1 Fonction d'approximation et fréquences naturelles

On fait l'hypothèse d'un mouvement synchrone harmonique, c'est-à-dire $v(x, t) = v(x)\cos(\omega t)$. On approxime la fonction $v(x)$, qui décrit la composante spatiale du mouvement de la poutre en fonction, telle que

$$v(x) = \sum_{i=0}^9 q_i w_i(x) = \sum_{i=0}^9 q_i \left(\frac{x}{L}\right)^i$$

Il n'y a pas de conditions limites cinématiques car la poutre en flexion est posée sur 2 ressorts. Les fonctions de forme $w_i(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^i$ sont donc cinématiquement admissibles.

L'énergie cinétique du système est donnée par $T = T_{max}(\sin(\omega t))^2$ où

$$T_{max} = \frac{\omega^2}{2} \int_0^L m_{poutre} v(x)^2 dx + \frac{\omega^2}{2} m_1 v(-0.5)^2 + \frac{\omega^2}{2} m_2 v(0.3)^2 + \frac{\omega^2}{2} J_{M1} \left(\frac{dv(-0.5)}{dx}\right)^2 + \frac{\omega^2}{2} J_{M2} \left(\frac{dv(0.3)}{dx}\right)^2$$

avec $J_{M1} = J_{M2} = \frac{(3 * (\frac{51 * 10^{-3}}{2})^2 + (61 * 10^{-3})^2)}{12} + (\frac{61 * 10^{-3}}{2} + \frac{20 * 10^{-3}}{2})^2 kg m^2$

On en déduit l'expression d'un élément m_{ij} de la matrice de masse M donc on peut déterminer entièrement la matrice M d'ordre 10.

L'énergie potentielle du système est donnée par $V = V_{max}(\cos(\omega t))^2$ où

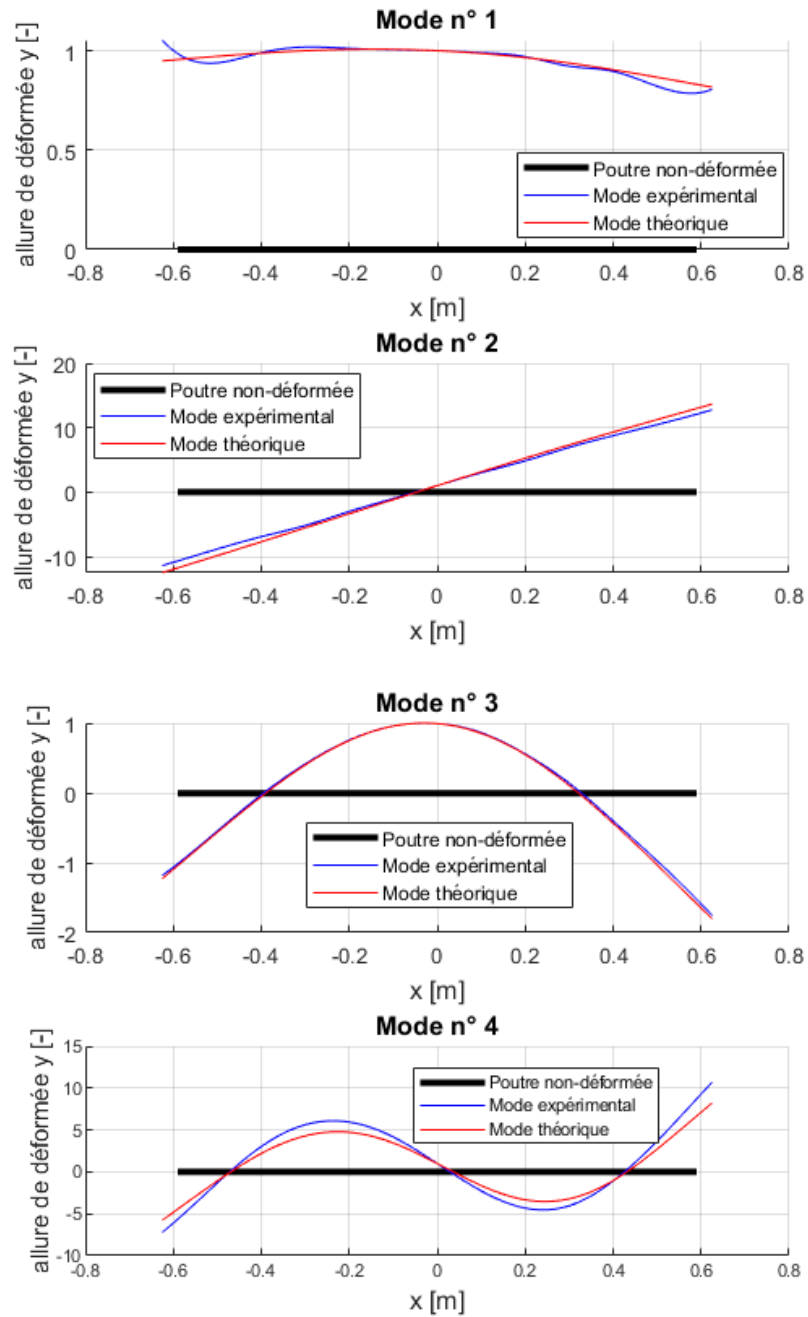
$$V_{max} = \frac{1}{2} \int_0^L EI_z \left(\frac{dv(x)}{dx}\right)^2 dx + \frac{1}{2} k(v(-0.59))^2 + \frac{1}{2} k(v(0.59))^2$$

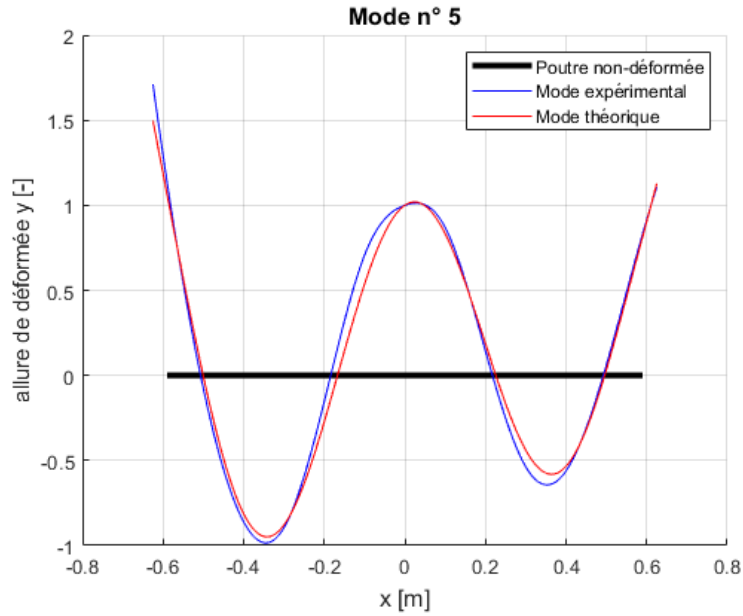
On en déduit l'expression d'un élément k_{ij} de la matrice de raideur K donc on peut déterminer entièrement la matrice K d'ordre 10.

Table 1.- Fréquences naturelles

Mode n°	Fréquence (Hz)	2 DDL (Hz)	Erreur relative (%)	Rayleigh-Ritz (Hz)	Erreur relative(%)
1	8.3460868	8.5951	2.9	8.3016	0.533
2	13.290707	13.5612	2.03	13.4661	1.319
3	59.560333	-	-	62.2554	4.5249
4	158.00279	-	-	159.6533	1.0446
5	308.2425	-	-	325.2437	5.5155

2 Figures - 5 premiers modes





3 Conclusion

Les fréquences naturelles prédites théoriquement sont assez proches des fréquences mesurées expérimentalement. Sur les figures, les modes se superposent pour la plupart. Les 2 premières fréquences mesurées avec la méthode de Rayleigh-Ritz (8.3016 et 13.4661 Hz) se rapprochent plus des résultats expérimentaux que les 2 fréquences mesurées en considérant la poutre comme rigide et le système comme étant à 2 degrés de liberté (8.5951 et 13.5612 Hz).

Bien que les 2 premières fréquences naturelles approximées avec la méthode de Rayleigh-Ritz sont proches des résultats expérimentaux, l'erreur relative de calcul avec la méthode de Rayleigh-Ritz commence à augmenter dès la 3e fréquence (elle est de 4.5249%). Elle est de 5.5155 % pour la 5e fréquence ! De plus, on peut observer un écart entre les modes théoriques et expérimentaux sur les figures des mode n°4 et n°5 (modes de flexion).

Ces erreurs peuvent être dues au fait qu'on considère les masses comme rigides, dotées chacune d'une inertie ou bien qu'on fait l'hypothèse d'un mouvement synchrone.

Les erreurs peuvent aussi venir du choix de fonction d'approximation : on a choisi d'approximer $v(x)$ par 10 fonctions de forme mais on aurait très bien pu choisir plus que 10 fonctions de forme. De cette façon, on aurait décrit la déformée de manière plus précise.

Il n'y a pas de conditions limites cinématiques qui permettent d'exprimer l'approximation de la déformée avec plus de précision.