Difficulté des exercices : * facile ; ** moyen (niveau examen) ; *** difficile

Exercices

Exercice 1 L'accident, très difficile ***
Cet exercice, assez difficile, fait partie des "classiques EPFL" car il est basé sur une demande d'expertise réellement demandée à un professeur de physique.

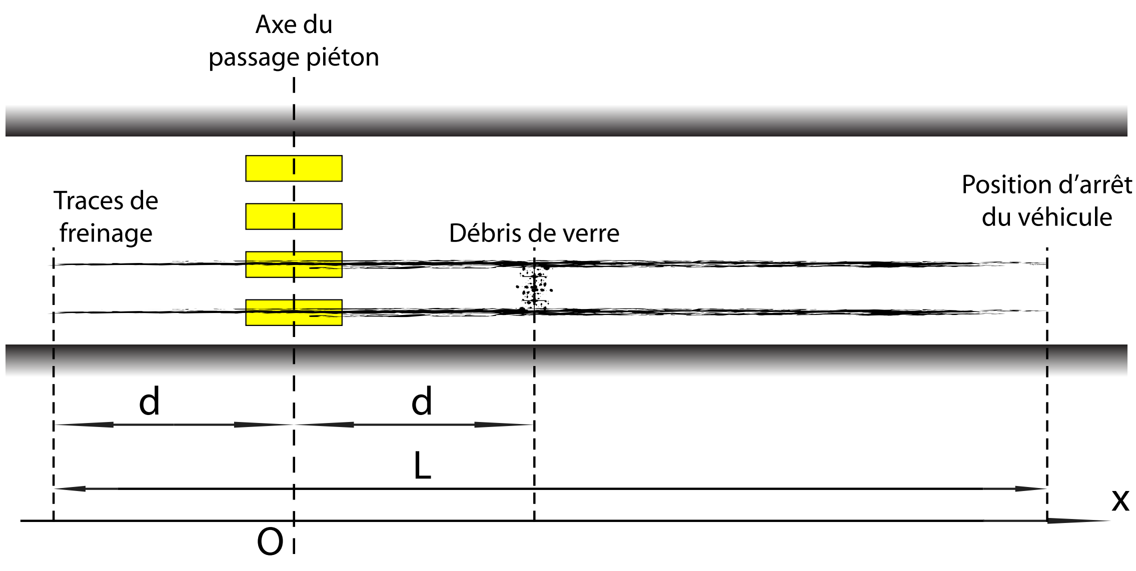
Un accident de la circulation survient dans une rue de Lausanne : une voiture renverse un piéton. L'enquêteur appelé sur les lieux constate :

- deux traces parallèles de freinage d'une longueur de 60 m et commençant 15 m avant l'axe du passage pour piétons (largeur 4 m) ;
- des débris de phares à 15 m après l'axe du passage ;
- les phares de la voiture sont à une hauteur de 1 m ;
- la voiture peut avoir une accélération de freinage de -5.2 m$\cdot$s^{-2}.

Quelles sont les responsabilités (vitesse du véhicule et position du piéton par rapport au passage au moment du choc) ?

Solutions

Solution 1 Schema :



L'origine des positions est placée sur l'axe du passage piéton.

1. Analyse des traces de freinage – équation horaire du mouvement de la voiture. On prend l'origine des temps au moment où la voiture commence à freiner.

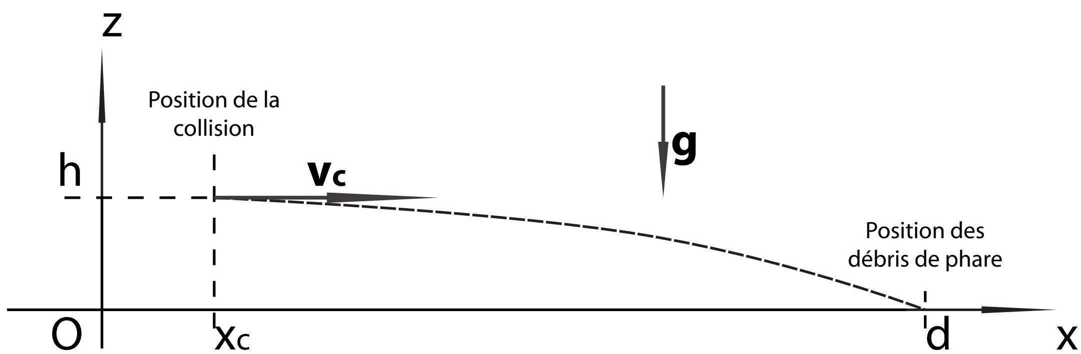
   Conditions initiales : à $t = 0$, on a $\begin{cases} x(t=0) = -d \\ v(t=0) = v_0 \end{cases}$

   Conditions finales : à $t = t_f$, on a $\begin{cases} x(t=t_f) = L - d \\ v(t=t_f) = 0 \end{cases}$

   où l'on définit t_f comme étant l'instant où la voiture s'arrête.

   Le mouvement est rectiligne, uniformément accéléré (accélération négative, car opposée au mouvement), d'où :
   $$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -a$$
   On intègre une fois pour trouver la vitesse : $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -at + cte$, avec $cte = v_0$ (voir conditions initiales), ce qui donne :
   $$v(t) = -at + v_0 \tag{1}$$
   On intègre une deuxième fois pour trouver la position : $x = -\frac{1}{2}at^2 + v_0 t + cte$, avec cette fois-ci $cte = -d$, donc :
   $$x(t) = -\frac{1}{2}at^2 + v_0 t - d \tag{2}$$
   On souhaite calculer v_0. Une technique consiste à écrire les équations horaires (1) et (2) pour $t = t_f$: (1) donne
   $$0 = -at_f + v_0 \tag{1'}$$
   et (2) donne
   $$L - d = -\frac{1}{2}at_f^2 + v_0 t_f - d \tag{2'}$$
   On a deux équations pour deux inconnues v_0 et t_f : on peut résoudre.
   De (1′) on tire que $t_f = \frac{v_0}{a}$. Reporté dans (2′), on détermine que
   $$v_0 = \sqrt{2La}$$
   A.N. : $v_0 \simeq 25$ m·s^{-1}, soit 90 km/h ; $t_f = 4.8$ s. La voiture roulait trop vite !

2. Analyse de la position des débris de phare – équation balistique de leur chute.



Conditions initiales : soit t_c l'instant de la collision, x_c la position sur Ox de la collision (position de la voiture à t_c), et v_c la vitesse des débris (vitesse de la voiture à t_c). On a donc :

$$\begin{cases} x(t=t_c) = x_c = -\frac{1}{2}at_c^2 + v_0 t_c - d \\ z(t=t_c) = h \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_x(t=t_c) = v_c = -at_c + v_0 \\ v_z(t=t_c) = 0 \end{cases}$$

Conditions finales : soit $t = t_a$ l'instant où les débris touchent le sol.

$$\text{On a : } \begin{cases} x(t=t_a) = d \\ z(t=t_a) = 0 \end{cases}$$

On écrit les équations du mouvement. On effectue à partir de là un changement de référentiel du temps. $T = t - t_c$

Selon Oz , les débris de phares ont un mouvement de chute libre. L'accélération constante $-g$ est comptée négative car opposée à l'axe Oz. Ainsi :

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -g$$

1**ère** **intégration :** $v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -gT + cte$, avec $cte = 0$ (conditions initiales). Donc :

$$v_z = -gT \tag{3}$$

2**ème** **intégration :** $z = -\frac{1}{2}gT^2 + cte$, avec $cte = h$ (CI). Donc :

$$z = -\frac{1}{2}gT^2 + h \tag{4}$$

Selon Ox , il n'y a pas d'accélération, d'où :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

1[ère] **intégration :** $v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = cte$, avec $cte = v_c = -at_c + v_0$ (CI). Donc :

$$v_x = -at_c + v_0 \tag{5}$$

2[ème] **intégration :** $x = (-at_c + v_0)T + cte$, avec $cte = x_c - (-at_c + v_0)t_c$ (CI) [*]. Donc :

$$x = (-at_c + v_0)T + x_c \tag{6}$$

On souhaite connaître x_c. On écrit alors les équations horaires pour $T = T_a$. (6) donne

$$d = (-at_c + v_0)T_a + x_c \tag{6'}$$

(4) donne $0 = -\frac{1}{2}gT_a^2 + h$. On en déduit $T_a = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ (temps de chute : 0.45 s), et (2) à $t = t_c$ donne :

$$x_c = -\frac{1}{2}at_c^2 + v_0 t_c - d \tag{2''}$$

(6′) s'écrit finalement : $d = (-at_c + v_0)\sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{1}{2}at_c^2 + v_0 t_c - d$
Cette équation est du second degré en t_c :

$$t_c = \frac{-v_0 + a\sqrt{\frac{2h}{g}} \pm \sqrt{\left(v_0 - a\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2 - 4\frac{a}{2}\left(2d - v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)}}{-a}$$

Sa résolution numérique donne $t_c = 0.93$ s (solution physique telle que $t_c < t_f$).
Cette valeur reportée en (6′) donne la valeur de x_c : 6 m
Le piéton traversait donc en dehors du passage!!!

*. À $t = t_c$, $x = x_c$. On a donc $x_c = (-at_c + v_0)t_c + cte$ et donc $cte = x_c - (-at_c + v_0)t_c$