A Course in Parametric Statistics

韦博成编著

高等教育出版社

参数统计教程 A Course in Parametric Statistics

韦博成编著

高等教育出版社

内容提要

本书为概率统计专业的研究生教材，全书共分八章，比较全面系统地介绍了:常见 的统计分布，充分统计量和信息函数，点估计的基本理论和方法，假设检验的理论、方 法及其应用，区间估计及其应用，Bayes统计推断的基本概念和方法等。本书也可作为经 济金融.生物医学、管理科学、工程技术等专业研究生的教学参考书，还可供相关专业 的大学生、研究生、教师、科技人员和统计工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

参数统计教程/ 韦博成编著.一北京:高等教育出版 社 , 2006.11

ISBN 7-04-020054-6

I .参... n.韦... in.数理统计-高等学校-教 材 IV.0212

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第 120772号

策划编辑杨波 责任编辑高尚华 封面设计李卫青 责任绘图尹文军 版式设计史新薇 责任校对王效珍 责任印制陈伟光

出版发行 社 址 邮政编码 总 机

经 销 印 刷

开 本 印 张 字 数

高等教育出版社 北京市西城区德外大街4号 100011

010 - 58581000

蓝色畅想图书发行有限公司 北京宝旺印务有限公司

购书热线 010 - 58581118 免费咨询 800 一 810 一 0598

网 址 http://www.hep.edu.cn

http://www.hep.com.cn 网上订购 http://www.landraco.com

http://www.landraco.com.cn 畅想教育 http://www.widedu.com

版 次 2006年11月第1版

印 次 2006年11月第1次印刷 定 价 35.90元

787 X 960 26.25

440 000

1/16

物料号 20054-00

刖

本书为概率统计专业的研究生教材，比较全面系统地介绍了数理统 计的基本原理、基本方法及其应用。本书也可作为经济金融、生物医 学、管理科学、工程技术等专业研究生的教学参考书，还可供相关专业

的大学生、研究生、教师、科技人员和统计工作者参考。阅读本书需要 有数学分析、线性代数，特别是概率论方面的基础知识，但不需要测度 论方面的知识。掌握本书的内容，即可进一步学习统计学其他各分支的 理论与方法，也可比较顺利地理解其他学科中用到的统计学基本概念。

本书定位为“ 中等水平、便于阅读、内容充实、有一定特色” 的 教材。希望在不很高的起点上，对数理统计的基本理论和方法有比较清 楚、深入的阐述，对数理统计的实际背景和应用有适当的介绍。全书共 分八章，包罗了通常高等数理统计的主要内容。第一章介绍常见的统计 分布及有关问题，也介绍了非中心r 分布、带有多余参数的指数族分 布等内容;由于任何统计问题都涉及统计分布，因此本书单列一章，用 较大篇幅介绍这方面的内容，这使仅有本科概率论基本知识的读者，对 数理统计的研究对象有更多的了解，以便于后面集中精力去领会数理统 计的基本概念和方法。第二章介绍充分统计量和分布族的信息函数 ，也
介绍了 Basu定理、Kullback信息等内容;本章内容也相对较多，因为 几乎任何统计问题都与充分统计量、样本信息等基本概念有关，本书也
单列一章，用较大篇幅比较系统地介绍这些基本概念，这对非数学专业 的读者进一步学习数理统计可能更加有用。本书第三至第五章介绍点估 计的基本理论和方法，第三章介绍常用的点估计方法，也介绍了不变原 理、子集参数的似然等内容，同时也配备了比较丰富的例题与习题;第 四章单列一章，以比较初等的方法系统地介绍了 “ 同变估计” 及其求 解方法;第五章介绍点估计的基本性质，也介绍了广义C-R型不等式
等内容。第六章篇幅最大(与点估计的3 章相当)，比较全面系统地介 紹了假设检验的基本概念、基本理论和基本方法，并附有较多的应用方 面的例题与习题;本章还比较详细地介绍了有广泛应用价值的score检 验统计量。第七章介绍常用的区间估计方法及其应用，也介绍了单调似 然比分布族参数的区间估计方法。第八章以较大的篇幅介绍Bayes统计 推断的基本概念和方法，除了常见的参数估计与假设检验的Bayes方法

n 前言

以外，本章还从同变原理出发，比较详细地介绍了位置、尺度参数分布 族无信息先验分布的选取准则;同时也比较详细地阐述了 HPD可信域 的基本性质和求解方法。

本书初稿为我校研究生课程讲义，经作者多次讲授、不断修改、逐 步形成;在成书过程中又作了全面的充实、加工与修订。厦门大学王海 斌博士校阅了全书，并且提出了许多修改意见;香港中文大学博士生周 影辉仔细校阅了全书，并且帮助演算了本书习题，提出了许多修改意 见;博士生陆建也演算了部分习题;南京农业大学解锋昌副教授为本书
绘制了全部图形;研究生章珏帮助打印了全书初稿，特此表示衷心的感 谢!另外，在本书写作过程中，参考了国内外许多图书资料，受益匪 浅，一并对这些作者表示衷心的感谢!

本书在写作过程中，自始至终得到高等教育出版社的关心与帮助， 特别要感谢高等理工出版中心、数学分社的杨波同志，他们对本书的写 作、审定与出版都给予大力的支持与帮助，特此表示衷心的感谢!同时 也对审稿先生的厚爱与支持与表示衷心的感谢 !

由于作者水平有限，难免有不妥与谬误之处，恳请同行专家和广大 读者提出批评和建议。

韦博成

2006年 6 月于东南大学

目录

目录
m

第一章统计分布基石出

对于一个随机变量，其分布函数完全描述了它的概率结构.但在实 际问题中，分布函数常常是未知的.数理统计的中心任务，就是通过样 本观察值，对总体的分布函数以及由此产生的问题进行合理的推断.统计 问题的基本提法是:给定样本...，总;大多情形为独立同分布(即i. i. d.)样本，这时服从未知分布)或7^(%!)，0未知;如服从

正态分布，0=(jU,a2),或Poisson分布尸(A)等等.从样本X= ^ ，...，^出发，对未知分布或F/&)进行统计推断(诸如参数估 计、假设检验、回归分析等).因此，随机变量及其分布函数，既是统计推 断的目的，也是统计推断的基础.一切统计问题都离不开随机变量及其分布，熟练掌握这方面的知识，对学好数理统计并应用于实践是非常必 要和有益的，读者必须十分熟悉.关于概率论的基础知识，读者可参见 王梓坤(1979),李贤平(1997)以及严士健，刘秀芳(1994).

本章第1. 1节同顾了分布函数的基本性质;第1.2、第1.3节分别 介绍常见的离散型分布和连续型分布;第 1.4节介绍一元非中心厂分 布及其有关分布;第 1.5节介绍指数族分布以及带有多余参数的指数族 分布;第 1.6节介绍次序统计量的分布，并特别介绍了均匀分布和指数 分布次序统计量的性质.关于常见的统计分布，可参见方开泰，许建伦 (1987),Zacks(1981)，茆诗松等(1998).

1.1随机变量及其分布函数

1.1.1 分布函数与分布密度 给定n维随机变量X，其相应的概率空间记为X-(^BX9P)t其今设XeR1，则一元分布函数定义为

F(x) - P(X^x) = P | X e (- co，x]|.

， 民表示R"上的Borel域;尸表

中f 表示Rn上X的样本空间 示氏上对应于;V的概率测度，即对AeBx，尸(4)=尸表示X属 于X的概率.概率测度尸也常表示为Pe、Px或7^.

熟知，分布函数打幻为定义在(-00, +00)上的非降，右连续函数，且 有/X -00) =0, F(4-00) =1,并且满足 =F(X)，F(%-0)= P(X<x)，P(X =x) = F(x) - F(x -0);若 x 为 F(x)的连续点，则 P(X=x)=0.另外，单调函数F(幻可扩张为R1上的测度F(-)，且 有 F(4) =P(4)(见王梓坤,1979).

分布函数通常可分为绝对连续型、离散型和奇异型.若存在密度函 数/(%),使F(x) = f /(y)dy，F\x) =/(%),则称F(幻为绝对连续

J-

型，且有P(Xe4) = fAy)dy.若F(幻连续但不存在密度函数，则称

以幻为奇异型;奇异型分布实际中很少见到.若随机变量X 取有限或

可数个值，则其分布函数为离散型;这时P(X=xk) =pk k =

0，±1，±2，...， pk=1.例如Poisson分布:P(X=k) f(k)=e_A. k

Ak/k!=Pk(k=0，l，2,...).退化分布是离散型分布一个重要特例，这时 P(X=0) =1 = =1;其分布函数为

r1, %為0, F(%)左 A(x) \ 0, x <0

^F(x) =A(%-a) =Z \x^a j ,其中I \x^a |为示性函数.对于一个 集合?1，//%) I(A|定义为//%)=1, IA(x)=0, xeA.因 此，一般情形下离散塾分布的分布函数可表示为

F(x) = Y/>aA(%-xk) = ^pk = (1.1.1)

离散型分布的分布函数亦可表示为积分形式，今简要介绍Lebesgue - Stieltjes积分如下(可参见Cramer, 1946第七章和第九章;Rao, 1973第二 章).

以下介绍R1上的积分，Rn上的积分完全类似.给定R1上的有界函数 g(幻和有限测度/£

(•)，将一个有穷或无穷区间[a,6]分划为有限个互不相
交的可测集Ax■(i=1,•••,n)之和.对任一“分划”，记Sm= Z Ax.) t=1
和人=n I=I
Ax-) ，其中/£(AxJ为厶\的测度，% 和31,分别为发(%)
<X>
在△久上的下确界与上确界.若max |M(Ax,)|-^0时， 和^的极限存 1<n
在且相等，则其极限称为函数g(幻在区间[a,6]上关于测度M(.)的Lebe sgue - Stieltjes 积分，并记为lag(x)d^(x)或£容(幻/£(么). 以下介绍与
分布函数有关的两种情况.

1.1随机变量及其分布函数

3

(1)若/z(•)为Lebesgue测度，A%,-为区间，则 (Axt-)=A%,-为区
间长度;f客(幻如(幻= [g(x)dx 因此若F(%)为绝对连续型分布函 Ja Ja
数，存在密度函数f(X)，则有
F(x)= f f(y)dy= f /(y)d^Cy). J-oc J - 00
(1. 1.2)
(2)若为计数测度.设点列1有可数个值",xk，...， 计数测度表示4所包含点列(A I中点的个数.因此对区间厶久-0 有/u,(Ax() =1，若Ax-中包含-一个| }巾的点;/x(Ax,) =0,若A%i 不
包含1么丨中的点.对于定义在点列|上的函数g(x)， 则由Lebesgue - Stieltjes积分的定义可知fg(%)d/x(x) = g(xA).特别，对于离散 Ja,
型分布的分布函数F(x),由(1.1.1)式可知，若在点列1么|上定义计
数测度以及f(xk)
则有
= [oe/(y)dM(y)- (1.1.3) J~x
f(x) =
xk^x
比较(1. 1.2)式和(1. 1.3)式，通常把P(X=xk) =Pk =/(xJ称为离散型 分布的密度函数.例如Poisson分布的密度函数为f(xk) =e_A - XXk/xk\.
因此对于绝对连续型分布和离散型分布，一个函数的积分，即数学 期望可表示为
= J(/>(x)/(%)d^t(x) = J (/>(x)dF(%), 其中 dF(x) =/(x)dfji(x).
特别，概率P (A)可表示为P (A) = ^A(x)f(x)d^(X)
=^f(x)d/i(x) = ^dF(x).
另外，Lebesgue - Stieltjes积分可推广到n 维空间，可参见Cramer (1946,第九章).特别，若从(•)就取为概率测度P (•),则有
尸(4) = ^/A(x)dP(x) = j^d尸(%);.也有 E[(f)(X)] = l(f)(x)dP(x).

1.1.2反函数及分位数

在理论与实际问题中，经常要知道分布函数F(rr)的反函数的值， 即广 (p)的值，其中0 <p<l，(如p =0. 05,p =0. 95等);通常称为 分位数或分位点.由于F(幻非降，不一定连续，因此F_l(P)的值可能
不存在或不唯一.以下定义保证了分位数的存在性和唯一性.

定义1.1.1分布函数F(*)的p分位数或p分位点，定义为么▲ inf|%:F(%)彡pj . I
由下确界的定义知\ 存在且唯一.也容易证明，分位数\满足
数 ，它有以下重要性质.
定理1.1.1函数g(c) =E\X-c\在中位数C =〜5时达到最小值. 证明 设义的分布函数为F(x)，若c<%0.5, 则

由 C < X0.5 及 Xo. 5
的定义知尸
5
1
贝lj F(x,y) <p;若 ,则 F(xz)
i) 若X’<x”
ii) F(Xp-O)^P^F(Xp);若么为 F(x)的连续点，则 F(xp) =P. 常用的分位点有XQ05, %01, %0.9, %0.95，*0.5等-^0.5通常称为中位
g(c)= [\x-c\dF(x) J-00
(c ~%)dF(%) + (f +
'C) \ [崎5.+«)
x — c)dF(x)
UJ”〉-“0.5_c)]d～)+ Wo.5 0. 5
— c)dF(%) +
JLf.-Vfl, 5)
[(%o,5 - x) + 2(x - c) - (x0 5 ~ c)]dF(x) •
I '又0.5 |dF(x) + 2I
+(^0.5 -c)[P\X^)x0_5 \ -P{X < XO15 i].
[多+和p\X<%0.5I =Z*'(%05 —0)C
从而g(c)彡EIX-Xo5I ;反之，若c>x05,则 x - c| dF(x)
c) dF(x)
(x -c)dF(x)
第一章统计分布基础
- x)dF(x)
=L，, o<[(Xo.5 _X) + (c ~^0.5)]dF(x) + f [(x -x05) 厂 w ';o.5-
J(c, +00)
—(c-x05)]dF(x) +J(w][(%-x05)+2(c-x) -(C -^0.5)
x - x0.5 I dF(x) +2
(*0.5, c]
. x)dF(x) + (c -x0_5)[P |X XO5 I - P (X > x0.5 I].
由C X0.5及戈0.5的定义知PIX %05I 和PjX>%05I ，从而
1.1随机变量及其分布函数
g(c)^E\ | . 总之，对于任何 c, g(c)彡g(%05), 且当 c =%05
时等号成立.
1.1.3 特征函数和数字特征
画
分布函数虽然完全描述了一个随机变量的概率结构，但也存在一些 不能令人满意的地方.比如，只能保证分布函数是单调非降、有界、右 连续的，而不能保证它是一致连续和绝对连续的.因此分布函数的分析 性质并不完美，通常引进其他工具作为对分布函数的有益补充.
随机变量;V的数学期望或均值为E(X) =M;方差为Var(X) = a2, 而 <7通常称为均方差或标准差.矩母函数和特征函数分别定义为
E(e<A)和平(1)E(ek") =M(k).常用的性质有
i) M(A)(0) =E(Xk) a,,, (8).=i、, E(X” =i_VA)(O);
ii) 戶(1)=1十玄～替，M(t) = 1 +
iii) 给定随机向量= (^, , 其分量&,•••, 6 相互独立的充 要条件为
^(zi, ...人)“)%(G)“J. 由性质ii)可知，特征函数和矩母函数的Taylor展开式的系数

为随
机变量X 的各阶矩.近年来，特征函数对数的Taylor展开式的系数也经 常用到，今介绍如下.
定义1.1.2累积量(cumulant). log^(t)的Taylor展开式的系数称 为累积量，若
log<p(t) = Kr
则系数久称为r 阶累积量或半不变量. 随机变量X的累积量xr与其各阶矩a,有密切的关系.其常用性质有 0 累积量与各阶矩可互相表示.其前3 阶矩的关系为:
K\=«], k2=爪2= -EJQ2, K3=a3-3axa2+2(a1)3; ~=/<,, a2 =k2 + (k,)2, a3 =k3 +3x^2 + (kJ3;
■
ii) 若又，K独立，则有xf(J+r)=Kr(X)+Kr(Y); iii)Kr(X+C)=xr(X),(r>l),其中C为任意常数. 以下数字特征也是统计学中常见的.
随机变量X 的三阶中心矩与四阶中心矩分别反映了密度函数的偏
度与峰度.其定义如下:
偏度系数y,左a3/a3;峰度系数心左a4/cr4 -3;其中afc =E(X-
 EX)\ <r2=Var(X).容易验证，若X为正态分布，则有y. =0, y2 =
0.因此正态分布可作为偏度与峰度的比较标准.另外，密度函数的峰
值称为众数(mode). 以下与条件期望有关的公式非常重要，今后将多次用到.
E(X) =Er |E(XIT)) ; (1. 1.4) Var(X) =Er ! Var(XIT) ! + Varr j E(XIT)). (1. 1.5)
另外，若x=(弋，...,xjT, /=(/.,-.,rjT为随机向量，则其期望 与方差定义为 E(X)
▲ (EX,, ..., EXJT,Cov(X, r) (cr,)nxm; a. = Cov (弋，[);Var(X)4:
Cov(X,J)nxn.随机向量的期望与方差的常用公式有
i) Cov(x, y) =e[(x-EX)(y-Er)Tj =e(xkt)-(ex)(ek)t; Var(X) =E(XXt) -(E^XEX)1;
ii) Cov(儿V, By) =4Cov(X,y)BT;
iii) E||^H2= ||EX||2+tr[Var(X)]; (1. 1.6)
/X,\ •
iv) 设;V= 1, 则 Var(J)=
\X2) 1.1.4 经验分布函数
(Var(X,) Cov(A,X2)、
.
易见，经验分布函数可表示为
F„(x)
j=1 iTl
(1. 1.7)
其中I , ...，圪为独立同分布，取0，1两个值的随机变量;即P{Yi = 1) =P \X^x } =F(x), P(y, = 0) = P) J,. j = 1 -F(x).并且有 E(yj =F(x), Var(y.) =F(x)[l
定理 1. 1. 2 若 Xx ,Xn 为 i. i. d.样本，X] ~ x), 则对 Vx 有 (1) ^(x)-►/'(%)(a.e.);
(2) V^(Fn(x) -F(x))^/V(0,F(x)[l - F(x)]), 其中(a. e.)表示几乎处处收敛，l 表示依分布收敛.
卜(3)人) Var(J2) J
经验分布函数是分布函数很好的近似.考虑独立同分布的样本久，
...，X, ,，这时X,服从未知分布F(x) ^x).给定记匕表示 X,，"•，叉中名a;的个数.易见，概率F(x) =P(X, 可用频率匕 来逼近.

定义1.1.3给定独立同分布的样本X,, ..., 总和*, 经验分布函数 定义为 F„(x) rT乂.
|

证明 由(1.1.7)式, Fn(x) =n'1 nn
Yi—根据强大数定律有
n12 K一)—*0(a.e.),即n_1
i^\ i=l
Yi =F'n(x)—►
—^^(0,1),
九W,l),
=F(x)(a.e.).
由中心极限定理有
nFn(x) -nF(%) /nF(%)[l - F(%)]
4=1
- F(x) | l/V(0, F(幻[1 -尸(幻]). I
这个定理表明, 经验分布函数是样本分布函数很好的近似.更深人 的讨论可参见陈希孺(1981,1999).

1.2常见的离散型分布

本节介绍若干常见的离散型分布, 其分布函数与密度函数的关系可 参见(1. 1.3)式.

(1) 单点分布(退化分布).

即X以概率为1取常数a: P(X =a) =1.其分布函数为F(x)= 1 | %> a |.

(2) 离散均匀分布X—U(m).

即X等可能性地取1,..., zn之中的任何一个值:P(J = i) = l/m, *: = 1, ..., /n; 这相当于从有标号1, ..., m的m个球中任取一个球.其密 度函数为:P(x, m) =\/mI
W^x^m (, 但*取正整数.X的期望与方 差分别为 E(J) =(m + l)/2, Var(X) = (zn2 —1)/12.

(3) 两点分布X〜6(1, 6>).

即X仅取0, 1两个值:P(X=1)=6), P(X=0)=1-6.实际问题 中, 1 = 1表示某事件4成功、发生, 或某产品为次品等情形;J=0表 示某事件4 失败、不发生, 或某产品为正品等情形.X的密度函数为:
p(x,e)=^(1 -ey-\ x=o, I.该式可化为指数形式: p{x,0) = ex[o^0+<-1 1 _
e*i«grS+i»g(i -«)
其中10g
n
n 常记为一 h(幻, 它表示成功概率与失败概率之比的对数.

易见0<0<1时有-00 <log it(^) < +00, 其变化范围为整个数轴, 应
用上比较方便. 两点分布的特征函数为^(0=(1D+M,并且有E(X)=0,
Var(X) =0(1 -0). (4)二项分布 X ~ b{n, 0).
X 表示71次相互独立的试验中事件4 发生(或成功)的次数, 而事 件4发生的概率为
p(4)=0.因此p(x =o =Q^,(1 -oy'\并记为
b(i\n,0). X 的密度函数为
p(x,0) = j^x(l -0)n~x, x =0,1,..., n.
二项分布有以下主要性质:

i）重要分解.二项分布又可表示为独立同分布的两点分布X,, ..., 叉之和.即
x = y x = fl,第/次试验A发生， i9 io,第Z次试验A不发生
其中苓～6(1,|9)为两点分布.由此分解式可推出二项分布的许多基本 性质，例如
ii）E(X) =n6, Var(X) = n3(1 - 0);
iii）特征函数=[(1-0)+知门n;
iv）可加性，即若 ~6(nt.,6>), /=1, 2,且独立，则X,+X2- ㄙ(久 +n2l0);
v）(X - -6)的渐近分布为标准正态分布7V(0，1)（当n—► + oo).
以下介绍二项分布的分布函数以幻的计算公式，F(幻 =P(X^x)
=[x]
b(k | n,0)，其中[*]表示x的整数部分.今记B (i | n, 0) 4=0
i
=26(左卜，沒)=F(i): F(f)与不完全函数有密切关 i=0
系.今简要介绍如下.
熟知，芦函数定义为【xp~l(1 -x)g'1dx =/?(^,p);它可
由r 函数表示为p(ptq)=r(p)r(q)/r(p ”)，其中r 函数为r(P)= 不完全函数定义为:
,
1.2常见的离散型分布 9 (1.2.1)
不完全夂函数有以下主要性质(见习题): i)夂(P，9) + =1;
(1.2.2)
ii）2^ |n,0) =//i,n-i+1); (1.2.3)
iii）B(i| n =F(i) =1 - i+1，n i) = _9(n-i9i+1). (1.2.4)
上式可表示为:P0(X^i) =P(Z>0),其中Z服从/?分布BE(“ l,n-O(见后面连续型分布).
(5）几何分布X-g(i\e)或Z～G(a). ;r表示首次成功所需试验次数.因此有P(x = g(i l^)=
0(1 -0)l_',/=l，2，"、，oo.直接计算可知
i）特征函数(p(t)=0elt(1-eu7)_1, q=1-❷;并且有E(X)=
0-'，Var(X) =(1 - 0)❷
ii）几何分布有无记忆性，即P(X〉n+/n|^>n)=尸(又>爪).（6）Pascal 分布 X-PA(ry6).
X表示取得r次成功所需试验次数，易见r = l时，P4(l，60即为几
何分布 ❷).并且有 p(x = o pad \ r，e) -oy~r,i^
r. Pascal分布有以下基本性质: r
i)X = Z X，，其中X,, ..., ^为i.i.d.，^为第A-1次成功到第女
次成功所经历的试验次数，因此Xk-PA(l,e) 为几何分布;
ii）E(X)=n?-1，Var(X) =r(l -6Q6T2;
iii）可加性(包括几何分布).即若X, -PA(ri90), i = 1, 2 且独 立，则有A +义2～/M(r, +r2j).
(7)负二项分布X～NB(r，e). 若Y-PA(r.e),则称X=Y-r服从负二项分布NB(r，❷).J表示r
次成功所经历失败的次数.
P(X = i) i nb(i | r,0)
ord -ey9
Z=0，l，2,.... 以上概率为a (1 - q)-T展开式中9的第i项系数， ? = 1-6>，因此称为负二项分布.它有以下基本性质:
i）x-NB(ite),贝yx+i～<?(60;

第一章统计分布基础
ii) X= YXk，其中Xx,•••,Xr为i.i.d.，Xx ~NB(1,6); A=1
iii) 特征函数<p(t)=^r(l-eltq)_f, q=1-6;并且有
E(X) = ~1(1 -0) jjl, Var(X) =r^_2(1 -0) =//,+r_1)u2;
iv) 可加性.即若X^NB^r^O), /=1, 2且独立，则X1 +X2
NB(r} +r2,6);
v) P(X^i)=NB(i\r,e)=//r,i+l)(其证明类似于(1.2.3)式).
(8)超几何分布 W件产品，有M个次品，不放回抽取71件产品，X表示次品的个
,,
数.因此有 P(X = f) h(i\n;N1M) = . (/L
基本性质:
i) E(4) =n云， Var(X)=
M N-M N-n /V - N ~ TV - 1 ;
. /M\/N-M\ //N\
• 它有以下
ii)若n//V很小，则P(X=i)«6(r|n,7V-,M),即可化为次品率 M/N不变，有放回的抽样.
(9) Poisson分布X~P(A).
= 0 p(ilA) =e-AAVil9 其密度函数为 p(x9A) =e-AAx/x!.
它有以下基本性质:
i) 特征函数 =e_A(1-ei9, E(X) =A, Var(X) =A=E(X);
ii) 分布函数F(i) =P(X^i)可由不完全厂函数r(A,i + l)表示为
e~xxldx/V(i + 1) = P(Z > A) ▲ r(A ,i + 1),
(1.2.5)
其中z 服从厂分布r(i,z + 1)(见后面连续型分布，其证明类似于 (1.2.3)式);
出)可加性.即若X. -P(A.), i = l, 2且相互独立，则弋+X2~P (A] +A2);
iv) 密度函数p(%,A) =P(X =x)为*的增函数，若*<A; 为a:的 减函数，若x>A;
v) 条件分布.若Z=l,2且相互独立，则(孓\X{+ x2=^)服从二项分布b(k為)，其中 =A,/
(A1+A2),i=l,2;
vi) 当A->+oo时，(X-A)/a/T的渐近分布为标准正态分布7V(0, l). (10)多点分布 X
= (A\, ...,)T ~Af/V(1, 77) , 77 = (77,,..., 77\)丁;
X和77为A:维向量.
1.2常见的离散型分布
假设有A:个事件久，^ , ...，么为样本空间的一个划分，即这个事 k
件两两不相容，尸(A‘)=7Tif1=1,...J且有=1- X满足 1=1
rl,试验中岑出现， X = J10,试验中不出现
= 1.
i=1 易见，若“ 2,则X即为二点分布:A
基本性质:
0 密度函数P(X、, x2,..., \) = TFi1^ 2...Trp, !;,, ..., X*中只有一个为
1,其他为0;
ii) Xi ~ 6(1 ,7rJ , E(X-) =7rt, i = 1, ..., k, 且有
z、 CoW ;)=
-^i) ,
i =/ .. 的
,
;

Hi)期望与方差的向量形式为
E(X) = 77, Var(X) = diag(-tt) - 7T7rT,
其中diag(7r) =diag(7rI, ..., ttJ 为k阶对角阵.
(1. 2. 6)
J}- Jki 易见，若&=2，则X即为二项分布6(n,7?!); 7r2=1- ;若n=1，则
X为多点分布MN (1, 77).多项分布有以下基本性质: i) 其密度可表示为
= xT-L ,^, , , , 7r^5 = n. x] • xk• i=1
ii) 重要分解.多项分布1=(冬, ..., Xa)t可表示为独立同分布的 多点分布之和.即
=n r =(町, ..., 吖, ...,
X
m=1
O r. (1.2.7)
其中x1, ..., x\..., ;r 为独立同分布的多点分布，xl ,且有 1，第饥次试验岑出现，
0,第m次试验4,不出现， 也有 ~ 6(n,77,) : -6(1) ; i = 1, ..., k, m = 1, ••• ,n.
-77, '
,
(H)多项分布X= , ..., XJT ~MTV(a, 77). 条件及符号与多点分布相同，但X:表示ri
次试验中次出现的次数
“ =1, ..., 幻，因此有
P(Xi =人, ..., A =A)=
9 人 + ...+人=n.
1
,
=4, A2 =A.多点分布有以下
iii) E(X)=H77, Var(X)= diag(77)-tt7TT],因为X=
Xm ~扁(1,77).
iv) 特征函数为
p(1) =E[e,xTt] = E[e1
v) 条件分布(与Poisson分布的关系则).
;=i
~腳(n, rr),其中77=(TTj,..., 77a)t, TTi=A/
若xt-p(At)f i =
i,
相互独立,
k
表1.2. 1列出了常见的离散型分布(可参见方开泰，许建伦,1987; Zacks, 1981;茆诗松等,1998;Shao, 1998)♦
表 1.2.1 常见的离散型分布
1/m, X=1,•••,771
又 e'k,/m = e'f(1 - eiml)/[/n(l - e")]
离散均匀分布 密度函数
特征函数 k=1
U(m)
期望 (m + l)/2 方差 (m2 -1)/12
(1 -0) +加if
期望 0

方差 0(1-0)
两点分布
b(\,0)
二项分布 密度函数
b(n,0)
几何分布
Q^(i-e)n~\ x=0, l, 2, ..., n
特征函数 [(1 -6) +0eiiy
期望 n❷
方差 n0(\ -6)
密度函数 0(1 -ey-\ x=i,2,, ..., 00
C(9) 期望 方差
Pascal分布
密度函数 特征函数
(二卜-『 [加ix(i -ek(i -e)y
密度函数 矿(1
x=0, 1
特征函数
特征函数
0e“[l - (1 -0)e“]
0~'
(i -o)e~2
] = [ir{eUx + ••• + 7rkeltk]n.
k
,
x^r
第一章统计分布基础
,
+ ...+A=n|
A;, i=1, ..., k.
m=1
1.3常见的连续型分布
13
PA(r, 0)
期望 r0~l
方差 r(i -e)e~2
续表
Xx = 0,1,2,-
负二项分布 密度函数 特征函数
(厂+: 1 -
賦 r , ❷)
超几何分布 密度函数
Poisson 分布
P(A)
方差 密度函数
特征函数
M N-M N-n UN N N-\

e A- x=0, 1, 2,... x\
exp (-A(1 -eu))
多点分布 密度函数
k
X X>=1
壓（1，77）多项分布
壓（n,77)
特征函数 7T、e'f, + ••• + TTkettk 期望 TT
方差 diag(7T)- 7T7TT 密度函数 nl
*
V -JI
;
矿[1 -(1 -W]-r
冰_1(1 -0) re~2(l -0)
期望 M nN
期望 方差
期望 A 方差 A
特征函数
(77)eu, +...+irke'，k)n
/ M\/N-M\ / / N\
/ ，max (0, A/ + zi - TV)
八\m)/ \n) 矣x矣min( )
期望 mr
方差 ra[diag(tt) -]
1.3常见的连续型分布
本节介绍若干常见的连续型分布，其分布函数与密度函数的关系可 参见(1. L2)式.
7T,1 ... 77:

(1)均匀分布x～Rd，e2).其密度函数和分布函数分别为
I ❷、
o, 其他， x < 沒,，
❷ <02，
x^02.
，/卜».
均匀分布有以下基本性质:
i) E(X) =(^j +^2)/2=/,l + cr/2 ; Var(X) = ( )2/12 = <r2/12 ; ii) R(0},e2)=0, +(e2 即若 y~/?(o,i),则又=
A+(么～尺(A為);反之，若x~r(h)，则 (x-A)/(6 -h) =y~尺(o,i);
iii) 若X-F(x)为连续型分布函数，贝IJ Y = F(X) ~/?(0,1);反 之，若 r～尺(o,i)，Mx =r-,(y)
这一性质有广泛的应用.若x～尸(幻，X,，...人为其i. i. d.样本，
取次序统计量(4)x(1)^x(2)彡...cv(4)，贝u r(1)=尺(x(1))，y(2)=
为均匀分布/?(o,i)的次序统计量，这些次 序统计量有很好的性质，见1.6节.
另外，根据以上性质可由均匀分布7?(0，1)的随机数，产生分布 M 幻的随机数，见以下例题.

例1.3.1由均匀分布7?(0,1)的随机数，产生指数分布的随机数.
解 设服从指数分布X~F(x) = (1 -e_Ax)Z (x^O | ,记为X～ E(入)•先求其反函数:y=1 -e"As, x= -A~1log(1 ~y) =F'1(y), o<y<l.故由性质iii),若y~/?(0,l),则X=F~l(Y)= -A_1log(l- y)～E(A)为指数分布.因此，由y～7?(0, 1)的随机数可产生指数分布 尤～e(a)的随机数.特别，由x= -iog(i -y)可产生x ~e(i)的随机数.一般讲，常见连续型分布的随机数皆可由均匀分布/?(0, 1)的随机 数产生. |
F(x, ❷', ❷2)
x - ❷' -e}
.1 , 标准均匀分布为X~7?(0, l),这时/(x) =Z
0,
i.另一种常见 的形式为X～其中M为位置参数，o■为尺度参数;/(幻=
(2)指数分布X^E(X).其密度函数和分布函数分别为
1
沒2 -❷I
ex ^x^e29

%—AX /\
{e ’ ’ F(x,A) =(1 -e_Ax)/ U彡0 !.
0, x <0,
指数分布有若干常见的形式.A =1时为标准分布:X~E(1) , 其密度函 数为/(x) =e~Xl\X^0);记A=67^, 则ct为尺度参数，这时有/(x)= a~le~x/aI (x>0 [.
指数分布有以下基本性质:
i) E(X)=A_1=cr, Var(X)=A 2=a2;
ii)若 K~/?(0,l),则又=-log(l -K) -£(1), Xf = —log(y)～£(1)(例 1.3. 1 中 A =1);
iii)无记忆性:P(X>s+t\X>s) =P(X>t); iv)与Poisson分布的关系.设弋为(0, G时间内的故障数(或电话
数)，通常弋服从Poisson分布P(AO,则首次故障(或电话)出现的时
间 Y-E(X).因* P(y>0 =P(Xf =0) =e'At,
1 -e~At =F(t) -£(A). 或
(3)带有位置参数的指数分布AT~E(A
若X-E(l) ^e~xI\x^0 | 的指数分布，其密度函数为
1 x-科
/(x;A,^)=—e~~I\x^p.}, A=<t_1, (1.3.1)
其中A为位置参数，a = A_1为尺度参数.当/i=0时，叉～£(A).特 别，当<7=1时，X～M+£(l) 4(1, 科)，其密度函数为
/(X) = e_(x'A)/ J . 对于分布X~£(A久)，A 其期望和方差分别为
E(X) +a=i±+A_1, Var(X)=a2=A~2. (4)位置尺度参数分布族X~P^ 或
如果x的分布密度可表示为 ,则称x服从位置尺度参 数分布，其中/(幻为某一密度函数.若CT = 1,即X-f(x-fZ),则称X 服从位置参数分布;若M=0,即则称X服从尺度参数分布;若/x=0, a=l,即X-/(%),则称X服从标准分布.易见，正 态分布X~/V(^,o-2),均匀分布+ ,指数分布)等都 是位置尺度参数分布族.
容易验证，若则7=^服从标准分布P(01);反之， a
, m)
,则y = aX+M服从带有位置尺度参数
故尸(y彡0 =

A=a'

若^~P(0J)，则r = 服从一般位置尺度参数分布这些转换关系都是经常用到的.

以上定义可推广到更一般的情形.如果样本X = (X,，...,XJT的密度函数可表示为以下形式，则称它服从位置尺度参数分布:

其中1=(1,•••，1)T.类似地，若则

Y =

服从标准分布

a ^(0.1);反之，若又~尸(。,1>，则Y=aX+^l服从一般位置尺度参数分布 尸(10).

(5) 正态分布X~/V(M，a2).其密度函数为

/(x;/i，a2) =—^—e-^(x^)2. cr y/2qr

正态分布是概率统计中最为常见的分布，又称Gauss分布.^=0, a = l 时为标准正态分布，其密度函数和分布函数常记为ph)和(P(x').

正态分布的常用性质有:

i) 特征函数小(1)=e～_a2'2/2, 并且有:

E(X) =#，Var(X) =(72, E(X-m)3 =0, E(X-m)4 =3<r4. 因此正态分布的偏度系数7l=0,峰度系数y2=0.

ii)<p(x)=<p(-%); 0(x)=1-0(-x).特别，若记标准正态分 布的a分位点为2a，则有-心 另外若X~/V(M,a2),则X的a 分位点为xa -yu + aza.

iii) 若1 ，...，叉为独立同分布的标准正态分布，则其平方和服从 ;t2O)分布.

iv) 任意个正态分布的线性组合仍然服从正态分布. (6) 对数正态分布X-LN(^,a2).

若lo^X = Y^N(^ya2), X>0,则称X服从对数正态分布.其密度 函数为

f(x^,a2) =— e-^(M-^2z jx>0 xa v2tt

注意对数正态分布与正态分布的不同点:对数正态分布的密度函数曲线 是偏态的，而且其取值范围仅限于x>0;其期望和方差分别为

E(X)=e"+*2, Var(AT)=e2"+"2(e"2—1). (7) t分布X~t(n).

若x=r//Z^; r~/v(o,i), z-/(n)且独立，则x服从t分布 ^<n).其分布密度可表示为

a 、r((n +l)/2)/ X2\ -(n+1)/2 y/n^r(n/2) ' n I

f分布为对称分布，期望和方差分别为E(X) =0, Var(X) =n/(n-2) (n>2);且有X2～F(l，n).另外，当n—+ oo 时，心)->眼1).

(8) F 分布 X-F(n,m). 若叉=瓷;Z-X2(m)且独立，则X服从F分布F(n，m).

其期望与自由度n无关:E[F(nfm)] =m/(m-2)(m>2).另外其分 位点有关系:Fa(n,m) =[FJ_a(mfn)]-i.

(9) r分布x r(a，^)或其密度函数为

A>0, v>0.

这是特别重要的分布之一，其中A'1 =<r为尺度参数，为自由度，也 是形状参数.易见，r(A,l),即P=1时厂分布为指数分布E(入).

厂分布有以下基本性质: i)尸分布的特征函数以及期望和方差分别为

妒(1) =(1_苧厂，E(X) =^~= Var(X) =~^=p-1#2, AA

(1.3.2) ii) A =1/2, ... /2时厂分布为x2分布,即r(士，y)=/(n).

因此X~x2(n)分布的特征函数以及期望和方差分别为
0-(1-2iz)"2, E(X)=n,Var(X)=2nf
E(广)=r4(n>2), E(厂2)= — — (n>4). n-2 (n-2)(n-4)
(1.3.3)
另外，若 X~r(A,p),则 =^2(2p).
iii) r(A, p)及;t2(n)均有可加性.若X. ~r(A,pJ且独立，则有
~ r(A, .特别，指数分布也有可加性:若弋，...，X。为 ii
a, -^(A),则有r= ~r(A,n); i-1
2A? ~/(2rt).
18
iv)若X^2(n),则当n^ + oo时， 准正态分布7V(0,l).
(10) /3分布X~BE(P，q). 其密度函数为 f(x;p9q) =^(p,^)_1xp_1(l
第一章统计分布基础 的渐近分布为标
, p>0, q〉Q. 卢分布是定义在[0，l]区间上的连续型分布，它可用来刻画比例型的数据.冷分布有以下基本性质:
i) 若X~BE{P，q)，则Y=l -X 标准均匀分布也是冷
分布:若X-5^(1,1),则X~/?(0,l), 1-X~/?(0，1). ii) 分布的期望和方差分别为
E(义)=1，Var(X)=----------------------------. p + q (p + 9)(p +9 +1)
定理1.3.1若x~ru , ~)，r-r(x,p2)且相互独立，则 vy
U，=Y+~Y^ 且£/，V与V=X十卜r(A, ~ +p2)独立.
(1.3.4)
证明
j = 8 U , y) d (u,v)
做变换(x , y)->(r , v), 则有
X = uv,
,y = v(1 - u) ,
=v.从而
则b
这个定理有广泛的应用，以下推论是其中一部分:
推论1 若x-x2(n)=r(y»y)，Y =r(T,T)且独立,
x -BE n m\ Y -BE m n\ X+Y T9T) X+Y T9T)'
x u =------ X+/
v>0 ,
1.
=> ,v = x + y
v u —v 1 - u
f(u, v) =fx(x)fY(y) \J\ =fx(uv)fY(v(l - u))v
= Ce-A<UF〉('wy*-1e-A[P(1-“)][t>(l-u)Y^vI |v>0 !.
/ |0^u^l |
=CV...(1-izy2-1/|0Cu^l| .e_%W/\v^0} =BE(u;p} ,p2)r(v;A +^2).
故 BE(P,,P2), V~r(A, A+p2)且相互独立;也有 U^BE(w').
推论2 若B~BE
Bf= -B mB __B/n , 则F=n(l-B) Br/m
1.3常见的连续型分布
F(n,m);反之，若 F ~ F(n, m)，则 B = ? ~ 卵 (+ , 专)(关于厂
分布，见(8)). ;
推论3 若X"..., n n+m

W

X_{n+1}, ..., X_{n+m}为i.i.d.且X, -AT(0,ct2),则 ~ B£(H).

有

(11) Laplace分布X-LA(^fa).其密度函数为

19

Z(T 其特征函数为少(1)=e_(l+oV)-i,且有E(X)=M; Var(X)=2a2.

当M=0时有<r-*=2/(0);并且|X|~指数分布E(〆'). (12) Cauchy分布X - CA(/£,(r).其密度函数为

=~j------------ . 7Ta +(X-/i)

其特征函数为e^_altl , Cauchy分布的特点是各阶矩都不存在.另外, 直接验证可知，若A, X2独立同分布于汉(0,1)，则Y=Xt/\X2 |~ G4(0, l).

(13) Pareto分布X ~ PR(a, 0). 其密度函数为 /(x;a,0) = aOax~{a+[}I \ x^&) (a >0;^ >0).

其期望和方差分别为

E(X)= a -1 a >1) , Var(X)

a^2 (a >2). (a - 1)2(a -2)

另外，若又 ~ PR(a,0), 则有 K = log X ~E(a, log 0). (14)幂函数分布X-PF(c96).其密度函数为

j) 40^y^l|(c>0,6>>0).

当c=l时，X ; 0=1时，/(%)=cxc~lI{O^x^l}为BE(c, l). 另有

E(X) cP Var(X)= cP2

c + 1 (c + 1)2(c+2)

(15) Weibull 分布 X-JF(A,a), a>0.

若Y~E(入)，则X=Y 服从Weibull分布17(A,a).由于y=xa9 dy/dx =axa'1 , K~ Ae_A" ! y彡0 !,因此Weibull分布的密度函数和分 布函数分别为

/(%;A ,a) =Ae~Axaaxn~}I \x^0) , F(x) = (1 -e~Axa)I (%^0 (.

20

其中a = A'*为尺度参数，a为形状参数.A =1时为标准Weibull分布: W(1,a)~/(x,a)=axa~le~x°I)%>0(.另外，若a=1, Weibull分布 化为指数分布£(A);若a=2,称为Rayleigh分布:

f(x,A) =2Xxe~Xxll Ix^O j. (16) 极值分布 X~EV(Afa).

若r~IT(A,a),贝IJ X = - log y服从极值分布EV(X,a)由于y = e_x, dy/dx=-e'x,f(y)=\aya~]e~Ay°I]y^0(,因此极值分布的密 度函数和分布函数分别为

/(%;A,a) =Aaexp | -Ae'at -ax (, F(%) =exp j -Ae). A=1, o!=l时为标准极值分布:/(x)=exp|-e■*-x), F(%)= exp| -e_x|.

(17) 寿命分布与生存函数. 在生物医学统计和可靠性问题中经常要考虑寿命的分希.设f为某

生物或产品的寿命(^^02, s(o =p(^>o表示寿命大于t的概率u 為 0)，5(0=1-F(t)▲F(f)称为生存函数(survivalfunction); h{t)= = -S'(1)/SG)称为危险率函数(hazard function).生物统计 中经常用AG)和SU) =F(t)代替/(«)和尸(1)进行统计分析，它们有以

下基本性质:

0 表示寿命f 大于i，但不超过£ + 的相对概率，或危险率:

h(1) =f(t)/S(1) ;f(1) =A(0e'wo); I{(1) = h(x)dx.'

iii) 寿命分布的类型依赖于危险率函数的类型，常见的类型有: 若h(1) =A(常数速度),

则f～指数分布/(«) =Ae-At;
若A(1) =Aata~\多项式速度)，则f - Weibull分布
/(1) =Aa^-，e-Ata;
若h(t) =Aae-a,(负指数速度)，则f～极值分布
/(0 = Aaexp I - A(1 - e"at) - at |. (18) 多元正态分布
设义为n维随机向量，若乏>0，则X～7V(/z，J)的密度函数为 八x) 1^1 _+exp{_+(卜并mx-A)}. (1.3.5)
/i(0 = lim- ai-»o
Ai
ii) 危险率函数A(0与密度函数/G)有以下一一对应的关系:
若2多0,则XKhS)的特征函数定义为
1.3常见的连续型分布
21
p(1)=E(e的)=£[eWWn]=e^-y^. (1.3.6) 熟知E(X)=从，Var(X) =1:,因此多元正态分布的性质由其前二阶矩
M，2 完全决定. 以下基本性质大多可由其特征函数推出:
i) E(X)=/z, Var(X)=S=(<rf>),若记X -X 贝!j
=0, E(Xi^XAX/) = +aikajt +auakj. ii)Y=AX+b-N(A^+b,ASAT)f特别有
^'1/2(X-At)~7V(0,ZJ. in) X为多元正态的充要条件是:对任意〃维向量a, aTX为一元正态. .
表1.3. 1列出了常见的连续型分布(可参见方开泰，许建伦,1987;
Zacks, 1981 ;茆诗松等,1998;Shao, 1998).. 表1.3.1常见的连续型分布
均匀分布
以❷、，❷
正态分布
对数正态分布 LN(/jL,a2)
t分布 t(n)
密度函数
特征函数 期望
方差 密度函数
特征函数
期望 方差
密度函数
期望 方差
密度函数
❷，_e i\e^x^e2)
(ei6: -eiar)/[i(6 -a)«] (0, +么)/2
(么-0,)2/12
十 expf ip,t - -^-a2t21
}
a2
exp| ^j(logx /a) jZjx>01
exppx
exp (2/z + <72 | (e^2 ~ 1)
ry^_+-!)/2](l +x2/n) -{B+,)/2 a/mrr(n/2)
期望 0(n>l)

方差 n/(n-2) (n>2)
22
第一章统计分布基础
F分布
密度函数
rtn/2wm/2r[(a+爪)/2]//2 1 r(n/2)r(m/2)(7n+nx)<n+m)/2
F(n,m) 期望
m/(m-2), (m>2)
2m2 (n + m - 2) /[n (m - 2)2 (m - 4)]
指数分布 密度函数
£(A) 带有位置参数的指数分布
E (人 , M)
厂分布 r (A,p)
X 分布 x2 (^)
冷分布 BE(p, q)
Laplace分布
Cauchy分布
C4(/x,(r)
| .
彡0] ,A >0,p>0
方差
(m >4)
Ae_xV {x^O | 特征函数 (1 -iz/A) _,
期望
方差 A'2 密度函数 Ae-AU-M)/
特征函数 e^(l -ir/A) 期望 m+a_,
方差 A'2
密度函数 L(P) 特征函数 (l-U/A厂
期望 方差
密度函数
特征函数 期望
方差 密度函数
期望 方差
v/X v/X2
1 密度函数 巧e 1 a
1 /2产 、”/2/ 1x^0 | r(n/2)2n/2 1
(1 -2i«) _T n
2n
叭P, q) -'xp~\} -x)fl-7 |0<x^l |
P P+Q
pq (p+7)2(p+ +i)
.1I 1
特征函数 e^(l+W)-1 期望
方差 la
密度函数
1a
a2 + (x -/x)2

特征函数 expjyzZ-6r1Z1} 期望 不存在
方差 不存在
续表

Pareto分布 PR(a,e)
幂函数分布 PF(❷ , c)
Weibull 分布 ^(A,a)
多元正态分布
iv)设 X =
\ A (1.3.6)式可知，X 的特征函数可表示为
心(1)=exp|i/z}z1 +品2
若令 ~=0，则有(pXi(t{) = exp|i^«,
f nr °、
(X
密度函数 «0aA;-(fl+,)z \x^e \ 期望 a - I (a>D
® fl2 (a-l)2(a-2)
方差
密度函数 cxc X0-ri\o^x^e)
期望
4
密度函数 Ae-Axaaxa-lI\x^0)
期望 A_，/ttr(a-' +1)
方差 A-2/a[r(2a'} +1) -r(a*' +1)]2 密度函数
(厂
I ~Texp|-~(x
(%-^)J
;则由
特征函数 exp|i/zTZ-
期望 方差
j.
苓2 x 22 /
■
续表
^));同理x2k ~，s2山 即X的边缘分布仍然为正态分布.另外， 由上式可知，
A(1) =<P{Xl,x2)(h ^2)=hGi)h2G2)e-^2<2. 因此X,，X2独立的充要条件为^12
=Cov(X1,X2) =0;即X,， X2不相 关.特别，r =4x与Z = M 独立的充要条件为
Cov(r,z)=x^T=o.
V) x}与Z=X2 独立，X2与W=X{ 独立， 且有
E(z)=~-S2l2n^ , Var(Z) J22-1 =J22
-y^22«2-^SX2t21.
\ h 7
因此 X、~N(蚪”

这是因为 CovCX^Z) =Cov(xl9x2-s2anixi)=sl2 -^，(^^1)7 = 0,所以X,， Z独立.
Vi)条件分布X2\Xl9X.\X2为正态，且有

E(X2|X,) (1.3.7)
Var(X2 IX.) =£22.' =各2 =Var(Z). (1.3.8) 并且A 与X2-E(X2 \XJ独立;12与4-E(X, |尽)独立.
为了介绍退化多元正态分布的一个基本性质 ，首先简要介绍一下对称 矩阵的谱分解.设2为nxn阶对称矩阵，其秩为r，g卩rk(X) =r.则必存 在正交矩阵厂，使得rTXF
=diag(4,0) =C,其中A =diag(A1,...，AJ,,它 的各分量为乏的非零特征根，其相应的特征向量记为门=(%，...，yf),并 记r =(r1,r2).则乏的谱分解可表示为
r
=rcrA =r}Arxv=工a,%/. (1.3.9) *=1
定理1.3.2若Y~N(p，X)为退化正态分布，即rk(S) =r<n，并设乏 的谱分解如(1.3.9)所示.则y可表示为r=/x +r1z1 +r2z2 -/z +bit,其 中z.服从非退化正态分布7V(0，A); Z2服从退化分布P(Z2 =0) =1;
(0, /), B=rlA^.
证明 做变换:r(y-At)=z =(z^,zj)T,则有(r-M)^rz^rxzx
+r2z2, Y=^+r}z} +r2z2
. 而由(1.3.9)式可知，z 的分布为 Mo,rTj:r)=tv(o,c),
因此Z{-7V(0,4),z2服从退化分布p(z2=0)=1.而r.Z.=riA^A-^Zl =BW,其中召=厂1?1+，W=A'^Z} -N(0Jr). I
1.4 一元非中心厂分布及其有关分布
本节主要介绍非中心厂分布，它是中心厂分布的Poisson加权和.由 非中心r 分布可进一步得到非中心;t2分布、非中心F 分布以及非中心f 分布.
1.4.1非中心r 分布和非中心x2分布
定义1.4.1 非中心厂分布X～r(A,p;5)的密度函数定义为 y(x;A,F,6) ▲上 y(%;A,^ +;)p(j,6/2)4u(j)

= y(x;A,v +y)e"6/2 . (1.4.1) y »0 7*
其中r(x;A,p+j)为中心厂分布r(A,r+j)的密度函数，p(j，5/2)为泊松分 布J~P(8/2)的离散密度;如(/)为计数测度.特别，r(l/2,n/2;5)称为非 中心/ 分布，记为?(n,5)，即/(n,a)=r(l/2,n/2;5). I
(1.4.1)式表明，非中心尸分布是中心厂分布的Poisson加权和.在X -r(A,p;5)中，S称为非中心参数.由定义(1.4.1)式可知，若5=0,则非
中心厂分布x～r(x化为中心厂分布，即r(x,^;o)=r(x,p). 非中心r 分布和非中心x2分布有以下基本性质:
=1,即y(x;A 5)为密度函数. 证明由定义(1.4.1)式可知,
y(*;A，M)如(X)= f0y(^;A,r+y)p(y,3/2)d/i(j)4t(x)
A -A* (g/2); 777------- e x dx
)
其中c(幻与J无关，a, .巧 易证:^-.0 (j-+00),因此 +j - I.)ijl aj
以上幂级数绝对收敛，可逐项积分:
[y(x;A，'5)如(%) = ^ (y(x;A,p +J)p(jfS/2)dx
=t te_5/2^Fl
=;=o 1 JI J ii)在X~r(A，p;5)中，X可视为联合分布(X,J)中X的边缘分 布 ，其中厂 P(5/2)，X| J~r(A,p +J). (1.4.2) 对于尤～x2(n，5)，I 可视为(X，/)中又的边缘分布，其中
]-P(8/2), X|J~x2(n+2J). (1.4.3) 证明 记g(xj) =y(x;A,r+j)P(j;5/2),则由

性质i)可知
I。I =1,
因此(XJ) -g(x,j).由假设J-P(8/2) -p(j,3/2),因此X| J~g(x,j)/
r 00
= I 2^ 』)=0
(i/ 十j a}xJdx ,
=I

?0\5/2) =7(x;A,p+;);由此可得(1.4.2)式.又由定义(1.4.1)式可知 =y(x;A,^,5).
对于X 8) = ,则有
X I J~r(l/2,n/2 +J) =r(l/2,(n +2J)/2)=义2(几十2乃. iii)非中心Jn分布和非
中心/ 分布的期望和方差可表示为
E(X) Var(X) =^, AA
E[x2(n,5)] =n+5,Var[义2( ] =2(n+25).
证明 以下仅对非中心r分布加以证明.由y|j~r(A,r+j),
从而应用(1. 1.4)式和(1. 1.5)式有 E(X)=Ey[E(X|J)]=E7[^]
Var(^) =E7[Var(X| J)] + Var; [£(X | J)] + Var; v +J\
v+8/2 8/2 v +S =---------+----- =-------
A2 A2 A2. iv)非中心厂分布和非中心/分布的特征函数分别为
<JP(O = (1 -y
1 (p(t) = (1 -2k) ~71/2exp J -2i/f
证明 根据x|j-r(A,p +j)以及中心尸分布的特征函数可得
iXt 汐(1)=E[eiyf] =E7[E(eiXt | J)]
eiyt e
j
-(〃 +/〉
=jf1 _T) L-w (5/2y ' J!
由此即可得到以上第一式，并可推出第二式.
v) 非中心尸分布和非中心/分布有可加性，即若x,~r(A,^.;^)
且独立，则有 土 A ~ r(A, V pi; Y i=: I i- /
vi) 若 X ～/V(M, 1)，则有 X2 ～ W,，(r2)且独立(i=l,...，n),则有2X^/a2
i2(M), S= .
.
U8/2}
exp -
A -分
(1，5)，8 =M2
.因此，若《~

vii) 若 X - N(p.,a2In), 则 XJX/a2 f2(n，5), 8 =/J/x/cr2;若 I ~/V(m,
2)，则(X-p)T厂-M)～/(n)，m -x(n,8),
8 = //万V
viii) 若X-7V(M,a2ZJ,则Y=XTAX/a2 -x分布的充要条件为4
为投影阵(即A7 =A,A2 =4)且有y-/(r,5),其中r = rk(4)为A的秩， 8 =/^A/m/a2.
以上性质vi)-viii)详见张尧庭、方开泰(1982).
注 非中心尸分布的定义有几种，但最后都殊途同归于相同的特 征函数，因而各种定义相互

等价.非中心/分布也可以从性质vi)出发 加以定义，最后特征函数都一样.

1.4.2 非中心F 分布和非中心/ 分布 由前节定义的非中心;V2分布可导出非中心F分布和非中心t分布.

若～且相互独立 ，则义服从

非中心F分布F(ni,n2;8).即F(～,n2;g) /巧1

X \ ^2)/n2

本性质:

i)若X~F(n'，n2;8)，则I 可视为Y=(XJ)中X的边缘分布，其

中 J-P(S/2)且 X\j~F(n1 4-2J,n2)ni +27, 即 -

n. ,

+2产 I J =卜 F(n' +2j.，n2).

证明 若弋～/(^)，则弋可视为r,=(^,/)中久的边缘分 布.其中，厂P(S/2)，X，|/

12(\ +2乃，因此

】Xl/(n1 +2J) n, +2J ■^2 ^*2 71、

a 十2y +2Jfn2)--------- .

ni

ii)若X-F(ni,n2;5),则有E(X)= ~—— (与n{,n2,6都有关). 7ii n2 —2

证明由以上性质i)可得

E(X) =E;[E(y | J)]

=£个卜 +2J,n2)^£^|jjl

1 卜x、/n' 1 u X2/n2

～F(n

Y

; 它有以下基

=E(～ ～+2, 71 n2 - 2 H)

n2 +5 n2—2 Tij

iii) F(n,,n2;5)的分布函数和分布密度分别为

F(x;nl,n2,5) S-5/2 e

Tlx \ --------%;nj +2j，n2 ,

,n2i8) = y ;=o

证明仍用性质i),

;!

+2.

=j) J=j)

F(x;ni ,n2 ,S) = P(X^x)= 工 j=o

5 P(J=;)P(X<x

r -.i

=s尸(/=;)尸 n}X n}x •H

-5/2 (5/2)y n}x

=2 e ~~7T~f ～+2广 w 十

此即第一式;对F(x;n,,n2,5)求导可得到第二式. 以下简单介绍非中心t分布.若Z~x\n)且相互独立,

则 T=r//Z6?0g从非中心* 分布 «(n,S), S=M2. 因此，若 r = (X + a)/

X-JV(Ofl)且与Z独立，a为常数，则7服从非中心z分布. 另外•若6=0,则£(n,0)为中心Z分布t(n);并且有T2 ~F(l,n;5), 3=/.进一步讨论见方开泰、许建伦(1987).

1- 5 指数族分布
指数族分布，顾名思义，它是以指数形式表示的一族分布.许多常 见的分布，诸如Poisson分布、二项分布、正态分布、尸分布等，都可 统一在“指数族分布” 的模式中:指数族分布反映了这类分布的共同 特性;因此，下面导出的指数族分布的性质，对它的每一个成员都 适用.
1.5.1 基本定义
定义1.5.1 0^0称为指数族分布，若其密度函数可
j!汀i+心 /
\n, +2j
jn. +2j
丄-
+2; n, +2j
1.5指数族分布 表示为
29
/(X，沒)=h(x)eQ1(ff)T(x)-b(ff)=戶则-_-心)， (1.5.1) 其中，h(x) =e'c(x)为非负可测函数;Q(6) = ((?:(幻 ， ❷40"...，❷py，r(x)=(r1(x),-,r,(%))T; 6(幻称为势函数.若 1, Q人幻，...，Qk(0)及 1，T人的，...，Tk(0)分别线性无关，则称指数族 为极小、满秩的. n ■
易见，若有线性相关，则某些项可以合并.比如若
QJ} +Q2T2=Q1(Ti +2T2) =Q}T];因此定义中可减少一项.通常都假 定指数族为极小、满秩的.以下列举若干常见的指数族分布.
例 1. 5.1 正态分布X ~ N(p,,a2) , = (yx,<72).
例 1.5.2 二项分布 X-b(n9e). /ne
-^2 -lo8
a2a J
=exp +
其中7\(x)=x2, Qx{e)=-1/(2a2),72(x)=%; Q2(0)=M/a2,
b(❷)= +log y/l^ta2. 2(r
则
=
6X(1 - 0) n~x = exp| %log - - + nlog(l - 8、+
n
X
其中 Tj(%) =x, QiCO) -log------ =log ir(^), b(0) = -nlog(1 —0), 1 —(7
例1.5.3 Poisson分布X~P(A).
其中 (x)=x,Q{(0)=logA,h(x)=l/x\，b(6)=A. 例1.5.4 尸分布，尢～r(A,), a=(A,p).
=~rxv-ie-XxI{x>Q}
=exp | —Ax + (p — 1) log « + vlog A - log T(p) | Z (x >0 [, 其中
Tj(x)=x, Q^e)=-A, T2(x)=logX, Q2(e)=j^-1, b(❷)= log r(p) —dog A. I
例 1. 5. 5 Rayleigh 分布.
/(无，A) =2Axe_A*2/(| =2x1)x^0 |e-A*2+io“’
其中 7\(龙)=x2, = -A,/i(x) =2%Z (%^0 j ,6(^) = - log A. |
30
第一章统计分布基础
例 1.5.6 指数分布E(X).

/(%,A)=Ae-AV|%^0 | =7(x^0)e-Ax+,ogA,
其中 T}(x) =x, Q{(0) - -A, h(x) =I |x^O I, b{Q) - -log A. I 但是，带有位置参数的指数分布E(入，綷)，E(1，m)不是指数族分
布.例如A,/i), 6=(A,/Lt),其分布密度为
f(x,0) =Ae j } =exp[-A%+A/z+log A]7 \%>/x),
其中|与%，M都有关，因而不符合定义(1.5.1)式的形式.
以下介绍一个判别指数族分布的一个简单的必要条件.
定义1.5.2 分布族的支撑集(support).若X~f(x，❷、，e0,则 其支撑集定义为5,=) %:f(x^)>0 若\与0无关，则称该分布族 有共同的支撑集.
易见，分布族的支撑集么可能与参数0 有关，如均匀分布X ~ R(O,0):Sff = [0,^];带有位置参数的指数分布X ~ E(X^):S0 = [/x，oo)等.但是由定义(1.5. 1)式可知，指数族分布有共同的支撑\ =
U:/t(%) >0 | ,与参数0无关.因此可得以下重要推论:
推论一个分布族为指数族的必要条件是它有共同的支撑集.
由此可知，均匀分布7?(0,^);带有位置参数的指数分布E(A,M), E(1，M)都不可能是指数族分布.同理，双参数的Pareto分布以及幂函 数分布都不是指数族分布.值得注意的是:今后我们得到的许多有关指 数族分布的结果，对于均匀分布以及带有位置参数的指数分布等这些分 布就不一定成立.
小结:常见的指数族分布有:正态分布、.二项分布、多项分布、 Poisson分布、单参数的负二项分布和Pascal分布、冷分布、厂分布、对 数正态分布、Rayleigh分布、逆 Gauss分布等等.
常见的非指数族分布有:均匀分布、带有位置参数的指数分布 E(A，m)，£(1，/z)、双参数的Pareto分布和幂函数分布、极值分布、 Weibull分布、超几何分布、Cauchy分布、Laplace分布等等.
1. 5.2指数族的自然形式
在指数族的定义(1.5.1)式中，很自然地可以考虑把参数函数 的各分量直接看成参数来确定分布密度.这时有f(x，e)=
A(x)expjg<?|(<9)ri(x)-6(^)1= A(x)exp. -b(0).其中 分布密度的主体就是《与的线性组合，因而应当有良好的性质.

其正式定义如下: fH 其密度函 定义1.5.3自然形式的指数族.若X～
数可表示为
f(x,0) =h(x)eeTT(x)~b(e) , (1.5.2) 其中O=d，".，0k)7,
T(x)=(7'1(x),..., Z\(x))T,则称其为自然形式 的指数族;若1，7.(%),-,?,(%)线性无关，则称指数族为极小、满秩
的;又称
e = !6>:]/1(%)/^(幻如0)< + 00 I c Ra (1.5.3)
为分布族的自然参数空间. 根据以上定义，由于J7(x,幻如(幻=1，因此0^0等价于
I
e_ =J/i(x)e<>T7'(x)4t(x)<+oo或6(沒)=log[J/j(x)e^r(a;)d/z(x)]<+~. (1.5.4)
另外，在定义(1.5.2)式中，若令
数族
族的分布密度的主体部分就是参数0与统计量r(d的线性组合，因而 可以预期，它应当有良

好的性质.
定理1.5.1自然参数空间0必然是R'上的凸集，势函数b(0)为 0 上的严凸函数.
证明为证0为凸集，对3(l), 0(2}e0, 0<A<1,要证M(1)+ (1 -A)6{2)e0，艮P
a = J/t(x)exp j [Aa(1) + (1 - A]TT，(x) j d^t(%)< + oo . 而a可表示为
根据Holder不等式以及(1.5.3)式有
a [jA(x)e<”r(1)如(x)f[p^)eA)r(1)如(x)f_A < + oo .
要证6(幻为0上的凸函数，即要证b(入❷(1)+ (1 - A)么))
:Tf(%) =y,,则可得到更简单的指
Y-f(y,e) 由以上定义以及表达式(1.5.2)和(1.5. 5)可知，自然形式的指数
A6(沒(1))+(1 -A)6(^(2)=).由(1.5.4)可知 />(A沒(1) + (1 - A)i9(2))
■(4)如(x)}
(1.5.5)

=log{ju(x)e<”r(4)]AU(%)e<2戶]卜Xx)}.
根据Holder不等式，上式
6(A沒(1) + (1 - A) 0(2、)
引log{[pi(x)e#"r(*)d^,(A:)] [J/i(x) e^2)r<x) d/x(%)] }
=Alog[J/i(%) e^,)r(:t) dfjL(x) j + (1 - A)log[J/i(x) e^2)r<x) d/z,(%) j
=A6(0(1))+(1-A)6(^{2)). I 定理 1.5.2 若 g(x)在x 上可测，且 G(a) = Jg(x)e^(x)d^(x)存
在，则C(幻在0 内部解析.特别，b(的在极内部解析.
(这个定理实际上就是Laplace变换的解析性质，其证明可参见陈希 孺,1981.)
自然形式的指数族的其他性质:
i)若X-f(x90) =h(x)efiTx-i(ff)9则其特征函数由势函数6(沒)
确定:
<p(t) =exp[6(^ + i«) -6(^)]. (1. 5. 6) (p(t) = E[戶 J = eitTxh(x)e°Jx-b(9^(x) = lh(x)e(3+it)Tx~b(0)d^(x)
ii)若 X =h(x)effTr(x)-b(9)f 则 7 = T(X)亦服从指数族 分布:
T=T(X)-f(t.e)=V(1)戶_b(4) (1.5.7) 证明 T=T(X)的特征函数为
心(s) = E[ebTru)] =]\(%)ei,Tr(相Tr(')__dM(x)
e(«+ij)Tr(x)-6(<j+m)+b(e+ii)-b(e)r) —c b(.3^is)-b(e)
证明
由(1.5f.6)式及唯一性可知，T=T(X)服从指数族分布，且有=
E[r(x)] =db(0)/dot，E[r(x)] =A(4) “" (1.5.8) V-[刺相=(蟲L， (1.5.9)
h*(1)
iii)若 X-f(X,e) =/l(x)e^(x)-6(tf),则有
(4). |

E =己❷(10)職. (1.5.10)
证明 由卜(x)戸(x)_b(4)如(x) = 1 ,该式对氏求导可得 ^(x)-6(^[rt.(x)_^l]dM(x)= o;
因而得到E[T,.(X)J =:db(8) /d0i;继续再求导，可得Var[T(X)]以及
义的各阶中心矩. 1 由以上结果可知，r(x)的各阶中心矩均由势函数6(幻决定.
(1.5.11)

或
，幻“ (y)e0T
推论若Y★
E(y)=m = A(6>), Var(y)=b(0).
1.5.3 带有多余参数的指数族
”
b(0) ，则有
指数族有若干发展与推广，以下介绍两种常用的带有多余参数的指数族. (1)带有尺度参数的指数族.
其密度函数可表示为 —
F ～A ”
沒，cr) =exp[
a
(1. 5. 12)
j\y\Q，(r) =exp{(/)OTy-6(沒)-c(y,(/))]},小=a_2,
其中y, 0同为夂维向量;0为有兴趣的参数，a或</>常常视为多余参 数，a 是尺度参数.该分布族常记为Y-ED^.a2).
例1.5.7正态分布YKpc’a2)，其分布密度可表示为
识-去/ -*^-log(27ra2)
= exp ------------------------ ----------------------- . - CT
若取6X =fJL/a\ T. =r, e2 =a-2, T2 = -//2 ;则为前节介绍的一般的 指数分布族.但若把a2视为多余参数,取仏=M, =r; b(6) =M2/2
=W/2; c(y,a) =y/+ylog(211a2);则为(1.5.12)式所定义的带有
尺度参数的指数族. ■ 例1.5.8 r分布r~r(A,p),其中m=e(k)=z，/a, a= 其
密度函数为
该式可改写为
FV(W) 十，y>0.

) = exp | p[y(—/z-1) - log /z, + log y - p"1 log y + log p - p _ 1 log r (p .
若把p = </> =a-2视为多余参数，对比(1.5. 12)式，可取0. =
Ji=y; 6(0)=log/£=-log(一沒!); c(y,a)=-logy+r1logy-logv ^^^logr (p).因此尸分布为由(1.5.12)式所定义的带有尺度参数的
指数族.
例1.5.9 逆Gauss分布Y~IG(fi，a2).其密度函数为
该式可改写为
a h 1 (r -m)2i y2ira2/ 2<7M 7 J
-j^_2/2 +^_, -y_1/2 -^-log(27r(r2/) =exp
若把<r2视为多余参数，对比(1.5. 12)式，取 - (2/i2) -1, =y;
6(0)=-烊=-(-20,)T; c(y,cr)=(2y)_1+^-log(2irtr2/).则逆Gauss分布为带有尺度参数的指数族. 带有尺度参数的指数族Y~ED(0，a2)有以下性质:
i)特征函数为^(0
er-2, 特别有
E(Y) = b(0) =//,, Var(K) =cr26(0) =(r2V; (1. 5. 13)
对 r 分布:Var(Y) = a2f±2; 对逆 Gauss 分布:Var(Y) = a2 (对 Pois- son 分布:Var(y) =/!).特-征函数的推导与(1.5.6)式完全类似，从略.

ii)令e = y-/z = (Cj,
E(eJ=0; E(n)=<r2Ky, V=(K.) =6(0),
E( ) =a4Sijk, E(e,e.etez) =tr4(K-. + Vjt + Vkj) +a6~u,
s = W沒)A — 八(8)
vfc deidojdok ’ iiU 一de.dOjde.dOi
iii)若Yx yYn为i.i.d.,Y{ ~ED(❷, (r2), 则Y=n"1
£7?(^,(r2/n). (2)子集参数情形.
K.~
对于指数族分布(1.5.2),有时需要把参数分为两部分:一部分为 有兴趣参数，另一部分为多余参数.这时分布密度可表示为
则可求出其特征函数，从而有
i=l
1.5指数族分布
X - f(x;0,(p) = h(x) exp,
m

(1.5. 14)
OiU^x) + ^^.(x) - b(❷, (p)
其中^=(,6>m)T为有兴趣参数，(P=(<Pi, -为多余参数，"= (U,(x), ..., 匕(%))T, r=(T,(x),..., 7;(%))t.
定理1.5.3 在以上假设下，(f/, r)的联合分布为 m
p(u, t;❷, <p) h u,/) exp.
i=1
"和 r 的边缘分布分别为
p(u;❷, (P) hlfi(u)exp
p(t\6, <p)=~(1)exp{
+2 一厶(沒, 妒)’,
y. 0人
条件分布U\T仅与有兴趣参数0有关，与多余参数无关，其分布为
P(u|t;O,(p) =h*(w,0expJZ❷iUi-b:(4) i. (1.5.15) £«1
证明{T, U}的联合分布可由前面性质ii),即(1.5.7)式得到;联 合分布积分即得边缘分布:
由此可得条件分布为
P(^0;(p) = J p(u7t;6,(p)du
姑 - 6(0, 妒)•,
少 (u,Z)exp.
exP ,;=1 — b(❷, W
= ^XOexpJ 工(p.1. - b(O,(p) -
m
=h* (u,Oexp{ 2 0iui - b* (6>)} i=1
(V(沒)logh❷(t))•
i=1
^.u. Idzz •
b(O,<p)

1.6次序统计量的分布
次序统计量是统计学的基本统计量之一，在参数统计与非参数统计 中都有广泛的应用.本节

首先介绍次序统计量的基本性质，然后分别介 绍均匀分布和指数分布的次序统计量.
给定样本X,,...，xn，若按大小重新排序，其次序统计量定义为
尤(1)CX(2)彡...彡足(4)或记为y^ y2^...彡rn(r:=尤(1)).特别，x(1)=
minjx:I，X(n、=maxfXJ，R=X(n) -X(1)称为极差.通常假定X1, 1 名f 炙n 1
...，夂为i. i. d.样本，且X、～f(x)为绝对连续型分布，因此有P(X(i)
<
记卜(r,，".，rn)T = (尤(1),...，x(4))T，(=x(i)"(1)(1) ，
/(7i，y2，...，:rJ.
(i) r.. =J(0的分布密度为
(1.6. 1) 其分布函数可由不完全芦函数表示为^(o(y) + 1)
证明 考虑Y, =X(I)落在微小区间(y，y + dy]中的概率，这可表 示为
P {y<y.^y+dy | =F(0(y+dy) -F(i)(y) =/(0(y)dy+o(dy); 另一方面，由X(1)的
定义可得:P {r <Yi^y + dy \ =P {X19-\X n中有 (Z-1)个在(- 有一个在(y,y +
dy];有(n - i)个在(y + dy,
+ oo)| +P !其他情形I =P(+P2, 其中P,，P2分别表示和式中的第一、
第二项.j其他情形)包括诸如j在苓，...，及中有(1-2)个在(-co ,y]; 有2个在(y,
y+dy];有(n-i)个在(y4-dy, +oo)|等情形.显然，对
连续型分布有P2=o(dy);因ffi]P{y +dy} =P,+o(dy).而/\ 可由多项分布得到:
广1[/(y)d川1-F(1)]....
(7))=0, P(Xm <X(2) 导次序统计量的基本分布.
1.6.1 基本分布
X(n)) =1.下面将在此假定下推
比较以上结果，并令dy->0可得
1.6次序统计量的分布
37
由 ^(I)(r) = [/(1)(1)出即得 Fa)(r) =/r(y)(i,n-i + i). J-oc
dy];
[F(z)-F(y)]y-*-l[l-F(2)广"|y<z). (1.6.5) 证明 仍然沿用上面的方法.考虑
^(/), X(y)落在微小矩形{(y,y +
(^,z + dz]!中的概率，这可表示为
P ly <^(i)矣y + <X(y) =$2 + dz) =/(y,2)dydz + o(p)
推论1 最小值和最大值的分布密度函数分别为 /(i)(y) =#(y) [1 -厂(y)]n_1,
(1.6.2)
/(„)(7)=nFn",(y)/(y). (1.6.3) 推论2 若苓~7?(0, 1)，则X(1)服从/?分布:
X(/) ~BE(i,n-i+l).
(2) (X(J),X(7)) =(y,Z)(i<y)的联合分布为 t
)/(y)/(
(1.6.4)
*.
/(nz) =(;-iy!(y-rii)!(n-;
(p = ydy2 + dz2). 另一方面，以上概率也可表示为P 中有(f-1)个在(-00, y];有1
个在(y,y+dy];有(J-i-1)个在(y+dy,z];有1 个在(z, z + dz]; 有(n -j)个在(z
+ dz, +00)} +p !其他情形丨.这一概率可由
多项分布得到:
D— 二川(n_p![F(1)广1[/(y)知][F(z) •
[/(z)dz][l -F(z)r->+0(p), y<z. 比较以上结果，并令p->0，即可得到(1.6.5)式.

1
推论1 又(1)和;t(4)的联合分布密度函数为
=n(n-l)/(y)/(z)[F(z)-尸(1)广2/\y<z |, (1.6.6) 推论2 极差R=X(n、-X(1)的分布为
A(r)= n(n - 1)| / (1)/O + r) [F(t + r) - F{t)]n_2dz (r >0).
(1.6.7) 证明由于=(y,z)的分布已知，可做变换:/?=z(n)-
X(1)=Z-y，T=X{X) =y,则Z=r+尺，Y=Tf 变换的Jacobi行列式为J =1.由(1.6.6)式可得
/O，r) =n(n-1)/(0/(f+r)[F(£+r) -F(t)]n_2 (r>0). 上式对(积分，即得
(1.6.7)式.

(3)前r个次序统计量JV(1)，...，尤(7)的联合分布为(其推导与(1)、 (2)类似，从略).
=(:l!r)j/(yi).V(yJU -厂(y、) in〈...<yr h (1.6.8)
特别，x(1>，...，X(4)的联合分布为
7*(，...，yn) (ji <y2 < ...<yn I. (1.6.9)

1.6.2均匀分布的次序统计量

若X^F(x)为连续型分布，则"=F(X)～尺(0，1).因此若X(1) <... (4)，则
U(1)=F(X(I)) <*..< F(X(n)) = U{n)为均匀分布尺(0,1)的次序统
计量.因此，考虑/?(0，1)的次序统计量，对一般分布F(均亦有一定意义. 由(1.6.9)式可知，若U～R(0，l)，17(1)名...Ct/(„〉，则(U(1)，...，
U 的联合分布为
，... ,un) = n[/ |0<ul <u2 < <un <1 J.
定理1.6. 1 均匀分布/?(0，l)的次序统计量有以下性质: (1) U(1)-BE(kyn-k+l);
(2) 幻、“k、-"(1)-BE(k,n-k+1)与Z无关; (3) R=U{n) -U{'、～BE(n-l，2).
(1. 6. 10)
(1.6.11)
证明 性质(1)即为(1.6.4)式，性质(3)可由(2)导出，下面主要 证明性质(2).为此，做变换:
.U(1)，
^2 ="(2) -U(1)， Z3=U{3} -^(2)，
U(1)=9
U(2) = +^2，
"(3) =ZX +Z2 +Z3，
=>\J\ =1.
(心 =^i +^2 + ...+Z 其中•/为变换的Jacobi行列式;由(1.6. 10)式，i/
(1)，...， (4)的联合
分布可表示为
=n!/)0<u,<u2〈...<un<1)
=n!f10< -u.，<1,i=2,...，n; 0<zz，<1，0< 因而A ，Z2，...，Zn的联合分布为
•A2i,"W) =/(u1 |J|
<1 }.
=n\I {0 < zi < l,t = 1,...，a; 0 < 该分布的特点是对一切z,.对称，各向同性.
因而对任意A;个分量的积分
i=l

z. <1(.

值相同，得到的边缘分布也相同.由对称性可推出 :

i) 一切•同分布，且与(1)同分布，即 ~BE(1,n).

ii) 任意&个ZiX，•--，Zik同分布，且与(A，...，A)同分布.因而 + ...+ 与 Z, + ...4- Zk = U{k}同分布，而 U(1) ~ BE(k，n - k + 1).

in) U(k+i) -U(i}^(Z} + ...+ZA+i) -(Z, +... +Zt) =(Zi+1 +...十 + 该式也与zi+...+z，="(1)同分布，因此u(10)-U(1)〜BE(k, 71 - A: + 1) • ■ 另外也可证明:若r. :u、'、/u(2)，...，Yk : ...久、= Yn=U(n)1 则 独立，且有 Yk - kyk~xI , k=Y，...，n. 1.6.3 指数分布的次序统计量

设戈，...，总为i.i.d.样本，A服从指数分布M+r(l/o-,l), A= 1/a,其分布密度和分布函数分别为

xi)=—e~~fj%1 j, F(xl)=(1—e_~)Zj久彡弘|.

(1.6. 12) 为了推导与指数分布的次序统计量有关的分布，首先导出其前r 个次序 统计量的分布.记(叉(1)，...，X(7))=(y,，...，yr), r^n,则应用公式

(1.6.8)可得(A ，•••，}:)的分布密度为

只乃，...人)=(7^7[-^(yr)r—r/|ri<...<yr)

=(^7)r[nye^ /^^^]-

(e_~)B_7 \yr ijl \I\y{<...<yr). r

由于Yi =^(i)为次序统计量，因此有fl I {y^/jL I =7 I/!),上式 经过化简可得

/(wJ =(7T7)7^exp{-y[+(n-r)Tr-n/x]}•

门:D M I / 注意，由该式可知，6 与 Tntr=

r

< ... < yr I . (1.6. 13) 是两个重要的统计量.

1=1 定理1.6.2设X,，...，久为i.i.d.样本， 服从由(1.6.12)式给定

的指数分布.令

其中

r

+ (n - r)rr]]•

/{/j $:0 I Z|y,<...<yr } , (1.6.17)

Tn.r = A。+(n~ (+斗 (1.6.18)

= 5^[^(0—尤(1)]+(打—r)[^(r)—X(1)]

i: r

= Z ^(i) + (« - r)^(r) - (1). (1.6. 14)

is1

(1.6. 15) xu) 4—r(—,1); S] —r(⊥，r—】 L 5~r(⊥，n—1).

1 \o')

(1.6. 16)

特别，若X, ~r(l/a,1),即A=:0，则A■(1)—r(n/a,1)， (1.6.16)式的其他结论都成立.并且有

则X(1)与s,，s独立，且有

\o—/ \o—

1

s= 2[X(i)-X(1)]=xa、_
= XXj-打1(】). i=1 i=1
证明 易见，当r=/z时，S{ =5,因此只需证明5,的有关结果即 可.根据K，".，rr的分布(1.6. 18)式，可做变换
z\ =^(i)=nYx， Z2=(a-l)(X(2)-X(1))=(«-1)(72-7,),
LZr = (n-r + l)(X(r) -X(r_t)
= (n-r + l)(y -yr_,)
心4,
A z2 ------十 -------------
n n-1
n n-1
+... +-A_ n-r+1
j=a(，i，...，/r)=J__1________1_____ (a_r)! d(zl,••-,zr) n n-1 n-r+1
n\
根据以上变换关系式，特别有
Zi+Z2■¥...+Zr=Yt +y2+...+yr+(n-r)yr=Tnr9(1.6.19)

.Z2 + ... + Zr = K, + ... + Yr + (n - r) Yr - nYl = Tn r - nYx = S' (注意，恒有rt =^(0).因此可得z,,z2,-,zr的分布
, 2;) = , •--,yr)
ITi I 7 (yi<...<yr (=士exp{-+(:i +z2+...+ -叫)
1 k_ 0,1 = 2,..., r !
= [+ exP卜 - ^t)}^ Ui I] [-e^7 (z. 0 | j.
这一表达式说明:Z,，Z2，...，A独立，且有
-nY}～n/x+r(+, 1)=>6 =X(1)～/i+r(1). (1.6.20)
同时有Z2，...，Z,独立同分布，Z2 ~r(l/a,l);因此 5. =z2 + ...+Z, r(+, r-l).当 r = ri 时有 S~r(l/(T,n-l).
特别，若A ～r(l/a, l),即从=0，则由(1.6. 20)式可知x{})～r(n/a, l).这时也有Z1 ~r(l/a,l),与z2, -,zr独立同分布，因此由 r
(1. 6. 19)式可得 Tn r = 2 y{i) + (a - r) ^(f) = z. + z2 + ... + zr ~
i=1
r(l/a , r)，因此(1.6.18)式成立. ■
推论I(1)，尤(2)-尤(1)，...，-^(n) -^(n-1)相互独立，并且尤(1)与 ^((>A) 独立，对任意的“ &成立.
注 在可靠性统计和生存分析等问题中，S':Tn,r-nX(1)，其中 r
^,= X x(o +(^~r)X(r)通常表示“总寿命”. 1=1
习题一
1-设'，为的P分位数，如定义1.1.1所述.证明:
(1) F(xf) <p的充要条件为x'<xp; F^x'^p的充要条件为x'為 V是否有W)>P的充要条件为/><’?
7*(2!，...
(2) F(Xp-0)^p^F(Xp); 若气为 F(幻的连续点，则 F(Xp) =P;
去[it
+ (n-r)n]}.

第一章统计分布基础

(3)若F(xz-O) >p,则x'〉%p. 2.设随机变量X和y的分位数分别为人和证明:

(1) 若X服从Pascal分布PA(O, r), F服从负二项分布

则 xP-yP+ri • (2)若X服从厂分布r(l/<7,幻, 则~=(<r/2)x2(2M);其中

/(2^,?)表示自由度为M 的炉分布的P分位数;

(3) 若;V 服从极值分布 £V(a,A),则 = (1/a) (log A - loglog

〆');

(4) 对于F分布:F(nfm;a)=[F(m9n;l-a)]-1.

*3.设a分位函数定义为

ptt(0=(a-/I«<0})/=|z|[aZ| >0| +(1-a)I(t<0)], 0<

a<1, t6R.

(1) 设随机变量尤的概率密度函数为f(x;af0) =a(l -a) •

exP I 证明:X的a分位数为0;

(2) 设F为连续型随机变量, g(M) =E[pa(r-Zx)]关于一切弘存

在, 则当M =y«时g(M)达到最小, 其中7«为/的a分位数.

4. 设r(x)为随机变量义的可测函数, E[r(x)-eY在e&(a, b)

上存在, 记S(x)=T(x), 若a多r(z)彡6; 5(%)=a,若7(%)<a; 5(%) =6,若 T(x) >b.

证明:E[S(X) -6>]2^E[T(X) -0]2.

5. 称随机变量X 的分布关于某一点^对称, 若其密度函数/(幻满足 /(么+幻=/(f。-幻.证明:

(1) X的分布关于对称的充要条件为X-^的分布关于原点对 称;X的分布关于原点对称的充要条件为JV与-X 同分布;

(2) EX=^0; E(X-^0)2^* =0,其中々为正整数;

(3) 设X:, ..., 叉为i. i. d.样本, A 服从某一对称分布;则其样本

均值X^n'1 t X.与样本方差52 = (n - 1) -1 Y (-X)2不相关, 即 i=1 i= 1

Cov(X, S2) =0.

6. 设随机变量义的r 阶累积量为心, 证明:

(1) 若 J, y 独立,则有 Kr(X + Y) =Kr(X) +Kr(Y);

(2) kt{X+C)=Kr(X) (r>1).

7. 设f 为连续型正值随机变量, 其分布函数为F(1) , Ff(t)=

f、1、, 记^(0 =/(C/[l ~F(0],通常称A(r)为危险率函数.证明 (1) h(t)表示大于t,但不超过z+ZU的相对概率, 或危险率:

习题一

43

(2)危险率函数AG)与密度函数/G)有以下一一对应的关系: /(i) = , H(t) =

Jh(x)dx.

8. 设随机变量尤服从Poisson分布P(A),并已知事件U=0 |不可 能发生, 求此时X 的分布(截尾Poisson分布)及其期望和方差.

9. (1)设T的期望和方差分别为1和t, (/V|r=O服从Poisson分 布P(At), 求TV的期望与方差;

(2)设/V服从Poisson分布P(A), (X\N=n)服从二项分布B(n, 0), 证明X服从Poisson分布P(入0).

10. 设r服从厂分布r(A,p), (X\ T = t)服从Poisson分布P(t). 证明X服从负二项分布NB(e9v),其中^=A/(1 +A);而(r|x =^服 从厂分布r(A +1, %切)(提示:用特征函数证x-NB(etp)y

*11.设X服从二项分布，P(X=i)=6(i| n,^).证明其分布函数 F(i) =P(X^i)与不完全冷函数(见(1.2.1)式)有以下关系:
y,b(j\n,e) =//i,n-i+1),
F(i) =1 + =/1_<?(n-i,i+l) (提示:对第一式，令左端=/(!?)，右端=乂(<9)，/
(6>) =/(汐)-人((5)， 易得f\6) =0,从而/(幻=0;第12,13题的证明类似).
*12.若X服从负二项分布科 H 则其分布函数F(i) =P(X^i) 可由不完全函数表示为/
d(r, f + l). '
” 3.设服从Poisson分布P(A),则其分布函数F(i) 可 由不完全厂函数r(a ,/ +1)表示为
 +
=n(~MV(7l, 7T)，其中77=(7TJ,...，77\)T, TTt=A/ 15. 设少(a)为标准正态分布的分布函数，证明:
(1)若 X ~ N{a, a2)，贝!j E[0(X)J = 0
Ay.
xidx/ra + i)左 r(x,i + 1).
14. 若xt.-P(AJ, Z=l,...4相互独立，则1(4, ...， ')|X,+... k
>-1
 E[少(x)]表示为二電积分;或令/(M) =e[0(x)]，在积分号下对M求 导，再对/X积分;
(2)和(3)类似);
(2)若 ^-(X2(l))，/2,则 E[0(X)] =3/4;
 44 第一章统计分布基础
(3)若Z～7V(O,1)，则相关系数p(X,0(X)) = 73AT. 16.设|，...，夂为i. i. d.样本，若久，-7V(m,1),其样本均值X =
X,,少(幻为标准正态分布的分布函数.求a，使E[0(aX)]= i=l
少(M).
17.设 X,，X2, X3 为 i. i. d.样本，且苓-£(A).
(1) Y} =X
x
+X2
X. x, +x2
+ x” r, xl+V 卜 xl+x2+V 求(r"
r2，y3)的联合密度函数， 并判断K ，v2f r3是否独立;
(2)令久 ^x./y,, z2=x2/k，求(Z,,Z2)的联合密度函数. 18.(1)设X-TCUaJ,
r~r(l,a2),且X与y独立.证明:X
+ F与X/y独立;
(2)令X" ;V2独立同分布，X，～BE(n，l)，令Y=X({)/X(2), Z=
^(2),证明:7与Z独立.
19.设 X,，...人 , 独立，X, ~x2(nf),
2 X. +x2+x.9 立，且"‘-~ +2
=1，...，/n. 令仏一A+v
证明:U'，...，um“ 相互独 , j，Z=1，...，/n-1(提示:令Um= +...
:苓+...+夂-| 4 +-+总•
+夂，作变换X、=(U、.戈)，X2 =(U2...UHU、...UJ，...，Xm=
HU
20. 设1,".，X4为i.i.d.样本，若X.~7V(O,a2),贝»JZ=(X?+ X)/(f+4+^3+^4)~7?(0,l).

21. 设X,,••-yXn为i.i.d.样本,
(1) 设久服从均匀分布 _ ，0)，证明:7= -2 £ log(X/6>)服 i=1
从y2(2n);
(2) 设X,服从芦分布BE(❷, ，证明:T= -20 t — A 服从 X(2n); 11
(3) 设苓 服从 Weibull 分布，即f(Xl) =«Axr1exp (- Ax;(- n
/U.>0},证明:r=2A £ xr服从/(2n). i=l
m).
22.(1)设X服从Poisson分布P(A), 证明:(AT-A)/VT的渐近分

布为标准正态分布斤(0，1)(当A-^ + oo)(提示:用特征函数证明);
(2)设X服从;t2(zi)分布，证明: 的渐近分布为标准 正态分布斤(0，1)(当n-* + oo).
23.设X,， ...人 为i. i. d.样本，%:服从Pareto分布PR(a,0)，即
X,的密度函数为/(%.)=aeax;{a+l)i\X]^e|,令t= n x"证明: 1=1
(1) 2a(logT-nlogO')服从^2(2^); (2) X(1)
24. (1)若X:, X2 独立同分布，且A ~/V(0，l),则 Y=-^-y-
CA(O，i);
(2) 设X,， ...，叉为i. i. d.样本，且久服从G4(0，l),证明:X
i二 =一工与X,同分布.
*25.设X2Kh，V⊥X,|X2~N(AX2，B)，证明:弋~N(Ap2，B +AV2Ar)，
/>2、 (B+AV2At -N
\J\ (提示:应用条件期望公式计算特征函数). /
26. 设^~7V(m,1),求妒的特征函数，并证明它服从非中心 分布 彳2(“ M2).
27. 设X服从非中心;分布义2(汉，5).证明:当n-► + Q0时，[X-(n+a)]//2(n+23)«J渐近分布为标准正态分布7V(0,l).
•28.设 X. -P(Ax) , X2 -P(5/2), 二者都服从 Poisson 分布.证明:
-X2^v) =r(x;A,r,5)为非中心厂分布r(A,p;5)的分布函数(提 示:应用关于X2的全概率公式及第13题的结果).
•29.设X~x2(n), Y=X/8, 0<5<l.用特征函数的展开证明:K可 视为(y，J)中 y 的边缘分布,其中 J-NB(S,n/2), r|7~/(n+2J).
30. (1)设服从负二项分布NB{e，r).若r已知， 未知，则为 指数族;若t r都未知，则负二项分布不是指数族;
(2)设X服从Laplace分布LA(^ya),若蚪，cr都未知，则L4(/x， a)不是指数族;若#为常数，a 未知，则LA(^ta)为指数族.
31. 设r,， ...， 独立同分布，y,服从指数族分布ED(eta2),即 /(^i =exp -b(0)
-c(yl , </> =a~2.

求 K 的特征函数，并证明:Y = n~}
厂服从指数族分布ED(0，cr2/n)
i-I
32. 设X,,...，总为i.i.d.样本，X,的密度函数/(幻关于某一点
对称，即/以。+幻=/(f。-幻.设该样本的第f个次序统计量的密度
函数为 gG)(y)，证明:g(l)(fo +r) =^(n-.+i)(^o ，对任意的 y 及 f =1,...，n

都成立.
33.设晃，...，叉为i.i.d.样本，X,服从标准指数分布E(1).证 明:Y=X(n)-logn收敛到标准极值分布/(y)=exp| -e_r-y).
34.设X;，...X 为i.i.d.样本，X\ -/?(0,1), i=l，...，k,且各组间也
独立.设r(n) =Yin为第Z组的最大值，V= n Yin.证明:F的分布密度为 i=l
g(v) = 1(-logr)* 1门o彡vci)
(提示:先求u= -log r的分布密度). 35.设(%:)，•••，%„>)为均匀分布/?(0,1)的次序统计量，若记K =
Um/U、2” ...，[=')/"(“"，...，K._, Yn =U{n},证明: 独立，且有 Yk^BE(k,l) -kyk^I\0^y^l), A;=l,...,n,
*36.设弋，...，Xn为i. L d.样本，且X,服从均匀分布/?(0,1). 证明:
(1) (A2L.，...，/(7))与(尤<r+"，...，尤(《〉)独立，r=l，...,n-1; \
A(r+1) A(r+l) /
/ A (n-1) A (n-2) A (l)
(提示:在(1)中求联合分布).
37. 设X:，...，X 为i. i. d.样本，且弋服从(a，M)上的均匀分布，
-oo<a<M<+00.证明:尤(1)(7)=*与y(1)同分布，其中X(1)，...， 义(„)是冬，...，叉的次序统计量;r,，•••，!;_,为i. i. d.样本，且厂服从
(2)利用(1)来证明J(n), 7^，...,
独立
(a
38. 设X、，.“，Xn为i.i.d.样本，且Xx +T(l/a,l)•
YVV
，x)上的均匀分布;y(1)， 是的次序统计量.
+
(1) 证明:e_Xl/<z ~/?(0,e^/a);
X_u
(2) 求一£1^的分布，其中X(1)为次序统计量中最小的，S=
(3)证明:JV(1)，X(2)-X(1)，...，z(4) -X(n_u相互独立，并且又(1)与 独立，对任意的/，々成立.

第二章 充分统计量与样本信息

统计推断都是从样本出发，推断总体的性质(如参数估计、假设检 验等)，且经常可以归结为参数模型，如正态分布W(M，a2)，Poisson分 布P(A)等等.一种常见的情况是:假设样本久=(4 ，...，X„)T的分量 独立同分布，且4~/(久，0)，并以此样本来推断参数0的性质，从而 了解总体的性质.在具体的推断过程中，都是通过统计量r = T(X'，."，JTn) =(7\(X)，".，7;(X))t, k^n 来进行的.通俗地讲,统
计量T = T(X)是对样本X 的一个“加工” 或压缩(其维数由n 降为幻， 其目的是为了“去粗取精”，使之形式更加简单，使用更加方便.例
如，样本均值与样本方差X=n~l V X, = T, 9S2 =n-] Y -X)2 =T2, i=I i=1
T=(T"T2);这是经常用到的统计量，是一个2维向量，而通常样本 容量n要大得多.自然要问，通过压缩或降维以后的统计量r(x)来推 断总体与通过原有样本X 来推断总体，其效果是否一样?即是否会损 失有用的信息?如果效果一样，信息未受到任何损失，则该统计量就称为充分统计量.充分统计量是Fisher于 1922年提出来的，这是统计学 中非常重要的基本概念之一，因为它不损失信息地把n 维样本简化为k 维统计量(通常&比n 小很多)，在此基础上进行统计推断要简单方便

得多.因此，今后各章介绍的统计推断方法都是从充分统计量出发的. 本章主要介绍这方面的内容，第2. 1节介绍充分统计量的定义及其判别 法，即因子分解定理;同时还介绍极小充分统计量及其判别法;第2. 2 节介绍与充分统计量有密切关系的完备性以及完备充分统计量的重要性 质;第2. 3节介绍分布族的信息函数的定义与性质，这也是与充分统计 量有密切关系的基本概念，充分统计量就意味着从原有样本转换为该统 计量没有任何信息损失.有关本章内容，可参见文献陈希孺(1981, 1999) , Lehmann (1986) , Zacks (1981)等.

2.1 充分统计量

2.1.1 充分统计量的定义

下面首先介绍统计量，然后再介绍充分统计量.

给定样本弋，...，冬，记为又=(4,...，X„)TeIV，Z的观察值为 x = (xl,-, %n)TeRn. X 为随机向量，通常表示为 0e 0.其中房*为样本空间;0为参数空间;巧为Borel域队上的概率测 度:对AeB.,则7^(4)表示事件4发生的概率.样本X的分布函数和分布密度记为F(X,6)和/(人幻，因而样本分布也常记为X ~F(x,0), 0已0或X~/(rr，6O, 6>e0.若把f(x,0)看成参数<9的函数，则称其为又关于参数0 的似然函数.

今考虑样本 X = (JV,,".，XJT 的函数 T = T(X) = (7; (X)，...，TA(J))TeR\ k^n,其观察值为 t = T(x)9 可设 x e 时，T(x) = i g X与义类似，随机向量T=T(X)也可表示为(，Br，G)，0^0, 其中艮为上的Borel域，€ 的定义如下:

定义2. 1. 1 T=T(X)称为X的一个统计量.若i = 7(%)为上的可测函数，即若BeBr,必有

P:(.)定义为 P:(B) 4= |

以上导出测度Pj(-)的定义可等价地表示为

f,:(1) ^fr_l(g)dP^(x);或£/s(1)dP](t)= fjT.l(B)(x)dP^(x)f

(2. 1. 1)

其中/fi(0和乙-(幻为示性函数，易见上式对示性函数的线性组合， 即简单函数也成立:

nn (1) d尸:(1)=h

ai/r-^(Bi)(x)dP^(x).

由于可测函数可表示为简单函数的极限，因此在一定条件下对可测函数 饥(1)有

f广(1)dP:(t)=fr_i(B)m(r(x))dP^(x). (2.1.2)

下面开始介绍充分统计量的定义.首先从直观上了解其含意.给定 样本 X = (X,，...，XJT 和统计量 T=T(X) =([(X)，...，7\(X))t，统计 量 T=T(X)是对样本X 的一个加工或压缩.通俗地讲，X 所包含关于 参数e的信息=r(x)包含关于参数0的信息+ r(z)已知后x还包含关 于参数0的信息.若T = T(X)为充分统计量，则后者应当为零，即 r(x)已知后，x 不再包含关于0的信息.严格来讲，就是r(z)已知后，尤的条件分布不再与0有关.因此可引出以下定义.

T = T(X)的导出测度

2.1充分统计量

定义2.1.2给定“0，T=T(X)称为充分统计 量，若条件概率| Z(X) =0 ▲ P^(A | t)与0无关，即条件分布 F(x | £，60或条件密度/(x | f;<9)与无关. ■

易见，若P^(A\t)与0无关，则r(x)已知后，X\T不再包含关于 沒的信息，因而T=T(X)包含了与;V—样多的关于参数0 的信息.反之，若f(x I t;e)与0有关，贝Ij J/(X I t;0)d/jL(x) = 1就是关于❷的一个约束条件，一个关于0 的信息.

易见，X 本身即为充分统计量，因此充分统计量必然存在.判别与

导出充分统计量的方法通常有两种:一是直接根据定义判别X\T的条
件分布是否与参数P无关;二是应用下面即将证明的因子分解定理.本
小节简要介绍直接判别法，下一小节专门介绍因子分解定理，它在统计 学中有极其广泛的应用.
以下引理给出了 X\T的条件分布的一个比较简明的表达式，应用 时比较方便.为了明确起见，今记X和r(X)的分布密度分别为X= (;V,，“.，XJT V(弋，...八(6)=/(x;^);
T=T(x)=(r1(jr),...,rA(y))T ~
fb' 人
，...人;的=/Gw).联合分布记为(x，r(x)) = (1\，...，尤„;7\，."
,
L)T~/(i
/*(xi，...，欠。I q，...，心(4)=f(x \t;e).
，...
引理2.1.1给定x~ r= 以及条件分布可表示为
，... ,xn
(2. 1.4) ... q，...,
=f(x1t
;o);条件分布记为(X\T(X)=0 -
则x和r(i)的联合分布
/*(X1，...，Vi，...A;沒)=/(^1，...，;沒)/|%:T(x)-tI, (2.1.3)
fix、，."，xn\Q)I |x:7\x) =t }
«;沒)
f(X'，...，X。"I，...山(4)=/(允"...，欠„ 即 =f(x;0)f(t\X;O) f 而
时，T(X)\X=x退化;这是因为当X} =Xj,
TV"...，xJ=G 因而H·)l又就确定了，即P\T(X)=t\X=xJ =1, PjT(X) |X=%) =0,或
70丨弋,xn;e) T(x)=t,=/\xtT(x) o, r(x)
因而/(x,r;(9) =/(^;6>)/ |%:r(x) =t I ;此即(2.1.3)式.由(2.1.3)式 即可得
(2. 1.4)式. 置
“
证明 今记dT1)的取值为(X,T)=(x,/)=(
G)，由于
，... ，尤
沒)
，...人 | Xj，."，%„;沒)， 为退化分布，即当尤=x
,Xn=xn给定时，则有

以下举两个例子，说明判别充分统计量的直接方法.
例2.1.1 设 ，...，Xn 为i.i.d.样本，X} -Poisson分布P(A),
r=Z 则
(1) r 为充分统计量;
(2) 若n=2,则X. +2X2不是充分统计量.
证明 (1) X, ~ e-A 由Poisson分布的可加性，T ~ <"A(nA)7H.由(2. 1.4)式可得
品...- (打入) -aA
/! 6

(2)为证X1+2X2不是充分统计量，只需举一反例，说明条件概
率与A 有关即可..
=0，X2 =1 |X, +2X2 =2)
P(X} =0,X2 =1;X, +2X2 =2)
= P(Xl =0fX2 =1) + =2,X2 =0)
=(1+f).
该式与参数A有关，所以1 +2X2不是充分统计量. | 例2.1.2设X,, ...，兑为i. i. d.
样本,Xx -均匀分布7?(0,0),则
/(- M) =
~rr 该式与参数a 无关，因此r 为充分统计量.
I
二
A.
r
(nA)'
z A
iix«! e
«=i •
nn^ <=i
!
T = Xin)为充分统计量.
证明 仍然应用(2.1.4)式.由假设可知: n
f(x，❷、=n[+’(0 I]=-^/(0<X(4)
当r = U 寸，X(1)/0~BE[n，” , 因此
/ t \n_, 1 tn~l T -J -I\O^t^0| =n-^-1
以上两式代人(2. 1.4)式可得
/(%;汐)/ |x?r(x) =t |
\IU(1) >01.
.
f(x |

n |o石%(n)ci9 U U(1)多o nO~nt n' l I
该式与参数0无关，因此T = X(n)为充分统计量. 2. 1.2 因子分解定理
Ua f
因子分解定理可简单方便地求出充分统计量，用途极广.其严格证 明比较复杂，可参见陈希孺(1981).以下的推导和证明是一种比较简 单的情况.
设统计量T=T(X) =(T}(X)9...,7\(X))t, k<n，今补充一个辅 助统计量 W=W(X) =(% +l(X)，."，『n(X))T 使;V->Z = (7\『)为一 一对应(『显然不唯一).例如，若T = 子，可取妒=(尤2，...，XJ, Z = , ...，XJT;则显然y与Z = (T,W)一一对应.假设尤与之= (T, W)之间变换的Jacobi行列式不等于零，即|芸1 =
, ... , x n)
#0,记(r(x), r(x))=z(x)^x =x(z)=
X(T,W).变量之间的函数关系记为z = Z(x) = (T(x)fW(X)); X =
X(z) =X(t,w).由此可得到X和Z的密度函数之间的关系，记X～ /(x(4) , Z = (T,IF)❷)，则有
f(x;e)=p(T(x)fw(x);o)
dx

(2. 1.5)
看，r为充分统计量，即X\T的分布与0无关.而X\T的分布与沒无 关应等价于z| T的分布与<9无关，BP(r,JT) I T的分布与<9无关，也等 价于(W\T)的分布与0无关.因此有以下引理:
引理2.1.2在上述条件下，r(x)为充分统计量的充要条件是 p(w | t.;0)与 0 无关.
p(«，w;沒)=f(x、t，w) ;e)
(2. 1.6)
d(t，w) 下面把辅助统计量W=W(X)应用于充分统计量的研究.直观上来
证明 由(2. 1.4)和(2. 1.5)式可得
p(T(x),IF(x);<?)ZU:T(x) =z |
d(G加) dx
匯

=p(W(x) \ T(x) {x:7(%) = t) | d(t,w)/dx | .
因而与0无关的充要条件是p(W(x)|T(z);0)与0无关，即
p(w|以)与0无关. ■ 定理2.1.1(因子分解定理)T = T(X)为充分统计量的充要条件是f(x;0)可分解为
f(x;0) =h(x)g(T(x) ;0) 9 (2. 1. 7) 其中AU)和都是非负可测函数.特别，若T=T(X)为充分统计
量，则上式g(/;^)可取为r 的分布密度，但反之不需要.
证明 为应用引理2.1.2,取雨使Z =(r,JF)与X—一对应，并设
Z=(7,W7) ~p(t，w;❷). “必要性”.若7XZ)为充分统计量，要证(2.1.7)成立.由(2.1.5)
式可得
=p(T(x)?W(x);0)
dx
=P(nx);0)p(W(x) | T(x);0) 3(VW) dx
=g(T(x) ;0)h(x),
其中 g(T(x);0) =p(T(x);^)为 T = T(1) 的分布密度，h(x)=
P(W(x) | | d(t9w)/dx\.由于r(JT)为充分统计量，由引理 2. 1.2可知，p(W(x) | T(x) 与沒无关，因此A(x)与沒无关，
(2. 1.7)成立.
“充分性”.若 =g(T(x);e)h(x) 9 不一定为 r(X)
的密度，要证为充分统计量.由引理2. 1.2,只需证明p(w | t;0) 与6>无关即可.由(2. 1.6)式和(2. 1.7)式可得
dx p(t，w;0) =f(x;❷、 d(Z，w)
|J|
=g(T(x) ;0)/i(x) 其中|J| = I dx/a(Z,w)|,因此条件密度p(w\t;0)可表示为
，
jp(t，w;3)dw
(尤G,w))|门 ^(t;^)h(X(t,w)) \ J \ dw
=h(X(t,w)) | J|/lh(X(tfw)) |J| dw.
该式与无关，由引理2.1.2知r = r(;r)为充分统计量. ■ (2.1.7)式表示:若7XX)为充分统计量，则;V的分布f(x;0)仅通

过 r(JT)的分布依赖于从
推论(1) X本身为充分统计量.
(2)若r(x)为充分统计量，并且为S(;V)的可测函数，g卩T(X)= <^(5(X)),则S(幻为充分统计量.
注意，充分统计量的可测函数不一定是充分统计量.例如，X 为充 分统计量，但其可测函数显然不一定是充分统计量.
因子分解定理是判别与推导充分统计量的有力工具 ，有非常广泛的
应用.下面举例予以说明.， 例2.1.3 设X:，...人为i.i.d.样本
❷)或A ～P(A)，
求充分统计量. 解对两点分布
n
-❷y_Xi i=1
nn Xxi n-2
=0...(1-<9) i=, =g(T{x)，的• 1.
因此r= •为充分统计量.Poisson分布类似，T=f%,.也是充分
'• =1 统计量.
例2. 1.4设X|，...，夂为i.i. d.样本，X, 久^为充分统计量.
iT\
|
则义(1)，...，
解
/(攵，...，么;沒)=n = nf(x(i);^) i=1 i=1
=茗(况(1)，...， ;6>) • I- 由因子分解定理，X(1)，...， 为充分统计量. I
例 2. 1. 5 设 Xt，•-- ,Xn 为 i. i. d.样本，X! ~7V(yu,cr2)，求充分统计量.
解
- 2好 Z ～
i)若CT已知，则『=为充分统计量; «=1
若a未知(M已知或未知都一样)，则T = f ^Xi9^xA为充 分统计量.或等价地(根据推论)，可取T{ = (X,52)为充分统计量，其
ii)

中 X = n'1 y xt., S2 = n'1 y (Xt- - X)2. I i-J is1
例2. 1.6 解
设苓，...，总为i. i. d.样本，Xx -R(0},02)9求充分统计量. n1
,02)=门 n _~TZ
=\ey1 =
<义C沒2 |
X(l> X(n) °2 \
X(D 1 7 lX(«)名 AI •
(2. 1. 8) 因此r =(x(1),x(n))为充分统计量.若氏已知，则久^为充分统计量. 特别对x. 为充分统计量;若氏已知，则;v(1)为充分统
计量.
例2.1.7 设 ，...，X”为i.i.d.样本，i)^!-/x+E(l); ii)X*~
A + E(A)，求充分统计量.
解 i)对A~m+E(1)，
n

f(xyz) = f] e'(x,_M)Z |%£ > JU | »= 1
=e-nxen" \x(l) = h(x)^(x(l), /z).
n
注意，此处用到了 n7i^>Mi=dx(1)>M).因此r=x(1)为充分统 1
计量.ii)对晃 ~m +e(a), \ n
/(x
;A,/z)=门 Ae_A(W 门 i=1
U(1)彡蚪 | .
(2.1.9) 该式仅包含x(1), x,因此=(x(1)J)为充分统计量.或等价地(根据推
论)，可取r; =(x("，土不)或r=(x(1),S) ,5= 土(H") = 土j,
-为充分统计量，因为r,，t;, r都是一一对应的，互为函数. ■ 注意，对于指数分布x,
~/x + E(A), r = (x(1), s)为最常用的充分统计
量.由定理1.6.2可知，J(1) ~/z+r(nA J), 5~r(A,^ -1)且相互独立. 例2.1.8 截尾
指数分布.设A, ..., 夂 为i.i.d.样本，久～^十 r(A,l);只观察到前r个统计量
(Z(1), ...,X(r)) 求充分
■
2. 1 充分统计量
55
统计量.
解 (r,, ..., !;)的联合分布在第一章已经求出，由(1.6.13)式可得
加，"., /,)=(二"rexp-A 2夂+(n-r)yr-n/x\l\yx I. 1=1
因此7\=(X(1), 7;,J为充分统计量，其中Tnr = ^X(0 + (n - r)X(f). i=H
应用上经常取其等价形式7,=(X(l),S1),其中S. =Tnr-nX(I).显然7; 与丁- 对应. I
注意，由定理1.6.2可知，X(1)与S,相互独立，且有X(1)-fl +
r(nA,l), S,～r(A, r-l). 例2.1.9二元正态分布.设..., (u„)为i.i.d.样本,
(X, , ,yLt2,crj,(j\,p), 0=(/£j, /X2,CT1 o\,p);求充分统计量. 解二元正态分
布的密度可表示为
f(x,y,0)
=(- 4=^ \21TCT,(r2 v1 —p‘
-1 2(1
^)2]}
-x、2 +n(x-/I,)2
\ —Mi
(T\ a2I
-1 _'1/JL C^exp 2(1 -/7l:~(i\i=i
x exp
V [/x« ~
y(xi- (y.-f) +n(x-ynJCf-/Z2) 4=1
+ A(g (y, -y)2 + «(y ~A2)2)][
(2.1-1。)
因而充分统计量为r=(xj,s(x),s(r),s(x,y)),其中5(x)= E(x<- J)2,s(r)=t(r厂
F)2,s(x,r)=^(x,.-x)(yt.-F).另外,
*=j
j-i i=i 若P未知，则不管川，M2, g 是否已知，都以丁为充分统计量;
若p =o, 则充分统计量为(x,y,s(x),s(y));
若p, a , <r2已知，则充分统计量为(^,y). | 例2.1.10求指数族分布的充分统计量.
解 (1)若X-f(x^) ^h(X)eQT(e)T(x)-b(e),则 r(Z) =(7\(X), ..., T人XW 为充

分统计量.
(2
)若
Xn为 i. i. d.样本，A 、指数族分布

Wxje即(6)-(10)，则
X =(x,,-,xn)
此时充分统计量为
T=TW:2r(x,)= 2帆)，...，£7\(1) . I «•=1 \ iTi i=i /
注意，以上结果适用于指数族分布的每一个成员，诸如:二项分 布、Poisson分布、正态分布、尸分布、冷分布等等.例如对于r 分布: 若X,，...人为i.i.d.样本，x1 ~r(A,i/).
由于
/(^!,A =exp[-A%! +(^-1)In +pinA-Inf(i^)], Uln X:
2.1.3极小充分统计量
给定样本X = (X:，...，X„)T,充分统计量T=T(X)是样本的一个
“加工”，在加工以后，信息没有损失;这是统计推断中对统计量的基 本要求.进一步，还希望这种“加工” 越 “精致” 越好，即在不损失 信息的前提下，所用的统计量越少越好、越简单越好.这就是极小充分 统计量的涵义.
首先从直观上说明一下统计量的大小概念.设T = T(X) =(7\，...，
Tk)T(k<n),它是样本X=(X.,..-,XJT的函数，也是对样本的一个
“加工或压缩”，可认为原来的X 大， “加工” 以后的7(又)小.例如 n
可认为X = (Xl9...， 大，Z 小.对一般情况，给
定两个统计量T=T(X)，r =T* (X),若V (X)为r(X)的一个“加 工”，即T* (X)
=^(T(X)),则可认为71大，广小.这也可从函数映 射观点来了解其大意.设z = r(X) e 巧 C =T* (x) eJ?* , 对函数z* =
T =n1i=1
平(1),
,
因此直观上可认
记则
=);
为，大，了 小.本节介绍的极小充分统计量;以及第四章介绍的最大 不变量都按上述意义来理解.
定义2.1.3称T =T*(X)为极小充分统计量，若V =r(X)为 充分统计量;并且对任一充分统计量r=r(x),都存在<p(.),使

I
的一个“加工”，因而r*(X)小，t(x)大.以下给出判别、求解极小
充分统计量的方法.
引理2.1.3 (1)设T=T(X)和r' =T*(X)为统计量，若
由 T(Xl) =T(x2)可推出 r(XJ =r*(%2), X,,x2e^, (2. 1. 11)
则必存在#(•)，使 r*(x)=^(r(x));
(2) r=r(x)为极小充分统计量的充要条件是:r*(x)为充分
统计量，且对任何充分统计量T = T(x)有:由r(xj =r(%2)可推出 r*(x,)= r*(x2);

%!, x2 e 及:
证明(1)定义映射少(•)使得V(x),Vxe^:则 #(•)确实是一个函数，因为(2. 1. 11)式保证了:对任意的T (xt) # r*(x2),都有r(%,)0r(x2)(即在以上定义的映射r =^(0中，不会出 现一个r 映到两个不同的r 的情况).
(2)由(I)可得T*(x)=^(r(x));由定义可知为极小充
r(x) =^(r(x)). 由以上定义可知，极小充分统计量是其他充分统计量r(x)
分统计量. T
定理 2.1.2 设x =(x,,-,xn) 0g
U 画 , 对任何
, e、/f(y，0、与0无关的充要条件为r (x) =r*(r),
x,ye.>r;若似然比f(x 且广:=厂(JQ为充分统计量，则广=厂(幻必为极小充分统计量.
证明 设r = r(x)为充分统计量，要证厂(X)为7/x)的函数，由 引理2. 1.3，只需证明:由7(%,) = T(x2)可推出V (xj = r (%2);
久，X2 W , 今假设T(X1) =T(x2); X" x2 由充分统计量的因子 分解定理可得
A戈1，沒) g(『(A)，沒)/1(\) /i(\) f(x2,0) g(T(x2) ,^)A(x2) —h(x2)’
该式与0无关.由假设条件，上式与0无关的充要条件是T*(X,)= TD.因而我们证明了:由r(x,)=r(x2)可推出r*(x,)=r*(x2);
%2eJ^:由引理 2. 1.3,必存在 #(•)，使 T*(x) =^(T(x)),因而 r*(x)为极小充分统计量. ■
从下面的例子可以看到，由该定理经常可以很方便地导出极小充分 统计量.
例2. L 11设X,,...，^ 为i. i. d.样本， (❷，1)，求极小充分 统计量.

解
例2. 1.12 分统计量.
解
(n\ f(x,0)
Hrfe]
IS 1
卜1* -A2x4I {x(1) > 0 j .
X f(x,6)=
1
_土2 (xi-e)2 e ixl
f(x.O') 4.2(^-^)n(x-7)fl --------- = e *s, e .
似然比与0无关的充要条件是x=y,因此犷=支为极小充分统计量. |
设X:，...，x„为i. i. d.样本，Xx ~r(A,^),求极小充
= n[f<rre，/fo 01
Ay.o) 似然比与0无关的充要条件是= fjy.,
(ni \1=1 1=1 /
1
为极小充分统计量.
i-1
i=1
= 土》 因此广= i=1
|
解
ru 1=1 7

Ox* e i=1
指数族分布.设A;，“.，X„为 i.i.d.样本，X、~ x r " 1 (?T(tf) X T(Xi)-nb(0)
例2.1. 13
h{xx)^ 9}T^-^},求极小充分统计量.
f(x,0) = J A(%
.)je ,=I ,
私沒)=[A心]M,.卜者叫 [H A(rj]
^
t
似然比与(9无关的充要条件是T(Xi) =1; r(r.).因此r =j^T(xi) 为极小充分统计量.
*1 u i=l ·
注意，以上结果适用于指数族分布的每一个成员，诸如:二项分 布、Poisson分布、正态分布、尸分布、p分布等等.

2.2统计量的完备性

例2. 1. 14 设X,，...， 为 样本，X、~指数分布# + r(A,l),求极小充分统计量.
解
似然比与(A,M)无关的充要条件是2%,. = i=1
=y(1).因此广=
分统计量，S
- nX(1). I
Ae_A(Xi_M)/ {xt.
/(x,A ,/x) =
-a y x-
=A"eG'enX*7 (1)> |.
/(x,a,m) -4 i ----------------e L ,=i ,•| J ------------------ .
/(yM ,jU)------------------------1 !y(1) > I nn
i番1
n
/X |
i=1 为极小充分统计量，或等价地，f* =(X(1)，S)为极小充
n
I=1
例2.1.15设久，"•，总为i. i. d.样本，X, ~尺(久為)，求极小充
分统计量. 解
f、X，❷、=(~-❷)!^1^X(l)1-^!x(n)^^2 I »
八x，e) 门久冬%(1)[£U(4)(❷2i f(y,o) I \6}矣y(1)\I \y(n) ^e2 I*
似然比与0无关的充要条件是*(1)=y(1)，*(4):y(4).因此T* =(X(])，为极小充分统计量. ■

2.2统计量的完备性

统计量或分布族的完备性与可测函数的数学期望，即积分有关;对 于一族分布，则与积分变换有关.例如EJA(X)]，可表示为一个积分
变换:E0[h(X)]=卜(x)dF“x) = g 0.统计量或分布族的完
备性实际上就是积分变换的唯一性.本节要讨论的问题是 :若上述积分 变换 ^(0)=0, V0e0,是否有 h(x)=0(a. e. PJ ?或等价地，若 <p,(^)=]=<p2(^)，V^e0,是否有 hl(x)^h2(x)(a. e. Pff)?注
意，以上结论不一定成立，例如X~7V(O，a2)，Ea(X)=0f \/a 成立，但 A(x) = %#0(a. e.).

59

下面首先介绍分布族的完备性与统计量的完备性;然后讨论指数族 统计量的完备性;最后介绍Basu定理，该定理揭示了完备充分统计量
的重要性质.

2. 2. 1 分布族的完备性

假设或直接表示为 :F=\f(x，❷),
| ,其中 F\x，0>f(x，❷).

定义2.2.1设X \f(x90)^^0),称分布族丁为完备的,
若对任何可测函数h(x)，由(10) :EJA(%)]= fh(x)dF9(x) = 0对任
何沒成立，可推出h(x) =0(a. e. Pff).或等价地，由Ee[hx (X)]= EJA2(X)]对任何0^0成立，可推出h}(x)=A2(x)(a.e./\). |

完备性在一定意义上相当于积分变换的唯一性.^(0)= fh(x)dFff(x) =Ej/i(X)]相当于h(x)^<p(e)9 若由 ^(0) =0 可推出
h(x) =0,即通常积分变换的唯一性.因此可由常用积分变换的唯一性 来判别分布族的完备性.常用的积分变换有傅氏变换:/(幻
P(Z)= 6了(幻如(%)，即特征函数，它在S (- 00 , 00)上都存在且有
唯一性，即由(p(t) =0可推出f(x) =0.另外还有Laplace变换:f(x) »->
^(s)= f e-y(x)dM(%),即矩母函数，该式在处存在，若至少在s J-00
=0的某个邻域(开集)内有定义，则也有唯一性.下面举例予以说明. 例2. 2.1尸分布族ir(A^)|有完备性.

解若有
则对任何(A，p)有fo°Dh(x)xt，'Ie-Axdx =0;该式左端可视为h(x)xlf-1的拉氏变换，因此由拉氏变换的唯一性，可以推出h(x)xv~l =0(a.e.)，不为零，即得h(x) =0(a. e.).类似地，分布族7*0 = fr(A,P0)[亦 完备. ■

例 2. 2. 2 正态分布族:F = ; /V(M,(r2) | 的完备性.

解 (1) =j7V(g，l)，从e(-00，+a)}完备.因为对任何好，由
 EJA(X)] = f h(x)
/o_
e-+(～)2dx = 0

可以推得
= (h(x)e 2戈eXfidx = 0. J - c©
由拉氏变换唯一性可知:/i(x)e'^2=0(a. e.),即可得h(x) =0(a. e.).

(2) y2 = /££(-oo , +«))完备.与(1)类似.

(3) ^3 = j/V(0,a2),a2>0 | 不完备.因为 h(x) =x，Ej/i(X)] =0,但 /i(%)#0(a. e.).

(4) 7-4 = |/V(Mo,a2),a2> 0 | 不完备.与(3)类似. (5)T=|/V(M,a2),V/x,<7|完备.因为若对任何(M，a)有
fh{x)<p^(x)dx = 0 , 其中K a(x)为正态分布叭蚪，。2)的密度函数，
必有 =0,V/t,由(1)知h(x)=0(a.e.). |

推论 若^=\f(x,e)7e^0 }完备，0'2)0，则r \f(x,g)toe 也完备.但是反之不一定成立.

因为若对任何0E&，由<p(6) =EJA(X)] =0,可推出h(x)= 0(a.e.)，则对(p(0) =0,V(9e0']0，当然有 h(x) =0(a. e.)(直观 上，越多的使EJA(J)]=<p(0)=0,越容易有h(x)=0).另外,

在例2.2.2中 成立.
， 丁完备但不完备，因此以上结论反之不一定
以下介绍判别完备性的其他方法.
例2. 2. 3 二项分布族7 = | 6(n，幻，0 e (0，1) |的完备性. 解 若对任何0有
<p(e)=0,即
由此可推出
<P(e) =
幻(:)矿(1 -o)n'x = o.
n
该式为y^Y^o的"次多项式，它对一切y〉o为零，则其系数必为零，即 A(x)(x) =0,所以
A(x)=0, ^=0,1,-,n. ·
例2.2.4均匀分布族:F= \R(O,e)90>O |的完备性. 解若对任何沒有
E^[h(X)] = f h(x)3~ldx = 0, Jo

则(p(0) = h(x) dx = 0 . 由于A(rc)可测，其不连续点为零测集.在
九(%)的连续点处，<p(e)可导，因此对任何 W 幻的连续点0处有 (p\0) =h(0) =0,即
h(0) =0, V0 (a. e.),因此有 h{x) =0 (a. e.). |
例2. 2. 5 位置参数指数分布族7 =)^(1，m), V/z f的完备性.
解 若fA(x)e_<t~M>dx=0,则 =Jh(x)e~xdx=0,V/t.
在A(x)的连续点处求导可得p'(M)=-/r(M)e_"=0,因此有h(x)= 0(a. e.). |
推论.(M+r(A,Dl完备.这是因为^+r(A,i)|D^+r(i,i)|. 2. 2.2统计量的完备性
统计量的完备性与分布族的完备性有显著差异，下面是一个例子. 例2.2.6设X!，...，独立同分布，Xx ~/(a;!，0)且E(y()存在，
则分布族 I = (X]，...,XJT - ，❷ e 在任何情
况下都不完备.
证明 若取h(x)=Xi-x2，则E9WX)] =0,但/i(x)显然不为零.| 由此可见，对最常见的独立同分布样本Xl,^,Xn而言，其分布族
都是不完备的.但是并不排除该分布族中有完备的统计量.例如，在例 2-2.6中，若X,～
叫,a⊥ 则对应于A或X的分布族完备(见例 2.2.2).由于统计量才是统计推断的出发点，因此讨论统计量的完备 性更有实际意义.所谓统计量的完备性 ，即它所对应分布族的完备性.
定义2.2.2 设X ,0e.(E>},统计量T=T(X)对应的 分布族为T~:Ft: U(z,6>),6>e0
|，若分布族堯备，则称T=T(X) 为完备的统计量.即由Ee_h(T)~\ =0对任何0成立，可推出h(1)
=0(a. e. Pj).
例 2. 2.7 X~7V(O,cr2), ^ = {/V(0,a2)}不完备，但是 T=T(X)=
y2 A? A 兀奋•
证明由于X2/a2 -/(!),因此有
若EJA(T)] =0,则有(1)r1/2e～(2a2)(k =0,取5 = l/(2a2),则由
拉氏变换唯一性有 h(t)t'i/2 =0,即 A(f) =0(a.e.P^),因此 T=X2
Xz
兀爸. I

由定义及以上例题可知，统计量的完备性有以下性质:
i) 若完备，则57完备，但反之不真.

ii) 若T^T(X)完备，则S(X) =^(T(X))完备，但反之不真.
iii) 若(s,r)完备，则r完备，但反之不真.
例2.2.8 X'，...人独立同分布，X'-7V(^,a2),则|(久，...，
总)1不完弋备(见例2.2.6). 但是X ^N(^ta2/n)完备(见例2. 2.2). n
. 同时，T:
(X,s)也是完备充分统计量(类似于以下例2. 2.9). | 例2.2.9 X"...，及独立同分布，
~/z+r(A,l),则T=(X(1),
S)完备，因而为完备的极小充分统计量.
证明 记r=(y,s)=(x(1),s),则y, s独立，且有
F=又(1) ~)u+r(nA,l) ,
S-V(入,n-l) r 若E[/t(y,s)J =o,则有
该式等价于
jf[fA(p)广2n]e吻dy =°，VA，*
该式在h(y, s)中y的连续点处对g求导可得 -[丄\(从，s)，-2e-A,ds]e_咖=0,VA,
由此可得
{A(/Z，5)sH5 =0,VA,fJL. 由拉氏变换唯一性知=0(a. e.),即得h(y,S) =0(a.
e.),因此
5=2 (i=1
- 1)
}完备(类似于例 2.2.7)
e~Aisn-2I\s^Q I. J /i(y,5)e_nAye_As5n_2dyd5 =0,VA, /x.
T= (X(1)，S)为完备的极小充分统计量. 例2. 2.10弋，...，夂独立同分布，X{
极小充分统计量.
证明 X(1)/❷～BE(n，\)，故有 ❷
)
| 则X<n)为完备的
x
(n
❷、=n(含)
.
(n - 1)
若EJ^(T)] =0,则loh(t)tn~]dt = 0,该式在AG)的连续点处对<9求 导可得h{0)on~x
=0,所以h{e)=0,即h(t)=0(a.e.),因此71=X(n)

为完备的极小充分统计量. I 注:若苓，...，夂独立同分布，弋~尺(氏，氏)，则r =
(x(1)，又(8))
为完备的极小充分统计量，证明详见陈希孺(1981 ,p. 78).
例 2. 2.11 独立同分布，X, 则 r =
为极小充分统计量，但不完备. 证明根据均匀分布的性质有
(^-y)～及(0,1).
则由第一章的定理可知
r(4)一[(1)-尤(1)項 (n-l，2). 因此E，[X(4)-X(1)]=(n-l)/(n+l)对任何0成立，
即EjX(rt> -X(})- (n-l)/(n + l)] =0,但显然 X(n) -X(1) -(n-l)/(n +
l)#0;因此 r=(x(1)人>)不完备(直观上看，对于X,4(么為)，由(H)转变为
卜一士相当于参数空间由二维退化为一维，因而使

E(M2)O(r)]= o的参数(4, ^) “不够•多”;所以不足以使h(t)=0. 后面例2. 2. 13的情况也类似). I

另外, 可以证明, 次序统计量X(1), ..., X<n)为完备的充分统计量, 详见陈希孺(1981,p. 82).

2. 2.3指数族统计量的完备性

定理 2. 2.1 设 X-f(x,0) =/l(x)etfTr(*)-6(fl), 假设 0 有内 点(即亦为*维集合), 则

(1) T = T(X) =(T1(X),...,TJX))t为完备的极小充分统计量; (2) 若X,,•••,%„为其a个独立同分布的样本, 则

(心 1(岑), "•, 念(10)))T

为完备的极小充分统计量.

证明 只证明(1)即可.不妨设内点00 =0,否则可变换到e=e-

氏, 则&=0为内点.由第一章的定理可知,

T(X) (z)e八“(9). 若Ejg(D]=0, Vh 则有

2.2统计量的完备性

jg(1) A*(1) e心(10)如(1) =0, Vl9.

因此有

(p(0)= jg(1)厶*(C'dfi(t)= 0,V

上式在包含0 =0的某开集内成立, 因而由拉氏变换唯一性知 g(t)/i* (t) =0(a. e.), 显然 h* (0 #=0,所以必有 g(1) =0(a.e.), 因 此HX)为完备的极小充分统计量. |

由以上定理可推出许多常见分布, 如正态分布、二项分布、Poisson

分布、厂分布、冷分布等情形的完备的极小充分统计量.

例2.2. 12设X,, ..., X。为相互独立的样本, 且X广N(0, a2)-切

求完备的极小充分统计量:(1)若孓~/V(y2); (2)若 ^(0,^'*a2);其中yeR, w〉0,都是未知参数..

解 (1) X = (X,, ..., Zn)T的联合分布可表示为 /(%,沒)=exp卜 ^7 + ~^txi - ^2 - y-log(2Tr(r2)

n

其中厂(%)= D (

其中 r,(x) = - l/(2a2); r2(x) =4, (?2(^)=

-a)/(2a2); b(0)=nlog力时2-士logo).因此, (冗 为完备

的极小充分统计量. 鑒 以下是不符合定理2. 2. 1所列条件的一个反例.

例2.2.13 设(U,), ..., (K)独立同分布, (X^YJ-N(^9

戸i 6(^)=^2+^72^.因此,

;

, Q人e) = ~l/(2a2); T2(x) =xi? Q2(e) =y/a2

为完备的极小充分统计量. (2)类似地, X =)T的联合分布可表示为

65

M2,

,

:

/

4)(即p=0),可化为指数族

=T(X),T2=X, r3=r(7), t4=y,

其中 t(x)= 土

<=1 :=1

Hn = 2 y?-因此T=(T(x)9xfT(r),y)为完备

的极小充分统计量.但是若(4,6) 即A=M2, Mr 仍然为极小充分统计量，但不是完备的统计量.因为对任何/X，Ee(x- Y) =0,而显然I > y#0.这一结果与定理2. 2. 1并不矛盾.因为当

时，参数空间退化为3维，无内点. 麴 2. 2. 4 Basu 定理

完备充分统计量与独立性有密切关系，表现为以下Basu定理，先 介绍一个常用概念.

定义 2. 2. 3 辅助统计量(ancillary statistics).设 X , 0 e , 若统计量

A=A(X)的分布与0无关，则称4(X)为辅助统计量(即

A(X)中不包含关于0的信息).

例2.2.14设弋，...入 独立同分布，X. ~7V(^,1),则

|

i=l 因为与0无关.T=X{n}-X(1)亦为辅助统

为辅助统计量，

计量，因为T=(x{n)D -(j(1)-沒)=y(4)-y(1)，而 /V(0,l),其分布与0无关. 鑿

定理2.2.2(Basu定理)设X~{/(x,6>),6)e0), ?=?(%)为完备 充分统计量，A=A(X)为辅助统计量，则7XX)与X(X)独立.

证明 为证r(x)与?1(X)独立，只需证

Pe\A(X) ^B\ T(X) = t\ =Pe \A(X) efi j , MB. (2. 2. 1)

首先注意，(2.2.1)式与0无关.因为在左端:r(x)为充分统计 量，因而X\T分布与0无关，所以左端概率与0无关;而由辅助统计 量的定义可知，右端也与6无关.易见(2.2.1)式等价于

Pe I r(X) =r f-=^ (2.2.2) 若记C=4-|(5)=u: I，则(2.2.2)式可表示为

Po \X^C\T(X) =t } =W(C). (2.2.3) 记该式右端P^(C) =a,它与❷无关.因此要证(2.2.3)式，即相当于

要证

E, UC(X) | T(X) =z) =a. (2. 2.4) 为此可应用 T=T(X)的完备性，记 h(t) =E, \IC(X) | T(X) =2 | -a.

要证(2.2.4)式，即相当于要证/i(t) =0.为此，可计算其期望 EJACT)]

=E,)EJZC(X) |T](-a

-a=尸》(C) -a=0. 由于T:T{X、为完备充分统计量，由EJA(T)] =0,可推出h(t)=0(a.e.)，因而(2.2.4)式成立，从而(2. 2. 1)式成立.因此F(X)与

n

4(幻独立. ■

例2. 2.15设孓，...，Xn独立同分布，弋～7V(M，a2),则 n

(1)X与统计量S1=n-1Y(Xf-X)2, s2=n-1

iTi i=i

s3 =x(n) -x{1>, s4= | J(1)-x(n I 独立.

(2) 若g(%j,...，太J满足平移不变性，即g(xx +c,

|xt. -X|,

+c)=

g(%,，...,xj，则无与 ，...，X„)独立.

证明 任意固定a=a09则X为完备充分统计量.令=Xi-,

Z= l,..., a,则K～7V(0, d),其分布与M无关. nn
(1) Sl=n-]^(Yi-Y)29S2 = n'1 \ Y, - Y\ 9S3 = K(n) - K(1), i=I i=1
s4 = | Y(i) - Y(j) |都是辅助统计量，因而与完备充分统计量i
独立. , ..., XJ -鲜, ..., -弘)=
(2) 由平移不变性, g(K, ..., rj，因而其分布与并无关，为辅助统计量，所以与i独立.
以上独立性对任意的A 成立，因此对x, -n(m,o-2)也 成立. I 例2.2.16设芩, ..., 之独立同分布，A ~/z+r(A,l)，则对任意
厂
的/，人I(1)与X(7)-X。)，弋-久独立;也与S: = Z(x(o -尤(1))+ i=1
-r)[X(r) -X(1)]独立.
证明 对任何固定的a =a0，则x(1)为完备充分统计量.若记r, .=
h
p 无关，都是辅助统计量;因此可以得到以上结论. ■
, / = 1, ..., n，则乙的分布与弘无关，Xi-XJ = Yi-YJ的分布也与
例2.2.17设芩, ..., 叉独立同分布，AKCM)，则对任意的Z,
h X(4)与%(1)/又(7)，A/久独立.
证明 若记r =X,/^,则其分布与0无关，因而Xi/xj = Y/Y.的分
布与0无关，都是辅助统计量;由此可以得到以上结论. ■ Basu定理在统计中有广泛应用.对于完备的充分统计量，今后可 根据Basu定理得到与之独立的许多统计量，这在参数估计、假设检验 等问题中经常出现.比较常见的情形之一就是求条件概率或条件期望 (因为不少最优解常与之有关).例如欲求条件期望E0[W(X)|r(J)], 如果r(x)为完备的充分统计量，而『(X)为辅助统计量，即其分布与
沒无关(或者经过转换可化为这种情形).则由于p(x)与r(z)独立， 上述条件期望即可简化为无条件期望

2.3分布族的信息函数
分布族的信息函数是与充分统计量有紧密联系的概念.设% =(孓, ..., 若T=T(1) 为充分统计量，则用HZ)代替原 有样本X 作统计推断不应该有信息损失.自然要问，何谓信息?如何严格加以定义，并使之符合通常统计推断的直观意义?诸如:样本X 与充分统计量r(x)的“信息” 应该相等;(孓, ..., xn)T的信息应为各 分量X,, ..., 叉所含“信息” 之和;等等.事实上，符合若干直观意义 的“信息”的定义并不唯一，通常有三种:(l)Fisher信息，这是统计 学上应用最广泛的“信息”;(2)Kullback -Leibler信息(亦称K-L距 离)，它在统计中应用相对较少;(3) Shannon信息(即熵)，这是通讯 中广泛应用的“信息”.本节主要介绍Fisher信息，同时也简要介绍一 下 Kullback - Leibler 信息.
2.3.1 Fisher 信息
首先提出一组正则条件，这是定义Fisher信息所必需的，也是通常 研究统计问题所必需的;这些条件对于许多常见情形都能满足.当然也 有 “非正则” 的情形，届时再予以说明.
定义2. 3.1设 则称为正则分布族(也称为Cramer-Rao正则分布族或简称为C-R分布族):
(1) 设❷=(❷"...,
= 1,若分布族满足以下条件
,
❷ 0为R"上的开集;若❷参0’，则必 有M U: 〉0(即7•是可识别的，不同的么对应于不同的分布).

(2) 分布族的对数似然函数记为L(0) =L(0fx) =log/'(x,^), L(❷,
x)关于~存在二阶以上的导数，其前二阶导数记为Z(幻和L(0),其分 量为 dL(o，x、/det
和 d2L(orX)/d0tde.f i，j = i,...，k.
(3) 记L(e):s(x，❷)=(5,(%,^),...，sk(x,e)V，si(x9e)= dL{e,x)/de:.
S(x^)称为得分函数(score函数)，假定它在矽上存在 前两阶矩;即 EJ(az,/a<9.)(aL/
a^)]在 0 上存在，/，/ = 1,...，灸.
(4) F = \f(x，❷、， f 有共同支撑，即 = 1%: > 0 j 与 沒无关.
(5) f(x，❷)关于%的积分和关于<9求导可交换次序，即关于可在 积分号下求导数.
定义2.3.2Fisher信息.若0^0|为正则分布族，则
2.3分布族的信息函数
A;(8) 4 [拟::小“二:幻]，/(8) =(々(4))
分别称为分布族关于参数0的Fisher信息函数和Fisher信息阵.若丁 = r(X)4g(M)，沒
e0}为正则分布族，L(0,t)=logg(e,6>),则r(x) 关于参数e的Fisher信息定义为
～(4)w)=(～(4)).I
Fisher信息有许多良好的性质，与通常统计推断的直观意义相吻 合.以下首先介绍其基本性质，然后证明一个重要定理.
(1) score 函数满足 EJL(^,X)] =EJS(X,^)] =0,并且有
/(8) =VarJS(X,0)] =EJS(X^)St(X,^)] =EJL(^,X)Zt(^,X)L
(2. 3. 1) 证明 对于正则分布族，/(%,^)关于%的积分和关于0求导可交换
次序，因此有
= ■只x，e)如(4)=忐]7(以)如(4)=o.
因而由Fisher信息的定义有
CovdS) =£,(5^.) =E，[盖盖j =々(8).
以上公式的矩阵形式为1(6) =VarX5)=EXS5T)=EX££T)，即(2. 3. 1) 式. ■
(2)7-(^)=EJ-d^/dO^],即7(6>)=EJ-Z(<9,X)J. 证明直接求导，并取期望可得
dL ^dlog/(%^) 1 机%,60 二 1 .皇
d0, _ 咐
_ilL= d6idej
9 並二立 —。生些+L立
~f(x90) —7 .瓦
< E4-歲卜M彔鸯卜哉 f(x，騎(x)
f
2 d0t d0} f 贼叫 晚 d0j f d❷
=Ii人❹、 ，沒)如(x)=々(沒). I
(3) 若 ...人独立，x = (x"...，xn)T，则 ix{e)=2 iXi(e)，特别，若久，...，
Xn独立同分布，则Ix(e) =n/Xi(0).

证明由 =n 可得 I=1
nn
l^,x)= 以0，弋)，s(x，e) = £ s(u). i~1 i=1
n 因而由独立性可得Var[S(U)]=工Var[S(弋，幻],即lx{6)=
z 八，(4). i=I
(4)设 r=
i) 1TW :0的充要条件是r(x)为辅助统计量; ii) 若 T(x)为充分统计量，则/r(汐)=乙

(沒). 证明i)由以上性质(1)可得
■
r(x)
则有
IT(0)=Var[S(T,0)] = Var[d(/ /、(4)=0«E,{[^^[^^jT}=0
l=～log^ 』)=c(1),
其中c(z)为与0无关的常数，因此r 的分布密度函数g(t,e)与 0无关， 所以t=t(x)为辅助统计量. ·
ii)若r = r(x)为充分统计量，则由因子分解定理可得f(x, G)= g(T(x), 0)h(x)，因此有 log/(%, 沒)=logg(r(x), 6>) +log/l(x).该式 对沒求导得到
diogf(x, 0)二alog g(r(x) ,0、 ~de _ de ,
即 L(0,X) =L(^,T).故由(2.3.1)式可得 Ix(0) =Ir(0). |
(5)设❷峨为参数变换，乎为qxl维参数，则分布族关于参 数平的Fisher信息阵可表示为
de T de d(p7 d(pT
(2.3.2)
其中dO/dip1 = (d0t/ a^)Ax?为A x 7阶矩阵.(2.3.2)式的分量形式为
^«b(<p)= 2A)(^)(“/=1,..., 女;a, 6=1, ..., q). o(pa d(pb
证明由定义可得
k 3❷3❷
·

=石 U(10)a. ■
上面介绍了 Fisher信息的若干基本性质.特别是性质(3)和性质 (4)，指出了 Fisher信息的基本统计意义，但是还不完全.以下定理
2.3. 1将要进一步证明:对于任何统计量r = r(j)都有心(幻幻入❷、， 而且等式成立的充要条件是T = T(X)为充分统计量;这就更加完整地 揭示了充分统计量与Fisher信息之间的内在联系.为了证明这一定理， 需要用到得分函数的条件期望的性质.所以下面首先简要介绍条件期望 的一个等价定义，关于条件期望进一步的内容可参见陈希孺(1981, p. 25—设43).
t = t(x)为统计量，则有 其 导出测度为P\B) =Px(r-'(5)) =PX{A).给定可测函数汐(X),其 条件期望E[^(x)IT(X)=d应为的函数m(t),并且应当满足条件
期望的基本性质(见第一章(1. 1.4)式):
E[m(r)] =E (E[^(X) |T]| =E[<p(^)].
其积分形式为
卜(1)dPT(t)=£<^(x)dPJ(x). (2.3.3)
该式就是条件期望等价定义的出发点，具体表述如下: 可测函数p(X)的条件期望E[<p(X) | T(X) =d定义为上的瓜可
测函数爪(1)，它满足
上 m(t)dPT(t) = £ :(3) (p(x)dPx(x) , VBeBr. (2.3.4)
在这个定义中，若令B二Z 就是(2.3.3)式，因此(2.3.4)式比(2. 3.3) 式更具有一般性，要求也更高一些.根据(2.3.4)式，可以进一步定义 条件概率和条件分布.条件概率定义为P(A | T(X) =0 = E \IA(X)
I T(X) | ;条件分布定义为 F(x|i) 1(-oo ,x] | T(X) = z 可 以证明:在一定正则条件下，m(f)必存在;以上定义的条件概率、条 件分布具有与经典定义一样的性质，详见陈希孺(1981).
对于本节考虑的正则分布族，设x- | , T=T(X)为 统计量，t~).则I 与r(幻的得分函数

有以下关系.
引理2.3.1在以上条件下，统计量r(x)的得分函数可表示为X 的得分函数的条件期望
=Efi{Alog/(x^) | T(X)叫. (2.3.5) 该式等价于Sr(T,e)=Ee\Sx(X,e)\T\,亦可简记为Sr=E,|5jrf.

证明 今应用(2.3.4)式来证明(2.3.5)，为此记 ^log =rn(r) , ~Ao^f(x;e')
要证这两式满足(2.3.5)式，等价于要证
£Alog^(f^)dPJ(1) =J; i(s)±losf(x,0)dPl(x), (2.3.6)
等价于要证
等价于要证
即要证
如(1)=盖上_,<8戸 』)叫(幻,
^1(5)=垚尸:(7^ (8)).
而由P}(B)的定义可知Pj(B) =^^(?-*(5)),由此倒推即可得到 (2.3.6)，因此(2.3.5)式成立. ■ 定理 2. 3.1 设 X-\f(x;O)90e0 | , T^T(X) -g(t;e)都是正则
分布族，则有
(1) X与7\X)的Fisher信息之差(即以7(X)代替;T的信息损失)
可表示为
(的=EjVar.[^£(^,X) \ t]\=E3 {VarJSx(X,^) | 7]J
=VarjSy(X,^)-Sr(r(X),^)] (么-Sr)(Sx-Sr)T].
(2) !x(0)為IT(❷)，且等号成立的充分必要条件为r(x)为充分统 计量.
证明(1)根据公式(2.3.1)以及第一章(1.1.5)式可得 W) =Var{^^}=Var[S“X州
=E:|Vartf[S“Xj)|T]|+VarJEJ5,(X,^)|T]|. 由引理2. 3. 1知E0[Sx(X,e) | T}
=5r(Z,^),因此上式第二项= VarJSr(?,6>)) =IT(0),代人以上((9)的表达式，即可以推出(1)的
第一式.亦可推出lx{e^IT{6).再证(1)的第二、三式.根据Fisher 信息的定义，以上(1)的第三式可表示为
Ej(Sx-ST)(S^5r)T]

=Ej5xsJ-sX-MJ+Mr]
=Ix(e) +/以)-E,(5X) -Ee(5r5j). 而由引理2. 3. 1可得
=E, (EJSX | T} J =E, jE,(^ | T)S;\ =E/5rS;) =IT(0). 同理 E,(Sr5l) =/r(^)« 因此有 EJ(5x -St)(Sx -5Jt] =Zy(^)-
由此即得第二、三式. (2)上面已证明Ix{0)^IT(e).若T=T(X)为充分统计量，则由
性质(4)可知M 幻=八(幻.反之，若IX(O) =IT(0)9要证r(x)为充 分统计量.由(I)第二式有sx(x, e) =sT(T, 0)，即
‘ , 沒)_ alogg(z, a) de ~ de~—
该式两端关于6 积分可得
log/(^,0) =log g{t,0) +c(x), .
其中幻为与0无关的积分常数，所以有f(x^) =g(t(x),e)ec{x) 因
此由因子分解定理可知，T=T(X)为充分统计量. 以上定理和性质表明，无论从Fisher信息观点来了解充分统计量或
者从充分统计量的观点来理解Fisher信息都是合理的.下面看一 些例子.
例2. 3.1设X-N(^,a2)为正态分布.求X关于^ = (M,a2)以及 0' = (jtl,or)的

Fisher 信息.

解由定义可得

L(^,a2) = -^-log(2TT<r2) -/z)2 2 2a

dL dL

^(文-弘), ~i= -At)

a~ da2 Zcr Ztr

=人, Var dL \ 1 c (dL dL a da2)=P, CovUw

Var

/(/x, (T2)= 若又i, ...人独立同分布, X' ~N(蚪, a2), 则有

Ix(終, a2)= 若取参数为^ = (^,<7),通过类似的计算可得

Z^(/z,cr)=

n/cr1 0

0 2n/a2/

1/a2 0 0

n/a2 0

0 n/2a4

■

例2.3.2设X~b(i, 0)为两点分布, 求X关于0的Fisher信息. 解由定义可得

x-f(x.e)=矿(1 -oy-\

L(0,x) = %log 6 + (1 - %) log(1 -沒),

dL x 1-x- x-0 'd8=~e~ T^O = <9(1 - 3) 9

_ =Var(10)=士??

若 Xx, •-- ,Xn独立同分布, X1 ~ 6(1 ,沒), 则 1x(0) = n[

1 -

] "*.类 I

似地, 若X~b(n, ❷、, 也有Ix(6)= n[6(l-沒)]「'.

例2.3.3 没尤服从位置尺度参数分布族0=(M, a).

证明:若cr已知, 则/A(yx) =a;若已知, 则Ix(a') =a~2b;若/x, a

则 =a-2Af 其中a, 为与参数0无关的常数, A为 与参数0 无关的矩阵.

证明记r=^,则F服从标准分布P(Otl)(见第一章), 其分布

与参数6> = (/x,a)无关.由定义可得 L(8, x)=log/(y)-loga, y= ~ .

a

都未知,

丛=-丄

加 a /(/) da aL /(y) J*

由于y-Ao.u,因此所有涉及到y的期望、方差都与参数0无关.所以 若o■已知, 则有/x(/

i)=Var[dA/<9^t]=a;若p已知, 则有lx(a)=

Var[d£/a(r] =a~2b;若妗, o■都未知, 则有 Zx(/z,a) = Var[(d£/d/z, dL/

daY] =a~2A.这些结果可进一步推广到独立同分布的样本以及更 一般的样本. |

例2. 3.4设r～多元正态分布N(0Jn),其中A.为a阶单位矩阵. (1) 求J"关于0的Fisher 信息阵;

(2) 设e=g(p), 即r-/V(g(j8),Zn),求y关于芦的Fisher信息阵.

解 (1)设 r=(y1,-,yn)T,❷=(0', ..., ❷y , 则 y :(土)》 , 2,

UO,y) =

2 (y£ -O^2 -ylog(2ir), 盖 =(乂 -氏),

么 :-丄[ZlxLy + 1i.

0,
1, i-=/,
所以KO)=人为单位矩阵. (2)记G=dg(j8)/明T，由变换公式(2.3.2)可得
例 2. 3.5 指数族分布 X~f(x,e) ^h(x)^T(x}-b(0) (1) 求X关于0的Fisher信息阵;
(2) 记77=Ejr(X)],求J关于77的Fisher信息阵.
解 (1)其对数似然函数及其导数可表示为 L(0, x) = 0tT(x) - b(❷)+ log h(x),
告:TM = (7) -E[7\(X)]. ddi dOi
因此由Fisher信息的定义以及指数族分布的性质可得 々(4)=M槩桊]=Etf[(Ti-ET/)(T/-Ey>)]
d2b(e) deidej
= Cov(r,.,7;.)
因此/(幻=b(e) =Varjr(X)J.
<
.:z Kn F-
= Cov(y. ,yy) =Si7 =
(2)根据指数族分布的性质以及变换公式(2.3.2)可得 VJ k.
” EJ7W] =4(8)，令=若(8)，-^ =[6(^)]-*,
=d0 dy
(8) 口(8)]
O = b~l(rf).
2. 3. 2 Kullback - Leibler 信息(K-L 距离)和 Jensen 不等式
Kullback - Leibler信息反映了两个密度函数之间的差异，是一种“互信息”，它具有信息和距离的某些性质，也称为Kullback - Leibler距 离(K-L距离)，下面将摘要予以介绍.另外，本小节介绍的Jensen不等式在文献中经常用到.
定义2.3.3 密度函数/(幻与gO)之间的Kullback-Leibler信息定义为
J kr
T ’(”)=(念)’(4)(奇)
1 =口(9)]-1’
、

K(f, g)▲ Mi0Sg(^l=Ez[Lz(X)-Lg(X)],
其中E/表示对/(幻求期望(积分).特别，若 {f(x,e)90^& i , 0, (pc0,则Kullback-Leibler信息定义为
Ejlog^y^-} =EJL(^,J) (2.3.7)
其中Ee表示对f(x,0)求期望;对于统计量T = T(X) 则其 Kullback - Leibler 信息定义为
KT(0,<p)去
注意，一般以下主要讨论参数分布族 ，并简称 为K-L距离.
例2.3.6 对指数族分布X~h(x)ee、、-_，求K(ei(p). 解根据以上定义以及指数族分布的性质有

从❷，平)=E，(10) ，X) -L(*,J)]， L(❷，X、=OJT(x) -b(0) +log h(x)，
K(e，<p)=E,|(^-^)tT(X)一[6(4)-6(4)]I
=(3-(p)Tb(O) -[6(汐)-6(妒)]. | 为证明K-L距离的性质，首先介绍三个引理.事实上，以下引理 2. 3. 2 的Jensen不等式以及引理2. 3. 3 的信息不等式，它们本身在统计
中都有非常广泛的应用.
引理2.3.2 (Jensen不等式)若/(幻为凸函数，并假定有关的期
望存在，则有
e[/(x)>/(ex). 若/(幻严凸，则以上不等式中等号成立的充要条件为;r 服从退化分布.
证明 由/(X)的凸性可知，对v%。，存在常向量C，使得对任意的 X，有
/(^) ^/(^o) +CT(X-XO).
特别取x0=EX,则有
/(X)X(EX) +ct(X-EX). 两边求期望即得E[/(X)>/(EX).若/(幻严凸，则对Vx#x0(即X#
EX)，以上两个不等式中严格不等号成立;因此当且仅当X = EX(a.e.)时，等号才能成立.
所以不等式中等号成立的充要条件为;I 服从退化分布. |
推论1 取/(x)。，1或/(A;)=-lugh则有
 2.3分布族的倍息函数
77
E(广)彡(E1V,
E[- log K] -log(EK). (2.3.8)
推论2 (条件Jensen不等式)以上结果用于X | T的条件分布， 则有
E[/(X) | T] ^/(E(X|r)). 若/(幻严凸，则等式成立的充要条件为X | T服从退化分布，即1 =
<p(r)(a. e.).特别有
E[(- log K) |T]^ -log[E(y|T)]. (2.3.9)
上式等式成立的充要条件为K = <p(H(a. e.).
引理2.3.3 (信息不等式)对密度函数/(x),g(x),假定有关的期
望存在;则有
J [log/(x)]/(x)d/A(x) J [log g(u)]/(x)d/x(x). (2. 3. 10)
该不等式中，当且仅当f(x) =g(x)(a. e.)时等式成立.特别有
(2. 3. 11) 当且仅当e = <p时等式成立.另外，该式等价于EJL(U)]尧
E,[如 ，川.
证明要证(2.3. 10)式，只需证
r/(x)
该式等价于
-/
记 Y=g(X)/f(X),则由(2.3.8)式有
Ey[-log y] -log[E，r] = - log
此即(2.3.12)式，该式倒推即得(2.3. 10)式.上式等式成立的充要条 件是 Y = g(X)/f(X)服从退化分布，即 g(x)/f(x) = c, g(x) = cf(x)(a.e.),因此必W c = 1,即g(x) =/(x) (a.e.).另外，由 (2.3. 10)式即得(2.3. 11)式. ■
Kullback-Leibler信息有以下类似于距离或信息的基本性质. (1) K(❷，<p)>Q，当且仅当8 =(p时K(权，乎)=0;
(2) 独立，J=(X"...，XJT，则有
Kx(0t<p) = Z Kx [0，(p);

為0,
/(^)<Vt(x) ^0.
[=
(2. 3. 12)
-log 1 =0.

(3)若T= T(X)为辅助统计量，则 =0;若r = T(X)为充 分统计量，则K八❷，W
=Kx(0i(py
证明(1)由定义(2.3.3)以及信息不等式(2.3.11)有 以❷，<p) =EJL(^,X)
-L(<p,X)]
= EJ£(^,X)] -E,[L(^,X)]^0, 而且等号成立的充要条件为e = <p.
(2)直接由定义可得
Kx(0，(p、=
n，(u)
log i=1 n
Z KXi(0，W. is I
n狀 #)
is
(3)若T= T(X)为辅助统计量，则其分布与参数0和p无关，显
然有KT(ei(p)=0.若r = r(x)为充分统计量，则由因子分解定理可得 (10) ，汐)叫
(10)微}
上面介绍的3个性质中，(1)反映了距离的性质;而(2)和(3)反映 了信息的统计意义，这与Fisher信息十分相似.以下定理2.3.2将要进 一步证明:对于任何统计量T=T(X)都有
Kx(0， ... KT(❷，平)，而且等
式成立的充要条件是T = T(X)为充分统计量;这与Fisher信息的性质 十分相似.为了证明这一定理，也需要类似于引理2. 3.1的一个引理.
引理2.3.4设X~fH T(xy-g(t;0)为正则分布族，假定有 关的期望存在，则有
1
T(X) =t 证明可根据条件期望的定义,(2.3.4)式加以证明.记
U). | T(X)
巾(xX(x).
(2.3. 13)
由条件期望 (2.3. 14)
要证(2. 3. 13)式，即要证zn(z) =E, 的定义(2.3.4)式，等价于要证
(_ 根据以上定义，等价于要证
等价于要证

该式相当于而由P;(B)定义可知上式相等;逐 步倒推，即可得到(2.3.14)式，因此
(2.3.13)式成立. I 定理2.3.2 设X- , T=T(X) 都是正则
分布族，则有
且等式成立的充二要条件是T = T(X)为充分统计量.
Kx(e,(p)e,(p),
证明记y
应用条件期望，上式可表示为
K人❷岬)=E, (EJ(-logy) \ T]\. (2.3.15)

对-log Y应用条件Jensen不等式(见(2.3.9)式)得 ej(-log Y) | -iog[E,(r|
r)L
代人以上(2.3. 15)式，并应用引理2.3.4的(2. 3. 13)式可得 ^(.^)^E9{-
lo6[Ee(g^|7)]}
若以上等式成立，则由引理2.3.2的推论2可知Y\ T 幻]I r服从退化分布，即
该式仅与£有关.而对任意的(P =<p09记 =g(^,^), A(x)= /(~%),可得
=g(t90)h(x). 由因子分解定理知r 为充分统计量.
反之，若r为充分统计量，由前面的性质(3)知KT(e，屮):kx(❷，拗.|
习题二
1. 设 ...人为i.i.d.样本，J:~r(A，p),但p已知.根据定 n
义直接证明T=
A 是充分统计量.
证明:
则有
=eJ -Iog^|^-}=E,! -logy|.
i=1 2.设x'，...，xn为i.i.d.样本，戈~/z+ru,i).试用定义直接

(1) 当m=o时，r, =2 X,是充分统计量;
(2) 当A=1时，r2=X(1)是充分统计量;但7\不是充分统计量; (3) 当M，A都未知时，T3
= (T2,TJ是充分统计量.
3. 设X,,...，Xn为i. i. d.样本，X,服从以下分布，求相应的充分统 计量:(1)负二项
分布:X, ~/VB(0,r), r已知;(2)离散均匀分布:X, m 未知;(3)厂分布:Xx ~r(A,p);
(4)冷分布:岑-BE(pf
q) ; (5)对数正态分布:X. ~ LA^(/x,cr2) ; (6) Rayleigh 分布:Xx - ^(A,2).
4. 设X,, ...，Xn为i. i. d.样本，Xx服从以下分布，求相应的极小充
分统计量: I
(1) X{ - PR(a,0) , Pareto 分布 a0ax^{a+i)I \x{^0 | ;
(2) XrPF(0，c)，幂函数分布0~ccx\-x
|;
(3) ~BE(a,
a)，a >0,芦分布.
4 5. 设久，."，Xn为i.i.d.样本，XjV(^i;^)=exp{-「:弘)
n 其中 0=(AC,(r) e =R x (0, + »).试证:/(%;^) =]^[
为指数
分布族，并求极小充分统计量,
6. 设 X, 为 i. i. d.样本，X,~7V(a +pmif a2)，其中 0 <
<+qo，-oo <a, < + oo是未知参数.m,, i = 1 , •••,n是已知常数. 试求其极小充分
统计量.
7. 设Xx，...，Xn为i.i.d.样本，X} ;0)=h(xx)/ I* k
2 exP以厂(a) -6(氏)1，其中-« <e{ <e2 < +oo.求其极小充分 i=3
统计量.
8. 设X,, ...，X„为i. i. d.样本，当%:服从以下分布时，求相应的
完备充分统计量:
(1) Xr -f(xl ,e) =2x}0~2I I ;
(2) Xj-/(x,,0)=0x~2I|%J |;

(3) Xj 服从 Rayleigh 分布/(叼,❷、=20~lxle~x^/91 (xI >0 | ; (4)X,服从 Laplace分布=^e~^'/e.
2a
9. 设X},•• -,Xn 为i.i.d.样本, Xx ~Pareto分布/(xj; a,6)= aeaX;{a+l)I{x}>0\y在以下情形下,求相应的完备充分统计量:(1)汐

已知但a未知;(2)<x已知但0未知;(3)0和a都未知. io.(1)设/(x;^) =c(o)4>(x)i |,其中❷❷”❷2) e
..., xn是来自/(x;0)的Z. 样本.求其极小充分统计量;若A (或
么)已知,证明相应极小充分统计量的完备性. (2)设g(x;e)=Z>(^)^(x)7\x^0\, V0eR,其中D{3)=
[| i//(x)dx^ < + 00为正则化因子.若..., 是来自g(%;^)的
Z.H样本.求极小充分统计量;并证明其完备性. 11.证明分布族或统计量的完备性有以下性质:
(1) 若7a完备,则完备,但反之不真,其中^^和只^分别为X
和T^T(X)的分布族.
(2) 若T^T(X)完备,则S(X) =^(T(X))完备,但反之不真; (3) 若(久T)完备,则r完备,但反之不真.
*12.判断下列三个命题的正误,正确的请证明,错误的给出反例. (1) 当极小充分统计量存在时,完备的充分统计量一定是极小充
分统计量;
(2) 极小充分统计量一定是完备的充分统计量;
(3) 当完备的充分统计量存在时,极小充分统计量一定是完备的
充分统计量(提示:设是完备充分统计量, r 是极小充分统计量, 则存在一函数&(•)使得 T:h{U)、.
13. 证明冷分布族\BE(afb):a>0,b>0|的完备性.
14. 设X,,X2,-,Xn为相互独立的样本,~7V(O,(r2)—切y#l, n, 而X' Ky,。1), Xn—N(0,a)~la2).求该分布族完备的极小充分统计 量,其中yeR, ^>0, a2都是未知参数.
* 15. (1)试证Poisson分布族(P(A) :A e (0, + oo) j的完备性(提示: 利用函数项级数的性质).
(2)设X', ..., Xn独立, X,•～^(...人), %>0(f=1, ..., n)已知, 求 完备的极小充分统计量.
16.设 x} 为 i. i. d.样本, x, —N(e,e2)9e>o,求极小充分
统计量,并判别其完备性. , •17.设(弋, [), 夂, y„)为i.Ld.样本
沒), 其中 = Cov(Xj , <^<1. (1)求极小充分统计量,并判别其完备性;
~7V(0,0;l,l;

(2)证明:
i=1 i=:l
和r2= 2 K都是辅助统计量, 但(7;, 7\)不
是辅助统计量.
18.设X、, ...人 为i. i. d.样本;y"...X 为i. i. d.样本,且两总

体独立.在以下情形下，求相应的完备充分统计量:
(1) a +rW , i), vt (2) x{ y,
+r(a2-\i); 氏);
(3) X, ~7V(M, y), Y.
•19.设X:, ...人 为i. i. d.样本, X' ~R(O, 0), 若参数空间为0 =
但 =p 已知.
[a,)(a>0),证(1)明T=X(n)是极小充分统计量，但不是完备的充分
<a I,然后证^[九
(n] =o).
*20.设Xx, •--,Xn为i.i.d.样本, -R(0,36),-<x> <0<+oo.证
明r=(x(I),Ar(n))是极小充分统计量，但不是完备的充分统计量(提 示:证明z^x(l)/
x(n}的分布与沒无关).
21. 设X、, ..., Xn为i. i. d.样本，证明以下独立性: (1)若Xx-7?(<?,,),
-00〈❷Y<e2<+00,则(X(1)-X(1))/
(X(4)-X(l)),i=2,-,n-l 与(X(1), ;V(4))独立;
(2) 若久～r(A, v),A, p在参数空间中任意，则T = f A 与 i=l
统计量(提示:取h
\a na)
n
2 [log xi - lo8 X(1)]独立; i:1
(3) 若X,-M+r(A,l),则Z; 独立.
XY
22. 设义”...人为i.i.d.样本, S2 =
土 X].证明 i=I
(X.-X)2/(n-1), T=
(1) 若xx ~N(0,a2),贝11 IF(又)=n+i/S与r独立;
(2) 若 -/V(x£,a2),贝0(X,5)与|X-Mj/S独立，其中札为样 本中位数.
23. 设 ...人 为i. i. d.样本, X. 厂, ...人 为i.i.d.样
=-^n)~ (0-,i=l A(n) -^(n-l)
, ."
, n-2 与
J=1
习题二
83
与r独立;
(2) r(x,n=- m
t'、 n-1
24.设
为 i. i. d.样本, X, V (%1; a) =- (位
m d), 且两总体独立.记r 十工”, 无, ?.
本, y, 4(M2,
\i=l j (1)F(X^Y)=工一P)2/(m_1)/工(I:一X)2/(n-1)
ax =<r2时，证明:
_
」L «=i
与r独立.

,
n +^— TH — L
置尺度参数族)，其中g(%) >0且g'(幻存在(\^eR), 0 = (M，cr)eR x(0, +oo).证明:其Fisher信息阵为
25. 设X},•••,Xn为i.i.d.样本，Xx ~Poisson分布P(A).
(1) 求样本关于参数A和A*1的Fisher信息;
(2) 求7?=g(A),使/(7?)与参数无关.
26. 设 JV,,X2,...，^为相互独立的样本，在下列情形下求样本关于
相应参数的Fisher信息阵:
(1) X^P(A), 一切卜 i，而 Xt-~P(yA); (2)X，r(l/a，l)，一切j笋i，而my/ a,l),
其中y>0, A >0, <r〉0都是未知参数.
27. 设1 ，X2,...，Xn为相互独立的样本，在下列情形下求样本关于
相应参数的Fisher信息阵:
(1) 晃〜7V(O，(r2)，一切j关i，而 X,.—N(0,(o-la2); (2) X，/V(0，<72),—切 j_i，而X. ~/V(r,(72);
(3) 弋〜/V(0，a2), —切 n，而 Xx —N(y,a2), Xn ~/V(0,
其中yeR, 6>>0, a2都是未知参数.
•28.设X ~/(%，沒)，^€0,假设 ff(xf9)dx = 1 和E(X) = a(0) J-»
当 =1 *

84 第二章充分统计量与样本信息

可在积分号下关于沒求导数，并记为a(e);又记Var(X) 证 明:其Fisher信息/(0)满足不等式U0)^a2(0)/a2(e);并且等号成 立的充要条件为X服从指数族分布，即八x，0) =/ i(%)exp \xQ(0) - b(0)\(提示:利用Schwarz不等式和score函数S(❷，x)与密度函数/(*,
沒)的关系，即 S(O,x) = dlog f(x ,3) /dO).

第三章点估计基本方法

通过样本x = d ，...，Xn)T对总体的分布函数或与分布函数有关的
量进行统计推断，通常有两种方法:一是参数化的方法，即假定分布函 数(或分布密度)形式已知，但含有未知参数，如正态分布#(M，<r2)， Poisson分布P(A)等.一种常见的情况是:假设样本X = (X,，...，XJT 的分量独立同分布，且JV, 或 -F(xx.e), 0^0.这时就 转化为对未知参数0或其函数g(幻进行推断.诸如要推断的g(幻为均 值从(4)=£从);方差a\e) =Var^XJ;概率p(6)
(么已知);分位数xp(0) =F;'(P)等.另外还有非参数方法，即对分 布函数(或分布密度)不作特别假定，而直接从样本出发对其进行统计 推断，限于篇幅，本书将不介绍非参数统计推断方法.参数统计推断通 常有两个基本问题，即参数估计和假设检验，后者将在第六章予以介 绍 ;而参数估计又可分为点估计和区间估计两种.由于区间估计与假设 检验有密切关系，我们将在第七章介绍区间估计;而在第3—5 章介绍 点估计及其相关问题.本章首先介绍点估计的基本方法.顾名思义，点 估计即按照某种优化准则构造一个统计量g(X), 当有了样本观察值 X-x-{x{,...，*„)T时，就用j•(幻作为对未知量g(0)的估计.例如， 某种砖块的强度X 服从对数正态分布:X ~ZJV(/i，a2), 工程上要求
P(X^120kg)^0. 95(或 0.99 等).可通过抽样 对戶二
(^i ^120)=g(M^)进行推断，得到点估计f 若p^O. 95,则认 为这批砖合格，否则认为不合格.类似的问题很多，因此参数估计是参 数统计推断的重要组成部分.

第3. 1节首先介绍统计判决函数，这是分析研究统计问题常用的基 本观点，可应用于许多统计问题;然后于第3.2—3.4节介绍基本的点 估计方法，其中包括一致最小风险无偏估计(UMRUE)、极大似然估计 (MLE)以及矩方程估计(MEE);对于极大似然估计，还介绍了不变原 理以及子集参数的似然等内容.此后，第四章将进一步介绍最优同变估 计(MREE)，第八章介绍Bayes估计.

3.1统计判决函数

统计判决函数理论是Wald于1950年提出来的，其最初的目的是想 建立一套完整的理论，把各种形式的统计问题都归结到该理论中，在统 计判决的观点下，应用最优化方法进行统一处理.虽然与其预期的目标 有相当距离，但是，统计判决函数的观点已经渗透到统计学的许多领 域，对统计学的发展产生了相当大的影响.因此，统计判决的基本内容 是学习数理统计的读者所必须掌握的.

3.1.1统计判决三要素

(1) 样本空间和分布族.

即 I ,或 这是讨论 统计问题的基本空间，前两章已多次用到.

(2) 判决空间和判决函数. 记为(公,氏)，其中公称为判决空间，氏 是及上的Borel域(今后很
少用到).任一 称为一个判决，表示统计问题的一个解.通常d 总 是样本X二x的函数
d=8(x)，称为统计判决函数，简称判决函数.严 格来讲，统计判决函数3(幻应该定义为U)上的可测函数，3(X)则 是一个统计量.例如:假定久，...，总为i. i. d.样本，Xx
~7V(^,1).则 可考虑以下问题:

i) 汐的点估计问题.这时判决就是数轴上的一个点，判决空间 为P=(-00 , +OO),
d^T).通常</总是样本X=x的函数d=S(x)fBP统 计判决函数，例如可取d =5(%) =1等.至于统计判决函数8(x)的优劣问 题 ，可参见下一小节.

ii) 0的区间估计问题.这时判决就是一个区间d = [al9a2],判 决空间P为集合:!
[,a2],a,,a2e(-00,4-oo)).统计判决函数为
5(x) = [a, (x) , a2 (x)],例如可取 5(*) = [x - ta/2 (n)/^/n,x + ta/2 (n)/ 7^],其中ra/2(n)为i分布z(n)的a/2分位数.

iii) 假设检验问题.Ho: 6>e 这时判决空间由两 个点组成，即V=(d01dJ9其中判决</。表示H。成立，判决4 表示H。
不成立.亦可取P=(0, l)，其中判决</=0表示H。成立，判决d = l表 示Ho不成立.

(3) 损失函数和风险函数.

损失函数为定义在的正值函数L(e，d、.. ^xT^R 1, 它表示
在参数0下，采取判决时给统计问题带来的损失.例如，对于0的点 估计，常用的损失函数有L2(0, d) =(J-^)2, L'(0, d) = |等. 损失函数的选取依赖于理论与实际问题的需要，但通常都要求Uefd) 为d的凸函数(通常称为凸损失).在统计推断中，'希望损失
L(e,d)尽 量小.对于统计判决函数5(%)，其相应的损失函数为L(❷, 8(x)).由 于
L(^,6(X))为统计量，带有随机性，不便于比较损失的大小.因此 很自然地取其期望作为比较标准，由此引出以下定义:

定义3.1.1给定统计判决函数以幻和损失函数L(❷, d),相应的 风险函数定义为
R(❷, 8) = EJ£(6^(X))] = £l(6>, 3(x))dd).

(10) ,8)表示采取判决釪幻时，给统计问题带来的平均损失. ■ 例如在估计问题中，用5(幻估计g(3).若取均方损失L(❷, d)= (d-g(0))\则其相应的风险函数为R(0,8) =EJS(X) -g(^)]2, 即 为均方误差;若取绝对损失L(O,d) = , 则其相应的风险函数为❷, 8) =EjS(X) -g(^)丨, 即为平均绝对误差. 根据统计判决观点，统计推断所追求的目标就是对于给定的损失函数L(O, d)，希望求出统计判决函数5(x),使其风险函数R(G, d)尽可 能小.显然这一目标是很合理的.

例3.1.1设孓, ..., 叉为i. i. d.样本，X、~Nb, a2)，要估计a2, 这时P=(0, +oo). 今取均方损失 =(J-a2)2,并考虑<r2的估计及其相应的风险函数.若取5,(^) =(n-l)-,£ (^.-X)2,由于 :=1

(n-l)5,(X) ~o-y(n-l),则有

R(❷, =EJ51(X) -a2]2 =^~. n-1

n

i=I

(沒, 52) =EJ52(X) -a2]2 =^-<R(0,8l). n+1

以上结果说明，对任意的<9 =(科, (72), 么(X)—致地优于5((X). | 3.1.2统计判决函数的优良性准则

若取 S2(X) =(n + l)

(X,. -X)2,则有

对于分布族1～(1, 瓜, /^), ❷& &, 给定一个统计问题以后，即

可确定判决空间同时选取一个合适的损失函数L(0, d).这 时，就可以根据风险函数的大小来判断一个判决函数s(幻的优良性.具体来讲，可按照实际需要与可能分为以下几种情形. (1) 一致最优性.

定义3.1.2 若存在8\x)使尺(0,5 ‘) 对一切0E0成立， 则称5*(%) 一致优于或等同于5(%).若至少存在一个6^0,使 R(❷,8*)<R(H 则称f(x)—致优于5(x). I

显然，若(幻一致优于5(%),则不必再考虑5(幻.我们的目标 就是设法在判决空间P 中求最优的判决函数.以下容许性的定义与一致 最优性有密切关系.

定义3.1.3容许性.给定L(0yd),对于判决8(x)，若存在3;(x) 一致优于或等同于W幻，则称以幻为不容许的(因为5'(幻一致地比 8(x)好)，若不存在这样的5'U)，则称3U)为容许的(即不存在一致 比<5(幻好的判决). |

在许多问题中，要想在原有判决空间P 以及参数空间0 中求解一致 最优的或容许的判决函数往往是困难的，甚至是不可能的.通常可放宽 条件，在一定范围内求最优解.这实际上包含两个方面:即对判决空间 的性状加以限制;或者对参数空间的性状加以限制.

i) 判决空间.限制判决函数S(幻的范围，使A= (5(%):满足一定 条件! C1?，然后在△中求风险函数最小的S(x).例如可取\ == (5(%):g(^)的无偏估计1(见第3. 2节);或者取A2 = |5(%):g(^)的同变估计!(见下一章)等.而显然有V=\g(0)的所有估计I〕'或亼2.

ii) 参数空间.对判决函数以幻在参数空间0 中的性状进行一定限制.这有以下两种常见的情形.

(2) Minimax准则(最大最小准则).

定义3.1.4设5(幻的风险函数为R(0, 8)，它关于0的最大风险 为M(8) = ;若对一切5(幻有 M(5*) ^M(5),则称 5*(幻为统计问题关于损失函数L(0,d)的Minimax解(即先关于(9对 (10) , 8)求最大，再关于3(%)对似(S)求最小). 壓 易见，Minimax准则是比

较保守的，它便风险函数R(❷，8、先在参 数空间中关于0求最大;然后再在判决空间中关于以幻求最小，因
而这个解不一定最好.以下Bayes解是使风险函数先在参数空 间中关于0求加权平均;然后再在判决空间中关于以幻求最小，因 而更合理.
(3) Bayes 准则.
3.1统计判决函数
89
定义3.1.5若<9有分布<9～f(6>),并记 R/S) = £/?(6>,5)7r(<9)d6>,
称为Bayes风险.若存在8·(1)，对一切S有^(3*) C^(5)，则称5*(%)为统计问题关于损失函数L(0，d)和分布tt(幻的Bayes解.
I Minimax解和Bayes解都在某种程度上反映了判决函数在参数空间 上的整体性质.关于Bayes统计，本书第八章将有更详细的介绍.从统 计判决的观点来看，根据Bayes风险最小准则求解显然是合理的.事实
上，关于Bayes统计的争论近年来已经越来越少. 3.1. 3 Rao - Blackwell 定理
由第二章的讨论可知，充分统计量可以不损失信息地把n 维样本简 化为维数很小统计量，以此为基础进行统计推断比直接从样本出发要简 单方便得多.因此，统计推断方法一般都应当从充分统计量出发，通常 称为充分性原则.以下Rao - Blackwell定理也印证了这一点，该定理说 明:统计推断中的最优解通常都是充分统计量的函数.这个定理可用于 一切统计判决问题，并不限于参数估计，对于假设检验以及其他统计问 题都是适用的.
定理3.1.1 (Rao - Blackwell)对于分布族 若KO,d)为统计判决问题的凸损失函数，T = T(X)为充分统计量， 以幻为任一统计判决函数，则
=EJ5(J) | T = T(x)J 必优于或等同于5(x).若L(O，d)为(/的严凸函数，则8\x)- 致优于
8(x),而等同于5(幻的充要条件为5(幻是r(幻的函数，即 6(x) = A(T(x)).
证明 首先，由于r(x)为充分统计量，因而x I T的分布与<9无 关，所以d\X)为统计量，且为充分统计量的函数.以下应用条件 Jensen不等式(引理2.3.2的推论2)证明该定理.由定义可得
=EJA(«M*)] =EJL(^,E/S(X) |T))]，而风险函数R(❷，8)可表示为
R(10))=EJ£(^,5(X))]=E,|Etf[L((M(X))|T]|.
由条件 Jensen 不等式 E[/(X) | T] >f[E(X | T)]可得 Ee[L(0,8(X))
Ir^LCo^dCX)|T)),因此有 R(698)^[L(09Ee(8(X)|r))]=E,[Z;(O*)]二R(0，8').
90 第三章点估计基本方法
另外，由引理2.3.2的推论2可知，若L、❸，d)为的严凸函数，则以 上等式成立的充要条件为| T的分布退化，即5(X) =^(T). I Rao - Blackwell定理应用非常广泛，它说明，对任一统计判决，关
于充分统计量取条件期望以后可能会更优.许多统计判决问题的最优解 (不一定是估计问题)都可由条件期望来表示.
3. 2 无偏估计及其UMRUE和UMVUE
给定样本A ，...，X„，通常记X = (X,，...， 沒)，OE0.要 估计未知参数或者它的一个函数g(0)，并给定凸损失函数L(❷，d).
以下记0的估计为A%)或S(X),记g(幻的估计为i(A0或6(X).本 节把i(x)的范围由
p=\g(e)的一切估计!缩小为
A=U(4)的一切无偏估计I =ig(X):Ejg(X)]=g(^)(. 3.2.1 基本定义
定义3.2.1偏差与无偏估计.若g(幻的估计为i(X),则称
Ejj(X) =bias[g(X)]

为以尤)的偏差.若对一切0，bias[i(X)] =0,则称g(X)为g(幻的无 偏估计(UE),即
]=容(没)，V^e | 例3.2.1若孓，...，夂独立同分布，且芩~(卜(72)，即
(4) ，Vard(Xj) =cr2(0).
假定它们存在，则X和S2 = (^—1) —1
计(对任何分布都成立).
证明 主要证E(S2)=a2.令K.=Xt
Yi -(o,a2), s2 = 由独立同分布假设可得
E($2)=^iE(^ —卽=AE(y> —?)2 再由独立性可得
n
n n—1nn
- A7)2为弘和tr2的无偏估
E(S2)
n
a2^^+7E(S r«)2J
则有 (yt. - r)2.
J).
3. 2 无偏估计及其UMRUE和UMVUE 以下考虑与损失函数和风险函数有关的问题.设g(X)为g(幻的估
:MSEG(X)) =Ejg(X) -g(^)]2 =Ejg(X)—Eg(X)+Ei(;V)—g(4)]2
= EJi(X) —Eg(X)]2 + [Ei(X) -g(幻]2 =var^(g(X)) + [bias(g(X))]2.
即估计量的均方误差=方差+偏差2.对于无偏估计类A,则MSE=方 差;因而估计量的均方误差MSE最小的充要条件为方差最小.
定义3. 2.2 一致最小风险无偏估计(UMRUE)和一致最小方差无 偏估计(UMVUE).对于一般凸损失函数L(❷，d)，若存在g(幻的无偏 估计i(X),使得对任何其他无偏估计有
尺(0，i (尤))矣尺(没，象(幻)， 则称^•(幻为g(0)的一致最小风险无偏估计(UMRUE).对于均方误
差，若
VarJ^(J)] ^VarJ^(X)] , V^e6>,. 则称i(Y)为g(6>)的一致最小方差无偏估计(UMVUE). |
注意，给定分布族，无偏估计不一定存在. 例3.2.2设JT～则g(6)=6~}不存在无偏估计.
计，通常假定损失函数❷，d)为的凸函数， i(X))J.特别，若L(❷，d) = (</
-g(6>))2,其风险函数即为均方误差， 记为MSE，这时有
解 若Eji(X)] n
其他如，X'，...，Xn独立同分布，X' -N(e9a2)f g(9) = |<9丨也不. 存在无偏估计.
3. 2. 2 Lehmann - Scheffe 定理
以下考虑如何求解一致最小风险无偏估计(UMRUE)或一致最小方 差无偏估计(UMVUE).统计推断(无论是参数估计、假设检验或其他统 计问题)的一个基本思想就是尽量从充分统计量出发.因为用充分统计 量代替原有样本不损失任何信息，而且通常比原有样本简单，比非充分统计量性能好，以下例题说明了这一点.
V^e(O,l),则有
-oy-x = 6'\ e (0,1).
\ X/ 令则上式右端-,而左端-^i(o)有穷，这是不可能的. ■
E[g(x)j =
X =0
例3.2.3设A，...，为独立同分布样本， ～尺(0,60，求的
则

=EJZ(^,
92
第三章点估计基本方法
无偏估计.
解 由于E(又)=0/2,故可取it(X) =2X,这是一个无偏估计.
这时无不是充分统计量，其均方误差为Var(i1) =02/3n. 另外也可从充分统计量久n)出发，由于
x-^~B£(n,l),E(X(n))=^,
因此可取i2(X) = - X(n)为无偏估计.其均方误差为 T2r
MSE(g2) = Var(g2) =———ry <- = Var(g1) =AfS£(gJ , n+Z} 3n
即基于充分统计量的无偏估计么(尤)一致优于i,(X). I 上面的例子反映了一个一般的规律.即基于充分统计量的统计推断
通常要优于基于非充分统计量的统计推断.以下从完备充分统计量出 发，通过两个引理逐步导出本节的主要定理，即若r(x)为完备充分统 计量，只要*(门为g(幻的无偏估计，则它必为一致最小风险无偏 估计.
引理3.2.1 (唯一性)设T:T(X)为完备统计量(不必为充分统计 量)，若A(r(x))和
h(r(x))皆为g(0)的无偏估计，则必有 ^(T(X)) =<p2(r(X))(a. e.).即若g(幻的无偏估计存在，且为T(X) 的函数，则必唯一(a. e.).
证明 由假设条件可得
沪i(『(I)) -<p2(T(x)) J =g(0) -g(❷)=0, V 0.
因此由完备性定义有<p人T(X)) =^2(T(X))(a. e.).
注 以上证明中用到了EjA(r(;v))]^g(e)对任都成
|
立，即(pt(T(X))在0 上 “处处无偏”;这也是无偏性的定义中所要 求的.
引理3.2.2 (最优性)设g(X)为g(0)的无偏估计，损失函数 L(e, d)为凸函数，风险函数为R(❷, 8).设T=T(X)为充分统计量(不 必为完备的)，令
=Ejg(X) I T] =(P(T(X)), 则》(%)亦为豕(幻的无偏估计，且奴I)优于或等同于i(X),即
V<9e0. 若L(❷, d)严凸，则上式等号成立的充要条件是:倉(X)为r(AT)的函数，
即 g(X) =h(T(X)). 证明由假设条件可知
3.2 无偏估计及其UMRUE和 UMVUE 93
EJi(X)] =ES !Ejg(X) |T]} =E今(X))=g(4). 因此，奴X)为g(60的无偏估计，又由定理3. 1. 1 (即 Rao - Blackwell
定理)知其他结论成立.
推论 条件同上，若U^d) , 则有
■
Var(g) Var/g) , V c 0. 且等式成立的充分必要条件是g(X) =h(T(X)). I
定理3.2.1 (Lehmann-Scheff6) 给定样本X19 设X=
(1) 设以幻为g(幻的无偏估计，且j(x)为7XX)的函数，即 i(^) =A(r(x)),则奴x)必为g(幻的一致最小风险无偏估计.
(2) 设旁(X)为g(幻的无偏估计,则g(X) =Ejg(X) I T]为*(4) 的一致最小风险无偏估计.
(3)若L(0, d)为严凸，且的一致最小风险无偏估计存在，则 必为r=r(x)的函数.
证明 (I)任给g(a)的无偏估计g(X),要证
R(e,g)^R(e,g), V6>,g.

,
e^e.考虑g(0)的无偏估计，损失函数
(戈 , ...
a)为凸函数，t = t(x)为完备的充分统计量.则有
令'
=Ejg(X) | T] =<A(T(X)). 则由引理3.2.2知， 无偏，且优于i(J),即R(e，g*、<R(e
,
旁)，VA又因s(x)和g\x)皆为g(幻的无偏估计，且为r(幻的函 数，所以由引理3.2. 1可知，i(X) =g-(X)(a. e.),从而有
=7?(6>,g*)^7?(<9,g), V<9,g.
(2) 由定义i(x)=Ejg(x)|r]为r的函数，又由于
=EjEjg(X) I r]] =E,(g(X)) =g(4) ,
因此j)为发(幻的无偏估计，所以由(1)可知i(x)为g(幻的一致最 小风险无偏估计.
(3) 设g(<9)的一致最小风险无偏估计存在，记为g(X),要证 g(x)为r(;r)的函数，为此令
gD =<A(n^)) =EJi(x)| r=7V)]， 则由Rao - Blackwell定理知
_ , g") =R(0,Ed(g\T))^R(e9g). 又由于i(x)为g(幻的一致最小风险无偏估计，所以有R(e，加 R(0,
g_).因此以上等式成立.由于L(e，d)为严凸，因而i(X) I T为退化 分布，即
i(X)=h(T(X)). I

推论 对于么损失函数L2{e.d)=(d-g(e))\以上(1)-(3)都 成立，且称一致最小风险无偏估计为一致最小方差无偏估计(这时 R(09g) =VarJg(X)]).对于 损失函数 = \d-g(6)\ ,以 上(1)、(2)成立.
3.2.3 例题
以下通过若干例题，说明如何根据Lehmann - Scheff6定理在各种常
见的分布族中求解g(幻的一致最小风险无偏估计.当然，其前提是假 设完备充分统计量存在以及一致最小风险无偏估计存在.根据 Lehmann - Scheff6定理，求解g(0)的UMRUE有两种方法:
(1) 直接方法.即找一个完备充分统计量r(;v)的函数使 EJ平(r(x))] =g(4) ，则i(x) =<p(.r(x))为g(4)的 UMRUE.
(2) 条件期望法.即取一个完备充分统计量7(尤)以及g(幻的某 一个无偏估计 ,则 i(X) =Ejg(X) I r]为 g(i?)的 UMRUE.这 时，关键问题就是求条件期望，通常比较麻烦.
(1)直接方法
例 3. 2.4 设 X*, ..., 独立同分布.i) Xx ~ 6(1,6>) ; ii) Xx -
P(A); iii) ~7V(^,1),则无为完备充分统计量，容易验证，它分别 为<9，A和弘的
UMRUE. | 例3.2.5设X!, ..., Xn独立同分布，X. -R(090). i)求沒和
的UMRUE; ii)求g(6Q的UMRUE,其中g(<9)为可导函数. 解 i) 为完备充分统计量，且
tf 71 + 1 因此0=— X(4)为0的UMRUE.另外经直接计算可得
n-1 因此f1 =5-^-X(;1)为 的UMRUE.
H) y=^(n)的分布密度为p(y,(9)=nO~nyn'iI\O^y^0(.设g(<9) 的 UMRUE 为
h(Y)，则由 Ej^(y)] =g(6>)可得
lo n0~nyn^h(y)dy = g(^) , V 6,
即

A F?-U1
3.2 无偏估计及其UMRUE和 UMVUE 95 yn'xh(y)dy = 0ng(❷),V❷.
该式两边对0求导可得
n0n'h(❷)=0ngf(6) +nen~lg(0),
即/r(幻=g(0) ♦rT'eg乂❷)，因此有 A(y) =g(y)+n-%z(r). 例3.2.6 设A, ...,
独立同分布，X,~6(1,6>),求a(6)=
沒(1 —6>)的 UMRUE.
解 完备充分统计量为r =
n
i=1
E,[乎(r)]=沒(1 -沒).由于^(1 -e)为e的二次式，可令^(T) =aT +
PT\用待定系数法求出a，/3使 [心(7)]=«E,(7)+/3Eff(T2)=0(1-❷).
而由T～b(n，0)可得
EJT)=n09 E/T2)=Var/T)+(E.T)2=n^(1-0、+nV.
代人比较得 a = (n-l) p= -n_1(n -1) -1,因此 <r2 的 UMRUE 为
例 3. 2.7 设 X,，."，X„ 相互独立，X. ~7V(0,a2)，一切 求相 应参数的 UMRUE:
i)若戈 ~7V(y2); ii)若^~/V(0,w(72)(n>3)，其中yeR，co>0, a2都是未知参数.
解 根据例2.2.12,情形i)的完备充分统计量为(r，x，.)，其中7 = rt
-而由假设可知，EX.=y,故有y=X,.而E(r-X?)=E7\=(n
—1)672，其中7\= j_i -cr2X(n-1),因此a2=(n-1)'{TX. ii)与例2.2.12类似，情
形ii)的完备充分统计量为(7\，<),其中
=
/
E[X^n-3)T;[] =[EX门• E[(n-3)T1-1] =w, 由此可得(1)的UMRUE 为 ^
=(71-3)^/^. 疆
例3.2.8设X,，...，独立同分布，X'~N(fz，(r2)，求以下各参 数的UMRUE;
I
弋～b(n，的,要寻找乎(7)使
～aY(n - 1).因此有 Er
4 =(n~l)a2,所以P=
7; (n-l)_17\.又由假设可知EX?=wa2,为了得到w的UMRUE,必须
.由
(”3)人E[(n -3)7^’] =a'2,由于与7;相互独立，因此有
消去参数a2
分布的公式(见第一章)可得E(ri/a2)-1 =
96
第三章点估计基本方法
•\ 2 ••、 2 3 •••、 】)#,cr;1】)y,詳;川) tr,ak，i^/cf(n>2)
F_'(p)，即p 分位数(p<l).
解 正态分布的完备充分统计量为
r=(无，s2)，s2 = - y (弋-x)2.
;
iv) xp(6)
经直接计算可得^=X, P=S2.
ii) M2，/? 的估计应与P 和P 有关.为简化计算，可做变换K =
i) Xt—M, 则有

而 E(n-*S2) =n-*a2, 故有
E
c2a2 2 ⊥22
&/? =P -n-*52
因此可得ak的UMRUE为
Yi~7V(0,<r2), X=Y+弘，Y～A^(0,cr2/n).
E(P) =E(P +2^+/z2) =-+M2. n
o a2
=J • ---/Jb+/z .
+/Z--------=jLl • nIn n>
. 类似地可得
E(P) =E(P+m)3 =E(P +3y2Zi+3}jt2 +/?)
3 n
s2,无独立，因而 E[X3 -3n-'(S2X)] =^3.
-Q- M3 =X3 n52X.
iii)注意，由E(S2)=a2不能得到E(S)=a,需要另行计算.由于
1 n-1\
r (宁
n-1
Q2
^ •乂_|)～r
r
(n 一 1) 利用厂积分直接计算Sk的期望(A:满足n+k-1 >0即可)可得
E[(n-l)|jTZ /n +A: -1 (2
八 r ~2 ,
a>C=么-M(-15)*=-r n+Jc-1 2了(y^Ts)k.
~2~~
特别有<r2=S2，a =/tn_u (^/rT- IS) , cP1 =4^,^ (/n - IS) _J. 因
此有 .,
所以
, -2)
,

a = K(n) S =
因此〆a (通常称为信噪比)的UMRUE为
^K(n)XS_1. n-1
iv)由p分位数的定义有
P～)(叫)=戸("2〉戸呼卜(¥卜 因此有(xp-At)/a=2p, 其中|为标准正态分布少(幻的P分位数，为
.从而有xp=/t+azp,因为E (xp)=
已知，因此有线性关系xp =/jl + azp
E(/l+) =/i+azp.最后得
xp=X + K(n)Szp. | 例3. 2.9设X,,..., Xn独立同分布，X|~M + r(A, l),求以下各
参数的 UMRUE: i) ii) A, A-1; iii) A/z; iv) A2; v) M/A.
解 完备充分统计量为T=(X(” , S)，其中S = (Xt - J(1)) 且 X(1)与S独立.由第一章

的公式有 u
^(D +r(nA,l), S~r(A,n-1);
E(义(1))E(S)=¥
nA A n-2
0 因为中(1)-;ru^ry]=A
ii) A=(n-2)S-\ A^'=(n-l)-JS. iii) 由独立性以及以上公式可得
E[X(1)S'1] =E[X(I)]E[S-,J =
因此A/z=(n-2)X(1)S_1 -n
A二Ag 1 nA)n-2 n-2 n(n-2).
A2
iV)E(5'2)=U;-2Xn-3)- ^WP=(n-2)(n-3)5-2.
v)由独立性以及以上公式可得
l\n-l z -xu n-1
E[1(1)S]=
, E(5'*)

而 E(s2)=^Lg)
所以最后< 可得
(2)条件期望法
E[(a-1)] nA2,
n - I
s 2 =4, n2 (n - 1) ■
E[(n-1)~lX(1)S] =-~+-p- A nA
有些估计问题，很难用上述直接法求解，下面是一些例子.
例3.2.10 设X'，...，X„独立同分布求以下a 的 UMRUE:
=尸(尤1 =夂)=e'A|y
(久可理解为(0,0时间内有k个故障(或电话呼叫)的概率，Mo则表示 无故障的概率).
解完备充分统计量为T=2^～尸(nA)，易见，由于e"A的存
在，很难求一个函数<p(T),使得EA[<jp(T)] =e'A^ (即使k=0),但 A!
是可设法先求A 的某一个无偏估计纪，则由定理3.2.1知，沁 : E(^ I T)为a 的UMRUE.
为此，取
^=Z(X = (X1,...,X„)T:X1 =k (， 门 • I为示性函数.显然有
=EJZU:X] =k}] =PA(X, =k) =&,
即/^为/^的一个无偏估计，因 =E(^a I T)为/^的UMRUE.剩下 的问题就是求条件期望或
条件概率:
n I/(X1=/c)|T|=P<X,=k| 2X,=T
*=1
由 Poisson分布与二项分布的关系即可求出以上条件概率，下面直接计
算这一概率.易见当T<k时，么=0;当T^k时则有 n
m = k,^xt = T) 人一 i=1
= 〉(苓 + ... + 夂 = n

P(X.=叫 = T-k^
p(ix^ T)

例3. 2.11 设X:，...，及独立同分布，X' ^p=P(X}^ f)(若已知)的UMRUE.

解 完备充分统计量为I，但是要求使E[^(X)]=P(X1C f)很困难，因此可采用条件期望法．为此，取
=门(％,，...人)|=1 ，
则有 E[p(X)] =E |Z(J,^^)} =P(X,^f) =p.所以〆X)为p 的无偏
估计，因而p 的 UMRUE可表示为
P<X) =E(p(X) \X) =P(X^^\X).
以下根据Basu定理求此条件概率.以上条件概率可表示为 P(％) =P(X^^\X=x) =P(Xt -x |I=x).
叉为完备充分统计量，X, -X 的分布与/x无关:X. -X~/V(O,-
因而为辅助统计量，所以由Basu定理可知，X, -X 与无独立，从而以 上条件概率可化为无条件概率
p(x) =P(Xy -x)
其中少(0 为标准正态分布的分布函数.所以P 的 UMRUE为 = 少(vQn-ira-J)). ·
例3.2. 12设独立同分布，A～r(A,l)指数分布，求 p =P(X^^的UMRUE(若久表示寿命分布，则p为寿命小于等于f的
概率).
解 完备充分统计量为T = 例子，取
n
X.～f(A,n),类似于前面的

p=p(x)=7(,
则有 E[p(AT)J =E | =P(X^O =p，因此f(X)为p 的无偏 估计，并且以幻=E \p(X) | T i为P的UMRUE.以下根据Basu定理
P(O =P(X^^\T=t) = r 为完备充分统计量，而
^ =a^i r(i,i) yir~r(i,n)*
n z)| I
求条件概率/G) =E(p| r =
则必有弋<f，因而p = l;以下考虑的情形，这时有
弋
其分布与A 无关，因而为辅助统计量，所以由Basu定理可知，Xx/T 与
r独立.事实上，X./T服从冷分布.因为
xx
~T=x^x[^ 芩 ~r(A, l)，X^=X2 +...+冬～r(A, n-l),
由第一章芦分布定理知久/r～BE(l, n_l).因此上面条件概率的表达 式可以化为无条件概率
沁叫卜+).
该式可直接应用Pf 分布积分得到
A
?(0 =⊥ /3(y;l ,n - l)dy
=f (Ti - 1)(1 -y)-2dy = 1-(1 - W 、 f
综合以上结果，p=P(X'切 的UMRUE可表示为 P(X) =1 -[(1 -^/T) +]n-*,
仆⊥ * fa，a>0,
L
- •»•
• <- . w
.*A * . < . J
*•

T=0.易见，若r =
i=1
其中a+= |*• .H;
[0, a<0.
3.3极大似然估计
极大似然估计(MLE)是统计学中最为重要、应用最为广泛的估计 方法之一.虽然Gauss曾经提出过，但主要还是Fisher的杰出贡献和大 力提倡，使之得到广泛的应用和深人的研究.本节介绍极大似然估计的 原理、方法及基本算法.
. L
A.- * l 5 A . :
cv. i .
?%: *
>•
?.•• "
<-• ■
;•
£• F
4 A •
.: ■

3. 3.1定义与例题
设x~f(x;e)9 极大似然估计在直观上可作如下解释.在观 测过程中，若抽样能抽到则说明此 X出现的可能性最大，其相 应的0应最接近真参数.因此，当X取值rt时，真参数0的估计应取 氏，它使出现的可能性最大，即氏使最大:
定义3.3.1设X-f(x;0)9 把/(x;^)视为6的函数，则称 它为X关于0的似然函数，L(e, x) =log/(x;^) =1(幻称为对数似然函 数.若介幻满足
则称Ax)为0的极大似然估计(MLE). | 注 (1)若c(x) >0,则使f(x;0)最大的充要条件是使c(x)/(x;
幻最大.因为c(幻与0无关，因而c(x)f(x;0)也称为似然函数，即似 然函数可允许相差-个与0,无关的“正的常数”.
)
若分布族|/(%;^)
!有共同支撑，则使最大的充
(2
要条件是使L(0;x) =log/(x;^)最大，通常求极大似然估计都从 L(0,x) =L(0)出发.
(3) 似然方程
dL(❹什、二aiog/(x;汐)=0 ~d0~~ - 00 -
为求解极大似然估计的必要条件(方程的解可能是极小值，也可能出现 多峰情形).但满足上式的解，也是0 的一种估计.对常见分布族，很 少出现多峰情形.
(4) 若极大似然估计存在，则它必为充分统计量的函数，因为由 因子分解定理有
f(x;0) =g(T(x) ;0)h(x), 沒使该式达到极大的充要条件是使达到极大，而由后者必有. 这一性质说明，极大似然估计与充分性原则是一致的. 以下通过若干例题说明求解极大似然估计的基本方法.
例3. 3.1设1 , ..., 总独立同分布，X, 求#, <r2的
极大似然估计. 解相应的密度函数和对数似然函数分别为
/(w 2)=(去)”e十 S “，幻2+ ’

0=0(T(x))
因此
L(/t,a2) ^L(fjL,a2) , V/x.
Z(/l, <r2)彡乙(弘, <r2), V (At, cr).
102
第三章点估计基本方法 -x)2 +n(x -/i)2].
l(M, a2)
-T^(2醫2)-忐 2仏
可分两步来求M, V 的极大似然估计. (a)对任何a;由上式可知, /l=x时, 指数部分方括号内的值最
小, 因而/(%;/1,6T2)最大; (b)对L(A, a2)求导可得
=0,<r2 =- (xi -x)2. da2 n i=i
由于以上的似然方程有唯一解, 直接验证可知£(A, a2)关于a2的二
阶导数在P 处小于零, 因此
f 为A(A, a2)的唯一的极大值点, 所以有
A(/t,cr2) >L(/l,cr2) , V a. 又由(a),对任何a有
因此/I, a2的极大似然估计为/1=X和9 =S2 =/ 艺(岑-I)2. | 1=1
例3.3.2均匀分布的极大似然估计.设..., 独立同分布, i) X.~尺(0, 沒);ii) X,~R(❷, 30); iii) X1 - /?(<?,6> + 1); iv) X、- R^-a/2. M+a/2).求相应参数的极大似然估计.
解 先看一般情形, 若X' ~ R(a, b), (a<6),则有
ni
a, b) = Y\ -------1 ja 彡 x£ 彡 6 |
*=i o-a
=7a 1 v7 ia矣 x(i)i龙(4) I. \o -a)
i) 相应的密度函数为f(x;e) =e-ni \x(l)^o \i \x(n)^0] f 考虑
其最大值.当X=x = (%, 时, 6>越小, 则 沒)越大.但由以上表达式可知, 恒有0^ x(n), 因此0 =x(n)时, 0最小 6>_"最大, 从而/(x;<9)最大.因此0 =X{n)为0的极大似然估计.
ii) 相应的密度函数为
/(太;沒)=(5) i x(i) x(n) 33} =(
由以上表达式可知, 要使f(x;e)尽量大则应要使0尽量小, X(4)/3, 因此 6>=x{n)/3时, /(x;0)最大, 即 0=X{n)/3.
iii)相应的密度函数为
f 越大, 因而/(*; ,
而
3.3极大似然估计
103
=/1 x(1)<x(n)^e+1 } =/\x(n)-1彡沒彡%(1)(. f(x;e)仅取o或1两个值, 取1时最大.因此(4)-1, x(1)]时 都可视为e的极大似然估计, 所以解不唯一(下一章可求出唯一的最优
同变估计). iv)相应的密度函数为
X(|) X(n) (+_y|-
要使/(X;0)尽量大, 则应使<7尽量小, 但是由以上表达式可知, CF&
满足关系:(a)/Z(1)石cr/2, 取其最小为a/2=/jl-x(1); (b)x(n)- IJL a/2 , 取其最小为a/2 =x(n) 综合(a)和(b)可知, /z, o■应满足

联立方程
求解即得
-y =x(i)， M+y =^(n)-
A= ■[尤(1)+尤(4)]，士=尤(4)](1). I
例3. 3.3 指数分布的极大似然估计:设X,,...，Xn独立同分布， i) x,~r(A, i), ii) x,^Ac+r(i,i), iii) x,-At+r(入, i).
由
=0可得A=X |(注:若A\~r(l/
i=1
T, 1)，贝{j cr X).
= e^e;.?.x7 {%(1)
. *T V
t.- >• ;:• :
c:. A/ >
• <• •-.
.-
;•.A
<."
:'. w
解 i)相应的密度函数和对数似然函数分别为 n
/(x;A)=Ane'\?^7{%(1) >0}， n L(A, 欠)=nlogA-A 2^xi•
ii)相应的密度函数为
.
/
n -Vw
(%;^)=e-«
(
)
I |x(I
)1
.
要使/(x;At)尽量大，则应使尽量大，即要求M尽量大，但是从备 %(1)，因此当= X(H时/£最大，因而/(最大，所以有/1=尤(1).
in)相应的密度函数为
/(, ;A#)= H[Xe'^I\Xi)]=A'e-j广e, jx(1) \. i=1
(a)对任何固定的A，要使/(x;A,/x)尽量大，则应使enA〃尽量大，
即要使M尽量大，但是^(i),因此当(1)时/z最大，从而e咖最 大，即/(x;A ,/z,)最大，所以有/I = X(l);
(
.i..
、，、

(b)把=x(1)代人/(x;A,/z)的表达式可得 n
f(x;A,/t) =Ve 乂?广enAx(1)， n
1(A, /u;%)=nlogX-A2 (xi (1)). i=1
“音，s= Z (1)),
类似地，亦可求出截尾情况下指数分布的极大似然估计:若
久，...，及为独立同分布样本，且Xx -fL + r(y,lk但是仅观察到前r

个样本，(r,，...，K)=(尤(1)，...，X(r))，则有^=X(1), a=S,/r,其中
由#=0可得 oA
因此对任何(A，/I)，有
/(%;A ,^) ^/(%;A ,/x) /(x
AAA
;A 所以，以上X，A为A，/z的极大似然估计. ■
r
51 = 2L [A')-尤(1)]+(~r)C^(r)-X(1)卜r(+，7•-1).
特别，若/Z=O,则有
-~Tn,r> T„,r- (i) +(« ~
例 3. 3.4 多项分布 7V=(/V1,-.-,^)T-4/^(n,7r),其中
k
n，77=(77"...，?rJT，$VI，求町的极大似然估计. i=1
解相应的密度函数和对数似然函数分别为
N
% =
因为有约束条件77, = 1 i=1
k
，•- ,nA;7T)=—
乙(7F) = 2 n,log 7T, + log(n!) - log(nt i-i
灸k
ZJttM) = 2 - A(y 7T,- - 1), i=1
dL,* *
k , 可用Lagrange乘子法，令
----- 77^-^77**, ～ ! ... 汀J
iZ1
 3.3极大似然估计
105
dLA n
G=__a=0, .t=T
kkk
约束条件2 V 1代人上式可得 工(ri/X) =1, A = =n,因 i=l f=1
此有77.=n/n.即77的极大似然估计为
7Tf =—, i=1，...，k. I n
;
n;
例3.3.5 Laplace分布.设 ，•--9Xn独立同分布，X,~ 求M，a 的极大似然估计.
解 相应的密度函数为 /(X ;/Z,£T)
对任何a>0,求弘使/(%w)最大，等价于求从使2 |xt.-//|最小. i=1
n
,
以下求[\Xi-^|的最小值点，为此，把WZX)改写为以下形 /=1
式并设法去掉绝对值号:
?! n
2 I x(«)一 =工 Im - ^(o I . :=1 i=1
当观察值X = X = (^! , ••• ,Xn)T确定后，考虑/Z从-00到+«变化时
何时能达到最小值.若/I G (- 00 , X(1))，则(p (fl)= n
2 (~)-好)=S

-叫为M的线性减函数.同理，若弘e 打n
*=| 1=1 - \ x(1)为弘的线性增函
x b ^ A ^
f^'
(x(n)，+00)，则<P(M)= Z(从-%(1))
i=1 ^ r
i= 数.再考虑[x(l),x<rv)]时<p(g)的变化情况，可参见图3.3.1.若从
=2 i = l
[m 一太(1)]+ Z [～)一从]
1
e [X(k) fX(A+l)) (々=1，...，沒-1)，则有
kn nx
kn
• * 5
l-? .
J: -/f
=仏-2><0 + 工X(O -(n-k)^ i=1 i=t+l
kn
=(2k-n)从- x(/) + $ x(1). * = I t = fc + 1
由上式可知，P(M)为#的连续线性函数，当2k ~ n < 0时，在区间 [x(n，戈(*+i))上斜率为负;当2A?-n》0时，在区间[x(k) ,x(k+t))上斜率 为正:
Z = Ar + l S. .
f. •
* . : f
»z- v f: ,
;-J
<-. ?
■?.- V
|

<0,女<介,
>0,
/ze [%“〉, %(“")，々=l，2，.“，n-l.
因此当弘从-00到+00时， 由负到正，W/X)由减到增，以下分7Z
为偶数、奇数来讨论.
(a) n=21为偶数(见图3.3.1右)，则k=I时史'(/z)在[x(J)，
x(/+1))上为零， 在 左递减，在 + 右递增，乎(M)在(什>, x(/ + I))上都达到最小值，所以最小值点不唯一.一般/;可取样本中位数
1(。+乂('+1)
= 2_ = Me.
(b) n=2Z + l为奇数(见图3.3. 1左)，则对任何/X，〆(/£)#()，在[x(1)，～+1))上 </(M) =21-n= - 1 <0,在[x(/+J) ,%{/+2))上 = (21+2) -n=1 >0,衅=x(,+i)时妒(弘)达至II最4、值，故/!=A\i+1).
综合(a)、(b)两种情形，M的极大似然估计都是样本中位数財，:
/(%;/z,(r)=(占)exp|一去名 |%,-/I|
- nlog(2cr)
故根据例3. 3. 1和例3.3. 3的论证可知<7的极大似然估计为

<A
Vi-/ it
丄|A
3.3极大似然估计
“士g =士^ iK 1.
3. 3. 2 指数族分布的极大似然估计
107
指数族分布的密度函数为
X ~/(x;^) = /i(x)exp (-6(^)(. (3. 3. 1)
若x,,-,xn为其独立同分布的样本，则密度函数为 PJ g r(x,.) - nb(0) | ,
仍然为指数族，因此以下仅考虑单样本情形. 定理3.3.1对于指数族分布(3.3.1)式，0的似然方程可表示为
T(x)=EJ7(X)] =b(0) (3.3.2) (或简记为若方程(3.3.2)在0内部有解，则解必唯一，且
为极大似然估计.
证明 由(3.3.1)式可知，相应的对数似然函数为L(0)=
0T T(x) -6(4) +log/i(x),因此有
$:T人x、- - =0. d氏* det
(3.3.3)
由于 EJT(^)] =6((9),故(3.3.3)式即为 r,(X) = E〃7;(X), 由此即可
推出(3.3.2)式.又若》满足(3.3.2)式，且在0 内部，则有L(0) =0. 另外由(3.3.3)式有
d2b(0) do.dej _ ~~do~de~'
即Z(^) = -6(6>), 由指数族分布的性质可知S(幻在0 内部正定，从
而在0内部负定，因此为M6D在0上唯一的最大值点. 誦 注 若L(e)=o的解在秒边界上，则问题通常比较复杂. 定理3.3.2若X的分布为以下曲指数族:
X ~f(x;0(p)) =h(x)exp T(x) - b(❷(8))),
其中➋=(❷、, ..., ➋
T, p^k,
且芦的定义域满
足e=
_y, 々=(H) =0,00.若冷满足方程
“ (❷(6))
证明 仍记指数族分布(3.3.1)的对数似然函数为£(6>),并记
r(x) =e3[t(x) 且沒(冷)为0 的内点，则冷为的极大似然估计.
(3. 3.4)
Z(冷)=L(e(p))f
_ =e,要证
i (冷)彡 1(/3) ♦. V卢eg.
j
,
108 第三章点估计基本方法
由于冷满足方程(3.3.4)，因此亦满足方程(3.3.4).由定理 3. 3. 1知4为(9的极大似然估计，即
L(6>) , V(9gO.
因此有

=乙(沒(冷))彡 L(e), 而对任一因为^()3) £0,00,所以必有
1(0)^ L((10) 、=Z(/?), V/?eg. 所以冷为/?的极大似然估计. ■
注 (3.3.4)式是求解冷的充分条件，并非关于冷的似然方程，其 似然方程为
P =°，即 s B 7i(x)'C
例3.3.6设(X.,/,),...，(u„)独立同分布，(久，};)～二元正 态分布
yv(o,o,a2,a2，p)，求a2, 的极大似然估计.
解样本的联合密度函数为
爪...=(2.a2 AV) _WV)[S ””-知熏X^\
这可视为指数族分布，其中
t (<+<), 2、=w)， “i ⊥a (1 -p)
e2=--f- 2 =e2(^, i=i cr (1 -p)
其中j0=(a-2,p).由定理3.3.2,可通过方程E^T,=T,和心7\=7\来 求P ，p,即
由此可得
i (<+K)=4i (X;+y;)] =2ncr2, i=1 i=1
土 (U)=E[土 (X.yjl=npa\ i=l is1
人!" 21(狀)
3= ----------- . I
,=1 +O i=1
注 类似地，可求分布/V(M1 ,p)中参数的极大似然估计. 例3.3.7 含参数的多项分布.设
N = (NlfN2iN3)T -MN(nf7r),
0,
3.3极大似然估计
109
其中77=(7?!,7T2,773)T» 贫、=译2，^2=2/3(1-/?), TT3=(1~/?)2,求冷 的极大似然估计.
解相应的密度函数为 p(n,,n2,n3;/?)=—~~~冗»;3
=A(n"n2，n3)W[2夂(l-芦)]"2(1-炉
= h(nl ,n2,n3)exp|(2n, + n2) log
+2nlog(1 -y0)
为指数族分布，其中T(x) = 2nx + n2，0 = log -p.由于% ~ 1
b(n，n')，N2 - 6(n,772),因此冷满足以下方程:
2N{ + N2 = E(2A^)+/V2) = 2^771 + mr2,
冷代人以上方程可得
27VI +N2 =2n/32 +n • 2/3(1 —/?).
由此可得冷的极大似然估计为)& = (2/V, +7V2)/2n. | 3. 3.3 不变原理
设X-060.本小节的目的在于说明如何求解一个参数沒 的函数i/f=g(0)的极大似然估计.主要证明:在合理的意义下，若权的 极大似然估计为么 则的极大似然估计为=g(^).由第3. 2节的讨
论可知，对一致最小风险无偏估计，若 S2为的一致最小风险无偏估 计，则一般S不是a 的一致最小风险无偏估计.因为ES2 = a2，一般没 有ES=a(见前面的例子).但对极大似然估计，若S2为a2的极大似然 估计，则S为a的极大似然估计;若A的极大似然估计为X~\而^ = A_，, 则必有下面根据极大似然估计的原理加以详细说明.
定义3. 3.2设X～f(x'e)，0^0.对于£(約，0e&，以及汐= g(<9)e/2，今记豕_1(少)=|(9:g(沒)=汐| ,则X关于参数汐的导出似然 定义为
L*(沙)=max £(0)= max L(❷). =少| 沒eg-1(沙)
今记 =log/(x;^),沒=(久，...，氏)T, if/ ,

W ， r^k.当0^0时，^e/2.注意，通常的定义域可能比矽小， 例如 <A=g(<9) =^2,贝'J 6>e (- 00 , + oo),而 [0, + oo).为了说明 诊和的极大似然估计之间的关系:首先必须定义分布族关于参数沙的 似然(称为导出似然)，及其极大似然估计.
少的极大似然估计定义为必，它满足
K 屮'，...
，
110
第三章点估计基本方法
由于g(e) 因此，0^
所以由LD的定义可得
L* (A) =max £* (汐). ^efi
这个定即义可作如下理解.在空间Z2上的一个点<A，它可能对应于0
致性(即都是全局最大值).
定理3.3.3 设X~/(%;6>), 6^0.若0的极大似然估计为么 则
沙关于导出似然的极大似然估计为=g(0).
证明 今记g(A=0,根据定义3.3.2,我们将证明
L* (^) 乙*(汐)，V 少e 12. (3. 3. 5) 注意:L* ((^) =max|<,:<((,)=^|L(^),
由 L* (^)定义可知
|
cr2)，i=1,2,...，".求从，er2以及a=E(X,),t2=Var(X,)的极大似 然估计.
解 令K^logX,.,则 /V(y2), t=l,...，n.由正态分布的极 大似然估计可得
，因此必须先对此求最大，然后再在上
上许多点， 求最大;这样才能保证LD为全局最大，以保持LD与£(^)的一
A*((^)= max £(0).
g(o)=必|
L* (ijf) L(0) =max L(6) max L(0) =L* ((A) , V(A-
:g(6) =^(
沒€ & I ^
{e:
因此(3.3.5)式成立，定理得证.
例3. 3.8对数正态分布.若A , ...，Xn独立同分布，X、～LNW,
Itfia=EX} =ex+a2/2
^ = Yfa2 =Sy =丄 2 - K)-, n i=i
r2=Var(Xj) =a2(ea2 -1).由不变原理可得
a=exp j/t+cr2/2) ,r2 =a2(e^2 -1) (注意，很难得到对数正态分布的一致最小风险无偏估计). | 例 3.3.9 设 X,, Xn 独立同分布，X】 TV (M, a2),
xp) =p. i)若p已知，求%/，的极大似然估计;ii)若\已知, 求 P 的极大似然估计.
■ -
解 由例3.3.1可知卜二X，a2=S2,由不变原理得a=S.设标准
正态分布的分布函数为0(-),则有
:P X\ aa
=p.
\
aap
一 M XP -弘 =戶， ------- =5,
其中%为少(•)的p分位点，为已知.因此Xp～+azp，由不变原理得

A
AAA «/p- Xp=M+azp9 p=01-^-
(本例求解方法比例3.2. 10简单，但性能不比一致最小风险无偏估计差，见第五章). I
3. 3.4 子集参数的似然
在前面的例子中，参数0经常有好几个分量，如0 =[❷、, 02). 为求
沒的极大似然估计，可固定一个分量，如久，先求参数么的极大似然 估计，然后再求R 的极大似然估计(例如可参见例3. 3. 1.3. 3. 3. 3.3.5 等).下面根据极大似然估计的原理讨论一般情形下子集参数的似然函 数和极大似然估计.
假设X~f{x'❷、,0=(6,氏)e0=0,002，其中❷' 为k:维，❷2为 维4 为k=k' +k2维，其对数似然函数记为
乙(沒)=L(0'，02) =iogf(x;0"❷2). 定义3.3.3在以上条件下，设❷、任意固定时，L(0l962)中02的
极大似然估计为1 (6、)，即
乙(氏，式(4))=max£(^,6>2)ALp(❷J. (3.3.6) 02e 02
则称LP(OJ=A(A，氏(么))为子集参数0'的截面似然(profilelikeli- hood.注意，氏应与<9,有关). ， |
例3.3. 10 设冬，...，夂独立同分布
. 分别固定tr和yu,求6卞
解 若固定a,则可得人=无，此估计与o■无关(见例3.3.1),再得到
9=丄土 (尤,-无)2. n
若固定M，先求W 的极大似然估计，则与M有关.
£(/x,(r2) = -^-log(2TT(r2) Y (X,. -A)2. (3.3.7) z 2a
a2)
, a 1)的极大似然估计.
由-^= 0可得 da
a2(弘)=丄 f ((_M)2. n i=1
该式与Xi有关，代人(3.3.7)式可得 Lp(綷)=£(/x,a2(/x))=-号log(2it)-号log [丄(x, - fx)2j -
0 = (,JL,

为求M的极大似然估计，上式对弘求导得6=尤 把k=X代入a2(zz)即 得 a 2 的极大似然估计:
a2 =a2(X)=丄 Y (Xf -X)2. I n iTi
以上例题说明，两种方法的结果相同，对于一般情形，有如下定理: 定理3.3.4设乙(幻在0上的极大似然估计4 = (4 ,么)存在且唯
一，Lpd) ❷、, S狄❷)中氏的极大似然估计为穴，即々满足 ~(介)　=;2^’氏(4)). (3.3.8)
又记心=氏(幻,=(o;).则有(1)e(elfe2=(心,
心)“•; (2)e2(ej=02, 证明(1)以下证明
L(0)^ £(幻 , 且 L(0*)>L(O).
则由唯一性知谷* 由于J 为极大似然估计，显然有L(幻多£(夕)，
今证其反面. 由0;的定义(3.3.8)式知
由(3.3.6)式可知上式等价于
£(々，氏(々)) =L(0;，心)>厶(久，民(4))，VR.

又由e2(ej的定义知，对任意固定的仏，以及任意的02,有
以氏，氏(A))》以❷'為) ❷、任意固定). 代入上面(3.3.9)式有
(3.3.9)
乙(々，6;)^L{ex，么)，V6\，V 么.
因此有乙(夂 ，心)多a(A ，A). 综上所述，由极大似然估计的唯一性有
0* =0.
(2)由(1)以及 e2{ex)的定义知，02 =e; =§2(^)=^((9,). I 本小节内容可归纳为以下两点:
(1) 若所讨论的问题只对某一❷个参数氏感兴趣，02看作多余参
数，则可考虑截面似然L八e' 估计等问题中都很有用.
(2) 求参数0 = (0、為)的极大似然估计可以直接求解;也可考虑应 用截面似然.即先固定久，求出么的极大似然估计氏(氏)，再代人到 LP(❷丄 求氏的极大似然估计穴，然后再代人式(氏)得到氏的极大似然
)
=L(
这在假设检验、区间
V^.
3.3极大似然估计
113
估计6; =02(0;).事实上，这一方法在前面例题中已多次用到. 3. 3.5极大似然估计的迭代算法
通常的数值计算大多需要使用迭代算法.以下介绍极大似然估计的 常用迭代算法.事实上，这也就是非线性规划中求解函数最大值(或最 小值)最典型的基本算法，即Gauss - Newton迭代法.
(1) Gauss - Newton 迭代法
设 X ~/(xj)，L(0) =log/(x,^)，则极大似然估计 a =
七尤)满足以下必要条件(一般函数的最大值或最小值亦然):
x) 0) +0(|“
因此可视#为初值，设计以下迭代公式:
ex =eQ + [-Z(^0)] _1[i(^0)]
e2 =el + [_1[Z(#)]
el+i 二❷1 +d(0‘)，其中 z)(权)=[
直到|| 6>i+1 -el ||2^5, 5为预定的充分小的正数，如s = i(r8等，则取 作为极大似然估计o 的近似值. I
Gauss - Newton迭代法有以下几个显著特点:
(a) 在一定正则条件下，当i- 时，# +1收敛到极大似然估计次 (b) 迭代过程强烈依赖于初值，初值选取得当，迭代收敛快;反
之则收敛慢，甚至发散.
(c) 迭代过程中，正定阵[-Z(6)]常可用Fisher信息阵八的=
(4)]代替，不影响收敛性.另外，-1(3、亦可用-Z(6>) +cZ或 關 +乂代替(其中/为单位矩阵，c为合适的常数)，迭代收敛过程 类似.
(2)改进的Gauss-Newton迭代法
改进的Gauss - Newton迭代法的基本想法是希望L(0l)能尽快地向
以幻的最大值£(^)逼近.直观上，应当要求L(❷ L(f)《...逐步 增加，直至0).但是上述普通的Gauss-Newton迭代法不一定具有 单调递增性，即以下不等式不一定成立:
在某点o°处展开可得

L(e)=Z(6>0) +Z(沒0)(“
),
=o,
❷)-
dL dL、1
~de}
*
0
 L(0i+l)=L(#+W))>L(4), D(e)=[
在改进的Gauss - Newton迭代算法中，改取
的AJ使得恒成立，即LW)保持递增性.以下引理 说明，存在A:，使这一递增性恒成立.
引理3.3.1 若-1(0)>0(即正定)，L(0)#0,D(❷)=[4(9)]-1 [L(0)].则必存在A >0,使得当&=e+AD(0)时有
L(9) =£(<9 + AD(6>)) >L(0).
证明 令9(A) =L(O+X P(^)),则由微分公式有
L(冷)一L{❷)= A) -^(0) =^(0)A +aA =[g(0) +a]A,
(3. 3. 10)
其中当时，a-0.为求g(A)的导数，把向量和D(沒) 的第r个分量用其下标表示，则以0)可表示为
= lL(0)yD(O) =[L(^)]t[>0. 因此当A充分小时必有^(0)+a>0,由(3.3.10)式可得
0) -£(0)=[璆(0) +a]A >0. 即 L(6>) =L(<9 + AP((9)) >£(6>), 证毕.
■ 推论 在以上引理中，若取D{6) =A(^)£(^),其中4(0)为正定 矩阵，则也存在A >0,使得L(8) >L(0)成立;垮别，取D(8) =
J'\e)L(e), 上式亦成立.
由引理3. 3. 1可得以下改进的Gauss - Newton算法:
(a) 取初值 e\ 计算 z>。=/>(#)，其中 p(^)= [- Z(^)] -1
取 A。使
L(d0 + A0Z)0) = max L(沒0 + 入Do) 〉L(00). 0<A^l
由引理3.3.1，这样的A。必存在.
(b) 取 =^°+A0Z>0,计算 D} =D(el),取私使
L(沒1 +AjDj) = max£(+AD,) >L(0l). 0<A^l
(c) 取 +AlDl,计算 D2^D(62),求入2
继续以上步骤，则必有
£(/) <L(6l) <L(02)〈...<L(4) <L(0i+1) < ••
直到II ei+] -ffII 2^5, S为预定的充分小的正数，如6=10-8,则可认 为迭代收敛，并取# +1为极大似然估计的近似值. ■
f =女+ A,7?(女)(取适当

例3. 3. 11 X,, ..., 夂 独立同分布，X.服从Weibull分布PT(A, a),即
f(x};A,a)=Aax^'exp(-Xx\11jxx^0\.
表3.3. 1为Zacks(1981)提供的n=50的模拟样本，其真参数为«
=1. 750, A = 1. 000.今应用 Gauss - Newton 迭代法(GN)和改进的 Gauss - Newton迭代法(MGN)计算参数的极大似然估计.取初值为a = 1.000,A=2.000,其结果见表3.3.2.由计算结果可知，改进的 Gauss - Newton迭代法比较快，但是最后结果相同.从计算结果看，a 的值1.736 1比较好;而A的值0.917 6不够理想，与真值有一定差距.

–
A
?
: . :
. s . * .
"».
:*y . . , : – «
?A– * – * . x > T V /
–<l w
»z'
<–. . • * t * n : 7 <
:# 4^l
.v. ?>/ . * v – c v .
: r i
–?–: z . ' .
i
1
2
3
4
5
6
7 8
2. 972 7
1.449 1
2. 254 2
1.693 9
2. 026 5
1. 806 7
1.942 7 1. 854 9
0. 537 3 0. 945 2 0. 734 2 0. 886 6 0. 797 9 0. 857 3
0. 820 9 0. 844 6
1.448 6
2.201 1
2. 370 3
2. 000 7
1.863 8
1.761 6
1. 738 2 1.736 1
0. 077 2
0.1474
0. 265 2
0. 448 9
0.670 1
0. 847 9
0.911 9 0.917 6
1.244 7 1.6298 1.730 7 1.736 1 1.736 1
0. 951 2 0.9654 0.918 2 0.917 6 0.917 6
0.586 9 0.291 1 0. 929 7 1. 110 6 1.256 4 1. 388 7 1.8924 0. 282 4
0. 441 2 1. 565 4
0. 135 1 1.0519 0. 558 6 0. 181 6 1.056 2 0. 224 5 1.369 4 1. 400 3
1.718 8 0. 366 8
表3. 3.1 0.762 1 0.6389 2.212 3 0.253 0
1. 357 6 0. 630 9 0.869 1 0. 573 9 0. 642 3 1. 681 3

Weibull分布模拟样本数据 1.304 7
1.4782
1. 373 3 0. 350 0 0.481 8 1. 314 5 0.906 1 0. 635 3 1. 568 3
0. 411 7
0.948 9 0.2067 0. 486 1 0. 759 2 1.259 1 2. 600 2 0. 539 8 0. 684 6
0.511 4 1. 440 4
a, A, a, A. a. A.
Weibull分布数据的Gauss - Newton迭代法 MGN法
表3. 3.2
Zacks方法 GN法

续表 Zacks方法 GN法 MGN法
i A, A. a. A, 9 1. 910 1 0. 829 7 1. 736 1 0. 917 6
10 1.874 8 0. 839 2
3.4矩方程估计
矩估计是很古老的方法，其理论基础就是独立同分布情形下的大数 定律，即观察值的样本平均趋向于总体平均.今具体叙述如下.
设1，"•，及独立同分布，X. - 8^0.为叙述方便，引
人以下记号: : 总体原点矩
其中M1=E(X,); 总体中心矩:ay =E(X2 其中 a2 = Var(X,) = a2;
样本原点矩:、二n-'i Xj。其中a, =1; 1=1
样本中心矩:2 (X, 其中m2 = n'1 V (Xf-X)2. i=l
根据独立同分布随机变量序列的大数定律(见李贤平,1997;严士 健，刘秀芳,1994), 当n-> + oo时，十以概率收敛(几乎处处收敛)到^.;
类似地，也有%以概率收敛(几乎处处收敛)到%.因此很自然地可以 引人以下矩估计:
*1". 1n
A=°)=~X i=爪'=72 (Xi-X)'. u <=i n i=i
根据矩估计的定义可知，七是& 的无偏估计(% 不一定无偏);并 且ay、%都是什、%的相合估计且有渐近正态性(相合，即以概率收敛 或几乎处处收敛 ，见第五章).
矩估计还可进一步推广到矩方程估计.一般来说，参数0或其函数 g(幻与总体原点矩和中心矩可能会有一定关系，例如可表示为以幻=
，... ，...,«/)，则可通过把总体原点矩和中心矩替换为样本原 点矩和样本中心矩进行估计;就称为矩方程估计.这时g(幻的矩估计
，
例 3. 4.1 Laplace 分布.设 - 独立同分布，X. - £4(^,
为蚤(7) =G(~，...，aA;m:
以下为若干例子.

a),求)u，a2的矩估计.
解 由第一章的公式可知Mi=E(^i)«2=Var(X1)=2<r2,因 n
此可 /x=aj-X, a2=2_17n2=(2n)-1
. 这一结果与极大
似然估计有较大差别(见例3.3.5). 例3.4.2X,，...，独立同分布，X.～尸分布r(Aj),求A,v
的矩估计(或称矩方程估计).
解 由厂分布的性质，可得以下方程

Mi = E(^i)= az = Var(^i) =7T- AA
则通过把总体原点矩、中心矩替换为样本原点矩、中心矩可得 ana
/i,=a,=X= a2= 二S2=- (A-- -X)2=-^y. A i=i A"
解方程即得A, 〃的矩方程估计
:X X2 ■
注 对于r分布r(A, 〃), 其一致最小风险无偏估计和极大似然估
计都不易求出, 因为其完备充分统计量(在应用上不很 rs] is1
方便.例3. 4.3设 数P的矩估计, 其中
解根据矩估计的替换原则可得 n
i=i
(A\-X)2
...,)独立同分布, 求其总体相关系
Cov(X,, K)
P =-, •
/Var(4) Var(K)
p= -H:' -
Ji (r,_F)2
注意, 矩估计有时不一定需要知道总体的分布, 以上就是一个例 子.另外, 矩估计有某些不确定性;例如, 若X. , ••• 9Xn独立同分布,
2 (x. -xycY,-Y)
. 又如, 若X*, ..., 叉独立同分布, X,~N
由EX] = (EXJ2 + Vard)有終2 + 1.因此共2可以有以下两种矩
乂二X以及A =S2
估计
三二. i
- ^(A)为Poisson分布, 由于E(XJ和Vard)都等于A, 则可取
‘ l), 则
I
因此

=丄 2 <, AT=尤2+1. lni=1
, "., Xn独立同分布, X、~R(H), 求久, 02的矩 解 由均匀分布的性质, 可得以下方程:
例 3. 4.4 方程估计.
0, + e2 Mi =E(X1) =---
,
(0, -G.)2 a2 = Var(X]) =---------------•
其中S2 = H-1 - ^)2, 联立求解以上方程得
i=1 •
o. =x-,/3s, e2 = x+v5s« 这一结果与一致最小风险无偏估计以及极大似然估计都很不一样. |
另外, 偏度系数y! = a3/cr3和峰度系数y2 = a4/a4 - 3 (其中ak = E(X{ -EXt)k)的矩估计可直接表示为
界, ;2=尖 _3, (X.-X)2. a
习题三
1. 设X,, ..., 夂 为i. i, d.样本, 当X,服从以下分布时, 求参数0 的 UMRUE,其中6>>0.

(1) X、服从 Rayleigh 分布/(x{ ,6) =20_1x(e X^°I jx, >0 J ; (2) - /
(%j ,^) =2xx0~2l | ;
(3) X{ - f(x} ,0) = 0x~2I \x}^0 }.
2. 设X:, ..., 冬为i.i.d.样本，弋服从Poisson分布P(A),求A2 的 UMRUE.
3-设弋, ..., 叉为i. i. d.样本， (1)X,-7?(M-Gr/2,/z+a/2)，求从和o•的
UMRUE;
~ , 求久 的均值(6), +02)/2 的 UMRUE. 4.设苓, ..., 为样本，Xx服从厂分布
r(A, p)，p为已
(2) X、
知，求 A, A-*, A2 的 UMRUE.
5. 设X,,••-,Xn为Z.i.d.样本，X,服从Laplace分布，即尤1 ~

LA(0,a)~T^-e ~,其中a〉0,求a,cr_1,a 的UMRUE. 2tr
6. 设 , ..., X„为i.i.d.样本，Xx服从指数分布/x+T(1/a,1), 求M, a, a 的
UMRUE.
7. 设;V服从截尾二项分布，其密度函数为p(xf0) -
(1-o)n~\c(e)=[i-(i-0)n]■*,%=1,2,..., a. (1)证明:T=X关于0为完备的充分统计量;
(2)* TT7^F_mrue.
8. 设A , ..., X。为i. i. d.样本，X,服从两点分布，即尸(X, =1)= 0, 0 <沒 <
1.
(1)求a=0m的UMRUE，其中m为正数;
(2) 求 6 =戸(久,+义2 + ... +Xm =々)的 UMRUE,其中 0
m;
(3) 求€*=尸(1,+X2+...+^_,>1、)的UMRUE.
9. 设X,, ..., 为i.i.d.样本，XI服从指数分布r(A,l),求e_A 的 UMRUE.
10. 设苓, ..., 叉为i. i. d.样本，X'服从几何分布，即尸(1 =Xl) =6(1—
(9)"-1, 0<6><1,%!=1,2,-.
(1) 求 , 6T2的 UMRUE;
(2) 求(9的UMRUE.
11. 设苓, ..., 相互独立，X广7V(O,a2), 一切/#1, n,而苓~
/V(y,a2) ; X, 7V(0,祕2)，求参数 y, <y, a2 的 UMRUE.
12. 设U 2, ..., X、相互独立，X广r(l/a,l), 一切而尤广
r(l/ycr,l) , y >0,求 y, o•的 UMRUE.
•13.设弋, ..., 叉为i. i. d.样本，岑服从Pareto分布PR(af0),即
的密度函数为/(%, ;a,0) = adaXl '<a+1)Z \x^6 | ,
(1) 若<9已知，求a的UMRUE;
(2) 若a已知，求沒的UMRUE;
(3) 若^, 6>都未知，求a和沒的UMRUE(提示:作变换K. = logX,.,
Z = l, 2,..., n,并利用指数分布的性质).
14.设X,, ...人 为i. i. d.样本，g(.)为(0, +oo)上的可微函数.
(1) Xx -M+r(l,l),求g(/z)的UMRUE;并由此求弘人 M_2的 UMRUE;
 I , 求 g(i?)的 UMRUE;并由此求 6>,
的 UMRUE;
(3) X, ~ -^1 \x{^0 !,求 g(幻的 UMRUE;并由此求 6, 6^ 的 x'

UMRUE (提示:参见例3.2.5).
*15.设 X,, ..., 冬为 i. i. d.样本, X, ~ 7V(m, 1), -oo <At < oo ,
0(幻是标准正态分布的分布函数.求A(n),使0(A(n)J)为少(/1)的 UMRUE.并由此求P人X、<a)的UMRUE,其中a为给定常数(提示:利 用第一章习题16的结果).
*16.设 U 2,...人 为I. i. d.样本, X,服从幂级数分布, 即
=X,) =p(x1)r/c(^), X, =0,1,2,...其中p(xj为正则化系数, 是已
知的, 0〉 0为未知参数.求0r/[c(0)y的UMRUE(提示:记P(T = 0
=pn(O0l/[c(0)y,其中 i J,., V人t、是正则化系数.由 2 P(T= «=1 t=0
o =1可得[c(o)y =
17. 设
/(X1 ,71)=(宂/) -1/{ yx, +n Cy}» 其中(^i,/i)eR2, ye(0,oo).
(1) 求关于y的CSS;
利用此级数展开式).
r=0 为 样本, (U
... , (X n , Y n)
)的分布密度为
(2) 求 y 的 UMRUE(提示:作变换 xi = r£cos(f)i, yi = r£sin </>• ; i = 1, 2,..., n). .
18. 设y,,X2,•••, 为i.i.d.样本, X.~+E(a;')- /(Xj〉烬|; Y,,•••,Yn 为 i.i.d.样本, K, ~ +
E(< ');其中 ax >0, ay >0,且X” F;相互独立,Z=l,...fmf ;=1,-,n. (1) 求弘x-/z、和 的UMRUE;
(2) 当crx=ay时, 求和心-么的UMRUE. o-x
19-设A,"•, 么为i.i.d.样本, X{服从均匀分布尺(0,氏);Y}, ..., yn为i. i. d.样本, y,服从均匀分布/?(0,么);其中ox >o, ey >o,
且弋, 巧相互独立, f=l, ...,m; J=1,..., ti.当a>l时, 试求0x/0y的 UMRUE.
20.设又"..., ^ 为 i. i. d.样本, .xx ~ 2v(/^, c^); y,, •••, yn 为
? : ■
习题三
121
i.i.d.样本, Yx~/V(/x,, <),且X,■与(独立, f=1,2,..., zn, y=l,2, ..., a. f 艮设弘, eR, eR, >0,aj>0,并}己a=yux-鈔y,p= ax/cry.
(1) 求a, p2以及P, /的UMRUE,其中r〉 0; (2) 设cr3=cr;,求d和()ux_/zy)/o\的UMRUE;
(3) 设纪=My, 且P已知, 求久和¥ 的UMRUE.
21. 设X:, ...人为i.i.d.样本, E(XJ =M,记M的线性估计类为 n
{T(X):T(X) = 2>Xf} i=1
(1) 证明:八幻为;!的无偏估计的充要条件是2^=1; 1=1
(2) 在线性无偏估计类~中求M的UMVUE.
22. 设g(X)是参数g(0)的一个无偏估计, 证明:g(幻的任一无偏
估计i(X)可表示为i(X) =g(X) 其中冷(幻是0的某一无偏 估计.
'23.设0=|</>(X):ES(/>(X)=0,Var^X)< +oo,对一切0e6>|, i(幻为g(幻的无偏估计.
(1) 证明:i(X)为g(幻的UMVUE的充要条件是Eji(X)(/)(X)] =0, V</>(X) e0,沒e0(提示:用反证法);

(2) 若i(X)为g(幻的UMVUE, i(X)为g(幻的任一无偏估计， 则必有p/i(X),g(X))^0,其中P/ • , •)表示相关系数;
cj,是
i-
24.设X、, X2,...人为i. i. d.样本，当久的密度函数f{x"❷、为下
列各种情况时，分别求6>的MLE.
(1) f(x'，❷)=沒(1 -\广 7)0^ x.^1 | ,其中 0>l- (2) y(Xj=0X^2I\x}^0J ,其中o>0;
(3) 若 r 分别为 gi(e)的 UMVUE, i = l,2,-,n,则 S K (幻的UMVUE,其中么为常数，1 = 1,2,...，a.
1=1
n
1
(3) f(xx ,0) = 卢〉0; 、
(4)❷
aax^ 1/)0^ xx f ,其中❷=(a，/3)，a >0,
+ U. |,其中0=(a9 M).
总为i. i. d.样本，当戈的密度函数f(xl90)为下
-设 ...， 列各种情况时，分别求❷的 MLE.
25
(1)/(~，沒)其中久=o或1，叫去，*
122
第三章点估计基本方法
/ n 29-1 (x"沒)=r^x1~Z|O^%1Cl
|, =0, Lh I.
(2)
(3)/(以)= 1.2 7^7
/1 \ 其中 ^G(y,l);
».‌/ (01
26.设X,,X2，...，X„为i. i. d.样本，应用正文中定理3.3. 1关于指 数族分布MLE的结果求以下分布中相应参数的MLE.
(1) Xx服从正态分布A^(/i,a2) ;
(2) X.服从Pascal分布PA(r，❷)，但r已知; (3) X'服从负二项分布NB(r，0、，但r已知; (4) 服从尸分布r(A,i/),但p已知.
27.设1 , & , •••，%„相互独立，在下列情形下求相应参数的MLE:
#(0，tr2)—切;#/, 而 ~ N(y，(r);
(2) 7V(O，cr2) —切 而 X,•~N(0 ,a)~}a2);
(3) /V(0，(t2)—切戶， n，而
冬~W(y，<r2)， Xn~(10)乂'a),
其中ygR, w>0,(T2都是未知参数.
28.设X,, X2，...，叉相互独立，在下列情形下求相应参数的MLE: (1) x3~ r(A，l)—切卜i，而弋~r(yA,l);
(2) X—尸(A)—切j垆i，而X,•~P(yA);
(3) b[l，0)—切而X，6(1，%)，
其中y〉0, A >0, 0<0<1为未知参数.
29. 设随机变量A 只能取4 个值，每种取值出现的概率分别为+ +

的次数分别为 /V,，N2，N” /V4，其中 /V，+ /V2 + /V3 + 7V4 = n,求 0 的 MLE.
30. 设 X = (X^X29X3fX4y 服从 4 项分布，即 X~WV(n，77)，其 中 n 已知，77 = (a,6,6,c)T，求 a，b，c 的 MLE.
31. 设做了三个相互独立的试验，每个试验都服从两点分布，第一 个试验共做了\次，成功的次数为X1;第二个试验共做了久次，成功 的次数为X2;第三个试验共做了久次，成功的次数为X3.设三次试验 中成功的概率分别为a，a+p，at求a,冷的MLE.
f
，Y ， f,其中0<0<1.若观察到n个样本，4个值出现
(1)
n1_nj_nn
32. 设 TV = (Ni})服从多项分布 MN(n,7r) ; ?r = (77^) , i = 1,...，r; j –
习题三
123
1，-*-,5.并满足关系:77iy=77^TT.j，i=\,...，厂;j=l,.“，S，其中77卜 sr
=2 ■j=Z 求)的MLE. y=l
33. 设A，...，X„为i.i.d.样本，A的概率密度函数为
f(xi ;^) = 2x,/^2/ {0 <0 |.
(1) 试求具有上述概率密度函数的分布函数的中位数的MLE; (2) 证明(1)中的估计是极小充分统计量.
34. 设A，...，叉为i.i.d.样本，X,服从指数分布y+r(A,l)， xa) = a.
(1) 若a已知求\的MLE; (2) 若\已知求a的MLE.
35.(1)设X~/V(m,(t2)，其中 (a,Z>),a和6已知，求(M,a2) 的 MLE;
(2)设X"X”...人为i.i.d.样本， TV(弘，1)，当Mg[0,+ 00)时，求M的MLE;当 Me(0，+oo)时，求弘的MLE(提示:对X的取 值分情况进行讨论).
36. 设 ,X2,••-,Xn为i.i.d.样本，X!服从Cauchy分布，即/(x,，
O')二 ---------- ---------v. tt 1 + (%, -ey
.(1)当a = l时，证明沒的MLE为JT1; (2)当n=2时，证明0的极大似然估计存在且唯一，但似然方程
有多个根. \为i.i.d.样本， 的密度函数为
10, 其他.
设苓，...，夂为m 样本，岑服从Poisson分布P(o),且A和}5相 互独立，i = 1 ,...，m, j = l，...，n，其中未知参数0 >0.
(1) 利用题中所给的n+m个样本写出0的似然方程;
(2) 证明(1)中的方程有且只有一个允许解.
*38.设X,，X2，...人 为i. i. d.样本，A 的分布密度函数为f{x、，e、
+15戶(〜1)’其中*(•)是标准正态的密度函数， eR，a2 >0.证明:(At，a2)的极大似然估计不存在(提示:证当m=%a,
37. 设 y,，匕，...,

A: = 1 ,2,...，n 且 a2—>0 时，似然函数 L(xx,a2)—*»)•
39. 设Xa,...，Xir为i.i,d.样本，Xi} - 7V(^,.,a2), i=1,2,...，zi，且当j•时忍与;^相互独立.求(Mi，...，Mn;a2)的MLE.
40. 设u 2，...，夂为 i. i. d.样本，x. - ^(^ , ^); 为

i.i.d.样本，Ki ~ /V(/x2,(T2)•求c=Mi -^2 的MLE;若样本容量之和a + /n固定，久和<72已知，如何调整n和爪的比例，使c的MLE的均
方误差最小？

41.设观察样本X,，%2,...，叉满足关系Xt + r=l,-,n,
X。=0.其中ux，u2，...，un 为i.i.d.未知随机变量，u' - iV(0，(T2)，求0 和a2的MLE.

42. 设X、，X2，...，XN为i. i. d.样本，X:服从Poisson分布P(1) ，
A>0.若仅观察到，...，XA.中前个样本X{,X2Xn的值，以 N
及后面N-n个样本的和工X'T，求A的MLE. i=n+1

43. 设某种家禽生下的蛋的数目是一个随机变量2V，其中TV～ P(A)，A未知.若每个蛋能发育成小动物的概率是p，且各个蛋能否发 育成小动物是彼此独立的;若记财为发育成小动物的个数.

(1) 求(WAf)的联合分布;

(2) 设(TV.,^,)，...，(Ns，Ms)是来自(1)中分布的s个随机样本， 求参数<9 =
(A，p)的MLE.

44. 设%,，X2，...，X”为i.i.d.样本，Xx (x,>0|,其中未 知参数0>0.若仅观察到的值，以及X^Tf L=m+1, ...，/i，(?n<n); 试求沒的MLE.

*45.设随机变量X服从超几何分布HG(b，N，n)，即
其中/V，n均为非负整数.求证:当/V，ri固定时，参数6具有以下极 大似然估计:

b(X)

V

-(7V+1) e^, n

v

-(N + 1) G M n

其中[•]表示整数部分(提示:求L(b + l，x)/L(b，x)，其中L(b，x)为关 于 6 的似然函数).

46.设 U 2,...， 为i. i. d.样本，X,服从几何分布，P(X. =k)
=ek-l(i -6)，k=i，2,....若仅观察到满足以下条件的样本r.,r2,-, Yn:当 时，
r,=Xl;当X^r+1 时，贝lj =r+1, i=l,2, 若r为某个固定的正整数，且共有m个样本(可设最后m个样本)的值 为 r + 1，设rn^ri, 求沒的 MLE.

*47.

MLE,若

为i. i. d.样本，(y^zj的密度函数为 >0 \I \z} >0)，其中 A >0,弘>0,求(A，
共)的

(1) 观测到的样本为

(2)观测到的样本不是([，夂)，...，(rn，zj，而是ddj，...， (XnMJ，其中
=min(yf,ZJ; 4=1 若 4 =乙，4=0 若 x(. =z..,
i=l,2,...，n(提示:密度函数可表示为f(%,A; A,/i)= A’exp卜 卜-n2exp卜熏么(1
-△‘)/斗 其中～=X△‘,
n2=n-).

48. 设 F 服从幂级数分布，BPP(y = y)= ay6y/c (权)，y = 0，1,
2,...，其中0〉0，(az |为非负序列且与0无关.设Yi9--,Yn为i. i. d. 样本，K 服从上述幂级数分布.证明:0的极大似然估计满足P = oc\o)/c(e).

49. 设r,,-,r为i.i.d.样本，Yx的密度函数为= K{e)g(yJI \y^e J , 其中沒>0,

g(-)为非负可积实函数.
(1) 证明尺(幻为沒的增函数; (2) 试求参数0 的 MLE;
)I,其中
50. 设X,, ..., Xn为i, i. d.样本, 当戈的密度函数为下列各种情况 时, 求相应参数的矩估计:
(1) Xx - 2{0 - xx)/62 1 (0^%!^^ j , >0; (2) X,-0(0+l)x^\l-%,)/);
(3) ^Xj + 1)/ | - 1 1 };
(4) X. + >1;0<6><1;
(5) X. ~ 202/(Xl +0)3I (x1 彡0
51. 设弋, ..., X 为i. i. d.样本, 当弋的密度函数为下列各种情况
(3) 若广的密度函数为=L(e)g(yi a 为常数, 研究类似的问题.

时, 求相应双参数的矩估计:
(1) X.～指数分布/x+r(a-1,i); (2) Xx ~卢分布 BE(p,q);
■
/U^o);
(4) X, - Pareto 分布 PR(A,0) : A6>a/(x, +(9)a+1Z \x{ >0 j ;
(5) Xj-Pascal分布PA(0,r)• (* j^r(l x}=r,r+1,
沒e(0, l), r为正整数.
52.设X1, -,Xn为i. i. d.样本, X,的密度函数为P{X' =
-1 n*
(3) Xx ～对数正态分布): exp--------: 广
ln(1 ~p)~k9女=1,
X_ s2 + (〒)2, 其中
.
2,..., 其中0 <p<l, 证明:p的矩估计为p = 1 -
又 sa(^-x)2. n 1=1 Tl J=1
。 1 1 r(In—u)2

第四章最优同变估计

第三章介绍的一致最小风险无偏估计(UMRUE)是在无偏性限制下 求最优解, 本章介绍的最优同变估计或最小风险同变估计(MREE)是在 另一种常见的限制, 即变换群的同变性限制下求最优解.本章第4.1节 首先介绍同变性、同变估计和最优同变估计的概念, 然后分三节介绍位 置尺度参数分布族的最优同变估计.其中第4. 2节介绍平移变换群下位 置参数的最优同变估计, 第4. 3节介绍相似变换群下尺度参数的最优同 变估计, 第4. 4节介绍线性变换群下位置尺度参数的最优同变估计.给 定样本X、, ..., Xa, 记X = , ..., X„)T~/(x, a), 0e铁 未知参数沒的 估计记为9(X)或8(X), 的估计记为#(x)或a(x).本章把#(幻的范围由p = 的一切估计!缩小为A = u(0)的一切同变估计1(第三章 的UMRUE则考虑△为g(0)的一切无偏估计).另外, 本章仅限于均方损 失函数情形下求最优解, 并且主要考虑参数6本身的MREE,❷函数的 MREE限于少数特殊情形.有关本章内容, 可参见陈希孺
(1981,1999), Lehmann and Casella(1998) , Zacks(1981),茹诗松等
(1998).

4.1变换群下的同变估计

4.1.1同变性概念

同变估计, 即在某种变换群下保持同变的估计, 首先看两个例子. 例4. 1.1位置参数与平移变换.设X:, ..., 独立同分布, 弋-
为位置参数, 则4 也表示位置.位置参数应该具有以下性 质:即观察值\的起点变化(即平

移)，则参数的起点也应有相应的变 化(平移〉.例如温度，起点由原来的0艺变为0°K,则 M都应同时
— 有位置参数的平移变换+ 特别，M的估计也应当有同样的
变化，即/!(幻应满足
/^(xi +CfX2 +€,••• fXn +c) =/Z(%j fx2 , ••- fX„) +Ct
若记1 = (1, ...,1)T,X = (xx, ••- ,xn)T, 则上式化为
jjL^x +cl) =/l(x) +C, Vc, (4. 1. 1)
改变.即由观察值的平移变换%.
+ c;i = 1,..., 相应的也应

因此位置参数M的估计A(幻应满足以上平移同变方程，即同变条件. 我们可以根据同变方程(4. 1. 1)求最优同f 估计.由于好的估计应 为充分统计量的函数，本例的充分统计量为无，因此可假设/l(x)= ^(%),并根据方程(4.1.1)求出最优的〆•).由x^=x+ci可得I—J+c，因此由(4. 1. 1)式及 /l(x) =cp(x)可知 (p(x + c) =(p(x) +C, Vc,
上式对任意的c都成立，可.取c=-i,则有(p(0)=(p(x)-X,即<p(%)= S+^(0) =^(x).为进一步求解，需要确定损失函数.本章主要考虑均方
损失，则可应用均方误差准则f 出^(0)如下
MSE=E^-^)2 |X+^(0) -yx !2 =芯(X-/z)2 +〆(0),
显然当乎(0) =0时上式最因此最有
4(X) =X + ^(0) =X. |
以上讨论可推广到一般情形.设X = (Xlf^ fXn)Tfx = (%1, -, \) T. 若X服从位置参数分布族
••• 对于该分布族，如果义的起点改变，则 0 也应有相应的改变，即由观
察值义的平移变换X.—►x' =X. + c, i = 1 ,..., n，相应地也应有位置参数 的平移变换0-^0f^O+c,并且6的估计^幻亦应该有同样的变化
0(xy +c,•••,%n +c) =&(x+c1) =d(x) +c, (4. 1.2) 因此位置参数e的估计&(幻应满足以上平移同变方程，即同变条件.
满足该方程的&(幻的全体构成“平移变换群下的同变估计类”，因此可 在此估计类中求风险最小的解(MREE).
例4. 1.2尺度参数与相似变换.设X:, ..., Xn独立同分布，苓~ 7V(O, cr2), o■为尺度参数，则弋也表示尺度.它们应满足如下关系: 若久的尺度单位改变，则a 的尺度单位也应有相应的改变.例如\原 来用cm度量，改为用mm度量，则a 也应有同样的改变.即由观察值~的相似变换=kxi, i=1, ,n,相应地也应有尺度参数的相似 变换a-^a^ka.特别， 的估计P(X)也应当有同样的变化，即
a2(kxl ,kxn) =^2 cr^x, ,••• ,xn) , >0, (4. 1. 3) (4. 1.3)式即为or2的梦计应该满足的同变方程.我们可根据此同变方
程求解最优同变估计P(X).同理，好的估计应为充分统计量的函数， n
本例的充分统计量为S2=
X? -ax\n).因此可设Pb):〆,),
X-/(%)-0,x2-沒,
—0) =/(x 一沒1),
i=1
再根据(4. 1.3)式求最优解.由 = kxi ; f = 1, •••, n 可得 S2—^k2S2,
因此^(x)=<p(S2)代人(4.1.3)式有<p(k2S2)=令2<p(S2), V令>0.该式

:

对任意的&都成立，可取k =s-\则有

1) = S ~2(p(S2) ,<p(S2) = S2(p(1) = bS2,

其中6 =<^(1).因此可根据均方误差最小准则求#(•)，使MSE = - a2]2达到最小.而

MSE =Ea(6S2 -<r2)2 =Ea(b2S4 —2ba2S2 + a)

=62(2n +n2)<j4 —2bna4 +<r4, 以上MSE为6的二次三项式，b = (n+2)-1时MS五最小.因此由P(%)

=<p(S2) =bS2,最后可得 p(x)

这一估计在6S2类型的估计中，均方误差最小，因而优于一致最小风险 无偏估计以及极大似然估计(相当于6=n-*). I

以上讨论可推广到一般情形.若;V服从尺度参数分布族

对于该分布族，若\的尺度单位改变，则a 的尺度单位也应有相应的 改变.即由观察值的相似变换xi-^x\ =kxi;i = 1,...，a，相应的也应有 尺度参数的相似变换a->af=ka.特别，a的估计X)也应当有同样 的变化，即 <5■(幻满足

(r(A:%!,•••,A:%„)=ka(xl,•••,xn) 或(t(H)=ka(x)9 因此尺度参数a 的估计汐(幻应满足以上相似同变方程，即同变条件. 满足该方程的士(幻的全体构成“相似变换群下的同变估计类”，因此 可在此估计类中求风险最小的解(MREE).

4.1.2同变统计判决函数

以上通过两个例子初步介绍了在平移变换群和相似变换群下位置参 数和尺度参数的同变估计，以及最优同变估计的求解方法.这些论述可 推广到更一般的变换群和分布族.为了从统计判决观点讨论同变性、同 变估计和最优同变估计，以下首先介绍样本空间的变换群以及参数空间 和判决空间的导出群.在此基础上，引人同变统计判决函数和同变估计 的定义.同变统计判决是对统计判决的一种限制，在此限制下求最优解 (关于某种损失函数)，就得到最优同变判决函数.本书仅讨论若干常

见情形下的最优同变估计(见本章4.2—4.4节);至于其他同变统计判 决问题，例如最优同变检验，可参k 陈希孺(1981,1999)、Lehmann

(1986)或 Shao(1999)等.

(1)样本空间的变换群和不变分布族

给定样本x 及其概率测度空间I ~\ !或简记为

|.同时给定上的可测变换群G=\g\y其中g为JT 上的可测变换:

x'=gxe 龙 若A^Bx.贝Og-'AeBx. G=\g\为变换群，即恒等变换eeG,且若

geG,则g-1 eG,对乘法封闭:若gl , g2eG,则gl ■ g2 e G,并且满

足结合律:gl • (g2 • Si) = (^1 • g2) • ^3- 样本空间上常见的变换 群有:平移变换群、相似变换群、线性变换群以及对称变换群等.

给定样本空间上的变换群，我们要进一步研究:参数空间以及判决 空间将会产生何种变化?特别是，判决函数将会如何变化?以下将分别 予以说明.首先我们介绍参数空间的导出群.

定义4.1.1 给定分布族\Pe,e^3I以及上的可测变换群 G=\g\,且假设0^e2必有Pe^Pdl.若X~p” ^e0,对任何geG, 都存在使Y=gX~Pe.,则称\pe,e^0}为关于群G的不变分布 族;进而，可以在0上定义一个------变换g:6> 0,使得'^❷=0'，记 C=lil,则称云为群C在参数空间上的导出群(见引理4.1.2). |

以下两个例子说明:不变分布族是存在的，但也并非任何分布族都 是不变分布族.

例 4. 1.3 设 X ~N(0, 1)，沒e0 = (- oo,+oo)，叉=(一oo,+ »).在上定义平移群

G=\gc |:gcx=%+c,则有
y = -X + C N(e + c9l) =7V(^\1) , 0' = 0 + C.
即由 X~Pe, W Y=gcx-Pff.9 ❷、e+c[0.因此{7V(<9,1)(在平移变 换G |下为不变分布族.而且G~\gc }在0=(-00, +00)上的导 出群亦为平移群: = I g.. I : gc6 = = 0 + c.
但是，若取G=\gk |为相似群:g,x=H(/c>0),则有 Y = gkX=kX~N(k❷, k2).
显然，叭k0, k2)不属于分布族因此，分布族|7V(^,l)i关 于相似变换群G={gk !不是不变分布族. | 例 4. 1.4 设 X-R(Qf0) 0 = (0, + oo).对相似群 G=\gk\ , gkx =fcx(k>0)有
Y=gkHR(Q, k0)～尺(0,6T), 0f=ke^e.
因此在相似变换G=\g;\下为不变分布族，而且G=\gk\在 0 = (0,+00)上的导出群亦为相似群:G = {gk I
4.1变换群下的同变估计
131
但是若考虑平移群G=\gc I :g^=x+c,则有 Y=gcX=X +c-R(c,3 +c) e !尺(0,<9) I
分布族，尺度参数分布族关于相似变换群为不变分布族，详见第2-3 节. 引理4. 1.1若G=\g |为;t上的变换群，\P9,e^0\关于群C为
因此分布族0(0 J) }关于平移群G=\gc)不是不变分布族. 以上两个例子说明:一个分布族是否为不变分布族，与所讨论的变换 群有密切的关系.常见的情形为:位置参数分布族关于平移变换群为不变
不变分布族，且相应的导出群为G=\g\ ,则有
P奶(B) :P人
EjA(gX)] =E-JA(X)]. (4.1.5)
证明由于Y=gX-P0.=P-Of因此有 ～(B)=心(8)=P^(reB) =Pe(XGg-lB)=PH
EjA(gX)] =E、,[A(y)] =E-J/l(X)]. 以上最后一式中X-P-e, 所以(4. 1.5)式成立. |
引理4.1.2 G=\g\在0上构成与同态群.
证明 易见，C上的恒等变换eX=X ~Pe对应于万上的恒等变换
e:e0=0.再证明封闭性.即若g! e G, g2 g G,则必有g, • g2 e G.以
下证明~gx •g2=g,g2eG.由于 e6, g2eG,因此g, •g2gG.由不
变分布族定义，g.•&必对应于g,•g2eG.把以上引理应用于gl-g2, 则有
:PMg' =P/g2-* •glD(用于g2)
= 用于仫),
因此 ii • i2 =gig2 e G. 另外若取 g2 =gi''可得 gi • g\X -g\g\X =e e G,因Jttg;1 =g7存在.同时，结合律显然成立;而且对任一 geC都有
云eG\所以G= \~g \为与G= \g \同态的群. I (2)同变统计判决函数和同变估计 今给定样本空间上的变换群G以及参数空间的导出群5 判决空间
的问题比较复杂，因为判决空间P 以及损失函数等都依赖于所研究的统 计问题，不能一概而论.假设检验问题的判决空间与参数估计很不一
样，即使参数估计，也各有不同.例如，若估计么 则显然有P = 6>; 若估计h(0)，则一般有V:h(9).因此，判决空间的导出群也不能一 概而论.以下给出判决空间导出群的定义，只是假设其存在，并未 证明其存在，这与参数空间的导出群很不一样.
或 P^(gA) (4. 1.4)
定义4.1.2设分布族X-\Pef0^O | 关于可测变换群G=)g)为不变

分布族，5为群G在参数空间0上的导出群.对于给定的判决空间P,若 对任何geG，ieG,都存在P上的一一变换且1构 成与G同态的群，则称为C在P上的导出群，并记g'd=d’. I
以下介绍同变统计判决函数和同变估计.
给定统计问题，设为一个判决，它必为样本的函数d=8(x)f 即为统计判决函数;相应的损失函数为L(0fd).直观上看，对于统计 判决函数和损失函数，在以上三个群的作用下应保持协调一致，或者说
应保持“同变”， 上三个群的作用下，一方面有
即
x—^x' =gx， 3(x)—>5( ) =5(gx)
0—0’，dW.具体对判决函数来说，在以
而另一方面也有
d =3(x)— =g* 3(x)—~>g*5(%) 因此，一个保持协调一致的判决函数应满足5(gx) =g*3(x).类似地， 损失函数也应保持同变.这可归纳为以下定义:
定义4. 1.3 给定;v上的变换群 <’，其相应的导出群为云和，若 统计判决函数3(幻满足8(gx) =g*5(x)， (4. 1. 6) 则称S(幻为关于变换群的同变判决函数.若损失函数L(09d)满足
L(e,d) =L(e,,d,) =L(g3,g* d) , (4. 1.7) 则称L(G,d)为关于变换群的同变损X失函数. |
例4.1.5 (续例4.1.3)这时
(- 00 , + 00), C和乃都是移变换群.若所研究的统计问题为估计湲
则P= 0.因而可取=6,即若JeP = 0,则有g;d =gcd =d +c, 其中为0的一个估计，常记为§(幻.若奴幻为同变估计，应满足 (4. 1.6)式，即
5(gcx) =gc*5(x)<=>^(x +c) =^(x) +c, Vc. (4. 1. 8) 该式即为例4. 1.1的(4. 1. 1)式.另外，若L(69d)为同变损失函数，则 应满足
L(❷，d) =L(e’，(T) =L(0 + c,d + c) , Vc. (4. 1. 9) 取c= -e上式亦成立，因此同变损失函数应满足条件
L(❷，d) = 1(0,<7 - 0) =p(d ~ 0). 通常可取二次损失p、d-於 =(</-6))2或绝对损失p(d-e) = \d~e\. 壓
引理4.1.3同变损失函数与同变判决函数应满足
L(0，5(%)) =L(ge, g*6(x)) =L(gO9 d(gx)). (4. 1. 10)
若5(幻相应的风险函数为R(0,S) =E<(^,5(X))], 则有
(_ x , + oo) ,0 =
,

R(0，8)=R(d e1 (4.1.11) 证明 由(4. 1.6)和(4. 1.7)式可得(4. 1. 10)式，该式两边取期望可得
EJ£(^,5(X))] =Ej£(^,<5(gX))]. 上式左端=尺(么5)，X~P❹，而右端gX二❷，，0’=如，因此右端可 表示为 E,,[£(^\5(y))J =晰 , 8)，由此可得(4. 1. 11)式. ■
由以上讨论以及(4. 1. 6)-(4. 1. 11)可知，同变统计判决是对统计 判决的一种限制，在此限制下求最优解(关于某种损失函数)，就得到 最优同变判决函数.因此我们引人以下定义:
定义4.1.4给定I上的变换群C，其相应的导出群为云和G* 设A = (3(x):某一统计问题的

全部同变判决函数| ,并设对应于同变损 失函数L(❷, d)的风险函数为R(❷, 8V 若存在5*(%)eA,使

, V5e A, 0,

则称f (幻为统计问题的最小风险同变判决.如果统计问题是参数估

计，则称5*(%)为最优同变估计，并记为MREE. | 本章4. 2—4. 4 节将介绍若干最优同变估计(MREE)的求解方法,

以下就同变估计的有关问题再作一些说明. 若是估计参数<9，则问题比较简单，此时显然有P = 6>.很自然可

定义(T g* 6的估计记为以幻=&(x),则同变条件(4.1.6)

式8(gx) =g*^(x)可化为O(gx) =g0(x).但是，若要估计h(0), 则问

题比较复杂.这时V = h(0)记为宄，若，为V =H上的变换，d e H^\ 应有d=h(8)，为保持同变性，g*应满足d—d’，因此 在V = h(O)上应有 d = h(0)—>h(0,) =df9 即，应使 =h(0f)= h(ge).进一步的讨论取决于幻的形式，今看一个例子，若x-p(x, oj为尺度参数分布族，相应的相似群和导出群为G=jgJ和G=

li*L gkx=“, gka=ka.若要估计(7, 贝0G* =Gf ~gk-因此同 变条件8(gx) =g*6(x)可化为 a(gkx) =gka(x)，即 a(kx) =ka(x). 若要估计 = a ，贝!J g* 应满足 g* A(a) ^h(af) = (<r')r =krar = A/A(cr),因此 A(a) =a 的同变估计5(幻应满足 8(gkx) =5(H) =g*5(%)

4. 2.1 位置参数分布族的平移变换群 设又=(弋，...，XJT～～〆;vj)，若

即 8(kx) “

=kr8(x), 4.2平移变换群下位置参数的最优同变估计

r8(x).

,

p{x，❷、=f(x - 01) =f(xl - 0, x2 - 8,...，xnD ,

其中^e0 = (-oc , +00),则称X服从位置参数分布族.例如前节例

4. 1.3 的!7V(6>, 1)!就是这种分布族.当 <9=0 时，X~PQ)

称为标准分布，它与参数0无关.注意，位置参数分布族有以下常用性 质:若 贝lj Y=X-^1~PO;反之，若 Y~po,贝 =Y+

本节将要证明:位置参数分布族关于平移变换群为不变分布族;并 进一步求出位置参数关于平移变换群的MREE.以下首先介绍样本空间

的平移变换群及其导出群，以及相应的平移同变估计和同变损失函数， 为求解MREE作准备.

(1) 样本空间的平移变换群.给定样本空间定义以下平移变 换群 G=\gc):

gcx=x'=x+cl 艮|J gcxi=x\=xi+c, i=1,•••,n.

(2) 参数空间的导出群.由于Y^gcX=X + cl = (X, +c,-,X„ + c),因此F的分布为

Y—fCyt -e-c,,yn -o-c) -p0+c =p❷，o'=o+c.

\ge !, = +c.

(3) 判决空间的导出群.首先要确定所研f 的统计问题.我们仅

考虑参数0的估计，这时，P =0,可定义=万，8:=足，使得 d’:g:d:d七c.特别有g*e(x) -^(x) +c.

(4) 平移同变估计与同变条件.记0 的估计为^(%),贝lj(4. 1.6) 式的同变条件8(gx) =g*8(x)化为0(grx) :gKx、=gc^(x).由于 gcx=(%, +c,---,x„+c) =%+cl,因此有 + cl) = 0(x) + c, (4. 2. 1) 该式就是对w 的估计d(幻的一个限制，以下将在此限制下求最优解.

推论 若d(x)为0的平移同变估计，则必有 以x-ev)=o(x)-❷,
其中X-01～P。与无关.在(4.2.1)式中取c=-6>即可得到上式. (5) 平移同变损失函数.
这时损失函数L0，d)必须满足L(0,d)=
W ， rf') =L(没+c，</+c)，Vc.若取 c=-❷，则有
L(0，d) =£(0,(/ - 0) =p(d - 0). (4. 2. 2)
即平移同变损失函数L(6,d)必为(J-0)的函数，以下将在此限制下求
最优解.通常取均方损失L{e,d)=(</-0)2,或绝对损失L(6,d) = \ d - o\.
这仍然是一个位置参数分布族，所以
而且由上式可知，其导出群为0 = (- 00 , + 00)上的平移变换群:
\x
I 为平移不变分布

4. 2.2 位置参数的最优同变估计
以下将基于约束条件(4.2. 1) -(4. 2. 2)来求位置参数的MREE. 为此，首先根据同变条件(4. 2. 1)引人不变量和最大不变量概念.
引理4. 2. 1 设0}(x)和氏(*)都是0的平移同变估计，则u(%)= ^(x) 为平移不变量，即它满足不变性关系
u(gcx) = u(x) 或 ZZ(X| + c,***,xn+c) = u(%+cl) = u(%). 反之，若&.(x)为同变估计，a(幻为平移不变量，则氏(*)=$,(%) + wO)为o的同变估计.
证明 由同变条件(4. 2. 1)式可知
u(x+cl) =^!(X+cl) -62{x +cl)
=[冷1(幻 +C] - [d2(x) +c]
=d](x) -&2(X) =u(%). 因此U(幻为平移不变量.反之若^(x)为同变估计，u(幻为平移不变
量，则有
O2(x+cl) =§](X+cl) +u(%+cl) =(%) +c+u(%) = (X) +c.
因此氏(幻为同变估计.
引理4. 2.2 a(幻为平移不变量的充要条件是:存在函数汐(y)使
tz(x) =<A(y)，其中
y=y(x)=(X2-Xi,- -x,)T (4.2.3) 为不变量，而且不变量u(尤)的分布仅与标准分布P。有关，与 0无关.
证明 必要性.若u(xy + c, ••• ,xn + c) -u{x)为不变量，则可取 c : ，因而有
w(x) =u(0,%2 -%,,••- -X,) Ky). 特别，取c= -0，则有
w(x) = u(%] - 0，".，xn - 0) = u(% - 01), 而X-01 Po,其分布与0无关.
充分性.若 u(x) ,则有 yi =xf -%, = (%f +c) - (%, +c), y(x +cl) =y(x),
所以y 为平移不变量，因此u(x) = ^r(y)为平移不 变量. |
引理4. 2.2所描述的性质有一定的共性，因此引人以下定义.
定义4.2.1 y=y(x)称为最大(平移)不变量，若yO)为不变量， 且对任一不变量u(x), 存在函数汐(•)，使u(x)
注(1)最大不变量不唯一.例如在前面证明中，若取c=-xn,
即
■

则2T(X)=(x}- ,•••,Xn_i-)T亦为最大不变量，且有U(X) =</>(心)).

(2) 任一不变量u(;n 的分布与0无关，因而为辅助统计量，因此 由Basu定理(见第二章)，它与完备充分统计量独立.
(3) 对于平移变换群，X" X(1)， 等皆可视为同变估计，而久 -xn，X(i)-X(n)等皆可视为不变量.因为+C,必有+C,
%* -xn = (%)+c) 一(xn 十c). 引理4.2.3设》(幻为0的某一平移同变估计，则任一平移同变估
计V (x)可表示为
冷*(%)=0(x) , y=(x2-Xj
证明由引理4. 2. 1和引理4. 2.2有
(x) = &(x) + 0*(%)-d(x)= &(x) + u(x) = d(x) -<A(y). I
由以上引理4. 2. 1—引理4. 2. 3 可总结出求解最优同变估计MREE 的方法如下:
(1) 取某一合适的同变估计§(X);
(2) 任一同变估计可表示为o^(x)
(3) 对于给定的同变损失函数(一般为均方损失)，求沙(.)，使风
险函数)最小.
定理4.2.1 (Pitman)设d(X)为0的某一平移同变估计，损失函数
、
其中E。表示对标准分布PQ取期望，r由(4. 2.3)式所示;并且(4.2.4) 式的解唯一，与§(X)的选取无关.
证明(1)最优性.由引理4.2.3,可假设(X) = d(X)- 巾(7) ，并求沙(•)，使W(X)的均方误差MSE最小，其中
MSE=E, W(J) -^)2=E, \&(X) -^(Y) ^e\\ 由同变条件(4. 2. 1)式可知$(x+cl) = ^(x) + c,取6? = - 0则有0(x -
6>1) =$(x) -6;该式代人脱化可得
MSE=E, \0(X-ei) -^(y))2.
由于hp0,且f的分布仅与尸。有关，因此有
mse = e0 \d(x)-^(y))2, X~po. 为求上式的最小值，可化为条件期望表达式
黼=E0|E0[(&(X)-少(7))2mi. (4.2.5) 在条件期望中，y为已知，<A(y)为 “常数”，可先考虑以下函数的最小 值问题:
为 L(e，d
则 0 的最优同变估计可表示为
=d(X) -E0[^(X)ir], (4. 2.4)

/(A) =E[(X-A)2 | r] =E[(J2-2XA +A2) | Y] = E(X2 I y) -2AE(X I Y) +A2.
/(A)为 A 的二次三项式，且有/'(A) =2A -2E(X| y)，/"(A) =2>0. 因此，A=E(X|K)时/(A)达到最小值.这一结果应用于(4.2.5)式， x二队X)，a =<A(n,则<A(n
=e0[§(x)| yj时(4.2.5)达到最小值,
所以(4.2.4)式成立. (2)唯一性.今设另有一个平移同变估计为^(X),代人(4. 2.4)
式有
V(X) =^(X) -Eo \6(X)\Y\. 今证(幻.由引理4.2.3,》(X)可表示为0(X) =^(X)-p(y),其中#(•)为某一个函数.该式代人的表达式有 =$(x) -E。{[&(X) I r I
=d(x)-E0[d(x)ir]-妒(7) +妒(7)=d*(x). 1 注意，Pitman公式(4. 2.4)中，》(X)和少(F)皆不唯一，但最后的

解唯一，特别有
推论1 0的最优同变估计可表示为
r (X) =X, -Eodir) =X(1) -E0(X(1) I Y). (4.2.6) 另外，在公式(4. 2.4)中，主要困难在于计算条件期望，这经常可
通过Basu定理把条件期望化为无条件期望.
推论2 若T为完备充分统计量，且§(X) =(p(T)为<9的平移同变
估计，则有
r (X) =^(D -E0[p(n]. (4.2.7) 证明 因为r为辅助统计量，与完备充分统计量r及p(r)独立，
因而有E0[^(r)iy]=E0[^(r)l,该式代人(4.2.4)可得 V(X) =<p(T) -Eo[(P(T)\Y] =^(T) -E0[^(r)].
推论3 Pitman估计是无偏的. 证明
bias(d*) =EW (X) -6} =EJ^(X) - <9 - Eo(d(X) I K)],
而 - ❷= y 的分布也只与尸。有关，因此有
bias(&*) =EJ&(D) -Eo(d(x)IF)] =E0[d(X) -Eo(d(x)ir)] = E0[^(X)J -E0[E0(^(X)|y)J =0. I 我们在第三章已经证明，在无偏估计中，一致最小方差无偏估计 (UMVUE)最好.因此在平移群下，对于均方损失而言，0 的最优同变 估计(MREE)不会比UMVUE好.从这个观点来看，平移群下位置参数
的MREE意义不是太大.但是通过本节的内容，我们比较系统地介结
138 第四章最优同变估计
了求解最优同变估计的基本思想方法.这些思想方法可用于求解其他变 换群下的MREE.下一节将看到，相似变换群下尺度参数MREE的求解
方法与本节很类似，但有更多的优良性.
例4.2.1 设为独立同分布样本， ~ yV(M,l);
ii)^ ~M+r(l, l)，求m的最优同变估计.
» i)可取平移同变估计，它显，然满足同变条件+ +c.无亦为完备充分统计量，所以无与r独立.因
此由(4.2.7)式有
=A(^)-EJ/KX)] =X-E0[X] =x. ii)可取/1(X)=X(1)为平移同变估计，且为完备充分统计量，因此
由(4. 2.7)式有
/T(X) =x(1) -EO[X(1)]. 而y=0时X(1)~r(n,l), E0[X(1)]=1/n,因此有
* (^) -^(i)-⊥. fl
以上结果都与一致最小方差无偏估计一致. 4. 2.3 Pitman积分公式
■
记 广八x、-❷, ..., 由(4.2.4)可知， (X)可由标准 分布Po — =/(x)表示.特别，根据(4. 2. 6)式，我们可以计 算出条件期望EoCJJK)，从而把(X)表示为关于/(*)的积分.
定理4.2.2
设则6的平移最优同变估计可表示为
f ef(x - ei^de -------------------------- .
[f(X - 01)d6> J-®
f tf(x - a)dt
= -----------------或 谷, w =
[f(X - tl)dt
(4. 2. 8) 证明 在公式O^X) =e(x)-E0[§(x)ir]中，可取6(x)=苓和

r=(x2-^1,...>xn-xl)T =(y2,y3,...,yj\
因而可对V(x) =1-Ejjjy)直接进行积分.为求Ejxjy),需要 求沒=0时的条件分布
p(%tly),为此，可令y,=x1?先求联合分布
(^i，匕，...，yn)T ~ ，y). 从而P(x,ly)=p(xt,y)/lJp(xl,y)dx1 以及
Eo(IY)= x{p(x{IY)
心,.而(X:，r2，...，Yn)的分布可通过下列变换得到:

Lxn = + rn.
易见变换的Jacobi行列式J=l,则有 X~/0"".，无。)~尸0,
(m +y2，."，yi+yJ ~p(y!»y)(n=~)，
Y- f p(yt f Ay"y! +h，...，+yJd7i ~p(y)(y! =i).
J-00
因此 X1iy=y|iy~p(yl,y)/p(y),即
J - CD
Ejx,i r]
在以上条件期望中，r2 =x2 -x,,...，r„ =xn -x1为已知，可对上述 积分进行变换，
使积分有对称的形式.由于« + r. = w + x. -x, =xf- (X, -u) ,i=2•,n,因此若令
则有 u+Yt. = - h J=2,...，71，从而以上积分可化为
p(xi 1 y2,...，y。)
f(xi + y2，“.，xi + rJ /(u,u + y2,---,u + y„)du
= J-00 I J/r2，，，，，Kn)d^l
uf(u,u + y2,---,u + YJdu _ J-tx
f f(u,u + y2，...，w + Yn)du J
e0[x, r r] = [
J-00
1- 而冷*(x)=x1 -Ejxjy),因此有
b'x)= {/(x -
- d)d(/ C f{X - d)dt I J-QD
Jy(x -zi)d/.
(尤i~0/(欠1 -t,X2-i,•••,Xn-()<h

[/(^l— »^2—(，...，
-«>
此即(4. 2.8)式，证毕. 例4.2.2设X、，...，Xn为独立同分布样本，X.~/?(<9^+1),
求沒
的最优同变估计.
^ ，一 0 山
■

(注意:第三章例3.3.2曾经指出，该分布的极大似然估计不唯一.另 外，其充分统计量为T = (X(1) ,X(n))，但不是完备的充分统计量，因而不 易求出UMRUE,本例题将求出其平移MREE.)
解% = ，...，Xn)T的分布为 nn
X - Pff
<9 + 1! = fp|o 多\一沒矣"
-门乡

ix 1 i = 1
=门 0 关 x(1) %(B)^^ + 1(. 这是一个位置参数分布族，可用Pitman公式(4.2.8)求出0的平移最优
同变估计.
f(x -ei) =i | e^x(l}矣%(8) +1) :i \x(n) 一1 彡沒冬%(1)(,
J<x- =J el\x{n}-1彡0彡x(1)Ido
=JJ 細 =y[^(D 一 (x(n) - l)2],
f f(x-oi)de= [de=x(1)-o(„〉-1). J_ao 八\(4)-1
以上各式代人(4. 2. 8)式可得
m)=士以(1)+又(4)-1J. I
4.3相似变换群下尺度参数的最优同变估计
4. 3.1 尺度参数分布族的相似变换群
一般的尺度参数分布族可表示为 小去O.'》)咖含),
其中ag0=(0,+00).当(t=1 时，X~~/(久，...，x„)=/(x)为 标准分布，例如j/ V(0,a2)!或l??(0，a)|.注意，尺度参数分布族
有以下常用性质:若贝 X=aY-Pa.
IJ r=X/a-P1;反之
,
则
本节将要证明:尺度参数分布族关于相似变换群为不变分布族;并 进一步求出尺度参数关于相似变换群的MREE.以下首先介绍样本空间
的相似变换群及其导出群，以及相应的相似同变估计和同变损失函数， 为求解MREE作准备.
(1)样本空间的相似变换群.给定样本空间义，定义以下相似变

换群 G={gk |:
gkx =kx 艮P gkXi =x^ = kx{, i = 1 , ••• ,n.
(2) 参数空间的导出群.由于Y=gkX=kX二 , ...风Y，因 此/的分布为
Y = gkX = kX - : pa , o■’ 二
这仍然是一个尺度参数分布族，所以\X-Pa,a^e I为相似不变分布 M.而!由上式可知，其导出群为0=(0,+«)上的相似变换群:G=
fA I，gk(^=〆=ka.
(3) 判决空间的导出群及参数的同变估计.首先要确定所研究的
统计问题.我们考虑两种情形，即参数a 和〆的估计.这时判决空 间、同变条件以及同变损失函数都不一样.
(3a)关于tr的估计.这时，P = (9,可定义G" =G, g; =gk9使 得 d_d’ =g: d 二kd' 特别有 gk 3-(%) = ka(x).则(4. 1. 6)式的同变条 件8(gx) =g*8(x)化为a(gkx) a(x),即
a(kx) -ka(x). (4. 3. 1) 该式就是对a 的估计■(幻的一个限制，以下将在此限制下求最优解.
特别，若取则有
a{x/a) (4. 3. 2) 其中X/a -P i9 该分布与参数a 无关.
相似同变损失函数.这时损失函数L(a,d)应满足L((r，d) =£(〆， (/')=[(Axr, Ax/)，V A: >0.取 ^=cr-1,则有

因此同变损失函数L(a，d)必为(<//a)的函数，以下将在此限制下求最 优解.通常取均方损失
或绝对损失 L(a，d) =p(d/a)=| 1 -d/a | . (3b)关于〆的估计.这时，P为一切〆的估计组成.易见，当
a-><r'=A:a 时，ar-^(af)r = krar;若(/ e P为(/的估计，则应有 </—> dWd，因此导出群应定义为
=\gk |，d=krd. 特别，若〆的同变估计记为</=?(X),则应有J;ar{X)=krar(X).

因此，(4. 1.6)式的同变条件8(gx) =g*5(x)化为
ar(kx) =kr ; r(x). (4.3.3)
该式就是对〆的估计P (幻的一个限制，以下将在此限制下求最优解.
特别，若取则有^
crr(x/(T)= ar(x)/ar,
其中X/a-P^该分布与参数a 无关. 关于同变损失函数L((r，d)，应满足L(a，d)
=L(a'，d’) =L(ka,
Vd)，\fk>0.当k=(T-1时亦成立，因此上式化为
L{a，d)= 1，^;)形)，
即同变损失函数L(a，d)必为(rf/a)的函数，以下将在此限制下求最优 解.通常取均方损失
或绝对损失 L((y，d) =p(d/ar) = | 1 - d/crr | • 4. 3.2尺度参数的最优同变估计
以下主要求a 的最优同变估计(〆 的情况类似，可作为推论)，其 思想方法与位置参数的最优同变估计十分类似，即通过不变量及最大不 变量，导出定解条件;而推导定解条件的出发点为同变条件(4.3. 1)式 和(4.3.2)式，即a(kx)=ka(x),且有a(x/a) =a(x)/a,其分布仅 与弋有关，与a无关.
引理4.3.1若o-! (x)和汐2(幻为a 的相似同变估计，则u(x)= J,(x)/a2(x)为相似不变量，即u(kx)=u(%).反之，若a(幻为相似 不变量，o-j(x)为相似同变估计，则 a2(x) = ai (x) u(x)亦为相似同 变估计.
证明 由同变条件(4. 3. 1)可知
u(kx)= crx{kx) ka^x) =u(x). ka2(x)
反之，若u(幻为相似不变量，at(x)为相似同变估计，则 a2(kx) = a, (H) u(H) = kor} (%) u(x) = ka2(x).
因此a2(x)为相似同变估计.
引理4.3.2 uU)为相似不变量的充分必要条件是，存在函数 » 使 u(x) =<A(2), 其中 z -Z(x) = (zl ,z2,..., zJT 且有

z,=-)- , z.=-,i=2,(4.3.4) I I 欠1
(这时应要求P(1^ I =0) =0),并且a(X)的分布仅与八有关，与tr
无关. 证明必要性.由不变量的定义有
u(kx{ ykx2 , ••• ^kxn) = u(%, ,%2, ••• ,xn) t \/ k >0.
取左=1^! |_，则有
/ \(X1X2X\ XnX1\
U(x, ,X2, ..., %„) =U __ -j~
, ..., 一 ~~r
=U(Z},z,22,,Z,2n)=沙(1). 充分性.若u(x) =^(z),由(4.3.4)可知，z显然为不变

量，因而 W(%)为不变量.又因为uU) = u(kx) =u(x/a),而X/a～ ,所以 «(^)的分布仅与戶:有关，与 a 无关. ■

注 (1) z=z(x)为最大不变量，因为任一不变量u(;v)都可以表示 为■?(%)的函数 u(%) = i/r(z(x)).

(2) 引理中的2 与汐(•)都不唯一，例如以上证明中，取 “ |xn | '* , 则可得到另一最大不变量/与函数<(•).

(3) WX)的分布与cr无关，因而为辅助统计量，所以由Basu定理 可知，它必与完备充分统计量独立.

(4) 对于相似变换群，|苓|， |X(1) |，|X(n)|等皆可视为同变估

引理4.3.3设ax(x)为某一相似同变估计，则任一相似同变估计 a*(%)可表示为

a* (x) = a-l(x)ifr(z(x)). 证明 由引理4.3. 1和引理4.3.2可得

而

X(1)/X(4)等皆可视为不变量，因为x^kXi, 必有

计，

女1久1，I 戈(4) 卜左卜〈n)l, = (kxY)/(kxn).

a* (x) =o-y(x)

o-^x) = (T1 (x)u(x) =O-J (x)l/f(z(x)).

由以上引理4. 3. 1-4. 3. 3可归纳出求解最优相似同变估计的方法如下: (1)取某一特定的同变估计^(X);

(2)令 a*(X) =^(X)沙(Z(X)); (3)对于给定的同变损失函数(一般为均方损失)，求沙(■),使风

险函数R(W)达到最小. 以下引理对于求解均方误差的最小值点很方便 ，本节和下一节都要用到.

144

引理4.3.4 记MSE=E[a(X) +b(X) ,(7)=-E[:X]

时达到最小值.

证明 把 MS芯化为条件期望的表达式:

 则当

MSE=E |E j [a(X) +b(X)~\2 \ Y\}. 在条件期望中，扒 Y)为 “已知常数”，记为A，因此可考虑以下函数的 最小值问题:

由于

/(A) =E f[a(X) +6(X)A]2 \ Y} =A2E[62(X) | Y~\ +2AE[a(X)6(X) | K] +E[a2(X) | K].

/'(A) =2AE[62(X) I y] +2E[a(X)6(X)| K], r'(A) =2E[62(X) I y]>0,

所以当/'(A)=o时/(A)达到最小值，因此当

= E[a(X)b(X) | X] E[62(^)| y]

时/(A)达到最小值，即以上MSE达到最小值. | 定理4.3.1 (Pitman)设汐(X)为a 的某一个相似同变估计，则在

均方损失下，a 的最优同变估计可表示为

m) |Z]a(X), (4.3.5) |Z]

其中E,表示对标准分布匕取期望，Z 的分量如(4.3.4)式所示，并且 (4.3.5)式的解唯一，与^"(尤)的选取无关.

证明 根据引理4.3.3,可设a* (X) =a(X)Z),并求#(•)使 MS£最小，因此有

服叫 工、:)12叫与^(2)_1广

由(4.3.2)式有a(X)/a =a(X/a) , X/a - 同时Z 的分布亦仅与 有关，因此有

MS£ = Ea[a(X/a)i//(Z) - 1]2 = E, [S(X)汐(Z卜 1]2 ,

应用引理4. 3.4,其中a(X) = -1 , b(X) =a(X),所以当
汐(Z)=m 多(x)m Eja2(X) |Z]
时达到最小值，由此即得(4.3.5)式. 再证唯一性，设5(X)为另一同变估计，则有

由引理4.3.3可知，存在某一个<p(«),使士(尤)可表示为a(X)= 6(X)^(Z)，因而代人上式可得
~ E1[a(X)<p(Z) |Z]
a (A)= EKW (7) |Z严 MZ)=^W '
推论1 若T:T{X)为完备充分统计量，且p(r)是a的同变估计， 则 a 的最优同变估计为
Ejy(7)] <P(T). (4.3.6) EjPTnJ'
因为Z 的分布与a 无关，所以为辅助统计量，由 Basu定理，7 与 Z.独 立，因而有 E,
[乎(7) |Z] =E.[^(r)], EJ^CT) |Z]
由此可得(4. 3.6)式.
(4. 3.7)
推论3 设5(Z)为〆的某个同变估计，则〆的最优同变估计为
推论2 a*(X)可表示为
O** (尤)=l^i Kim
I |z 因为可取a(X) = |X, I为(T的一个同变估计.
]
丽EJ5(X) \Z], (7)
推导过程与(4.3.5)式十分类似，从略.
5* (尤)
(4.3.8)
例4.3.1设X,, ..., 独立同分布，I,~丄求a (T
的最优同变估计.
解.易见，分布族为尺度参数分布族.取7= »则由
有T-^r^k^x,.因此r为同变估计，而且为完备充分统计量，因 此由(4. 3. 6)式有
m)
当<r=l时，X{ ~r(l,l), T~r(l,n),因此EJT)=n, E2(T2)=
n(n+1).代人上式可得a^X) =r/(n + l).这一结果比极大似然估 计及一致最小风险无偏估计都好. ■ 例4.3.2设X,,..., 总独立同分布，X. -R(0f0)t求0的最优同
E.(n T. E.(r2)

变估计.
解 取为同变估计，它也是完备充分统计量.当0 = 1时
X(n) ~5E(n,l),因此由(4.3.6)式有
力*m _EJU _i+2Y
这一结果比极大似然估计及一致最小风险无偏估计都好. ■ 例4.3.3设X:, ..., ;Vn独立同分布，X, ~/V(0,a2),求a2的最优
同变估计.
解取r=
i=1
因而与z独立. 当<7=1时
P* (X) =^~T =-^-T. E,(r2) n+2

这一结果比极大似然估计及一致最小风险无偏估计都好. I 例4. 3.4设X,, ..., Xn独立同分布，X,服从Rayleigh分布
2X 4
, (r) =—7—e"^/ \x{ ^0 },
a
求 a 2 的最优同变估计.
解 /(A, a)可表示为
因此为尺度参数分布族.而旦r=1<为(^2的同变估计，并且是完备 i=1
充分统计量.当(r=i时，a, —2x,e—x?,因此<～r(i, i)，r~r(i, n).所以由(4.3.8)式有
—^22卜⊥ EJT2) n+1
4.3.3 Pitman积分公式
由(4.3.5)可知，a—*(X)可由标准分布 P, ~/(%i,••—,xn) =f(x)表 示.特别，根据(4.3.7)式，我们可以计算出条件期望E.(IX, || Z)和 E,(< |Z)从而把7 (x)表示为关于/(幻的积分.在第2节的定理
4.2.2曾经有这方面的结果，此处将讨论类似的问题，但是情况要比那 里复杂一些.根据(4.3.7)式，为了计算出条件期望Et(|| Z)和 Ej(Xj\Z),必须求出(X, |
Z),Z2,••—,Zn)的条件分布|*,2^, ...,
, 则，它是cr2的同变估计，亦为完备充分统计量,
由(4.3.8)式有
4.3相似变换群下尺度参数的最优同变估计 .VYY\T
147
zt | = ± 1只取两个值，因此可以分两步求解:首先求(4, Z2, ..., ZJT的联合分布P(XX,z2,•••,^n)以及条件分布P(X1 Iz2,••—,Z„)，然后再根据z: = +1和Z, = —1(即X' >0和4 <0)两种情况来求条件
分布\zl,z2,——,zn).
引理4.3.5 假设P(X,=0)=0,贝!J当a=1时，’X.|Z2,—,Zn的
Zn),其中A 与Z ...,
条件分布可表示为
证明 首先求出X1 ,Z2, 作变换
|xj |n"1/(xl , —,xlzn) J—90 \u\n~lf(u9uz2,——,uzn)du
/) 共有n + 1维.但是，由于
(4. 3. 9) 的联合分布，z2, ..., zn).为此,
w 2, lx =Y,Yn.
变换的Jacobi行列式的绝对值为|川=|r, |n—*,因此由 (Xj,•——,xnY —f(x{, x2, •", *„)
可得
而r, =x,,(y2,—,yj
(yi, y2,..., yn)T , 7172,..., :rajIXiIn_,.
,因此(h '
以下继续求(X,\ZX.Z2..., 的条件分布|z], z2, 这 时Z. =X1/|X1 I = ±1,而且戶(久|z2,—,zj已如(4.3.9)式所示.
分布为 由条件分布公式可得(4.3.9)式:
T = (z2,...,
zjt 的联合

zjT
,Z2 , ,zj =f(x} ,xlZ1• fXlzn) I Xj
引理4.3.6 设P(Xj >0 | Z2 =z2,•••,Zn =2n) =px,则有

P:'P(xi ∣z2,”W)/|久〉0|, 4=1, (!-Pz)^P(xx IZ2»..., ~)/l\<0f, A=-
证明 因为尽 只取两个值:Z. =1(X, >0)或Z, = -1(4 <0), 可按这两种情况分别计算条件分布.首先考虑A =K^ >0)的情形, 这时
尸(义1矣太1 I之1 =1,之2=:2, ..., A=ZJ=F(欠1 I:1=1七, ..., Zn)
尸(久彡%, :X, >0 I Z2 =f.,Zn =ZJ =~~P(X17o|Z2=z~..-,Zn=zJ~
= P:-1 p(a |z2,...,zn)dw / j%, >0 j.
该式对A 求导可得
P(xil2"h, ..., \)=PZ_1P(^1\z29---,zn)II%!>0\, z,=1. A = -1(4 <0)的情形可类似地加以证明.
定理4.3.2设X = (X,,..., Xn)T服从尺度参数分布族: X-p(x,cr) = - //-)
则 (T 的最优同变估计可表示为
证明 应用公式(4,3.7),
疒00 J—00
今分别对A =1(^〉0)和& = -1(4 <0)来计算条件期望EJ
Ei(^ |Z).当A ^Xx/\Xx | =1 时,A >0,这时由引理4.3.6有
M I 尤1 I 1^| = 1,七,...,
\) =
||Z)和 | X, I〆* \zXyZ2,—,Zn)dx.
由引理4.3.5的(4.3.9)式可得 E1 (I I I 2i = 1,:2, ...,Z„)
同理可得

Ei (<
因此当Z. =1时有
\ Jo
,xxzn)dx{ - p~ n~lf(u,uz2,-- 9uzn)du
| A = 1 ,z2
x\^f{xx ,XiZ2, ” ... , z n) - .
u
I1 J - 00
1
EJ IX, ||Z] EJX? |Z]
,uZn)du
(4. 3. 11)
un+,/(u,uZ2,...,uZn)du 可设法通过变换化简以上积分 变成对称形式.由于
= 2,"., 71,
因此若令X{/u =t9则有u~X{/t以及 f(u, uZ2, ..., uZn) =/
所以在积分(4. 3. 11)式中,可令u = X{/t f 则有du = - (Xi/ti) dt 人(4. 3. 11)式可得
E,[|X, ||Z]
1 Jo a 2p(^^a)dcr ⊥ a^p(X9a)da
该式代人(4.3.7)式,并考虑到当z, =X,/ | X. | =1时,X. >0, \X{\ = X” 即得(4. 3. 10)式.

当A = −1(即苓<0)时，证明的方法完全类似，从略. | 推论a的最优同变估计可表示为
代
证明
5* (X) = £a−(r+,)p(X,a)da/j\~ (2r+i)p(X da.
可取I X,丨"为〆的一个同变估计，因此由(4.3.8)式有
S*(X)
E,(丨 E.(^|Z)
IW.

剩下的分析和计算与(4. 3. 10)式的证明完全类似. I 例4.3.5设X,, ..., 总独立同分布，X, ~/?(0, 0),求0的最优同
变估计.
解 X,, ..., 叉的联合分布为
x ~p{x、e) =^i \x{n) U
因此由(4.3. 10)式有
(7)=C6~2\l)0(X(n)<eI do J00 i
6T(n+2〉d6) A(n)
n +2 v
J/ jx(1)彡o |.
例 4.3.6 设 X} , ••- ,Xn 独立同分布，Xx − Laplace 分布;^−e_+ 2a
求 a 的最优同变估计.
解 义I, ..., A的联合分布为p(x,0)=
A − X I A I, 则有
a* (X) = f a~2---------e Jo (2a)n
= 卜+2)e+c
exp|−丄2 | | L (2(7) I i=\ J
记
令l/a=tf则有da = −l/t2dtf代人上式可得
5−* (X) = 〔tne−Atdt":tn、 e'Atdt
r(n 4−1
~r(n+2)A=n^l叾(4). ■
例4.3.7设X', ...人 独立同分布，久~2沒2<3门X，沒>0 |，求 0 的最优同变估计.
解易见P (Xj , 8)=−6 弋 , ... , 兑的联合分布为
X1
'
1为尺度参数分布族,
0 > 0}.
因此由(4. 3. 10)式有
p(%，幻=2n02nY\x73I \X{1) i=l
O−−3 − (2a)n
e−4da

m)
i−
2n −2
= ^TTX(1).

<9 > 0 |
0 > Q \ AO
r^^nx;3z(x(1) 1
4.4线性变换群下位置尺度参数的最优同变估计
位置尺度参数分布族是最常见的分布族，如正态分布;V(M，a2)、
均匀分布等都是.这时位置参数要考虑平移变换群;尺度 参数要考虑相似变换群，合起来就是线性变换群.
4. 4. 1 位置尺度参数分布族与线性变换群
设1 = (4，...， 为位置尺度参数分布族
其中
/ie(—00，+00)，GTE(0,+00)，没=(从，cr) e0=|(—00，+00) X(0, +00)}.
当/z=0, a = l 时，X 称为标准分布.特别，若 则 r=(zV—Ml)/a~P(0>I);反之，若 r~P(Oil), 则 X = aY +
本节将要证明:位置尺度参数分布族关于线性变换群为不变分布 族，并进一步求出相应参数关于线性变换群的MREE.以下首先介绍样 本空间的线性变换群及其导出群，以及相应的同变估计和同变损失函 数，为求解MREE作准备.
(1) 样本空间的线性变换群.给定样本空间叉，定义以下线性变 换群 G = \g[m<k] |，k >0:
=ml +kx 或 =x[=m +kxit i = 1,...，n， (4.4.1)
其中/n表示平移变换，A:表示相似变换.
(2) 参数空间的导出群.今考虑Y = g[mk]X=ml +kX的分布.这
一线性变换为
(92n_3d<9

Yx =m+kX'
Y2 = m + kX2,
=> ,
-Yn = m + kXn
Xn- \k
■
,
Y- 变换的Jacobi行列式的绝对值为|J| =Fn.由于
以上变换关系代人上式可知
__ k 弘__
a a ka a'
其中〆 =m + kfi，a' = ka，由此可知K的分布为
1 lyx-m-kfi U n/(~ka
yn-m- kfi\
— ka AbZJL ...
-
j
(a)nJ\ ar
, ■
’ a，j
~尸[〆，〆]，〆 二饥 ♦kp，a' =ka.
这说明，r 的分布仍然是位置尺度参数分布族;即 p (^ }在线性变换群

下为不变分布族.这时，参数空间的导出群可表示为g = : =(〆, 〆)=(m+kp, ka)，或者可表示为
g[m,k]^ = rn ~ka. (4. 4. 2) 该式表明，在线性变换群的作用下，位置参数要进行相应的线性变换. 但是，尺度参数只需进行相似变换，这与相似变换群的作用完全一样.
所以可以预料，尺度参数的同变估计和同变损失函数的性质也与在相似 变换群作用下的性质一样.
(3)判决空间的导出群及参数的同变估计.首先要确定所研究的 统计问题.我们考虑两种情形，即参数m ，o•的估计以及〆的估计. 这时判决空间、同变条件以及同变损失函数都有所不同.注意，参数a 和 〆 的估计的同变性质与相似变换情形基本一样.
(3a)关于的估计.这时，D =&,因此可定义= 记
(4.4.2)式可得 = m +kd^, =kda
d= 表示蚪，<7 的估计，则有 G*= =gM].
x, =-4- 1k
, ... ,
Yx -m
由 . 若记 <r 的估计为
4.4线性变换群下位置尺度参数的最优同变估计 A(x)，J(x)，则有
, g[m,k]a(x) =ka(x),
153
则由上式及(4. 4. 1)式可知，同变条件8(gx) =g*5(x)用于/£的估计有 =M(ml
=g*m.A]M(x) = m + ^/z(x)，所以/2(幻的同变条
件为
ft(ml+kx)=7n+^/x(%), V(zn,^), A:>0. 同理，(5■(幻的同变条件为
o-(ml +kx) =k ar(x) , V (m,k) , k〉0. 特别，若取k=a'\ m=-終/a，则以上两式化为
^/2(%)-fi —/ilj_泌)
(4.4.3) (4. 4.4)
(4. 4.5)
而且(X-Ml)/(T-P(Oil)为标准分布，与参数(M，^)无关.这些就是求 解M， 同变估计的约束条件.
关于同变损失函数，M与的估计要分别讨论.若人表示M的估 计 ，则应有
L(/x,cr;^) = L(m + kf£,ka ;m + kd^) , M m，k，k>0. 若取A:=cr_l，m=-fi/a,则上式化为
£(/z,ct;c/m)叫 0，l ;
因此同变损失函数应为(4 -/u)/tr的函数.通常取p(.)为均方损失， 则有
Z(弘，(7;<) (4.4.6)
关于a 估计的同变损失函数，若< 表示a 的估计，则应有 L(^,a;da) = = L(m + kfi,ka;kda) , V m,k, k >0.
仍取&=cr_1，m = -/z/cr,则上式化为 心)=乙 0,1
因此同变损失函数应为da/a 的函数，这与相似变换群的情况完全一 样.通常取p(9为均方损失
£(弘，<7;心)=1
(4.4.7)
(3b)关于(/的估计.这时，P为一切〆组成，其变换情况与相 似变换群完全一样.易见当a~^ar =ka时，</-*(〆/=Tc/;若d仨V 为〆的估计，则应有 W =krd，因此导出群应定义为6- = ,

iU:krd.特别若(/的同变估计记为a=P(X)，则有i[:=
krar(X).因此(4.1.6)式的同变条件8(gx)=g*5(x)化为 ar(ml +kx) =kT(rr(x).
关于〆估计的同变损失函数，若表示〆的估计，则应有 £(/i,cr; d.)=乙(弘'，(7';
d')=L(m+Ayx,ka; krd)，Wm，k.
仍取A:=a_1, m = —fjb/a9则上式化为
L(/x，(r; c/)=A(O，l;去、=p(多).
因此同变损失函数应为d/a的函数，这与相似变换群的情况完全一样. 通常取〆•)为均方损
失
—多)=(1Z^2_.
4. 4.2 位置尺度参数的最优同变估计
以下主要求/x和a的最优同变估计(<< 的估计类似，可作为推 论)，其思想方法与前两节十
分类似，即通过不变量及最大不变量，
导出定解条件;而推导定解条件的出发点为同变条件(4.4.3)式与 (4.4.4)式.
引理4.4.1设氏(%)，氏“);么(幻，么(幻为线性变换群下M 和cr的同变估计，贝!J
/ 、 么(幻 o—^x) a2(x)
/ 、Mi(x)_A2(幻
a(x) =——————————————，v(x)=
为不变量.反之，若a，(%) , /t! (x)为同变估计，u(x) , v(rr)为不变 量，则
片2(幻=Ai(x) +a1 (x)u(x) , a2o) =5—1 (x)v(x) 为同变估计.
证明 由同变条件(4. 4.3)式与(4. 4.4)式可得
/ , .、 +kx)—/i2(7nl+kx) u{ml + kx)=—————————— —
—————————————————————————
cr, (ml + kx)
m + k/l^x) — (th + A:/Z2(%))
k ax(x)
_A1(^) 一必2(幻 z、 = —————— :—————————————= U(X).
同理可证〃(幻为不变量.反之,
,
< 幻为不变量，则有
^(x)
若 ^(x)为同变估计，以幻

/12(ml + kx) =/z1 (ml + kx)十么(ml +kx')u(ml + kx) + kjjbv (%) + kai (x)u(%)
=zn +k/JL2(x).
因此A2(^)为同变估炒，同理可证么(幻为同变估计. I 引理4. 4.2 u(x) , V(幻为线性变换群下不变量的充要条件为
u(x) =^f(V) , v(x) =(p(V), 其中
叫)=(H 人)='h—x,
(4. 4. 8) 为最大不变量，且W(幻及r(x)的分布均仅与标准分布有关，与(M，a)
无关，即为辅助统计量.
证明 由不变性可知，U(%(,x2
m+kxn),若取k=l/\x2—xx |和77z= —x

, ...,X„) =U
I X2 -
,无J =a(m+kxx,m十kx2, I，则有
(X -^1)/a - P(0>1)
Xy - Xy
太3 一
' |X2 _% | | '
Xn
%2 -%! 1/
X, %3-Xj x2
0,
同理可证v(x) ={p(V).易见F为不变量，因为
- x, (m + kx^ - (th + A;%!) V =--------
=------------------------------ * x2 - Xj (m + kx2) - (m 4- kxx)
.... 1 X2 -尤1
"Xl \ X2 ~X1 1/
x2 -xx\ fx2 -x{
= u(O, V2, V2V3, ..., V2VJ =^(V).
由于u(幻为任一不变量，因而V为最大不变量.又由u(x) = u(znl + kx)，取女=cr_1，m = -/z/a,则该式化为 u(x) = u((x -好l)/cr)，而
. 所以u(幻及t;(x)的分布都仅与标准分布有关，与 (M,)无关，即为辅助统计量. 壓
引理4.4.3设队X)，汐(%)为某同变估计，则任一同变估计可表示为 A*(x)=A(X) + (V), (7*(%) =a(x)(p(V).
证明由以上两个引理的结果可得
A* (x) =M(^) +多“)士(2 了“) =4(%) +a(x)i//(V), o-(x)
(7*(%)
=a(x)(p(V). |
x2 - xt
x3 - x
Xn~Xl\ T
由以上引理可归纳出求解(/x,a)的最优同变估计的方法:
(1) 取某个特定的同变估计/1(幻，士(X);
(2) 令^(X)=/l(X)+a(X)^(V), a*(X)=a(X)^(V),求
少(•)以及史(•)使均方误差最小.
X2 -尤1
x
x2 一X| x2
• • • , 9
<;

定理4.4.1 (Pitman)设/1(X)，士(X)为/£，a在线性变换群下的
同变估计，则在均方损失下，M, o■的最优同变估计可表示为
(4. 4.9) (4. 4. 10)
"(4)调
E(0J)[a(X) |r]
并且解唯一，与zl(x)及J(J)的选取无关.
证明 今取A*(X)=A(x)+5-(x)«A(n,并求☆(•)使均方误差最 小，由(4.4.6)式，均方误

差似SE可表示为
d. , 因此有
MSE = E(0J) [/T (X)]2 = E(Oil) [A(X) + a(X)(A(V)]2. 应用引理4.3.4,
其中a(X) “ (X), 6(X) =a(X),因此当WV)取以 下函数时MSE达到最小值:
E(0J)(^(X)g(X) | V) 叭 E(0J)(fwin .
该式代人V W 中即得(4. 4. 9)式. 同理取a*(x)=a(x)<p(V),求p(.)使均方误差最
小, 由(4. 4.7)
式, 均方误差MSE司表示为 廰4(一[^^-1]2久,小.(弓午1]2,
由于(X~/il)/a ~P(0>1),因此有
Af5E=E(0J)[a-(X)-1]2=E(0J)[a(X)V) -l]2. 应用引理4.3.4,取
a(X)=-1,b(X)=a(X),因此当汐(7)取以下 函数时AfS£达到最小值:
滙 = E(/t,a
(幻 -杯 a、本
2
〉
以上用到了(4.4.5)式.由于(X-Ml)/o--P(0<1)
知.” [士(沛] 叭 E(0>1)[a2(X) | V]-
由此可得(4. 4. 10)式. 唯一性的证明与前面两个定理完全类似, 从略. 推论1 必* (r)
和多*(x)可表示为
E(0J)[^ |X2-X1 II V] E<0J)[II F]
A (^)=^i-|x2
-x, |
(4.4. 11) (4. 4. 12)
士(X) | V] E《。:(屮 vr

因为可取/1(幻=尤1, 士(幻=I义2 -A I作为M和f的同变估计, 则得 到以上公式.
推论2 若5(X)为〆的某一同变估计, 则〆的最优同变估计为 3* (X) =d(X) E(0J)
[g(X) | V]
E(o,i)^2(X) | V]'
推论3 若T二T(X)为完备充分统计量, 且M =a(H, a(X)=
6(T), 则以上定理及推论中的条件期望可改为无条件期望. 因为V为辅助统计量, 从而与
a(D , 6(T)独立(Basu定理). 例4.4.1设Xx,••-,Xn独立同分布, X、〜叭 , 求(w2)的
最优同变估计.
解 可取T=(y,s2), s2=
(^.-x)\则r为完备充分统计
i=1 量, 且尤为从的同变估计, 因为由X—=ml+kx,有x—^m+kx; S2
为a2的同变估计, 因为由x—^xf =ml +H,有S2—^k2S2;也有S—^-kS. 因此由定理4.4. 1
以及推论3有
/T(X) =X.
因为弘=0,(r=i时, S2 ~x2(n-l),因此由推论2有
p*(x) E<(M)(气)=⊥, E(0>1)(54) n + l
本例中a2的估计比极大似然估计以及一致最小方差无偏估计都
要好.
例4.4.2 设 (M,a)的最优同变估计.
解 取 r= (x(1), s), s=

匯 独立同分布，X: +r(l/a,l)，求
(A – 尤(1))，则 r 为完备充分统计
1=1 量.可取X(1)，S分别为弘和a的同变估计:队X、 (1)，a(x)=S.
注意，X(1)～+r(a/<r, l)，S-r(l/a,n-l)，且独立.以上结果代 人(4. 4. 9)式和(4. 4. 10)式可得
E(o, i)(U) A* W =^(.)-5 E(o, i) (S2)
(X) =X(I) -
nn
下表给出了M和a 极大似然估计(MLE)、一致最小方差无偏估计 (UMVUE)以及最优同变估计(MREE)这三种估计的比较，按均方误差
,
a* (X) =—S.
m)
E(o, i) (S) =s E(0J)(S2)

最小准则，最优同变估计都是最好的. 估计
a
UMVUE
MLE MREE
Y
1 -^-rS (1) n(n-1)S n-1
Y A(l)
_⊥s n2 °
又(1)
Is n
T5
4.4. 3 Pitman积分公式
与前两节类似，我们可应用公式(4. 4.11)和(4. 4. 12)，经过直接
计算把A* (幻和表若示为积分形式如下. 定理4. 4.2
则MW的最优同变
估计可表示为
〆 (幻 = dcr 1 /z(r ~3p (X ;/£, a) d/it ---------------------- ,
J dal a~3p(X
a~2p(Xdp,
W: a~3p(X;/jL,a)d/jL
注 本定理的证明与定理4.3.2的证明十分类似，只是计算更加复 杂一些.根据公式(4. 4. 11)和(4. 4. 12)，其关键是求出(-X,
I V2,v3,-,vn)的条件分布.由于
r/ ^2 -^1 X. -X,
z=3’...人
因此可先求(^,^2 -X, I V3,v4, ..., VJ的条件分布.为此可通过变换先 求(^,^2 的联合分布.再经过若干计算即得以上公式，进一步的细节从略.在第八章，我们将从Bayes观点出发，更加快 捷地推导出Pitman积分公式.
习题四
1.设X,, X” X,为i. i. d.样本，A 服从位置参数分布族f(X1 -

;
/£,a)d/jL
习题四 e).令
159
5(hx3)
弋， X2，
X3 >0, x3^o.
将作为0的一个估计，证明:当损失函数为L(8-0)时，6(X,,X2,X3)的风险函数与0无关，但5(X,,X2,X3)不是0的同变估计. 2. 设样本1=(芩，...，及)T服从位置参数分布族/(叼—湺，...，x„ -
6). HD为湺的同变估计，取损失函数为L(0,d) =L(d-0).证明: 『(幻的偏差、方差以及HX)的风险函数都与0无关.
3. 设样本JV=(X,，...，XJT服从位置参数分布族/(叼-❷，...，xn- e).若r(X)为关于0的充分统计量， (X)为e的Pitman估计，证 明: (X)是r(x)的函数
4. 设A，...人为i.i.d.样本，X.服从均匀分布屮—+
其中未知.在均方损失下，求0的MREE.
5. 设 ...，夂为i.i.d.样本，X.的密度函数为=
x^0\ ,在均方损失下，求<9的MREE.
6. 设 X,，•-- ,Xn 为相互独立的样本，X-t - N{fjL,a)~xa2) , Z = l,...，n，其中叫，a已知.在均方损失下，求#的MREE.
7. 设 X:，...人 为 i. i.d.样本，X' -2V(p,,a2);广，...，^ 为 i. i. d. 样本，Y. ~N(c/ji,9a2); 并且合样本独立，c^O, cr>0已知.在均方损 失下，求弘的MREE.
8.设X，，...，总为i. i. d.样本，X.的密度函数为/(%1;从)= |x，_"L其中未知，在均方损失下，试求m的MREE.
*9.设X,，...，及为i. L d.样本，X'服从指数分布/(x1;A,M)=
!，其中A已知，M为未知的位置参数. (1) 在均方损失L^,d) =(d-^)2下，求^的MREE;
(2) 在绝对损失=\d-fx\下，证明:从的MREE为X(1)- ln2/(nA)(提示:直接用MREE的定义，求(/使最小，(3)和 第 10题亦类似); *
(3) 若损失函数为L^,d) =1 j \d-^\ >A j ,其中4为已知正数. 证明:弘的MREE为;V(1)-4.
10.设Xj,Xn为i.i.d.样本，X'〜N(/jl，a2)，其中 eR未知，

cr2>0已知.若损失函数为
J) =A(/z-d)=
-a(/JL -d) , -d) ,
其中a，冷为正常数，求M的MREE.
•11.(1)定义函数洽(a) =E[P(J-a)]，其中 p 为(-oc，+oo)上的凸数.证明:若p为偶函数，且X 的密度函数关于对称，则 (&(a)在a=M处达到最小值(提示:对某实数c，设巾(a)在/z + c处取最小 值，先证 +c) =4>(/1-c),然后用P的凸性证>(/X)+c));
(2)设样本JV = (^，...，XJT服从位置参数分布族/(a -A).取损失函数为=L(d-M，其中L(O为凸的偶函数.若 rQ(x)为M的同变估计，其密度函数关于/I对称，并假设rQ(x)与r独
立，其中Y=(X2-x,,...,xn-X,),贝|Jr0(x)为异的MREE. *12.设样本

X=(X,,-.,Xn)T服从位置参数分布族/(X,-❷, ...人-
❷).nx)为位置参数0的同变估计.证明:在均方损失下, r(j)为a 的MREE的充要条件为
r(X)是沒的无偏估计, 并且满足E[T(X) • t/(尤)]=0, M F,其中W=\U(X)\U(X)=t/(X+cl),Vc,且 EJ(7(X)] =0, V 沒
13.设X1, -,X 为i. i. d.样本, 在均方损失下求a的MREE: (1) 义1 ~r/ p 已知; (2) XK 服从 Weibull 分布 /(x,, o-)=
aa-^-'expj -x\/cra | ,其中a是已知的正整数.
14. 设弋, ..., Xn为相互独立的样本, X, -N(09a)r}a2) , i = 1 , ...,
n, 其中叫〉0已知.在均方损失下, 求a2的MREE. 15.设X1,-,Xn为i.i.d.样本, Xx-R(69k0)9 A:>1已知, 0>0
未知, 在均方损失下求^ f 的 MREE. 16.设W„为i.i.d.样本, 在均方损失下求6>的MREE:(1)X.-
3e3/x4j \x^e>0 I ;(2)Xj -4x]/e4!\o^Xl^e\.
* 17.设样本x = (A, ..., X„)T服从尺度参数分布族» a\aa)
, 其中a>0是未知的尺度参数.设7 = T(X)为的某一同变估计, 损
失函数取为L(a, d) ,其中r为某一正整数.假设T = r(X)
Z的条件分布记为其中Z = (7^’U 证明:〆的MREE为V (X) =T(X)/^>(Z), 其中乎(Z)满足以下关系式:
通稣赖.

[
18.设Xt, ..., 为i, i. d.样本, 当损失函数取为L(a, d、=
y-1时, 求a的MREE: (1) X,服从均匀分布7?(0,a); (2)弋~
1” -e~~I|X,^0 (
a
其中a>0是未知的尺度参数.设a(X)为 a 的某一同变估计, Z = (7^7参 ..., 另为最大不变量, 损失函数取为Ua, d) =|--log-^-
1;求o■的MREE;并证明其唯一性, 即MREE与J(X〉的选取无关(提 示:仿照定理4.3. 1的证明).
20. 设X,, ..., 叉为i.Ld.样本, X,~TV(m, (72),在均方损失下求 or 的 MREE:
(1) al =0; (2)弘未知.
21. 设X,, ..., X、为i.i.d.样本, X.服从均匀分布/z+
, 其中meR, a〉0是未知参数, 在均方损失下, 求g 和a 的
MREE (提75:/1=了(又(1) +X(n))和 a = X(n) - A■(1))分别是/x 和 a 的 同变估计, 且有
/•*00
tf(t|Z)dt=[tf(t\Z)出(提示:直接用MREE的定义证明).
.
*19.设样本=(X:, ...,xny服从尺度参数分布族 , cr \a a/
^(0,1) (^(71)- ^(1)) =0).
22. 设冬, ..., 叉为i. i. d.样本, 晁 +
,1),若仅观测到
(K, ...X)=(尤(1), ..., 尤(7)), 其中x(I)彡...彡Z(1).
(1) 当O■已知时, 求均方损失下;a的MREE;
(2) 当科已知时, 求均方损失下a 的 MREE;

(3) 当y 都未知时，求均方损失下(M, a)的MREE; (4) 分别求各个估计值的风险函数.

第五章点估计的性质

本章讨论点估计的若干性质.我们知道，一个未知参数的估计量有 很多种，可参见第三章、第四章.在理论上或实用上，什么样的估计量 最好呢?直观上讲，应该是估计量与被估计量越接近越好.但是“接 近” 两字的含义实际上涉及估计量的优良性标准，这种优良性标准在 文献中有很多讨论，本书第三章、第四章也已经作了一些介绍.第三章 曾经介绍统计判决函数以及使风险函数最小的优良性准则，这是一个很 一般性的准则，其优良性要结合损失函数的选取进行研究.第三章也介
绍了估计量的无偏性，它要求估计量与被估计的真参数之间的平均偏差
为零，但是无偏估计也包括f 左右偏差可能都比较大的情况.所以在第
三章和第四章，我们着重介绍了估计量的均方误差(即平方损失函数)
最小准则，其中包括UMRUE和MREE.本章将介绍与估计量的均方误
差有密切关系的有效性问题.另外，极大似然估计和矩方程估计是从其
他统计观点提出的，与均方误差最小准则无关.本章将从大样本观点 (即考虑样本容量〃趋向+00时的情形)阐明估计量与被估计量“充分
接近” 的意义，即估计量的相合性和渐近正态性，并应用于极大似然 估计和矩方程估计.
关于有效性问题，主要研究当样本容量n 给定时，估计量以尤)或 以幻的风险函数(主要是均方误差MSE)可能有多小?原则上讲，MSE 当然是越小越好，但事实上是不可能的.可以证明，大多数估计量的最
小均方误差不可能无限制的小，而是有一个下界.因此，达到下界的估 计量最好，称为“最有效”.本章第5.1节和第5. 2节主要讨论估计量 的均方误差的下界问题，介绍C-R不等式以及广义的OR型不等式.
关于估计量的渐近性质(或大样本性质)，主要考虑样本容量n 趋 向+«时，估计量..., ;Tn)是否能在某种意义下收敛到真参数6, 称为相合性.再就是渐近正态性，即考虑介久, ..., Z„)的渐近分布，对
于很多情况可以证明， -0]趋向于正态分布，这时称心尤)具 有渐近正态性.本章第5. 3节将讨论这方面的问题，并应用于极大似然 估计和矩方程估计.有关本章内容，可参见陈希孺(1981,1999), Leh mann (1999) , Shao (1998)等.

5.1 C-R不等式

设 X = (>¥,,..., ZJT, X-f(x,e) , 参数 <9 和 g(60 的估计分 别记为穴X)和g(X).第三章曾经证明(见3.2节)，奴幻的均方误差 可表示为
MSE(g{X)) = Var/g(X)) + [bias(倉(X))]2. 我们要求估计量g(X)的均方误差尽量小，相当于要求其方差与偏差平
方之和尽量小;当然也应要求方差Var(i)尽量小.特别是无偏估计, 由于 bias(g(X)) =0,因此 MS£(g(X)) = Var,(i(X)),所以，要求估
计量的均方误差尽量小，就等价于要求其方差尽量小.本章将证明，不 管i(X)的形式如何，其方差Var(g)都不可能无限制地很小，而是有一 个下界，即恒有Var(g(X))^某一下界，对一切i(X).因此能达到方 差下界的估计量g(X)最好，称为“有效估计量”.若n-+x时，i(X,, ..., 的方差趋向于某一下界，则称g(X)为“渐近有效的”.以 下集中研究估计量g(X)的方差下界问题.
本节假定H0W丨为正则分布族(即C-R分布族，详见第二 章)，其基本假定摘要如下:
(1) ;有共同支撑，即 S, = |x: f(Xf0)>0 (与 0 无关; (2) L(8) =L(❷, x)

=logf(x，0)关于 0 连续、可导; =
去以e)存在二阶矩，且有E^S^X.O)]=0, E，[\(X』)S/U)]=
(4) ，，(4) =(々(4))为Fisher信息阵;
(3) f(xf0)关于6求导数与关于rr求积分可交换次序. 以下为常见的两个不是C-R分布族的例子:
(1) 均匀分布X-R(0,0):
1 0 矣%彡沒， =-i !=u
0. %<0或%> 这时与❷有失.另外，八x，0)作为0的函数在e^x处不连
续，因为f(x，0) =1/0,当 6^* 时，而f(x,0) =o,当 时. (2)带位置参数的指数分布X~ju+r(A,l),取A=1,
/(X，/I)=e-d)/jx郎(=(e(X
10 , X <fJL.
这时\ = [jU，+ 00)，与#有关.另外，/(X，A)作为弘的函数在fjL^x处
则有

不连续，因为M)=e-(x^,当而/(%,/i)=0,当 时. 5.1.1 单参数C-R不等式
本节主要讨论以又)或id)为无偏估计的情形，这时估计量的方 差就是其均方误差.至于有偏估H•的情形，可作为推论很容易得到.本 节的重要结果之一是Var(^)彡C-R下界=广(0)，其中以尤)为0的无 偏估计，K0)为观察样本的Fisher信息阵.另外，本节的证明主要应用得分函数(即score函数)S(x，0)的定义与性:质:
_ dL(❷，X) _ alog f(x }=— = dO
且有
EJS(X,^)] =0, VarjS(X，沒)]=EJS(J,^)ST(X,^)] =1(0).
引理5.1.1 设 |为C-R分布族，i(X)，6(X)分别 为g(幻和0的无偏估计，且导数g\0)存在，则有
CovJi(X),S(X,^)] =Ee[g(X)S(X^n =g'(的 ， (5.1.1) CovJ<?(X),S(X^)]
=1. (5. 1.2) 证明 主要证明(5. 1. 1)式，因为令g(^) =6即可由(5. 1. 1)式得到(5.1.2)式.由score函数S(x,e)的定义与性质可得 CovJg(J),S(X,0)] =Ej(i~Eg)(S-ES)] =Ejg(J)S(J,0)J
= J g(x)S(x,0)f(x,e)d^(x)
= f g(x)~-X-'^f(x,0)dp,(x) =| g(x)ff(x90)d^(x>)
I g(x)f(x,e)dfi(x)
=^Eji(X)] =gf(0). |
推论 若i(x)和S(x)的偏差分别为(幻和b(e),即 Ejg(X)] =g(^) +6/60, EJ^(X)J =e +b(0),
CovJi(X),S(^^)] =g，(9) +～(4),
CovJj?(X),S(X,6>)] =1 +6'(<9). 本节将要证明几个C-R不等式，它们都可统一地应用以下引理,
该引理经直接验证即可得到.
，0)_ 1 W(x，沒) d0 ’

引理5.1.2若随机变量X，F的二阶矩存在，则Schwarz不等式可
表示为
[Var(X)][Var(K)] =[Cov(X,F)]2 +Var(Y)Var(X-AK)
彡[Cov(X，r)]2, (5. 1.3)

其中
A =Cov(^,y)Var-^r), （5. 1.4）且等式成立的充要条件为x-=常数(a.e.).特别，(5.1.3)式等
价于
Var(X-Ay)^0, A = Cov(X, F) Var_, (^)- (5.1.5) 另外，以上结果对;v，y 为向量的情形也成立. I 定理 5. 1.1 设 !为 C-R 分布族，g(X)，3(X)分别
为g(幻和0的无偏估计，且导数〆(約存在，则以下不等式成立: VarJi(X)]^[g7^)]2/_1(^), (5.1.6)
VarJ^(X)]>/-'(^), 以上不等式中等式成立(即方差达到下界)的充要条件分别为
=a(^)[g(x) e.), S(x,6) = aO) [0(x) e.).
(5. 1.7)
(5. 1. 8)
(5. 1.9) 证明 在Schwarz不等式(5. 1.3)中，以奴y)取代X，以S(X,沒)
取代K,并应用(5.1.1)式可得
[，(8) P =Cov:[碁(2)，S(X，❷)]CVarJi(X)] Var乂S(X，0)].
由于VarjS(X^)] =Z(^),把它代人上式即得(5. 1.6)式.在(5. 1.6) 式中取g(幻 =0即得(5. I.7)式.以上不等式中等式成立的充要条件为 X-AK=常数c(0Ha.e.),其中X=g(X)，Y=S(Xy0),因此A = Cov5(g,S)Var;,(S)=gW*(4)，所以有
g(x)-g'(0)厂'(G)S(x，0) =c(^)(a.e.). 该式两端取期望可得E/g(X)J=g(^):cd因此有
i(幻 =g'(0)rl(的s(x，的.
由此即得(5. 1.8)式，在(5. 1.8)式中取g(0) = 0 即得(5. 1.9)式. ■
C-R不等式是由Cramer和Rao分别于1945年和1946年提出的，不 等式有丰富的内涵，在统计学中有十分重要的意义.C-R不等式说明， 在C-R分布族中，g(幻的任何无偏估计g(T)，不管形式如何，其方 差，即均方误差总是有下界的，其方差下界(CRLB)为[g'(6Q]2 • 厂1(幻 ，与估计量无关.因此方差能达到下界的无偏估计必然是最优 的.另外，由表达式可知，方差下界与样本信息成反比，样本信息越 多，方差下界越小，因而可能达到的方差，即可能达到的均方误差越

小;这显然是很合理的.特别，参数0的无偏估计么义)可能达到的最 小均方误差为r\0)f即Fisher信息的逆.
根据以上分析可提出下列有效性的定义: 定义5.1.1设i(X)为g(幻的无®估计，若其方差达到C-R下
界，即
Var[i(X)]=[g'(4)]2广(0), 则称i(幻为g(0)的有效的无偏估计.特别，若Var[^(X)] =/-1(^), 则称么1)为参数0的有效的无偏估计. ■
推论1 若/(幻和AX)分别为g(0)和0的有效无偏估计，则必为 一致最小方差无偏估计，但反之不一定对(见下面例5. 1. 1 -5. 1.3).
推论2 若X = (X,, ..., XJT的分量独立同分布，而晃的Fisher信 息为i(❷)，则有
Var[g(J)]>-!-[g^(^)rr,(^) =<?(n-1), n
Var[^(J)]^⊥PQ) =0(n'1). n
这个推论说明，方差下界与样本容量成反比，样本容量越大，方差 下界越小，因而可能达到的方差，即可能达到的均方误差越小;若样本 容量趋向于无穷，则可能达到的均方误差会趋向于零.
推论3若g(X),纟(X)为有偏估计，偏差分别为和b(0)，则 C-R不等式可表示为

Var[i(X)]多[g'(0)+6:(4)]2/-|(8)， Var[^(X)]^[l+6'(8)]2广(8).
若样本独立同分布，则可用1(0) =ni(❷)代人上式.
把引理5. 1. 1的推论代人到以上定理的证明中即可得到上式.另
外，此时的C-R不等式与具体的估计量的形式g(X)，g(X)有一定关 系 ，因为表达式中有偏差项.
推论4 g(幻的无偏估计的方差下界在参数变换下保持不变，即若
有变换 6 = e(Tj) , g(0) =g(^(7?)) =g(7/)，并记参数 7]的 Fisher 信息 为 " ”) ，则有
CRLB = [g/(^)]2Z-,(<9) = [g(r))yr\v). (5. 1. 10)
证明 由于[?(7?)]2 = [g'(0(i?))6>'(7?)r，峀且” 的 Fisher 信息 满足关系
5. 1 C-R不等式
167
,(”)=4^/(沒(”))¥ =/(沒(”))[沒'(”)]2. drj dr]
I
的无偏估计的C-R下界.
« 首先考虑参数#的无偏估计，即g(M)取A=〒，这时
Var(X) =cr2/n,而/(//,) =na~2,因此有 1-
CRLB =Z_I(M)=~a2 = Var(X), n
即的方差达到C-R下界，因而为有效的无偏估计. 但是， 的情况不一样，取g(a) =a2, 其无偏估计为
P = ^rZ^.-^)2-
它是一致最小方差无偏估计，且有Var(cr2) =2cr4/(n-1).而此时 /(a2) =na~4/29
因此
CRLB =Z-*(a2) =—a4 < Var(P) =」^a4, 八\nn-1
即P 的方差达不到C-R下界，不是有效的无偏估计，但是可认为是 “渐近有效” 的，因为
Var(pr2) n
CRLB、-广 • 1
例5.1.2 设X,, ...，独立同分布，X, -Poisson分布P(A).考虑 A和e_A的无偏估计的C-R下界.
解 (1)取g(A)=A，这时A =1为一致最小方差无偏估计，且 有Var(A) = A/n.而容易求得/(A) = ra/A , 因此有
CRLB=厂'(A) =—=Var(A). n
即A 的方差达到C-R下界，因而为有效的无偏估计. (2)取g(A)=e'\由第三章的例题可知，g(X)=(1 为
e_A的一致最小方差无偏估计，其中r= £ X:，直接计算可得 (=I
Var[i(X)J =e_2A(e+-l).
而C-R下界为
CRLB = [g7A)]2Z-1(A)=e-2A^-<Var[g(X)]. n
因此S(X)=|1 -去)不是的有效的无偏估计;但也是“渐近有
以上两式代人(5. 1. 10)的第三式即得第二式. 例5.1.1设岑，...，独立同分布，X'~叫，八 考虑a和a2
168
效” 的，因为
第五章点估计的性质
Var[倉(X)] eT - 1 CRLB X/n
根据以上两个例子，我们引进以下渐近有效性的定义: 定义5.1.2 若i(X)为g(0)的无偏估

计，且有
CRLB Var[i(X)]
则称j(X)为渐近有效的无偏估计，e(g)称为估计量i(X)的效率. ■ 例5.1.3 (反例)设
1, ..., X独立同分布， 均匀分布尺(0,
❷).这时印(Oj)|不是C-R分布族，取g(9)二❷，则0(X)
为汐的一致最小方差无偏估计.因为所以可计算出 方差
n(n +2) 另一方面，我们也可“形式上地” 计算出弋的“Fisher信息” 如下.
rA ff2 Var^(X)] ..-
在[0 , 没]上有 f(x"❷)=j, U09x})=-log0,E^[-
“形式上地”记i(<9)=l/l92,7((9)=n/6>2,“CRLB”=广(6>)=6>2/n.这
时&(X)的方差远远小于形式上的“C-R下界”:
1 ri 12 1
Var[6)(X)J=。id “CRLB”. n{n +2) n
这是因为1^(0,0) |不是C-R分布族，因而C-R不等式(5. 1.7)不一定 成立.在下面5.2节，我们将介绍广义的C-R型方差不等式，它可用于 没有共同支撑的分布族，也包括均匀分布族. ■
5.1.2等式成立的条件
以下进一步研究g(幻的无偏估计i(Z)的方差能够达到下界的条 件，即j(X)为发(6>)的有效的无偏估计的条件.由以下定理可知，有效 估计的条件十分强设，从某种意义上讲，C-R下界可能“偏低”.
定理5.1.2 常数.若i(I)为g(幻的无偏估计，且有VarJ^(X)] < + oo对一切什 0，则C-R不等式中等式对一切0^0成立，即id)为g(幻的有效的无 偏估计的充要条件为f(x，❷)服从指数族分布
八 n2n2
;为OR分布族，g(6>)可导且不为
/(X , 沒)=h(x)eQ^ (x)-b^(a.e.). (5. 1. 11)

证明 由定理5.1.1的(5. 1. 8)式可知，C-R不等式中等式成立的 充要条件是
S(x, 0)
=a(0)[g(x) (5.1.12)
dO
以下证明(5. 1. 11)式与(5. 1. 12)式等价.易见，由(5. 1. 12)式导出
(5. 1. 11)式需要积分，而由(5. 1. 11)式导出(5. 1. 12)式需要微分.以 下根据C-R分布族的性质说明积分和微分的合理性.
假设(5.1.12)式成立，今取X. #x2使i(xj ^g(x2),因而有 -S(x2,e) =a(l?)[g(x1)
由 C-R 条件，上式左端为 沒的连续函数，因而右端也为0的连续函数，所以a(0)可积，从而对
(5. 1. 12)式两端积分可得
log f(x96) = lg{x) - g(0)]d^ = Q(6)g(x) - b(0) + c(x),
即
因而(5. 1. 11)式成立.反之，若(5. 1. 11)式成立，则有
!og = Q(6)g(x) - b(8) + log h(x). (5. 1. 13)
对 #欠2有log/(%,,3)-log/(%2,<9) -Q(0))-g(x2)]+ log[/^(久)/A(%2)].由
C-R分布族的性质可知，上式左端关于可导， 因而(?(幻可导，再由(5. 1. 13)知/>(6»)可导.因此(5. 1. 13)式关于沒 求导可得

s(x，❷)=Qf(e)g(x)
该式两端取期望可得
0=(?'(4) g(4) -6'(幻. 以上两式再相减即得S(x,^) = Qf(0) - g(0)]，此即(5. 1. 12) 式. 麗
本定，理说明，若用某个无偏估计^'(X)估计g(<9),其方差处处达到
;只能是指数族分布，不可能是其他分布
c-R下界 族.以下定理更进一步缩小了在指数族分布中能够达到C-R下界的估
计量的范围. 二 定理5. 1.3设X服从指数族分布f(x，e)
g(a)的无偏估计i(x)为有效估计的充要条件是
，则
发(没)=« • +/3, g(x) =aT(x) +尽 (5. 1. 14) 证明 由定理5. 1.1可知，g(X)的方差处处达到C-R下界的充要

条件为
s(x,e)=a(e)[g(x)-g(^)]. 由于f(x，0)为指数族，因而有S(x,o) =Q\0)T(x) -bf(e)9代入上式
可得
该式可化简为
Q'(0)T(x)-b’(❷)=a(3)[g(x)-g(4)].
g(x) = a(0) T(x) (5. 1. 15)
该式对0求导可得af(0) T(x) +/3r(0) =0.取久#%2使r(xi) #八*2),
则有 a,(0)[T(x}) - r(x2)J =0,因而有(沒)=0，也有 /3'(4) =0. 因此a(0) =a，/3(0、二P与0无关，由(5. 1. 15)式即得
=aT(x) +p.
所以(5. 1. 14)的第二式成立.该式两端取期望，并由EJT(X)]=
b\e)/Q,(e)可得
g(0) =a .。, 以 +芦, I
本定理说明，即使在指数族中，也只有少数的g(幻及其无偏估计 g(X), 其方差能够处处达到C-R下界.
例5. 1.4设X,, ..., X 独立同分布，X. -N(OA),求g(0),使其 无偏估计处处达到C-R下界.
解由假设可知
(4,...，总)-h(x)en(^~^2X 为指数族，其中(2((9) =M，T(x) =x, b(0) =yn6>2. 由定理 5. 1. 3 可
知，只有以下g(幻的估计才能够达到C-R下界: g(沒)=ot[b,(e)/Q,(0')] +/3 =a0 +/3.
此时必有
g(%) =aT{x) +/3=ax+^. 除此以外，都不能达到C-R下界;诸如g(^) =02或g(幻 =1/0等等,
都不存在有效的无偏估计. | 由以上定理和例题可知，C-R下界比较偏低，应该还可以找到比 C-R下界更大-些的方差下界.以下Bh不等式及Bh下界即为常见的
一种.
5. 1.3 Bh不等式
C-R不等式的证明主要用到引理5.1.1,即iu)与S(x.e)的关系:

Cov^Cg^) =gz(, EJS) =0, Var/S) =/(0), 从而有
Cov^(g,5) < Var/hVaq(*$)=>VarJ饣(X)] ^Cov^(g,5) [Var/S)] _1.
原则上来讲，上式对任何S(X.O)都成立，若用认X, ❹)取代5(X^),
则可得到C-R型的不等式: (Cov^(g,S) Var/g) Var/^)=>VarJg(X)] Cov^
[Var/S)]-, . (5. 1. 16)
关键是CovKi(A:),S(X^)]和VarJ^(X^)]应具有明确的统计意义. 本节以及下一节的许多不等式都基于(5. 1. 16)式，主要是不同的5(X,
幻具有不同的统设计意义.
例5.1.5 设/(x,沒)和g(幻关于0有Z阶导数/(i>(x^)和g(° (約.则有
yare[g(x)^[g{i)(0)rv-1.
其中 v, =Varj57^^)], =f(i)(x96)/f(x9e).
证明 在(5. 1. 16)式中取§(X, ❷、=S\X, 0), 则有
由假设可得
EjSf(Xj)]=
=^//(x,)d/z(x) =0,
、
r.z、广)(%, 6>) •A“)dMO) = jg(%) —
= -^~li(X)f(Xfe)d/LL(X)
=念茗(8)=尽(0(4).
综合以上结果有VarJi(X)]》[g(1)(幻]'广 |
为了得到Bh不等式，以下取貧为f(x,e)的导数所构成的向量， 并记
炎(X, 0) =(Sl(X, 0), ..., S\X,沒));x"
其中 s\x9e) =f{i}(x,o)/f(x,o).当 A = 1 时， =s(x,0)即为
^ e[g(X),S'(X,6)-\ =E,(gS*)
, i(X)为g(幻的无偏估计.并
' 广')(%, 幻 m“
VarJg(X) >Cov^(g,5*)[Var^S*)]

得分函数. 引理5.1.3设|为
偏估计，且满足以下Bh条件:
C-R分布族，i•(幻为g(<9)的无
i) /<A)(x,^)存在，且关于L 0连续; ii) E夕[Sl(A\沒)]2<+<», f = l,..., 左;
iii) EJ^(X)SX^,0)]可在积分号下关于沒求导数，^=1,...人 则有
i) EjS*(Xj)] =0, i=l, "., k;
ii) VarjAXj)]存在，并记为 V(^) J=(V,(^))AxA;
iii) Cov,(i(T),^(X^)) =Ee(g^) = (gr(0),..., g(4)(沒))
公丁(9)|“ .
证明 在例5.1.5中分别取i=l, ..., 丸，即可. 麗
定理5.1.4 (Bhattacharya不等式).条件同引理5.1.3，且假定 V(幻可逆，则有
VarJg(X)>PT(^)V-,(^)Z)(^) ▲ Bhk, (5. 1. 17) 且等式成立的充要条件为
g(x) —g(❷)=DT(e)V''(0)§(x9e). (5. 1. 18)
证明 由于以及幻都是向量 ，应用Schwarz不等式 (5. 1.3)的等价形式(5. 1.5)比较方便.这时可考虑Var(X-AK)多0,

并以i(X)取代X，以取代r,则由引理5.1.2可得 A =CovXg,^)Var;1(^) =Z)T(幻厂'(沒).

由 Var(X- AF) = VarJg(X) - PT(<9) V 1 (6>)^(X,^)] 0 可得 Var,(i) -CovXj,^)V-,D-DTV-,Cov/?,i) +

由引理5.1.3可知Cov,(g,^)=PT,VarJ^)=V,代人上式可得 Var/i) -DtV'xD^O.

由此得到(5.1.17)式.由引理5. 1.2可知，(5.1.17)式等式成立的充 要条件为

X- =g(%) -DTV~l§(x,0) :a(6) (a.e.). 等式两边取期望可得a(0) =g(0),代人上式，则等式成立的充要条件 化为

g(x) -g(4) =DJV'§(x,e).

此即(5. 1. 18)式，证毕. I

通常，不等式(5. 1. 17)简称为Bh不等式; 简称为Bh下界. 推论1 对于A; = 1，Bh}下界即为C-R下界CRLB.

因为々=1 时，D人e) =g'(e)，Var[y(X,0)] =/(沒).

推论2 若Ejg(J)]=g(^)+bg(0)9 且记P=(万丄xl, D,=

+6^(^), f = l，...人 则 Bh 不等式化为 VarJg(X)]>5TV-,5. 下面证明Bh不等式的主要性质，即Bhft下界随A递增，因而有

CRLB =Bh^Bh2^ ...《VarJi(X)].

定理5.1.5 在Bh不等式(5. 1. 17)的右端，记Bhk B乂 0)=

Dl(e)V^(❷)D人0)，则当时有(❷人的.

证明 把矩阵Vk和向量按维数Z和分块如下:

则有 VH =VM D, =Z)z, 逆公式

t=U, V2J Di=(D2)'

在 Bk=D]V^Dk 中，利用分块求

其中八-z为单位矩阵，G=Vn}Vl29 H^V22-V2xV-;Vn^,因此有

j 21 y 22 d 2

= +(d;g-W)zt,(gtd1 -d2)^b\o). I

推论 以上定理中，Bk(e) =Bt(0)的充要条件为V2l V^D.- D, =0.

例5.1.6 (续例5.1.4)设4 ，...，叉独立同分布，Xx 可以证明:T(J) =I2 - n"1是g(l9) = 02的UMVUE,其方差达不到 C-R下界，但是能达到5九2下界.

证明 由第三章例3.2.7可知，T(X) =X2 -n-1* g(^) 的 UMVUE X*例5.1.4可知，其方差达不到C-R下界.经直接计算可 得(可令Y = x~e)

VarjT(X)] =—^+4- n

今考虑忍么下界.当k二2时，由例5. 1.4可知,SJ (%,0) =n(x

 由于a/tT(x - 0)～7V(O，1)，

°V ~ \0 2n i/(2n2)/

因此由(5. 1. 17)式可知

S2(x,0) = n2(x - O')2 - n;而 D\ = (20,2). 经直接计算可得

/n0

K=2

T.422 Bh7 =Dy;{D. =— +—

nn 因此Varjr(X)] =Bh2，即7\X)的方差达到仙2下界.

5.1.4 多参数C-R不等式

今考虑参数0为P维向量的情形.设X-rp，0= (e”"., epY 为 c-r分布族.又设 g(汐)=(gi(^),...，(沒))T 的无偏估计为 i(幻 =(i,(X)，...，A(X))T，其方差VarJg(X)]为女x &阶矩阵.

C-R不等式仍然由score函数出发，这时S(.r,^) =(S1(x,^),**«, 5/x^));xl, 其中

Kx，0) =-^-log f(x,0)

1 叭 x，e) d0t

z = 1 ，... ，p

由第二章的结果可知

EJS(X，0)] =0, VarJS(Xj)] = EjS(X J)ST(X j)] =I(0)pxp.

引理5.1.4 设)为C-R分布族，i(X)为g(0) 的无偏估计，则有

CovJi(X)，S(U)] =OEji(X)Sr(X,0)]

0、， 氣 ， (5.li9)

其中

=Cov/g.,sy)==E/i(.S;) =.^^，i=i，...，h y=l，...，P. du,

证明 只需对每个分量加以证明即可.由假设可知

df(x,e)w 」/

E,[g,(X)S,(X,

、

机(4) p\、

=% =5(8). 置

^]

p

=>(x)f(a) d0j如(4)

/

、!

=^^gi(x)f(x,e)dijL(x)

, 0C

定理5.1.6 设 {f(XjO)y0^0 |为C-R分布族，》(X)为g(沒) 的无偏估计，则有

VarJi(y)]^C(6>)Z-1(6>)GT(6>)， (5. 1.20)

且等式成立的充要条件为

i(x) =C(0)S(x,0). (5.1.21)

证明 仍应用Schwarz不等式的等价形式(5. 1.5)式:Var(X-Ar)^ 0,并以i(X)取代X,以S(X，幻取代y,则由(5.1.5)式以及引理5.1.4 有 A=Cov/i,5)Var;1(5)

=G(0)r'(0),

Var(X-Ar)= VarJg(X) - G(0) (0)S(X,0) 由此可得

Var/i) -Cov、(i，S)rlGT -Gr'Cov/S’i) +<;厂1Var，(S)/•1f》0. 由(5. 1. 19)式可得

Var/g) -2GZ_1Gt + GZ_1Gt^0.

因而有

yare(g)^GrlG\

此即(5. 1.20)式.由引理5.1.2,该式等式成立的充要条件为

X-AK =i(x) -G(0)ri(0)S(xie) ❷、. 等式两边取期望得a(幻=g{6)，代人上式即可得到(5. 1.21)式:

g(x)-g(o)=c(e)s(x,o), c(e)=G(o)r\e). ■

推论1 若为0的无偏估计，则有 推论2 若 EJHX)] =g(e)^b(e)，则有

VarJiW]渝 &=(&),
J J dOj
推论3 若Xj , ••• ,Xn独立同分布，X}的Fisher信息阵为i(0),
则有 — VarJg(X)]5:n
=0(n'1),
对于多参数C-R不等式，也有类似于定理5. 1.2和5. 1. 3 的结果， 从略，可参见成平等(1985).
5. 2 广义C-R型不等式 本节主要讨论非C-R分布族情形下，估计量的方差下界问题.特
Vare[0(X)]^-i-l(0) =0(n-J). TV

别考虑没有共同支撑情形下有关估计量方差的不等式，包括|/?(0,幻j， !M + r(l，l)f
等分布族.记Ao = \x'f(x,0) >0 I , 一般么应与0有关,
即当❷关巾时，么例如!7?(0,6>)},Aff=(0,19]就是如此.在以下 讨论中，假定久可以与0有关(即可以不是C-R分布族).
上一节已经指出，C-R型不等式有很多种，在(5. 1. 16)式中，不 等式对任何的爹都成立.上一节曾经取If | 或爻=
本节将取 §=s/x，0，小)=f(x，杏)/f(x，0).它与取
S=f’(x，e)/f(X，0)有某些类似之处(见第二章Fisher信息与Kullback信息的定义与性质).设 引理5. 2.1
， 时，有
记.U.[x
. g(X)为发(幻的无偏估计.对于 ，命)/f(x，❷)，并假定Var,(S^)存在，则当人D 么
❷
证明 类似于(5. 1. 16)式有
J^Var/g) Var^S^):
以下主要计算
Cov“g人)=E,(iS.) -E,(g)E/S,). 由么与 S小(x，0，小)的定义以及么=)么有
Ee(S^ :
=[S从x，0，<l))f(x，的 d/j^x) JAe
(5. 2. 1)
(5.2.2) (5.2.3)
=
+L'-a 沒，</))_/(%,d)4u(x) / \ X 9(p I r
/(x,(/>)dp,(%)
同理有
£诚)士(1)^^淋(4)

⊥ g (x)/ (x,</>)<Vl(A;) f i(太)A龙，洽)如(龙)
%，小)d/x(x) =
以上结果代人(5.2.3)式可得 Cov/g^^)=客(沴)-g (沒).
以上结果代人(5.2.2)式，即得(5.2. 1)式.
定理5.2.1 (Chapman,Robbins和Kiefer不等式).设|/(x,6), g
0 I , gW 为g(幻的无偏估计.则有 Var"[g(X)
[g(4) -g(沒)]2
f (X，小)-f(X，❷)
|

(5.2.5)
f{x, e)
证明 根据引理5.2.1,不等式(5.2.1)对一切A0〕A小的小都成
立，因而(5. 2. 5)式成立. | 不等式(5.2.5)简称为CRK不等式，该式右端称为CRK下界.以 上定理的意义在于(5.2.5)式可用于非C-R分布族，特别是无共同支撑
的均匀分布等分布族.(5.2.5)式的主要困难在于计算上确界，即 CRK 下界，通常只求近似值，即比CRK下界稍小一点的下界，见后面
例子.推论1 若 出C-R不等式，且CRK下界多C-R下界.
,6>g 6))为C-R分布族，则由CRK不等式可推
若 ,^g 6> }为C-R分布族，则它有共同支撑，因而 f(x,e)se
证明 有由于(5.2.5)式对任何</>都成立，取♦=0+M，则有
上式中令Aa—o,则有 VarJg(X)]^CRK 下界多
178 第五章点估计的性质 推论2若奴幻为充分统计量T=T(X)的函数，i(J)=</>(T),且有T-h(t,0)，则有
[g(4)]
h(T, 0)!
只需对(5.2.5)式应用因子分解定理即可得到上式. 例5.2,1 设X:, ..., 冬独立同分布，X. -^ + r(i,i),
由于|
当小多6>时有
I!%(1) <9I, =[0, , 因此有
VarJh川〜仏
Var,
2
无偏估计的CRK下界.
解 样本分布没有共同支撑:
• (xf--^)
求茗(4)=0
).
(5.2.6)
= e Ja,
c40j = !</>:</)>^ |
= 而由(5.2.4)式可得
Z (、-(1) e , = ,
CRK下界=sup (0D2. 1*:必2=<?| Var^ (S办)
_ /(*, </>)
1 U(1)
I \x(}) > 0 | jx(1) (/>}/!</> e \ .
Var“S,)=E,(S;) - (E人)2 =E,(S:) -1. 由于X(1)〜沒+r(n, l)〜ne-"('-")/u彡6> f，因此有
E/5;) = Pne-^dt =p e2n(<t, -0)ne-n(,-0)dt = enU_').
因此有Var,(SJ=e〃w>-1.这些结果代人(5.2.6)式可得
4-e 0.47 CRK下界=sup en(^-e)_1 «------552------
小為0 n.2e n2 特别，<9的UMVUE为4=1(1)-l/rt，这时有Var,(^) = 1/n2,其值明显的比CRK下界的近似值大. ■
例5. 2.2设X,, ..., 总独立同分布，X} -R(O.e'),求g(6) =6无 偏估计的CRK下界.

解 样本分布也没有共同支撑:八X，的=(1/矿)/ \x(n) \xm
>0 I，么=(0，沒]，并且有 I =
，因此有
4> I

因此当时有
因此有
E/S:) = £
dy =
=sup 「(//(小 - e、2. 矿-小n ■
0I.
CRK 下界=sup
(小一沒)2
(兔 -1 、4>
CRK 下界=sup !<!>«»(Var/S^)
f{x,e)
=7?^U(4) <p
而由(5.2.4)式可得VarJSJ=Eff(S:)-(
)2=E“)-1.又由
于X(4)/0～BE(n，l)W'f|O^y^l |，因此有 f小/沙 /n%n
(n)
4) 11x(„) ^3)
U iI
~ oee
X(n) 、
这时不易求出准确最大值，可取4>=-^I 估算其近似值 n+2
叫土 Cl}. -
-H7 ? \2
n +2) \ n +2X矿+2
(//((/> -e)2 _ en -<f)n
特别，0的UMVUE为3=^1久(8),估计量的方差为Var(^) 其值明显地比CRK下界的近似值大.
5.3估计量的渐近性质
1-
切2 二 02
(e2 - 1)(沒+2)2:"1.5「71+2)2.
估计量的渐近性质或大样本性质，就是考虑当样本容量n 充分大 时，估计量与被估计量能否按某种意义充分接近.在数学上，就是考虑 样本容量«-+oo时估计量的收敛性问题.设样本为冬，...，^，并记
X=(X1,-,XJT, x 6)g0(通常假定xlf-txn独立同分
0n
e1 n(n +2)
9

布).假设g(幻的估计记为g(X) =i(X.,-,Xn) =gn(x),类似地，0 的估计记为6(1)或久(又).本节主要考虑相合性，即n- + oo时 是否成立，其中-表示随机变量gn(X)在某种概

率意义下 的收敛;渐近正态性，就是考虑随机变量Z. =^\gn(x)-g(^)!的渐
近分布是否为正态分布? 以下第1小节首先复习介绍数理统计中常用的随机变量序列的收敛性及其有关的性质，进一步的内容可参见李贤平(1997),陈希孺 (1981)，严士健，刘秀芳(1994)等文献;第 2 小节介绍相合性和渐近
正态性的定义与性质;最后两小节则讨论矩估计和极大似然估计的相合 性和渐近正态性.

5. 3.1 随机变量序列的收敛性

记I， n为随机变量;b，c为常数; -Fn(x), f～F(幻为分 布函数.当n^ + oo时，随机变量序列的收敛性通常有以下几种:

(1)依概率收敛，么上^或):若尸(If-dh)— 0(n-►+oo)，V占〉0.

(2)r阶矩收敛，么二么若+00);特别当r= 2时，记为羅 (1)4

(3) 几乎处处收敛，H (a.e.)或(a.s.):若P|x: lim么(%)
n-* + oo
当 X e A 时有 (x) - (%) (n-► + oo);
, 这也可表示为P| (n-*+co)} =1,
->f(x) 1=1,即对 P(4) = 1

(4)依分布收敛，H会或若在厂O)的连续点处有 F^(x)->F(x)(n-> + oo).

当 + 时，随机变量序列的收敛性有以下常用性质:

U) (a.e.) 另外也有会。二(9)上 特别地，由 I I r-0可得J^O;当r=2时，由
Var(么)40可得 -E^n 0.更常用的形式为:若Var(fn)->0，-或£^n=a,
则有Ha，更进一步:若H Var(fJ-^O,则有6上0.

(2)若或(a.e.))，函数在 ⊥ p(c)(或(a. e.)).
% = c处连续，则有

(3) 随机变量序列依概率收敛到常数c的充要条件为么依分布 收敛到q特别，H0的充要条件为^_L^0.因为若He,则 Fn(x)-^r Ix^c | ;即 Fn(x)-^0(x <c)f Fn(x)^l(x>c).
因此有

P{| -c| 彡石):-e)+P(^n^c+g)=Fn(c-e)+1—Fn(c+ e-O)-0;即He.

(4) ^n- (a. e.)的充分条件(Borel - Cantelli 引理).若对 V ff〉0,
00
Y P \ !收敛，则)(见李贤平,1997).特别， n=1
00 00II
若 Z Var(fn)收敛，则由切比雪夫不等式知 P \ \L - EL n~1 n=]
收敛，因而-E^n->0(a.e.);若再有->a或死=a，则有fn-> a(a. e.).

以下定理对于推导随机序列的渐近分布十分有用.

m 么上c，则有 卷，d 九C_lf(c/O)..
特别，若%上0,则ma去o律);若Vn (去1律). d

证明 我们只证明第一式，即当n-^ + oo时有 证明类似，从略.今假定么~仄(幻，f (幻.
已^^+c-F(x-c), F (X)-厂(%)，且有 P(\Vn-c\ ^£T)->0, V^>0;要证 P
+Vn^x] ->F(% ~c),其中%-c为F(幻的连续点.设5„->0(6„ >0),对充分大的
n 有 Hn - c I 彡占)^5n. 记事件 ^ = {rjn:c-s<yn<c+£}9 A = \ rjn- \vn-c\
h 易见尸(4)彡1 -5„, P(A)^5n1 而在 VneA 上有

定理5. 3.1
f 十7/n 十C, h
+ 时，若

(Slutsky)当
+c-占彡+V。彡 +c+e. Mn(f。+c- I DMn(+7)n^x)I DIAn(+c+
因此 p\^n+yn^x\=P\AQ(^n+Vn^x)\+PMn(fn+77n^%)|
(5.3. 1)
), (5. 3. 2)
由(5.3. 1)式有
矣尸Mn(f„+c-6:^x)|+尸(A) (5.3.3) 彡尸|fn+c-e彡x(+8n=Fn(x-c+e)+8n;
另一方面
p in 戸x f 彡尸 Mn(fn +”戸%)| 多尸 +c+e^x)\
=Pu„ I -PMn(^+€+^^x)) (5.3.4) 》Fn(x-c—e) -P(A)^Fn(x-c- -6n,
u
，则么仏丄^
nK+c，其他
182 第五章点估计的性质 综合(5. 3. 3)式和(5. 3. 4)式可得尸 \ fn +yn^x }
~^F(x - c), 即 + rjn
九 f + c.
推论 当 +x时，若
m
I an a,bn 则an^n+bn
么 af + 6.
注以上定理对于随机向量序列也成立 ， 因为只需对每个分量应用
该定理即可.
例5. 3.1 z分布的渐近正态性.设X,, ..., 独立同分布，X,~
/V(O，a2),则当 «-> + oo 时有 z„」、/V(O，l)，其中
证明 因为 例5.3.2)，因此
t
= ____________________ 拉 、(X，-J)2/(n - 1)
n
~/V(O，1)，S2=n-*^ (Xi-X)2_P^a2(可参见 i=I
所以由Slutsky定理“去1律”知，当 +00时，
另外，若X,, ..., J 独立同分布，E(JJ =0, Var(X1) = , 则由
中心极限定理有V^/a_U7V(0,1),因此以上结果仍然成立. | Slutsky定理的用处十分广
泛，特别是“去0律” 和 “去1律”，后
面经常用到.以下定理也是常用的形式.
定理5.3.2当 + 时，设数列\一00,随机变量Vn=an^n-
bH 函数/(幻在x=b处存在二阶连续导数，则有
(1)
(2) 若ff(b)#0,则an=an[f(Hf(b、~_L^f'(b)Z' (3)若/'(6) =0,厂(6) #0，则
= aJ[/(
士斤(4) Z.
证明 主要应用Slutsky定理.当n—►+oo时:
(1) -6=a;*[an(-6)]-^0- Z=0,故专n-b么0, J^b.
(2)心=a。/'(D (么-6),其中L在6与么之间，即 \L-b\ \^n-b\,因此由Hb知么上
6,/'(I)上/'(6),由
Slutsky定理知 anmh)Z.

(3)对氏进行二阶Taylor展开可得
氏 _6)W:)(^-6)=+77W:)Vn.
由专:H VnlZ，知13丄*ZTf”(b)Z.
I
最后简要介绍一下随机变量序列的随机阶，这也是统计学的大样本 理论中常用的工具;其定义和性质与实数序列的阶十分类似.
若当+«时，^/c„H则记=op(cn).特别地，若cn=l，即H0,则记为 若cn=n-\ 则记为 ^=op(n-*).
若对Ve〉0，存在A;和I 使n^Ne时有P) | ^n/Cn |
H
(Ke |彡1 人c„).特别地，若C„ = 1,则记为=0/1);若
一e，则记为
则记为 ^=0/n-4).
随机变量序列的随机阶有以下基本性质:
(1) 具有与非随机阶类似的性质，诸如:op(cn) = cnop(\ ), ()P(C„) =C，Of,(l); Op(l)op(l) =op(l), 0/1) +op(l) =0/1);
n
(3) 当n->+oo时，若 则^=0/1).
证明 设6〜么(幻，卜F(x)，对h〉0,必存在^使
P\\^\^Ke}=F(Ke)-F(O1-y. A•
而P(\^n\ 多KJ =Fn(KJ ~Fn(-KJ^F(KJ -F(-KJ,因此必存 右或使n>Ne日寸有
尸(IlI 从)谓Ke)-F(-Ke) -e. |
5.3.2 估计量的相合性和渐近正态性
设 X 〜/(.，，沒)，什 0，gn(X) =g(Xi1^,Xn)为 g(幻的估计.
定义5.3.1 当n—> + ao时，若对一切0巳& 有 ，...，Xn)-4 (10) ，则称 i(岑，...，XJ为g(W)的相合(consistent)估计(或弱相合估 计).若々(1 ，...，X,,)-g(60 (a. e. 7%，沒e 0)，则称 g(X,,.", X„)为 g ((1)的强相合估计. |
由定义可知，若以弋，...，XJ为相合估计，则当a充分大时，它与 被估计的g(W 可充分“接近”.研究相合性的主要工具为随机变量序
(2)E[(1)]=o(1),E[op(n_A)J=E[(0)和(2)的证明从略);
(1)] =o(n'k)

列收敛性的基本性质以及大数定律.由随机变量序列收敛性的性质(1) 和(2)可得
引理5.3.1 当 + 时，若E|i„(X) - 丨、0,则1(1)为 g(0)的相合估计;若 Var[iw(X)]-0,并且 E[in(X)]-g(^)或者 0D E[gn(AT)] =g(^),则in(X)为g(0)的相合估计.若 $ Var[gn(X)J ns1 收敛，并且[Egn(^)l^(^)或者E[^(X)]=g(幻，则釔(X)为g(8) 的强相合估计. I
引理5.3.2若i„(X)为g(幻的相合(或强相合)估计，p(y)在y = g(幻处连续，则 <P(i„(X))为p(g(0))的相合(或强相合)估计. |
例5.3.2设岑，...，独立同分布，X}〜/(久，0)，E(XJ =a(e)，
Var(yi) 则有;V为a(幻的强相合估计
为a2(0)的强相合估计.
，n(^-X) i=l
2

证明 由独立同分布情形下的强大数定律可知，当71—► + 00时， _nn
X = n-! X^EX. = a(^) (a. e.), S2 = n~} .«=i i=i
(EX^)2 = a2(0)(a. e.). | 例5.3.3 设X,, "•，总为i.i.d.样本，E(X,)=/z, Var(X,)=
a2 <oo,则/;=7 2 V 辽，•是m的相合估计. 证明由假设可知，当n—► + oo时
E(A) = 2 丁、工 = 7^-士->弘， - 1) frl (zi - 1广产
Var(A)=-z4,<2 i2a2-*0. n (n - l)2 frl
则由引理5.3.1可得，当a—+oo时，4-^#，即以上夂为弘的相合 估计. | 例5.3.4 设
K..=/I+ , /=1, ..., a, j’=1, ..., zn; E( )=0, Var(iz.) =a2u >0; E(么) =0, Var(f.) =cr2 >0;并且所有的 u£, 么都相
-inm
互独立，/ = 1, ..., n, / = 1, ..., 7H.设7 = - y y..,证明:当 H->
mn i^\ frt
J* 00而TH固定时，了为At的相合估计;但是，当爪—> + 00而71固定时，
f 不是M 的相合估计.
\
X? -X2E(X])-
5.3估计量的渐近性质
证明记amn =V-)u,则由假设可知
a- = = a»+A-
185
其中a„, 6。,,分别表示上式右端第一项和第二项.由假设可知E(an) =0;
E(6m„) =0.当 n-► + oo 而 m 固定时，Var(a„) = >0; Var(6mn)=
a2/(mn)-^0;因而由引理5.3.1可知amn=an+bmn_P^0,即T上 所以
孓为从的相合估计.当爪一 + « 而 n 固定时，由于E(&mJ =0,
Var(6mJ=a2/(;nn)^0;因而仍然有bnn^0.但是由于n固定，随机变
量 =- y 与m无关，有确定的分布(注意>0),所以由 汀 iTi
Slutsky定理去0律可知，当th—► + oo而n固定时有amn =an + bmnJ^ u,因 而L不可能依概率收敛到0,所以不是/I的相合估计. |
例5.3.5设X】, ..., 独立同分布，X. + 1),证明忑(1)
为M的相合、强相合估计;5- =n~*5为a 的强相合估计;nS~l为入=
a_1的强相合估计，其中S=免 (1)). i:1
率
证明 可根据分布X(1)〜弘+r(j, i)(参见第一章)，直接计算概
I ^(i)I 由于尤(1)〜(«/(r)e_<r(y_M)/(y^/z | ,因此 尸(I^(1)-MI = [-eae
nS
=_eae 叫 =e a-►0 (n-►+oo).
1n-
因而乂(1)丄/z.另外由上式可知2尸(I X(1)n I ^s) = 2 ei收 n=1 nsi
敛，由Borel - Cantelli引理知X{l)^(a. e.).又由大数定律可得
Q1n
~ = 一尤(1)-*EX\ - a.e.)
=+a-/jl =cr(a.e.).
由引理5.3.1 知a-l^a'l(a.e.)，即nS'^A =a~'(a.e,). |
例5.3.6设^, ...人独立同分布，X} -P(A),求A和P(X}= 0) =e~A的相合估计.
解 由大数定律知无为A=E(A)的强相合估计.对于P(Xt = 0)=e A ,根据引理5.3.2，显然有e-^—►e~A(a. e.).另外，由第三章

的例题可知，e_A的一致最小方差无偏估计为i„(J)=p-去)，其中
T 二 i X。由直接计算可知 Var[S„(;V)] =e_2A(e+- 1)->0, i=1
E[g„(X)] =e-\ 因此 gn(X)-^E[gn(X)] =e-\ 即 i„(X)为 e_A的
相合估计. I 相合性是对一个估计量很基本的要求，这表明，当a充分大时，估
计量与被估计量能够充分“接近”.但是相合性并未涉及估计量的精 度，诸如均方误差，通常应该要求估计量的方差尽量小.以下渐近正态 性进一步指出了一个估计量的渐近分布和渐近方差.很显然，渐近方差 越小，估计量越好.
定义5.3.2 渐近正态性.若存在r(0) >0使
, ..., 久)—g(0) j九 Z ~7V(0, p(沒)), (5. 3. 5) 则称么(幻为渐近正态的，亦称gn(X)为g(幻的相合渐近正态(consist
ent asymptotic normal,简称为 CAN)估计. |
, 由(5.3.5)式以及定理 5. 3. 2(取 =^1gn(X) =^n,g(^) =6)可
因此若gn(JT)为g(幻的渐近正态估计，则必为 在(5.3.5)式中，以幻为的渐近方差，因此，若鈂(Z)为CAN
知
g(60的相合估计，可见称(幻为相合渐近正态(CAN)估计是合适的.
估计，其方差的阶必为n-1. 另外由定义可]得
p❷ (沒)27^[gn(x)-g(o) 其中少(幻为标准正态的分布函数.同时(5.3.5)式亦可表示为
g(X{, •-- ,Xn) =g(l9) +-~Zn, y/n
其中Zn~^z ~ A^(0, F(^)).由该式及Slutsky定理，显然有gn(X)人 g(8).
渐近正态性与中心极限定理有密切关系，由以下例子可知为什么在 定义(5. 3.5)式中要乘以人.
例5.3.7设1, ..., X、独立同分布，并设E(X1)=A, Var(J.)= n
(r2, Var(X;) =<, S2
i=1 (1) 又为M的CAN,且有
(J(- J)2
_
(2) S2 为 <r2 的 CAN，且有A(S2-cr2)九 7V(O, t2).
X —H s
. 则有
!->0(%).
(5. 3. 6)

证明(1)由中心极限定理有
- EXt)
, =' — -^7V(0J).
上式可化为a2),即叉为鲜的CAN.另外，由于S2= n
n~l X (苓—无)2为的相合估计，因此S2/a2-l,所以有
由Slutsky定理“去1 律”知y/n
T Y
(0,1).
(2)由于S2的分布具有平移不变性，其分布与#无关，可在#=0 处推导其渐近分布，以简化计算.由S2的定义， 52-a2)可表示为
^/n(S2 -a2)

由于在弘=0处有E(X;) =a-2，又由假设可知Var(^) = T2，所以由中 心极限定理可得
由于X为M=0的CAN,因此有
^X2 =-(a/^X)2
综合以上结果，由Slutsky定理“去0律”可知52-(r2) 7V(0,
T” . I
引理5.3.3设为g(幻的相合渐近正态估计，函数p(y)在
y=g(4) 处可导，且W(g(0))#O,则^(g„(X))为汐(g(沒))的相合渐 近正态估计，且有
Tn =/n\(p(gn(X)) A^(0,)]2p((9)). (5.3.7)
证明由假设可知，Zn =^(gn(X) Z KO, p(0)).在定理 5. 3. 2 的 an 中，取 an = 在， =gn(X) , b -g(^)即得
a
a
0.

Tn =y/n\<p(gn(-^)) - p(g(沒))}丄* </(g(a) , Z ~ 7V(0，i/(沒)). 由此即得(5.3.7)式.
推论 以上结果对向量参数亦成立;即若g(O) = gk(0))\ g„(X) =(g,
(X),-,gfc(X))T,且有
zn=^[gn(x,,-,^n) -g(W]lz～7V(0，V(^).
.
<p(y) =(<Pi(y)，...，<jP/(y))T，y=(h，...，:n)T，乎(y)在y=g(处可导， 则有
(5. 3. 8)
其中 F(0) =d<p(y)/dyT ly=g(fi).特别，若I为向量，且有^(X-a)-^ 则有
況妒(无)1 (4) f九 /V(OWT). 把以上引理用于独立同分布的样本(见例5.3.7)，我们即可得到a
与a2的可导函数的CAN.例如，对乎(M)=M2，因为妒'(m)=2m，则由 引理5. 3. 3可得
J~n-{X2 ^(0,4/^2^2)- (5. 3. 9) 因此P 为M2的CAN.
例5. 3.8设X'，...，Xn独立同分布，X,～尸(A).求e-;^CAN. 解由中心极限定理可得
'■/n (尤- A) 7V(0, A). 取^p(A)=e'\因为乎'(A)=-<A,则由引理5.3.3可得-e"A)- Z~7V(O,Ae_2A).因此e巧为e 的CAN.再考虑6以的一致最 小方差无偏估计i人X、=(1 -士)T=(i -士广 由于
人X、-e_A) =7n(e_x - e~A) +Vn(gn(X) - e_x)，由数学分析的公式可得，当n-+oo时有-e-7j_^o.所以
上式第2项~^0,因此由Slutsky定理“去0律”知
V^(gn(^) -e_A)-^Z^/V(0,Ae'2A). (5. 3. 10)
所以U)=(l-去)也是 e-AWCAN. |
以下介绍最优渐近正态估计，简称BAN估计.这时其渐近方差应达 到C-R下界CRLB.我们知道， (9)的任一估计量gn(X)的方差应满足

Var[gn(X)] >CRLB=G(0)Z'1(^)GT(0)， 其中^dg(e)/d0\上式等价于
Var[^gn(^)~\^nG(e)ri(^GT(^) = G(0)
今设lim U(O)/n)存在，并记为1(0)(对于独立同分布的样本， n-* + oo
4沒)就是单个样本的Fisher信息).易见，若limVar(X)]= «-♦+«

G(G)r\e)G\e)y则in(x)的渐近方差达到c-r 下界，是最理想的情 况，可称为ban估计.
定义5. 3.3设X-\f{Xie),e^0\9其Fisher信息阵/(幻满足
lim (I(e)/n) =i(❷)，若g(0)的估计 (X)满足 n-* 十 «>
(戈，...，XJ -g(^)|^/v(o,G(^)r1(^)cT(^)), 则称in(^)为g(0)的最优渐近正态
(best asymptotic normal)估计，简称
BAN估计.特别，若久(X)-沒(权))，则称么(X)为0 的BAN估计. 壓
注 若4 ，".，仌独立同分布，则1(0) =ni(0) , l(0)/n = i(e)为 X,的Fisher信息
阵.另外，若g(幻与~都是单参数，则以上定义可表 示为
Aiin(^)一g(沒)1九～(。，[，(沒)]%-1...)).
例5.3.9设X,，...，叉独立同分布，X'Kha2)，则P 为M2的 BAN.
此解这时g(/x)=/，g'(M)=2/x;/(/z)=n/a2,i(^)=1/a2,因
. 另一方面，由(5. 3. 9)式可知/n(X2 -/z,2) i/V(0,4M2a2),因此?为M2 的 BAN
估计. ■ 例5.3.10(续例5.3.8)设X】，...,Xn独立同分布，X. ~P(A),则
为 ^(A) =e~A的 BAN 估计.
解 由于 g(A) =e~A, g'(A) = -e_A; /(A) = n/A , i(A) =1/A, 因此
[g'(A)]2/_1(A)=Ae-2A.由(5.3.10)式可知在(i,(X)-e_A)i
Z～2V(0，Ae_2A)，因此(1 -士)为 估计. ■
例5.3.11设久，...，yn独立同分布，X, ~6(1，<9)，0 <6><1,证 明 =1(1-X)为
a2=Var(X])的BAN估计((?#1/2).
证由中心极限定理可得
=^/n(X - Z ~7V(0,or2) ,
=4/x2a2

Var[gn(X)] >CRLB=G(0)Z'1(^)GT(0), 其中^dg(e)/d0\上式等价于
Var[^gn(^)~\^nG(e)ri(^GT(^) = G(0)
今设lim U(O)/n)存在，并记为1(0)(对于独立同分布的样本， n—* + oo
4沒)就是单个样本的Fisher信息).易见，若limVar(X)]= «-♦+«
G(G)r\e)G\e)y则in(x)的渐近方差达到c-r 下界，是最理想的情 况，可称为ban估计.
定义5. 3.3设X-\f{Xie),e^0\9其Fisher信息阵/(幻满足
lim (I(e)/n) =i(❷)，若g(0)的估计 (X)满足 n—* 十 «>
(戈，...，XJ -g(^)|^/v(o,G(^)r1(^)cT(^)), 则称in(^)为g(0)的最优渐近正态
(best asymptotic normal)估计，简称
BAN估计.特别，若久(X)-沒(权))，则称么(X)为0 的BAN估计. 壓
注 若4 ，".，夂独立同分布，则1(0) =ni(0) , l(0)/n = i(e)为 X,的Fisher信息
阵.另外，若g(幻与~都是单参数，则以上定义可表 示为
Aiin(^)—g(沒)1九～(。，[，(沒)]%-1...)).
例5.3.9设X,，...，叉独立同分布，X'Kha2)，则P 为M2的 BAN.
此解这时g(/x)=/，g'(M)=2/x;/(/z)=n/a2,i(^)=1/a2,因
. 另一方面，由(5. 3. 9)式可知/n(X2 -/z,2) i/V(0,4M2a2),因此?为M2 的 BAN
估计. ■ 例5.3.10(续例5.3.8)设X】，...,Xn独立同分布，X. ~P(A),则
为 ^(A) =e~A的 BAN 估计.
解 由于 g(A) =e~A, g'(A) = -e_A; /(A) = n/A , i(A) =1/A, 因此
[g'(A)]2/_1(A)=Ae-2A.由(5.3.10)式可知在(i,(X)-e_A)i
Z～2V(0，Ae_2A)，因此(1 -士)为 估计. ■
例5.3.11设久，...，yn独立同分布，X, ~6(1，<9)，0 <6><1,证 明 =1(1-X)为
a2=Var(X])的BAN估计((?#1/2).
证由中心极限定理可得
=^/n(X - Z ~7V(0,or2) ,
=4/x2a2

其中 a2 = 6>(1 - 19) =(p(0),则有 <pf(0) = 1 -20^0(3^1/2).取
<p(X)=X(1-X),则由(5.3.7)式可得
<jp(-(p(0) (pr(0)Z ~A^(0,r2),
其中T2 = (1 - 2沒)2权(1 一沒).因此乎(I)为(T2的CAN估计.另夕卜，
1(e)=«/[^(1-^)J, /(A)=1/[^(1-0)L [〆(幻](幻=
.
注 若0 = 1/2,则^(3) =0,因此以上结果不再成立.这时
(1 -2^)2^(1 -0) =T2
因此由定义5.3.3知<p($)为<r2的BAN估计.I
<p(<9) =1/4; <p"(❷)=-2, a2 = 1/4, Z (3)可知
-4n[^(^) -1/4]丄*<¥2(1).
5. 3.3 矩估计的相合性和渐近正态性
0,1/4).由定理 5.3.2 的 由于 2Z ～7V(0,l),因此有 |
矩估计就是用样本均值来估计总体均值.因此可直接引用随机变量 的和式极限定理，即大数定律和中心极限定理得到矩估计的相合性和渐 近正态性.
(1)相合性和大数定律 设，样本为冬，...，及，为简单起见，考虑独立同分布情形.记~ =

E($)
由大数定律可直接得到矩估计的强相合性:
1"
〆=~=–Z ^E(Xi)=^(a.e.).
=mJ=–~ 土 (a–^y = ?(二卜(—1)7–®'–'–^ (a.e.). =1
另外由引理5.3.2可得
定理5. 3.3设G(x,, ..., 么;氕, ..., yj关于各变元连续，则g(X)=
, ..., ~;%, ..., 饥/)为g(4) =G(弘"..., 妗“a、, ..., aj的强相合估
计. I (2)渐近正态性与中心极限定理
设 K , •••, !:为随机变量序列，则在一定正则条件下有
s(y, –叹) e=l
為 Vara)
则中心矩可表示为原点矩的函数 aj = E(^i –Mi)' = Z (;卜(_
:
 5.3估计最的渐近性质
191
若随机序列独立同分布，£(^) VarCKj =(r2, 则有
rjn=y/n—~~ A^(0,1)或 K/V(0, Var( )). a
(5. 3. 11)
因此a;为什的相合渐近正态估计.即原点矩的矩估计都是CAN.中心 矩也有类似的结果，见下面的定理5.3.4.但是，矩估计一般不是 BAN.另外，以上结果还可以推广到多元情形.记
a=(a,, •••, %/;
M = (Mi ,..., 从t)T, 则有
,a2 _/i2:..., –从4)T 1 ;y(o, 乏),
(5. 3. 12)
其中乏的元素为= Cov(J;).
今考虑g(0) =G(Mi, ..., A;A, ..., %)的矩估计，由于中心矩
a, ,•••, %可表示为原点矩的函数，因此可认为g(幻仅为原点矩的函数， 即(10)
=h(h, ...+k),其矩估计为i(X) =A(a,, "., a山 则由引理
5.3.3的推论(5.3.8)式(即向量形式)有
定理5. 3.4设h(xl9..., 人)关于各变元可导，则g(J)
人)为客(6>) =&(Mi, ..., Mi)的相合渐近正态估计，并且有4n\g{X) - g(60I⊥*/
V(0, HrSH),其中=(dh/dp', ..., dh/d^).
证明 在/g(^)~g(0)\=7n)/i(a) 中，由(5.3.12)可
Mv^(a–/x)–^/V(0,5),因此由(5.3.8)式可得^[A(a) /V(O, HT朋. |
推论 若S(;V)和g(幻为向量，类似结果也成立. 5. 3.4 极大似然估计的相合性和渐近正态性
极大似然估计有很好的渐近性质，在一定正则条件下具有强相合性 和渐近正态性，且为BAN.但是这些性质的严格证明甚为复杂，本节
仅概述其大意，详细讨论可参阅陈希孺(1981)等文献. 我们首先介绍似然函数的基本性质，这些性质在各方面都有广泛的
以上结果用于矩估计= =
A, 乙=¥ , EYi=h则有
n
i=1
况~–巧)九 7V(0, v'), Vj = Var(ri).

}
,Xn)7 e 0 C Rp 为 C-R 分布族，以下
应用.设 X = (X
仅考虑独立同分布情形(独立样本情形类似).设, ••- ,Xn为独立同分 布样本，X、~
f(x、，❷)，/( )= log f(x} ,e),则有

. 5(x,,0} =Z(
dlog /(X| ,0) .
) =-------------------，E^[1(0,)] =0,
du
VarJZ(6>,^)] -KO,Xx)] =i(的 ， n
其中K幻为A的Fisher信息.由于X-f(z,O)=门/(\4)，因此有 i=1
和式
n
L(0)= ，x)=logf(x,0)= 2 1(0,xi). (5.3.13) 1=1
(5.3. 13)式是下面推导渐近性质的出发点，因为它是一个和式，所以 可以引用大数定律和中心极限定理.由(5.3.13)式有
Ej£(0)] =EJS(X,^)] =0, Var^fL(0)] =Efl[-Z(^)] =1(0) =ni(=0(n).
同时亦有广(4)^OCn-1).以下进一步假设戶(H)存在二阶矩， 并记
EJ/U)(^,X,)J=久(4)，Var，[戶(H)]=pk(0). 易见 a{ (6) =0，p, (0) = t(0) = -a2(0).
下面将基于(5. 3. 13)式应用大数定律和中心极限定理，由此可以
得到与似然函数有关的许多重要性质.
引理5.3.4 设 =(^!,•••,Xn)T^f(x,0), 0e0CRp为C-R分布
族，并设X!，...， 独立同分布，A 的Fisher信息为i(0), 则有 (1)n-*L(^)->0(a.e.),且有L(0)=op(n);
(2) n_'L、k、(0)=%(1),即L(1)(0)=0p(n)，=2,3,-,特
别有
1 ** •• 一(沒)一►/(0)(a.e.)，[-Z(^)]_I =0p(n_I)
;
(5. 3. 14)
(5.3. 15)
(3) score函数S(X,^) =L(0)有以下渐近正态性:
-p£(0)^/V(O,i(0)), L(4) =0p(ni/2); yn
(4) 观察信息_’U❷)与Fisher信息/(幻之间有以下重要关系: —[-Z(a) -/(沒)]⊥*? V(O，p2(0))，-Z(3) =/(权)+ (nT),
y/n
[-Uo)r[+Op(n~3/2), 证明 根据(5.3.13)式，由大数定律可得
+£(4)(4)=士 玄严 严(0人)](a.e.).
(5.3. 16) (5.3. 17)
 因此结论(2)成立.当A = 1时,
“
2 时，EJ -

=0,因此结论(1)成立. =/(<?),因此(5.3. 14)式成立.对和式
应用中心极限定理(见(5. 3. 11)式)可得

- Ej/(6>,X1)]}-L*7V(O,VarjZ((9,XI)]).
当 L(&) =
1=1 人{士
由于 EjZ(^,Jt)] =0, Varj/C^,^)] =r(^),因此(5.3.15)式成立. n
对于和式-Ue) = £ [-z(^,x£)]应用中心极限定理得 1^1
人{士■名[_ 7(沒, A\)] - e*[- 7(n)]}
-^/V(0,Var(,[-?(H)]).
由于 E,[-Z(0,X,)] =i(^) =n-7(^),因此有 1r
由此也
边同乘
(4)]-
1 =Op(n~l)可得
该
为OR分布族，并设Xx,-,Xn独立同分布
上的开集.则似
-Z(沒)-/(沒[
)]- ^(0,1/2 (^)).
[可得到-Z(<9) =Z(6>) +Op(n^),因此(5.3.16)式成立.上式两
1
)即可得到[-Z(^)] -* =/-,(<9) +
式两边同乘 K}(0) =(?(n-
0人 n-, ，此即(5.3. 17)式. ■
推论 若 L(0)在 0^0.的某邻域内存在三阶连续导数，则有 士L(4)=士卵。)+/
JT(0o)A6>+yA^TB(0o)Al9+ || A6> || 3Op(1),
(5. 3. 18) 其中4(沒o)=汀 乂(权o), 5(^0) =n',Z(0o), ^6=0-6Qy 且有
#(氏)九 7V(0, f(沒。)), B(0o)l-i(0o). 证明L(幻在氏处进行Taylor展开，并应用以上引理即得. | 定理5.3.5 (强相合性)设1=(4, ..., XJt~/(x,<9), e0CR?
,
然方程=0在n^+oo时必有解0n(X)“(X', ..., X丄并且是强 相合的.即对真参数氏e0有
PSo\X; lim =^0 } =1,氏e0. (5.3.19) n-♦ + oo
证明 考虑的一列闭邻域Um = \0fz ||❷1 -❷0 || ^8m98m > 0 1 »并有5m-*0(rn->oo).以下证明，对充分大的a, L(0)在邻域l/m
中的最大值不可能在边界||<9'-氏|| =么上达到.即对充分大的n,必

存在A(幻的最大值点谷人x)，以及零测集人,。，对一切x^An^ II -O0II <am.再令 6m-o,则有 Peo\x: 0n(X^OQ } =1.为了证 明这一点，主要应用信息不等式E/logAXJ] >Ez[log gCX,)].在氏
处应用信息不等式可得
EjlogAX,A)] >EJlog/(U')], V^V^0. (5.3.20)
对于\\ef -e. II =8,”, X
1" -Z log
、
^o)->E0o[1og/(^1,^0)] (a.e.7%。).
i二
-Z log/dD-Ejlog^U')] (a.e.P9o).

n i=i
由(5.3.20)可知，必存在/V。，对于n>Nm，除了一个零测集 当%€久m时必有
以外，
-Z log/(JGA)>-2 log/(XW)，W-氏II =8n. n (=I n f=1
11
因此当p'-氏II =么， 时有L(～)>L(8)，/\(U=0.这 说明，L(幻在邻域Um中的最大值不可能在边界||0'-❷。|| =3m上达 到.因而最大值点0n(x)=^(x,,应在仏,的内部，即应满足:
从(4))=0,||么(1)-0.||<3m, Vxe4„>w.
令爪一>00，则有 1 一>0，因而 on (x) ->■ eQ (a. e.)对一切 X e A = X 00 U UAn.nl成立.而4仍然是零测集，即/\(4) =0,因ftn XeA时有 =1 " = ■'m
久(幻-^o(a. e.)，即(5. 3. 19)式成立. ■ 以上定理只是说明，似然方程必有相合解，但是未能完全证明极大 似然估计的强相合性，关于相合性更深人的讨论可参见陈希孺(1981) 等文献.不过，以上定理对于若干常见情形还是可用的.例如，如果似
然函数是单峰可导的，则似然方程的解存在唯一，且为极大似然估计， 因而是强相合的，若干常见的指数族分布就属于这种情形.
定理5. 3.6(渐近正态性)设又=(X,, ..., X„)T ~/(义，汐)， 0C RP*C-R分布族，并设苓，..., X,,独立同分布，0 为R"上的开集.假 定似然方程U0) =0在 + X时有相合解en =久(%) ， 且假定L{i\e)在6>中存在且连续，则么(幻为0的BAN，且有
0n -6>0)-^^(0,/_1(6>0)). (5.3.21) 证明 以下仅就0 为一维的情形加以证明，0为向量的情形完全类
似.似然方程£(<9J =0在氏处进行二阶展开可得
应用强大数定律有
5.3估计量的渐近性质
195
L(6n) =L(0q) +Z(^0)A^+yL(3,(f)A^2 =0, 其中匕Q=h f在en和e0之)间.上式可化简为
1(氏)=[-l(e0
= [-去Z(^)) -+△沒士乙(3)(4)](氏)=n
因此有
其中vn和\分别代表上式第一项和第二项.对上式应用引理5.3.4的 结果可知:-
n-'L(0n)U(0⊥ «-!£(3)(^) =0/1),又由假设可知
A沒」^0，因此7}。⊥ 「'(00).又由引理5.3.4的(5.3.15)式可知么= 上(氏)/人-^a~/V(O,i(^o)).因此由 Slutsky 定理可得(5.3.21)式:
根据定义5.3.3, 6n(X)为沒的BAN. | 渐近正态性在理论上、应用上都有重要意义，可参见第六章和第七
章.以下推论也是很常用的.
推论1 (5.3.21)式对任意的氏成立，因而对任意0^0都成立，
即有y/ni0n-沒)⊥一/V(0, f_1(0))，且有 0n ~0) =Op(l);同时也有
沒)，V^g0. | 推论2 设/(幻为样本= 的Fisher信息阵，则有
妙(沒)(么一幻⊥* A^O，/。)， r(On)(0n -0)-L^N(OfIp).
(5. 3. 22) -eyi(0H6n -e)H(p). (5.3.23)
(A -幻T/(A)(A (5.3.24) 证明 由(5. 3. 21)式可得f+(6»)人 -幻47V(0，/p)，由于
!(0) =ni(8)，因此该式可表示为]^(^n),由此即 得(5.3.22)第1式;而(5.3.22)第2

式可表示为
/了(么)(久-6) =[/+(久)厂+(~]/+(权)(久-e、,
因此由0n的相合性以及Slutsky定理去1律可得(5.3.22)第2式.由 (5.3.22)式即可得到(5.3.23)式以及(5.3.24)式. |
推论3 |Var/忒)j -+(忒-幻l/V(0, /p),且有
(么- 6>)T I Var^^) | H (5.3.25)
弘(3)(f)]△认
196 特别对于单参数有
第五章点估计的性质
A
2^1- _L^/v(O,l). (5.3.26)
A/Var/^) 证明由推论1可得
{Vare(^n)\~2(en-e)=1Var0(v^n)1 ~T^(On-0)
-^r(^)/v(0,r1(^))-7V(o,/p). 由此亦可得到(5. 3. 25)式和(5. 3. 26)式. 匯
由极大似然估计的渐近正态性还可推出似然比统计量的渐近/
性，为此，首先介绍极大似然估计的随机展开，这一展开式本身也很 有用.
定理5. 3.7 条件同定理5.3.6,则0n=6n (X)可展开为(称为随 机展开)
On-0o = [-L(Oo)]~xL(0o) =ap(rT+). (5.3.27)
on-eQ^rl(e0)L(e0)+op(n-}), (5.3.28) 证明由 Uen)=0可得
L(❷o、+Z(沒。)(么-沒。)++(o—oq)tl(3) -0O) =0,
其中f在A与氏之间，余项的第f个分量为去2[L(3)(^)]l7,A^, 2 j.k
为A^ = (^t -0O)的第J•个分量.由上式可得 on-e.=[-Z(^o)]-^(^)+
y [-Z((90)] -*(^ -氏)TA(3〉(f)(A -氏). (5. 3.29) 由引理5.3.4可知
[-Z(4)]-乂(4)=[二^2厂 (, +).
由于人(么-氏)=V^A^=ap(l);因此由引理5.3.4, (5.3.29)式中的 余项可表示为
余项=^~[-Z(^0)//i]'iynA^T⊥L(3)(f)人A沒=O (n_1). 厶几 n p
由此可得(5.3.27)式.又由引理5.3.4可得[-2(氏)]_1 =厂1 (氏)+ 代人(5.3.27)式即得
On-eo =r\0o)L(eo) +op(n~l)
5.3估计量的渐近性质
197
=rl(OQ)L(0Q) +%(,). I 最常见的似然比统计量定义为LR(0) =2[L(eJ 它实际上 是似然比f(x10n)/f(x,e')对数的两倍:LR(e)=21og[/(x,^a)//(%,^)].
这个统计量在大样本假设检验和区间估计中有重要应用，也是实际中应 用最广泛的统计量之一.其理论基础就是以下极限定理 , 通常就称为似
/
LR(e0) =2[L(en) -L(0Q)-\^X(p)9 证明 对LR(0q)进行Taylor展开可得
然比统计量的渐近 定理5.3.8条件同定理5.3.6,则有
其中余项=4-
将定理 5.3.7 中的(5.3.27)式
性.
V^oea ^(^20)=2i7(氏)(4 -氏)+A0tZ(^o)a^ + 余项,
(5.3.30)
代人上式可得
L/?(氏)=2Lt(^0)[-Z(^o)] -^(^) +2£t(^0) . 0/n'1)
-iT(^0)[-Z(^o)]_!Z(^0) +0p(n'T) +余项.

由于 L(3)(()/n = Op(l)，^ = 0p(n-,/2)f 因此余项=0p(n-,/2);另有
UeQ)=W 2)，所以有
£/?(%) =ZT(^0)[-Z(0O)] -'1(^) +%(„-+). (5.3.31)
由(5.3. 17)式可得[-Z(氏)广1 =/_*(氏)+Op(n~3/2),该式代人上式 可得
LR(❷0)
❷。)厂1(❷0)L(❷0) +W+)
=^(M 士/(心)
1-1 ?L(^) +0p(n'~) yn
 由于 i(氏)/\AT-^v(o，i(0。))，故有厂+(泼。)1((9。)/7^—>tv(o,/p)，所以
LR(0o)—^ 2(p). I
其中
定理5.3.9条件同定理5.3.6,则似然比统计量有以下等价形式: j2 j2
SC(0o)~^X (P)，(P) , v e 0. (5.3.33) ira(氏)九X2(p)，WDr(e0)-^X(p),
v^oe0. (5.3.34)
 (5.3.35)
(5.3.36)
❷ SC'(4)) ={(fde)
dL
<?=(?o 氏)"(4)(么-泼o),
WD(60
WD\0^ =(1 -氏)T[-l(on)}{en-ej.
由(5.3. 31)式和(5.3.32)式可得
证明
LR(Oo) =Sr(0。)+0p(n_+); £7?(氏)=SC(^0) +Op(n_+).
因而可以得到(5.3.33)式.而由(5.3.28)式可得L(0O) =Z(6>0)(^n - 氏)+0,,(1).
该式代人(5.3.32)式可得
LR(e.)=(<9„-6>o)TZ(^o)(0n-6»0)+W+).
由0n的相合性以及Slutsky定理可以得到(5.3.34)的第一式，再由 (5.3. 17)即可得到第二式. 麵
定理5.3.7—定理5.3.9对任意的00成立，因而对任意0e0都成 立.(5.3.35)式通常称为score统计量或Ra◦统计量;而(5.3.36)式通 常称为Wald统计量.注意，(5.3.36)式与(5.3.24)式是一致的.另 外，定理5.3. 8—定理5.3.9可以进一步推广到子集参数的情形，见第 六章.
习题五
1. 设 ...，X为i.i.d.样本，X,的密度函数为=e-(Xi~0) • exp(- ,其中x,eR.求汐的C-R下界.
2. 设X},•••,%„为i.i.d.样本，X]-Rayleigh分布:f{xx,or)={x}/a)• expj-x\/{2a2)|， x]彡0.
(1) 求 cr，<r2 的 C-R 下界;
(2) 判断是否存在有效的无偏估计.
3. 设X,,...，及为i. i. d.样本，X.的密度函数为
f A Xj + 1)
f(x'，A) = _l+2 —卜仏!，"1笑0
1.0， x, <0.
(I)求A 的Fisher信息/(A); (2)求h(1),使A(A)存在有效无偏估计.

4-设弋，...，氡为 m 样本，Xt -T(A,r),其中r已知.分别 求A和1/A的MLE，并判断其方差是否能达到C-R下界.
5.设随机变量X的密度函数为/(幻=(20) ^exp \ - \ x\/e\ y其
,

中沒>0.分别求沒，0r (r>l)，(1+沒)一1的UMVUE，并检验它们能否 达到各自的C-R下界(提示:r = | x |是关于e的完备充分统计量).
6. 设I ，...，叉为i. i. d.样本， 服从两点分布，即 =1)=
,
并且方差Var(SJ达不到/>(1 -p)的C-R下界.
7. 设A，...，Xn为i.i.d.样本，Xx～7V(O,<r2)*.试求cr的UMVUE,
问其能否达到a 的无偏估计的C-R下界.
8. 设久，...，Xn为i.i.d.样本，X: ~/V(/z,a2),其中是未知
参数，a2是已知参数.
(1) 求一的UMVUE,其中a为固定的正数; (2)设验证(1)中所求的的UMVUE是否能达到e～的C-R下界.
P，其中 pe(0,
9. g(<9)的估计，则有
l).证明:p(l-p)的 UMVUE为 Sn=— X (1-JV) n -1
I为C-R分布族，g(幻在(9上可微，T(X)是
E, jT(X) +6'(幻]2厂1(沒)， 其中 6(4) =EJT(X)] -g(0).
10. 设芩，...，夂为Li.d.样本，A的密度函数为且对 Vx., >o,又设5(%)为g(幻的任意一个无偏估计，证明:
11.设X,，...， 为i. i. d.样本，Xx
已知.证明4 的MLE是0的无偏的相合估计. 12.设X，，...，兑为i. i. d.样本，X,的密度函数为
f(X、，沒)=1-了"(-1 ^1(,
ye 61 jx,彡0 |，其中0>0未知.考虑e的三个估计:Tx
1n
=7TT S r3 试判断哪些是0的无偏估计，哪些是沒的 nt1 /=1
n—— -
其中0e(-l
,
设l)为未知参数，试找0的一个相合估计.
为i. i. d.样本，X1的密度函数为f(x"0)=
13. 1in
相合估计，并证明你的结论.
=⊥Z

14.设A，...，总相互独立，其中 i.i.d.,E(Xj)=M,
Vai^X!) =cr2; 门，...， 为 i. i. d.，E(Xn) =/x, Var(Xn) = /.证明:无是m 的相合估计.
15. 设X,，...，X„为i.i.d.样本，A~7V(O，(r2),证明:8n= n
(k/n)

|X£ |是cr的相合估计的充要条件为A = A72.
1=1 16.设Kw,n=l,2,...为正态随机变量序列，yrt~/V(a，<),n=l,
2,...，证明:r 是a的相合估计的充要条件为Tn^0.
17. 设X,，...，冬为i.i.d.样本，X*～(10)，❷)，证明:T(X)=X(n)
是 0 的相合与强相合估计.
’18.设A，...，冬为i. i. 土样本，Xl～f(x"0).证明:尤(1)是沒的
强相合估计，其中
(1) f(x、，0) =i {e<x} <6 + 1 | ;
(2) =2(%! -0)1 \ 3 <xx <0 + 1 [;
(3)/(xj，^) (提示:参考例5. 3. 5).
,^)Z\x}^0;,其分布函数Fe(x})>0, \/xx>8
* 19.设X} , ••• ,Xn为i. i. d.样本，Xt的分布函数F&(x})为连续函 数，并且有匕(6>)=1，Fd{x.) <1, V%1 <6>.证明:
(1) 为 0 的强相合估计;
(2) 若Fre{O')#0,则nFfe(0)(^(n)-沒)丄*Y,其中F的分布函数 为 F(y) =eyJ iy 彡0 I (提示:F0(X(n)) = F人❷、+ F’❷(❷)(X{n) - 0) + 0(|0_X(4) |2),并证 n\0-X{n} |2上 0).
*20.设芩，...人 为Li.d.样本，A 服从均匀分布R(0-丄力+丄)，
其中0 e R未知，证明:y(X(1) + X(n))为0的强相合估计 (提示:证明 Var^ ^.2.. -(n))收敛).
21.设 , -•- 9Xn 为 i. i. d.样本，X)服从 Cauchy 分布，即f{xx，0)=
1- ^尸]，其中OeR未知.证明:X不是0的相合估计，其中
无4^
22.设5n 证明: 的渐近分布为2V(0,+

23.设 X(, - ,Xn 独立同分布，并设 EX' =/£, Var (X1) = a2,
Var(^)=r2, S2=n-* -X)2.求W 以及a，</的CAN，并求
它们的渐近分布.
24. 设X:，...，为i“.d.样本， 6(1，6>)，0
(1) 试基于无求g(幻=0/(1 -幻的一个矩估计in(X);
(2) 求人(^(%) 的渐近分布，并证明in(X)是g(幻的 BAN估计.
25. 设孓，...，为i.i.d.样本.
(1) 若1~/?(0,沒)，^>0,证明:n(^-X{n))的分布收敛于指数
分布 E(l/e);
(2) 若芩~7?(0,邱)，^>0,证明:n6-X(n)的分布收敛于指数分
布E(l/0)，并由此给出0的一个相合估计;
(3) 若X,~1?(0,0), 0>0,证明: 的分布为^(2),而不
是收敛到v2(i).
26. 设Xlf-,Xn为i.i.d.样本，
n丄
(1) 若 A ~尺(0，1)，令 rn = (n x.)'v,证明:
～(0，e2)，其中e是自然对数的底数(提示:令Z = lnYn =
—6)1 In Xif

然后用中心极限定理);
(2) 若X. 推导相应的结果，并据此给出0的一个相合
估计.
27. 设弋，...，Jn为i. i. d.样本，
A =<9(<9+l)x^'(l-xjl\0<X1<1 |， 其中0 <久<1，0>O.
(1)证明:Tn=^L是0的一个矩估计; 1—X
(2)证明:況7>人(8))久(8)九7V(0,l),其中❷)=0,
沒(汐+2)2 2(^+3) *
28.设 X,, 为 i. i. d.样本，X, ~ (从，a2)，即 E(;^) =/z
Var(X,) =<r2 < oo.设函数的二阶导数在£=/z处连续，且 今'(/!) = 0.
(rn(0)
202
(1) 证明:
第五章点估计的性质 且 n[h(X) 的渐近分
12 布为其中 V-X1
;
1—一r (2)证明:当ZZ=y时，<又(1-X)]1[弘(1 其
中v～
*29.设X,,-,Xn为i. i. d.样本，X,～A^
计6ln，52„,么，么，其中8ln =X2 为<r2已知条件下#的UMVUE; 71
_J72 n
—(7^ ,(T2=2(X,-X)2)为a2未知条件下e2的
UMVUE; 63n=X2 为f 的 MLE; S4n = max (O,Slni 为 L 的改进.证明: 当时，
5ln,52n,33n,奴有相同的渐近分布，并且都是#的BAN
估计.
30. 设夸，...， 为i. i. d.样本，X:存在前4阶矩.求下列统计量
的渐近分布:
(Di.W =(x±i^);
(2)g2(X)=(X,S2),52=丄玄(X.-X)2. ' niTi
31. 设 ，...，叉为 i. i. d,样本，Xx ~^(^,a2), a2 已知.设p = >a)的极大似然估计为人 求的渐近分布.
32. 设A，...，A;为i.i.d.样本，X,服从两点分布，即X, -6(1,
69，证明: arcsin vT-arcsin^I具有渐近正态分布，并且其方差与 参数无关.
，a2).现有/
的四个估
第六章参数假设检验
参数估计与假设检验是统计推断的两个主要组成部分.但是假设检 验所研究的问题及其解决方法与参数估计有很大不同.假设检验问题是 要对“有关总体分布的某种判断(或假设)”是否成立进行鉴定(或检 验)，以:便了解总体分布的有关性质.例如，某种元件的寿命X服从指
假设检验的内容十分丰富，本章主要介绍其基本理论、基本方法和某
些应用.第6. 1节通过一个实例说明假设检验所研究的问题以及解决问题
的基本思想方法，并由此引出否定域、检验函数、功效函数以及两类错误
等Neyman - Pearson理论的基本概念.第6. 2—6. 5节介绍假设检验的Ney-
man - Pearson理论，并应用于常见的正态分布和指数族分布的假设检验问
题，其中包括单边检验、双边检验以及多参数的检验等问题.Neyman - Pearson理论在数

学上很完美，但在应用上有较多的限制.第6. 6—6. 7 节分
别介绍具有广泛应用价值的似然比检验和拟合优度检验，特别，第 6. 6 节 还比较详细地介绍了文献中常见的score检验.有关本章内容，可参见陈希
孺(1981,1999),陈家鼎等(1993),茆诗松等(1986,1998)，范金城，吴可法 (2001)，郑忠国(1998)，Rao, C. R. (1973), Lehmann(1986) , Shao(1998),
Zacks (1981) , Bickel, P. J. and Doksum, K. A. (1977)等文献.

6.1假设检验的基本概念

假设X～(HP,)，0道 或X~f(x, ❷)，0^0.假设检验问题 可表示为
H0:0e e 0]. 其中Ho称为原假设，H.称为对立假设.若6>0 = {^0 则称
应用上要求其平均寿命不低于2 000小时，要通
数分布 过抽样X,，X2,...，人，来检验这批元件是否合格.这可归结为—个假设 检验问题，即研究假设“7/。:(9多2 000” 是否成立，如果假设坑成立， 则认为这批元件合格，否则认为不合格.在实用上，很多数据分析问题 都能够归结为假设检验问题，它有极其广泛的应用，因此构成了统计推 断的重要组成部分.
为简单假设，其他皆称为复合假设，即简单假设为H
•加❷
Qd

以下通过一个例子来说明假设检验所研究的问题以及解决问题的基本思
想方法.

例 6.1.1 通过观测试验来检验某种新药，看其疗效是否不低于
0. 75.这可对n 个试验者，观察其服用新药的疗效.一般可假设 弋，...， 独立同分布，且有
v [1,第/试验者治愈，. 、
即X 问题:
广
X =10,第£试验者未愈 i=1，•••，n ，
，
0 表示治愈的概率，则这一问题可化为一个假设检验
77o:i9CO.75—仏:<9>0.75. (6.1.1)
这是一个复合假设检验问题，以下说明其解法;为明确起见，不妨设 30
n=30.可取T= ^,-6(30,0)作为检验统计量.易见，T表示治愈 £=1
的人数，r 越大，表示治愈率0 可能越大，由直接计算可知 30 ax
p(r^k)= g (.)m —e)30-'=ie(k930-k+i)9
其中/fl(A,30-A; + 1)为不完全卢函数(见第一章)，它是0 的增函数， 经查表有
P (7>27,沒=0.75 I =7,(27 ,4) ^0. 05;
P !7>27,沒彡0. 75 (=2X27,4) ^0. 05. (6. 1.2) 由(6. 1.2)式即可对假设检验问题(6. 1. 1)进行统计推断如下(一定意义 上可看作是统计意义下的“反证法”).若成立，则(6.1.2)式成立， 即6X0.75时，P | 7^27 | ^0.05.这表明:治愈率名0. 75的条件下治
愈人数多27的概率很小，矣0.05.因此，当6X0.75时，事件
“7^27”出现的可能性极小，几乎不可能.所以，若真的抽样到 30
A=久，...，=气，使T=T(x)= Z义彡27,则认为H。不成立;因为 1=1
在统计问题中，认为小概率事件在一次抽样时不可能发生，这显然是合 理的.由此可得到假

设检验问题(6. 1. 1)的一个解，它表示为如下“否 定域”：
30 1 R= xtT(x')=g xL>271.
若抽样到X=x^Ry 则否定原假设仫;若抽样到xeR，则不否定氐.
当然这种推理也有判错的可能，由(6. 1.2)式可知，圯成立而X=x^R 的概率在0.05. I

例6. 1. 1中所用的推理方法可推广到更一般的情形. 6.1.1 否定域与检验函数
假设考虑一般的假设检验问题 0g 0,.
(6.1.3)
通常可设计一个统计量T= T(X),与I 上的区域RC龙，使得R = \x: T(x)eW\,其常见的形式为R=\x–T(x)^c!(见例6.1.1)或/?=ix:
T(X)^c|,并有7\(尺)名a,其中/\表示/70成立时(即 0^0。时)的概率.通常取a充分小，如a =0.05或a =0.01等.这说 明，假设^成立时，事件“XeR”出现的可能性极小(Ca).因此， 若一次抽样得到X二xeR，则应否定原假设氐.
定义6.1.1 对于假设检验问题(6.1.3),叉上的一个区域R称为 否定域，若抽样到则否定H。;其余集云称为假设检验问题的接 受域.若对任意的❷有或简记为PWo(/?)^a),则
称为假设检验问题(6. 1.3)的水平为a的否定域，a称为R的水平，
其余集R亦称为假设检验问题水平为1 –a的接受域. I 根据例6. 1.1和以上说明，假设检验问题(6.1.3)基于否定域的统计 推断如下.若一次抽样得到X=x^R,则否定原假设汉。,
因为%成立
时，概率Pffo(xe/?)极小(矣a).这时犯错误(即判错)的概率名a.反之， 若云，则不否定坑.常见的否定域的形式为= 特别 有1?)=|x:T(x) , R2=)x:T(x) ,以及7?
3=(^:ct^T(x)^c2) 等.为了便于数学上的处理，否定域可加以推广.因为任一集合与示性 函数一一对应，所以可引人以下定义:
定义6.1.2 对于假设检验问题(6. 1.3), , 称以下</>(幻为它的一 个检验函数:
1, xe7?, 小(x)= 一
,0, xe/?,
其中少(幻表示抽样到X – x时否定原假设的概率.若对任意的
^e0oWEj(/)(X)]Ca,则称为假设检验问题(6.1.3)的水平为a 的检验. |
易见，否定域与检验函数炎(幻是完全等价的.若</)(%) =1(即 *£尺)，则否定仫(否定7/0的概率为1);若(/>(x)=0(即rte/?),则不 否定打0(否定坑的概率为0);且有E,[令(尤)]=/%(Xe/?).检验函数 还可以进一步推广到随机化检验.

定义6.1.3 对于假设检验问题(6.1.3), 任一满足0 1 的 函数小(幻称为一个随机化检验，其中*(幻表示:若抽样到则以
的概率否定原假设好。.若对任意的0^0.有EJWX)]名a,则 称小(幻为假设检验问题(6. 1.3)的水平为a 的检验. I
随机化检验在实际中用得不多，但在理论上有一定意义.注意， Ej(/>(y)]表示参数为6时，否定氐的平均概率.
我们亦可从统计判决函数的观点出发，说明假设检验问题的基本 概念.
对于假设检验问题(6.1.3)，最终目的只有两个:接受原假设尽 以及否定原假设汉。.因此判决空间一般只包含两个元素，即公= |0,1 | ,其中判决rf=0表示77。成立，判决d=i表示Hq不成立.关于
统计判决函数由于判决空间P只有0, 1两个值，因而很自然地 取为示性函数

fl, X G 7?,
5 (x
,
)=I\x:xe7?| =J —
[0, %g2?, 这就是定义6.1.2中的否定域与检验函数.在数学上，如定义6.1.3所述，亦可取判决空间为D = [O，1]，这时0 1对应于随机化检验 令(x).
6.1.2两类错误及功效函数
对于假设检验问题(6. 1.3),给定一个否定域R或一个检验函数 少(幻 ，就是检验问题的一个解.问题是如何判别一个检验或(/)O)的 好坏?如何求最优解?根据统计判决函数的观点，就是要求风险函数最 小的解.对于假设检验问题，通常可取0-1损失函数，即判错时损失 为I，判对时损失为0,具体可表示为
fl, ^e6>0_B^ = l ^0 _S.c/=O,
[0, 0e00且d=0或0e0,且d=1. 由此容易得到非随机化检验6(幻 =1 |的风险函数为
7?(沒，5) =EJL(^,6(X))J = -
在这一风险函数中，第一式表示成立但被否定的概率”，即引起的 损失;第二式表示“付。不成立但未被否定的概率”，也是引起的损失; 通常称为犯以上第一、第二两种错误概率的大小.由于观察值的随机 性 ，任何检验问题的解都有可能犯这两种错误，因此引人以下定义:
<9e0o, P e (X e 尺), 0 & 3 } .

定义6. 1. 4 对于假设检验问题(6. 1. 3)的一个否定域R或一个检 验函数,其第一类错误1(幻定义为风成立时，否定圮的概率，
. 其第二 类错误n(0)定义为H,成立时，不否定//。的概率，即n(^) =P/Xe
即 I(^) ^e6>0, 或 I(^) =EJ(/)(X)L 0 e 00
尺)， 6>1 或11(沒)=1 —Ed[(i)(JV)]，0e0,. I 理论上讲，一个好的检验应该使以上风险函数尽量小，即两类错误 1(幻和n(幻都尽量小，但事实上，当样本容量固定时，不可能使二者
同时都很小.首先看一个例子.
例6. 1.1 (续)对于假设检验问题(6.1.1),取R = \x;T^21 |为 30
否定域，即检验问题的一个解，其中r= 我们来看其相应的两 i=1
类错误.由以上定义可知，1(幻=/\。(7>27)=/，(27,4),0彡0.75; 它表示治愈率<0. 75的条件下30个病人中治愈人数>27的概率.由前 面的计算可知，当<9=0.75时1(0) «0.05，而当0 <0.75时I (60名 O. 05(因为/,(27,4)为0的增函数).因此对否定域7? = U:r^27 }来 说，其第一类错误很小，都小于0. 05.但是其第二类错误就很难达到 小于0.05的水平.由以上定义可知，11(0) =7\(云)=/%(7<27)， ^>0. 75.它表示治愈率>0.75的条件下30个病人中治愈人数名26的 概率，直观上看，这一概率并不一定都很小.由前面的计算可知，
n(^) =P/r<27) =1 -P0(T^27) =1 -Z/27,4),沒〉0.75. 这是沒的减函数，<9越大E(<9)越小.当(9=0. 75 0^ P,(T<27) =1 - P, (r^27)-0. 95,而当沒从 0. 75逐渐增加时，fl(^) =P,(T<27)从 0.95逐渐减少，但也不可能很快减少到0. 05.例如，当0=0.85日寸，
Iim =P(r<27) =1 -/“ 27,4)«0.58 还比较大，与 0. 05 相差很大 (直观上看，治愈率等于0.85时，30个人中治愈人数小于27的可能性 并不一定很小).因此，要求第二类错误n(<9)对一切e>0. 75都很小是 不可能的. ■
以下定义假设检验的功效函数(亦称势函数)，它可以统一第I 、 第 n 两类错误，也可以使

我们进一步看到，同时要求两类错误都尽量小 一般是不可能的.另外，功效函数也便于我们今后讨论假设检验问题的 最优解.
定义6. 1. 5 对于假设检验问题(6. 1. 3)的一个否定域R或一个检 验函数其功效函数(亦称势函数)定义为
/3(0) =EJ(/)(X)] =PXXe/?), 其中冷(<9)表示当参数取0时，否定好。的平均概率. . |

功效函数可以统一第I、第 n 两类错误.例如对否定域来说，当 沒e0o时， =EJ*(X)] ^Pe(R) =1(^);而当 时，冷(沒)=
Ee [</>(X)] =Pe(R) =1 =1 -II(6>). 即1(沒)=冷(沒)，6>e0o; 而 D(^) =1-/3(^), 0為 由此我们可以从功效函数卢(幻看出第I、第U 两类错误的变化趋势.易见，要求第一类错误1(幻尽量小，就是要求/3(沒) 在0。上尽量小;而要求第二类错误n(0)尽量小，就是要求)8(幻在什 上 尽量大.显然，这是很困难的，例如在0。和吮的边界附近就很困难.
例6. 1.1(续) 考虑否定域R={x:T^27)的功效函数.由定义可得 M :匕(7>27)=八(27,4) =-(2^-4y{\26(l _x)3d～ VO<^<1.
这时有/3(0.75)«0.05,当^^0.75时I(幻=冷(幻石0.05.但是若要 6>>0. 75 时 II (<9) = 1 彡0.05, 则必须要求13(6)^0.95.这显然是
很困难的，只有0 很接近1 时才有可
能(见图6. 1. 1). I
根据以上分析，假设检验问题 (6. 1.3)的最优解不可能指望两类错
误同时都很小，只能采取某种妥协 方案，这就是有名的Neyman - Pear- son准则.其主要精神就是在控制第
一类错误充分小的前提下，要求第 二类错误尽量小.
例6. 1. 1的功效函数图
图6. 1. 1 6·1. 3 Neyman - Pearson准则与一致最优势检验
为明确起见，对于假设检验问题(6.1.3)的一个解，统称为一个检 验(/>(^), 它可以是示性函数(对应于否定域/?), 也可以是在[0,1]取 值的任意一个函数;其功效函数为y0(6>) 根据Neyman - Pearson准则(简称N-P准则)，首先要确定一个第一类错误的允许水平 a, 其值很小(如«=0,05或0.01等等)，根据实际要求决定.在此前 提下，寻找第二类错误尽量小(即功效函数冷(6>)尽可能大)的解.其严
格定义如下:
定义6. 1.6 —致最优势检验(uniform most powerful test，简称为
UMPT). 对于假设检验问题(6. 1.3)和给定的水平a(通常0 <a<l，且 很小)，若检验</>(幻满足 :
/3„(0)=EJ</>(X)]^a,对一切Oe&09 (6.1.4)

则称*(幻为假设检验问题(6. 1.3)的一个水平为a 的检验，并记
0a = j-切 </>(%): /3小(8) <a，0e0o }. (6. 1.5)
若存在(/>*(x) £武使
氏,.((?)多氏(沒)，对一切 (/>(%) e ^>a, (6.1.6)
则称(x)为假设检验问题(6.1.3)的水平为a的一致最优势检验 (UMPT). I 根据上述定义，若</>* (x)为UMPT，则其第一类错误1(幻小于给 定水平a,第二类错误n(幻在一切水平为a的检验中最小(但一般不

可能也有n (<9)名a). 根据n-p准则进行统计推断的特点是:两类错误I (幻与n(幻不对称;原假设Ho与对立假设H'不对称.

(1) 若xeT?,则否定原假设7/o:^e0o,判定对立假设e0,

成立.这时理由充分，因为这时判错属于第一类错误(即氏成立而否 定A)，而第一类错误I(0)已控制在矣a的范围，所以犯错误的概率 很小(通常为0.05或0.01等).

(2) 反之，若则不否定HQ:Oe0Of即判为打。成立.这时理 由并不充分，因为这时判错属于第二类错误(即均 成立但未否定坑)， 若而一定很小，所以犯错误的概率不一定很小.例如在例6.1.1中，

出现上述情况的原因就是因为两类错误不可能同时都很小 ，而基于 N-P准则的妥协方案是控制了第一类错误，因而保护了原假设，使其不 被轻易否定.这时，若一旦否定原假设(即判定仏成立)，则理由充分 (判错概率小于等于a).因此在实际操作中，应该把需要有强有力证据 的假设放在对立假设仏上，一旦否定开。，即判定成立，则理由充 分，判错的概率名a(水平a 可事先设定).例如在假设检验问题 (6.1.1)中，检验“药物的疗效是否提高” 至关重要，判错的概率必须

很小，因此应把假设0>0, 75放在对立假设仏上.这时，一旦H。被否 定，即尽成立，判错的概率将会很小，我们有充分的理由认为沒〉 0.75成立，即 “药物的疗效确有提髙”.

由以上分析可知，Neyman - Pearson准则是合理并具有实用价值的， 它已得到理论与实际工作者的一致认可.另外，由定义6. 1.6可知•，基 于N-P准则的一致最优势检验把假设检验问题(6. 1.3)化为一个明确的 数学最优化问题，即对检验函数在不等式约束(6.1.4)的条件 下，求在6>1上达到最大值的解.Neyman和Pearson基于N-P准则发展

<27),这时不否定Ho:

0^75,但是实际上判错的 可能性不一定很小，例如当^=0. 85e6>1时还有P(7<27)«0. 58.

了一套严格的数学理论，本章6.2—6.4节将介绍其大意.以下首先介

绍检验函数的一个重要性质. 第二章曾经指出，充分统计量包含了与样本一样多的信息，而且比

样本简单得多;因此，通常的统计推断方法都是从充分统计量出发的. 第三章的Rao - Blackwell定理说明:统计推断中的最优解通常都是充分 统计- 的函数，后来几章的结果也证实了这一论断.同样，假设检验问

题的最优解也应当是充分统计量的函数，以下引理也印证了这一点: 引理6. 1.1 (充分性原则)对于假设检验问题(6.1.3)，设 7 = 为充分统计量，任给一个检验则必存在一个检验$(T),

为充分统计量r 的函数，并且与</>(*)有相同的功效.

取 =EJ^(X)|r]，则泰为r的函数，且与沒无关. ,所以0^^(0 ci,同时有

[不(7)]=E, (EJ</>(%) |T](=EJ</>(%)]. 因此检验每(r)为充分统计量的函数，并且与幻有相同的功效. I

以上引理说明，若包含随机化检验，则一致最优势检验可在充分统 计量的函数中寻找.

最后我们结合例6. 1. 1介绍假设检验问题的P -值，这是统计文献 中经常出现的一个术语(可参见Bickel and Doksum, 1977).

在例6. 1. 1中，假设检验问题(6. 1. 1)的否定域为R = U:T(x)

27 }，其第一类错误为I (6>) =/% j r>27 !安0.05,(沒名0.75).今设 某次具体抽样得=久，...，及=\，T(x)=28,这时应否定原假设坑， 而这一次检验中犯错误的概率应为I(幻=P/?^28)^0.01，(0安 0.75)，0.01就是本次检验的实际水平，通常称为此次检验

的p -值. 类似的，若此次抽样得r(x) =26,则不否定77。;但是若此时要否定 仫，则犯错误的概率为I (幻=/%(r>26) «0. 1，(^^0. 75),也称为 此次检验的值.一般情况下，若某次具体抽样得4=介，...，叉=
r=r(x),则此次检验的值可定义为p6 IHX) ❷E 6>。，它表示此次否定Ho而犯错误的概率.
对于一般的假设检验问题(6.1.3),若其否定域为/?=
c |(其他形式的否定域类似).若某次具体抽样为X, =xn, T=T{x),则其尸-值定义为,^e0o(更准确的，应表 不为supffe0t)P0jT(X)^T(%)|,见BickelandDoksum, 1977),它表示 根据此次抽样做检验，否定而犯错误的概率，即本次检验的实际水 平.在实际应用上，给定检验水平a 以后，可通过值来了解某次检 验的具体情况.若p-值备a，则否定p-值越小，否定H。的理由
证明 因为oc(/>(%)

越充分.反之，若P■"值则不否定好。;P-值越大，不否吉开。的 理由越充分.
6. 2 Neyman - Pearson 基本引理
正如前节所述，根据Neyman - Pearson准则求解假设检验问题 (6. 1.3)的一致最优势检验，相当于求一个不等式约束下的最优化问 题.这个问题并不简单，最优化理论中没有现成的方法，需要(也应
该)结合统计学的具体情况加以解决.同时必须注意，假设检验问题 (6. 1.3)实际上是一个很一般的问题.其中原假设和对立假设的空间(9。
和0:有很大的任意性;样本分布也有很大的任意性.因此 ， 要想根据定义6. 1.6求出假设检验问题(6. 1.3)通用的最优解是不可能
的，只能根据参数空间0。和以及样本分布的具体情况 ， 由简到繁逐步加以解决.Neyman - Pearson首先考虑了最简单的情况， 即原假设圮和对立假设尽 都只有一个状态的简单假设情形:Hoi0 =
= 61 , 他们得到了最优解，这就是著名的Neyman - Pearson基 本引理.N-P基本引理对样本分布没有太多限制，但是若要解决复合假
设检验问题，则必须对参数空间和样本分布进一步加以限制.这时，参 数空间0 主要限于一维，样本分布主要限于指数族分布.在 这些限制下，以Neyman - Pearson基本引理为基础，可以进一步解决若 干复合假设检验问题，其中包括单调似然比分布族的单边检验、指数族 分布的双边检验及某些多参数的检验问题.这也是Neyman - Pearson基 本*引理的重大贡献所在，可以把简单假设检验问题最优解的结果逐步 推广，用以解决若干复合假设检验问题，得到相应的一致最优势 检验.
6. 2.1 Neyman - Pearson 基本引理
假设X=(x,, ..., X„)T～/(X),或X~f(x，的，简单假设检验问题
可表示为 o H
或
:X (%),
:X */(x; :X -/(x; . 这两者基本等价，为方便起见，今后都采用以下参数形式:
:❷ = , 根据定义6.1.6,假设检验问题(6.2.1)的最优解(/>(*)应该满足:
(6.2.1)
 且对一切 ^(%) e^a,即 E.o[^(X)]^a,有
或等价地，其功效函数应满足

:$(x)e0a = (</>(%): EJ(X)<a|, 且对一切氏(氏)矣a,有
“ 对于简单假设检验问题，其一致最优势检验即为最优势检验(most
f(.X,00) 0.7 0.2
么(6)冰(❷I),
少a.
powerful test)，简记为MPT.以下说明如何求解假设检验问题(6. 2. 1) 的 MPT.
似然方法是统计学中应用最多的基本思想方法，假设检验问题也不 例外.为了求解假设检验问题(6. 2. 1)的MPT,考虑以下似然比:
首先从直观上来看，若//。被否定，即什 成立，则应该大，而 /(^氏)小，因而似然比A(幻应该比较大，所以可取否定域为
而c可由水平条件EdQ^(X)]=P0o{X^R\^a决定.另外，由以下数 值实例亦可了解似然比的意义:
X1234
0 0. 1 00
0. 1 AX，❹、) 0.2 0.7 0 A(x) 2/7 7/2 0
对于以上分布考虑假设检验问题(6. 2. 1).若抽样到% = 1,则A(%) =
2/7比较小，应该不否定好。，即77。成立;这时/(x,^0) =0.7比 /(^，^) =0.2出现的可能性大，因而判定成立是合理的.若抽样到 % =2，则A(%) =7/2比较大，应该否定/
7。，即仏成立;这时/(%,^)= 0.7比f(x，0o) =0.2出现的可能性大，因而判定H}成立也是合理的.
若抽样到x=3,则A(x) =0很小，因而不否定H。，这时/(x,^) =0为 不可能事件，所以不否定坑也是合理的.若抽样到^=4,则A(幻为 无穷大，这时f(x，80)= 0为不可能事件，所以否定Z/。也是合理的.
根据以上分析，假设检验问题(6. 2.1)的否定域应该由似然比A(幻 = J\x，e、)/f(x，e。) >c得到.以下给出严格的理论结果与证明.
定理6. 2. 1 (Neyman - Pearson基本引理)假设X ~f(x，0)为离散 型或连续型密度函数.则对简单假设检验问题(6.2.1)有
6. 2 Neyman - Pearson 基本引理
213
(1)存在性.设检验函数</>(幻由似然比A(x) 定义为
%e +=(x:A(%)>c), % e = (%:A (x) = c | , o, xeR~={a;;A(%)<c),
则对任意给定的0 <a<l,必存在c》0和0 P从❷o) :a.
1, 必(幻=ly,
(6. 2.2)
使E,o[</>(X)]=
(2) 最优性或充分性.满足(6. 2.2)式的</>(幻必为假设检验问题
(6. 2. 1)的最优势检验.
(3) 唯一性或必要性.以上(/)(幻在R+ UR'上为(6.2.1)的唯一的最
优势检验，即若</>*(%)也是(6.2.1)的最优势检验，则必有(x)= (/>(%)(a.e.),
xeZ?+U??-.并且，若 Ed|[<(J)] <1,则有 E,o[^*(X)]
证明(1)存在性.以下具体定出c与& 使E0o[(/)(X)] =«成 立.由定义可知，c与y应满足
氏(么)=E4(/)(X)] =PW)
=匕。(人(幻 > c) +y^^0(A(X) = c) = a.
设随机变量A(X)的分布函数为F(u),则上式相当于 A。[令(义)]=1 - F(c) +y[/?(c) - F(c -0)] =a,

即
(6.2.3)
F(c) =1 - a+ y[F(c) - F(c-O)]. 因此c就取为分布函数F(u)的(1 分位数，即0 =
由于似然比 A(x)多0,因而c =h_a>0.关于y,可分两种情况:若h_a为F(u)的连 续点，则有P3o(A(X)=c)=[F(c)-F(c-O)]=0,F(ul_a)=1-a,因 而(6.2.4)成立(y任意);若
A_a*F(u)的不连续点，则F(Ul_a)^l -
«,这时在(6.2.4)式中，可取c=u,_a,且y满足(见图6.2. 1)
_a) - (1 - a) 厂巧~ 0).
因此(6.2.4)式也成立，且有0 所以综合以上两种情况都有 E«O[0(I)] =«•
(2)最优性.要证:对任一心少a，即E&a(Z)]彡a，都有 Efll[小(X)] [;(X)].由于尺+
=jx:A(x) =f(x,6})/f(xt0o) >c | =
-cf(x,0o) >0 f，今考虑函数
4(x) = [(/)(«) - -cf(x,0^)]. (6. 2. 5)
(6. 2. 4)

当xeR+时有f(x，0、)-rf(x，0o) >0,又由(6.2.2)可知幻=1,因而
</>(%)
所以有 4(%)^0.类似地，当 x^R-时有fm <0, (f>(x)=0, (/>(x)-各(x)谷0;这时亦有A(x)^0.因而有
£ [</>(%) - $(x)] {.f(x,e{) -cf(x^0)]d/£(x) =£ A(x)d/z,(%)
L/(1)如(4)+]>(4)如(4)=h A(x)^(幻多0.
(6. 2. 6)
由此式可得
L [小(x) _多(义)1/(%，沒1)如(义)彡£^[(/>(义)-4>(x)]cf(x,Oo)d/x(x)
= c[E<?o</>(%) - Edo^>(X)] =c[a - J)]衾0. (6. 2. 7) 因此有E,i[(/>(X)]^E,>[^(X)].
(3)唯一性.要证:若(/)*(幻也是假设检验问题(6.2.1)的最优势 检验，则必有<(幻=</>(%), xeR+UR .首先，若(/>*(%)亦为最优势 检验，必有EW(X)>Efii</>(%)，反之亦有E<,i(/)(X)^Efl](/)*(X),因而 E、,[<ra)] =e~[必a)].而在第(2)部分的证明中，取在(4)(幻， 则上面所有的推导都成立，因而由(6. 2.6)式有
£[</)(又)-泠• “)] [/(x，R) -^/^，沒。)]d/x(龙)
[(/>(%) -4>* (x)] [f(x,0i) -cf(x9e0)]d/i(x) >0.
(6. 2. 8) 该式不等式不能成立，因为若不等式成立，则在(6.2.7)式中取多(1)=
< (幻有
幻](X)],这与Etfi[(/>*(X)]=E,J4)(X)]矛
 盾.因此(6. 2.8)式等式成立，即

因而有
I
+ U /?-
/ (x)
-(/(X，沒。)]如(%) =0.
-(/>*(%)]) -</(x,^0)] =0 (a.e.), xeR+ .
而在/?+u/r上，L/U，A)-</(%A)]参0，因此必有 (/>(x) - =0(a. e.), % e 7? + \J R~.
-(f)(x)(a.e.), x&R+\JR~.最后再证，若E0j(/>* (X) <1, 即 </>•(幻 =
则必有E,o</)* (X) =a.由于(6. 2.8)式等式成立，因此有E0^(X)-

EJ*(X)==c[EJ(J) -EJ* (X)], 由 (X)] =E,i[</)(X)]i 可得
(幻-EW (幻]=c_a_W (X)] =0. 其中c不可能为0，因为若c=0，则7?
+=jA(x)>c=0(=)>
0 i，由此可得
[(/>* (X)] =)d^(x)
=£+</>*(x)/(%,^!)d/.t(%)=£+1 •f(x,e})dfJL(X)=1.
这与假设 <1矛盾，因此40,从而(X)]=0, 即 E，n[<(X)] =a. |
注 (i)唯一性是指在xe/r u zr上，恒有(/>• (%)=小(%)，但 是在R°上不具有唯一性.即假设检验问题(6. 2. 1)可以有不同的最优 势检验，它们在尺°上可以不相等，但是在7TU7T上必须相等.另外， 在许多连续型分布的情形，#上测度为零，即/%。(7?°)=0,这时上 的值可以忽略不计，因而假设检验问题(6. 2. 1)有唯一的，非随机化的
最优势检验(见后面例题)
(、一 C1, =]x:A(x) >c I , .0, xe.R~ = |%:A(x) <c |
(2)关于零测集以及A“)取值为0或+ oo等特殊情况的说明.记 =1-^: Ax.Oj=0|, A}=|%: =0|,则A(幻的取值可以有
以下三种情形，这三种情形与N-P引理的结论都是一致的.
i) 若xe/1],但xe40,则有/(%, R) =0，/(%, <%)尹0，说明"|不 成立，Ho可能成立;而此时A(x)=0,因而xefA(x)>c;,则根据
N-P引理应该不否定7/。，这与上述结果相吻合.
ii) 若 xeX,,-但 xe40，即/(X，久)#0，/(龙，沒0) =0，因而% 不成

立， 可能成立;而此时A(x) = +«，因ffij I A(^) >c \ 则 根据N-P引理应该否定//。，这也与上述结果相吻合.
iii)若 ，%e ,则可取A(x) =0,因而xe.R =]A(x) >c | , 则根据N-P引理不否定仇，这也是可以接受的.
以下介绍N-P引理的若干重要推论.
推论1 对任意统计量T=T(X),定义函数</>(幻如下:
1, (b(x) = . y, .0,
T(x) >c, • T(x) =c,
T(x) <c,
则对任意给定的0<a<l，必存在和0彡1，使E.Jc/iCX)]=«. 在以上存在性的证明中，把A(幻换成7(%),则前面的一切推导都
成立.
推论2 若r = r(x)为充分统计量，目.r〜gG,0)，则上述定理中
的最优势检验可表示为
1, te R* - j£:A(z) >c | , </>(0=■y, tR°=(z:A(O=cj, .0, teR~=|^:A(0<c),
其中 A(1)二g(n)/gG,么)且 c, y 由 E,0[<Hn] 可表示为充分统计量的函数.
因为由因子分解定理可得
决定.即 A(x)
A, .) =g(心)，仫)九(%) _g(《,久) X f(x, 0a) g(t(x) f60)h(x) g(Mo)’
推论3 若似然比A(幻为某一个统计量7\幻的严增函数:A(x)= h(T(x))9 h(*)严增，则</>(幻可表示为
•1, %e7?+ =|%:r(x)>k},
必(工)=卜, xe/?° = \x:T(x) =k) , (6. 2.9)

0 , x e R~ = | %:7(%) < k j , 其中A:，7由 。[巾(r)]=a决定.
因为/?+ = (A (%) >c | 可表示为 R+ =) A(x) > c | = \ h(T(x)) > c j = \T(x) >k }，其中 k = h-l(c). | 定理6. 2.2 (无偏性)若</>(幻为假设检验问题 (6. 2. 1)的最优势
检验，则对 0 <a< 1 有 E,i[(/)(X)] 并且，若 f/(x,^0) # /(x，6\)! >0,则 E,i[0(X)J〉a.
证明 取$(x)sa，则^(%) e 0Q,因为Effo4)^a9因而由必o)的

最优性知 Eflf >E5i [J(X)] =a.另外，若M
#
>0,则以上不等式等号不成立，因为若有E,,[</)(%)] =a,
则由于E.J^(X)] =a,因而E。,[去(X)]多Ejc^X)]也成立，这说明
^(x)=a也是最优势检验.因此由唯一性有(/>(%)=^(%)=a, %e7?+
U/T.但是0 <a<l,而似幻在7T上为1,在/T上为0,都不等于
a，所以R+UR'只能是空集，因而尺°为全空间，即Rq=U:/(%^,)/
f(x,0o) =c }=._<:由此可得f{x，0') =cf(x，❹Q)，由于f(x，0\)和_/(%， 氏)都是密度函数，因此必有c=1,即7?°=^'=|x:/(x.Oj=/(x, a0)!，因此p. \f{x,eQ) =f(x,oi))=1,这与假设条件 !/(x,)#
/(x,^)}〉0矛盾，所以必有[冷(X)] >«. | 满足条件E{,i[(/)(X)]^a, 的检验常称为无偏检验.易见无 偏检验的第二类错误II(幻=1-E0i[0(X)]^l-a,这对一个好的检验
显然是很起码的要求(例如一个无偏检验，1(60在0.05,则其D(<9)^ 0. 95).本章第4节
主要讨论无偏检验.

6. 2. 2 Neyman - Pearson基本引理应用示例

以下举例说明，如何应用Neyman - Pearson基本引理解决假设检验 问题.同时，由这些例题的解决过程可知，N-P引理不但可以解决简单 假设检验问题，而且也可以用于解决若干复合假设检验问题.
，由定理6.2.1可知，求最优势检验，主要是确定c, y,使之满足 (6. 2.3)式，即
=/\(尺+) +y/\(/?°) =a, 0<a<l. (6.2.10) 如果A(X)为连续型分布，则问题化为求c,使尸」A(X)
> c J = a.

例6.2.1 设X:, ..., 从独立同分布，X. ~P(A),考虑假设检验
问题:
(i) H0:X =A0*-*//):A = Aj , 但 A, >A0; (ii) Ho:A= :A>Ao.
求(i)的 MPT, (ii)的 UMPT.
解 对于检验问题(i),其似然比讨表示为
A(x)
/(* Mo)

在A, >A0的前提下，A(幻为T(x) = 的(6. 2. 9)式有
的严增函数，因此由推论3
R+ = I A(x) >c |=\ T(x) >k |， 其中T{X) ~P(nA).根据N-P引理，要求fc, y,使之满足
PAo(/?+) +7PAo(7?°) =PAo(T>k) ” PAo(T = k) =a. 在^成立的条件下，T

~F(nA0)为离散型分布，可记其分布函数为 F0(u),它可表示为不完全厂函数(见第一章).
设其1 -a分位点为 人^，则有
1 -Foa)” [Fo(1) -Fo(k-O)] =«
Fo(1) =(1 -a) +y[F0(A) ~Fo(A-0)].
可取 k0 =Uj_a, y0 = [F0(u,_a) - (1 -a)]/[F0(u1_a) -F0(Ul_a -0)],
则假设检验问题(i)的MPT为
r 1， </>(^) =) To»
I 0，
，
T(x) >kQ，
T(x) =kQ， (6. 2. 11)
T(x) <k0.
可以证明，这个(/>(幻也是假设检验问题(H)的UMPT.事实上，由 (6.2.11)式可知，少(幻的取值仅与A。有关，与入，无关，因此对任意 的A. >A0, (/>(幻都是(1)的MPT.这表明，对任意的$(幻和A, >A0, 只要Ej(X)d都有E4/^(X)^EAi^(X).因此由定义6.1.6可知，
冷(幻就是假设检验问题(ii)的UMPT.
例6. 2.2 设岑，...，总独立同分布，X,
验问题水平为a(0 <a < 1)的MPT:
hq:o= :e=eif 但0O<i.
解分布族的密度函数和似然比为
X(1)多 0 I’jx(n)
' | 求以下假设检
,
.Z x
_/jof1i0<X(»〉 t
\ /110石龙(4)戎f’
0 ^ X(n.) ❷o,
沒0 <欠(《)《❷、， 其他.
1=1
注意，虽然%,有连续型分布，但是A(X)的分布为离散型，仅取值0,

e =(eo/0})n和+ 00三个值.以下求c和y，使
Efl0[(/>(X)] =Peo(X(X) >c) +yP,0(A(J) =c) =a. (6.2. 12)
以下证明:当0 <a<l时，c只能取A
(1) 若 c〉谷，则有/?+ = (A (%) > c >0 \ = | %:A (%) = +oo j = j x: x(n)e(^0,^]|,此时 P0O(R+) =0(因为此时 X, ~7?(0，氏)).R° = |A(%) =c | =空集，Peo(R°) =0,因此E❷冲(X) =0,不可能为a.
(2) 若c<為，则有R+=|A(x)>c|=)x:A(x)=6或+«}=lx: x(n)e[O,0j]|,因而P0q(R+)=1, E<?o<^(X)=1,也不可能为at.
因此，为使(6.2.12)式成立，只可能取c^O.这时 R+=!A(x)>c}=|A(x)>e|
=fA(%)=+ooI=|x: %(n)e(^0,^1J)•
尺° = |A(x) =》!=(%: %(n) e [O，0o] |， 此时，7%。(尺+)=0,Peo(R°)=1,代人(6.2.12)式有E,o[</>(jr)]=0+ y • 1 =«»所以y =a,由此可得最优势检验为
[I， a (%) >e^eQ <%(n)彡a ，

</>(x) = J a, A(%)=冷或 0彡%(4)冬沒0, |
b, A(x) 或 其他.
例6. 2. 3 设X} , ••- ,Xn独立同分布，X、~N(fjc，al)，d 已知.考 虑假设检验问题:
(i) Hotp,
(ii) Ho:弘 (iii) 付o:M彡
=^a,,但是yu，! >/x0; :M >Mo ;
>Mo.
根据N-P引理:(1)求(i)的MPT; (2)求(i)的功效函数氏(M)，并证
明它为A的增函数;(3)证明(i)的MPT就是(ii)的UMPT; (4)证明 (ii)的 UMPT 就是
(iii)的 UMPT.
解 (1)对于假设(检验问题(0,其似然比为
2 {^S (XtM1)2}
A(x)=
在A〉M。的前提条件下，A(幻为T=T(x) =£x,.=nx的严增函数，因 i=1
此有
eXP

A+=)A(x)>c)={%>A;|,
其中A由水平条件决定.根据(6.2.10)式，应求h 使
x > k, x<k
且有=«(注意匕。(又=幻=0).
々可由无的分布直接求
=a.
出,
由于,因此有
1,
令(%)
0,
I -从0 0-0
因而^T(A-^0)/a0等于标准正态分布少(%)的(1 -a)分位数z,_a,为
已知，因此有卜最后可得假设检验问题(i)的 MPT为
0(幻叫[1, x>kQ9 j . O-0 (6.2.13) x<k09 ^0 =Mo +~7^Z\-a'
yn
例如，若 =0. 05 , 则灸0 =弘0 + 1. 65 (a0/yfn');若 a = 0. 01,则
^0=Mo+2. 33(a0/^T). 其统计意义为:当样本均值X>k09即离M。较 远时，则否定
H0^=^Q1且水平条件a越小，么越大.
(2)根据定义，功效函数可表示为
氏(从)=EJ(/>(Z)] =Pm(!〉M , V/x. .由 X - , kQ + (a0/^/n)zi_a可得
+^/n芦o 一弘 fo
此处用到关系式1-少(幻=少(-%).由上式可知/3»为弘的增函 数，且有
<a, 若弘 <弘0,
=«, 若綷= , (6. 2. 15)
> a, 若弘〉弘0. 我们来看检验的第二类错误.由上式可知，Ac1 >fjL0时有氏(川)>
a,因而II(幻=1 -氏(/z,) <1 -«，这与定理6.2.2的结论一致.再看
(6. 2. 14)

一个更具体的数值结果，考虑=0—足=0.5,并设 a = l, n=25,则有 =(P(0. 85)-0. 802, H(ff) =1
0. 198.该值比0.05大，但还不算太大.另外，由(6. 2. 14)式可知，当 ^—>+oo或a—>+oo时有(/X)—>i,因而n(^)—>0,即n(沒)还是可以充
分小的.
(3) 可以证明，由(6. 2. 13)式确定的必(%)也是假设检验问题(ii)
的UMPT，这在例6.2. 1中已有类似的论述.事实上，由(6. 2. 13)式可 知，</>(幻的取值仅与/t()有关，与Mi无关，因此对任意的Mi〉M。,
EM
,
都是(i)的MPT.这表明，对任意的$(x)和 >Mo
/)(y) 小(幻就是假设检验问题(ii)的UMPT.
j(X)d 都有EM)(
(4) 以下证明，(/>(幻也是假设检验问题(出)的UMPT.根据定义 6.1.6,需要证明两点:第一，(/>(%)满足水平条件(6.1.4)，即E/x(/)(X)Ca, V/z^0,这可由(6.2. 15)得到;第二，</>(幻满足最优性条件(6.1.6),即
对任意的以及满足水平条件的每(幻都成立， 这在前面实际上已经证明过，若每(幻满足
E^(X)^a, 则也有
E^(X)^a9因此根据(3)，对任意的/t>/z0都有E^(A)^E^(X).所以 </>(x)也是(iii)的
UMPT. |
类似地，设孓，...，叉独立同分布，X'KfJL，〆)，d已知.我们 也可以求出以下假设检验问题的MPT以及UMPT(进一步的讨论见下 一节):
(1) (ii)
诉我们如何应用Neyman-Pearson基本引理来解决某些复合假设检验问题.
则有
(in)
"0:/x
:M=^\y 但是Ah<>。; :M <Mo;
:/±<^0. 以上例题中求解UMPT的方法具有一般性，可总结为以下引理，它告
引理6. 2.1
考虑以下假设检验问题:
:0 = 0\ , 但沒oe0o, g 01 ; ;
♦—H、:0& 0、.
(i) (ii) (iii)
h0 g
(1) 若</>(幻为(i)的MPT,但</>(%)与仏无关，则</>(幻为(ii)的 UMPT;
(2) 若(/>(幻为(ii)的UMPT,且又为(iii)的水平为a的检验，则 小(幻亦为(Hi)的
UMPT. ■
, 只要
因此由定义 6. 1.6 可知

6.3单调似然比分布族的单边检验
Neyman - Pearson基本引理是关于简单假设检验问题最优解的定理， 要用它来解决复合假设检验问题，必然受到诸多限制.本节主要讨论单 参数的单边假设检验问题，即假定

^eR1.然后逐步讨论 以 E假设检验问题:
(i) u = — =o',但 >^0; (ii) :0>80;
(iii) *-*//! >8{).
假设检验问题(iii)是比较常见的情形,通常称为单边假设检验问 题,我们的最终目标是要得到它的UMPT,其解决方法与前一节的例题 很类似,但是在分布族等方面有一定的推广,所以首先介绍单调似然比 分布族.
6. 3.1 单调似然比分布族单边检验的UMPT
定义6.3.1设X-f(Xj0), ^eR1为单参数,若
(1)当 IJL)#/(x,^2)I >0; (2)当e、>6.时,似然比
单调似然比分布族,简称为MLR分布族. ■
注 以上定义的特点是只要求A(d为7(幻的非减函数,不一定是 严增函数(在定理6. 2. 1的推论3中要求A(幻为7(幻的严增函数),因 而MLR包含的分布族更广泛一些,见下面例6. 3. 3.
例6.3.1设叉=(弋, ..., 叉)T,其分量独立同分布,若久服从 6(1, 0)或/V(0,(r2)或P(1) ,则它们都是MLR分布族.
解以两点分布为例,
x-f(xye) = pj ^(1 -0)n~T, T^\Xi. «=l frl
当A >0o时,似然比为
= h (T (x) 这是r(幻的增函数,因此为MLR分布族,其他类似,从略.
f(x .0.) /(了❷
A(X) = 为T=l\x)的非减函数,则称分布族,6>e0 |关于T=T(x)为
r (x) ;沒0,沒1)
6.3单调似然比分布族的单边检验
223
例6. 3.2指数族分布.设 (4)T(4)-b(4),其中 <2(幻为0的增函数,则为MLR分布族.
解当A>Oo时,似然比为
A(%) =*$~~4 = exP {[0(^i) -Q(Oo)~\T(x) - [6(氏)-6(0。)]} (Oi >OqY 八 x , 0 0)
这是H 幻的增函数,因此为MLR分布族.
例6.3.3 设x=(y.,--,xjT,其分量独立同分布,4~/?(0,沒),
沒〉0,则X的分布关于r(x) =x(n)为MLR分布族. 解 当 >6.时,其分布密度和似然比分别为
f(x9e)=去/ i太(1)彡0 \i U(n) U
7U(8)矣汐1I 1 \x(n)譪)
| ;
I
其中
引理6. 3.1
对于MLR分布族
u(x卜门~从LJ1, 0~从 ((4)卜(4)(4)卞。0,
,
而A(幻为U(x(n))的严增函数(一次函数),而且U(x{n))为乂n)的非减 函数,因此A(幻为%(n)的非减函数,所以X 的分布关于T(x) =x(n)为 MLR分布族. ■
以下针对MLR分布族逐步求解假设检验问题(i) — (iii)的 MPT和 UMPT.
</>* (%) y,

定义函数(x)如下: 1, Hx) >^,
T{x) =k, o, T(x) <k.
(6. 3. 1)
则对任意给定的0 <a<l，必存在A:和7，使E.Jc/j* (J)] =«.
证明 这就是定理6. 2. 1的推论1具体应用到MLR分布族的H%).
以下将证明，上述引理6.3. 1中的(/>* (幻即为假设检验问题(i)的 MPT和(ii)的UMPT.
为此，我们首先从直观上说明MLR分布族与 N-P引理之间的联系.
易见，若A(x) =h(T(x))为T(幻的严增函数，则由定理6.2.1的 推论3直接可知，小*(幻即为假设检验问题(i)的MPT,且有\T(x) > I = !A(x) =h(T(x)) >h(k) c (.如果A(7(x))为 TV)的非减函 数(这是MLR分布族的特点)，这时情况要复杂一点.恒是有以下关系

(见图 6. 3.1):
\ T(x) > k | 3 (A (%) - h(T(x)) > h(k) = c } -±- R+. (6. 3. 2)
同理也有
(T(x) < k J 3 { A (%) = h(T(x)) < h(k) = c j R ~.
因此，由引理6.3. 1确定的<//(%)与由N-P引理确定的最优势检验
必(幻相比，它们可能在/?+与 7T上 取相同的值，因此由唯-性可知
(幻也是假设检验问题(i)的 MPT.以下给出严格证明.
定理 6.3.1 设 X ~
0eR' |为关于T=m)的MLR分布 族，则由(6.3.1)式确定的</>* (x)为假 设检验问题(1)的MPT, (ii)的UMPT.
证明 在(幻中取h(k) =e,
则由于 WO为非减函数可知(见 图 6. 3. 1)
A(x)=/i(7Xx))
c^h(k)
O
图6. 3. 1 单调似然比分布族 \xzT(x)>k|=jx;T(a;)>k,A(x)>c}
U{x:7(>k,X(x)=c|
同理
\x:T(x)<k) =(x:T(x)<攵，A(x)<cIU|%:7(x)<k,X(x)=c).
因而可重新表示为
1, 0* (x)= 7,
0, .0,
该式可进一步表示为与N-P引理相吻合的形式:
</>* (x) 其中y* (幻为一分段函数 •y* O)=
1,
T(x) >k、 A(%) >c, T(x) >k, A(x)
T(x) =女, A(x) =c, T{x) <ky A (%) =c, T(x) <k, A(x) <c.
y,
A(x) > c,
■ 1,
7*(^), A(%) =c,
,0, A(%) <c,
T(x) >k, A(x) = c,
(6.3.3)
T(x) =k, A(x) =c, .0, T(x) <k, A(x) = c.

因此，由(6.3.3)式定义的(/>* (x)符合N-P引理中最优势检验的条件 (见(6.2.2)式)，且有E,o[^*(X)] =«,由唯一性可知<//(幻亦为假

设检验问题(i)的MPT.又由于小，(x)与4 无关，因而由引理6.2.1可
知，(T(x)也是(ii)的 UMPT. I
推论 任给沒'，设E:,[(T(幻]=«'，则(幻为以下检验(O'水 平为(/的MPT,检验(ii)'水平为(/的UMPT.
(i)' Hf):e=o,—Hl:e=e[1但
(ii)' H():0= >O'. I 这个推论显然是成立的，因为只需把前面的氏看成V 即可.但是从观念上来看，这一结果还是有新意的.在前面的讨论中，水平a 往往 与第一类错误联系在一起，通常要求很小.但是从数学推导上来看，对 a并无此要求，只要满足0<a< 1即可.这将给今后的数学推导带来较 多的方便.我们后面将根据需要取甚至a' = l - a等不同的值.
下面我们要继续证明， (幻也是单边假设检验问题(iii)的 UMPT.为此首先要求出(x)的功效函数，其思路与前一节的例
6.2.3十分类似.
定理6.3.2 设为(6.3.1)式确定的检验，其功效函数记为
(/
(9) =EJ
(1) /T(a)为0的非减函数，且在!沒:0 <々•($) <1 | 上为0的严
增函数;
(2) (1) 为假设检验问题(iii)的UMPT.
证明(】)今证明，对任意的H 有/T(R)彡(么)，即 E.J(/>*(^)]^E.2[(/)*(X)],为此考虑以下假设检验问题:
(1) " = i :^ = , 但 > 0'.
记 (X)] =a.,则由定理6.3. 1的推论可知，(/)* (x)为检验 (i)"的水平为%的MPT.再由定理6. 2.2关于MPT的无偏性可知
则有
(X)] =E^[(/>* (X)],
(A)(么 >仏).另外，根据MLR分布族的定义，当
即(么) 时有#/(x,^2)}>o,因此由无偏性定理可知，若o<
%=冷*(仏)<1，则必有E,2W(X)]>ai，即/T(沒)为a的严增函数. (2) 定理6.3. 1已经证明，</)*(X)是假设检验问题(ii)的UMPT，根据引理6.2. 1，只要证明为假设检验问题(iii)的水平为a的检 验即可，即要证明0彡60时[(/>*(;V)]石a.由于(0)为6>的非减函数，因此0^0.时，冷* (60矣冷* (6>0) =a，即❷彡❷Q时
所以</>*(%)为(iii)的水平为a的检验，因而由引理6. 2. 1可知</>* (x) 为(iii)的UMPT. |
 例6.3.4设孓，...，夂独立同分布，X, ~/?(0,6>), 0〉0，求以下
6. 3. 2 可知以上假设检验问题的UMPT为
假设检验问题的UMPT及其功效函数
解 由例6.3.3可知，分布族关于T = X(n)为 MLR，所以由定理
1， (n)〉炎， 0， 心 <友， 其中A:由E，。[小*(X)]=a决定.注意
所以&应满足
X(n)〜彡y^0o|,

=P,0(X(n)>k)=广^
飨*(X)=
:
o—Hl:0>0o.
由此可得k =.e0 k0. 其功效函数为
氐.(4) =EJK(I)] :P人X、„、>k0) = -(令)”(1 —a).
易见功效函数K0)是0的增函数. I 例6.3.5设 ...，Xn独立同分布， 指数分布r(l/0, l), <9>0.
(1) 求假设检验问题h0批❷d ..e>e。的umpt;
(2) 若仅观察到前r个样本:X(1) x{2)... (7)，由此求上述假 设检验问题的UMPT;
(3) 某电子元件的寿命服从指数分布r(i/6>,i),要求其平均寿命 不小于1000h.在10个样本中，仅观察到其中前6个元件的寿命分别 为896,950，1005，1100,1150，1220(单位为h).问这批元件是否 合格(取a=0. 05)?
解 (1) X:，...，X。的联合分布为
f(Xl6) =^exp{--i-T(^)}/U(1)>0 (, T(x) = g x‘.
n
分布族关于r=ZuMLR，所以由定理6.3.2可知以上假设检验问 i=1
题的UMPT为
1, T〉k， 0， T<k，
其中&由 Ej(T(X)]=a决定，而T-r(l/e.n)或277沒12(270.因 此有
</>* (^)=
6.3单调似然比分布族的单边检验
227
P❷ST〉k) =Pd0
=a.
❷0 ^0 由此可得2k/=^2(2^,1-a), k0=y^oX2(2^»i-«)•
(2)由第一章的公式可知，X(1)^X(2)...<X、r、的联合分布为
n! 1 | (，-D!，xp|
其中 = y + (n - r) jr(r). 分布族关于 T = Tnr(x)为 MLR,
因此检验的UMPT仍然如(1)中</>•(%)所示，而&由r=Tnr = r
+(«-r)X(r>〜r(l/a，r)决定.这时以上定解条件应改为
i=1
且有 2k/00 =zY2(2r,l - a)，kQ =y-^0X - «)•
(3)该问题是要根据(2)的结果来检验Ho:0^1000-7/1:0> 1 000,其中=1 000, n=10, r=6.今取a=0.05,根据给定的6个 数据，经直接计算可得 Tn r = 11 201, 2Tlt<r/0o = 22.402,而 /(12,
0.95) = 21.026,即 2Tnr/Oo > (12,0. 95). 因此应该否定好。:汐冬 1 000,即认为H},0> \ 000成立，所以这批元件是合格的(a =0. 05).曜
例6.3.6设X,,...,Xn独立同分布，1~两点分布6(1,?).
(1) 求假设检验问题Ho:P<Po-H、:P〉Po的UMPT及其近似正态 否定域;
(2) 某技工以往的生产记录是:他加工的零件一般有60%为一等 品.在晋级考核中，在他加工的零件中随机抽取100个有69个一等品. 在水平为a =0. 05和0.01的条件下检验:该技工的加工技术是否有显 著提高?
n
解(1)分布族关于为MLR,因此以上假设检验问题 i=1
的 UMPT为

fl, T>k, (x) = I10, T<k,
其中左由 = P^(T > k) = a 决定，而当 p =pQ 时 T ~ b(n, Po)–由第一章的公式可知

"。(%) =,一_!1 斤(0, 1), o
其中9o = I –Po–由于%(幻为r的严增函数，因此否定域可表示为 R+ = \UQ(x) >c | ,
而 c 由 p/)o(t/o(%) >c) =a 决定.根据 i;。(幻的渐 近止态性，可取C = cfl
=^_„.因此检验问题的近似正态否定域为7?+ =
I (1)>4–。!. (2)该问题是要根据(1)的结果来检验Ho:P=O.6—H} :p>0.6.
由于n = 100 比较大，可应用近似正态否定域.这时po. = 0.6, 9。=0.4,
7 = 69，可得 UQ(x) =(69 –100 – 0.6)/7100 • 0. 6 • 0. 4 = 1.837.当水 平 a=0. 05时，、95 =1.65 <%(%) = 1.837，因此应否定原假设，即认 为该技丁.的加T.技术有显著提高.但是，若取水平a =0.01,则有 z0.99 =2.326 >{/0(x) = 1.837,不能否定原假设，即不能认为该技工的 加丁.技术有显著提高.这两种结论的差别显然是由于水平条件a 的改 变而引起的，取水平为a=0.01,就意味着要求有更充分的证据作判断 (即判错的概率更小).这时，该技工加工100个零件中有69个一等 品，还不足以证明他的加工技术有显著提高. ■
关于单:边假设检验问题，很自然地要考虑与检验(川)相对应的另
–种形式 路和方法与(iii)十分类似，不再重复，以下仅简述其大意与结果.
即下面的(iii)'.求解其UMPT的思
与检验(iii)类似，我们可考虑以下假设检验问题及其MPT和 UMPT:
(i)' HQ:❷=0。—H、=❷、 但0\<❷“ (ii) ' <0n;
(iii) ' :6 <0q.
对于检验(i)'，根据N–P引理，其MPT的否定域为
_f(x,❷J "J = A(%)
由于氐〉4，根据MLR的定义6.3. 1有
❷1 <❷n.
=
其中h(T(x))为T(x)的非减函数，因而A (戈)=h~l (x)为TO)的非增 函数，所以有
7T=U(x)>c} =|[h(T(x))–\~}>c(CiTV)<k). 该式与(6.3.2)式十分类似，我们可进一步证明，假设检验问题(i)'—
A(x)
'/(x,)' /(无，沒I).
t(x) ,ei
，沒0)]

(iii)'的MPT和UMPT的否定域具有尺+ = ! T(x) <k (的形式.最后可. 得到与定理6. 3. 2 相平行的结果如下:
定理6. 3.3 在定理6.3. 1的假设下，以下(6.3.4)式确定的 为假设检验问题(i)'的MPT，为(ii)'和(iii)'的UMPT:
3, T(x) <k,
= < y» r(x)=k, (6.3.4) [o, T(X) >k,
其中左和7由] =a决定，而且相应的功效函数pf(e)为沒的 减函数. I 注意，单边假设检验问题(iii)和(iii)'的UMPT的功效函数都是单

调的，这是一个重要特点．由于指数族分布包含了许多常见的分布，同时又是我们下面讨论双
边检验的基本分布族，因此把指数族分布单边检验的结果归纳如下：定理6.3.4设 X=(X,，...，服从指数族分布=h(x)•
(8)，其中^eR1，(>((1)为0的严增函数，则假设检验问题(iii) 的UMPT为(6.3.1)式的(x),假设检验问题(iii)'的UMPT为 (6. 3. 4)式的 |
最后再证明一个关于单边假设检验的常用性质.
定理6. 3.5设办* (x)为假设检验问题(iii)的UMPT,如(6.3. 1) 式所示;又设$(x)为任一满足Edo[^(X)] =«的检验，则有
(J)] , \f0^eo. (6. 3.5) (本定理的意义为:(r (%)的功效函数在oQ右面最大，在oo左面最小(如
图6.3.2所示)，即其1(幻和n(幻都是最小.) 证明以下证明采用假设检验问
题中常用的一种方法，这在定理 6.3. 1的推论后面曾经提到过.考虑
假设检验问题
(i)' HQ:O=eo—Hi:0=O^ 但
1
< 6>0—今定义一个检验</>** (%)= (幻 , 它可表示为
fl, T(x) <k, (/)**(%) = j 1 - y, T(x) =k,
lo, r(x)>k 图6.3.2单边检验UMPT的功效函数
230 第六章参数假设检验
且有E.J(/>*7X)]=E&[1 (幻]=1 因此f(X)为(i)'的水平为
1—a的检验又由于O)具有定理6.3.3中(6.14)式的形式，因此它是 (i)'的水平为1 —a的MPT.另外，由趴幻的假设可知，Ejl-i(JV)] = 1 —a,因此1 -(/>(%)也是(i)'的水平为1—a的检验，因而有
Ej(/)"(X)]>Efli[l —圣(7)]. 由 EJ(/)"(X)] =E&[1 ~,(X)]即可得到
(/
EJ
以上结果对任何0} <0.成立，因此(6.3.5)式成立：■
6. 3.2 正态分布单参数的单边检验
以上定理可用于正态分布的假设检验.因此对于正态分布，其单参 数的单边假设检验问题都可以得到解决.设 ...， 独立同分布，且 J, ~/V(At，a2)，则有
(1) 若～ 已知，对于以下假设检验问题:
"0 科。一 "I 〉M。 或 好。 多M。一打I <科0, 由于分布族关于T =X为MLR，且X ~/V(M,(To/n), 因此由(6.3. 1)式 和(6.3.4)式可得到相应的UMPT.
(2) 若M已知(不妨设^=0),对于以下假设检验问题:
H0:a^aQ—Hl:a>a0 或 Ho
由于分布族关于『= n为 MLR,且T/a2 <=I
式和(6.3.4)式也可得到相应的UMPT.
例 6. 3. 7 设 X} , ,Xn 独立同分布， ~ (1)求假设检验问题Ho屮^—H':/z>Ao的UMPT; (2)今设弋表示某种砖的抗断强度，要求大于30N/cm2.今对一
批砖测得6 个样品的强度分别为32.56，29. 66 , 31.64，30. 00, 31. 87, 31.03.问这批砖是否合格?其中已知d=1.21，并取a =0.05.
解 (1)容易验证，相应的分布族关于T=X为MLR，因此由定理 6.3.2可知，以上检验的UMPT具有(6. 3. 1)式给定的形式，即
fl ,

小(x) =L 0 ,
又由例6.2.3可知，当心=/1。+ (～/人)21_。时有Emo[(/)'(X)] =«.在 应用中，以上
<#>* (x)常表示为
x>kQt
-
.
x < k0.
❷' <e0.
;a<aQ, 因此由(6.3.1)
4 已知.

1,
0, (2)这相当于考虑以下单边假设检验问题:H0^^3Q—Hr^>
30,其UMPT由(1)给出.这时托=6,弘0=30, o-o=1.21, a=0.05, =^0.95 =1-65.根据
以上测得的样本值可计算出X=%=31.03,代人 (6.3.6)式可得U(x)=76(31.03-30)/
=2.294(亦可得到k0=
30 + (/1721776)- 1.65 =30.74).由于 U(x) =2.294 >z095 =1.65,所
以应否定原假设Ho;m^3O,认为Hx :/i > 30成立，即这批砖合格.注
意，检验设定的水平为a =0.05;而本次检验的p-值为PMo(X > 31.03) =P^(U(X)
>2.294)^0.011,即本次判断出错的概率《0.011， 比a=0.05/b.另外，在假设检验中，
我们把“砖的抗断强度大于
30N/cm2” 放在对立假设ff、上，以保证判断出错的概率(即第一类错 误)很小，这是很有
必要的. |
例6.3.8 设X,, ..., 々独立同分布，孓～7V(O, a2).求假设检验 问题
H0:a^a^H]:a<a()的UMPT及其功效函数.
解当ax>a0时，似然比为
因此相应的分布族关于7= 为MLR,所以由定理6.3.3可知以上 1=1
t/(x) <Zj
U(x)
/—X ~LLn
------- (6.3.6)
fo
假设检验问题的UMPT为
^ (x)={o
T(x) >kt
其中A:由Eajw(又)]=a决定.由于T/al =
*=1
' P.0(T<k) =Pao(T/^<^) =a.
因此
由此可得 Ayd =^2(^,«) : A: =d;v2(7i, a) ▲ 々0. 灸0 代人以上 </>'(%)即
得UMPT.其功效函数为
人, (a) =EJ(/)'(X)] =Pa(T<k0) =Pa(T/a2 <k0/a2) =P l^2(n) < (ao/
cr2)^2(n,a)).
易见功效函数/3^(a)是 a 的减函数. |

6.4单参数指数族分布的双边检验

上一节我们从简单假设检验的MPT出发，对于单调似然比分布族， 得到了两种单边假设检验问题的UMPT．本节将继续讨论双边假设检验 问题的UMPT．由下面的讨论可知，双边检验要比单边检验复杂得多， 必须对分布族和检验函数进一步加以限制．本节主要讨论指数族分布和无偏检验的一致最优势检验．

6．4．1 双边检验问题及无偏检验

0eR3,考虑以下双边假设检验问题： 设(i) 或 杉❷d <e<o2;

(ii) 《❷彡ed:<9<久或<9>么;

(iii) "0:沒=沒孖I:❷尹00． 注意，检验(iii)是(ii)的特例，因为在(ii)中取6}
= 02则得到 (iii)．另外，检验(ii)和(川)的是无界的，因而更加复杂．

为了求解这些假设检验问题的一致最优势检验，我们首先考察其功 效函数/3(0)的变化趋势．设检验</>(幻的功效函数为久(0)． —个好的 检验，其功效函数应该在6>0上满足=E,[</>(X)]^a,6^0．, 而在蚌上应尽量大．图6．4．1给出了检验问题(i)—(iii)的功效函数的 示意图，前者应该是“两头小中间大” 而后者应该是“中间小两头大”． 总之，它们的UMPT的功效函数不可能是0 的单调函数．特别，在上一 节得到的单边检验的
UMPT,BP(6.3.1)式的(x)以及(6.3.4)式的
4>r(x)都不可能是本节双边检验的UMPT,因为(/>* (x)的功效函数为增 函数，小'(幻的功效函数为减函数，它们不可能有图6．4．1 所示的
形式． 为了求解以上双边假设检验问题的UMPT，需要对检验函数进一步
加以限制．由图6.4．1可见，若</>(*)是一个好的检验，则其功效辱数 在蛇上的值应该尽量大，显然应该大于a．由此可引出以下定义:’

定义6．4．1 无偏检验和一致最优无偏检验．对于假设检验问题 "❶ :沒e e ,
若
则称必(幻为假设检验问题一个水平为a 的无偏检验，并记
=Ej(/)(X)]^a, ^e0o, /3小(8)=Ej(/)(X)]

少:=i一切</>: EJ^>(J)] 00; EJ(/>(X)]^a,6>e |.
(6.4．1) 则称A:为假设检验问题水平为a的无偏检验类．若(/>(%) e0;,且对
一切 6 0:有
则称</>(幻为一致最优无偏检验，记为UMPUT． | 无偏检验的意义很清楚，其第二类错误满足n(0) =1 —人(的矣
1 —a．另外，显然有 少二C少„=j一切小:[小(X)]在《，沒e6>0 (．

现在来看双边假设检验问题(i)—(iii)的无偏检验的功效函数(见 图6.4.2)．由无偏检验的定义可知，对于检验问题(i)和(ii),若功效 函数扒幻关于0连续，则有
冷(沒1) =%[(/)(幻]=E,2[(/)(X)] =/3(02) =a． 对于检验问题(iii),若功效函数冷(19)关于<9连续且可导，则有
冷(沒。)=EJ</)(J)] =a,冷'(氏)=0． 这些性质对于下一节讨论的指数族分布的无偏检验都是成立的．
(6．4.2) (6.4.3)

6.4.2 指数族分布的双边检验 由于双边假设检验问题的复杂性，目前只能在指数族分布中得到一

图6.4.2 (i) —(hi)无偏检验的功效函数

致最优势检验．因此本节仅限于讨论指数族分布，即假定 =a(0)h(x)eQ(0)T{x) , ^gR1,

(6.4.4)
其中Q(❷)为 6的严增函数.并讨论该分布族的双边假设检验问题(i)一 (iii)(见本节开头).
设令(幻为一个检验函数，通常总假定它可测，因而由第一章的定 理可知，其功效函数
3(0) = EJ(/)(X)] = £ (|>(%)/(x,^)d^(x)
关于<9连续可导.因此对于无偏检验</)(%) e 0;,以上(6.4.2)式对检 验问题(i)和(ii)成立;(6.4. 3)式对检验问题(iii)成立.
本节将证明，对于双边检验(i)，存在一致最优势检验(UMPT); 而对于双边检验(ii)和(iii)，只存在一致最优无偏检验(UMPUT).虽 然证明比较复杂，但是解决问题的过程与第3 节的单边检验还是比较类 似的.今简要说明如下:在第3 节中，为了求解单边检验
“ H0:3^
eo—Hi:6>0oft的UMPT,首先考虑简单假设检验= =6,但么>0:的MPT,这可由N-P引理得到;然后再逐步推广，得 到单边检验的UMPT.对于本节讨论的双边检验，应该也可以有类似的过程.以第(i)个双边检验为例:为了求解双边检验 或沒為
K
的umpt
, 首先考虑一个与之有关而最简单的

检验:
(i)' ^e =e2—H} :o=e3,但 ex<e3<e2 (6.4.5)
事实证明，对于指数族分布这是可行的，我们可先求出(i)'的MPT,然 后再逐步推广，得到双边检验(i)的UMPT.但是必须注意，求解(i)'的 MPT并不简单，与 N-P引理中的两点简单假设相比，它的零假设7/。中 多了一个条件，这就要把N-P引理加以推广.所以我们必须首先介绍 推广的Neyman - Pearson引理.另外，由于后面有好几处要用到推广的 N-P引理，因此下面将采用较为一般的形式，读者可从中比较N-P引理 与推广的N-P引理之间的异同，从而更深人地了解其意义.
定理6.4.1 (推广的Neyman-Pearson引理)设/(x)， i=1 2， 3 关于可积，0彡(/>(*)彡1， 1 ,并记
中a=卜切</>:^(l>(x)fi(x)djLL(x)^aifi=1,2j, (6.4.6)
少:={一切必:文)/(幻如(x)=%，i=l,2J. (6.4.7)
今定义一个检验函数冷(幻如下:
fl, Xe7?+ =)x: f3(x) >clf}(x) +C2f2(x)>),
(/>(%)=卜 %e7?° = |x: f3(x) =clfl(x) +0^(%) (, (6. 4. 8) lo,
xeR~=(%: f3(x)<cxf1(x)+^(^)(.
(1) 若存在常数q，c2(不一定多0)及y，使得</>(x) e 0;,则对 一切每(1)e少:，即
^(%)/(x)d^t(x)=a(, i=1，2,有
(f>(x)f3(x)dp(x)彡 l^4>(x)f3(x)d/j,(x). (6. 4. 9)
(2) 若存在常数C1^0,么>0及7，使得4>(x) e 0;,则对一切 5>(^)e0Q,即
f^4>(x)fi(x)d/i(x) i=l9 2,有(6.4.9)式成立.
而且，以上(1)和(2)中的</)(x)在R+ UR~上都唯一. 证明证明方法与N-P引理完全类似，记
4(%)=[(/>(%)-石(%)][/;(幻 -cj2(x)], 由(6.4.8)式0(幻的定义可知，在7TU/T上，A(x)^0,所以有
£ [小(幻—^(x)] —cj{{x) —c^Cx)]d^(x)

= f A(x)dfc(x) = f 4(%)d^Lt(x) >0. •/乂 JR^ UR-
因而有

由此可得
f ^>(x)/;(x)dyct(x)> f 每(X)人(X)如(X) +余项, (6.4. 10)
其中余项为上式后两个积分之和.对于情形(1)，由于</>(x) e 0;, 4>(X)E 中、， 因此有
所以余项等于零，因此由(6. 4. 10)式可知(6. 4.9)式成立.对于情形 (2)，由于Cj>0, c2>0,且^>(%)c(Pa,则
</>(x)/(x)d/i(x) =«•, 4)(x)fi(x)d/jL(x) , i = l, 2.
因而余项為0,亦可推出(6.4.9)式.唯一性的证明与N-P引理的证明 完全类似，不再重复.
■ 注 最常用的情形为/(%)=/(x;(?.),i=l,2,3,这时A+=|%: /(x;^3) >Cl/(x;^) +e/(%;^2)|.特别，若y;(幻不存在，则 /?+ = jx:
/(x;^3)>c2f(x;e2)!,即可得到n-p 引理.另外，在0a和少:中经常 有 at =a,0<a<l, i = l, 2. ■ 现在回到假设检验问题(i)'(见(6.4.5)式)，其最优检验可由推广 的N-P引理得到.
引理6. 4.1对于指数族分布(6.4.4)， 考虑假设检验问题(i)' Ho:6>=R 或<9=么一7/1:沒=沒3，但 <03 <029 并设0<a<l.设检验 函数<#>.(%)可表示为
0, 若存在 yiX^=h2),使
k、< T(x) < k2,
T(x) =ki(i = 1,2), T(x) < 么或 T(x) >k2.
(6. 4. 11)
即 =E,2[(^1(X)] =a, 则(t>i (x)为假设检验问题(i)'的MPT,即对一切满足E，3 (^)
每(I) 的每(太)(即4)(x)g 0a)都有
E.3[</>1(^)] , 6. <03<02f (6. 4. 12)
并且屯(幻在TTu/r上唯一.
证明 对于指数族分布f(x，0) 的h(x)e_T(4)，记 =/(x, 60, i=h 2, 3.设企'(x)由推广的N-P引理的(6.4.8)式所定义，若

存在c,^0, c2^0,使</>,(x)e 即 [(^!(X)] =a, 则由推广的N-P引理的结论(2)可知，(/>!(%)必使(6.4.12)式成立(见 (6.4.9)式).以下根据(6. 4.8)式考虑其/? +可能的形式，其中
R+ = \x: f(x,03) >c/(X,ex) +Cjf(%，沒2) f
=(%: a(h)e_)r(4)SqaWJeM〉7■(7)+c2a(6>2)戶2)r(*)}.
由于ex <e.<e2.因此(2(<91) <QCo3) <Q(e2),在/?+中用 a(^)eo(.3)r(«)除各式，可得
R+=|x: T{x)=t,g(0=(ije~61t+d2eb2t<1), (6.4.13) 其中 dx)a~*(^3)> d2 =c2a(^2)a_1(^3)，-bx =^(^) -Q(^3) <0, b2=Q(62)-<?(6>3)>0,且有
6,>0,b2〉0.
“
1),在(6.4.13)中，只可能 d2^0(不全为0)，即c)0,c2^0
为了能使 e少
即 =a(0<a<

(不全为0)，其原因如下:
(1) 若d{^0, d2^0,贝|惟有g(1)<1，所以R+ =又，从而<Mx)=l，
^e/?+ =JF,因此只可能有 =E,2[(/)1(X)] =a = l,这与假 设0 <a < 1矛盾.
(2) 若d} >0, d2 <0 <0,</2 >0的情形类似，从略)，则有 gr(t) = - bldle~t>lt + b2d2eb2t <0.
因此g(O为£的减函数，则由(6. 4. 13)式有R+ = < 1 I = |x: T(x)> |对某个A.因此由定理6.3.2可知，相应的功效函数 =人(60为0的严增函数，所以不可能有E0i [(/>.(X)]=
么、(❷i) =^<t>| (^2) = (%)] = a < 1, <02- “ 即 结合以上(1)、(2)两点可知，为使屯(幻e少
= <?2[飧I (尢)]=a，只可能 < 彡0，</2彡0(不全为0)，即c, ^0, c2^0
e (不全为0),因此
 =
~bxt + b^d^' >0.
g"(尢) 所以gU)为凸函数.由此可根据 (6. 4. 13)式进一步确定7T的形式. 图6.4.3为凸函数的示意图，由图可
知，应存在久<k”
尺* = jx: T(x) =t，g(0 <1 |
=\x: kx <T(x) <k2).
(6.4. 14) 如果解出kx，k2f则上式等价于
使得
 238
第六章参数假设检验
(6.4.8)式中的7T,且使(6.4.7)式成立. 综合以上讨论可知，对于指数族分布，若要使(6.4.8)式确定的/T 满
(/即
(6. 4.14)式，因而</>,(%)必有(6.4.11)式的形式.至于<，yh(i = l,2)的具 体数值，仍然要由=E,2[</>.(X)] 决定.解出夂，yh. G = l，2)以后，则由推广的N-P引理的结论(2)可知，对任何0(x) G0a, 即E,([^(X)]^a,E，2[每(X)]彡a,必有(6.4.12)式成立. |
由于以上(6. 4. 11)式的(/>,(x)与 03无关，因而(6. 4. 12)式对任何 的 <^3<02都成立，所以有
足(6.4.7)式:
=E,J(/)1(X)] =a,则它等价于
推论<#>!(%)为以下假设检验问题(i)"的UMPT
❷ 我们的目标是要求出假设检验问题(i)的UMPT,现在已经知道
么(幻为(i)"的UMPT,下面还需要证明: 为(i)的水平为a 的检 验，即有EJ屯(X)]^a,
0<ei^te>621则根据引理6.2.1可知，. 屯(*)为(i)的UMPT.为此，我们还需要下面的引理6.4.2.另外，这 个引理在求解假设检验问题(ii)的UMPUT中将起重要作用.
引理6.4.2对于指数族分布(6. 4.4),考虑假设检验问题
(ii)' 或e= 但氏<❷人或"1:沒=氏但❷5>02).
(i) " = 或 G =
< ❷ <Q2.
|
设检验函数</>2(x)可表示为
r(x)<k、或 r(x)>k2.

小2(欠)= y2i， 7(%)=ki(i=1,2), o, kx <T(x) <k2.
若存在乂，y2i(Z=1，2)使</>2(x)g 0“ 0<a<1，即
(6.4. 15)
[</>2(X)]=
E如尤)]= 则对一切满足 [^2(X)]=E92[_4>2(X)]=a的丕(x) (即去(x)e0'J都有
E.4[^(^)>E,4[5>(^)], v氏〈氏(或E,5[(/>2(X)]>Efl5[^(X)],V^ >氏),
(6.4.16)
并且</)2(x)在R+ U/T上唯一.
证明 以下仅证明“Hl:e = 04但氏 <久” 的情形，另一种情形
“%:0 =么但^ >V 的证明完全类似.记Z(x)=/(x，氏)，i = l, 2; 人(幻=/(心氏).设
(/>2(x)由推广的N-P引理的(6.4.8)式所定义，若
“
推广的N-P引理的结论(1)可知，(/>2 (x)必使(6. 4. 16)式成立(见
存在 q，c2,使(M 幻 e 少
,J^2(X)] =«,则由
即 =E
(6. 4.9)式).以下根据(6.4.8)式考虑其ZT可能的形式，其中
<
:

R+ = \x: f(x,04) >Cj/(x，氏)+ x,02) |
=(x: a(么)e_x) >cia(0l)eQWT(x) c2a(^2)eQ(^)T(x)}.
由于 <e' <02, 因此(2(^) <QCoj <Q(e2). • 以下证明，为使(l>2(x) w a，即
E^.[(/)2(X)] =a(i = 1,2),必有
Ci>0, c2<0.
(1) 若CO, c2^0,则R+ =^, EJ(/>2(X)] =1,这与假设0<
a: < 1矛盾.
(2) 若CO, c2>0,则
R' = |x; c2a(氏)e(10)2)r(4) < a(04) eQWT(x) - C1a(eQWT(x) } =(%:
T{x) =t, g(z) = ~611 +d2e~b2t >1 | ,
其中dx=c'1a"1( )a( )>0, d2=-c2_1a_1(沒2)c!a(沒!)>0, -bx= Q(o4) -Q(e2)
<0, -b2 =C(^i) -<2(^2) <0, b} >0, b2 >0,因此有
茗'(i) = ~hyt -b2d2e~h2t <0, 为减函数，因此=|x: g(0>1)=U: r(x)<k(对某个女，
由定理6.3.3知，/? +对应的</)2(x)的功效函数为P的减函数，因而不可 能有
=E,2[(/)2(X)] =a-
(3) 因此必有c, >0,这时有
R+=\x: cxa(e{)^QWT{x)<a(WWT(x)^c2a(e2)eQWT{x)]
=jx: T(%)=t,g(t〉=c^e-6"+d2e6z<>1(,
其中 Q(o4) <Q(0i) <Q(02); d、=c"a-1(氏)a(f-tj) >0, d2 = (氏)•
c2a(A), -b} =<2((94) -<2(0j) , b2 =Q(02) 在以上/?+中，若</2^0(即c2>0),
则gf(t) = +b2d2eb2t
<0, gG)为减函数.与(2)类似，这种情况不可能.
因此必有 d2 >0(即 c2 <0)，此时有 g"(z) =6?<e-6,f +6^2eft2/ >0,
因而g(0为凸函数，参见图6.4.3.由图可知，应存在kx<k2,使得 尺+=\x:
T(x)=t,g(1)>1I={%: r(x)<ki或T(x)>k2I.

(6. 4. 17) 如果解出< , k2, 则上式等价于(6.4.8)式中的7?+, 且使(6. 4.7)式
成立.
综合以上讨论可知，若要使(6. 4. 8)式确定的否定域/T 满足
“
于(6.4. 17)式，因而<t)2(x)必有(6.4. 15)式的形式.至于k。y2i(i=
(6- 4.7)式:</>2(幻 e 少
即 E,J</>2(X)] =E,2[(/>2(X)] =«,则它等价
1, 2)的具体数值，仍然要由E0i[</)2(X)] =E,2[(/>2(J)] =«决定.解出 么,
7uG=1, 2)以后，则由推广的N-P引理的结论(1)可知，对任何
, 6, >0, b2 >0.

4>(x) 即 EJ杏(X)] =E~[每(X)] =a,必有(6.4. 16)式成立.I 注 必须注意，引理6.4.2与引理6.4. 1有重要的区别.在引理 6.4.]中，对任何满足 E,2[^(JT)] 的每(%)(即 5>(x)e0J都有E,3[4>1(X)]>E,3[^(X)].而在引理6.4.2中，只是 对任何满足
E:,[每(X)] =Etf2[$(X)] = a 的 4>(x)(即 4>(x) e 0;)才有
Eff4[^2(X)]^Efi4[^(X)].因此，</)2(x)还不能算是假设检验问题(ii)' 的 MPT,因为对 Effi[4>(X)]^af E.J^(X)]Ca 的泰(%)，引理 6. 4.2 未有E/?
4[</)2(X)]^Ee4[^>(X)]的结论.但是引理6. 4.2对于求解假设
检验问题(ii)的一致最优无偏检验还是可用的，因为由(6. 4.2)式可知， 任何无偏检验奉(x)都满足=Eff2[^(X)]=«. |
推论1 </>2 (%)是以下假设检验问题的一致最优无偏检验 (UMPUT):
(ii)" HQi❷=6、或0= 或汐>沒2.
证明 首先，由(6.4.15)式确定的</>2(%)与氐及么无关，所以
(6. 4. 16)式对任意的0<0}或分〉么 以及?>(%) 都成立，即 v^<ot, \/0>e2.
其次，容易证明:小2(x)是(ii)"的无偏》检验，因为若取(x)^a,则
对任何❷<0'或沒>氏有幻] 为(ii)"的任一无偏检验，则必有E
另外，若趴x) <, [圣(X)]彡a, 0 = 或沒2;
^0>02
.因为对于指数族分布是连
. 因而由以上 引理可知，以上不等式对(ii)"的任一无偏检验都成立，所以么(幻是
续的，所以 EJ5>(X)] =E, 2|^(X)] =Q!, 即 4>(x) e 0;
(ii)"的 UMPUT. | 推论2 记(/>;(%) =1 -</>,(%), ^(x)由(6.4.11)式给出，则幻为(ii)"水平为1 -a 的UMPUT. 证明由(6.4.11)式可知，(Pi(x)可表示为
• 1, <^(x)=(1-y“,
.0,
T(x) <kx 或 r(rr)〉灸2, T(x)=ki9i=l,2,
kx <T(%) <k2
且有] =1 -E^.[</>,(X)] =1 -a, 1=1, 2,因此c/>2(^) e 0;_a且具有引理6.4.2中(6. 4. 15)式的形式.所以由唯一性以及以上 推论1可知，4>2(x)为(ii)〃水平为1 的UMPUT. |
有了以上两个引理，即可求出假设检验问题(i)的UMPT以及(ii) 的 UMPUT.

定理6.4.2 对假设检验问题或e>e2—Hl:ex <e<e” 若存在久和人(i = l,2), 使(6.

4. 11)式的(/>,(%)满足E^^CX)] =a(i = 1,2),即(/>,(%) (0<a<l),则检验 为(i)的 UMPT.
证明 根据引理6.4. 1的推论以及其后的说明，♦々)已经是假设 检验问题(i)"的水平为«的 UMPT,因此我们的主要任务是要证明 屯(幻为假设检验问题(i)的水平为《的检验.即要证:当0彡e、或沒多 02时有为此可用引理6.4.2的推论2(亦可参见定理 6.3.5的证明).由于</>;(%) =1 -屯(x)为检验(ii)"的水平为(1 -a)的 UMPUT,因此若取^(x)^l -a,则有
EJ1 一屯(尤)]=EJ(^ (;V)]多EJ每(JT)] =1 —a, 0<0l^t0>e2. 由此即可得到
0<6{或 <9〉%. 另外也有=a(Z=l,2),因此也(尤)为假设检验问题(i)的
水平为0!的检验. 另一方面，若多(幻为假设检验问题(i)的水平为a 的检验，即
EJ每(X)]矣a，8彡❷、或❷外 ， 则对此泰(%)在 0 = 0' 和 0 = 02 处也有 E& [去(X)]Ca!，E,2[^ (^)]
即4>(x) e 0a, 因此由引理6.4. 1的推论可知，对任何0. <0<02必有 (可参见(6.4. 12)式)
EJ(MX)]彡EJ多(X)]，0{ <0<02,
因此检验A (幻为假设检验问题(i)的UMPT. |
定理 6.4.3 对于假设检验问题(ii) /f0: ex : e <e} ^io>
氏，若存在冬和hG=l，2)，使(6.4.15)式的(/>2(x)满足E～O2(X)] =
a (i=l,2),即(f>2(x)e0; (0<a<1),则检验<f)2(x)为(ii)的 UMPUT.
证明 根据引理6.4.2的推论1, </>2(x)已经是假设检验问题(ii)〃的 水平为《的 UMPUT,而且(6. 4. 16)式成立.因此我们的主要任务是要证 明小2(x)为假设检验问题(ii)的水平为a的无偏检验.即要证:当久矣 ❷以1时有彡a;当权<久或<9〉氏时有
Ej(/)2(X)]^a.
这可应用类似于证明定理6. 4.2的方法.考虑4>[(x) =1 -</>2(x), 则有
</>;(^) =)1 -y2i, b,
kx <T(x) <k2,
r(x) =、“ = 1,2), r(jt) 或 T(x) >k2.

则</);(%)具有引理6. 4. 1中(6. 4. 11)式的形式，且有E,.[(/>;(X)] =1 - a(/=l,2).因此由引理6.4.1的推论知，小:(1)为检验(i)"的水平为 1 -aW UMPT,即对一切各有
EJ小;(幻]彡EJ不(X)]，e. <e<e2.
取(p(x)=1 -a可得— 1
—a, < 0 < 02.
<0 <e2;另外也有 [小2(X)]
因此有 EJ
^a, ex
=a(f = 1
(/)2 (X)]
. 因此4>2(x)为(ii)的水平为a 的检验.同时，在引理6.4.2的推论
2)
1 中已经证明 的无偏检验.
:
” 所以么(幻也是(ii
又)]彡a, e<e'或❷〉❷

)
另一方面，若为假设检验问题(ii)的水平为a的无偏检验， 则由(6.4.2)式可知EdiR(X)] =E02[$(X)] =a.因此由引理6.4.2
的推论1可知，对任何❷〈❷'或❷>02必有 去(x)]，e<e{^e>e2.
因此检验<K(X)为假设检验问题(ii)的 UMPUT. | 注 必须注意，定理6. 4.2和定理6.4.3有很重要的区别:前者由 引理6. 4. 1及其推论得到，是 UMPT(也是本节和下一节唯一的一个
UMPT);而后者由引理6. 4.2及其推论1得到，是UMPUT.导致这种 差别的主要原因是应用了推广的N-P引理的不同结论.引理6. 4. 1及其 推论是由推广的N-P引理的结论(2)得到(其中要求c, >0,c2>0);而 引理6. 4. 2及其推论1是由推广的N-P引理的结论(1)得到(这时不要 求 ct 彡0,c2 >0). |
最后考虑假设检验问题(ni)Ho:0 = eo^H }:e^0Q. 它可视为检验
IH
(ii)的特例(即
(6.4. 15)式所示的(/)2(x)的形式.但是定解条件不一样，在检验(ii) 中，可通过
e0i[(/)2(x)] = a和E02[</)2(X)] = a这两个条件来决定
屯(幻中的么，y2i, Z=l, 2.而对检验问题(iii),只能有EffQ^2(X)]= « 这一个定解条件.因此要设法增加定解条件，这显然应该从(iii)的功 效函数的特点(见图6.4.2)出发，其主要特点为冷'(氏)=0.今归纳为
以下引理:
引理6.4.3对于指数族分布f(x, ❷) (❷)h(x)e_T(x)，则7(%)
的期望可表示为
EJr(x)]= -^(wb)- (“ 18) 若小(X)为一检验函数，其功效函数为叭的，则有
)，因此可以预料，其最优解应该具有
,
 冷'(4)=Q, (e)\Ee[^X)T(X)-\

(6. 4. 19) 对于假设检验问题(iii),它的任一无偏检验满足夂'(^)=0,其等价条件为
E,o[</>(x)r(jr)] =E<,o[^(x)]E,o[r(y)] =aE,o[r(^)]
(6. 4. 20) 证明 由于^ a(e)h(X)eQ(e)T(x)dfi{x) =1,该式对0求导可得
^[af(e)h(x)eQ(6)T(x) +(2/(6>)r(%)a(6l)/l(x)e<?(<?)r(x)]d^(x) =0.
(9)/i(x)e_如(%) = -Q(10) j/(x)a(9)h(x)e_T(4)如(x).
由此即可得到(6. 4. 18)式.
由于功效函数 /3(0) = ((l>(X)a(0)h(X)eQ(ff)r(x)d^(x)t 该式对沒
求导可得
陶 =£.[CW(/)(%)r(x)a(8)AWe’m)+a'(8)(/>“Wx)e_rw]如(%)
=_L[^t^ (4)w 訓X")
=<2冲[卿跡点缶戶叫
(6. 4. 18)式代人上式即可得到(6. 4. 19)式. 若</>(幻为(Hi)的任一无偏检验，则其功效函数满足卢'(%) =0,
因此可得(6. 4. 20)式. | 现在考虑如何应用推广的N-P引理求解假设检验问题(iii)的
UMPUT.由于情况比较特殊，我们首先作一些直观的说明. 若小(幻为检验(iii)的任一无偏检验，则条件冷(氏)=E0q[(/)(X)] =«
可表示为

£，小(幻/*1(又)如(X) =%，/;(幻=/0，沒。)， =«. (6. 4. 21) 条件(6. 4. 20)式可表示为
(</>(x)r(x)j = £ </>(x)r(x)/(x^0)dM(x) 因此若取f2(x)=T(x)f(x，0Q)，a2=a9 则有

£. 4>(x)f2(x)dpL(x) =a2, f人 X、= T(x)f(x,Oo) , a2 =a.
(6. 4. 22) 对于假设检验问题(ui) Ho:O =么一ff' tO Oq, 可取f3 (x) :f、x, Q\ ),
. 若</>2(x)由推广的N-P引理的(6. 4.8)式所定义，并使之满足 (6.4.21)式和(6. 4. 22)式，则根据推广的N-P引理的(6. 4.9)式，对任 意满足(6. 4.21)式和(6. 4. 22)式的去(幻将会有
E0,[小2(义)]= (幻人(x)(W(%)彡J =E0|[$(X)].
因此，根据以上分析得到的么(幻应该就是假设检验问题(iii)的 UMPUT,由此可得以下定理:
定理6.4.4考虑满足以下条件的检验函数类:
< =1 一切小(戈):Edo[4>(^)] =« = «!,
E<,o[((>(X)T(X)] =aE0o[T(X)~\ = af a2 |.
(1)若存在 k。%使(6.4.15)式中的 <f>2(x) e 5;(0 <a < 1), 则有
[舍2(X)]彡E*[各(尤)],V久#0。, V4>(x) e0二.
(6. 4. 23) (2)以上<^2(x)为假设检验问题(iii)的UMPUT,即(iii)的UMPUT
具有(6. 4. 15)式的形式，且满足 Ejc/
h(幻]=«,E<,o[<^2(X)T(X)]=aE9o[T(X)]=a\
(6. 4. 24) 证明(1)为了应用推广的N-P引理，今引人以下记号(见以上
e^60
(6.4.21)式和(6.4.22)式):)
)=a(久)h(x)e_)T(x\ f2(x) =T(x)f(x，❷。
Z(^) =/(U。
A(x) =f(x,Oi) =a(^)h(x)e<?(0l)T(x) (V A #汐0). 若每(%) e 0^，则有
h 不(X),l(X)如(x) [每(I)] =a"
f^^(x)f2(x)d^(x) =Etfo[$(X)r(X)J =a2.
设小2(%)由推广的N-P引理的(6. 4.8)式所定义，若存在q ，c2, 使 小2(幻则根据推广的N-P引理的结论(1)，必有(见(6.4.9)式)
= £(</>2(x)f3(x)d^(x)彡 l^^(x)f3(x)d^(x) =EJ^)(X)].
，

即(6. 4. 23)式成立.以下根据推广的N-P引理的(6. 4.8)式，考虑R+
可能的形式，其中
R+ = \x: f3(x) >cifl(x) +c^(x) },
= j x: a(Oi)h(x)eQ{6l)T(x) > cla(0o) h(x) eQ(9o)T(x} + c2T(x)a(e0)h(x)eQ(9°)T(x) |
且使</>2(x) e0;(即EjcMX)] E.J(</>2(J)r(X)] =af).上式可 化简为
R*=(x: r(x)=t，ebt>d'+d2t}, 其中 b = Q(0') -Q(0O),
di=a~l(0i)c,.a(0o) , i = 1, 2.
今考虑以上7T可能的形式.指数曲线e"与直线4 +么£可能有0, 1,2个交点，见图6.4.4.以下证明: 若尺+对应的*2(x) 则e6' 与dx +d2t必有两个交点，因为

i）若e6'与< +d2t无交点，则7T =
o 这与假设0<a<l矛盾.
] = a = 1,
jx:eAt>(/j+d2tI =.劣;E^
ii）若与d} +d2t只有一个交 点，则
R+ = \x*T{x) =t,ebt >dx +d2t) =I T(x) <A | 或| T(x) >k }.
这时相应的功效函数冷(60为6»的增函 数或减函数，因而/3f(e) >o 或f (沒) <0,不可能有/?'(氏)=0，因而不可 能有 E,o[</)(X)T(X)] =(/(该式等价
图6.4.4检验(iii)否定域的确定
于冷'(氏)=0,见引理6. 4.3)，因此只可能是最后一种情形，即e6'与d、+ d2t有两个交点.此时
尺+=jx:T(x)=t,ebt>dl+d2t\=\x: T(x)<kY或r(%)>々2}. 该式就是(6. 4. 17)式.如果解出A:,, k2，则等价于(6.4. 8)式中的/?+， 且使(6. 4.7)式成立.因此，若要使(6.4.8)式确定的否定域/?+满足 (6.4.7)式:么(x)e0:,即E、
o[(MX)]=a,E,o[(/)2(X)T(X)]=a\ 则它等价于(6. 4. 17)式，因而</>2(x)必有(6. 4. 15)式的形式.至于k。
y2iG = l，2)的具体数值，仍然要由<^)2(x) e 0;，即(6. 4. 24)式决定. 解出卜，yuU = l，2)以后，此时由推广的N-P引理的结论(1)可知，对 任何^(%)e0^,必有(6.4.23)式成立.
(2)要证以上</)2(x)为假设检验问题(iii)的UMPUT.首先证明:

</>2(x)是((1))的无偏检验，即Ee[(/)2(%)]多(X，V #00.事实上，在 (1)中取每(%) =a,则有杏(%) e 逢:，因为 E^o[^(X)] =a, E<,J^)(X) •
7\X)] =aEajr(X)].因此由(6.4.23)式知 E,[(/>2(X)] E,[^(J)]
=a, V
再证屯(幻的最优性.设 >(幻为(iii)的任一无偏检验，则有
E,o[4>(X)J=a,再由引理6.4.3可得E,o[^>(X)T(X)]=aE,o[T(X)],即 ^>(x)G0;,因此由本定理的(1)可知，必有(6. 4. 23)式成立.所以</)2(x)为 (iii)的 UMPUT. |
以上定理的定解条件(6. 4. 24)式在计算上较为复杂，下面定理给 出了一种常见的特殊情况，把两个定解条件合并为一个简单的定解 条件.
定理6.4.5 条件同定理6.4.4.在(6. 4. 24)式中，如果当0 = 0Q
时，Z=T(X)的分布关于某个点m。对称，则假设检验问题(iii)的 UMPUT可表示为
J, 1卜Mo1〉女,
沴2(1) =< y， h-弘o丨=炙， (6.4.25)
o,
证明由于以上定义的(/>2(0 是(6. 4. 15)式的特例，因此主要是证 明它自然满足条件
Effo[<t>2(X)T(X)] =aE,o[r(X)J. 这样，以上</)2(0就满足(6.4.24)式.设e = eQ时r = r(j)的分布为 gG)，由对称性条件知E0o[T(X)] =/£0且有
g(fjL0+t)=g(^0-0,因
此g(M0 +0为t的偶函数.同理，由(6. 4. 25)式确定的小2(1)也关于 对称，因而</
>(At0 +0亦为的偶函数.所以，计算Edo[^2(^)r(x)]时 可变换到对称点，即令« =Mo
则有
^00^2(^)^(^)1 = [</>2(1)W(1)山 J * 0©
(Mo + T)小2(/i0 + 7)g(Ai0 + r)dT = MoJ-00 </>2(Mo + T)g(/Io + T)dr
1t-弘0丨 <左， 其中k，y由条件E。。[小2(r)] =a决定(即条件Eflo[</

>2(X)T(X)]= «E,o[T(X)J 可去掉).
 + J-00t洽2(Mo + T)g(弘o + r)dr.

在以上积分中，第二项为零，因为被积函数为奇函数;而第一项= MoE,o[(/>2(nl
=aE,o[r(X)J.因此(6. 4. 25)式的 </>2(0 满足(6.4. 24)
式，所以是假设检验问题(iii)的UMPUT. I 6.4.3 正态分布单参数的双边检验
以上定理可用于正态分布的假设检验，因此对于正态分布，其单参 数的双边假设检验问题都可以得到解决.设岑，...，及独立同分布，且 X,～/V(M，a2)，则关于M和a 的双边假设检验各有3种(见本节开头)， 共6种.为节省篇幅以下通过例题讨论其中4种，其他类似.为了得到 检验的UMPT或UMPUT，主要是给出否定域7T的形式及其定解条件.
例6. 4.1设X:，...，叉独立同分布，且弋~/V(/i，a2)，求以下假 设检验的UMPT或UMPUT:
(1) //0 或 <<T <or2, (jit =M0 已知); (2) H0-,a = a0-^Hl : tr#cr。,(已知 /z =0).
解 (1)分布族关于r(X)= £ (X.-^0)2为指数族，且7XX)的
分布连续，因此由定理6.4.2知，检验的UMPT可表示为 1, k、彡T(x)<k2,
(龙)
其中?(n,y)表示^2(n)分布的密度函数，联立求解以上方程可得k"
i: 的 UMPUT可表示为
</>2(x)=
0, T(x) <久或 r(x) >k2, 其中/?+=\k}<7(%)<k2\,而々，, A:2由 [也
(X)]=a,j=1, 2决
定.即
 ” 从而得到<?>.(%)•但是，k” 么的具体计算比较复杂. n
k
(2)分布族关于T=2X]为指数族，因此由定理6.4.4知，检验
1
1，t(x)<k}或 r(x) >左2，
kt C T(x) (k2,
0 其中/?+=(T(x)<k、或T(x)>k2|,而kl9 k2由(6.4.24)式决定，即
,

1 。[么(又)]=«， 式可得
 =aEao[T(X)J.因此由以上第一
< r2'
2 <~=1-a CT0 (TQ
由于T(X)/aJ~r(n),因此有
Ck2/<rl 2
X («,y)dy = 1 - a.
V(T0
由于E^EHX)] =na;, 因此以上第二式可化为
E,0[^(^)r(X)] =na^,或 EaJ[l-</>2(X)]T(X)} =n(l-a)a;,
即
f02/
JX (n,y)dy=n(1 -a).
(6.4.27) 这显然是比较复杂

J” 联立求解方程(6. 4. 26)和(6. 4.27)可得到久，k
的.作为近似，可根据(6. 4. 26)式取
k\ 2 —
°~0
2/ O—Q
n，l— 晋). I
设X,,—,Xn独立同分布，且X，求以下假 (1) Ho:川 :弘 或弘〉蚪2，(a0 已知);
例6. 4.2 设检验的UMPUT:
0 1:弘#弘0，(<r0 已知).
(3) 某钢铁厂的铁水含碳量的百分比在正常情况下应服从正态分
布7V(4.55,0. 1082).为了检测设备维修后生产是否正常，测试了 5个 样品的铁水含碳量的百分比，结果为4. 29, 4.39，4.45, 4.52，4.54. 问现在生产是否正常(设方差未变，并取a =0. 05)?
解 (1)分布族关于T=X为指数族，因此由定理6.4.3知小2(幻
的1T为/?+ =\X<k{或X〉 仒2 }.而<，么由 E～[必2(义)]=«，=1, 2决定.即
(2) Ho: /x=/z
% 由此可得
°~o crQ a q
=1 — a, i = 1, 2.
尸 i h <X <k2 |=1 —a, Z = 1 , 2;
a, z=1, 2. 联立求解以上方程可得到k2, 从而得到么(幻.
(6.4.26)
6.5多参数指数族的检验
249
(2)分布族关于T=X为指数族，而且王的分布关于A 对称，X— 因此由定理6. 4.5可得
1 X —/zo i
10， 1x—弘0| <k,
其中&由Er)[(/>2(X)] =a决定，因此有
其中^/nk/a0 =^i _a/2 , 因此 ^ = (aQ/^/n)zx _a/2. 把 A:代入以上小2(x)，最 后可表示为
[1, (%)
I U(x) |
</>2(幻—P,
以上公式与第3 节中关于;r 的单边检验的UMPT的公式十分类似(见例 6. 3. 7).
(3)问题就是检验 Ho =4. 55—H} 55(已知 a0 =0. 108). 此时n = 5，心 =0. 108，经直接计算得x = 4.438, | x — /z。| =
14.438 —4. 55 | =0.112.根据(6. 4. 28)式，| :/(x) | = 2. 319.而 ^l-a/2 =^0.975 =1—96 <2.319,应否定//。，即认为现在生产不够正常.检 验的P—值，即本次判错的概率为P(|U(X)I >2.319)—0.02(其中 U(X) —7V(0,l) ; | U(x) | =2.319). |
6.5多参数指数族的检验
以上我们讨论了单参数的单边检验和双边检验，但是除了 Poisson、 二项等少数分布族外，大多数常见的分布都不是单参数而是多参数的分 布族.特别是最常见的正态分布，如果两个参数都是未知的，并要讨论 其假设检验问题.则前面第3、第4节的结果都不能用.例如，在例 6.4.2的(3)中所讨论的假设检验问题，若含碳量的分布不是/V(4. 55, 0.1082)，而是/V(4. 55,cr2)，即cr未知(这可能更合理)，而要讨论同 样的问题

Hq :Zz=4. 55-/7. ;m^4. 55(但 a2 未知)，则(6. 4. 28)式的结 果就不能用，因为a。未知.直观上，可用cr。的估计代人(6. 4. 28) 式(这显然是合理的)，但是要证明它是UMPUT则颇费周折.这正是本 节所要讨论的问题.我们首先从直观上看看其困难所在.
设 ...，夂独立同分布，X'Kp,a2)但m与a都未知.考虑以 下假设检验问题:
1
I U(X) | <Zl-a/2 O-o ,
〉21 -a/2,
U(X)=a/h----- (6.4.28)

Ho: /z =/z。一*//，: (但 a2 未知).
我们从参数空间来分析其一致最优势检验的特点.这时0=(M^)，而 = I (Mo，")，V<r
|,
= ((fJb.a) , Moi Va j• 图6.5. 1给出了参数空间的示意图.若
冷(幻为一致最优势检验，根据定义，其 功效函数在00上应该有 «,而在叹上^(0) =EJ(/)(X)]应该尽量 大.结合图6.5. 1, 13(0)在直线0。上应该
而在直线(%的左右两侧(即0!上) 都要尽量大，这显然是比较困难的，因为 是一维无穷集;0,是二维无穷集，而两
者又连在一起.总的来讲，用 Neyman - Pearson理论来求解多参数假设检验问题的 图
6.5.1多参数检验的参数空间
一致最优势检验并不是很有成效.下一节介绍的似然比检验可能更好.以 下仅介绍指数族分布中一种有解的情形.
设X = (X[y...，X„)T,，而X~/(Kip)为指数族分布: =A(x)exp|^t/(a;) +
(6.5.1)
其中 汐为一维，T(r.) =(T,(x),...,r,(x))T, # = (& , ...，<pA)T; 沒称为有兴趣参数，p 称为多余参数.我们的目的是要研究有兴趣参数 0的假设检验问题，包括第3节研究的单边检验(iii)和(iii)'以及第4节 研究的双边检验(i)一(iii).但是多余参数p是未知的.这些问题对指 数族分布(6.5. 1)是有解的，我们首先复习带有多余参数的指数族分布 的有关公式，详见第一章.
(1) U = U(X)9 T = T(X)的联合分布与边缘分布: ((7，r) ~f(u,t;09(p)
=h(u,t)exp^0u + g (piti - 6(沒，p)},
U = ^(u)exp (0u -b(o,(p) I , T ~ =~(Z)exp{ (p.1. - b(6,(p)
(2) U\T的条件分布与多余参数p无关:
U | T -/(u | t;0) =h* (u ,i) exp \ Ou - bt(6) \.
(6. 5. 2)
(6. 5. 3) 由上式可知，在条件分布(6.5.3)式中，仅包含有兴趣的参数<9, 不包含多余参数P 因此，第3节和第4节的结果可用于该分布族关于

沒的假设检验问题.本节的主要结果就是:分布族(6.5.2)关于0的假 设检验问题的UMPUT可以通过求解条件分布(6. 5. 3)关于0同样的假 设检验问题的UMPUT得到，而分布族(6.5.3)的UMPUT则可由第3节 和第4 节的相应结果得到.
6.5.1 带有多余参数时单参数检验的UMPUT
我们首先考虑以下单边检验，说明其求解的基本思想，其他检验的 解法都类似.
(1)-(i): HO:0$00, p任意:0>0Qt p任意.

(1)–(ii) ; p 任意*-j i0< p 任意. 其中“(1)一(i)” 表示样本分布为(6.5.2)式，这一检验的参数空
间为 = | V<p | 和什=i (<9，平)，6>〉6>0, Vp! ; (1)– (ii)的情况类似.为了得到检验(l)–(i)和(1) –(ii)的UMPUT，今考 虑基于条件分布(6.5.3)式的类似检验:
(2)–(i): Ho :0>00(与p无关). (2)–(ii):H心陶(与p无关).
其中“(2) –(i)” 表示样本分布为条件分布(6.5.3)式，(2) –
(ii)的情况类似.以下主要证明:检验(2) –(i)的 UMPT就是检验 – 的 UMPUT;检验(2) –(ii)的 UMPT 就是检验(l) – (ii)的
UMPUT.为此，首先考虑检验(2) –(i)和(2) – (ii)的UMPT:
引理6. 5.1 假设检验问题(2) –(i)在条件分布(6. 5. 3)式下的 UMPT 为
U(x) >k(t),
小•(u，t)= y(0, U(x) =k(t)， (6.5.4)
其中左(1)，y(z)由 以下(2) –(i)'的 UMPT:
1, o,
U(x) <k(t),
| T] =a决定.特别，(/>* (u,0也是
(2) – (i)': :O>0o.
假设检验问题(2) –(ii)在条件分布(6. 5. 3)式下的UMPT为
fl， 小’(u，t)=■ y(1)，
.0， 其中 k(1)，y(z)由 E~ [/，r) | r]
"“)<仝(1)， "(x)=仝(1) ， U(x)
决定.
(6.5.5)
证明 直接把定理6.3. 1—定理6.3.3用到条件分布(6.5.3)及其 检验问题(i)和(ii)即可. |
则有
[容(7)]=E(w)!U W =E(w)[0(t/,r)] –a=o, v乎.
252
第六章参数假设检验
为了证明(/)* (u,r)是(1)一(1)的UMPUT，现大致分析如下: 由于</>* (u,r)为(2)–(i)的UMPT,因此对任何$(u，t)，若
E,[每(a，r) | e^e0,则有
|r]，o>e0f (6.5.6)
注意，以上结果与无关，即对任何都成立.该式两端取期望即可得到 彡E(～[i(t/，r)]，e〉0a，V什 (6.5.7)
这说明， (U，t)可能就是(1)一(i)的UMPUT.但是必须证明: (a) </>* (u,t)也是(I)一(i)的无偏检验;(b)对任一(1)一(i)的无偏 检验$(u，t)，(6.5.6)式也成立(因为这时才能两端取期望，从而得到 (6.5.7)式).为此，首先证明以下引理:
引理6.5.2 设检验
必有 ，
r
特别，若不(u，t)为(1)– (i)的无偏检验，则(6.5.8)式成立.
E(
]
)
w>[如",

)fr
=a
(6.5.8
满足E(w)[每(t/, 7)]=a, 则
证明主要是应用指数族分布中统计量T(Z)的完备性.由假设知
E(w)[^>(", r)]=«, V^,考虑函数:
g(1) =E(w)[^(f/,D | T=r] -a, V^,
因此有E(w)[g(ni=0, v^,而当氏固定时，r(x)关于参数p为完备 充分统计量(见(6.5.2)式)，因而由完备性的定义可知g(O =o(a.e.)， 即(6.5.8)式成立.另外，若义(u，t)为(1)一(i)的无偏检验，则由无 偏性的性质可知E(,oi^[^((/,r)] =a, Vp,因此(6.5.8)式成立.|
定理6.5.1对于指数族分布(6.5.1),在引理6.5.1中由(6.5.4) 式确定的♦- W 为假设检验问题(l)—(i)的UMPUT;由(6.5.5)式 确定的为假设检验问题(1)—(ii)的UMPUT.
证明 以下仅证明假设检验问题(l)—(i)的UMPUT为小* (u，t)， (1)—(ii)的情况完全类似.为此，要证明:(a)小•(u“)为(1)一(i)
的水平为a 的无偏检验;(b) (/>*(u,0是最优的，即满足(6.5.7)式. (a)由于</>*
(u,0为(2)^(i)的UMPT，因此关于T的条件分
布应用定理6. 3. 1和定理6. 3. 2的结果可得
冬a ， <9<6>0,
(",『)I r] =a,❷=00, 多a, 6>0O.
) |r]j -«

上式在(0，p)处取期望可得
E(wiE(~[<r(a, r) |r]f=E(_[<(t/, m,
因而有
因此(/>*(u,0为假设检验问题(1)—(i)的水平为a的无偏检验. (b)今设4>(uft)为检验(l〉_ (i)的任一无偏检验，则由引理
6.5.2 知
m =a, E(^)[<T(a, 『)|门=a. 又由引理6.5. 1可知，(T (u，t)为假设检验问题(2)—(i)'的UMPT，而
去(a，f)为(2)—(i)'的水平为a 的检验，因此有
EJ </)*((/,7) \T~\^Ee[4>(U,T) |T], 0>0Q (与 p 无关).
该式两端在(么处取期望可得 ~ 0>Oo, \/<p. (
综合以上(a)，(b)两点可知，<T(a，e)为假设检验问题(1)一(i)的 UMPUT.
我们继续考虑在分布(6. 5. 2)下参数0的双边检验:
(1)- (iii (1)—(iv): Ho (1)—(v): Hq-6=
或❷
:0<0t 或沒〉沒2，V<p;
): Ho
<0<02, V<p;
E(, .W ("州 =«>
彡a， e<oo,^<p,
沒=氏，V 妒， 彡a, o>o0f\/(p.
}.O^0o, V<p. 这些检验的UMPUT可由条件分布(6.5.3)下参数0相应检验的
UMPUT得到，其证明的基本思想已如上所述.今归纳为以下定理: 定理6.5.2 对于指数族分

布(6.5. 1),检验(1)—(hi)的

UMPUT 为

其中kM和yuG)由

检验(l)— (iv)和(1)— (v)的 UMPUT可表示为

f1’ i/(X) (1)或G(太) >釦2(1),

1, (0 <"(1) <左2(0,

</>;(以“) £/(太)=A.(O(i=1,2), (6.5.9) 0, J7(x) 或 U(x) >k2(t),

(6. 5. 10)

♦2(U»0 =<7*2£(’), 0,

U(x) =ki(t)(i = l ,2) , kx (0 < l/(x) <k2(t).

=« U=l, 2)决定.

和y2l•(1)由Ed<M", r)|r]=a (i=l,2)

对于检验(1)—(iv),

决定;而对于检验(1)一(v), A:,(1)和y2M 由以下两式决定:

E, 。[么(", 幻 =«, (6.5.11) E,o[^2(i/,n|rj =aEjt/|r], (6.5.12)

证明 关于检验(1) 一(iii)和(1) 一(iv)的UMPUT，其证明与定理 6.5. 1的证明十分类似，故从略.以下证明:满足条件(6.5. 10)—

(6.5. 12)的 </>2(u,0 为检验(1)—(v)的UMPUT。 为此，首先考虑条件分布(6.5.3)下(!)一(v)的相应检验: (2)—(v) : Ho: 0 = : 0^30(与妒无关) 把定理6.4.4用于条件分布(6.5.3)下的检验(2) —(v)可知，满足

(6.5. 10)—(6.5. 12)的 </>2(u,t)为(2)一(v)的 UMPUT.我们由此进一 步证明:(/>2(u,0也是检验(1)_(V)的UMPUT.

首先由无偏性可知EJ(/)2(C/,T) |7] ❷爹～，该式两端对 (沒4)取期望可得

E(b〉[小2(", 门]多a, V 沒#沒0, V (p. 因而4>2(u,t)也是假设检验问题(1) —(V)的无偏检验.

今考虑假设检验问题(1) 一(V)的任一水平为a 的无偏检验 每(U,£)，以下证明5>(u,0也满足(6.5. 11)式与(6. 5. 12)式，从而可证 明小2(u, t)的最优性.

(a) 由5>(u,r)的无偏性可知 E<e0，<p)[多(", 『)]=«, V(p.

因此由引理 6.5.2 知 E,o [^ (Uf T) |T] = a，即 满足 (6.5. 11)式.

(b) 由无偏性， 应该满足类似于(6.4. 19) —(6. 4.20)式的 公式。今考虑其功效函数及其导数:

扒❷J多(u, t)h(uexp|6u+y, ~b(0f(p)!d/x(x).

该式对e求导并在00处计值可得 (氏 , 屮)

J(w—&, o)^(u»0^(w,t)exp\eou+2 —△(权0,史)■(如(幻=0, i=1

(6. 5. 13)

其中b'o表示❷，屮、关于0的导数并在30处计值，因此由指数族的性 质有 =E(w)[i/(X)],同时也有 =«,因此由 (6.5. 13)式可得

E(w)["去(", 『)—a"] =0，V<p.

 与引理6.5.2类似，考虑函数

对g(r)取期望，并应用以上两式可得E(/W)[g(r)] =0(\/乎).当0 = 氏时，r(x)关于$为完备充分统计量，因而由完备性的定义知g(O = 0(a.e.)，从而u,0也满足(6.5.12)式.

(c)由以上证明可知都满足(6.5. 11)和

(6. 5. 12)式，把定理6.4.4的结论(1)用于条件分布(6.5.3)
可得
ej(/>2("
n|r]， (与
nin彡 ej各(" 上式两端对(么^)取期望即得
<p无关).
,
,
(10))[每((/, r)], v^.
E 由$(^,/)的任意性以及UMPUT的定义可知，<^2(u,0为假设检验问题 (1) —(V)的
UMPUT. ■
以上定理可用于正态分布、Poisson分布、二项分布等常见指数族 分布的假设检验问题.
注 本节结果与第3、第4 节的公式有重要的区别.在本节带
有多余参数的假设检验问题中，定解的关键是要计算相应的条件 期望，而第3、第4 节的单参数检验只需要计算普通的无条件
期望. ■ 6. 5. 2 一样本正态总体的检验
假设丨，...，夂独立同分布，A ～7V(m，(t2)，其中g与cr均为
未知参数.这时关于M和的检验各有5种，以m 的检验为例列举 如下:
(1) "0 >Mo ;
(ii) :弘 <Mo;
(iii) 或/x彡:川</!</x2;
(iv) Hq :/£<^j或 >jJL2;
(v) Hq :ju =^0^Hi :/z#/z0.
在以上检验中，a 均为未知的多余参数.类似的，a 的检验也
有5种，/X为未知的多余参数.下面将说明，有关a 的检验都有解; 而关于M的检验，上述(iii)、(iv)无解，其他有解.根据前一节的 定理，求解这些检验的UMPUT的关键是要计算相应的条件期望. 对于正态分布，我们可根据有关的独立性以及Busa定理把条件期望 化为无条件期望.在a■和;a的10个检验中，以下介绍其中几个典
256
第六章参数假设检验
型的例子，其他类似.首先我们列出正态总体的联合分布密度 如下:
exp y/2ira
(1)关于 cr 的单边检验(i) Ho :o- >(r0. 根据(6.5.14)式，这时可取0=-l/(2a2), U(x)=
(6.5. 14)
x], <p=
i=I nfjb/a2,7(%)=x,因此检验(i)可转化为(i)':Ho: *-*//,-0>00
(0O = -l/(2a^)).由(6.5.4)式可知，其 UMPUT 为
其中AG)由 独立，但可以化为
|T]=a决定.注意U(X)= 2 i=l
与T=^不
(6.5.15)
令(x)
1， U(x) >k(t)， 0, U(x) <k(t),
"(%)= [(x,-%)2+nx2=S(a?)+nT2{x), i=1
n

I (x,-xy与r=x相互独立.同时，由于叭幻为
其中5 =s(x)=
i=1
S(x)的严增函.数，因此/T可简化为
尺+ =\U(x) >k(t)} =!S(x) 因此 E9o[4)(f/,T) |r] 可化为
|r] : P~(U(X) >k(T)\T) =7\(s(x) >c(r)In =a. 由于s(x)与r独立，因此有
由于S(X)/al
gpc/a\ -2 UMPUT 为
1 »
|T] =Pao(5(X)〉c(r)) =Pa0(5(X) >c) =a. 因此有
>c/tTo)= a.
-oc)9 c=ao^2(n-191 -a),最后可得检验(i)的
>oroX(^-1,1 -a),
4>(s)= J
0
根据以上求解方法，可总结为以下定理.
定理6. 5 .3 对于指数族分布(6.5.1)的单边检验汉。:❷彡❷d :
,
S(x) <aQx (n-l
, l -a),
5(x)= 工 (^t -x)2.
(6. 5. 16)

e>e^若有(/(%) ="(s(幻，r(^)，而i/u)为s(x)的严增函数，并 且S(x)与7XX)相互独立，贝(J(i)的UMPUT可表示为
II，S(x) >c,
y
0, S(x) <c, 其中C与y由ESo[(/>(S)] -a决定. I
(2)关于 o•的双边检验 (ii) Ho: a = : <r#<r0.
d 此由定理6.5.2可知，(ii)'的UMPUT可表示为
检验(ii)可转化(ii)' Hoi 0 = 6
❷# 从❷:-l/(2<72),因
(/>(u,t)=[1,
U(x) <fc!(1)或 U(x) >k2(t) <U(x) <人2(1),
,
. P
,
、
5(%) = c,
其中k、(4) ， 由以下定解条件决定:(a) Eao[(/>([/,?) |f] =a; (b) Eff。[叫(i/, r) |r] =aEaQ(U\T).
对于定解条件(a)，它等价于EaJ(l -令)|门=1 -a，即.
Pjh(7)<U(X)<k2(T)\T}=1-a. 由(6.5.15)式可知，t/(幻为5(幻的线性严增函数，因此上式等价于
戶aok (7) <S(X) <c2(nln =1 -a. 由于s(x)与r(x)独立，上式等价于
paoici <5(X) <c2) =1 -a. 由于S/d~/(n-1),上式可表示为

f C2/<r0

从而检验(ii)的UMPUT可表示为

S(x) <c,或 5(%) >c2,

cx <S(x) <c2,

X (n-l,y)dy = l - a.

(6. 5. 17)

且有 EaQ[(MS〉] =a. 对于定解条件(b),可把U=S +nT2代人得

EaJM+zfT2)少(S) |T] =aEao[(S +nT2)\Tl 由于S(X)与r(幻独立，上式等价于

即

Eao[S(/)(S)] +^^2Eao[</>(5)] +naT2, E,。[坤(S)] =aEao(S).

S(x) = Z (xi -x)2, (6.5. 18)

由于S/a;-/(«-!), Eao(S) =(n-l)ao,上式化为 £^[5(1 />(S))] =(n-1)oto(1 -a).

因此检验(ii)的UMPUT可表示为(6.5. 18)式，其中c、，c2由 (6. 5. 17)式和(6. 5. 19)式决定.联立求解方程(6. 5. 17)式和 (6.5. 19)式可得到C1，c2, 这显然是比较复杂的.作为近似，可根据 (6. 5. 17)式取

^1

- =/V

以上求解方法可总结为以下定理.

定理6.5.4 对指数族分布(6.5.1)的检验只。:0=0d:8孕❷”

若存在线性函数关系U(x) =a(i)S(%) +6(0, a(«) > 0，且在❷二❷Q处 S(X)与r(x)独立，则检验的UMPUT可表示为

5(x) 或 S(x) >c2， c/)(S)= S(x) =cf(i=1，2)，

o, Cj <5(%) <c2,

其中 Q，y:G = l，2)由条件 EjcHS)] =a 以及 Eflo[S(/>(S)] =«E,o[S] 决定.特别，若S(;V)的分布关于某个点w 对称，则有类似于定理

6.4.5的结果，即诊(幻的否定域为= (%: |S(x) -Ao| >k),而由 « 决定.

关于a 的其他检验可类似地由(6. 5. 15)式得到，从略. (3)关于#的单边检验(i)

Ho: : /X>fi0. 这时，有兴趣的参数为m，而a•为多余参数.注意，在(6. 5. 14)式

n 中，若取0=n/x/a2, U(x)=5和(P=-1/(2a2)，T(x)=

i=1 验不能简单地转化为n^L/a2 =6^0.= nfM0/a2,因为其中含有多余

参数a，不能应用定理6. 5.1的公式，也不能在此0. = n^/a2处求期

:

(6. 5. 20)

(6.5. 19)

望和定解.但是我们可以把检验(i)转化为77。

>0,同时把(6.5.14)式转化为

0-H':

, 则检

这时可取 e=n(^-^0)/a\ U(x) =x和 -l/(2(r2)，T(x) =

(x;-

1=1 Mo)2.而检验(i)显然等价于检验(i)' 0^0-7/1; ^>0,并且在氏=0

(即M=/z0)处定解.根据定理6.5.1以及(6.5.4)式，检验(i)'的 UMPUT可表示为

令(zz，Z) =

■
,
r(x) > k(t), U(x) <k(t),
(6. 5.21)
其中A:G)由E。[令(", 『)\T]=a决定，E。表示在0Q=0(即处取 期望，因此有
Eo[W)\T]=P0\U(X)>k(T)\T\=a, (6.5.22)
其中</(X)=X与?=乏;(弋-M。)2不独立.以下设法用Basu定理找 i=1
一个统计量r(x),使之为u(x)=x的严增函数，并且I7(x)与HI)独 立，则以上条件概率可化为无条件概率.由于?(%)=2(\-i〉2+
n(x -/io)2, 可取
1=1
D = -Mo) ‘饣(a~l)("_Mo) x- :了卵-/
(6.5.23) 以上IF(幻为£/(幻的严增函数，并且JF(X)～r(n-l)，其分布与参数 戶无关.因为r关于参数-l/(2cr2)为完备的充分统计量，JF的分 布与a 无关，所以由Basu定理知f 与W独立.因此以上(6.5.22)式的
定解条件可化为
P.\U>k(T)\T\ = P.\W>c{T)\T\ =P.\W>c\ =a. 由于W(X) ^z(n-l),因此c=f(n-l,l -a),从而检验(i)\即检验 (i)的UMPUT由(6.5.21)式转化为
杏(识)
n
(6. 5. 24)
其中<r2(%)=2(^{~^)2/(n-l)为<r2的无偏估计.上式与(6.4.28) i二1
式十分类似，但是由于此处a2未知，因而用其无偏估计代替，所以 识(X)服从t分布，而
(6. 4. 28)式中U(X)服从正态分布.
260
第六章参数假设检验
(4)关于/x 的双边检验(ii) Ho: :
仍然从(6. 5. 20)式出发，取 0 -/i0)/a\ U(x) =x和乎=
-l/(2cr2), T(x) = 2 -A。)'.检验(h)显然等价于检验什)' »= 1
Ho:0 = :^^0;并且在沒。=0(即/x =从。)处定解.根据定理6. 5. 2 以及(6.5. 10)式，检验(ii)'的否定域应为R+ = (x:l/(x) <^(i)或 t/(%) >k2{t)\.根据前面的讨论，『(幻为U(x) =x的严增函数，并且 r(x)与r(x)独立，因此以上否定域可转换为
R+=\x:w(x)或
, 以上 a决定，BPc=t(n-1,1 -a/2).从而检验(ii)'，即检验(ii)的
^(x) >C2),又由于『(X)的分布关于M。对称，根据定理6.4.5 否定域可进一步转换为+ = | W(x) I >c I，其中c由EQ[</>(妒)]=
UMPUT 为
i /2)，_
10, \W(x) | <z(n-l,l -a/2), V a
(6.5. 25) 例6.4.2 (续)在问题(3)中，假设a2未知，考虑检验//。: =
4. 55*-*/f, : /z#4. 55.
解 这时就要应用(6. 5. 25)式的i检验.经直接计算得a=0. 1017 (比原来问题中已知的a = 0. 108要小),x = 4. 438, |x~Mo| = |4.438-4.55|=0.112;
JF(x)=2.4625.此时n=5,a=0.05,所以 t(n-1,1-a/
2)=z(4,0.975)=2.7764>2.4625=W(x).因此不能否
定原假设，即不能认为现在生产不够正常.，这个结论与例6.4.2中的结 论不一致，其原因

是:例6. 4.2是在均方差a =0. 108保持不变的假定 下进行检验;而现在是在比较小的均方差a =0. 1017的条件下进行 检验. ■
注 本小节开头，我们列出了 5种关于参数M的检验，其中(i)、 (ii)、(v)都可以通过(6. 5. 23)式的识(幻得到其UMPUT.但是，对检
验(iii)和(iv)不可行.今结合检验(iii)简单说明如下: (iii)Hq: 或/z彡从<fM<^. 其 UMPUT 的否定域应为 /?+ = < U(x) <k2(t) | , U(x) =x,它 要满足
=Pjkl(T)<U(X)<k2(T)\T}=a, £=1,2. 但是我们很难得到进一步结果.事实上，根据(6.5.23)式，应取
TT"、 V^(M _ 1) ((/ -/Z£) wi(x)=-
,
t=

易见，在川处『1(1)与『独立，在A 处%(幻与r独立，但是我们 无法确定一个共同的使之在川， 处都与r独立，从而把尺+ = 1^.(0 <U(x) <k2(t)}转化为 R+ = Ic, < JF(x) <c2 J. ■ I 表6.5. 1给出了一样本正态总体常用的假设检验及其检验统计量. (5)应用示例
今举两个例子说明正态分布假设检验的某些应用.
例6.5.1某厂生产的铜丝一直比较稳定，其折断强度服从正态分 布，均方差为8.今对一批产品随机抽取10个样本，其折断强度分别 为:578, 512, 570, 568, 572, 570, 570, 572, 596, 654.在 a =
0.05水平下检验:这批铜丝的均方差是否合格.
解 要检验付。:(7 = 8- o-#8,但M未知.可用;t2检验，根
据(6. 5. 18)式，检验的否定域为R+ = \x:S(x) 或 〉c2)，其中
n . 在实用上么和~都是取近似值c,
S(x) = £ (xt-%)2 i=I
a/2)，c2=aS (n 1J -«/2).本例中，a}=64, a=10，a=0.05, 因而近似否定域可表示为R+ = \x:S(x)/al </(9,0. 025)或>/(9, 0.975)|.根据以上数据经直接计算可得S(x) =681.6, S(x)/〆 = 10.65，而^2(9,0.025) =2. 70, /(9,0. 975) =19.0,因此 S(%)不在否 定域.所以没有充分理由否定原假设，即没有充分理由认为这批铜丝的 均方差不合格. ■
例6. 5. 2 某食品厂生产的一种罐头食品，标准重量为每罐 500克.今对一批产品随机抽取10个样本，其重量为:495, 510，505, 498, 503, 492, 502, 512, 497, 506.假定罐头重 量服从正态分布iV(/x,a2)，在a =0. 02水平下检验:这批产品是 否合格.
解 要检验/fo:M=5OO- /71;/z#500,但cr未知.可用z检验， 根据(6.5.25)式，检验的否定域为 = |x: \W(x)\ >^(n-l,l - a/2)!本例中，Mo = 500, a = 10，a =0. 02,炉(%)由(6.5.23)式给
10
出.根据以上数据经直接计算可得% = 502,
i=1 I=0.97.而r(9,0.99)=2.82>\W(x)|,因而观察样本不在
否定域，所以没有充分理由否定原假设，即没有充分理由认为这批罐 头食品不合格. |
(%,, -x)2 = 380,

已知
a = ^0

第六章参数假设检验 表6.5.1 一样本正态总体的假设检验
= "■0
a
未知
(r><r0 cr =rr0
弘o)2 -
T(x)/al <^(n) T(x)/ao >^.a/2
或<^^(近似〉
f ^2/cr/
J x2(n, y)dy = «
J*)/<
fk2/a^ 2
I X (^,y)dy=1 -a
『(太) -0
W(x) <ta(n-1) | 识(4 1 >g-„/2(^-i)
"0
M=Ao
否定域应满足的条件
"(幻 >^_a
或 鮮1郎、1
好為弘2
糾以么)]-0[:/, •(*,)]= 1-a
已知(r^a0
M <^o
M(<M<M2 /z</Z;或(X>/jl2
(T>£T0
a<<70 cr_<r0
i/(X) <2a 1u(x) | >z、_a/1
Hx) ~tr-x2(n) <T]矣o■或cr2 cr<<rt 或a>a2 i=1, 2
P-=Ao
或
弘i €T<(T0
<r>cr0 <r=tr0
o■矣rr,或
无解
无解
未知
(r><r2 CT] a
s(x)= s — 5(^)/(TO>^_a(n-1) 4=1
«)2~d;v2(n-1) S(X)/ffl<Xa(-1) 或<Z/2(近似) .
名a2
=1 - a
或
er, < o- < cr2
A>^o
A <Ao
Mi <M <Mz
M <Mi 或从 >/i2 cr>tr0

<r<cr0 <r#cr0
tr(<tr<(r2
cr <(T)或 cr >(r2
JT(x)=
VXn -l)(x -jug) 7F^
-i(n-1)
检验统计量
t/(x):/一弘0 <^0
~7V(0,l)
",(x) -/n
i=1, 2
T(x)=2(龙i_ r(x)/<^>x2i-a(n)
S(x) ~(TiX2(^ ~1)
i = l, 2
广产? 2
y (n - 1 ,y)dy = a
‘ ,X (n - 1 ,y)dy J S 々?
n
n

6.5多参数指数族的检验

263

6. 5. 3 两样本正态总体的检验

假设X,, ..., 冬独立同分布, X. (A独立同分 布, 7)N(fjc2,a}),并且二者也相互独立•记汐= 为 未知参数, 则两样本联合分布可表示为

f(x, y, *) = exp
Za, 2car2; a\{
m/jb2
a 2 J
(6. 5. 26)

其中6(汐)与心y无关, 且有

Qx= 2 心 2 (么一王)2*+n〒2, Qy= 2 = 2 (乃巧)2+7nr2-

isj I21 (1)比较两总体方差的检验

关于比较两个正态总体方差的检验, 它们存在一致最优无偏检验, 其检验的形式可归结为:

(i) H0:a[^a2^-^Hl:ai >a2.

(ii) =a2^^Hl:ai^a2. 为了比较两个方差,(6.5.26)式可化为

=exp{(由-点卜点(3)O +》+5卜_} = exp \eU + <p{Tx +<p2T2 +(p3T3 -b(0,(p)}, (6.5. 27)

其中6=(2(r2)1-()_, » "=
=-(20-2)-1, Tx=
i=l
”(P2=n^/a', T2=x; <^>3=m/L2/a2, A=7, T= 、
Qx + Q

因此a, =a2等价于^=0; 等价于^^0.为说明求解方法, 今 考虑检验(i), 该检验相当于由定理6.5.1,其否定域为R+={U(y)>^(OI,且满足 Peo\U>k{T)\T\ =a, (6. 5. 28)类似于(6. 5. 20)式的方法, 以下求函数F = F(U, T)使之当6^6.时满足: (a) F为t/的严增(或严减)函数;(b) F与r独立;(c) F的分布易求.则(6.5.28)式可化简为Peo\U>k(T)\T\ =Peo\F>c (.为此可取

^(xty)

(x,. - x)2/(n - 1) /=1
m
2 (厂-歹)2/(爪-1)
(U-nTl)/(n-l) (7\ -U
j=1 ys1 •
(6. 5. 29)
其中

因为由(6.5.27)式的记号可知
"=久，AH,X (人-歹)2=Z -U-mT^. 7=1 7=1
易见F为1/的严增函数，而且当沒=氐=0即A =a2时，F^F(n-l, m-1),其分布与参数 <p、，<p2，中3无关，而T=(T、，T2，T3)为完备充分统 计量，由Basu定理知，F与T独立，因此(6,5.28)式可化简为
因ffn c=
PW)=Peo\U>k(T)\T\=Pd0{F>c|=«, -a),所以检验问题(i)的UMPUT为
♦(F)=
1, F{x,y)>F(n-l,7n-l,l-a), 0, F(x,y) <F(n-l,?n-l,l -a).
关于检验问题(ii),可类似地由(6.5.29)式得到UMPUT,只是定 解条件复杂一些，从略.另外，若m:，M2已知，则仍可由(6.5.27)式 导出(i)和(ii)的UMPUT,只是F统计量为见表6.5.2.
(2)比较两总体均值的检验 关于比较两个正态总体均值的检验，是统计学中有名的Behrens-
,
(iii) 丑0 乡从2一打1 :Mi >从2. (iv) Hn =jlc2*-*//, :/I.
为了比较两个正态总体的均值，联合密度(6.5.26)式可重新表
(6.5.30)
当时，上式很难化简为类似于(6.5.27)式的形式，所以无 法得到检验(iii)或(iv)的UMPUT,而当a. = = a 时，上式则可化 简为
/(又，7,汐)=exp | 0U +(px7\ +(p2T2 ,
且未知的情形，有关的检验问题比
Fisher问题，对于一般的 较复杂(可参见下面(6.5.30)式)，不存在一致最优无偏检验，在文献 中有很多专门的讨论和求解方法.下面主要考虑一种常见的可求解的情 形，即但未知的情形.两个均值比较的检验可归结为

当沒=0，即fJL{ =/JL2 时有
T)' +’ ^)，"=U~"(0,
 m
> =1
nfjL\ + th/z2 (m + n)cr2
71! =nx +my;(p2 = -^7, T2 = xj 为说明求解方法，今考虑检验(iv),它相当于
由于6/的分布关于原点对称，因此由定理6.4.5以及定理6.5.2可知， 检验(iv)'的否定域为7T ={ |^(x,y) | >^(r)| , 且满足
Po] | [7| I?1) =1 - a- (6.5.31) 今考虑构造一个与前面F 类似的统计量.根据(6.5. 30)式，可取
U x nm(n + th -2) J，2 nm2yn+th
n+m n+m

(6. 5. 32) 因此(为a的严增函数，并且当=弘2时(即0=0时)，t(X,Y)-
其分布与参数p无关，而T=(T},T2)为完备充分统计 量，由Basu定理知t(X,Y)与T独立，因此(6.5.31)式简化为
M<KT)\T\ I <C!=1-a 且有c=f(n+zn-2，l-a/2).所以检验问题(iv)的UMPUT为
fl, <pU)= <
10
关于检验问题(iii)，可完全类似地由(6. 5. 32)式得到其UMPUT.
由(6.5.30)式可知，若且未知，则无法找到合适的完备充 分统计量T(X),因而无法求出UMPUT.但是，有两种常见的特殊情况
，
I <Z(n+zn-2,l - a/2).
|z(x,y)I >t(n+m-2,1-a/2), , .
可以求解:(1)若 =c已知(c = 形)，则把al=cal代人(6.5.30)式，根据与上面完全类似的推导，可 以得到类似的£检验统计量;(2)若已知 ，则由(6.5.30)式可以
得到正态检验统计量:U(x9y) = (% - y)A/t, t = a\/n + a\/m, U(Xf n ~ 7V(0,l).
表6. 5.2给出了两样本正态总体常用的假设检验及其检验统计量.
l 即为前面讨论的4 的情

表6. 5.2 两样本正态总体的假设检验
"o ", 检验统计量 否定域应满足的条件
<弘2 Ml>#2
^1, Ml
A1=^2 A
, y
) >z{_a
已知 弘1
Mi <M2
~"(O, 1)
n zn
n
y(xi -^i)2/n
t/(x,y)=->严一歹
J 厂ir
t/(x
[/(%, y) <za
1 "(x, y)| >z)a/2
F(x, y) > Fx _a(n,m)
尸(x, y) <Fa(n,m) F(x, y) >FI_a/2(n,m)
或 <Fa/2(a, w)(近似)
以, , y)= ---------------------
Z (人-弘2)2/泔 '■•1
-F(nfm)
未知 Pl,2 Ml >^2 t(x v> - /mn(m+n-2) _V m+n X
已知
Mi, cr, ^a2 M2 o-i =o-2

cr，>(r2 A <a2
(Ti = ^2
Ml為弘2
Ml=^2 Ml～2
x-y
ys ('•_^)2+z (人_刃2
~t(n+m-2) n
<Jo(n+m-2) 1«(«，y)1 >«i~o/2(^+^-2)
科1 <^2
[(龙,-x)2/(n - 1)
未知 O'.介2 tr,>a2 F(x，y)= ---------------------------- 尸(x，y)>,
卜。(n-l，?n-l)
Mi， M2
tr, <a2 cr, 一<r2
X (Z; -y)2/(m - 1) /-I
～尸(n-l，zn-l)
<Fa(n F(x，y)>Fl_a/2(n-ltm-l)
或 < ^«/2 (打- 1, m - 1) (近似)
B两种方法测量其溶化
tr，=tr2
(3)应用示例
例6. 5.3 对冷却到-0.72丈的样品用A,
到0 时的潜热，数据如下:
方法A: 79.98,80.04, 80.02, 80.04, 80.03, 80.03, 80.04,
79.97，80. 05 , 80. 03 , 80. 02, 80. 00, 80. 02 ;•
方法 B: 80.02, 79.94, 79.98, 79. 97, 80.03, 79. 95, 79. 97 ,
79. 97.
假设它们服从正态分布，方差相等.试检验:两种测量方法的平均 性能是否等价(取
a=0.01).
心,y >ti.a(n+zn-2
)
)
6.5多参数指数族的检验
解 设两种方法测量的潜热分别记为X和I 并设X- 2V(M1,a2) 和Y-A^(^c2,<r2).要检验
Ho =jLt2*-*ZZ1:fjLi -可用(6.5.32)式的 t 检验，检验的否定域为 = I (x,y) :
11 (x, y) | >^ (n +zn -2, 1 - a/
2) j .本例中，n=13, m=8,由直接计算可得%=80.02, y=79.98, Inm
t. -%)2+ (y>-y)2//n+m-2=/(0.006912+0.006727)/19
/ (x
=0.026 79.因此有
心 , y)
ffnr(n+m-2,l-a) =t(19,0.995) =2.861 <3.32= |右(x，y)
267
80. 02 二79. 98 0. 026 79~~
否定原假设，即两种测量方法的平均性能有显著性差异.
例 6. 5.4 为了比较正常成年男女所含红血球的差异，对某地区

156名成年男性进行测量，其红血球的样本均值为465. 13(万/mm2)， 样本均方差为54. 80;对该地区74名成年女性进行测量，其红血球的 样本均值为422. 16,样本均方差为49.20.试检验:该地区正常成年男 女所含红血球的平均值是否有差异(取a =0. 05).
解 设该地区正常成年男女所含红血球数分别记为X和并设 X - ,cr;)和 y ~/V(/ x2,o^).首先要检验 \ax ^a2. 为
此，可用(6. 5. 27)式的尸检验，检验的否定域为= j (x,r):F(%,y) > 1-a/2(n-1 -1)或<Fa/2(n-1,TH-1)I.本例中，n=156, m=74并 wn
已知工(X,.-i)2=156x54.82=468474.24, V (y>-y)2=74x49.22= i=1 y-j 179127.36.由此可得
F(x.y) =(-x)2/155)4-(J; (y.-y)2/73)=1.25. *=1 >=1
而F0975(155,73)«1.5, Fo>025(155,73)«0.65.因此观察样本不在否定 域，即不能否定=a2.从而我们可在a.=a2的条件下进一步检验 ^0:^ =ZX2~H1:/Z1 类似的检验例6.5.3已做过.以上结果代人 (6. 5. 32)式可得 t(x,y) =5.73.而 t(n+m-2,l -a/ 2) (228,0. 975) « 1.96<5.73=|i(x,y)l.因此应否定原假设，即该地区正常成年男女所含 红血球的平均值有显著性差异. ■
6.5.4两个二项分布总体的比较一等价性检验
比较两个总体性质是否存在差异，在理论上、应用上都是十分重要的 问题.以上讨论了两个正态总体的比较，下面介绍两个二项总体的比较.
因此应

假设X. ,?1), X2~b(n2, p2)，且独立.考虑假设检验问题:
(1) "O:P1 < 戶2—开1 :P1〉?2. (ii) H0:p,=p2^Hl:px#p2.
这种检验有广泛的应用背景，例如，在实际问题中， 可表示第Z车 间的次品率G = l , 2)，要检验两个车间次品率是否相等;或川表示一种 新的化验方法的阳性率，而久表示原有标准化验方法的阳性率，要检验 新方法与标准方法是否等价;等等.因此检验(ii)也常称为等价性检验.
为了得到检验的UMPUT,首先必须把(Xt,X2)的联合分布表示为 指数族分布的形式
2
/(^1，无2 ;P1，戶2)
ni = l
p?(l fl iI i=1
n
w)lo<
其中u=xtf 0=log)
1，2). 这是带有多余参数的指数族，假设检验(i)可转化为
根据定理6. 5. 1,检验(i)的UMPUT就是检验(i)'在条件分布U | T = X: | (X. +X2)下的UMPUTO而这个条件分布为
|t;沒)=P9(Xx =u|Xj+X2=f) 由直接计算可得
p人X、+x2
其中t• = min In, Q 多〜和0幻
p(u | r;^)
^e(Xi = =t - u) 尸(X, +X2=t)
u❷+t(p
» tZ=Xl +X2^ 妒=log(P2/92) , g, = 1 -Pi(i =
, y* =max |0,r 范围内。由此可得条件分布为
, 因为以上求和应限制在0

其中h(uft) 江人的为上式分母，因此这一条件分布为指
数族分布.检验(i)'的否定域应为= {u=x(>^(01 , 其定解条件由 沒=0时的分布决定.
而当0=0时
p(u|O =P0(Xj =u|Xt +X2=«) = 1 _ U1 (6.5.33)
为超几何分布，可根据PO(^1 >备(1)1^1 +^2=^1 +x2) =a定解.
例6. 5.5 为了观察吸烟与肺部肿瘤的关系，对23只小白鼠进行 一年的吸烟试验，结果21只小白鼠得了肺部肿瘤.另外有32只小白鼠 进行一年的对比观察，不吸烟，其中得了肺部肿瘤的有19只.试检验
吸烟对肺部肿瘤的影响.
解 假设试验组与对照组小白鼠得肺部肿瘤的概率分别为h 和p2.
则问题化为假设检验问题(i)ff0: Pi : Pi >p2,其中n} =23, =21;n2=32,x2=19.由此可根据(6.5.33)式，在条件t=xx+x2=
40下计算概率
P(u\t) =P0(X,=u\Xl +X2
其部分结果如下表所示:
n(o') =t)-—戶2, u=8,9,-,23.
(4o)
U 18 19 20 2\ 22 23 P(u\t) 0. 182 42 0. 096 01 0. 033 60 0. 007 39 0. 000 91 0. 000 05
由以上结果可知，P0(^i >19 | £) ^0. 04, P0(Xj >20 | 0 <0.01. 因此否定域可取及+ = \xx > 19 |(水平a =0. 04)或/T = | x, > 20 j (水 平a=0.01).由于实际观察值为=21,因此应否定原假设，即有充
分理由认为P] >p29即吸烟对导致肺部肿瘤有显著影响. ■ 基于以上公式的检验称为精确条件检验，计算上比较复杂.在实用 上，经常采用以下近似正态检验(当样本比较大时).首先介绍一般情
况，由第三章极大似然估计的性质可知p,=X/n,, i=l,2,且有
- -^7V(0,l), / = 1,2, yPiQi^i
易见Pi ~P2也有渐近正态性.因为Var(j$1 -p2) = +p2g2/n2 , 因
rr)

此有
九廬n. (6.5.34)
记S=Pl-p2, r=A -p29则由Slutsky定理去1律以及以上公式可得
卜6 九7V(0,1). (6.5.35) \jP + p2^2^n2
上式表明:Y=p{ -p2 -N(8,a2),其中 a2 =pxq\/nx +p2qt/n2 视为已 知.因此我们可以基于这一正态分布进行关于8=P' -p2的各种检验; 诸如Hq :8>50,//p:«=S.—H. ,等等(见表6.5.1 第 一栏)，但样本值只有r=A -p2 一个.
对于等价性检验(i)与(ii),相当于检验问题(i)zHo:5^0— /71; 5>0和(ii)'好。:5=0—戈j#0,这时80=0, (6.5.35)式还可进一步 化简.以检验(ii)'为例，由表6.5.1可知，检验的渐近正态否定域为 R+ = | \Y/a\ >z^a/2\.因为当仏成立时，5=0，即p,
=P1=p,因而 两个总体合为一个总体，P的极大似然估计为p = (X. +4)/(1 +n2). 所以(6. 5. 35)式可化简为
AA
U(xifx2) = -■
y/pq (nf' +n2_,)

因此，检验(ii)'，即检验问题(ii)的近似否定域为= { \U(Xi,x2) | > ^-a/2).类似地，可得到检验问题(i)的渐近正态否定域为/?+ = \ U(xl9 x2)J.

例6.5.5 (续)今应用(6.5.36)式求解假设检验问题Ho-P1

:Pi>P2,这相当于检验 :8>0.这时 =Xi/nj= 21/23=0.913; p2=x2/

n2=19/32=0.594;而当8=0时有/=(^+ ^2)/(n1 +n2) =40/55 =0. 727.代人(6. 5. 36)式可得

,%2)

0. 913 - 0. 594

/0?727 « 0.273 (23-'+32-1)

=2. 623.

而za99 = 2.326 < 2. 623 = U(x{,X1),所以应否定原假设(水平a 0.01),这与精确条件检验的计算结果很相近.

6.6似然比检验

由以上讨论可知，以Neyman - Pearson理论为基础的一致最优势检 验有相当大的局限性，特别是多参数复合检验，可解决的问题较少，限

--------(0, 1). (6.5.36)

制较大。本节介绍的似然比检验，其最初的出发点与N-P引理类似， 但是在实施上比较简单，应用范围非常广泛，是理论上非常重要.、应用 上最为有效的检验方法之一，其意义和价值与极大似然估计很类似.

6. 6.1 似然比检验

设 水一般假设!为分布族，考 虑假设检验问题

(i) e g 0! ; 00 U 0! = 0. N-P基本引理的出发点是似然比;类似地，我们考虑对应于检验(i)的 广义似然比如下:

A(x) = sup/(^,^) Isup/(x,^) = ((?’/)、, (6. 6. 1)

其中g和氏分别为参数0在0 和0。上的极大似然估计.易见A(%)^1, 其对数似然比为

LR=21og4(x) =2 |L(0) -L(^o)|.

我们来考虑假设检验问题(i)的否定域/?+. 若0。不成立，而我 成立，则当时/(*，幻应该很小，而当6^0.时/(*，幻应该较大. 所以广义似然比4(幻应该比较大，因此对于假设检验问题(i)，可定

义其似然比检验的否定域2T与检验函数(/>(*)分别为 R+=fx:A(x)>c|=|x: LR>k\, (6.6.2)

J, xeR^=|x:A(x)>c|, 炎(太)=卜，xe/?° = |%:4(«) =c } , (6. 6. 3)

1.0, x&R~=\x:A(x')<c|,

其中c与y 的值应该根据具体的假设检验问题，由条件EJ</>(%)] 6^0。来决定.

以上似然比检验既简单又直观，同时也十分有效.对于简单假设 检验 ..❷= A(x) =f(x, ❷')/f(x，0Q)就是 N-P 引理中 的似然比A(x)t 因此对于简单假设检验问题，似然比检验(6.6.3) 与N-P引理的解完全一致.另外，似然比检验对以下检验问题特别 有效:

(ii) Ho:0= *-*//,:0^60.

其似然比统计量可简化为 A

A(幻=君，艺，LR(0o) =2 \L{e) -L(e0)\. (6. 6.4) 以上公式是似然比检验中最常用的形式之一.由第五章定理5.3.8可知，

当n->+oo时(氏)的渐近分布为/(P),其中P为参数0的维数.另 外，第五章定理5. 3.9的公式都可用于以上似然比统计量，那里的公式实 际上是下面定理6. 6. 2 的公式(6. 6.

14）—（6. 6. 19)的特殊情况.
例6. 6.1设及，...，总独立同分布，X,～/V(/i，a2)，求以下假设
检验问题的似然比检验：（1）Hq :/z
（2）Hq:a=a0^Hl:a^or0. 解正态样本的分布密度与对数似然函数分别为
f{x，0、=(去)exp{-^t(x--^)2}>
L(❷、=-号log(2oT) --^-log(a2) (^, -^)2-
•_ 1 n
而 = (/x,cr2) , = (/l,a2) , /I =X, a2 =— (X,. -X)2,则有
乙(6)=-专log(2ir)-介log[去 S (尢• -x) j -介.
(1) 这时 =(Mo，ao), /20 =M。， :丄 X -g。)2，且有 n i«i
Ld =-ylog(2ir) — ylogj-l-g (x. — juo)2 — y .
A A A f 土 hi — A。)2 £/?(氏)=2\L(0)-M%)|=nlog -----------------
-2 — £)2 — i=l
其中
__________ (戈 -Mo) ^g(xf -x)2/(n-l)
~
n — 1).
6,6似然比检验
因此 2T =\LR(0o) >k \ ^\\W\>c \ ,
273
*广
lo, |『|<c,
c由E~[(^(X)] =a决定，这一结果与N -P 理论的一致最优势检验
~致 。 八 , 且有 (2)这时 =(/xQ,<To), /x0=x, ctq=<Tq
U0Q) = - -^-log(2TT)- -^-log(ao) - -^7 y 2 2 2<ro js=i
为求1?+ =|LK(0o) >c},把上式表示为 LR(§0) =g(t) = t — nlog t — n + nlog
n, t =
— i)2 .
王) ZJ?(氏)=nlog I _____ +(1)■厂" ----n+nlogn.
-S (人-^)2- i=1
i=l
由于^(0 =n/?>0,因此gG)为凸函数，从而zr可表示为
/r = |£/?((?0)>c I = |r<^ 或 t>a2(，
,、rl, T<k.或T>k2,
(/>(x)=
.0，kv <T<k2i
其中 r= 2 (X« -^)2/o-0 -x{n- i=1
1)， k2由以下条件决定:
rk2 2
) =g(女2)， 其中g(*i)=g(h\)(见图6.6.1)相当于
(k{/k2y =ekVek
P 理论的一致最优无偏检验略有不同, 但在实用还是取以下近似值:k' =x2(n
4--
? • ■ ■ >
■• •
rr.
.-XJ-
s. .£ c < 4 y : * 1

:. J y - k 5. *-
i
" d
a
J-_. 7 >
v:. . i . *
(n - 1 ,y)dy = 1 - cr 及
以上定解条件与N-
图6. 6. 1 以下几个例子都是应用N-P理论难以解决，但很常见的假设检验问题。
例6. 6.2设X,, ...，X„独立同分布，且X. + ,求以下
假设检验问题的似然比检验:Hq : (ji, = : fjb^O 解本问题用N-P理论解决比较困难，因为它不是指数分布族.
其密度函数为
-l,a/2), k2 =^2(n -1,1 -a/2). |
!叫 ...
E(、- 2
(xf - x)2/cTq .
k、, k2的定解条件
 i
—

代x，❷、 ,B, /u(1)外I. 记汐=(w), ^0=(0,^),则其极大似然估计分别为
夂=X(1)，a = n_1S，S = 2 (Xi - x(1));A)=0, cr0 -X. 因此有
A1A1
其中&由
^Peo(T>k)= a决定，而氏成立时有
n r_
n
=[i夂 L -x(1))」
由于A(幻为T=nx(l)/S的严增函数，因此有
R * = i A(x) > c } =
♦(X)= 1, 0,
^>4
T>k，T a(1) T<k， S’
1 ～r(土，1)，S~r(+
cr
» —5-X (2(n-1)).由此可得
-/2(n - 1) 因此由E,o[(/)(J)] =a可确定A的值:
=a.
因此有(n-l)A:=F(2, 2(n-l),l-a), A:=(n-1)-1F(2, 2(n-1), 1-a). |
例6.6.3相关系数的检验.设...，(A;,rj独立同分布，
,/z2,o-i,o-2，p),要检验丨与K是否相关，即H0:p= :P^O,求似然比检验.
解 记0 = ,f£2 ,a\ ,a} ,p), 则S的各分量为
Ai =又，"2 = ; cr\ =⊥ (J. - X)2, ar\ =:⊥ V (K. - 7)2 ; n «=i n <Tf
弘=0，nX(1) 29
n-l).
因此有—^ (1) -^2(2)
er a

e x"
,

p =丄土 (X, - X) (Y, - Y)/axa2. . n“1
当p=0时，除了 3。=0之外，么的其他分量与6相同，因此由直接计 算可得
由此可得A(x) = 示为
其中y/n-2p/ r(n -2,1 -a/2).
1 2irala2 4^ ~p
f(x , y, 60)
(1 -p2)-B/2, 它是f 的严增函数.因此否定域可表
~p2 ~《(n -2)(见 Zacks,1981,p.67).因此有 /I = ■
例 6. 6.4 多项分布的检验.设 X = (Xl9-,X ky - AfTV(n,7r),
,
. 求以下假设检验问题的似然比检验:7/0 : 77 = 7T0
77 =(7TJ -*丑|:7T #7F0.
解多项分布的密度为
/(X;77) =---■:----- ...%A!
其极大似然估计分别为TTi = X,./n, 7710 = 77-Q (i - 1, ..., k). 式可得
A(x) =^4=
/(欠;苁0) W UttJ
LR(7To)
R+ = | A(x) > c | = \LR>k }.
,7rJT
代人(6. 6.4)
(6. 6.5)
由定理5.3.5可知，LT?(770)-*y2(A: -1),这是因为[% =1，所以参 i=1
数7r的自由度为k - 1. (6. 6.5)式还可进一步化简，得到拟合优度统计 量，详见下节.
■ 注似然比检验与N-P理论的一致最优势检验不同，一般不能得 到其最优性.但是在一定正则条件下 ，它有很好的大样本性质，详见陈
希孺(1981,1999) , Lehmann(1986,1999) , Rao(1973) , Shao(1998).

6. 6. 2 子集参数的似然比检验及score检验
在通常的假设检验问题中，经常把参数0分成两部分， 为有兴
趣的参数，并考虑其假设检验问题，而氏为多余参数，上一节的例子 大多亦为这种情形，今考虑其一般情形.
假设参数0简记为0=(4,么)，其中久为门维，氏为p2维，考虑 假设检验问题:
好0:沒1 :沒1尹沒10(但沒2 未知). “ H
这时 6>0 = f (氏。, 氏), V么 I,并记 eQ = (010,e20), ( ), e0 = (‘, &(‘)),
其中从U H 为❷' =0氏时么的极大似然估计，则 由第三章的结果可知么=氏(4)，且有
Z(沒0):厶(沒10, 谷2(沒10)) =Lp(沒10〉, 1(沒)=1(沒I, (沒1)) :L人8'、. 其中
LP(❷、)=L(^,^2(^))为截面似然(见第三章).因此似然比统计 量可表示为
^(^0)=2 \L(0) -L(e0)\ =2 Up(^)-么(氏。)1, (6.6.6) 并且有 ZT =!£/?
(~)>c).
以下将证明，在一定条件下有LR(0'o) -^/(P1)(当n-^+oo时). 为此，首先回顾第五章

5. 3 节关于对数似然函数以及极大似然估计的若’ 干重要性质(见引理5. 3. 4).
假设弋，...，总独立同分布，且x, -f(x,e)9 e^of为c-r分布 族.A 的Fisher信息阵记为K❷)，X=(X1,...,Xn)T的对数似然函数及 Fisher信息阵记为£(幻和1(6). 今把有关的量按久和么分块，则由
5. 3节的结果有
z(8)#(q i/2(岣=0p(^/n), L(e)
^12
=Op(n),
乙22J
)， =(-^11-^12^22*^21)_'=Op(n~l),
r ..
E[-Z(沒)]=1(6) =ni(8) =
1 / IX}
/L L \-0P(n
•• 1
/_l(8) =Vr 另外，对于4=(‘，氏(氏。))，记
(沒)=(£21 £22) 1
, (^)=(, 严)
=<?(n_i).
p" z12a kAl ’22?
=0(n), Ii2\
 6.6似然比检验
277
"^10 >
、冷2 (沒10) ?
则有1.(0) =0, L2(0) =0.又由于中氏为H 时，氏的极大似然
估计，因此有L2(e0) =o.
引理6. 6.1 在以上假设条件和符号下，子集参数的极大似然估计
 A<9 A A
可表示为
证明
1pp 其中余项亦为p 维向量，其第a 个分量可表示为去Z
△A = +O/H-1), A02= -L^(0o)L21(do)A^ +O/B-1).
(6.6.7) (6.6.8)
(6. 6. 9) •
=0/1)以及
极大似然估计的渐近正态性可知，余项=0/1).由于L2(0o) =0,因 而(6. 6. 9)式的分块形式可表示为
L(0) =0在& 处展开可得
=L(S0) + t(0o)(0-0Q) + 余项=0,
叫 其中f为6与A之间的一点，
2 iTi jTi 由
 I 0)= [L2l
该式及下面的式子都在3.处计值.
0/1). (6. 6. 10)
因此由上式可得0=L21ᄼ& +L22A02 +
Op(1)，由于^22 =Op(n'1)9 所以有se2= A<9j+op(n'1),此即 (6.6.8)式.又由(6.

6. 10)式可得
(:)=-('X'卜(,)•
由此即可得到(6. 6. 7)式. | 定理6.6.1 在以上假设条件和符号下，子集参数的似然比统计量
其基于似然比统计量的近似否定域为/r =
证明(6. 6. 6)式的LRW)在么处展开有
LR(3i0) =2ZT(^O)A(9+(A^)TZ(^O)A(9 + 余项.
其中余项可表示为4-(A)-ji i 土 ('咚(4)扣城扣岣扣城, J »=1 j^ikTi
其中f 为点与A 之间的一点，
有渐近X2分布，即当^> +00时A7?(～)对于假设检验问题
化: 1^(^10)>/(?!, 1 -a) (•
由
=0/1)以及极大似然估计

的渐近正态性可知，余项=Op(n-I/2).因此的分块形式可表 示为
LR(0lo) =2£[A^ +2 L^62 + ( )t£u
+ 2(厶么)t£12厶氐+ (厶氐)TI22厶氐+0p(n_】/2).
把引理6.6.1的结果以及Lx(eQ)=-(mA +0/1),L2(0o)=0,
代人上式可得
LjR(U = ~2UA)T(Z")-'厶么十(A么)T£"A么
-2(A^)tL12L;21L2x + (AA)TLi2L;2lL2}△* + (n_+) =-2(A^)r(£,,)'IA01 + (A^)t(Lh -Li2L;2lL2l)^
+ <\(n-+)
= -(A A)T(乙 +Op(n-^)
=(^A^)t(-nLn) +0p(n-+)· (6.6.11)
以上L11等都在么处计值.根据引理5.3.4的结果可知
)). (6. 6. 12) 同时由引理5. 3.4可知n~l[-Z(^o)]^(^o),因而由极大似然估计的 相合性也有n'l(其中-Z表示在式处计值.因此也有
-nV'一i_D ， LR(0iO)=(^A^)t(-乜")_+(-nL")+ap(n-+).
(6. 6. 13) 由于(-nL")-+->G"(^))-+,因此由 Slutsky 定理以及(6.6. 12)式可知
(-,)-士(V^)"(0人),
所以由(6. 6. 13)式有 LR(沒i0)丄*义2 (Pi) (^-► + oo). 鹰
推论 1 对于任何 R =<9,o,都有 LR(❷J =2 \L{0) -[(<9,^(0!-^ /(Pi).
推论 2 若❷' =0，即 6>2 为空集，则有 LR(e') =2 (L(^) -L(l?)
以上定理和推论都是在独立同分布样本情形下得到的，但是似然比 统计量的渐近;T2性对于独立样本以及许多其他情形都是成立的.进一 步的讨论可参见陈希孺(1981, 1999) , Lehmann (1986, 1999) , Rao (1973)和 Shao (1998)等.
另外，由公式(6.6.6)可知，似然比统计量需要同时计算参数沒在
因此以上LR(U 可表示为

00上以及e上的极大似然估计e0和e,这在一些比较复杂的情形可能 会带来不少麻烦.以下介绍似然比统计量的两种渐近等价的形式.即 Rao的score检验统计量和Wald检验统计量，前

者只需要计算0在0。 上的极大似然估计;后者只需要计算0在0 上的极大似然估计，详见Shao(1998).
定理6. 6. 2 似然比统计量LR(❷...)可由score函数总(6)和Fisher 信息阵/(0)表示为以下score统计量的形式:
=SC(^IO)+w+), LR(u =scf(e[0) +%((+),
sc(～)={(彔)(4)彔(6.6.14) scDH(t)T(-z1'(4))tL。～ (6.615)
其中
乂由(6.6.7)式可知=-L^L.+0/H-1),以上统计量都是在00处 计值，因此有
^(^o)=G(+%(n_+). 此即(6. 6. 15)式.又由第五章5.3节的结果可知
一Z(60 =1(0) +a,,(n+), =厂'(4) +0p(n'3/2).
(6. 6. 16) 因此有-Ln =/" +O/t(n~3/2),该式代人以上LR(0、o)表达式有
LR(❷广 (-Ln-/u)Z]+ (n~T)=L\l{XLx+0p(n_t). 由此即得(6. 6. 14)式. | 以上(6. 6. 14)式和(6. 6. 15)式统称为score检验统计量，是 Rao于 1947年提出的，所以也称Rao统计量.score检验统计量在现代文献中 有广泛的应用，因为它只需要计算零假设氐成立时，即0在0。上的 极大似然估计么，这在很多情况下它比通常的似然比统计量(6. 6.6)式
更加方便.注意，若❷'=❷，即^为空集，则以上公式与第五章的定理 5. 3.9—致.同时，以上公式对任意的～成立，因此对任意的R成立. 另外，以下ITT)和 IFD'常称为Wald检验统计量，是 Wald于 1943年提 出的，也是似然比统计量(6. 6.6)式的一种变形，只需要计算0在0 上 的极大似然估计反
证明 由定理6. 6. 1的证明中的(6. 6. 11)式可得
推论 似然比统计量LR(0'o)有以下等价形式:

wd(0}Q)=(e}UT[广 U人?(Pl);
(6. 6. 17)
WDf(0}J=(A-～)T[U⊥*X2(P1).
(6. 6. 18)
证明 由(6. 6. 11)式以及Slutsky定理可得(6. 6. 18)式;再由 (6. 6. 18)式以及(6. 6. 16)式即可得到(6. 6. 17)式. |
例6.6.5 方差齐性检验.设%:，&, ...，为相互独立的样本. (J)若 (1)_'a2)，X, ~yV(0，a2)， 求以下假设检验
问题的score检验统计量: :cu = 1 :co # 1 ; (2)在(1)的假设下，观测到一组数据为-0.68, 0.18，-10.07,
-5.01, 11. 09, 9.93，- 9. 67, 28.77, - 1.95, - 15. 56, 8. 05,试 检验其方差齐性.
解 (1)记e} =co, e2=a2,则以上检验相当于Hq,0x =6>10 =1« H、:0'笋0'0, 可应用公式(6. 6. 14)求出score检验统计量.由正态性假 设可得样本的分布密度与对数似然函数分别为
当成立时，即(1)=1时，参数的极大似然估计为么=(1，9)， =
⊥ X n i=i
通过对以幻求导可得
孔 1 1 2 (dL\ 1/1 2/1 n (7)，UV了(1-x夂山
dL n 1 1 » 2 co 2 L 1 2 一了 汐
,

由此可得到00 = (1,^)处的Fisher信息阵为
2 cTo n
、
/(A)= 以上结果代人score检验统计量的公式(6. 6. 14)可得
6.7拟合优度检验
281
sc,= 。二少-况]～ 这时n = 11， 直接计算可得d = 143.685.
(6. 6. 19) 由(6. 6. 1.9)式可得
(2)
sc,的值(Z = l,...，11) ,如下表所示:
-0. 68 sc. 0. 547
-9. 67 sc, 0.067
0. 18 0. 550 28. 77 12.465
-10. 07 0. 048 - 1.95 0.521
-5.01 0. 375 -15.56 0.258
11.09 0.011 8. 05 0. 166
9. 93 0. 054
在上表中，SC8的值特别大，为12.465,而/(1,0.99)=6.635，因此，～对应的假设
H0:a)= 1被否定，所以这一组数据具有非齐性的 方差.同时，由于其他义对应的假设
H0:co = 1都未被否定;因而可认 为久有异于其他X,的方差. |
6.7拟合优度检验
给定一组数据，要验证它是否来自某一分布，诸如正态分布、指数 分布、Poisson分布、多项分布等分布，这就是拟合优度检验问题，主 要研究给定的样本是否服从某一既定分布.设X,，...， 为独立同分布 样本，拟合优度检验为
(x) 解决以f上检验问题常用的方法是构造一个拟合优度检验统计量D =
的分布不是 Fo(x).
(i) ~ F0 其中(幻为已知分布.这一检验问题也可理解为 “久的分布是否可 用么(幻来拟合?”
。)，且当芩～厂。(幻时的分布已知，诸如
/
/)(弋，...， 因此可取一个阈值Z)a,使尸。(幻成立时有
分布等.
PFq(D^ Da) =a. (6. 7. 1) a =0.01或0.05等值.由此可构造否定域为
/?+={%:/)(%,，...， F。) ^Da |，(6. 7. 2) 其中Z>a为已知，诸如/(?,1 -a)等.
拟合优度则可理解为以上检验的p-值，例如X的具体一组抽
样为X,=<...，夂=<，可计算出Do =P(x?,...
， 若D0^Da1则否定H。;若Do <Da,则不否定Zf。，而本次抽样的
P -值为
尸(Z)o) =PFo(D(X1,...,Xn;ro)>D0 I,
易见
,

因此，若p(D0)^a,则否定7/。;若p(P0)>«,则不否定H。.从拟合
的观点来看，也可作如下直观解释:即P(D0)越小，用(幻来拟合A
的分布越不合适;P(P0)越大，则用h (幻来拟合A 的分布越合适.因 此，p(Z>。)可理解为

用/^(幻来拟合X,的分布的合适程度，即拟合优度.
拟合优度检验与多项分布以及多项分布的检验有密切关系.本节的 主要内容就是关于多项分布的检验及其应用.

6. 7. 1 拟合优度检验与多项分布检验

例6. 7.1 孟德尔豌豆杂交试验.在此试验中，孟德尔同时考虑豌 豆的颜色和形状，颜色有绿色、黄色，形状有圆形光滑和皱皮之分，经 杂交以后，根据孟德尔遗传学理论，其后代的比例应为9:3:3:1.对杂 交试验的豌豆进行了 556次观测，其结果如下表所示，要检验以上 9:3:
3:1 律是否成立.

黄-圆 黄-皱 绿-圆 绿-皱 理论比例 9 3 3 1
观测值 315 108 101 32

这可看作一个多项分布的检验问题，共有4个状态:黄-圆、黄-
皱、绿-圆、绿-皱;做了 n=556次试验，检验其概率是否为&，▲， lo 10
31 ,就是
17, 16?记 a=556, ^V = (^l,/V2,/V3,^4)T = (315,108,101,32)t 要检验
Ho: /V～扁(556;备 A 各占卜一仫:7V的分布不是
9_3_ ±1
5W 其解法见下一小节.
以下例子说明，多项分布检验可用于很广泛的情形，并不仅限于多 项分布本身的检验.
MN 556
I^.
例6. 7.2 设久，)"•，夂独立同分布，考虑检验
,
的分布不是 Fo(x)(其中 7%(幻已知).
(i) Ho:Xj - Fo(x 这一检验可近似化为多项分布的检验，通常的做法如下:把数轴 (-00，00)分划为k个区间，(-00，00) = A U /2 U...U之，其中人=
I :X
1

(-«，～]，A=(～，a2]，...乂=(～_,，oo)，并记a0= —oo，ak=cc.
由于(幻为已知分布，可求出
pOt =PFo(Xl eZJ =F0(aJ i=l，...，k. (6.7.3)
同时可统计出观察值戈，...，又 落入区间A 中的样本个数久，如下表 所示.
4 ... \ n\ n2 ••• nk P01 P02 ' •• Pok
则N = (n'，...，久)服从多项分布，并可进行以下检验: (1)'Ho:N～
MN(n;p01,...,pok)—^Hl:TV不服从MN(n;pQl，...，pOk).
检验(i)'可视为上述检验(i)的一个近似检验.因为若芩~F0(x)成立， 则必有/V~A//
V(n; p01,-,p0J,所以若检验(i)'的7/。被否定，即7V不 服从上述多项分布，则X,
~F0(x)不可能成立.这种检验方法在实际问 题中经常被采用(注意，若(i)'的Ho未被否定，只能说明我们没有充分 理由否定假设岑~Fq(x)). 画
例6.7.3 含参数情形的检验，问题同例6.7.2,但假设～ F0(x) =F(x,6>), 0是未知参数;以正态为例，若F(Xi0)-N(^,a2)9 其中a2未知;则检验(i)化为
(ii) H0:Xt ～)*-*//, : JV,不服从 N(p,,a2>).
这一检验可用来验证样本...， 是否来自某一正态分布，即检验A
的分布是否属于正态分布族.这一检验化为多项分布检验的做法与例 6.7.2 —样，但是

(6.7.3)式化为

Pf0(X' e /,) =p0,(M, a2), i = i, ..., k.

即其中含有未知参数^2.因此检验(i)可转化为以下检验 (ii)' Hq :N - MN(n; p01 (/x,a2),...,pOi (弘, tr2)).

这是一个含参数的多项分布检验, 其解法见6.7.3. | 因此, 多项分布的检验可以广泛用于其他分布的拟合优度检验

问题.

本节的主要结果为拟合优度检验的/ 检验统计量, 都是基于渐近 分布得到的.而多项分布的渐近性质是其基础, 以下首先介绍这一性 质.关于多项分布的基本公式可参见第一章.

引理6.7.1设?V= (%, ..., 7V,)t服从多项分布MN(n, n), 77 = (7T, , ..., 77\)f , 则当 n—► + 00 时有

即

1n

— (r-Er)~7V(0,Var(X])), yn y=1

T„==y/n -n7r)-^-*TV(0,JS), X-g-7T77T.

(1) (2)

1

n n" 记 R 为以下统计量:

;

丄(jV-jut)->0(a.e.)或丄(乂:—JW,)->0(a.e.) i=1,..., k.

由(6.7.4)式 Yn的定义可得“ yn =g^Tn

A\ -mr}

E(r) =0;

yV- -nirl

Nk ~^\T /

(6. 7.4)

(6.7.5)

Ylt =

则有 其中

个多点分布之和, 即

2V= Z 乂, f=(々, .. · , 达), ;=1, ..., 打, (6.7.7) ;=i

其中xl, x2,..., ;r独立同分布, x1 ~mtv(i,77)为多点分布, 且有 E(X1) =7r, Var(X1) =^=g-7777T.

1n

(1) 根据独立同分布情形的大数定律可知丄y (xj -

n jT{

0(a.e.),由(6.7.7)式及 E(T) =77 即得丄(TV-柳)—>0(a. e.). n

(2) 根据独立同分布情形的中心极限定理可知

7V(0, A), A=Ik-棘 T,

汐=(7^7,..., a/^T)T=茖_1/2开订,, 茖=diag(77"..., TrJ. (6.7.6) 证明 由于/V=(/V,,"., A\)T服从多项分布W(n,7r),它可视为n

(0, +為4) =/V(0,A).

其中4 =发•了(茖_7777T)茖•+ =Ik -艸飞. I

6 · 7. 2 多项分布检验的Pearson定理

假设观察值为/V= 要检验它是否服从某一多项分

布，前一小节的例6.7. 1和例6.7.2都是这种情形.因此我们考虑 检验:
(i) H0:N-MN(7i,7T) /1:N不服从MN(n, rr)，其中7r为已知.
exj)->

为了得到检验问题的否定域，必须寻找一个统计量，使得当仏成 立时该统计量有方便的分布.由引理6.7. 1可知，•若 N-MN(n,rr)，
则rn- /V(0,4).但是下面将看到，这是一个多维的退化正态分布， 使用上不方便.很自然会想到会有渐近;r2分布，并由此可得到检 验的否定域.下面给出具体的证明.
引理6.7.2 若Y^N(QJA)*k 维正态分布，其中A为投影阵， 秩为r, a 的谱分解为a = rdiag(/r,o)rT, 其中r = (r,, r2)为正交矩
， 阶.则z = rTr可分解为ZT =(Z?,ZI),其中 z, -/v(o,
阵 /J, z2为退化分布P(Z2=0)=1,且有
K=rIz1 +r2z2 =r1z1 十心(1). (6.7.8)
证明 可参见定理i.3.i.由假设可知，z=rTr~7v(o, rTAr)，
而rT7ir =diag(7r,o),因此z的第一分量久～叭0乂)，而z的第二分
量为退化分布p(z2 =o)=1,又由于r=rz=r.z,+r2z2,即得 (6.7.8) 式.
定理6.7.1 (Pearson)对于给定的概率向量tt, 若 TV服从多项分 布 M/V(n,77),则有
(6.7.9) -a)|.
A/ -nnA2,
I~
,=i \ y/riTTi)
因此假设检验问题(i)的否定域可表示为R+ =\Kn 证明由引理6. 7.1可知
----- --X (女-1), *+00.
>
心=6坨，rn^(0,A). 容易验证，八=1k-艸'为投影阵，因为4T=A, A2=d-艸')(Ik-
,
i=1
tr(A) =k-h设A的谱分解为A =rdiag(Zft_1,O)rT,并作变换A = rTyn,则由引理
6.7.2 可知 + r2z2, ,zj),其中 z\ , Ik_') ,Z2 -^*O(n-► + oo).因此有
Kn=rIrn =(rzn)T(rzn)=z:zn = +zjz2.
由于Z2-^*0, Zf)(n-►+oo),因此由Slutsky定理可得 (6.7.9) 式. ■
例6. 7.1 (续)本问题的检验前面已经给出，其中n =556, N : (m ;V4)T=(315,108, 101, 32)t,p(备各吾，占)，k=4.
T)=忍-种\注意
k
= 1) •因此A的秩为rk(八)=
代人Pearson公式(6. 7. 9)式可得

火„丄义2(3)，而/(3 , 0.95) =7.81〉尺„ =0.47，因此2V不属于否定 域，从而不能否定H。，即不能否定9:3:3:1律.另外，可算出相应的 拟合优度，即P-值，它等于P1/(3)>0.47J-0.90,拟合优度很 大 ，所以可认为9 :3 :3 :1 律十分可信. ■
例 6.7.4 对某地区男性公民的疾病调查中发现，在一段时间内男 性公民因“无先兆突发性心脏病” 而死亡的人数为65人.若按星期几 分类，死亡人数结果如下表所示.试检验:该地区的男性公民因“无 先兆突发性心脏病” 而死亡是否与星期几有关(a=0. 01).

星期一二 死亡人数 22 7
三四五六日 6 13 5 4 6
解 记 71=65, 7V = (W , 2V2,2V3,2V4, /V5, /V6, iV7)T =
(22,7,6,13,5,4,6)T, 问题就是要检验
H.:W - MA^(65 ;1/7,1/7,1/7,1/7,1/7,1/7,1/7) :/V 不服从该 分布.
其中77=(1/7,1/7,1/7,1/7,1/7,1/7,1/7)T, k=7.代人Pearson公式 (6.7.9)式可得 Kn =26. 76,而妒(6, 0.99) =16.812 < Kn =26.76.因 此/V属于否定域，应否定原假设H。，即认为该地区的男性公民因“无
先兆突发性心脏病” 而死亡这一事件的发生，在一星期中不是等可能 性的(由上表可知，假日后的第一天，即星期一的死亡率特别高). |
6. 7.3 含参数多项分布的检验及Fisher定理
与例6. 7.3类似，考虑以下假设检验问题:
(ii) //0:/V-W(n,7r(^)—771:/V不服从该分布.
其中 N = (N', ..., , TT(O) =(7Ti(0) 参数 0=(氏, ...,
t)T未知，且p<k.这类检验比前一小节讨论的，77已知时的检验(i)有 更广泛的应用，也更加符合实际情况(见下面例题).
首先提醒读者注意，对于任意固定的^以及77 = 77(^),前一小节 中有关多项分布的性质都成立，例如，若N (❷))，则对任意 固定的6有
/v= $ r, r~觐(1, 订(8)),

E(/V) = , Var(/V) =nS(6) = n \g(6) - tt(沒)vrr(沒)f. 特别，引理6. 7.1和6. 7.2在77(0)处都成立，即当n~> + oo时有
—]N—mr(沒)} -►O(a.e.), V0,
其中A(6>)=八-少(沒，少(4)=(人(8), ..., (8))T.同时 也有
但是，在检验(ii)中，参数a是未知的，很自然的想法是用0的某 个估计代替.以下将证明，若坑成立，则有
- “、T
N“、
Yn(0)= ♦7V(0,A(4))
,
7V‘ - mr^e)
义2(人 _戶 _ 1), n-►+oo
其中6为参数<9的极大似然估计.该式与Pearson公式(6.7.9)式相比， X2分布的自由度减少了P个，这是因为参数77变为多了p个
约束. 以上公式的证明显然与参数<9的极大似然估计有密切关系，因此我
们首先要了解含参数多项分布N^MN(nf7r(3))中，参数0的极大似然 估计的基本性质.下面首先介绍这方面的内容.
若N ~ W(n,7r(6>))，则/V关于参数0的密度函数和对数似然函数 可分别表示为
P(ni, ..., ~;7F(沒))=— 7-^------ 7T?(沒)...77?(0), 71, --JI.
(6.7. 10)
其中C为与0无关的常数. 参数e的极人似然估计e的性质与对数似然函数1(60及其前几阶导数有关.由(6.7. 10)式可知，这些都涉及到7T(~)的导数，今记
^Li\ den]
引理6. 7.3 矩阵D(0), B(幻在任何a处满足关系: lrD=0, =0, AB=B, APB=PB.

其中 1 = (1, ..., 1)T, Pb=B(B飞B) H

B 的投影阵.

证明由I77,(0)=1对氏求导可得

i=1 I 由此即得rz)=o.由b 的定义有

i/jTB = i//Tg ~~D = 1 fD = 0,

AB = (Ik-^)g-yD=g-^D=By

APb ~lBy =5(BtB) _1Bt =Ps. | 引理6.7.4 对于多项分布叫n, 饤的), 假设0的参数空间 沙为R'上的开集;77(69在参数空间<9上关于0存在三阶以上连续偏 导数;B(幻为列满秩矩阵.0 的极大似然估计记为么 且假定其真参数

氏为0 的内点, 则有

(1) ^(0) =ST(a)yn(a)九7V(O,5t(0)S(0)); y/n

(2) =BT(e)B(e)+op(«-,/2), e[-Z(9)]= (9)5(8), 士 z/3)(8) =ap(1);

Tl

A

13L1* _JdTT, n,7ri

代人上式有

2k dTT人 0、

(3) A0=0-0o=^[(B^B)~}BTYj0=ffo+Op(n-1). yn

证明 由A(/9)的公式(6. 7. 10)式对氏求导可得

(6. 7. 11)

=

I d0a 1 1 d0a

▲a , ,) - 42

其中^和K分别为b(0)和yn(w的分量, 因此±L(e) =bt(0)y„(0). yn

而由(6.7.5)式及引理6.7.3可得 ^(O)Yn(0)-^N(O,BrT(e)A(0)B(0)')

^N(Q,BT(e)B(0)),

卵丄人丄

-I

:

丄

因此可得结论(1).同理对上式继续对0求导, 通过类似的计算与推导 可得(2), 细节从略.

为证明(3),对 =0在氏处展开可得

K人e) =r:(^)rn(^) =

- n7Ti(3) ■

L(^o) +Z(6>O)A<9 + 余项=0,

(6. 7. 12)

其中余项为P维向量, 其第a个分量可表示为 1pp

丁ZZn~1 厶 i=1 ;=1

y/n^ej ,

其中6 为 6 与氏之间的一点, 由极大似然估计的渐近正态性可知, 余 项=0/1).利用以上结果以及(1)、(2), (6.7.12)式可表示为

1 . Z(^o)

-~L(00) +- ^A6> + Op(n"~) =0,

4^ n

STr -(BTB+Op(n-^))v^A^ + Op(n-^) =0,

(BTB)77TAl9=BTyn +%(n-+). 以上各式均在氏处计值，由此即得(6.7.11)式:
y/n
定理6. 7.2 (Fisher)在引理6.7.4的条件下，有
(6.7. 13) 证明 为方便起见，今记X^Y表示随机变量X和r有相同的渐
近分布，并记 77, = 7Tf((?) , 77, = •77,(%),则由 Slutsky 定理有
Kn(6) = f f [况- (10)\(<%)] - [n7r/6) -TiTr/j%)]
X❷ a(公,-%)■
^,.(^0)]2 订i (4)
=S 1
4
i=1
k rTV.
E(^-^)2^(Kn-t/n)T(K.-t7J, (6.7.14) i=1
其中y„和un的分量分别为
V -n7r«(a。) rr _ J
1ni 厂. 丁 , Uni=
Vn7ri() y/niTi(0Q)
由引理6.7.1可知，Yn ^Af(O,A(^o))，以下主要推导%的渐近分 布，Uni可展开为
[redacted] 二
1

7(2卵，、’ 1 么deadOb i\[n^6a
=-
由矩阵B 的定义可知，上式的向量形式可表示为 Un :仰冰)，0人nS
= B(BJB) -]BTYn+Op(n'^) 因此由(6. 7. 14)式可知
Kn(e)(yn -pBrn)\Yn -pByn)= 由于y„lN(O，A(0o))，由引理6.7.2的(6.7.8)式可知Ya^rtZt9 代入上式有
(6. 7. 15) 其中Z, 4 = r}(/厂匕)rr 以下证明矩阵4为投影阵,
且秩为k-P-1，显然有at=a, 另外 W=r,-r^A-pjr,.
. 这些结果代人A2
42 =r^(/t-pB)(A-APB)r1 =r:(/fc-pB)(r1r;r1 -pBrj =rl(ik-pB)dh-pB)rl = 儿
由引理6.7.3可知r,r^ =4, AB = B, APB =PB
可得
因此4为投影阵，其秩为 rk(4)=tr(4)=trirj'r,-TTi^)
=trIA-1-^PBI =A:-1-tr(PB)=k-l一p. 因此由(6. 7. 15)式以及正态向量二次型的性质(见1.4节〉可知K(J)=
zMi
例6. 7.5
t
I). I Poisson分布检验.观察了共1 008个细胞单位，并测试
2(々
每个细胞单位所含白血球的个数，要检验它是否服从Poisson分布.数 据见下表:
k01234567
nk 64 171 239 220 155 83 46 20 6 3 0 1 1 008
其中A'表示细胞单位含白血球的个数，久表示1 008个观测单位中，含 &个白血球的细胞单

位的个数.
PB(eo)Yn(0o).
8 9 10 11
总数
-pB)y.

解 这相当于观测了 X,,X2 ,-,X 1008个独立同分布样本，孓表示第
/个细胞单位含有白血球的个数，取值为0，1，2,...，11，...等等;久则表
示观测样本中取值为&的样本个数;问题为
(i) ~ 某一-Poisson 分布尸(A *Xx 不服从 Poisson 分布.
问题可化为含参数A 的多项分布检验问题，与例6. 7.3类似，把 1 008个观测值分为10个组，其中7.=(含有Z个白血球1=0,1,-, 8, Ig = |含有多9 个白血球丨，并记% 表示观测值中属于 < 的个数，则 有N,=n,., i=0,...，8; N9=4.若Xx ~P(A),则有
U, | =PA(X, =0 =e_A* A 77,(A)，i=0,l,...，8.
779(A)=pa \i9!=1
记7V=(/V0,/V1,.-,/V9)t, 77(A) =(tt0(A),7T1(A),...，779(A))t，则可
考虑以下多项分布的检验:
(i)' HO:N-MN(1 008,77(A) :7V 不服从 MN(1 008,tt(A)).
对此检验，可应用Fisher定理，其中n = 1 008, k = 10, p = 1 , Kn(A) Wh-
l)=^2(8),即
尺,，(又)= I /=0
Nt -niTj(A)• 2 7177, (A)
~2(8).
A的计算比较复杂，通常可取原来样本1，...，又|008, X,~尸(A)中A的 极大似然估计作为近似.这时有A =2.82,由此可算出Kn(A)= 2.614,而/(8,0. 95) =15.51，因此不能否定7/。. 其拟合优度，即 P-值=P(x2(8) >2.614) -0.95很大，因而开。可信，所以亦可认为
可信. ■ 6. 7.4 应用:列联表及其等价性和独立性检验
多项分布的检验对于列联表有重要的应用，以下通过两个例子说明 其意义.
设又有r个状态4,，...，人;^^有5个状态B、，...， 则(久，久)有ns 个状态，假设进行了《次试验，出现的次数为^,概率为～， 并假设
z:
记/V = (/V,y) J
， 7T=(7r (/
服从多项分布 N - v(称为2维rx>s 列联表:
2 2 Nu=n- 1=1 /=1
j=1,...，s)为k=rxs维向量，则;V /V 的观测值排列起来就是一个列联表，
把
二
熏
—
、扁

方-

"22(苁22)
々.2(苁.2) n
N、、 n2'
B2 ..
N'2 .. . N't N12 ..
Nrl ... Nrt
基于多项分布的列联表有非常广泛的实际应用和丰富的统计推断问 题 ，以下介绍其中两个常见的实例.
例6. 7.6 等价性检验.假设对〃个病人志愿者用两种方法进 行化验(例如化验肝炎等).应用新方法(例如为验尿)和标准化方 法(例如为验血)进行化验，其结果为阳性、阴性的人数%.和概率 77^列于下表:
标准方法 +−和
新 + (苁")
N'.h、.)
^2.(^) 法 和 i(7T . !)
" 2 . (7T2 .)
其中/vn表示化验后新方法为阳性，标准方法亦为阳性的人数;Nn 表示化验后新方法为阳性，标准方法为阴性的人数;其他类似.~:表 示新方法化验为阳性，标准方法化验亦为阳性的概率;7712表示新方法 化验为阳性，标准方法化验为阴性的概率;而 . = 7Tn + 7712则表示新 方法化验为阳性的概率.同理77., = 7Tn + 7721表示标准方法化验为阳性 的概率，其他类似.等价性检验问题就是要检验.:新方法化验和标准方 法化验效果是否等价，因此问题可化为
由于 77卜=77), +77i2, 7T =7Tn 十7721 所以上述检验问题等价于
.|/|
hl :贫12六开21. (6.7.17) 本问题为一个2x2=4格列联表，N = ~
MN(,w,77)为四项分布，77=(7F11,rrl2,7r21，tt22)T.应用 Fisher定 理可得
定理6. 7. 3 等价性检验(6. 7. 16)或(6. 7. 17)的检验统计量为
. #丌 ,因此77卜=77.|相当于77,2 =772,,
(6. 7. 16)
6.7 拟合优度检验
293
其否定域为7?+ = , 1 −a)I.上式通常称为统计量.
证明为了求解以上检验问题，可应用Fisher定理.为此，定义
77(权)如下:取7TU= , TT、2二❷2，则^=(^!,)•在好。成立时^ij= 开0 (沒)
为:7T"=沒1，7T12 =沒2，772] =029 7722 =1 − R − 2氏，即 k =4, p =2,
由 Fisher定理有
A 2 2 A^.. − 717F • (^) 1 , 嗔H ~2(灸
»=! J=1
(6. 7. 19) 对于以上多项分布，可求出Ho成立时(即7712 = 7721时)参数0的极大似然估计为(见第三章例题) A
因而有
0
X
=7Tn=−, e2=7712=———. Tt 2^TL
yn77t
y(^)
ti)=/(1).

jVjJ - A
N、2 +N2l
AA/V|| AAN+TV” ^1(^)=01=–,~❷, —^–
开21(^)=02, 7T22(3)=1–A–202=–. n
这些结果代人上述(6. 7. 19)式，经简单计算即可得到
Kn(0) ± Z=(4–~)2 –/(I). (?v12+/v21)
例6. 7. 6（续）对300名志愿者用两种方法进行化验，其观测结果 为:/V"=211，/
V12=19,N2l=7,N22=63,这些数值代人 统计量 得7=5.23，而/（1，0.95）=3.84,因此否定7/。，即说明两种检验方
法不等价. ■ 例6.7.7 独立性检验.要检验某种感冒药，其疗效是否与年龄有
显著尽
较差 23 18 14
总和 109 100 91 300
W(1).
(6. 7. 18)
关，对300个人进行调查，其疗效与年龄的关系如下表所示: 少年4, 成年a2 老年么
总和 58 38 32 128 —般 b 2 28 44 45 117
55
294
第六章参数假设检验
本问题为3x3 =9格列联表，假设年龄X分为少年、成年、老年（即4,，42,43),疗效r分为显著、一般、较差(即U 2，B3)，而(Xe A^Y^B.)的人数为/V,y，概率为77y(Z=1,2,3; j=l,2,3),因此/V=
(^•)服从9项分布/V~M/V(300,7t),若X， 独立，即年龄与疗效无
关，则应有
770=P(XeAMyGBy) =P(XeAf.)P(yeBy), i = l,2,3; ;= 1,2,3.
这种独立性检验可推广到一般情形.我们考虑本节开头讨论的2 维 rxs列联表，这时X有个状态，F有B、，".，Bs个状态，要进 行独立性检验:
=P(X^Ai)P(Y^Bj) 9 Z = 1, ..., r; y = l,–,s. (6. 7. 20)
3S
由于 P(XeAf) =P(U (^e4,,reB.))= 工 77,=^.，同理 P(Ye ./=* j=i
T
Bj) 工~.因此，以上独立性检验可化为
1=1 , ^0 =7T,. tTTij^TTi. n ,j9 i = 1
应用Fisher定理可得
,r; J = 1，“.,S.
(6. 7. 21)
定理6. 7. 4 独立性检验(6. 7. 20)或(6. 7. 21)的检验统计量为
1r N2 \
K^=n[Z 2 (1)，£=(r'1)(5_1)*
(6. 7. 22)
其否定域为/T = 〉/((，–1)0–1)，1 –«)}. 证明为了求解这一检验问题，可设法应用Fisher定理.为此，根
据以上关系可定义一个函数7T(0)，取0=(77,. ,7T2.，...，町(r_u.;77.,,
77 ... .(..–1))T» 其维数p=r+s–2,这时有
7T;. =0"i=1,•••,r–1, 7Tr. =1– –––––––0r_、，

TT.j=Gr_、..._/•=1，...，S−1，7T.c =1 −7T.)−−−−−−一开.(:−"• 若^成立 ，
则有
^y(^) =77,.77.;，I = 1 ， ,f; J = 1,−−−,S， 而的计算可直接从多项分布(6. 7. 10)式得到:
.N
77■− =丁 ，77−j =~7~，f = 1,...，r; ■/ = 1，...，《5，
SF
其中/v,. = 2 乂，N.，2〜，因此当坑成立时有= 7 = 1 i =: 1

NN
−^−A这些结果代人公式(6.7. 13)式可得 nn
定理6. 7. 5 尺(幻，其中
在一定正则条件下，久−>0(a.e.)，且有
x 0,
x < 0.
〜)= z 2 1=1 ;=1
卜AM snn
乂2(1) ，
n −−−−−−−−−−−− nnJ
其中自由度t=k−p−1，k=rs， p=r+s−2,可得Z=rs +2−1
(r−l)(5~l).上式经化简即可得到(6.7.22)式. ■ 例6. 7.7 (续)把公式(6. 7. 22)式用于本例可得Kn(0) =13.59,
而 £ = (3 − 1)(3 − 1) =4， x2(4,0.95) =9.49 <Kn =13.59,所以应否定 尽，即“疗效与年.龄独立” 这一假设不成立，认为该感冒药的疗效与 年龄有关. I
最后我们简单介绍一下Kolmogonov拟合优度检验统计量，通常认 为它是最精密的检验统计量，有关结果的证明比较复杂，以下仅介绍其 基本公式，详见陈希孺(1981,1999).
设A ，...，及为独立同分布样本，要检验它们是否服从某个已知的 分布函数F0(x):
"0:尤I〜尸0(文)一*"1 :义1不服从f'o(x).
检验的出发点是经验分布函数Fn(x)， 其中Fn(x) =n−1 ^ 中矣a:的个数I.由第一章的定理1. 1.2可知，当n−> + oo时， − F0(%)(a.e.).因此Kolmogonov取以下统计量来度量样本分布与F。(x)
拟合的优劣程度:
Dn=−SUP I ~Fq(X) 00 < X < 00
反映了用F (%)拟合F。(幻的总体偏差.
，... ，^
以上假设检验问题的否定域为R+={^Dn>A._J,其中为分布 尺(幻的1 − a分位数(函数K(x)有表可查).
习题六 1.在以下假设检验问题中，求检验</>(幻的第一、，第二类错误以及

在义情形下的功效:
(1) 设弋，X2，X3为i. i. d.样本，弋 服从两点分布b(l，0).考虑
假设检验问题= 检验(/>(%)的否定域为R+ =
U, +A +X3^1 |;
(2) 设弋，%2相互独立，都服从Poisson分布P(A).考虑假设检验

问题H0:A=y ~//1:A=2.检验</>(%)的否定域为尺+ =1%, +X2多3 !.
2. 考虑简单假设检验问题Ho:0=3o^H}:O^0l.对于以下分布密 度在一样本情况下, 求检验问题水平为a(0<a<l)的MPT:
(1) f(x;0) =20'2(0 —%)/ }, Oo < 0}
(2) =2[快x + (l - 0)(1 —x)]/ <沒0彡1. 3.考虑简单假设检验问题
Hoif(x)=f0(x)—Hl:f(x)=/t(x).对 于以下分布密度人(幻和Z(x),在一样本情况下,
求检验问题水平为a
(0 <« < 1)的 MPT:
(1)f0(x)=I |, /(%)=2x1j0彡x矣1 J; (2)f0(x)=I)0 x 1|,/j(x)=4x1j0<xCl/
2(+(4—4%)•
I(l/2^x^l ;.
4. 设X:, ..., 弋为i. i. d.样本, 求以下假设检验问题水平为a(0<
«<1)的MPT: HO:6>=1—H]:6>=2. (1) X,服从均匀分布7?(0,6>); (2) X、服从冷分布BE(❷, I).
5. 设久, ..., 兑 为L i. d.样本, 考虑以下假设检验问题=
r 求检验问题水平为a(0 < a < 1)的MPT
氏_—"Hi :0 = 0
(1) 如“❷)=e_(v〉/\x^8|, ❷'<e0; (2) f(x[;o)=2e2x~3i \xt^e }, e{ <oo.
:
6. 设X,, ..., 叉为i. i. d.样本, 戈~r(A, p), 其中P >0已知, A >0未知.
(1) 求假设检验问题//。:A = Ao*— : A = A! (A! > Ao)的一个水平 为a的MPT;
(2) 求(1)中的检验函数冷(叉)的功效函数氏(A), 并证明其为A 的增函数;
(3) 证明(1)中所得的MPT是以下假设检验问题的UMPT: (a)//。: A=Aq*-*//,:A>Ao;
(b)H0:A^A0*-*//,:A>A。.)j:/(x)=/j(x).
7. 考虑简单假设检验问题 Hoi /(x) =f0(x

(1) 证明:以下4>^x)为上述检验问题水平为a =0的MPT,并且
在R+ UR~上唯一,
fl, %e/?+ = \x:fQ(x) =0, /i(%)#0 },
</>i(^)=j » x&R°=\x:fQ(x)=0,/i(%)=0| , 0<y<1, lO, xg/?
_=\x:f0(x)#0i ;
(2) 证明:以下小2(幻为上述检验问题水平为a = 1的MPT,并且 在尺+ U /T上唯一,
1,
x g R+ 其中A={x:f0(x)t^O| ,B=|x:^(%)#0| ,0<y<1.
8. 设小(x)为N-P基本引理导出的MPT(见定理6. 2. 1的(6.2.2) 式), 其水平为a的否莛域为R+ = IA(X) >c ;,且满足P,JA(X) > c} =a,其中c可看作a的函数c=c(a).
(1) 证明:c(a)为a的非增函数, 即若a, <a2,则c(ai) c(a2);
(2) 若 A(幻的分布函数连续, 且 a. <a2, 证明:当水平a = a, 时, (/>(x)犯第二类错误的概率不小于水平«=«2时 </>(幻犯第二类错误 的概率.
9. 对于简单假设检验问题Ho;0^0o—Hl:O = Oi以及水平a(0 < a < 1)• 设(/>(x)为上述检验问题水平为a的MPT,且 [(/)(X)] < 1.证明:检验1 - 是假设检验问题:0=00的一个 水平为1 —P的MPT.
10. 证明以下分布族为单调似然比分布族:
(1) A欠,M) : MeR 未知, 6>〉0 已知;

(2) U(0, 0 + l) : 6>eR;
(3) U(x): ^gR I, 其中fe(x) =c(0)h^)I 且A(幻和c(幻都是正函数, a(幻和6(幻都是6的非降函数.
(/>2(x)= y
%e/?+ -A\JB, -
11. 对习题5 中的两个小题的分布族:
(1) 证明其分布族为单调似然比分=布族;
(2) 对于简单假设检验问题HQ :❷ 个水平为a 的非随机化的MPT;
:沒=久(久 <沒。), 求一
,
,
(3)对于假设检验问题U彡0d:0〉0o,求一个水平为《的 UMPT.

12.设 X,, ..., 为 i. i. d.样本, A ~/(x1;^), Oe&CR.在下列
情况下, 基于;T2分布(见第一章习题), 求假设检验问题Ho:0^oo^ H. :0>OQ 水平为 a 的 UMPT:
(1) =0~xe^I)x^0 }, 沒〉0; (2) f(Xi ;6) =(9%^ */ (O^x.^1) , 6>>0;
(3)
%1 ^0 I ,其中0>0未知,
c >0已知.
13.求以下单边假设检验问题水平为a的UMPT:
(1) X服从超几何分布A(x(n;/V,M),求检验770:Af^M0—H.:
M >M0的 UMPT;
(2) X 服从负二项分布NB(r, ❷), 求检验Hq-6^0q— Hx-0 > 00的
UMPT.
14. 设X:, ..., 叉为i. i. d.样本, X,服从两点分布b(l, p).
(1) 求检验Ho:pCO.02—//,:P>0.02水平为a=0.05 的UMPT;
若要求这个检验在p =0. 08时犯第二类错误的概率不超过0. 1, n 要取 多大?
(2) 某厂生产的轴套出厂标准为次品率不超过2%,现从一批产品 中随机抽取400只轴套, 发现次品12只.在水平为a=0. 05的条件下, 是否应允许这批产品出厂?
15. 设弋, ..., Xn为i.i.d.样本, 1表示寿命且服从指数分布
r(y,i).现仅观测到前r个寿命的值:(};, ..., rjT = (X(1), ...,
^(7))T.
(1)对于假设检验问题彡0Q_H 口0〉00,求其UMPT的功效 函数;
(2)设某元件的寿命服从指数分布r(y,l).今对12个元件观测
其寿命, 仅测得前6 个元件的失效时间(小时)为1 380, 1 510, 1 650, 1 760, 2 100, 2 320.在水平为a =0.05的条件下检验:元件的平均寿 命是否在2 000小时以上?
*16. Xi9—,Xn为i.i.d.样本, n^2, X. + 0eR. (1)求X(1)和X(n)的联合分布;
(2)证明:^*(X(1),X(n))
X(1) <1 -a士 且 X(4) <1, 去或

是假设检验问题:<9>0的水平为a的UMPT(提示:仿照例 6. 2. 3).
•17.假设Je0CR|关于T=T(X)为单调似然比分布 族.考虑假设检验问题H0;e^e0—Hl:e>e0, 其水平为a 的umpt的 否定域为沢+ = |r(X) >c(^0)),且满足 Pe0\T(X)

>c(Oo)} =a;该式 对任意的氏都成立.若把C(幻看成0的函数，证明:c(幻是0的 增函数
(提示:利用UMPT的无偏性).
18. 设X), ,Xn为i.i.d.样本，X'-*/(%!,6)= '11|0 C 1 | , 3>0.
或
(1) u
(2) Ho:0=Oo—H1:0^eot 求其水平为a的UMPUT.
19. 设X:, ...人 为i. i. d.样本，X, ~/V(M,l).对于假设检验问题
a
Ho:从^— a或异》 UMPT可表示为:
;
: —a <a; a〉0.证明:其水平为a的
1 , —k <x <k, </>*(幻= 0,其他
彡❷'
求其水平为a的umpt
并给出&的定解条件.
20.设弋，...，总为i. i. d.样本，X.～7V(M, cr2).证明以下假设检
已知 CT = 1 ; 已知M=0(提示:利用单边检验中功效
验问题的UMPT不存在: (1) Ho:ylt=0—
(2) 770:a=l— 函数的单调性).
02成立.
21.设又】, ...，X”为i. i. d.
题 Hot ❷= 0O— H、:0^eo 水平为 a 的 UMPUT.
22. 对于指数族分布，设屯(幻是假设检验问题HJ砭❷' 或沒多
. 若$(幻为一个检验，且 23. 设/(幻和g(幻是两个已知的密度函数，又设AT的密度函数为
e2—H}:oi <e<o2的水平为a的umpt
=E,2^)(J) =a,则E冰(X)彡Ej(X)，对任意的❷<0、或沒〉
6f(x) +(1 -O)g(x), ^eR.证明:
或0彡ed <0<02的一个水平为a的UMPT.
•24.设弋，...， 为i. i. d.样本，X.服从均匀分布R(Q,0), 0 > 0.证明:以下(/>*
(%)是假设检验问题HQ:e=60(<e0 >0)*-*^ 的 一个水平为a 的 UMPT.
=a 是假设检验问题 Ho:6^

、 f1, X(n) >^0 或无卜)=^OaT, </> (X)=lo,其他
(提示:对VA#氏，把^分为A <e0a^;e0a^^e}^e0以及❷'〉氏等情
形证明多 E以).
*25.设X,, ...，Xn为i. i. d.样本，求假设检验问题
e^eQ的一个水平为a的umpt:
(1) x{ 其中 ^eR 未知，tr〉O 已知;
(2) X,-PR(c,^), 0>0,c>0,即/(Xj; c)=c0cx~{c+i)I(Xj e | , c〉0已知(提示:
参见第24题中UMPT的形式).
26. 某饮料厂生产的瓶装果汁重量服从正态分布，要求出厂重量的 标准差(即a)在0.02公斤之内.今抽取28个样本，计算出样本方差为
0.001公斤，问这批瓶装果汁在水平a =0.05下是否合格?

27. 某品牌香烟尼古丁含量服从正态分布，合格品要求尼古丁平均 含量不超过17.5毫克.今对一批产品随机抽取8 支样品，算出其尼古
丁含量的平均值为18.6毫克，标准差为1.4毫克.在水平01=0.01下， 检验这批香烟是否合格.
28. 为了比较甲、乙两个砖厂生产砖块的平均强度，在两厂抽取样 品，测得强度分别为74, 65, 72, 69和75, 78, 74, 76, 72.假设两 厂砖块强度分别服从正态分布
N((jLx ,a2)和ZV(/i2，a2). 试检验:两厂 生产砖块的平均强度是否有显著性差异(取a =0. 05).
29. 为了比较温度对于针织品断裂强度的影响，分别在70 t 和
t 下对某针织品测试其断裂强度，具体数据如下
80
70 X.时:20.5, 18. 8, 19.8, 20.9, 21.5, 19.5, 21.0, 21.2; 80 X.
时:17.7, 20. 3, 20.0, 18. 8, 19.0, 20. 1, 20. 2, 19. 1.
在正态性假设下:(1)通过假设检验说明:可认为两组数据相应分布的 方差相等;(2)在此基础上检验:温度对于针织品断裂强度是否有显著 性差异(取a =0. 05).
30. 为了比较A，B两种同类药物副作用的大小，对服用A种药的 92人进行调查，其中7 人有不良反映;对服用B 种药的78人进行调 查，其中5人有不良反映.试检验:A, B两种药物副作用的大小是否 有显著性差异(取 a=0.01).
31. 设XY,••-,Xn 为 i.i.d.样本，X} - (r2), /i, <r2 都未知. 求假设检验问题:/x>Mo的水平为a的UMPUT的功效
:
习题六
301
函数.
32. 设 ,Xn为i.i.d.样本，~ ,1); Y},...，Ym为
i.i.d.样本，Y}-/V(M2,1),且两总体独立.求下列假设检验问题水平 为a的UMPUT:
(i)Ho: : >/z2; (ii)H。:川=/z2- :
At] 和(iii)H。: :川 >c/±2, c为已知常数.
33. 设 为i.i.d.样本，X, [, ...，L为
i. i. d.样本，Kj ~ A^(/x2,0-2),且两总体独立.若川已知但化未知，求 下列假设检验问题水平为a的UMPUT: (i) H0:a^a2—Hi: a{ >a2 和(ii)"0: a]=cr2
—//!:a(#a2.
*34.设， 为 i. i. d.样本，X} -7V(M1,a?); K，...，L 为
0>0^和(ii)HozO= :6 Oo;
■ (2)当m=n时，对假设检验问题(ii)即H0:al
O.a\,证明:其一个水平为a的UMPUT的否定域为7T = :max[5'/(<90S,) , ((905j)/S;] 其中 c 由
号•决定，f(p;p,q)为/3分布BE(p，q)的密度函数，S}= Z d i~1
m
劣=工(乙-n2(提示:利用f分布和冷分布的关系). >=i
*35.设 A ，...， 相互独立，X，N(^，a2)，f = l,...，爪;X. (0，a2)，
j‘=zn+l，... 设/I。已知，求下列假设检验问题水平为a:的 UMPUT: (i)^0 7/j :M1 >p。和(ii) Hq 尹Mo，并
求(ii)的似然比检验(提示:仿照一样本正态总体中关于#的单边和双边
且两总体独立.^0 = a\/a].

i. i. d.样本
(1)求下列假设检验问题水平为a的UMPUT: 6)好。:6^<9。《打1:
检验的处理方法). (36.设 X'，...，Xn 为 i. i. d.样本，Xj ~ r
^ye–^–'ZU.^O | ,其中 cr，/>都未知.
» 即/(;a,p)=
(1) 对于假设检验问题HQ–a^ :a>a0,证明:存在一个
否定域为{x: > g(FT%.)}的UMPUT,其中g为某一函数; »=, f=i
(2) 对于假设检验问题(i) :p p0–jfiTj:p>Pq 和(ii)好。:/>=
〒)2,

Po–Hi:P^po,试证:存在否定域与n 有关的umput- i=l
37. 设A ~P(AI) , X2 ~P(A2) , X,和X2独立.求假设检验问题 //0 :At X2^–
^H] : A, < A2 的一个水平为 a 的 UMPUT.
38. 设 –P(A(), i = l,2,3, X'，X2，X3相互独立.对于假设检验问 题证明:存在一个水平为a的UMPUT.
*39.设久，"•，冬为 i.i.d.样本，X, –
i. i. d.样本，r, 且两总体独立.
(1) 设P'，p2已知，对于假设检验问题(i)片。
<72和(ii)H0:a, =<r2~/Z1:a
可用分布确定;
(2) 如果在(1)中，P1，p2都未知，对假设检验问题(i)和(ii),证
明:存在UMPUT,并描述它们的一般形式;
(3) 假设a、=a” 但未知，对假设检验问题(i)//0;P1^p2– //,:
Pi >Pi和(ii)仏:Pi =P2~H1:P1#P2,证明:存在UMPUT,并描述它们 的一般形式.
40. 设 ...人为i. i. d.样本， +
验问题水平为a 的似然比检验:
(1) 当/i=0 时，//0 :(T = a0–^Hl :a # a0; (2) 当/z未知时，H0:a=(To*–
*//,:a#tr0; (3)当<7已知时，Hq:fjL 0;
求以下假设检
1
A> #o–2, 试证:存在 UMPUT,且其否定域
fi =^
41. 设芩，...， 为i. i. d.样本，X.服从均匀分布R(Q，0)，e>o.
求假设检验问题Ho:0 = ~一Hi:0矜❷0水平为a的似然比检验.
42. 设久，...，Xn 为 i. i. d.样本，X、~PR、a，e、，即 = a6ax;{0l+})I
\xx^e !,其中a, <9都未知.求假设检验问题77。: a = 1–
的一个水平为a 的似然比检验.
43. 设X是来自密度函数为/(X) =2e'\e–x)I \的总体
的一个容量为1的样本，其中0〉o未知.求假设检验问题ffo:0 = %– :<9#氏的一个水平为a 的似然比检验.
44. 设 ，12,...， 为相互独立的样本，XJ –N(o,a2) , y#Z,求以 下假设检验问题水平为a 的似然比检验统计量:
(4) 当 ■未知时，HQ:
.

K, •••,);为
习题六

(1) X{-N(y,a2), HQ-y=0*-*^:7^0; ’
(2) X, ~7V(0,w**o-2) , H0:^ = l- //1;d)#l(提示:利用 F 分布与 冷分布的关系，由冷分布确定否定域，第45题的(2)、第48题和第49题
的(3)也类似).
45. 设 U 2, ..., Xn为相互独立的样本，X广 7V(O,a2), >01, n,
而X, -/V(y,a2); Xn ~/V(0,a)-*a2).求以下假设检验问题水平为a的 似然比检验和score检验统计量:
(1) "0:y =0*~^ :y^0;
Ho :a)- 1- Z/! :co# 1 ;
:y=0, a)=l :y00,或co#1.
设1 , ;12, ..., Xn为相互独立的样本，并考虑假设检验问题付。: y=1«//1:7#1.在以下情形下求假设检验问题的score检验统计量:
(1) X, r(A, l), 但X-r(yA,l);
(2) X-P(A), j关i,但 X^P(yA).
47. 证明:在定理6. 6. 2 中的score检验统计量5C'(^|0)可表示为
其中Lp(h) =L(^^2(^)), L人0J和1(久)为Lp(0\)关于❷' 的前二 阶导数.
48. 设X!, ..., Xn为i.i.d.样本，X} -T^^-,1j;设Yx,•••,Ym为
i.i.d.样本，r, 且两样本独立.求以下假设检验问题水平
为 a 的似然比检验:Ho:cr、=a2^-^Hl :a} #<r2.
49. 设芩, ..., X 为i. i. d.样本，及～/V(川，M) ;!;,•••，圪为
(2)
(3) 46.
“ d.样本，Y' 平为a 的似然比检验:
50. 设随机变量H,..., 满足关系+U, ., f=l, ..., n, Xo=O.其中“i, tz2, ...,
u„为i. i. d.随机变量，ux ~7V(O,a2).求以下假 设检验问题水平为a 的似然比检验:Ho:0=O- H1 :6^0.
51. 对某中学学生每周观看电视的小时数进行调查，情况如下表 所示:
(1)Ho:Ml (2) Hqj/tj
, 且两样本独立.求以下假设检验问题水 :Mi^^2» 但A, cr2已知;
,其中er,=a2=tr未知 (3) H0:a] =a\^Hx za\^a\,其中叫'，蚪2 未知.
;

每周观看时数 去年比例 今年人数
<3 0. 18
[3,6) 0. 30
[6,9) 0. 26
[9,13) 為13 0. 20 0. 06
患者人数 健康者人数 总人数
吸烟量(支/日) 总人数 [0,9] [10,19] >20
22 98 25 145 22 89 16 127 44 187 41 272
10 30 20 30 10
试检验:从今年100人的调查结果来看，今年的比例与去年的比例是否 相同(a =0.05)?
52.某工厂近5年共发生63次事故，若按星期几分类，事故发生

在星期一至星期六的次数如下表所示.判别一下，事故的发生与星期几 是否有关(a=0. 05)?

星期— 四五

事故次数 9 10 11 8 13 12

53—为了研究慢性气管炎与吸烟量的关系， 共调查了 272人，结果 如下表所示. 试检验:慢性气管炎与日吸烟量是否有关(a :=0. 05).

54.某实验室在2 608个相等时间单位内观察了一种放射性物质所 释放出来的a —粒子的个数，结果如下表所示，其中频数久表示在 2 608个时间单位中释放出个粒子的时间单位的个数.试验证:该放

射性物质所释放出来的a —粒子的个数服从Poisson分布(a = 0. 05).

粒子数々 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 总数 频数 \ 57 203 383 525 532 408 273 139 45 27 10 4 2 0 2 608

第七章区间估计

参数的区间估计与点估计一样，是参数估计的重要方法，在某些具 体问题中可能比点估计更有实用价值.给定参数分布族X ~

)，参数的点估计是通过一个统计量以及某些优良性准则(诸如均 方误差最小准则等)给出未知参数的估计.例如要估计，点估 计得到的是样本的某一个函数g(^)(根据某种估计方法)，在实用上就 把/ (X)当作g(幻的近似值.但是，尽管有均方误差最小等许多判别点 估计精度的优良性准则，我们还是无法知道估计值与真值究竟相差多 少，区间估计在一定程度上解决了这个问题.区间估计是通过两个统计 量以及覆盖概率(也会有适当的优良性准则)给出未知参数的估计，这 时得到的是样本的两个函数和么(X)，并使覆盖概率

达到一定水平(如多95%等等).在实用上就认为g(沒)

/内 都是在覆盖概率的一定水平下得到的，因此这个区间通常称为置信区 间.点估计与区间估计是参数估计的两个组成部分，是相互联系、相辅 相成的两种估计方法.但是它们也各有其特定的概念与问题.本章第 7. 1节介绍区间估计的概念与问题及其基本的求解方法，即枢轴量法， 同时也介绍了单调似然比分布族参数的区间估计方法，该方法可用于某 些离散型分布的区间估计;第7. 2节介绍区间估计与假设检验的内在联 系，并在此基础上进一步介绍置信区间的优良性准则;第7.3节介绍与 置信区间有密切关系的容忍区间和容忍限.有关本章内容，可参见陈希 孺(1981,1999) , Lehmann(1986) , Shao(1998) , Zacks(1981)等.

7.1置信区间及其枢轴量法

给定参数分布族本节主要讨论参数 6的区间 估计问题，因为函数g(<?)可看成一个新参数<t>=g(9) 的区间估计问题; 方法完全类似.另外，若无特别说明，也假定参数$是一维的.

7.1.1置信区间和置信限

定义7.1.1 若统计量巧X)和&X)满足以下关系:

的值在区间[

(以相当大的覆盖概率).由于区间估计

pd {e(x)^e^e(x)\ ^1 v<9e0, (7.1.1) 则称[e(x)9e(x)~]为参数0的一个水平为i —a的置信区间，称^(x)， 以幻分别为9的水平为1 —a 的置信上限和置信下限(亦称置信上、下 界)，若它们满足

P0 \e^0(X) 1 —a, 0, Pe \e(X) | ^1 —a, V6^g6>.

以上定义亦可简记为 pe \0^[e,e]f 乡l—a;

和Pe + oo) | ^1 —a.在(7. 1. 1)式中，沒表示真参数，g(X)和

义)表示其上、下限，该式表明，区间以不小于1-a 的概率覆盖真参数^实用上就认为易见 ，在一定的覆盖概 率下，覆盖范围(即平均区间长度)越小，区间估计的精度越高，区间估计的优良性问题将在下一节有;所讨论.关于置信上、下限，它们分别 相当于(7.1.1)式中-oo和5=+oo的情形.置信上、下限在实用上 也很重要，例如:若参数为材料强度或元件寿命，只需要考虑其值不低 于多少，即置信下限;而若参数为次品率或发病率，则只需要考虑其值
不高于多少，即置信上限.
若(l)=g(8) 为0的严增函数，则由(7. 1. 1)式可得
尸夕U (歹(幻)彡令=g(<9)彡容(5(又))}彡】-a, V/9G0. (7. 1.4) 由此可得以下常用的引理:
引理7.1.1 若小=g(❷)为沒的严增函数，[f(X)j(X)]为参数0
的一个水平为1 的置信区间，则[g(^(^)),g(0(X))J为参数</)的 一个水平为1 - a 的置信区间.参数的置信上、下限亦有类似的 结果.
类似于(7. 1. 1)式，我们也可定义多维参数0的置信域.
定义7.1.2 若 6>CR\ S(T)为R"中的一个区域，使得 Pe -a,则称为参数0的一个水平为1 -a的置
信域.
关于多维参数的置信域，以下简单性质常常是有用的: . 引理7.1.2 若S,(X)为参数氏的一个水平为1 - % 的置信域(/ =
1,2)，则S}(X)OS2(X)为参数(汐"氏〉的一个水平为1 -a2的 置信域.
证明 记Sf. (X)为久(1)的对立事件(i = 1,2).则由定义可知 P9 iU,e$(X)(<%
(i=l，2)，因此根据概率公式有
P0 fK 氏，氏)eS1(X)nS2(X)| *
(-oo
(^1 -a
(7. 1.2) (7. 1. 3)
7.1置信区间及其枢轴量法
307
=1 -Po \X:(0^e2) GSi(X)QS2(X)\
=1 -Pd 1^:(^,,^) e[51(X)]u[S2(X)]| >1-[Pff\X:0leS^X)
(+PeU:02eS2(X))]
I
的个数不一定是 2，也可以是 A:(Bickel and Doksum, 1977 ;Shao, 1998), 但本章主要考虑一维单参数的置信区间和置信上、下限.置信上、下限 与置信区间有如下关系.
引理7.1.3 若e(X)^0(X), f(X)和g(X)分别为参数0的水平为 I-%和I-%的置信下、上限，则[e(x),e(x)]为❷的水平为1-%-a2 的置信区间.
证明由定义可知
(- 00 ,0) } +pd(6>e) +P0 \e^(0, +x)1 =1,
而
Pe\0e.{- ,e)\=1-P& +oo)|^Qj,
po\0e.(0,+<x>)\=1-P3| e(-oo，沒]|矣a2. 代入上式可得 p9\6e. [eJe] I -«2.
i
构造置信区间的方法通常有以下几种:(1)从某一点估计出发的枢 轴量法;(2)大样本近似的枢轴量法;(3)通过假设检验的接受域构造 置信域.
7.1.2构造置信域的枢轴量法
首先通过一个例子来说明其意义.

例7.1.1 设X, 为独立同分布样本，X. - N(/jb,a2), 求戶 的水平为1 的置信区间.
解 可从泠的估计X 出发建立I 与/z的关系，取 G(X^=^4r/£), i;(X,-J)2,
则函数G(X^)包含了/£与1，且其分布为Z(n-l),与g无关.简记 / n-1, 1 --j-j,则有
1- -a2. 注意，在引理7.1.2中，参数氐不一定是一维，可以是n:维，❷:
P 该式可改写为
A
=1 - a.

因此可得M的水平为1 的置信区间为[丛(义)>(叉)]，其中
类似地可求出置匕信上、下限，今求M(^):
- 1,1 -a)| = l -a,
该式可改写为
故置信下限为弘(叉)=X--^z(n-l,l -a).
-a.
另外，若参数cr =(To已知，则在C(X，M)中用aQ代替汐亦可得到 g的置信区间.这时)
服从标准正态分布，因而有[^(X),
]
枢轴量法的一般原则可归纳为
(1) 从0的某一合适估计出发，构造一个函数，即枢轴量c(x， 的，使其分布已知，且与0
无关;
(2) 由 Pe \a^G(X,6) ^6 j =1 -a 解出
pd U : e(X)^0^0(X)\ =1 -a,
则可得到a的置信区间[f(X) , 0(X)]. 置信上、下限则可通过G(JT, 汐)的单边不等式反
解得到，以下再看几个例子.
例7.1.2 设 , ...，X、为独立同分布样本，Xx ~7V(xz，a2),求
a2, a 的水平为1 -a 的置信区间以及a2的置信上限.
解 与上例类似，可从a2的一个估计出发.在P(J) =(n-l)-* •
S(X)=(n-1) 1工(X.-X)2中，由于S(X)/a2服从 (n-1),因 t=1
此可取枢轴量为
G(X,a2)
~;
a
n -1 J —a.
该式可化为
a

P
S(2) ^a2^~ S(2) 22ta
«• (7.1.5)
X
n-l
, l -晉 n-1，了
因此可得cr2的水平为1-a的置信区间为[a2(X),a2(X)],其中
£2(X)=- 迎-，p(x)=_^w_
斗
由于Pa |a2(X)^a2^a2(X)| =1-a等同于Pa {a(X)^a^a(X)! =1- a,因此a的水平为1

-a的置信区间为[a(X),a(X)].同时，根据类似于
(7. 1.5)的公式可得a2的水平为1 -a的置信上限为 (r2(X) ^S(X)/x{n - 1 ,a).
另外，若从已知为~，则可取枢轴量为G(X,(r2) ^T(X)/a2 ~/(n),其中
T(X)= £ (久-M。)2;详见例7.1.7. | isI
根据以上两个例子以及引理7. 1.2,我们可以求出正态样本中参数 (M,a2)的联合置信域.
关于正态总体情形下参数置信域的求解问题，大多可以通过假设检 验问题的对偶接受域得
到，这将在下一节进行比较系统地讨论.
例7.1.3 设X,，...，X。为独立同分布样本，且X1 求沒 的水平为1 -a的置信区间.
解 由 3(X) =X(n), 可取 G(X90) =X(n)/6 - BE(n.i), 其分布与
0无关，且有 由此可取0 <a <6矣1 :
而 a, 6 可由以下积分决定
J ntn-1di=6n-an=1-a.
因此，由满足艺-an -a的a, 6都可以得到沒的水平为1 -a的置 信区间其中
V_V 沒(7) =一^1, 5(2) =」21.
一ba 对于本问题，我们还可以在6n - an = 1 - a 的约声条件下，求使区间长
11a
2
"一1，1 -7
BE(n,1)~ntn-1f 1 J. =1 -a,

度最小的解，即求-IT'的最小值点.而直接验证可知，a'* =
[-(1 -:)”' -b_l是t的减函数，所以6=1, a'1 -b~l
最小，因此汐的水平为1 -a的置信区间可取为 I 例7.1.4 设X.,-,Xn为独立同分布样
本， ~M + r(l/a,
1),求参数a和的水平为1 -a的置信区间以及它们的联合置信域. 解 a和#的点估计都与完备
充分统计量r=(x(1),s(x))有关,
其中s(x)= (弋-Ao)与x(1)独立，并有 i=1
x(1)~/x + r(合，1)，s(x)~r(去，打-1).
7
Pa{/(2n-2,号卜去-f)}=l-a.
P<z|2S(X)/^2^2n-2,l-爹)-2|=1-a. 因此可得tr的水平为1 - a的置信区间为C(T(a)
= [^(^),0-(^)],
因此可取G}(X^ =-S(X) ~^(2n-2),其分布与参数无关.由此可得 a
其中 -
为求M的置信区间，由I(1)的分布可知，2n(X(1) -/x)/a -/(2),且与 S(X)独立.因此
有
GAX小)
丁(又(1) -M)/2
~2
-S(X)/(2n -2)
a
n(n - 1) (X(1) ~/jl) -F(2,2n-2). S(X)
a(X) =------ -------------- , a(X) =
- /卜一2，1-幻 ?(2n-2,^j
-.

由此即可得到M的置信区间.今记Fa/2=F(2,2n-2;a/2); Fx_a/1 = F(2,2n-2;1 -a/2),则有

4 a/2、 S(X) 、厂卜。/]-1 a, ^{^(,)■n(n-l)F,-a/2S(X)^^X<1) ■n(n1-l)Fa/2S(X)}=1 _a*

因此可得M的水平为1 _a的置信区间为Q(a) =[0(X) JZ(X)], 其中

1

...)=J(1)-;

A(X) =X(I) - n(n.p F«/25(^)-

根据引理7. 1.2可得弘和a 的水平为1 -a 的联合置信域为C/a/2) A Ca(a/2). I

例7.1.5 y=(i\, ..., 服从多元正态分布求参数/z 的置信域.

解 由于 y-M^/v(o,/n), IIk-mII2 因此有 匕! -a)| =1 -a.

由此可得n 维参数/z的置信域为

S(IQ = j从: —K||2^ 2(n3 - a) |,

即A的置信域为以F为中心、以士2(n, l -a)为半径的球. ■ 由于置信区间具体给出了未知参数的上、下限以及覆盖概率, 因此

它在很多情况下比点估计更加实用, 今举几个例子予以说明.

例 7.1.6 某厂生产的滚珠, 其直径可认为服从正态分布.今从一 批产品中抽取6 个, 测得直径为14. 70, 15.21, 14. 90, 14.91, 15.32, 15.32 (毫米).试估计这批产品直径的平均值;并按两种情况求直径平

均值的置信区间:(1)方差已知为0.05; (2)方差未知(取置信水平为 0. 95).

6

解 样本均值为1=2V6=15.06.可根据例7.1.1的公式求均 '• = I

值/x的置信区间, 其中,••-,X6独立同分布, X}- ;n=6. (1) 若方差已知为0.05, 则a。=0.223 6, z0975 =1.96.因此有

M=15.06-0.2236x1.96/^6=14.88; f=15.06+0.2236x1.96/76= 15.24;所以置信区间为[14. 88,15.24].

(2) 若方差未知, 直接计算与查表可得<7=0. 259, f(5,0.975) = 2.5706.因此有=15.06—0.259x2.5706/^5=14.76; /Z=15.06+0. 259 x2.570 6/^5 = 15. 36;所以置信区间为[14. 76,15.36].这一置 倍区间的覆盖范围比方差已知的情况要大一点 , 这显然是合理的. ■ 例 7. 1. 7 为了解某型号测量仪的精度, 用此仪器对一根长度为30 mm

的标准金属棒进行了 6 次测量, 其结果为30.1, 29.9, 29.8, 30.3, 30.2, 29,6.设测量值服从正态分布/V(30, <r2), 求均方差的点估计及 其水平为0. 95的置信区间.

解 记7*(X) (X. -/£0)2,则a2=T(X')/n=0.058(n=6, /£0= /=1 •30); a =0.24.可参照例7. 1.2的公式求解的置信区间.当M =^0 已知时, T(X)/a2-/(n),因此类似于(7.1.4)式有

F =1_a.

1?卜

l-f)斗

f).

£2W=_HAL_, -2(x)=_nAL_. / 卜'1-y) f(n, 号)

在本问题中, ..., x6独立同分布, X'~7V(30,a2); T(X) =0.35. 经查表可得/

(6,0.975)=14.4494,^2(6,0.025)=1.2375.因此有
£2=0. 35/14. 449 4 =0. 024 2, a =0. 15; a2 =0. 35/1.237 5 =0. 282 8, 7=0.53.因此r 的水平为0.95的置信区间为[0. 15,0.53]. |
例7. 1.8 (续例6.3.5)某电子元件的寿命服从指数分布r(l/汐, 1), 在10个独立同分布的样本中, 仅观察到其中前6个元件的寿命分 别为 896, 950, 1 005, 1 100, 1 150, 1 220(小时).
(1) 问这批元件的平均寿命不低于多少?
(2) 设p=P(X, >1 100)为元件寿命不低于1 100小时的概率, 求 P的置信区间.(置信水平均取为1 -a=0.95).
解(1)本问题可看作例6.3.5的继续, 要求0的置信下限.由于 r
Tn.r/r, 其中 rn<r=2 +(n-r)X(z) ~r(l/^,r).因此可取枢轴 1=1
量为 G(X,e) =2rn r/^^2(2r).由此可得 P\^eTnr〈义2... , 1 - a)} = 1 一a, 因此a的置信下限为f(J)=27\.々2(2r, l1).对于上述数据, n=
10, r=6, a=0. 05,经直接计算可得 2Tnr=22 402,而义2(12,0. 95)= 21.026,由此可得 =2Tn r/Y2(12,0. 95) = 1 065.44.即这批元件
的平均寿命不低于1 065.44(置信水平为0.95), 这与例6.3.5中断言 元件的平均寿命大于1 000小时的结论是一致的, 但是本例给出了平均 寿命更具体的置信下限以及覆盖概率.
(2)由于p=P(X}>1100)=e-,,00/d为沒的严增函数, 所以根据引 理7.1.1,其^信区间可由参数0的置信区间得到.设0的置信区间为 [么力, 则[fi] =.[e-1100/^e-,,00/^^参数p的同一水平的置信区间.
类似于(1)的@论可得0的置信区间为 [O]=[27\.々2(2r, l-a/2),27;,々2(2r, a/2)].
“
,

而/(12,0.025) =4.404,/(12,0.975)=23.337,由此可得$=
959.93, 0=5086.73.因此有
[£, ;] =[e-1, 00/^e-1100/^ =[e-L,46,e-°-2,6J = [0. 32,0.81]. |
7. 1. 3 基于渐近分布的枢轴量法
在许多情形下, 枢轴量c(x9e)的精确分布不易求得, 这时可考虑 采用渐近分布, 特别可采用渐近正态分布和渐近x2分布.另外, 对离 散型分布(诸如二项分布.Poisson分布等), 其分布函数和分位数的计算 比较麻烦, 其参数的区间估计也常用基于渐近分布的枢轴量法.
(1)渐近正态置信域
设 ..., 叉独立同分布, 由第五章的定理5.3.6可知, 在一定正
则条件下, 参数0的极大似然估计6具有渐近正态性, 即似 “ 其中K幻为一个样本的Fisher信息阵, 因此可取枢轴量为
G(X, 6>) =/^((9)(^-^). (7. 1.6)
这时有G(X, ❷七(10)人), 其中/(幻为样本关于沒的Fisher信息阵, 沒为P维.同时根据定理5.3.6的推论3还可取
C,(X, 没)={ Var/^) (, (7. 1.7)
其渐近分布亦为标准正态, 与0无关.今记Var,((?) = J, i 为其相合 估计, 则由相合性以及Slutsky定理的去1律可得
G人X, e) = S •+(“)九 ?V(0,/p)· (7. 1.8)
特别, 若0为1维单参数, 并记VarX^) =a2, 士2为其相合估计, 则有 A

=^-^7V(0,l). (7. 1.9) a
= 1 - a.
其中为标准正态分布的i -i 分位点.由此可得参数0的渐近正态 置信域为
0 +az^o,]. (7. 1. 10)
同理，亦可得到单边的置信上、下限.(7.1.10)式有广泛的应用，下 面看两个例子.
例7.1.9 设芩，...，X。独立同分布，X、~b(l，p). (1)求p的置 信区间;(2)应用:某化学溶液配制过程中，原有方案的成功率为
、
k

70%，现设计了一种新方案，40次试验中有34次成功，求新方案成功
率的置信区间和置信下限(取置信水平为1 =0.95);新方案是否优
于原有方案?
解 (1)p=X,且有Var(f)=er2=pg/n,g=1
-p,由》的渐近正
态性或中心极限定理都可得戸
由此可得
即
G(X，P) =—
y Var(p)
p}z\p-p\
y/pq/n
=1 .
/n p(1
-p)
Pft{n(X-p)2 1 -p)2;_a.}=1 -a.
这是p 的一个二次三项式，可经过反解，得到p 的上下限?和& 但在 实用上，经常可采用(7. 1. 10)式.由于f =pq/n是o-2的相合估计， 由(7. 1. 10)式即可得到p的置信区间为
rAAAaq IP 一az、_号，p +(T2j_«.J ,
其中j) ;x.
(2)本问题中，n=40, X=34/40.因此p=X=0.85, $=0.15,
.
a2 = 0.85 x 0. 15/40 = 0. 0562
而z0975 =1.96,所以有p=0.85-0.056x
. 另外，由 (7.1.10〉式可得尸的单边置信下限为由于 f=0.85,》= 0.056, za95 =1.645,因此p=0. 757.以上结果都说明，新方案的成功率比 原有方案高，因而优于原有方案. ■ 例7.1.10 设^，...，夂独立同分布，X,～P(A). (1)求A的置 信区间和置信下限;(2)应用:在例6.7.5中，求各个细胞单位所含白
血球平均个数的置信区间和置信下限(取置信水平为1 -a=0.95). 解(1) A=%,且有Var(A)=tr2=A/n.由于A=X具有渐近正 态性，而且A/zi为a2的相合估计，因此直接由(7. 1. 10)式可以得到A 的置信区间为[A-az} , A+az} ,其中A=X, a=a/A/n.而A
的单边置信下限为A =A
(2)本问题中，n=1 008, A=I=2.82, a= =0.053,
1.96 =0.74, p=0.85 + 0.11 =0.96,置信区间为[0.74,0.96]
. 而 A 的置信 下限为 A =X-^,_Q =2. 82 -0. 053 x 1. 645 =2. 73.本问题中，由于样 本容量n很大，所以A 的置信区间和置信下限与其点估计很接近，这

-OQ75 =1.96.由此可以得到A的置信区间为[2.72,2.92]

也是合理的. 以上两个例题还可推广到两样本情形，用于两个总体的比较.例如，若X,. Pt),i = 1,2,可根据渐近正态性求解比例之差5 = p,-p2的置信区间和置信下限，见第六章(6.5.35)式.Poisson分布亦类似，以下是两个正态总体比较的例子.

例7. 1. 11 设弋，...，^独立同分布，X,～/V(a，d); Yl9- ,Ym
且
解 (1)由假设可知S二无，6=7,且有
独立同分布，K,
区间(此即第六章提到的Behrens - Fisher问题);(2)应用:在例6.5.4 中，求男女所含红血球的平均值之差的置信区间(取置信水平为0. 95).
(1)求a-b的渐近正态置信
■
由于=5?和Q g分别为/和d的相合估计，其中$ =
n_，V (X,-X)2; S;=m~l (I;-?)2.因此由Slutsky定理可得 ;-1 J>
c(x，y，a，6)
若记a = yn-'5; 区间为
~(er± l_U/y(o;i)T
则由(7. 1. 10)式可得a-b的渐近正态置信
ix-Y-，X-r+ az^a]. (2)在例6.5.4中，n = 156,爪=74,其本容量都比梦大，可应用渐近正态置信区间.由例6.5.4的数据可得1=465. 13, 7 = 422. 16; I -r =42.97.另有 5, =54.8, S2 =49.2,因此
a ; a/54. 82/156 +49. 22/74 = 7. 21.
而2o.975 = 1• 96,(T x z0 975 = 14. 13 , 由此可以得到a - b的渐近正态置信区间为[28.84,57.10].这一结果说明，该地区男性所含红血球的平均 值显著地高于女性，这与例6. 5.4的结论是一致的，但更加具体. ■
(2) 似然置信域 似然置信域与前面介绍的渐近正态置信域是相通的，在大多数情况下，渐近正态置信域直接应用极大似然估计的渐/近正态性(即定理
性(即定理5. 3. 8 , 其实质就是渐近正态统计量的“平方”.
5. 3.6);而似然置信域则应用似然比统计量的渐近
和定理5.3.9)

在定理5.3.8中，(5.3.3-0)式对任意的氏成立，因此有
权.(7.1.11)
Pe \ LR{e) - a) I = 1 - a. (7. 1. 12) 由此即可反解得到{e^S(X)\ =1 -a,因此s(x)即为0的水平为 1 -a的似然置信域.同时，由定理5.3.8和定理5.3.9可知，似然比统 计量的等价形式score统计量SC(0)=(况/卵厂厂'(^)况/卵(见 (5.3.35)式)和Wald统计量WD(6)=(么-沒)"(A)(A-❷)(见 (5.3. 36)式)也具有渐近;r2性，因此在(7. 1. 11)式和(7. 1. 12)式中可 以用它们取代同样可以得到似然置信域;当然表达形式可能会
其中

LR(0) =2 {Z(^) 这时LR(0)就可以视为枢轴量，由上式可得
有所差异. 另外，我们在第六章曾经介绍了子集参数的似然比统计量LR(eJ

解

样本X = (X.,...,xny 的分布密度和对数似然函数分别为 /(x;A)=e-_AL_>

/ 性(见(6.6.6)式).同时也介绍了 score统计量5C(^)(见

的渐近 (6.6.14)式)和Wald统计量见(6.6.17)式)的渐近

/ 性.它

们都可以用来构造子集参数的似然置信域.沿用6. 6 节的符号，记沒= (H)，则由定理6.6.1的推论1有

=2 \L{0) -L(elfO2(0i))\-^x2(P1)f V6>e0. (7. 1. 13) 这时LR(0})就可以视为枢轴量，由上式可得

-a)| =1 -a. (7. 1. 14)

由此即可反解得到P9i{6.eS.CX)] =1 -a,因此S^X)即为氏的水平

为1-a的似然置信域.类似地，若在(7. 1. 13)式和(7. 1. 14)式中用 score统计量SC(^)或Wald统计量WD^OJ取代，亦可得到子

集参数的似然置信域;其表达形式亦可能会有所差异.进一步的讨论可 参见 Shao(1998).

例 7. 1.12 设 Xx, ••• ,Xn 为 L i. d.样本， - Poisson 分布 P(A). 求A的似然置信区间，以及基于score统计量和Wald统计量的置信 区间.

n

i=1 £(A)=FlogA-nA-log(J~] xj).

X..由此可得dL/dX=T/X-n, 1(A)=Var(dL/dX)=n/A,

且有A = T/n.由此可得似然比统计量为

LR(入)=2)Z(A) -£(A)) =2[riog(T/nX) -(71-nA)].

类似地，根据(5.3.35)式和(5.3.36)式可得 SC(A) = (n/A) (A - A)2;

r/)(A) =(n/A)(A -A)2. 这些结果代人(7. 1. 12)式，并经过反解，可 以得到A 的置信区间. I 在这一例题中，WD(A)产生的置信区间与例7. 1. 10中的渐近正态 置信区间十分相似，而另外两个反解起来都比较麻烦.一般来说，对于

一维单参数，大多采用渐近正态置信区间比较方便.似然置信域更多地 用于多参数情形.

例7.1.13 设 其中 =

(Z(W, ..., 乂(W)T, /(,)为已知函数，求0的似然置信域，以及基于 score统计量和Wald统计量的置信域.

解由于r服从正态分布，因此有

£(汐)= --ylog(27TCT2) (4) , 厶 2a

(7. 1. 15)

其中S(O) =eT(^)e(^), e(0)= Y-f(0).记0的极大似然估计为么 则由(7. 1. 11)式有

L尺(8):吵 -/((6)九/什). (7. 1. 16) a"

由(7.1.12)式可得

P, \0z S(6>) -S(^)^o-Y(p,l - a) | =1 - a. (7. 1. 17)

此即0应该满足的关系式，由此即可确定0的置信域.若a2未知，则 由Slutsky定理的去1律可知，在(7. 1. 16)式中用a2的相合估计P 来代

替/

(^) =) - S((p,l - a) 1.

，其渐近分布不变.以，由LR(0)确定的置信域可表示为

我们亦可求出基于score统计量SC(0)和Wald统计量WD{Q)的置 信域.由(7. 1. 15)式可得

纪L =^v\e)v(0)9 a
其中V(0)=df(0)/d0\因此有1(8)=Var(况/卵)^a'2VT(e)V(0).
从而由(5. 3. 35)式和(5. 3. 36)式可得
T
糊 =(尝)广(8)(尝)夕(4)以咖(8)九Z(P)
ira(4) =~i(0-erLv\o)v(0)-[(e-e)^x2Cp),
,

其中pv(e)=v(e)[v1'(e)v(e)rlvr(<0).因此类似于(7.1.17)式可得 Pe \6-eT(^)Pv(^)e(0) ^crV (p,l - a)) = 1 - a.
Pe - 0)T[VT(e)V(O') - 0) a1X (P, 1 ~ a) 1 = 1 - a.
f
本小节介绍一个定理，它可用于单调似然比分布族中参数的区间估 计;特别可用于某些离散型分布参数的区间估计.本小节内容可参见 Shao(1998),茆诗松等(1998)及陈家鼎等(1993).
定理7.1.1 假设U~/(K9), <9e0CR |, 统计量T二T{X、的分 布函数记为Fr(i;6>).
(1) 若对任意固定的G FAhO')和心(/-0;6>)为<9的减函数(见图 7. 1. 1左), 并记
权(1)=sup | }, 6{t.)=infj^:Fr(i-0;^) 1-a|, (7.1.18)
则i(r)和yr)分别为0的水平为1 -a的置信上、下限; (2)若对任意固定的f, 在0<F八(9)<1的范围内, FT(t;0)和 FT(t-0;e)为0的严格减函数, 并且处处连续, 则0的水平为1 -a 的
置信上、下限e = e(T)和f = 分别满足方程
FT(z;^)=a, FT{t-0;3)=1-a (7.1.19)
并且方程的解唯一.而0的水平为1 一a的置信区间[^, ^] = [6(T), 0(T)]应满足方程
FT{t\6) Fr(« ~0;0) =1 - (7.1.20)
证明(1)以下证明主要用到分位数的定义与性质, 可参见第一 章及习题一.由于FT(t;0)为6>的减函数, 因此由(7. 1. 18)式可知(见 图7.1.1), Pe =P0 \Fr(T;&)^a f.由分位数的性质可知, 任一分布函数F(x), F(x') 等价于x'》xp, 其中\为F(x)的p分 位数, 因此, •若记ta为Fr(t;^)的a分位数, 则有
pe =P0 \FT(T;0)^a | =P0 \ T ^tQ } =1 -FT(ta - a.
同理, 若a2未知, 则可用a2的相合估计 变.由此即可以得到基于score统计量和Wald统计量的置信域分别为 C2(Y)=\e:e\6)Pv(^)e(^)^aY(pJ-a)|和C3(y)=H (6-a)T•[VT(0)V(^)](^-0)CaY(p,l-a));其中 f 为 a2 的某一相合估计.I
7.1.4单调似然比分布族参数的区间估计
来代替a2, 其渐近分布不

另一方面, 由于FT(t -O;0)为的减函数, 因此由(7.1.18)式可 知(见图7.1.1), Po | =Pe\Ft(T-0;0) -a).由分位数 的性质可知, 任一分布函数F(x),若x'矣则有F(x’-O)<F(xp-0)^p.因此, 若记为FT(t;O)的1 -a分位数, 则事件“Fr(T-O; 幻彡1-a”包含事件“7^1/, 因此有
P0 \e^em\ =Pe \FT(T-O;0)^l-a\^Po {T^_a} =Fr(^_ft;^)^l-a.
(2)若FT(t;0)和GG-O;幻为0的严格减函数, 并且处处连续, 则(7.1.18)式等价于(7..1. 19)式, 并且方程的解唯一, 因而的水平 为1-a的置信上、下限满足(7. 1. 19)

式.根据引理7. 1.3, 0的水平 为1 -a的置信区间满足(7. 1.20)式. |
下面定理7.1.2将证明:在一定条件下，单调似然比分布族(见定 义6.3.1)存在相应的分布函数，能够满足定理7. 1. 1的要求，首先看 两个例子.
例7.1.14设X【, ...，叉为i.i.d.样本,Xx -/i+rClJ).求M的 水平为1 -a的置信区间.
解 容易验证:该分布族关于完备充分统计量T = X(})为单调似然 比分布族(见第六章习题)，而r =x(1)~/i + r(n, i);所以r =x(1)的分 布函数为Fr(7;M)=[1 -e-n(t-^]7 [.显然，FT(叫)为M的严
格减函数，处处连续，并且有Fr(t -0 ;M) =FT(t;/x)9 因此可根据 (7. 1. 19)式和(7. 1.20)式求解的置信上、下限和置信区间.例如，
根据(7. 1.20)式可得
1
a 了
a 2

由此即可解出M的水平为1 的置信区间为k(X), 其中
fx(X) = X(1) +—log(a/2) ; /x(X) =X(1) + 丄log(l - a/2). —na
例如，若n=\Q, a=0.05,则[e(X)，弘(叉)]=[义(1)-0.3689，义(1)- 0.002 5]. 根据枢轴量法所得的置信区间为[X{}) -^x2(2;l -a/2),
^o^1 .],当n=10,a=0.05时，妒(2;0.975)=7.387, 2(2;«/2)
x2(2;0. 025) =0.051，所得的置信区间为[X(1) -0. 369 3，X(1) -0. 002 5]，二者非常接近. I 定理7. 1. 1的主要价值在于它能够应用于若干常见的离散型分布的
区间估计，例如，Poisson分布、二项分布、负二项分布等.
例7.1.15 设久，...人为i.i.d.样本，Xx-Poisson分布P(1).
求 A 的水平为1 - a 的置信上、下限和置信区间(见范金城，吴可法， 2001).
解 容易验证:分布族关于完备充分统计量为单调似然比 i=l
分布族(见第六章)，而r~p(nA).由第一章的公式可知，r的分布函 数Fr(MA)可表示为不完全厂函数的形式(见(1.2.5)式):
显然 离散型分布，因此有
=P(T^t)= f e~xx'dx/r(t+1). (7.1.21) JnA
， 为A的严格减函数，并且处处连续.由于T-P(nA)为
6(卜0;A) =PA(T<z) = 卜1)=厂(卜1;A). 因此可根据以上公式以及(7. 1. 19)式和(7. 1.20)式求解A 的置信上、 下限和置信区间.例如，根据(7. 1. 19)式的第二式，A的置信下限应满
Fr(t-Q;X)=1-a,代人(7.1.21)式可得
FT(t-I = f e_x%I~'d%/r(O=1-a. Jn£
该式被积函数对应于一个r 分布的密度函数，即z~r(i,o r(0 ，因此(7.1.22)式等价于
[dx/r(I)= >nA)=1-a. Jn入 -
(7.1.22)
由于2Z~r(l/2,O=,Y2(2t),因此由 P(2Z>2nA)=1-a,所 以2^A =/(2^;a),即A的水平为1 -a的置信下限为
ACT) =(2n)~\2(2T;a).

根据(7.1.19)式的第一式，A的置信上限应满足FT(t;A)=a,代 人(7. 1.21)式可得

FT(t;入)=f_ e~xxldx/r(t+1) =a.
该式被积函数也对应于一个r分布的密度函数，这时~r(1+1)， 2Z'~/(2i+2),因此上式等价于
dx/r(£+1)=P(>nA)=P(2Zr>2nA)=a.
所以2nA=r(2r+2;l—a),即A的水平为1—a的置信上限为= (2n)—y(2T+2;l —a).根据引理7.1.3, A的水平为1 —a的置信区间 为[(2n)—y(27;a/2); (2n) —y(27 + 2;l ~a/2)J. I
最后证明单调似然比分布族的一个重要性质，即其相应统计量 r(x)的分布函数为参数0的减函数，因而可以应用定理7. 1. 1来求解 参数的置信上、下限和置信区间.事实上，可以得到一个更一般的
结果.
定理7.1.2 假设)yV(^,6>),0e0CR |关于T=T(X)为单调似
然比分布族.
(1) 设少(0为£的非减函数，则g(^) =Ej(A(n^)]为<9的非减
函数;
(2) 设统计量T=T(X)的分布函数记为Ft(j '❷),
则对任意固定的z。，Fr(to;O)和Fr(z。—0;^)为❷的减函数. 证明(I)设<e29则
A(x)=f(x9e2)/f(x9e})为r=r(x)的非减 函数，即A(x) =/l(T(x);01,02), h为 T = T(x)的非减函数.要证
尽(A) W(;O]《E，2[(A(r(J)] =g(^2).为此，记R+ =jx: /(龙，氏)>/(x,^)|, R~ = |x: f(xf02) </(x,^)),则有 A(xz) >1, Vx'
A(xz) A(x),与 A(x')>l, A (x) <1 矛盾.记 a = supt6R— 7(x)), b =infx,e/?f T(x')),则 6乡a.以下积分在 R° = |%:/(x,) —f(x90{)\ 上为零，因此有
客(h))=£.沙(n幻[/(无為))]d;x(x)
U.
因此若 x'e/T, x&R—,则必有 T(xf) >
e/T; A(幻 <1, r(x);汐(取))～(r(x)),因为若T(x,)^T(x)f则由于A(x)为 r=r(x)的非减函数，应有么)矣/i(r(x);A，%),即

I 少(H幻[/(L么)_/(太，4)]如(x)
a £ [/(x,02))]d/z(x)
=(b —a) [f(x,e2))]如(x)多0.
上面的推导用到了[[/(%,^2) 如(幻=—£+[f(x,0j— f(x,e{)]d^,(%), 这是因为
)](Vt(%)+ f [f(x,e2) Jr—
f [f(x,e2) Jr+
(2)在(1)中，取少(0=/ba〉《0I，则它是(的非减函数，因而 EJ少(r(X))] =P“m) >h)为❷的非减函数，所以FT(t“0) =1 — Pe(T(X) >«0)为沒的非增函数.同理，取
(A'(z) !,则它也是 (的非减函数，因而E，[汐'(7\幻)]=/%(r(幻X。)为0的非减函数，所 以 FT(t0 —0;沒)=Pe(T(X) <z0) =1 —Pe(T(X)^t0)为沒的非增函数.|
另外，在定理7. 1. 1中，若假设FT(t;0)和心(卜0;0)为0的增函 数，也应该有完全平行的结果，只是其应用比较少.
定理7.1.3 假设U~/(%^)^e0CR 1 ,统计量T=T(X)的分 布函数记为心(M).
(1) 若对任意固定的G FT(t;0)和心G—04)为6»的增函数(见图 7. 1. 1右)，并记

0(t) = inf j 0:FT(t;0) |, 0(0 =sup \0:FT(t-0 1 -a (,
则&r)和yr)分别为0的水平为1 -a的置信上、下限;
(2) 若对任意固定的卜在0 <FT(t'❷)< 1 的范围内，FT(t;0)和 FrU-O;0)为0的严格增函数并且处处连续，则0的水平为1 -a的置
信上、下限e=6(T)和f=yr)分别满足方程 Fr(z;^) =a，FT(t~~Q;0) =1 -a
并且方程的解唯一.而e的水平为1 - a的置信区间J] = [0(T), 0(T)]应满足方程 -|
Fr(F r(i-0;0)=1
=£. [/(
--V ,^2
))
]d/z(x) =0.

7.2参数置信域与假设检验的接受域

读者可能已经发现，上节似然置信域中用到的似然比统计量就是第
六章似然比检验中用到的统计量(见(6.6.4)式与(6.6.6)式).事实上，
参数的置信域与参数的假设检验本来就存在内在联系.例如在 (7.1.11)式中，由我们由
\LR(6) -a)) =1 -a 可解出置信
域;另一方面， 题的否定域，其余集就是接受域.因此，由假设 检验问题的接受域可以得到参数的置信域;反之，由参数的置信域也可 得到假设检验问题的接受域.本节首先介绍根据假设检验的接受域构造 参数置信域的方法，然后通过假设检验的最优性准则引导出参数置信域的最优性准则，即一致最准确置信域(UMA).为简单起见，以下的讨 论主要限于非随机化检验，因而主要适用于连续型分布的情形.随机化 检验与参数置信域的关系比较复杂，实际中很少用到，可参见Shao (1998).

7.2.1对偶关系

例7. 2.1 设芩，...，X,,为独立同分布样本，且有X, 考虑假设检验问题
"o :权=Oo^Hl >00. 由于X,，...，Xn的联合分布为指数族分布
f (x , 0) =
因此关于7=2么为单调似然比分布族，所以否定域为R+= i=1
-a)) =a也可得到假设检验问
的否定域满足
因而接受域满足
n).由于 =^2(2n),因此关于 Ho
^2n，1 = 1 ~a'

注意，该式对任意的e = e0都成立，因而有
[2T [~0
该式可以反解为
这说明，沒的置信下界为OW =2T/Y2(2n,l -a). I 以上例子的论证可以推广到一般情形，假设检验的接受域与参数置
信域之间有以下对偶关系: (1)由假设检验的接受域得到参数的置信域. 考虑假设检验问题
已知其否定域为(氏)，接受域为A(6) J (6) ，且满足
~I尤e乂(氏)!》1 _a， 若该式对任意成立，且Ue4(0。)丨可反解为|0oeS(%)i ,则有
\XeA(0)\ =/% l^eS(X)}多1 - a. 因此|X:^eS(X)(为0的水平为1 - a的置信域.
(2)由参数置信域得到假设检验的否定域与检验函数. 设|X:0eS(X)|为沒的水平为1 的置

信域，若{^e5(%)|可反 解为Jxe4(^)(,且有Pe \0eS(X)\ ^1 -a.该式对任意的0二6Q亦
成立，因此有
!^0sS(X)) =P0O\X }>1—a. P0Q\X ^A(Oo) \
因此集合Z(<9。)可以认为是某一假设检验问题: 0巳0人%东 0,)的否定域，而其相应的检验函数可表示为
小(x，0o)=,[1 , xg4((?0), .0, xgA(0q).
在第六章，我们研究了许多常见分布有关参数的假设检验问题，因 此根据以上对偶关系，我们也就平行地解决了相应参数的置信域问题. 这也就大大地节省了篇幅，所以通常都是把区间估计放在假设检验之后 予以介绍(当然，由置信域亦可得到相应假设检验问题的否定域). 我们 还要特别强调以下两类重要情况:
(1)正态总体情形下参数的置信域.第六章的表6.5.1和表6.5.2 总结了正态总体情形下参数假设检验问题的检验统计量以及否定域，根 据对偶关系，这两个表也可用于求解参数的置信域. 事实上，由表中的
2 (2n, 1 - a) 1 = 1 - a.

检验统计量即可得到枢轴量;而由表中的否定域即可得到接受域，从而 得到置信域.因此我们根据假设检验的接受域与参数置信域之间的对偶 关系就一举解决了正态总体情形下参数的置信域问题(因此我们在
7. 1. 2 没有系统介绍正态总体情形下参数置信域的求解方法). (2)我们在第六章6.6节介绍了似然比检验，以及相应的似然比 统计量和子集参数的似然比统计量.因此由上述对偶关系可以得到相应
的置信域，这就是7.1.3节介绍的似然置信域.); 例7.2.2设X、, ...，Xn独立同分布，X. ~7V(M1,a2 ...X 独立 同分布，Y} (1)求8=M1 的置信区间;(2)应用:某厂 有两条袋装果酱生产线，今从第一条生产线随机抽取12个样品，测得重量 平均值为10. 6(克)，标准差为1.55(克);从第二条生产线随机抽取17个样
品，测得重量平均值为9. 5(克)，标准差为2.17(克).假设重量服从正态 分布，方差相等，求平均值之差的置信区间(置信水平为0.95).
解 U)考虑则由与6.5.3类似的讨论可知 (见(6.5.32)式)
Iw_m
-Y)2 + z(y; -F)2
其否定域为f |r(X,y)I >c|,接受^为i \t(X,Y) I
(,且满足
由此可
其中z=x-r,
np \^\Z-8\/Sxy^c [=1 -a,
2) n +m
4 =《+式=土 (Xt.-xy+X (Yj-y)2; i-I j=1
而c可取为t(n +m -2)分布的分位点，即c n +zn -2, 1 得 S 的置信区间为
z~7^s4 n+m~2' 1_f)f z+*Mra+m-2,
,
(7.2. 1) (2)由假设可知，«=12, zn=17,因此自由度为n+zn-2=27;
= 189. 93, 13.78.又由假设可知，X = 10.6, ? = 9.5; Z = 1.1.由于 1.552
=Sy(n-l), 2.172=S;/(zn-l),因此 Sx2y=\.552 x 11 +2. 172 x 16 = 101.6,

Sxr = 10.08.而 27,0.975) =2.051 8,由

(7. 2. 1)可得 8=h -jll2 的置信区间为[-0. 401,2. 601]. 7. 2.2 一致最准确置信域
由于置信域与假设检验的接受域存在对偶关系 ，因而可以通过假设 检验的优良性准则来描述置信域的优良性.
定义7.2.1参数0的水平为1 - a的置信域S(幻称为一致最准确 置信域(UMA)，若对任一水平为1 -a 的置信域S*(%)有
^S(X)((X);, 一切0’关❷. (7.2.2〉 在(7.2.2)式中，0表示真参数，V表示非真参数.因此该定义的
意义为:一致最准确置信域S(X)包含非真参数V 的概率最小.
定义7. 2.2称S(幻为0的一个水平为1-a的无偏置信域，若它
满足
| ^1 -a, eS(X)) ^1 -a. (7.2.3) 若对所有的无偏置信域S(幻，5* (%),它们都满足(7.2.2)式，则称
5(幻为一致最准确无偏置信域(UMAU). (7.2.3)式表示:S(a;)包含真参数的概率大于等于1 - a, 包含非
真参数的概率小于等于1 -a.
定义7. 2. 1和定义7.2.2实际上与假设检验有密切关系，我们可以
根据置信域与假设检验的接受域之间的对偶关系导出它们最优解之间的 对偶关系.为此，考虑假设检验问题
=氐一* (^0). (7.2.4) 假设上述检验问题的一个水平为1 -a的检验函数为
[1, ^g4(6>0),
少(龙A) = {1.0
, %e A(^o),
(7. 2.5)
其中其否定域为A 氐)，接受域为4(氐)，其对偶置信域表示为 S(x)\.检验的功效函数为
UW=EJ0(X^O)J. (7.2.6)
假设((x, 0o)为另外一个检验函数，其相应的量分别记为(%) 4*(沒。)，\0^SXx)\和氐其形式与(7.2.5)式和(7.2.6)式类似. 定理7.2.1在以上条件下，置信域S(幻为一致最准确置信域的
充要条件为相应的检验函数小(X, 么)为假设检验问题(7. 2. 4)的一致最 优势检验，且对V %成立.
证明以下根据置信域与假设检验的接受域之间的对偶关系分两步 予以证明.
,

(1)必要性.设UeS(%)!为一致最准确置信域，要证明相应的 心(10)(0)为一致最优的功效函数，即对检验(7.2.4)的任一检验函数</>*(%,
e0)及其相应的功效函数氐.(x.,o) (0)有
heoy(0)外 •(10) W, V❷祥❷0.
根据UMA的定义(7. 2. 2)式以及对偶关系可得 Pe \0^S(X)) ^P0 WeS*(X)|, |
Xe4(6>') f |Xe4* (6>') } ,
一7% 沒')| 名1 - /% UeA* (<9') I ,

(7-2.7) V<9'#沒
(^)(^)» V0, 0. 上式对任意的e^e都成立，取ef = e0即可得到(7.2.7)式，必要性 证毕.
(2)充分性.设小(x, ff0)为假设检验问题(7.2.4)的一致最优势检 验，且对V氏成立.其相应的接受域和对偶置信域分别为A(0O)和 S(x), 要证对0的任一其他水平为1 - a 的置信域S* (幻有
P0 \ef^S(X)\^Pe \ 0reS*(X)\9 \/6^6. (7.2.8)
由对偶关系，设与S-(X)相应的接受域、检验函数和功效函数分别为
^(氏),)和么.(x#(的.则由于^(x,5o)(^)为一致最优的功 效函数，因此有
^P<i> • (x.e0) (» V 沒#沒0 <=>EJ也(X為)]多EJ<//(X, 沒0)],
<=^Pe \XEA(ej\^pe UeZ•(氏)1, <=>1-Pe(Xe4(^0)|>1-p9Ue4*(4) I,v#氏 台
Pe \X^A(Oo)\^Pe {XeA-(^0)j, \/e^eQ 台P3 \e0^s(x)\^pe |^oeS-(x)|, \/e^eQ.
。 以上定理可以平行地推广到一致最准确无偏置信域(UMAU), 以下
上式对V<9
都成立，因此可得(7. 2.8)式. |
推论的证明从略. 推论在以上条件下，置信域s(*y为一致最准确无偏置信域的充
要条件为相应的检验函数</)(x,6>)为假设检验问题(7.2.4)的一致最优 无偏检验. ·
以上一致最准确置信域的定义实际上是由假设检验问题的一致最优 势检验导出的，因此具有“最大功效”.但是这一定义也与通常对“最 优置信域” 的直观理解一致，即一致最准确置信域的平均测度(包括通

常的区间长度或体积)最小(Shao, 1998).
定理7. 2.2 设X-Pe(x) , S(x)C0为0的水平为1-a的一致最
准确置信域.设m为参数空间0 上的一个测度，其单点集的测度为0, 即m\0 \ x0,并假设S(幻和S* (幻在0上关于m可测且有界，则
必有
Eo (7.2.9) 其中S* (幻为0的任一水平为1 -a的置信域.
证明 为证(7.2.9)式，首先对E, {zn[S(X)]j进行化简: E, (川|=^[S(x)]d^(x)=仏“制一,)#)
=Wf0l:0r e S(jv)) dm(沒')d/\(jr).
其中I eS(x)}为0上的示性函数，由于示性函数有界，因此上 式可用Fubini定理交换积分次序，从而化为
= H / \6' iQ' e. S(x) | dJ%(%) dw(0r)
同理可得
Ejzn[S*(X)]| = £P, U:6>zeS* (X)) dm(<9Z).
由于S(幻为一致最准确置信域，又由于m\0|=0,因此有
1 0-
UWeS(X)Idm(f)
Pe !Jj'eS(X〉|dzn(f),❷•妾0 11
P9 {WeS*(X)!dm(4) , 6^3
=L[
J& J \ x*0 6 5(A:) |
, " d/%(x)dmW) = f Pe {x:efES(xy)\dm(e,).
E, WS(X)]l =

=jePe IX/eS* (7) |dm(0,)
=E, WS*(X)]|.
此即(7.2.9)式，证毕. I
推论1 若[^(X) 为的水平为1 -a 的一致最准确置信区 间，则对任一水平为1 -a的置信区间(X) J* (X)]有
(X)].
推论2 定理7.2.2及推论1的结论对一致最准确无偏置信域亦
EJ^(X) (X) 即一致最准确置信区间的平均长度最小.
"
.

I
域.但是也有类似的结果，今以置信下限为例予以说明(置信上限的情 况完全类似).根据定义7.2.1，水平为1 -a的一致最准确置信下限
f(X)应满足P9 [^(X),oo)| -a以及
Pe [6(X)^)\^Pe [f* (%),«)!, 一切 6'<G. (7. 2. 10)
其中(X)为0的任一水平为1-a的置信下限(f表示非真参数).直 观上，UMA置信下限应该比其他置信下限更靠近真参数(见图7.2.1)，这可表述为
___I1 I w g(x) e ❷
图7. 2. 1 UMA置信下限
定理7. 2.3设X-Pff(x)为连续型分布，f(X)为0的水平为1-a 的一致最准确置信下限，0* (X)为 0的任一水平为1 的置信下限， 并假设f(X)和色•(X)都有连续型分布且期望存在.今记a+=a,若
(7. 2. 11)
; 它们的分布
函数分别记为Fe(u)和/7(w).由定义可知Fe(u) =0,若u^O;对
u > 0有
=Pe \6-0(X)^u) =Pff \0-u^0(X)\ =1 -Pe \e-u>0(X)\. 若记(❷’<0)，则上式可表示为
1 -^(u)=Pe I O' e lO(X) , +oo)).
同理，对F;(u)也有:
1-F 因此由(7.2.10)式可知，对任意的u>0,即01<0有
1 - F❼(u) =Pe { O' e [^(X) , + oo)} | e [6* (X) , + ao) | = 1 -F: (u).
(7. 2. 12) 根据概率论中的常用公式(见王梓坤,1979;李贤平,1997)，正值随机变量"的数学期望可表示为E,((/) = f [1 -F0(u)]duf 同理也有 E^(^*)= { [1 - F;(u)]du.因此(7.2. 12)式两边取积分可得
成立.
注意，以上推论1 对置信上、下限不成立，因为它们对应于无界区
a>0; a+=0，若a矣0;贝1J必有
EJ 沒一歹(X)] + (X)] ♦
, 证明 今记"=k-f(X)]+, IT =[0-f(X)]+
=尸0 { 0r G (X) , + 00)}.
EX^)={ [1-Ffi(u)]du^I。[1-F;(u)]du=:Efi(U^).

由此即可得到(7.2. 11)式. _ I 推论 设&X)为0的水平为I-a的一致g准确置/言上限;e\x)
为汐的任一水平为I -a的置信上限，并假设&X)和?(X)都有连续
型分布且期望存在，则必有
Ejt9(X) -61] + (X) -0} + , V<9ea
在第六章，我们对许多常见分布得到了一致最优势检验或一致最优 无偏检验，因此根据定理7.2. 1和定理7.2.2,它们相应的对偶置信域 必然是一致最准确置信域或一致最准确无偏置信域，并且有最小的平均 区间长度或平均体积.特别，对于正态分布，第六章的表6.5.1和表
6.5.2总结了正态总体情形下参数假设检验问题的UMPT或 UMPUT， 由此我们根据这两个表以及对偶关系即可一举得到相应参数的UMA或 UMAU置信域.例如在例7.2.2中，3 的置信区间必为UMAU置信区
间，并且其平均区间长度在<5的无偏置信区间中最短.另外，根据单调 似然比分布族得到的单边检验的UMPT,由对偶关系即可得到相应参数 的UMA置信上、下限.
例7.2.3 (续例7.2.1)设X,, ...，叉为独立同分布样本，X:~ r(l/6>，1).求0的水平为1 的UMA置信下限和UMAU置信区间.
解 由于久，...， 的联合分布为指数族分布， T = T(X) = X,
为其完备充分统计量，因此对例7.2.1的单边检验，那里由r 给出的否定域 及其检验函数必为UMPT,因而由此得到的对偶置信下限必然为UMA置信 下限.
至于0的UMAU置信区间，则要考虑双边检验: =❷Q“ H'加 氐.由定理6.4.4可知，该检验的UMPUT 所对应的否定域为
-\T<k.或T>A:2 | ,其相应的接受域为A(0(i) = \kt <T<k2).由于 2T/Oo 因此接受域可表示为
其中常数A, 由定理6. 4.4的(6. 4. 24)式决定，即 =«, Eflo[</)
(X)r(X)]=aE,o[T(X)].为便于积分，这两式亦表示为
E~[1] = 1 -a,
么。[(1 -^X))2T(X)/0O] =(1 -a)E,o[2T(X)/^0].
(7. 2. 14) 由于2T/60~/(2n), 1 -似戈)在4(氐)上的值为1,因此根据
(7.2.13)和(7. 2. 14)式，c,, c2的定解条件可表示为

J
/(271，7)如=1 -a
,
广2 2
J XV2(2ra，y)dy=2n(1 -a).
(7.2. 15)
由于(7. 2. 13)-(7. 2. 15)式对任意的60都成立，因此0的UMAU置信 区间为
C(X) =f<9: -<e<-]9 Ic2 CiJ
其巾常数q ，c2由(7. 2. 15)式决定.显然，为了得到UMAU置信区间， c2的求解比较麻烦，通常实用上还是取为[^(X),^(X)J =
[2r/Y2(2n,l -a/2),2T/Y2(2n,a/2)],这相当于由水平为 1 - a/2 的 UMA置信上、下限构成. ■
以上例7. 2. 3 反映的情况有一定代表性.根据假设检验的接受域与 参数置信域的对偶关

系，我们可以很容易地从单边检验的UMPT得到 UMA置信上、下限.但是，由双边检验的定理6.4.4及其定解条件 (6. 4. 24)式求解UMAU置信区间则通常比较麻烦.实用上则可取水平为1 –a/2的UMA置信上、下限构成置信区间(见引理7. 1.3).另外，如果能用定理6.4.5，即T(X)的分布关于某个点对称，则能很容易地 从UMPUT得到UMAU置信区间，见例7. 2. 2.

7.3容忍区间与容忍限

容忍区间和容忍限与置信区间和置信限有密切的关系，其计算也依 赖于置信区间和置信限的相应方法，但两者研究的问题有原则的区别.

7. 3.1问题与定义

设冬，...，1 为独立同分布样本，且有X. 本节不是考虑 参数0的置信区间，而是考虑随机变量;^的“置信区间”，称之为容 忍区间(tolerance interval)，即希望求f =工(JV)和 T = T(义)，使

P9 e [T(X) >1 –/?. (7.3. 1) 以下先举两个例子，然后再介绍其严格定义.

例7.3.1 设某种机床主轴长度为100 cm,允许误差为±0.5 cm. 生产中要求99%以上的产品达到以上要求，即轴长在(99.5,100.5)区 间内.今对一批主轴，测试了n根轴长，其值为，...，假设为独 立同分布样本，问这批主轴是否合格?

解 解决这一问题的一种方法就是确定一个上下界?=7(^–, ATJ和 r= 使得 P {X. e [7;J]| ^99%,若(T,T) C (99.5JOO.5),则说明以上轴长合格，这就可以归结为求解容忍区间

的问题，具体计算见下一小节. ■ 例7.3.2 设砖块的强度X 服从对数正态分布，要求产品强度 P(X^^)^99%(如fo=120).今对一批产品，测试了个砖块的强度

为X、，...，Xn，问这批砖块是否合格?

解 解决这一问题的一种方法就是确定一个下界I = 1(X，，...，

总)，使得m e [£, + ~)|彡99%.若I彡f。，则说明这一批砖块合 格 ，这就可以归结为求解容忍下限的问题. ■ 下面考虑容忍区间与容忍上、下限的定义.为简单起见，考虑连续型分布的情形.在(7.3.1)式中，X,的分布未知或依赖于未知参数;而 £(苓，...，Xn)和)的形式和分布都未知，因此(7.3. 1)式左 端的计算十分困难.可考虑一个基本等价的形式.易见，若z 和于为 常数，则(7.3. 1)式可表示为

p9U.e[r,f]|=F,(f) –p. (7.3.2) 但实际上I(X)和f(X)为随机变量， 和Fe(T)亦为随机变量，所 以 “匕(了)–么(I)彡1 为随机事件，因此我们只能要求(7.3.2)式 以概率为1成立，即对充小的y有

P❼ –Fe(T)]^l 一冷 (7.3.3) 该式与(7. 3. 1)式的意义基本一致.由此可以得到以下定义:

定义7. 3.1设久，...，^为独立同分布样本，& 久).若1 = T(X), T=f(X)满足(7.3.3)式，则称[为分布F3(Xl)的一个水平为(1 –/3，1 –y)的容忍区间;若f(弋，...,XJ 和1(4，...，XJ满足以下关系式，则称它们为分布的水平为(1 –卢，1 –7)的容忍上限和容忍下限:

Pe l^(r)>1 –p I 彡1 –y. (7.3.4)

P❷ M –么(!)彡1 –P) >1 一下，即 Pe }彡1 –r.

(7. 3. 5) 在这个定义中，(7.3.3)式表示X1 e (T,T)以很大的概率成立.在£7.3.3)式中，若[=–co,则得到(7.3.4)式，该式表示Xx e(•求、 歹)以很大的概率成立.同理，在(7.3.3)式中，若歹=+oo,则得到 (7.3.5)式，该式表示X, G (P, oo)

以很大的概率成立. |
计算容忍区间和容忍上、下限的主要方法为:(1)容忍区间可由容

忍上、下限得到;(2)容忍上、下限可由分布F❷(xj分位数的置信上、
下限得到.下面分别予f 介绍.
定理7.3.1 若f(X)和工(幻分别为分布Fe{x.)的水平为
(1 –登 , 1)的容忍上、下限, 贝IJ[7(X),?(X)]为其水平为(1 –p,
1 –y)的容忍区间.
证明 今以4表示事件“匕m 彡冬”;B表示事件“匕(7)>1 – 一L
登”;C表示事件“^(7)–匕(I)彡1–/T,则由定义7.3. 1可知
P& (4) >1–子, (8)彡 1–子. (7.3.6)
而要证P/C)^1 –y.由以上定义可知, 若事件S同时成立, 则必 有匕(亍)–～(!)彡1 –冷, 即C成立, 因此CDAB, P0(C)^Pd(AB^ 由此可得
P人C) :P0 | [尸“7) 一～(£)]彡1 –p 1 ^Pe(AB) = –f,
=P(A) +P(B) –P(A+B)^P(A) +P(B) 一1. 因此由(7.3.6)式可知
尸“ C) >(1 –子)+ (1 –子)–1 = 1 一y. ·
7. 3.2 容忍上、下限的计算
下面的定理说明, Fff(Xl)的容忍上、下限可由其分位数的置信上、 下限得到.
定理7.3.2设弋, ..., 叉为独立同分布样本, A 服从连续型分布 £,(久), 则〒(X)为其水平为(1 –卢, 1 –y)的容忍上限的充要条件为 ?(X)是xx_^0)的水平为1 的置信上限;I(X)为其水平为(1–冷, 1 –y)的容忍下限的充要条件为I(x)是%(4)的水平为1 1 的置信下限. 其中(o)和%(<9)分别为分布r/x.)的1–冷分位数和冷分位数.
g 明 可直接从容忍上、下限以及分位数的定义来推导. 歹(幻为Fe(X})的水平为(1 –p, i –y)的容忍上限的定义及其等价
形式为
Pe ~/3) 1 –y

<=>P0 ! –p(T } >1 –y. 该式说明歹(X)为参数的水平为1 –7的置信上限.
同理, X)为F人X、)的水平为(1–j3,l–y)的容忍下限的定义及 其等价形式为
P❷ I[1 –～(p]彡1 –p i >1 –y ^Pe l^(Z))多1 –y
<=>7\ (❷)| 多1 –y. 该式说明I(X)为参数%(0)的置信下限, 证毕. |
为了求解分位数和% (0)的置信上、下限, 通常需要根据 给定的分布, 导出它们与参数6之间的关系, 然后再根据这些关系 求解.
例7.3.3 设弋, ..., 为i.i.d.样本, A ~M+r(l, l).求此分布 水平为(1–芦, i–y)的容忍上、下限和容忍区间.
解 根据定理7.3.2,只需分别求出分位数和%(0)的置信 上、下限即可.首先, 由假设条件可求出分位数与参数m 之间的关系. 由于2(X. –^(2),因此P(X^xp) =/3可化为
P I 2(^! –/z) C2(x^ –/i)) =/?; 2(xfi –/t)=义2(2, 卢).
1
因此有^=M+yX2(2, /3).由于%为M的线性严增函数, 因此由引理
7.1.1, 由M的置信下限即可得到%的置信下限.而m 的置信下限可类 似于例7.1.4得到.由于X(1) ~/x+r(n,l), 2n(X(l) ~/(2),因 此有
Pj2n(X(1)–fi)分2(2,1–y)} =1–y.
由此可得P(X(1) –^Y2(2,l–y)^M}=l–y.所以弘的水平为1 1的

置信下限可表示为M=^(i)-^X(2,l -y); %的水平为1 的置信
下限为A£+|^2(2,/3).因而分布M + r(l,l)的水平为(1 -冷，1 -y)的 容忍下限为
I(x) =X(1) -~ x2(2,1 -y) + (2,冷).
类似地，水平为(1 -冷，1 -y)的容忍上限为f(X) =X{1) -^ 2(2,7) + 2n

-|^2(2,1 -j8).由定理7.3. 1,水平为(1 -y)的容忍区间为 又(1) 一^^(2，1
+^¥2(2,冷乃),
尤(1) 7’2)+去^(2’ 1-冷’叫.
_
例7.3.4 设久，...，X„为独立同分布样本，且有X、KfjL，(r2). (1)求该分布水平为(l-/?，l-y)的容忍上、下限和容忍区间;(2)应 用:某厂生产乐器用镍合金线，今从一批产品中随机抽取10个样品，
测得其抗拉强度为
10 512, 10 623, 10 668, 10 554, 10 776, 10 717, 10 557, 10 581,
10 666, 10 670. 求该镍合金线抗拉强度的容忍下限(设置信水平为(0. 95, 0. 95)).
解 U)根据定理7.3.2,我们先求人的置信下限.为此，首先
求出^与参数(zi,<r2)之间的关系.由假设可知P(X, =冷, PUA -M)/a | =p.由于(X1 -^)/a 服从标准正态分 布，因此有(-/x)/(r=z0,x0=/x+az其中%为标准正态分布的冷分位数，为已知.因此可根据以上关系以及枢轴量法求乂的置信下限. 由于
*-1
可取枢轴量为
代人上式可得 c(10)=7=收卜
s ^7^
～“
数.记t(n-I，斤z' ，1-y)女此非中心Z分布的1-y分位数，则有 -〈心-1，▲?卜召，1 -y)卜1 -y.
1)/(n -1)
一iT V^zi~p).
- 即G(X,0)服从非中心f分布，与参数0无关;其中^w为非中心参

上式-~f(n-11-y)常记为A=A(n,/3,y),因此^的置信下 Vn
限，即正态分布的容忍下限可表示为
一1
T=X-AS, A =A(n,/3,y) =-z(n-l,扣 _- yn
.注意，A(n, jS,
y)有表可查，例如，可参见茆诗松，王静龙(1986).
(2)本问题中，n = 10,置信水平为(0. 95,0. 95),查表可得A =
2.91.经简单计算可得1 = 10 632.4，S2 =6 738.77, S=82. 09.这些数 据代人(7.3.7)式可得 T(X) = X - AS = 10 632.4 - 2.91 x 82. 09 = 10 393. 52.
因此这批镍合金线的抗拉强度不低于10 393. 52. |
7. 3.3应用次序统计量计算容忍限
设X,,...，为独立同分布样本，X, 为连续型分布，f(X) 和别为其水平为(1-0,1-7)的容忍上、下限。由定理7.3.2 可知，〒(X)为*～的水平为1 的置信上限;[(尤)为%的水平为

1−y的置信下限.而分位数久，和^的置信上、下限常常可通过次序 统计量求出.设样本的次序统计量为X(1)^X(2)^ ...名X(4)，直观上看,
在次序统计量中，可取右端最小的人;)为久的置信上限;而取介 左端最大的X(1)为%的置信下限.下面将证明这一结论.
平)， t rm 11
图7.3. 1 应用次序统计量计算容忍限
为此，记 Y(i)=F(X(，.))，i=l,−,n,则根据第一章 的讨论有
=F(XJ ~Z?(0,l)， Y(i} =F(X(i))~B£(i,n−i + l). (7.3.8) 另外，不完全函数记为1人p，q、，且有(见第一章)
W,9) =1. (7.3.9) 定理7.3.3 设为独立同分布样本，X. −F(Xl)为连续
\ −y).
类似¥ 导可得T=X+A(n,/?,y)S,而水平为(1−/3, 1−y)的容忍区
间为[X−A(n, 13/2, r/2)S,I +A(n,冷/2，y/2)]
型分布，则其水平为(1 −)0,1 −y)的容忍上、下限及容忍区间满足以下
(7. 3.7)
习题七
337
关系:
(1)T{X)=X(;o)，j0=min −j+1J) 1−y| ;
(2)T(X)=X(io)， i0=max f+1)>1−y[; .(3)[T(X),T(X)]=[X(0,X(n],其中Z，/应满足关系
−j + i + 1，j − i)彡 I −y. 证明(1)由定理7.3.2可知为分布F(Xl)的容忍上限的充要
条件为为A4的置信上限)，其等价条件为
一尸 −P I −y
<=>1−1\ −j+1) 1−y(由(7.3.8)式) ^(n−;+l, j)^l−y(由(7.3.9)式).
取满足上式最/h的人 并记为人，则有7(x) =x0o).
(2) 类似地，久£)为介水平为1 − y 的置信下限的等价条件为
p \x(i)−y ^P\F(X{i))^p) >1 −y
(i,n−i + l)^l − y. 取满足上式最大的/并记为/。，®jwr(x)=x(io).
(3) 由定义可知，若[X(0,X(>)]为厂(X,)的水平为(1−冷，1−y)的 容忍区间，则其等价条件为
<=>尸 − r。〉]彡1 ~/3 }彡1 −y <=>1 −h−flU − −J + I + 1) Ssl −y <=>// 3(n −j+ i + 1, j−i) −y.
以上推导用到了性质—K(i)～BE{j − i，n −j +i + 1)(见第一章).|
习题七
1.设X,， ...,Xn为i.i.d.样本，X\~E(/I,1)=M+r(l,l),试用枢
轴量法求M的一个水平为1 −a的置信区间.
2−设 ...人为 d.样本，X.~T(A,r),但p已知.试用枢轴
量法求A的一个水平为1 −a 的置信区间和置信上、下限. 3.设X:， ...，兑为i. i. d.样本，试用枢轴量法求以下分布中相应
参数水平为1 −y的置信区间.
(1) 设冬服从冷分布即f(xl9e) | ;
p l^(y
{F(X(y))^l −/3 | ^1 −y
−y

(2) 设 X,服从 Weibull 分布，即/(x^A) =aA%r1exp) -Xx\\I\x, >0 | ,但a已知;
(3) I服从Pareto分布PR(a，0)，即f(xi9af0)=aettx;(^l)I\xt
^6 \ , 6已知或a已知.
4.设X、，..，Xn为i.i.d.样本.(1)若X, ~7V(6^)(沒>0)，找一
个枢轴量并用此枢轴量构造6 的一个水平为1 的置信区间;(2)若 X1 ~/V(0，沒2)(沒〉0).,求沒的一个水平为1 -a的置信区间.
5.设弋，...人 为 样本，X, I |,
其中a>l已知，0>0未知.试找一个枢轴量，并用此枢轴量构造0的
一个水平为1 的置信区间. *6.设X.,...，Xn为i.i.d.样本，A 服从均匀分布
的同变估计为
7. 从某自动车床加工的一批零件中随机抽取10个，测得其长度 (毫米)分别为
12.01, 12.15， 12.08, 12.09, 12. 16, 12.03， 12.06, 12. 13, 12.07, 12. 11.
假定长度服从正态分布，置信水平取为0.95. (1)求平均长度的置信区 间;(2)该自动车床加工的精度a 在什么范围内?
8. 假设某元件的寿命服从指数分布.
(1) 从一批产品中随机抽取9个，测得其寿命(小时)分别为 150, .450, 500, 530, 600, 650, 700, 830, 910.
问这批产品的平均寿命不低于多少(置信水平为0.95)? 又设p 为这批 产品中寿命大于600小时的比例，求p 的置信区间;
(2) 从一批产品中随机抽取20个，测得其前10个的寿命(小时) 分别为
500, 920, 1 380, 1 510, 1 650, 1 760, 2 100, 2 320, 2 350, 2 900.
求这批产品平均寿命的置信区间(置信水平为0. 95).
9. 设弋，...，及为i.i.d.样本，Xx ~ •••,Ym为
d.样本，r. -7V(^2,aD，且两总体独立. (1)求p = cr\/a\的置信区间;
试构造0的一个水平为1-a的置信区间.(提示J “y +X
(■
、 (8)，求T“-e的密度函数).

(2)设甲、乙两位化验员独立地对某聚合物的含氮量用相同方法 各测量10次，其样本方差分别为0.5419和0.6050.假定测量值服从
正态分布‘，求方差比p = 的置信区间(置信水平为0. 95).
设 ...，总为i.i.d.样本，
, ... , y 。 为
10.
i.i.d.样本，y, -/V(M2,^);且两总体独立.若已知，求5
=Mi， 水平为1 - a的置信区间. ， 11. 设X,,-,Xn为i.i.d.样本
Yl9-9Ym 为 ,且两总体独立.若m = n,求d = _弘2 水平为1-a的置信区间.若m=kn(k为已知正整数)，能否求解同样
i. i. d.样本，Yx
- ,cr2)
问题?

12. 某养猪场分别用标准配方饲料和新配方的饲料喂养两组猪，一
段时间后，在两组猪中各随机抽取10头，测得其体重增加值分别为
新 配方:36.0, 32.7, 39.2, 37.6, 32.0, 40.2, 34.4, 30.7,
36.4, 37. 2.
标准配方:35.2, 30.0, 36. 5, 38. 1, 29.4, 36.0，31.3，31.6, 31. 1, 34. 0.
假设两组猪体重的增加值都服从正态分布，求体重平均增加值之差的置 信区间(置信水平为0. 95).
13. 设X{=(Xit,Xi2), i=1, 2,...，n为i.i.d.样本，Xx ～ ,
A^2 ;P)，令0=^2/^!(/x,#0).求0的一个水平为1 -a的置信区 间(通常称为Fieller区间)(提示:令Y^O)= -0Xi}, i=l，2,."，n, 以 K.(^),...,yn(^)为基础构造枢轴量).
•14.设久，...人为Li.d.样本，X} ~/?(0，么);匕，...，为i.i.d. 样本，Y{ ~7?(0,6>2),且两总体独立.求0,/02的一个水平为1-a的置 信区间(提示:证y^ex/x{m}e2为枢轴量).
15. 设 ~£(A,)-rCA^l), i=l,2,且Xx, X2独立.
(1) 令 = A,/A2,证明:T^x^x^e) =^/x2 是一个枢轴量， 并用它构造e的一个水平为1 -a的置信区间;
(2) 令6>=(A,,A2),证明:T2(XltX2-0)=2AtX.+2A2X2是一个 枢轴量，并用它构造0的一个水平为1 -a的置信区域.
16. 设X,，...，X”为i.i.d.样本，X{~r(A,l), A>0; Kj,—,ym 为=i. i. d.样本，y, -r(7?,i), v >o,且两总体独立.试基于统计量r
n/m-
K构造『=(1 +予)的水平为1 -a的置信上界.
1
弋尽
340
第七章区间估计 17. 若\(%)为参数0i的一个水平为1 的置信域“=1，...，幻，
则只幻=) *=1
其中a a，.
为参数H，...，❷V的一个水平为1 昀置信域，
i=1)设1，...，Xn为i.i.d.样本，X{-P(Al)iYl9-9Ym为
18. (1
i.i.d.样本，Yx -P(A2).求6=A,-A2的渐近正态置信区间;
(2)设4，"•，^为i.i.d.样本，X1 ～6(1，P1);Y.,—,Ym为 i.i.d.样本，
-6(1,p2).求8=p、-p2的渐近正态置信区间;
(3) 某厂对职工出勤率进行_查，甲车间随机抽取50人，其中一 年全勤的有40人;乙车间随机抽取40人，其中一年全勤的有35人. 求甲、乙两车间职工全勤率之差的区间估计(置信水平为0. 95).
19. 设 X,，...，叉为 i. i. d.样本,Xx ~E(l/0) ~r(1/0,1)(指数 分布).
(1) 证明:T人x.，e) U 是一渐近枢轴量(即其渐近分布与e
无关)，并用T}构造0的)一个水平为1 -a 的渐近置信区间;
X-0 X
个水平为1 -a的渐近置信区间;
(3) 求0的基于似然比统计量、score统计量以及Wald统计量的水
平为1 - a 的渐近置信区间.

20. 设X}，...，Xn为i.i.d.样本，Xx -6(1,p), 0<p<1.求p的基
于似然比统计量、score统计量以及Wald统计量的水平为1 -a的渐近 置信区间.
21. 设X{,•••,Xn为i.i.d.样本,Xj~2V(^,€r2).求6=)T的 基于似然比统计量、score统计量以及Wald统计量的水平为1 - a 的渐 近置信域.
22. 设弋，...， 为i. i. d.样本，X.服从均匀分布7?(0,(9),应用定 理7. 1. 1求0的水平为1 -«的置信区间.
*23.设X,,-,Xn为i.i.d.样本，X,-b(l.e), 0<^<1.应用定理 7. 1.1证明:0的水平为1—a的置信区间可表示为其中
(2) 证明:t2(x ;o
是渐近枢轴量，并用r2构造0的一
T
❷- ------------------------------ -------------------------------
' r+ (n-r+l)F(2n-2r+2,2r;l -a/2) f
?二 (r + l)F(2F +2,2zi -2T;1 -a/2) "(n-T) + (T+l)F(2r+2,2n-2T;l -a/2) *
习题七
341
r=2 x:(提示:参见第一章，r的分布函数可由不完全冷函数表示，而卢 i=1
分布可由F 分布表示). •24.设r服从负二项分布NB(❷, r)，0<6><1, rf 知.应用定理7. 1. 1证明:0的水平为1—a的置信区间可表示为[gj],其中
n =__________________r__________________ -^r+ (T+l)F(2r+2t2r;l -a/2)’ rF(2r,2T;l ~g/2)
r + rF(2r,2T;l - a/2)*
25.证明定理7. 1.3的结论. *26.设/(幻是一密度函数，它在上非零，在以外
=1—a的区间[a,6]中，当取a-x_,㇀使j /(x)d%=1 -a的a, b
时，所得区间长度最短;
(2) 当/(幻在[rv_,xj上严格递增时，证明与(1)类似的结论;并
用(1)或(2)来证明例7. 1.3中所得的区间[X(n),a^X(n)]在所有满足 例7.1.3要求的区间中是最短的.
27.设X,，...，为i.i.d.样本，X'z+r(l, l).试在M的水平 为1 -a 的置信区间类[尤(1)+e, X(1)+(/]中，找一个长度最短的置信 区间.
*28.(1)设t/(X)是一个取正值的统计量.是一个枢轴量.其密 U
,
等于零
(1) 若/(幻在[x.,x J 上严格递减，证明:在所有满足f:f(x)dx
_ <X + + 00.
度函数/(幻在%是单峰的(即当时，/(幻不降;当时，/(X) 不增若).考虑的如下置信区间类 :^7(%)dx=l -
(2)考虑例7. 1. 1,即弋，...，总为i. i. d.样本，X' ~/V(^,a2), 其中cr2都未知;试在〃的置信区间类:j[无-6SZ^, X-aS/^]:
/af(x) dr = 1 - aH中找一个长度最短的置信区间，其中S =
/(a*) =f(b,) >0,且 a* 名x。名6*
aI»
则[T-b^U, T~a,U]是C中长度最短的区间(提示:因C中任一区间 的长度都是(b-a)U,所以只需证若a <b且b -a <b, -a,,则有
【f(x)dx < 1 -a);

(n-1)-1 2 (X^xy.
29. 设1 , ...人 为i. i. d.样本，Xx ~7V(^,a2), /z和cr2都未知. (1) 求的水平为1-a的UMAU置信上、下限以及UMAU置信
区间;
(2) 证明:(1)中的置信区间可由反解例6.6.1中关于/X的似然比
检验的接受域而得到;
(3) 求<r2的水平为1-a的UMAU置信上、下限以及UMAU置信
区间.30. 设X，, ...，X„为i,i.d.样本，X、 1|，其中0>0未知.求0的水平为1-a的UMAU置信区间.
31. 设X'，...，Xn为i. i. d.样本，X' ~r(1/0,1)为寿命分布.若仅
观测到(y, ,••• ,rjT = (x(1),...，尤(7))T这前r个寿命的值，求e的水平 为1 - a的UMA置信下界和UMAU置信区间.
32. 设Xl9-9Xn为i,i.d.样本，X. 6>>0. (1)求沒的
水平为1-a的UMA置信下限;(2)证明:[J(„)，a'+X(„)]为0的水 平为1-a的UMA置信区间.(提示:见第六章24题)
33. 设X'，...，Xn为i. i. d.样本，X: ~/V(M,cr2),求分布的水平为
(l-ZM-y)的容忍上、下限和容忍区间.(1)设弘未知，a2 = B 知;(2)y=/x。已知，a>0未知;(3)设棉纱的断裂负荷服从正态分布,
从，a2未知.现从一批棉纱中随机抽取12段测得其断裂负荷(单位为 100_,N)为
228.6, 232.7, 238. 8, 317.2, 315. 8, 275. 1, 222. 2, 236.7, 224. 7, 251.2, 210.4, 270. 7. 设置信水平为(0.95,0.95),已知
A(12,0.95,0.95)=2.74,求棉纱断 裂负荷的容忍下限.
34. 设 为i. i. d.样本，X'服从均匀分布尺(0,3)，沒>0, 求该分布水平为(l-/?，l-y)的容忍上、下限和容忍区间.
35. 设 X、，...，Xn 为 i. i. d.样本，J,服从 Weibull 分布 lT(+,a。)，
其中aQ>0已知，a〉0未知.求该分布水平为(1 -^8,1 -7)的容忍上、 下限和容忍区间.
36. 设冬，...，^ 为 i. i. d.样本，X. -BE(091) -
1 I.求该分布水平为(1-^,1 -y)的容忍上、下限和容忍区间.
=加广7 彡

第八章 Bayes统计基础

Bayes统计，特别是Bayes统计计算，近年来取得重大进展，是当 今统计学发展最快的分支之一.虽然Bayes统计推断曾经有很多争论， 但是现在这些争论已经不是主流，大家更看重的是Bayes方法的成效和 应用价值，而把这种方法在哲学方面的问题先搁在一边.近年来，一般 理论与应用工作者都承认，Bayes统计方法可用于统计学的几乎所有分 支，而且通常效果都不错，同时Bayes方法也能解决一些经典统计方法 所不能解决的问题.另外，Bayes统计方法往往比较简单直接，它把各 种统计问题都归结为后验分布的计算问题，很受应用工作者的欢迎.因 此 ，Bayes统计已成为当今统计学的重要组成部分.

本章主要介绍Bayes统计推断的基础知识.第8. 1节首先介绍 Bayes统计的基本概念和原理，包括先验分布、后验分布以及Bayes统 计推断方法，本节也比较详细地介绍了无信息先验分布的选取方法;第 8. 2 节介绍Bayes估计方法及其性质;第 8. 3 节介绍假设检验和区间估 计的Bayes方法，特别，本节比较详细地介绍了 HPD可信域的基本性 质和求解方法.关于Bayes统计推断更进一步的内容可参见茆诗松 (1999)，郑忠国(1998),范金城,

吴可法(2001) , Lehmann (1985 , 1998) , Berger(1985) , Shao(1998)等文献.

8.1 Bayes统计基本概念

且有

前，对于未知参数0 —般应当有所了解，即积累了一些关于参数沒的 “先验信息”，对于未知参数的统计推断应该既考虑观察样本的信息，也 考虑参数的先验信息.这种先验信息用数理统计的语言表述出来 ，就是 未知参数0为一随机变量，有一定的先验分布，其分布密度为Ke). 这种观点在某些场合是合理的.例如，某厂通过观察样本I 了解一种产 品在某天的次品率0，X 通常服从二项分布.就这一天而言，0 为一确定 的数，但是，由于工厂每天在生产，对次品率逐日波动的情况有所了解，

Bayes统计的基本观点就是要充分利用先验信息，并综合样本信息， 然后进行Bayes统计推断.具体来讲，设观察样本为X =

Rn,

Bayes观点认为，人们在观察到样本X 之

因此，在估计当天次品率0时，适当地参考过去次品率的波动情况是十 分合理的.从长期来看，次品率6 每天不一样，可以看成一个随机变量， 某一天的次品率则可看成随机变量的取值.按照Bayes观点，可以给次品 率沒一个先验分布，从而综合样本分布得到其后验分布，并基于后验分 布进行统计推断.但是，也有许多情况，把未知参数看成随机变量并不 是很合理.例如，通过取样来估计某铁矿的含铁量0，通过抽样调查来估 计某人在选举中的得票率0等，这时6只能看作一个确定的数.因此，按 照 Bayes观点，一律把未知参数都看成随机变量，并赋予一定的先验分 布，这种观点尚无充分论据.不过正如上面所述，Bayes方法的成效和应 用价值已经没有太多争论;Bayes方法作为一种有力的工具已经得到充分 的认可.另外，从统计判决的观点来看，损失函数同时在样本空间和参 数空间取平均，得到Bayes风险(见第三章定义3.1.5),然后根据Bayes 风险最小准则求解，这显然是合理的.

8.1.1 Bayes统计原理

Bayes统计推断主要可归纳为以下三点:

(1)参数0为随机变量，有先验分布，记为K0)，它集中了 关于未知参数的先验信息.

(2) 认为样本分布为参数已知时样本X的条件分布，即 =p(xI6),它表示参数给定时，样本X的分布规律.

(3) Bayes统计推断的出发点为参数0 的后验分布，即X 已知时沒

的条件分布P(刎 X)，因为它综合了先验分布77(幻以及样本分布f(x、0)

所提供的关于参数6的全部信息.后验分布是一切Bayes统计推断的出发

点，因而计算后验分布就成为Bayes统计的主要任务，其分布密度记为

7r(0\X). X

引理8.1.1设

后验分布，即X 已知时的条件分布7r(<9 | x)可表示为

I X)=.产辿f(X’❷) =c(%)77(^)/(x,^). (8. 1. 1) j7T(O)f(x,e)dO

证明的联合分布可表示为 (X，沒)~p(x，Q)=p(|3)=p(x)p(0\x).

根据 Bayes 观点，其中 p(6) =7r(0)9 p(x | g) =f(x，0) , p(8 \ x)= ^(0 | x), 因此有

TT(4) X)=P(4) 汐). P{X)

,

0, 0的先验分布为77(沒), 则沒的

边缘分布p(幻可表示为

p(x) = ^p(x,0)d0 = j\r(x)f(x, 玢)d0 .

由此即可得到(8. 1. 1)式, 其中c(x) =p-l(x).

注 (8.1.1)式有很丰富的含义, 今摘要说明如下:

(1) 首先, 在(8.1.1)式中, c(x) =p(x)-J可看成积分常数, 有时不需要进行计算, 而可以由以下关系式决定: ^C(X)7T(0)f(X, 0)d0 = 1 ,

可参见下面的例题.在本章许多场合都会出现代表积分常数的C(幻或 C,它们在不同场合可能代表不同的值, 但意义大体相同, 为了简单起 见, 我们不再仔细地加以区分.因此在很多问题中, (8.1.1)式也常常 可以略去常数而表示为

7T(0 \ X) OC 77(O)/(X90). (8. 1.2) (2) 由(8. 1. 1)式可知, 先验密度的选取亦可相差一个常数, 即 7T(幻亦可取为广义密度kird其后验密度77(0I%)不变, 因为在

(8. 1. 1)式的分子分母中常数&可消去.因此, 先验密度7T(0)亦可表 示为诸如

77(^)oc1或者等形式.另外, 若为0上的

非负可积函数, 即[7Tf(e)d0= < X, 并在(8.1.1)式中用W)取 代先验分布7T(^),则

7T(0\x)仍然为一个后验密度函数, 因为77'(幻 可表示为kTr(e); =k~ln,(e)>.更进一步, 若[ir,(e)de=«,但

J0

是 1 , 贝lj(8. 1. 1)式仍然有意义, 仍然为密度函

数.对于这些情况, tt'(60通常称为广义先验密度;当[^(0)(10 = go

时, 则称为非正常的(improper)先验密度.而^7r(0) - 1 , 则称为

正常的(proper)先验密度.

(3) 如上所述, 在推导后验分布时, 可以相差一个常数, 因此若X 的分布密度/(幻可表示为f(x) =kg(x)9 A:为常数, 则称g(幻为Z分 布的核.这个名字在Bayes统计中常常用到, 可参见下面的例子. ■

例8.1.1晃, ..., ^为独立同分布样本, 且X,-6(1,6»),求的后验

密度假设<9的先验分布分别为i)卜/?(0, 1);n)e-BE(Piq). n

解 样本分布为 /(x,6>) = fj ^(1 =^(1 -❷)n_T, 其中

I

T= ^Xi.易见, 若把0看成变量, 则上式为冷分布BE(T+l,n-T+l) «=|

的核.

i) tt(6) = 1 代入(8. 1. 1)式可得

7T(0 \ x) = C(x) • 1 • 0T(1 - 6)"~T.

I c(1)-_________1___________________汐+■?)_

因而上式为分布, 即77(0 | 幻～SE(r + 1,

由于随机变量为 n-r+1), 这时c(幻可由该分布的常数决定, 即

、' j8(r+i

ii) 77(4) =c^-'(l -oy~l代人(8. 1. 1)式可得

, 7i-r+i) ~r(r+i)r(n-7'+iy

TT(0\x) =c(x)6>r+/, '1(l -eyT+q~l.

因此有 e\X ~BE(T+p，n-T + q). 鹰
由前面各章的内容可知，充分统计量在统计推断中起着十分重要的 作用，以下引理说明，
Bayes准则与充分性准则是相容的.这个引理也 是由(8. 1. 1)式得到的.
引理8.1.2 设X～f(X E0, 0的先验分布为77(0).若丁: 7XX)为充分统计量，其分布为
g(t，0)，则0的后验分布77(勿幻可表示为
开(糾幻= ^)g(T(X)^) = C(%)77(^)g(T(X)^). J7T(0)g(T(X)，0)d0
(8. 1.3) 反之，若0的后验分布7T(0\x)可表示为0和某个70)的函数:
rr(0\x) =a(x)(/>((9,『(%))，则 T = T(X)为充分统计量.
证明 若T=T(X)为充分统计量，则由因子分解定理可知f(xy6)=
g(T(x) ,8)h{x), 且有
77(沒| X) = 77(9)容(7)欠)，的h(X)
卜 (e)g(T(x)，❷)h(x)d0 77(沒)g(T(X)，0)
= C(X)7T(0)g(T(X)，0). 此即(8.1.3)式，其中C'[(x)=卜(8)g(r(x)j〉(10) 反之，若沒的后验分
布可表示为 7r(0]x) =a(x)小(0，T(x)),则由(8. 1.1)式可得 n(e\x)= a(x)小
(权，T(x)) =c(x)TT(0)f(x,0).因此有
/U，6>)=[c',(x)a(A;)][7r-,(^)</>((9,T(x))] h(x)g(T(x)90).

由因子分解定理可知，T = T(X)为充分统计量.
(8. 1.3)式有广泛的应用，该式说明，我们也可以从充分统计量
r = r(x)的分布gU4)(或者它的核)出发，根据(8.1.3)式计算后验分 布，这往往比从样本分布出发简单，可参见下面的例子.另外，
引理8. 1. 1后面的注释对于(8. 1.3)式亦适用.， 例8. 1.2 ...，氡为独立同分布样本
为正态分
布，a2已知，求m 的后验分布，假设M的先验分布分别为i) M服从广 义均匀分布，即7T(/x)oc1;ii)77(从)-N(^0,<702)为正态分布，其中
Mo，f 。2为已知. x
i) 77(/1) =1 代人(8. 1.3)式可得 |x)=c(x).1 .exp|
因此 77(从 | x) - N(x,a2/n)为正态分布，其中 c(x) = /n.
ii) 下面证明:若77(/1) ~ TV(w^)，则77(^ |x)也服从一个正态
分布N(a,Tj2)，其中
r^r(;v)=叉为充分统计量,
解 当<72已知时， 因此可以基于无的分布，根据(8.1.3)式求后验分布.
~
:
n-
~x+
aa0 21 1
1
a=---------- :- , 7]=-=---------. (8. 1.4) n1 pn1
2十2 2+2 a <r0 a cr0
由于77()ll) -/V(Ao,^), XV(x，zx) -7V(M,(r2/n),因此有
对上式的主要部分进行配方和化简可得
■

T) CTq + a / TI

 因此联合分布、边缘分布和后验分布分别为

P(X)

I h(x私 J —QO

(Mo—x)2 1 (£To +a2/n)J

(8. 1.6)

=^exp{-^(/x_a)2H 」(浩:知}’

7T(/xIx) 尸(%)

=

_a)2|- (8.1.7)

v^/XP卜了

■ 1 _exP(

i 2v j

以上后验分布有很好的统计意义，今说明如下.在正态分布yV(M,a2) 中，方差a2的倒数a"2称为精度，a 越小，精度越髙.在本题 中，参数A 的先验均值为A。，先验精度为cr;2, 而样本均值无~ N(^,a2/n),其精度为(a2/n)—*=n/a2,因此(8.1.4)式说明，后验 分布的精度为先验分布的精度与样本均值分布的精度之和;而后验 分布的均值为先验均值P 与样本均值I 关于精度的加权平均. ■

8.1.2 先验分布的选取方法

选取先验分布的方法多种多样，也有不少争论，但不管哪种选取方 法，最后还要看Bayes统计推断的效果，以下介绍两类最常用的选取方 法 ，即共轭先验分布和无信息先验分布.

(1)共轭先验分布 即取先验分布77(0)，使得后验分布77(^|X) 与 77(0)属于同一类分布族.直观上看，该准则使先验分布与后验分布 保持协调一致，这也是合理的.例如77(^),7T(0\X)同为正态分布， 或同为分布等等.前面的两个例子都是这种情形.共轭先验分布在实 际中应用很广，下面的例子都是常见的共轭先验分布.

例8.1.3 及，...，及为独立同分布样本，且有Xx ~P(A),设A的 先验分布为77(A)～r(a，p)，则其后验分布也是厂分布.

解 ...，总的联合分布可表示为

/(x,A) = e"A =c(x)e_nAAr, T= Vxi. i=1 Xi> iT\

易见，若把A看成变量，则上式包含了厂分布的核，而A —77(A)= ee-^A^1, 因此由(8.1.1)式有

Tt(Afx) =c(幻tt(A)/(x, A) =e(x)e'aAAF-/e-nxAr=e(x)e-(n+a)AAr+p-1, 即

I x) ~r(n+a,T+p),与77(A)同属于厂分布族. 壓

例8.1.4 X、，”，Xn为独立同分布样本，且有X. —E(A) =r(A,l);设 A的先验分布为尸分布，A~tt(A卜r(a,p),则其后验分布也是厂分布.

解 Xl , •• ,Xn的联合分布可表示为

y(%, A) = A"e_Ar, T = .

因此由(8. 1. 1)式有

tt(A |x) =C(%)e-flAAp_1Ane-Ar =c(x)An+p_1e'(a+r)A

即77(A I ～r(a+r, 7l+P)，与77(A)同属厂分布族. 由以上两个例子都可以看出，在样本分布/(X,A)中，若把A看成

变量，则它们都包含了厂分布的核(例如在例8.1.3中为r(n,r + i))， 而且两个厂分布的核相乘还是厂分布的核，因此可以取厂分布为共轭 先验分布.这种情况很常见，例如在例

8.1.1中，若把〃看成变量，
包含了冷分布的核，而且两个冷分布的核相乘还是0 分布的核， 因此也可以取)8分布为共轭先验分布.
以下介绍逆r 分布及其共轭先验分布. 设x~r(A, p),则称y=x~1服从逆r 分布，并记为r-r-*(A,p),
根据变换公式，r 的分布密度为
而e y(7) 注意，若f月rk逆厂分布1^(人，戶)，则其数学期望为E(r)=Ea-1)=
在例8.1.4中，若X.~E(a-*)=r(a-*,l).容易验证，若a的先验 分布为逆厂分布:即a-r~l(AlP)9则其后验分布也服从逆厂分布.
例8.1.5 设尾:，...，夂为独立同分布样本，且有Xx~7V(O,cr2),
a=a2服从逆厂分布 其后验分布也是逆厂分布.
解样本分布为
x) =c(%)e一丄
即7T(a \ X)~r-1(A +5,y-+p),与77(a)同属逆厂分布族，因此逆F
其中S =
含了逆厂分布厂l(S,f -1)的核.因此由(8. 1. 1)式以及(8. 1. 8)式有
ム i=l
I {y^O }. (8. 1. 8)
即其精度a_2服从尸分布)，则
匯
易见，若把《看成变量，贝_(8.1.8)可知，/(%, a)包
350 第八章 Bayes统计基础
分布为参数a=a的共辄先验分布.其后验期望为 E(a | %) = (A + S)/ (y- +p - 1)•
例8.1.5和例8. 1.2合在一起，可推广到4 -/V(^,a2)的一般情
形，若a- a2服从逆厂分布，而弘|^服从正态分布，则(a, /i)的后验 分布也是逆厂-正态分布(见习题).
例8.1.6 设X:，...，叉为独立同分布样本，且有4~/?(0, 0)，设 沒的先验分布为Pareto 分布 PR(ol,❷Q), BP it (0) = a0Q0^(ex+l} I
❷o I , 则其后验分布也是Pareto分布.
解 =(1/^)/ |x(I)^0 \l'\x(n)^0),因此有
77(沒|x) =c(%)^-(o+,7 \e彡❷Q |士/ \x(n)^e | =c(幻6T(n+a+1)/ \e^e\ 1,u
其中 6>'0=max \e0fx(n)}f 因此
例8.1.7 设X:，...，爻为独立同分布样本，且有X' ~PR(a, 的，
若0>0已知，a >0的先验分布为77(a) ~r(a, p)，则其后验分布也是 厂分布.
解 由于/(%!, «) =a0ax[~(a+1); \X{^e | , 77(a)～r(a, p)，因此 由(8. 1. 1)式有
77(a|x) = e(X)e-aaap-}a0na(f]Xiy{a+l)I\x(1) 彡 0 \ =c(x)an+p-'e-aa]~[{Xi/ey
即77(a I x) - r(r + a,n +p),与7T(cr)同属尸分布族，其中T = n
2 IoW 沒). I i=1 .
以上两个例子的结果可以推广到幂函数分布x -pf(c9o):即
f(x;c,0)=-; I (c>0;^>0). 0
可以证明:若C已知，则<9的共扼先验分布为Pareto分布;若(9已知， 则c的共轭先验分布为厂分布(见本章习题).

例8.1.8 设X = (J:, ..., XJT服从指数族分布:/(%, 幻= 为共轭先验分布.
也服从 Pareto 分布 PR(n+a, 0'o). I

ii)把以上结果用于两点分布，即苓，...人为样本，弋～6(1，沒). 解 i)由(8. 1. 1)式有
77(| X)=C(X)7T(0)/(%,^)
=c(%)exp j (a + T(%))^(^) - (th 4-1)6(^) |. (8. 1.9)
因此后验分布也具有形式| x)工ea'_-"(4)，其中az=«+T(1)， m'=7n+l.因此为共轭先验分布.
n
h)样本分布为指数族分布..fk，e)=门於(1 - = i=1
汐卿、， ，其中 r(x) =
(❷)=log[^/(l -幻]，b(8) =
i=1
- nlog(1 - 因此可取共轭先验分布为
77(沒)=c(a,zn)exp (alog[6/(1 -沒)]+znnlog(1 -^)} =c(a,zn)[3/(1 D]a(l-0)mn,
由此式可得77(oc (1 -0)1't a=a, b=mn-a.即7r(~)服从冷分布 (应当要求a〉-1, 6> -1)，由例8. 1.1可知，后验分布也服从芦分 布.另外，由(8. 1.9)也容易看出，后验分布可表示为
7T(沒|x)ocexp ((a+T(x))log[^/(1 -沒)]+(zn+1)nlog(1 -0)\. 因此77(沒 | 幻服从分布BE、p，q)，其中p = T (%) + a + 1 , q = (zn + l)n + l -?(%) -a(应当要求p>0,9>0).另外，本例的结果亦可 用于Poisson, 正态等分布;同时，本例的结果亦可到0)和T(a)为向 量的情形(见习题).进一步的讨论可参见Lehmann and Casella(1998). |
表8. 1. 1总结了常见的共轭先验分布.
表8.1.1常见的共轭先验分布 总体分布参数
二项分布 参数0 负二项分布 参数e
共轭先验分布 冷分布
)8分布 厂分布 尸分布 逆厂分布 正态分布 逆 r 分布
Pareto分布 厂分布
Poisson 分布 指数分布
指数分布 正态分布(方差已知) 正态分布(均值已知) 均匀分布 Pareto分布(0 已知)
均值A 均值倒数A 均值o-=A-*
a = a2 0
a

(2)无信息先验分布 如果对<9的先验情况知之甚少，没有什么 先验信息可以利用，一个很直观的假定就是同等无知原则，即认为沒的 取值机会均等，各向同性;用随机变量的语言来表述就是0 在某个区间 或全空间服从均匀分布，即77(0) =c为常数.一般可取77(60^1, 这 时77(幻可视为广义密度(见引理8. 1.1后面的注释)，这在前面例 8.1.2中已经用过.同等无知原则是Bayes首先提出来的，因此也称为 Bayes假设.
但是，无信息先验分布的内涵比同等无知原则要广泛很多，它又称 为非主观先验分布.因为尽管我们在主观上对6的先验信息知之甚少， 但是，在\X - f(x,0) 0)中，/(%，60作

为样本X的分布;<9作为一 个随机变量，它们应该与概率统计中的规律协调一致.由此也可推出若 干先验分布的选取原则和方法，下面以位置尺度参数分布族为例予以说 明，请读者注意，下面要用到第四章的有关符号及公式.

i) 设X=(A，...，XJT服从位置参数分布贝IJ K=X+e 也服从位置参数分布/(y-7/1),其中7} =0+C，Vc.今假设0的先验 分布为TT(^),以下根据位置参数分布族的特性导出7T(0)应当满足的 条件.设77的先验分布为77'(77)，一方面，作为位置参数，7?和<9应有 相同的先验分布，即77'(7?) =77(77);另一方面，作为随机变量，刀的 分布7T'(7?)与的分布77(60应满足关系:77(60 = |扣/仞!·77'(7;); 因为7)=0+C,所以由I dy/I =1可得77(沒)=77'(沒+C), Vc.因此综

合这两个方面的结果可得7T(0) =77(0 +C), MC.上式对C= -3 也成 立，所以77(^) =77(0)=常数，这表明:位置参数分布族的无信息先验 分布为77(^)ocl;这与前述Bayes假设一致.

ii) 设尤=(孓，...，XJT服从尺度参数分布a'nf(x/a)t贝\\Y^kX 也服从尺度参数分布y~nf(y/y),其中V=ka，VA>0.今假设a 的先 验分布为^7((7)，以下根据尺度参数分布族的特性导出77(0)应当满足的 条件.设7?的先验分布为7T'(77)，一方面，作为尺度参数，7?和a应有 相同的先验分布，即贫'(7?) =77(77);另一方面，作为随机变量，7;的分 布开'(7?)与的分布77((7)应满足关系:7T(a)=|dr)/da| -^'(7;);因 为7)=ka，所以由Idv/dorI =k可得77((7)=k7T,(ka), \/k>0.因此综合

这两个方面的结果可得77(a)=krr{ka), VA;>0.该式对也成立， 所以77(a) 这表明:尺度参数分布族的无信息先验分布为 7r(a)oca-\这也是非正常的先验分布.

iii) 设X = , ...,XJT服从位置尺度参数分布

则Y^kX +m也服从位置尺度参数分布(a') •"/((y -M'l)Za')(见第四章),

其中/jbr a =ka; Vzn, k>0,并记?/=(//，<r').今假设(/x，(r)的 先验分布为77(zi,cr)，以下根据位置尺度参数分布族的特性导出77(/i,a)应 当满足的条件.设T7 = (/x'，〆)的先验分布为/ (〆，〆)，一方面，作为位置

尺度参数，?/=(/?，〆)和(Af)应有相同的先验分布，即7T'(;?，a')= 7r(M'，a');另一方面，作为随机变量，” = (〆,〆)的分布tt'GuW)与(戶， a)的分布 应满足关系:7r(^,a)=|dW、/d(jM，cr)| •7T'(〆,

crf)，而由|汐(〆，af) /d 此综合这两个方面的结果可得

cr)=々277(/z'，a') =k27T(kfjL+nt9ka), >0 .

上式对 k = a~l , m = -fx/a 也成立，所以 7r(/x,<r) = ~27r(0,1), 这表 明:位置尺度参数分布族的无信息先验分布为77(/x,a)oca-2, 这也是 非正常的先验分布.

另外，在上述位置尺度参数分布族中，若 a 已知，则它相当于位 置参数分布，可取77(/1)ocl;若#已知，则它相当于尺度参数分布， 可取77(a)oca -,; 若綷，<7都未知，也可结合前面i)，ii)的情形，取

(/X, a

) | =k2 可得 7r(/x,a

) =k2n'W

.

因

77(/i,a)=77(/Z)7T(a1/1),而7T()U)OC1; 77((T|/X)

位置尺度参数分布族的无信息先验分布，求出相应的后验分布:i) <7=1; ii)弘=0; iii) e=(弘，<r)都未知.

解 i)当a = 1时，X, ~^ + r(i,i)服从位置参数分布，可取 77(M) 001，且有
=ne_(X，'M>/ I =e-n(^)Zjx(I) I . 1=1
77(# | X) -c(x)en^I I -00〈弘彡%(1)J. 直接计算可得，c(X) =ne-^».
ii) 当M=0时，X} 服从尺度参数分布，可取77(a) oc a'1, 且有
/(x,a) = na-Je-^ = cr-ne-r/\ T = Y x. 0 . «=i fri
77(<r|x) =c(x)77(cr)/(x,cr) =c(x)a~(n^ye'T/a,T^0 . 因此77(a I幻服从逆r分布r _1(r,n).
iii) 和<7都未知时，Xj +r(丄，q服从位置尺度参数分布，可
77(
(
7)oca-1, 这也是常用的无信息先验分布.
a~\ 因此有
^,
例8.1.9 设孓，...，叉为独立同分布样本，
)

取7T(0)^a~2.这时充分统计量为T二(S，X(1))，其中- I=1
y, 1),且二者相互独立.根据充 分性原则，由(8.1.3)式可得， 77(0 | %) oc?
r(^)g(5,x(1) ;^), 其中
I(1)卜r
—,zi —1 ;^(1)～弘+r a
g(5,x(1);0)=c• sn-2e-s/a ·—exp aa
因此，(MW)的后验联合分布可表示为 77(At,cr | %)=c(%) 7 e*s/aexp
-~ (xd)-弘)
(8. 1. 10) 直接积分可得，c(x) =n5n/r(n).根据上式可求出M和a的边缘分布如下:
2n
7T(/Z | X) = | 77(弘，(7 I X)da = --------- --- ----------- 1 卜 00 <
从矣X(1) S + n(x(]) -/I)]n+
7F(cr |
F7 r(n)
%)= 77(/I,(T | X)d^Z,=
n• 各
-(n+1) -s/(rt(、A!
e 门 cr〉0 | .
其中/X的后验分布比较复杂;a 的后验分布为逆厂分布r~l(Sfn). 另 外，M的变化范围也可限制在^>0(如可靠性等问题)，可得到类似的 结果. I
以下Jeffreys准则可认为是上述位置、尺度参数分布族无信息先验 分布的进一步推广.
(3) Jeffreys 准则 Jeffreys准则也是一种无信息先验分布，该准则认为，参数0作为随机变量，其分布77(幻在变换V=V(0)下，0和7/的分布密度应满足 随机变量的变换公式，即
77(溲)=77(巧(汐)) (8. 1. 11)
直接验证可以证明，若取77(0) =C|/(幻|+，则上述变换公式成立，其
中|/(幻|为样本关于参数的Fisher信息阵的行列式.这可由Fisher信息 阵的变换公式(见第二章(2. 3. 2)式)得到

x(1) 1-
1/(8)I= =|,(”(沒))I • 因此有|7(0) |7(77(0)肉却WT|,即7T(9)=(4)|+满足
初2 de1

(8.1.11)式.注意，根据Jeffreys准则得到的先验分布可能是广义密度
甚至是非正常的先验密度. 经直接计算可以证明:对于位置参数分布族/(x - 01),
\I(0) |ocl,因此77 1;对于尺度参数分布a'nf(X/a)9
|/(cr)loccr-2,因此(^) o--1
, |/(弘，<7) |oca-4，因此 n(0) oca-2 (见习题).
所以，根据Jeffreys准则得到的先验分布与前面得到的无信息先验分
布是一致的.
例8. 1. 10 设X:，...，总为独立同分布样本，且有X,
求Jeffreys准则下的先验分布:i)<r已知;ii)/x已知;iii) cr和;ic都未知. 解由第二章Fisher信息阵的定义与例题可得，样本关于参数
(7)的Fisher信息阵为 . 、 / n/a2 0 \
/(;£，(T) =| 2 • \0 2n/a/
当o■已知时，|/(a)|=n/tr2与参数/z无关，因此77(^) oc 1 ;当弘已知 时|7(a) | =2n/a2,因此77((r) ^1/a;当(m，)都看成未知参数时,
-2n/a\因此7r(^,(r)ocl/o-2
|/(^,o-) |
中都是常用的，不过都是非正常的广义先验密度. ■
例8. 1. 11 设1 ，...，叉为独立同分布样本，求Jeffreys准则下的 先验分布，若 i)J, - 6(1,6>) ; ii)X, ~P(A) ; ~E(l/(r).
解 i)由第二章公式知|/(^) | 此77(幻ocf+. (1-0)-+~5£(士，士)，这也是先验共轭分布，由例8. 1.1可知，其
; 对于位置尺度参数分布族
. 这些先验分布在实际问题
后验分布为TT(0\x)-BE(7+y,
t=.
ii)由第二章公式知|/(A) | =n/A,因此^(A) A'^,根据与例 8.1.3类似的计算可知，其后验分布为77(A1%)=c(x)e-nAArA^,因此 vr(a ix) ~ r(a, r +士), r = x..
Hi)样本分布为f(xfa) =a-ne~T/<rI 其中 T = j^Xi.直
因此 7r(a | 幻为逆厂分布厂*(7>).
接计算可得|/(a) | =no--2,- c(x)a'ne~T/aa~i cca‘u+”e
i 因此所以后验分布为7r(a \x)=

8. 2 Bayes 估计
在 Bayes统计中，比较有争议的问题是如何理解参数0 为随机变 量，以及如何决定其先验分布.但是从统计判决观点来求Bayes解并无 不妥之处，在数学上是合理的.事实上，在第三章第3.1节，我们已经 介绍过Bayes风险的概念.以下首先介绍Bayes风险与Bayes后验风险， 及其基本性质;然后在此基础上介绍两种常用的Bayes估计，即基于均 方损失的后验期望估计以及基于0-1损失的后验极大似然估计;最后 简要介绍Bayes估计的一些性质.
8.2.1 Bayes 风险

关于统计判决函数及损失函数、风险函数等概念，可参见第三章第 3.1节，以下摘要回顾一些基本概念及符号.样本空间可表示为义～ (I,队，匕)， 其中dPe 带测度的参数空间可表示为沒～(0，瓜，如(沒))，其中d7r(^) =7T(0)d0;按照本节的Bayes观 点，77(0)就是0 的先验分布.统计问题的判决空间可表示为 de.V为一个判决，统计判决函数为对于给定的 损失函数L(0，d)，统计判决釪幻的风险函数为

R(❷，8) = EJL(^,5(X))] = £,MhS(x))/(x，幻如(X).

(8. 2. 1) 统计问题就是要在一定条件下，求出使R(0，8)达到最小的解.在参数

_ 因此很自然地应考虑L(0,5(%))在0 上的平均，从而得

空间0上有测度的情形下，即在Ke)的情形下，

8)中仍然包

含随机变量 到 Bayes风险

I

,

久(5) = f 7?(0,6)77 (6)dO. (8.2.2)

表示损失函数L(e，8(x)、在样本空间叉和参数空间O上的整体 平均，而Bayes解就是要求出使Rn(8)最小的解.为了突出其重要性， 我们把定义3. 1.5归纳如下:

定义8. 2.1 对于给定的统计判决问题，设其损失函数为L(0，d)， 参数0的先验分布为77(60.若存在判决S*(x),使对一切5(幻有 则称S*(x)为统计判决问题的Bayes解;若n(的为 广义先验分布，则称5*(x)为统计判决问题的广义Bayes解;对于参数

估计问题的Bayes解或广义Bayes解，则称为Bayes估计或广义Bayes

估计. · 综合(8. 2. 1)式和(8. 2.2)式，Bayes风险R„(S)可表示为

心(8) =E[L(权，5(%))]

L(0,8(x))ir(0)f(x96)d/jL(x)d0 (8. 2.3)

其中E[*]表示对(XJ)的联合分布求期望.

注 Bayes解不但与损失函数L(e，d)的选取有关，也与当初先验分布77(0)的选取有关，这两者都对Bayes解的结果有重要影响.特别是， 当损失函数确定以后，先验分布77(0)的选取仍然可以千变万化，因而 可得到多种多样的Bayes解(包括Bayes估计)，这是Bayes统计的重要 特点之一.

截至目前为止，我们实际上只涉及统计判决观点，下面的后验风险 才是Bayes统计所特有的，也是最重要的，因为Bayes统计推断都是从 后验分布出发的.

(义,

根据第一节的讨论可知，(X ，幻的联合分布可表示为

沒)

=P(X)7T(O|X), 为后验分布.由于(8.2.3)式中的

其中〆幻为X 的边缘分布 被积函数非负，因此积分可以交换次序，并可表示为

,

(6)= 艺(<9,5(%))77(沒I .

(8.2.4)

该式方括号中的积分称为后验风险，定义如下.

定义8.2.2 损失函数L(6,S(x))关于后验分布tt(<9|x)的加权平均称为后验风险，* 它定义为

(5 | x) = (沒，5(x))7r(沒 | 幻d沒. (8. 2. 5)

后验风险与Bayes风险有非常密切的关系，由(8. 2. 4)式和 (8. 2.5)式可得

心(5) = £尺„(5 | x)p(x)dyx(x) . (8. 2. 6)
由这个关系式可以看出，若一个统计判决函数使后验风险^(5 |x)达到 最小，则它也会使Bayes风险Rn(8)达到最小.事实上，我们有以下重要
定理.
定理8. 2.1 设X~f(x, 0),
统计判决问题的损失函数为 Ue, d)，参数0 的先验分布为77(沒).若Rv(8)和久(5|x)在p上都存

在有限的最小值(对几乎所有的幻，则它们有相同的解;‘若损失函数 L{e,d)在p 上为严凸函数，则该统计判决问题的Bayes解几乎处处 唯一.
证明 今记^(6*) =min,ep^(5), W | %) =min5ep/?,(5 | %).
则由假设可知，对任何3(%)有丨幻矣心(3|%)，该式两边积分，并 应用(8.2.6)式可得
= Jy.^7r(5* * I x)p(%)4c(x) C I x)p(%)d/i(x) = Rv(8).
该式对任何5(%)成立，因此根据定义，f (x)为判决问题的Bayes解. 反之，若5*(x)为给定统计判决问题的Bayes解，则对任何S(幻有
即 -^(3)^0,应用积分关系式(8.2.6)可得 心(S*)-心(6) = £.)^(3* 1%)-心(5|x) 1 p(x)^(x) ^0,V5.
(8.2.7)
但是由于 V (幻使后验风险7?r(3|%)达到最小，所以有RW | x)-
W 1x)^0,因此以上积分必为零;被积函数也为零，即RW丨%)-
W |x)=0(a.e.),W |x)=W |x)(a.e.),因此3*(x)也使 后验风险R„(S | x)达到最小.
另外，若损失函数L(0,8(x))在及上关于S(a;)为严凸函数，则由 (8.2.5)式可知，其积分作为5(幻的函数，仍然关于S(x)为
严凸函数(对几乎所有的*).因为由凸函数的定义可得不等式 ❷，X8' +(1 -入)
么)<A£(0,31) +(1 -入)L(0, 82),
其中0 <A<1.该式两边关于tt(0\x)积分，由(8.2.5)式可知，不等 式关于&(• 1%)仍然成立:
K 入I + (1 - A)52 | x) <XR^CSf | %) + (1 - A)K52 I x). 因而Rn(^\^为5的严凸函数.则根据凸函数的性质可知， |%) 的最小值存在必唯一(对几乎所有的%). |
以上定理说明，一个统计判决问题的Bayes解就是使后验风险达到 最小的解，这与Bayes统计推断的出发点为后验分布是一致的.注意， 以上定理不但可用于参数估计问题，也可用于假设检验以及其他统计判 决问题.
该式对8^(x)也成立，因此有
£ i尺“3' | x)-心(5" | x)) p(x)d/i(x)矣0.

推论 若5*(幻使下式达到最小，则为Bayes解: ❸, 8(x))Tr(0)f(x96')dO .
因为由(8. 1. 1)式知，7T(0\x) = c(x) 7r(e)f(x,e) 9 该式代入
(8.2.5)式后，后验风险KS*丨4与上式仅相差一个常数c(x),因而
有相同的最小值点. 以下应用定理8.2.1，分别考虑损失函数为均方輝失和0 -1 损失
时的Bayes估计. 8.2设.2后验期望估计
0 的先验分布为0~冬 0)，我们首先考虑均 方损失下g(幻的Bayes估计.常用的均方损失函数有以下两种:
L{0,d) = [d -g(6)]2, (8. 2. 8) L(e,d) =A(6>)[</-g(6>)]2, A(幻 >0.

(8.2.9) (8.2.8)式是最常用的损失函数;(8.2.9)式可用于尺度参数的估计(见第四章)，或某些特殊问题.
定理8.2.2 设X~f(x，0)， 0的先验分布为若损
失函数为 L(e,d) =A(60[d-g(6>)]2，则 g(0)唯一的 Bayes 估计为 、m =
E[AM)g(幻| J] = £入(4)容(8)湖似麟
(8. 2. 10)
g(e)7r(e)f(x,o)de
i人X、= E[g((9) = ----------------------------. (8.2.11)
f 77(枝)/(X,汲)相 J®
证明设g(0)的某一估计为8=8(x)，则由(8.2.5)式及(8.2.9) 式可知，其 Bayes后验风险为
久(5|%) = [A(^)[6(x)-g(0)]27t(6Ix)d0
其中
E[A(9) 1 幻 [A(8)7rW(X，a)舶
若损失函数为L(0，d) =[^-g(0)]2(即上面A(<9) =1),则有
a
A(<9)77(^ | x)d0 = E[A(4) | AT] > 0,
= (汲)[52(x) - 28(x)g(0) + g2(汲)]77(汲| x)初 =«32(x) + 65(x) + c ,

b = - 2j^A (汲)g(汲)77(0 | x) = - 2E[A(0)g(0) | X],
C = (A.(0)g2(0)7T(0 | x)d^.
久(5丨%)作为5(幻的二次三项式，当8(x) = -b/2a时，^ (5|x)达到 最小值，而且解唯一，因此得到(8.2.10)式.在(8.2.10)式中取X(6)= 1,则有ifi(X)=E[g(^)|X];再根据后验分布的公式(8.1.1)式计算后 验期望，即可得到(8. 2. 10)和(8.2. 11)的第二式. ■
以上定理无论在理论上还是在应用上都有非常重要的意义，该定理 表明:在均方损失下，任何参数估计问题都可归结为后验分布的数学期 望(即积分)的计算问题.从原理上来讲，只要给出先验分布，算出后 验分布，即可求出参数估计，不存在理论上的困难.对于常见的简单分 布和待估参数，常常可得到显式解;对于某些比较复杂的情形，若得不 到显式解，则可归结为数值积分问题.
由于只需计算常见分布的数学期望，因此本节介绍的后验期望估计 通常比第三章和第四章介绍的传统估计方法更加简单直接 (某些复杂的 情况除外).在上一节，我们介绍了若干先验分布的选取方法，并对于 样本分布为二项分布、Poisson分布、正态分布、指数分布、均匀分布 等常见分布的情形得到了相应的后验分布，这实际上也就得到相应参数 的Bayes估计，因为只需再求一下数学期望即可.例如对正态分布，例
8. 1.2中得到了均值的后验正态分布((72已知时)，因而也就自然地得 到了它的Bayes估计见(8.1.4)式，同时那里也对后验均值«的
意义作了说明);同理，由例8.1.5可以得到a=a2的Bayes估计(# 已 知时);如果得到a2和M的联合后验分布，也就能得到它们的Bayes估 计(见习题).其他分布的情况也类似.
如上所述，根据上一节的结果，我们对不少常见分布实际上已经得 到了相应参数的Bayes估计，因此在下面的例题中，我们略去与上一节 重复的部分，而更加注重于说明Bayes估计的意义和性质.另外，在以 下例题中，如无特别申明，都是在二次损失(8.2.8)式下求Bayes解， 即应用公式(8.2.11)式，求待估参数g(0)的后验期望估计.
例8.2.1 设岑，...，冬为独立同分布样本，且有X' 求<9 的 Bayes估计，假设0 的先验

分布为(1) 6>~/?(0, 1); (2) 0~BE(p, q).
解 (1)由例8.1.1 可知77(|x) -BE(T+lfn-T+l)9 n
T: X。因此由(8.2.11)式可得
/=I •

eB = E[_e\x]
n+Z
这一估计有很好的统计意义，它与极大似然估计0M = T/n相差很 小:oB-eM = op(n-x).因此，么是6的相合估计，同时也是渐近无偏 的(即当n-> + oo时其偏差趋向于零).但是，以上Bayes估计在直观上 比极大似然估计更加符合实际情况.例如，若6 =P(Xi=l)表示次品率 或命中率，若本次观测T=0,则eB = l/(n +2),表示0很小，而么=
0表示不可能事件;显然么更合理.若T=n,则eB -表示事件出 n+2
现的可能性很大，而人=1则认为是必然事件，显然么更合理一些. 另外，若本次观测r = n = 10,则有eB =11/12; T = n = 100,则么= 101/102,直观上看，它说明“10发10中”与 “100发100中” 对评 价命中率是有差别的.
(2)由例8. 1.1 可知 7r(e\x) + 因此有
=E(^|X)= P+T . (8.2.12) n+p+q
该式也有较好的统计解释.由假设0~BE(p, q),其先验均值为p/(p+q)9 这可理解为:p+g次试验中有p次成功;对于样本，n次试验中有T次成 功，因此综合先验信息与样本信息，可理解为:n+p+q次试验中有 次成功，因此得到后验均值为(8.2. 12)式.另外(8. 2. 12)式还可以表示为
么=」一.!+ — L. n+p+q n n+p+q p+q
因此0B表示样本均值与先验均值的加权平均. | 例8. 2.2 设X,, ..., 及为独立同分布样本，且有X, ~£(A) = r(A,l);设A的先验分布为尸分布，A~77(A)~r(a,p),求g(A)= P人X、>r0) =e'At°的Bayes估计(若E (A)表示寿命分布，则g(A)可视为
元件寿命大于的概率).
解 由例8. 1.4可知，A的后验分布为tt(A | x) ~r(a + T,n+p),
T = 2 X,, 因此由(8.2.11)式可得 i= 1
= [e-A(077(^|X)dA = Ce-At° J° Jo
该式直接积分可得
-<n+p) ifl(x)=(1+rh
n^e<a+T)AXn+p^dX .
由于E(XJ=A'*,经简单计算可得i 因此
r (n + p
)

是g(A)的相合估计. ■ 例8.2.3 设I, ..., 叉 为独立同分布样本，%，表示寿命分布，并
且只观测到前r 个寿命值:y
望估计:i) ~M + r(l,l), M服从无信息先验分布，BP 7r(/i) 0C1;
ii) JV. 1), 0 服从逆 r 先验分布厂 *(a, p).
解i)当X. ~/x+r(i,i)时，由第一章的公式可知，/=(&, •••, I)的分布可表示为
=C•expI -(Tnr-_)ufh |, 其中 Tnr = r, + ... + 由于 77(M)cxl,因此有
: , ...

求相应参数的后验期
7T(/£ | y) =c(y)enM/ { - oo
|,
\
么(7) =C戶戶-y|)dM=r,——, yx =x(1)•
* -■co n 这一结果与UMRUE完全一致.如果/i的变化范围限制在/!>0,也可得
到相应的估计，但结果略有不同.
ii)当X. ~r(y, 1)时，由第一章的公式可知，y=(y,,...,yj的
分布可表示为
f{y，❷)=厂沒!
(n - r) !
由于77(0) ~ r _，(a, p), 因此后验分布可表示为
tt(| y) =c(y)^_(p+l)e~T • 3~^~7",/0 = c(y)e~(p+r+i)e-^Tn^ a)
~ r_1(Tn,r +a，P +r). 因此由逆r 分布的期望公式可得
其中e(y) =ne'n?
由^(K) =E(m|K),经直接积分可得
a.T+a =E(a| y) = ~~ .
p+r-1 该式亦可表示为先验均值与样本均值的加权平均，
nP-a•
❷1i 厂 I +777^T ?
如果取无信息先验分布，或者取(8. 2.9)式所示的损失函数，即L(0,d)= 可得到类似的结果. 壓
例8. 2.4 设X:, ..., 叉为独立同分布样本，X.服从均匀分布 斤(o，<9).损失函数取为 L(e，dX(d~~e、/eY，并取无信息先验分布
,
r Tnr

7T(^) oc^_l , 求沒的 Bayes 估计. 解后验分布可表示为
7T(6
因此0服从Pareto分布PR(n9x(n)),且有c(a:) = nx(n).根据公式 (8.2.10)式，
g(4):=沒，A(^) =0~2,因此0的Bayes估计可表亦为
_eW) B "E(6>-2 jx).
直接计算可知，若y服从Pareto分布PR(a^),则有E(Y~})= 广，E(y-2)=^ 广因此有E(^ E(^2) = 部.这些结果代人上式可得
这一结果与第四章同变估计的结果(见例4.3.2)完全一致，所取的损失 函数也相同. |
例8.2.5 设X=(X1,...,yn)T服从指数族分布:/(x,^)=h(z)• exP xt0t-/|0的先验分布为77(6),求0的Bayes估计.
解 由(8. 1. 1)式，6的后验分布可表示为
X.0. —b(0).
在这个表达式中，0为随机变量的值;若把(^, ..., 么)T看成参数，则 可重新表示为
7T(0\ x) = h(0)exp. g %l0i - J(x) I ,
其中 h(0) =7r(0)e_A(<?> , -b(x) =log[c(x)/i(x)].因此后验分布为指 数族分布，其后验期望可由指数族分布的有关公式得到(见第一章
(1.5.11)式)，即E(0\x)=db(x)/-dx,因此有
(x) = 该公式的进一步的讨论可参见Lehmann and Casella(1998). 壓

7T(a|%) = c(x)A(x)7r(^)exp.
£=1
]. (8. 2. 13)

由前面的不少例子可以看出，Bayes估计常常是渐近无偏的(亦可 见本章习题)，但是以下定理说明，它们不可能是严格无偏的.
定理8. 2.3 设X～ 先验分布,考虑g(0)在均方误差损失(8.2.8)下的Bayes估计 5(X),并假设E[g2(^)] <oo.则S(X)不可能既是Bayes估计，又是 无偏估计，除非其Bayes风险Rn(8)为零，即
尺/S) =E \8(X) -g(0)|2=O. (8.2. 14)
其中E t • |表示对(X，幻的联合分布求期望(见(8. 2.3)式).
证明 今考虑g(0)的无偏估计及Bayes估计的定义与性质..若 5(X)为g(0)的无偏估计，则有
| 0] = g(&).
由于0具有非广义的先验分布77(0),因此对于(X，幻的联合分布可应 用条件期望的性质:
E \8(X)g(0) \ =E |E[g(0)5(J) | 川
=E |g(^)E[5(X) =E {g2(0)]. (8.2. 15)
若S(%)为g(0)的Bayes估计，则6(X)=E[g(^)|X].由条件期望的
性质有
E \8(X)g(0)\ =E)E[g(^)5(X) |X]!
=E {5(X)E[g(6>) |X] f =E \S2(X)\. 而5(X)的Bayes风险R„(8)可表示为
久(5) =E {8(X) -g(6)\2
=E \82(X)\ +E |g2(6»)i -2E]a(X)g(0)).
(8. 2. 16)
6>e6>, 具有正常的(即非广义的)
因此，若S(X)既是Bayes估计，又是无偏估计，贝!] (8. 2. 15)式和 (8.2.16)式代人上式可得Rn(S)=0,即(8.2.14)式成立. | 因此由以上定理可知，若扒幻是g(幻在均方误差损失下的Bayes
估计，其 Bayes风 险 > 0 ,则它不可能是无偏的;反之，若 S(X) 是g(幻的无偏估计，且在均方误差损失下的Bayes风险>0,则 它不可能是Bayes估计.这一定理可推广到有偏估计的情形，见本章 习题.
例8.2.6 设冬，...人 为独立同分布样本，E(XJ =At, 而VarCX.) =tr2
已知.则在均方误差损失下，对于任何先验分布，无都不可能是g^) 的 Bayes估计.
解 由定义可知，对于任意给定的都有E(X—M)2 = Var(X)= a2/n，因此对于任何先验分布77(^)都有

=E(X—M)2=E!E[(I—M)2 }=E\a2/nJ=a2/n>0.
因此由定理8. 2.3可知，叉不可能是#的Bayes估计. ■ 但是，定理8.2.3对广义先验分布不一定成立.例如，在例8.1.2
的i) 中，要估计g(M)=弘，但弘服从广义均匀分布:tt(m) =1，M e (—00 ,00)(这时条件E[^2(yLt)] <00也不成立).由例8. 1.2可知，其 后验分布为7r(zz|%)
—N(x,a2/n)9因此有E(M | X) =X,这时叉既是
M的无偏估计，又是广义的Bayes估计. 以下Pitman估计也是广义Bayes估计，其中第(1)个估计，即位置

参数的估计，既是无偏估计，又是广义的Bayes估计.
例8. 2. 7 Pitman估计的积分公式. 本书第四章曾经介绍过最优同变估计的Pitman积分公式，我们也
可以从Bayes观点出发，经过比较简单的推导，得到完全相同的积分公 式 ;有关定义与符号可参见第四章.
(1) 位置参数的估计.设X = (Xl9-,X n)J服从位置参数分布，即
❷)-❷ 了估计位置参数6L可取无信息先验分布77(60 <^1以及均方损失函数
其联合密度函数可表示为p(x,
, ..., xn-0).为
. 可直接应用积分公式(8.2.11),其中g(e)=0 7T(e)=1,由此可得
L^e,d)=(d-o)2
;
A
[0p(X, 0)d❷ -------------=
厂 p(x,e)de J- ®
r ef{X - 61)d3 - -----------.
r f(x - 01)do J-GO
= e(^ |
x) =
该式与第四章位置参数的Pitman积分公式完全一致.
(2) 尺度参数的估计.设X = (X,, ..., XJT服从尺度参数分布，即
其联合密度函数可表示为 p(x = a" nf(x/a) = a~nf{x{/a ,xn/a). 为了估计尺度参数er,可取无信息先验分布77(a) oc^-1. 由于a 为尺 度参数，损失函数应取为(见第四章)
Lv{or, d、= d - a)2 , A(沒)=cr ~2. 这时必须应用公式(8. 2. 10),其中g(0) =a; ❷):a_', A(^) =a'2, 由
此可得 .
～=----------------------------=-------------------------.
[a-2a~lp(X^)d^ [<r-(n+3)4 -)d<r
f0 cr-2aa-}p(X,e)de f。 A)da

该式与第四章尺度参数的Pitman积分公式完全一致. (3)位置尺度参数的估计.设尤=(4, ..., Xn)T服从位置尺度参数
分布，即其联合密度函数可表示为P(叫 , a) =a~nf((x = ^~nf((xi , (xn -yu)/(r).为了估计参数和 a，可取无信息 先验分布7T(jU,,(r) oc cr _, . 与第四章类似，科和o■估计的损失函数应为
L>, d)卞 L^a,d)^d-a)\ A(^) =a~2. 应用公式(8. 2. 10)可得
fia ~3p(X;/z,(r) d/jbda cr_3p(X;/i,cr) dfida
a~2p(X;^t,cr) d/idcr
o-B = a
d/xda
该式与第四章位置尺度参数的Pitman积分公式完全一致.但是，基于 同变估计原理进行的推导要复杂得多.另外，根据Bayes估计的原理，
亦可取先验分布为tt(^) exo-'2, 得到类似的积分公式. | 8. 2.3 后验极大似然估计
后验极大似然估计与第三章介绍的极大似然估计有很多类似之处, 并且包含普通的极大似然估计为其特例.但是，两者的出发点完全不一 样，后验极大似然估计就是0 - 1损失下的

Bayes估计.设X ~/(x,^), 0^0,<9的先验分布为Ke)、并要求g(幻的Bayes估计.为了简单起见，考虑0的估计，并取损失函数为
这时称为后验极大似然估计.
a~3p(X
\ d −6 \ e, 其中e为充分小的实数.其直观意义为:若一个判决(即参数0的估
计)与真参数的距离较大，则损失为1;若与真参数的距离很小，则 损失函数为零，(8.2.
17)简称为0-1损失.
| d −沒|〉E,
(8.2. 17)
，e)， e的先验分布为在0-
定理8.2.4 设X～f(x
损失(8. 2. 17)下，若f 可以充分小，则0的Bayes估计为使it{0\ x)达到 极大值的估计，即么M满足
77(^bm I ^) = max \ X). (8. 2. 18) 6b &
1
8. 2
即
Bayes 估计
证明 设0的估计为d=8(x)，则其后验风险为
367
\x)dO=[ir(6\x)d3, J | 6(x) −e \>£
^S(x)+e
77(0\ x)d0 = 1 I 77(0 | X) d沒. 'S(x)−s
大，也等价于使以下积分最大:
,S(x) +s
7T(0 \ x) do .
由积分中值定理可得
R„(g) = 7T(^ | x) , f e (3(x) −ff9 3(x) +e).
因此以幻应使以上77(^|x)达到最大，当时有^3(%),因此 5(%)应使n(6\x)达到最大.所以，在0-1损失(8.2.17)下，3(幻使 心(5丨幻达到最小等价于使tt(0 | x)达到最大，即3(幻应满足
(8.2. 18)式. 疆 推论 若的先验分布为77(0)ocl,则相应的后验极大似然估计即
为通常的极大似然估计.
证明 应使 \ x) =C(x')7T(0)f(X10)达到最大，当 77(0) OC 1
时，等价于使C(X)f(X, ❷)达到最大，这就是通常的极大似然估计. ■ 若77(61 | X)有共同的支撑集，则l(0\x) =log77(^|%)称为后验对数 似然函数;S(10)也使i(e\x)达到最大.后验极大似然估计与通常的极大 似然估计有十分相似的性质，因为两者都是使某个目标函数达到最大值 的解;其目标函数也很相似:都是随机变量的密度函数或者它们的对 数.因此，第三章和第五章所介绍的极大似然估计的大多数性质对后验
极大似然估计也成立(当然也需要一定的正则条件)，例如，不变原理， 子集参数的似然，Gauss − Newton迭代法等等，对后验极大似然估计也 适用.
例8.2.8 设为独立同分布样本，且有Xx～叫 ， ，
cr已知.若M (Mo,d)，求M的后验极大似然估计. 解由假设可知
|x) =
| x) = 1 − f
J | s(x)−e
"

要求6(%),使 |x)最小，相当于求5(%),使上式第二项积分最
 I X)
其后验对数似然函数及1其导数分别为
Z(p | x)
21n
_(M __v h—A
+ log c(x).

dl dfJL
该式为零可解出么M为
共一Z^o 2
O—Q
v1 xi ~~
 \o- a0) \a
由(8. 1.4)式可知，其结果与后验期望估计k 完全相同. ■
例8. 2.9 设弋，...，冬为独立同分布样本，求相应参数的后验极大似 然估计:i) X. 4(1，汐)，并设 ii) X' ~P(A),并设 A ～77(A)～r(a, p).
解 i)由例8.1.1可知，77(6>|x)~BE(p+T,n+^—T),因此有 tt{0\x)
=c(x)6>p+r_I(l —0)n+9~T—1
1(0 \ x) = (jd + T - 1) log沒 + (n + q - T - 1) log(1 - 沒)+ log c(x). 直接求导可得
n P + T—l
BM ~ n+p+q —2 n +p + q
由例8.2. 1可知，该式与么相差无几，因而也是相合的，渐近无偏的. ii)由
^1)8.1.3nJftl7r(A|x) T(a+n,T+?),直接计算可知
K A I x) = - (n —ha) A + (7 +/? - 1) logA + logc(x). 直接求导可得
(而
a+n \ u a+n/
由例8. 2.2可知，该式与八相差无几，因而也是相合的，渐近无偏的.
例8.2. 10 设X"...，Xn为独立同分布样本，Xi + r(^,l),
其中6 = ^.a)都未知，在无信息先验分布下，求 a 的后验极大似 然估计.
解 由例8. 1.9可知，当好和67都未知时，可取无信息先验分布 oca —2, 因此后验分布可表示为(见(8. 1. 10)式)
77(弘，a | X) = c(x)^—j e ”/aexp{ —~^(x(1)—fx) |/ (%(1) f.
如上所述，得到后验似然函数以后，求解后验极大似然估计的方法与求 解普通极大似然估计的方法完全类似.由上式可知，对任意固定的a, 若弘越大，则77(/x,crI%)越大;而/£必须满足,因此=x(1)时
. 把/z, =%(1)代人77(/£，(7丨幻，并取
TT(wlx)最大，所以有jlBM =X(1)
而oB^ P^T
 对数可得
Z(%(1) , or I %) = -------- (n + 2)log (7 + log c(x).

由此直接求导可得=5/(n+2)(普通的极大似然估计为s/n). I 例8.2.11 设F～N(X^,a2 ZJ,其中K为zi维观测向量，X为 nxp阶已知矩阵，冷为p维未知参数向量.假设a 已知;冷的先验分布

为/3～ir(0)～/V(冷0，<r2;)，求冷的后验极大似然估计. 解由假设可知
P ～77(/3) ocexp (8. 2. 19)
因此的后验分布可表示为
冗(冷Iy) =c(y)7TW(y，j0) =c(y)exp| I,
QW =(冷-凡)tJo"(/3-j8o) +(r-啩)T(y-邳).
要求A 使77(^8 I y)最大，相当于求久 使0(/3)最小，该式直接求导可 得
^=2J0-I(/S-j80)~2XT(y-I)3) =0,
= (Xjx +s;1) -1 (^Tr+^^0). 该式通常称为广义岭估计，若 =0,则上式化为普通的最小二乘估
计0=(XTX)-^X^Y.注意， =0相当于精度为0,即服从无信息 先验分布:77(^3) 0C1 (见(8.2.19)式).另外，若<72未知但服从逆尸 分布，也可得到类似的结果. |
以上我们介绍了基于均方损失和0 -1损失情形下的Bayes估计. 定理8. 2. 1也可用于其他损失函数情形，以下定理考虑了绝对损失下的 Bayes估计.
证明 根据定理8.2.1，Bayes估计就是使后验风险达到最小的解. 给定<9的一个估计
8(x)，它对应于绝对损失的后验风险为
" 心(糾幻= -6(%)|7T(0|x)d0 = E(| 0 -S(x) || 幻. 根据定理1.1.1，5(x)等于沒|x的分布的中位数时，Rn(8 \ x)=
X
0, 0的先验分布为77(沒).若损
定理8. 2.5 设
失函数为绝对损失£(6>,J) = \d-0\,则6)的Bayes估计为后验分布 77(沒| X)的中位数.

E(| <9-6(%) | | %)达到最小值.因此定理的结论成立. ■ 8. 2. 4 Bayes估计的某些性质
本小节主要介绍:如何通过Bayes估计求解Minimax估计的方法， 其中也涉及-7点容许估计.由第三章的定义可知，Minimax估计以及容 许估计的求解通常都很困难.虽然无论从形式上，还是从内容上来看， 它们与Bayes估计都没有什么关系，但是，由于在Bayes估计中，先验 分布的选取方法千变万化、多种多样，因此有可能通过选取某些特定的 先验分布而得到Minimax估计或容许估计.事实上，可考虑一般统计判 决问题的Bayes解与Minimax解以及容许性之间的关系.
首先考虑Bayes解与Minimax解之间的关系.设X～/(x，6>)， 统 计判决问题(包括估计问题)的损失函数为£(U)，判决函数以幻对应的
风险函数为(10)
77(0)的Bayes解为5;(%),其相应的Bayes风险为).由定义可 知，Minimax解是在峰值中求最小;而 Bayes解是在平均值中求最小， 所以前者的风险值一般应该比较大.因此，只有某些特定的先验分布， 才能使Bayes解也是Minimax解，有的著作称之为最不利的先验分布(Lehmann and Casella, 1998 ;郑忠国，1998). 但是，由于先验分布选取 方法的多样性，这种先验分布还是有可能存在的，以下两个定理是比较 常见的情形，也是当前寻求Minimax估计的主要方法(陈希孺,1981, 1999).
定理8.2.6 设X～八x，0)，0^0,统计判决问题的损失函数为 L (0 , d)，则有
i) 对于0 的任意正常的(即非广义的)先验分布77(幻都
，8)，并设0 的先验分布为77(0)
. 对于损失函数L(❷，d)， ,它使=max^e7?(^,5)达到最小

其相应的Minimax解记为5;（%）（见第三章)，其相应的Minimax风险为又记对应于先验分布
有似 ii)若存在正常的先验分布77(0),使得则对
应于此先验分布的Bayes解也是Minimax解; Hi)若存在正常的先验分布77(6)，使得其Bayes解心(幻的风险
函数)为常数，则此Bayes解也是Minimax解.
证明 i)由定义可知，对于任意的判决5(%),都有 R(e，S),
由于先验分布是非广义的，因此两边关于77(0)积分可得
彡 f R(0f8)7T(e)d0 = RJS) > .（8. 2. 20) J<9
(心);

由于上式对任意的判决以幻都成立，所以有)成(S:)• ii) 若有 = M(8;)9 则由(8. 2. 20)式有
= Af(S:)，该式对任意的判决S(x)都成立，这说明是Minimax解.
iii) 若Bayes解<（幻的风险函数R(❷，8:)为常数，则由于先验分 布是非广义的，所以有^(5;) = M(5;),因此由ii)可知 8二(x)是 Minimax 解. ■ 例8. 2. 12 设X,，..., 叉为独立同分布样本，且有X. −6(1,^),
在均方损失下求0 的 Minimax估计.
解 由例8.2.1可知，若取0的先验分布为0~BE(p，q)，则在均
方损失下0的Bayes估计为
^=E(0|X) =』+r−, n+p+q
n
其中r= ^xt..由此可直接计算出该估计的风险函数人)为 i=1
人 、=Eo(oB−e)2
=−−~)^(1−O')+[p(l−6>)−qo}2\,（8.2.21）(n +p +q)~
上式对任意的p，g都成立，我们可设法选取适当的p, q,使R(0.0b) 为常数，即与6>无关，则由定理8. 2.6的iii)可知，相应的Bayes估计 为Minimax估计.为此，只需使(8. 2.21)式中¥ 与0的系数为零即可，
即(p”)2=n;2p(p+q)=n.由此可得p=q=4^/2,这时尺(沒，么)为 常数，因而相应的Bayes估计为Minimax估计.所以0的Minimax估 计为
由(8.2.21)式可知，其风险为 = [2(1 +7^)] _2. |
以上定理的应用范围比较窄，因为通常不易找到风险函数为常数的 Bayes解 ，而下面定理的应用范围要广泛得多.
定理8. 2.7 设X ，0^0,统计判决问题的损失函数为 L(e，d).若有一列正常的先验分布，其Bayes解为dk(x)(k = l, 2,...)，并且其相应Bayes风险rk二 的极限存在，即limr* = r.
k一oo
则有
i) 若存在判决8*(%),使A/(5*) r，则5*(x)为Minimax解; ii) 若8* (x)的风险函数R(0，8*)为常数，且等于r,则<5* (%)为

Minimax 解. 证明i)对于任意的判决函数3(%),由于irk(6)为一列正常的先
验分布，因此由(8.2.20)式可得Rn(Sk)=rA, \/k,所以也有 M(8)多r;再由假设可得

M(8*) r M(8)t V6,因此S* (x)是 Minimax 解.
ii)若判决5*(%)满足)=r,则也有)=r,因此由 i)知6* (x)是 Minimax 解.
定理8.2.7常常可用于以下情况.若5*(%)为0的关于广义先验分 布77(幻的广义Bayes估计，其风险函数)为常数r.在某些情况 下，可构造一列正常的先验分布77,(^)(^ = 1,2,...)，使其相应Bayes 估计的风险函数)的极限等于r.这样，根据定理8.2.7的 ii),
5* (x)为〃的Minimax估计.以下两个例子都是这种情形. 例8. 2. 13 设X:, ..., 为独立同分布样本，且有X、
证明:在均方损失下，X为0的Minimax估计.
证明 旨先必须注意，在均方损失下，无的风险函数为7?(^J)= =n-\虽然其值为常数，但是正如例8.2.6所述，叉不是沒 的Bayes估计(而是广义Bayes估计,77(oc 1);因而不能应用定理 8.2.6的结论(这种情况比较常见，下一个例子也是).
为了证明I 是0 的 Minimax估计，通常可选取0 的一列正常的先验分布，使其相应Bayes估计的风险函数的极限等于R(0,X), 则由定理8.2.7可知，X 为
d_ .由例8.1.2可知，19的后验分布为一列正态分布:tta(<9|x)-
沒的Minimax估计.为此取0的一列先验分布为7Tk
, k 2) , k =
2,... N{ak, v\),其中
1,
nk2x
1 + nk2 ’
”卜丄2. (8.2.22)
由此可得0的一列Bayes估计为Sk(X) =nk2X/(1 +n A:2),其相应的风 险函数为
R(^Sk)=E^T7^~3] =
由于nk(e) ~7V(OJ2),上式关于N(0,k2)求期望，可得相应的Bayes 风险为
=心(么) 女2 r=- (k->+oo). 1 + nk2 n
所以由定理8. 2. 7可知，X为0的Minimax估计. | 例8. 2.14 设芩，...，夂为独立同分布样本，X:服从均匀分布
沒2 + nk4 (1 + n A:2)2

尺(0,幻.损失函数取为L(o.d) =[(d-3)/or,证明: =777^ fL I X
为 0 的 Minimax估计.
解 由例8.2.4可知，么为无信息先验分布77(19) oc^-1下沒的
Bayes估计.这是一个广义Bayes估计.该估计的风险函数R(❷, 谷B)为
R(0-,0b) = E^l 1
n + 2^(n)\"______1 n+1 0/ (n+1)2
(8. 2. 23)
该式的计算用到了 y=X(n)/^-B£(n,l).因此么=^X(n)的风险函数为 、 n +1
常数.为了证明么是0的Minimax估计，可取0的一列先验分布为Pareto 分布PR(k_l, k-1)，即7Tk^^e~x~k'\e^k-x\ , k=l, 2,...，这是一列 正常的先验分布(当A-oo 时，这些分布可看做无信息先验分布的一个逼 近).由例8. 1.6可知，0的后验分布也是一列Pareto分布:77t(^ | x)- PR(nk9ak),其中nk=n十k_l，ak=maxjx(n), k~').我们要考虑A;-»oo 时，0的相应Bayes估计的风险函数，这时k-'一0时，因此有77,(0 | %)- PR(nk,x(n)).这个后验分布与例8.2.4的后验分布在形式上完全类似(那里 是

77(^1%) -ra(n,x(n))),因此，根据完全类似的推导可知，相应的Bayes 估计为(即在例8. 2. 4中把a换成nJ
与(8. 2. 23)式类似，其相应的风险函数R(0,0k)为
=Ejl 一 . (8.2.24) \ nk+1 e)
由于Y=X(n)/0 - BE(n9l),因此R(0,6k)与0无关，所以么的Bayes 风险Q也就是尺(么么)(注意.PR(k~\k~l)是正常的先验分布).又由
于当k-^ao时，nk =n+k~l-^n(注意，n 固定)，所以比较(8. 2. 23)式和 (8.2. 24)式可知
rk=^(0,0h)-^R(0,0B)=~------- =r (+ (n + 1)
因此由定理8.2.7可知，^^X(n)为沒的Minimax估计. |
Minimax解虽然比较保守，但是这种最大风险最小化的策略在某 些领域还是很有用的(茆诗松，1999).求 Minimax解通常比较困难， 我们不能指望对一大类问题得到一般的求解方法 ，只能逐个加以解决 (Lehmann and Casella, 1998).目前来看，Bayes 方法是求Minimax 解
oo).

的主要工具，特别是Minimax估计，大多通过以上两个定理获得.
最后简要介绍Bayes解的容许性.由于Bayes解和Minimax解都在
某种程度上反映了判决问题在参数空间的整体优良性，因而它们有可能 是容许的(范金城 ，吴可法，2001).
定理8.2.8 设若以幻为统计问题关于损失 函数L(U)和先验分布tt(0)在判决空间D上唯一的Bayes解，则它必 然是容许的.
证明 用反证法.若以幻不是容许的，则根据定义(见第三章)， 必存在8'(x)，使得R(0, 8)对一切0^0成立，而且至少对 一个氏有(氏，<?') <尺(氏，5)(该式说明Sf(x)不同于8(x)).以上不 等式两边关于先验分布77(0)积分可得
久(3') = ^R(ei8,)7T(0)de 彡 £尺(汐，6)77(60(1|9 =心(S).
(8. 2. 25) 这说明，S'U)也是一个Bayes解，与唯一性的假设矛盾.因此以幻为 容许的. | 注 类似的反证法也可证明:若 3(幻为统计问题关于损失函数 ❸，d)唯一的Minimax 解，则它也是容许的，这只需把(8.2.25)式的
取平均(积分)改为取峰值即可. 鑿 定理8.2.9 设X~f(x，扪，060、以幻为统计问题关于损失函 数L(❷，d)和先验分布77(0)的Bayes解，若tt(0)在矽上处处〉0;风险 函数R(0.8)对任意的3(幻都是0的连续函数，且5(幻的Bayes风险有
限，则是容许的. 证明仍用反证法.若5(幻不是容许的，则必存在5'(幻，使得
R(10) x 觀 8)对一切eeo成立，而a至少对一个氏有<
. 由于R{e 及充分小的正数>0,使得
5')在氏处连续，必存在。的一个邻域^以 尺(6>，5') < R(0, S) -3,\/0eN€.
由以上不等式可得
久(S') = £l?(6>，5')7r(60<W
=[^(^^,)7T(0)d^ + [尺(<9,5')77(沒)相 J\e-Ne\
f [^(^,3) - + f R(O,8)TT(e)d0 J\e-Ne\
尺(<%,
,
6)
8)和 7?(1?,

:久(8)−eP(0 e TVJ .

由假设可知 P(6eNe) >0,因此 ，这与 5(x)是 Bayes 解的假设矛盾.所以S(幻必须是容许的. I
由定理8.2. 1和定理8.2.2可知，许多常见的Bayes估计(诸如在 均方损失(8.2.25)式下的Bayes估计等)都有唯一性，因而它们是容许 的.另外，不少常见的共轭先验分布能满足定理8. 2.9的条件，因而相 应的Bayes解是容许的.以上定理既说明了 Bayes估计的优良性，同时 也提供了一种证明容许性的有效方法.容许性是一个纯理论的问题，迄 今还未见关于应用成果方面的报道，进一步的文献可参见Lehmann and Casella(1998);陈希孺(1981 J999).
8. 3 假设检验与区间估计的Bayes方法
对于假设检验与区间估计问题，Bayes统计推断的出发点仍然是后 验分布，但是其基本思想比较简单直观.
8.3.1 Bayes假设检验
给定样本X，且有X～f(x，❷)，❷ 考虑假设检验问题
— (90 U 0! = (9. (8. 3. 1)
在第六章，我们系统地介绍了常见分布的各种假设检验问题及其求 解方法.其基本点就是要确定一个检验统计量，其分布在零假设时已 知，由此即可进一步得到否定域与检验函数.构造检验统计量是经典统 计解决假设检验问题最重要的步骤，同时也是最困难的部分.但是，假 设检验的Bayes方法就不需要检验统计量，而是从后验分布出发，通过 直接计算后验概率导出否定域与检验函数.
假设给定0的先验分布K0)，并计算出其后验分布为e～ 7r(0\x).由此可以得到参数落在0。和吮的后验概率:
贫1(X) =£ =P{0e0!|x)， (8.3.2)
77o(x)
7r(0\x)d6=P(3e 0。|x). (8.3.3)
从直观上看，77((x)和7TO(X)分别表示参数0属于和0。的后验概 率，因此若77,(%) >77。(幻，则表示e^Ox的可能性更大，因而否定
所以可取否定域与检验函数为
尺+ = !^:^i(^)>7TO(X) (x)> (8.3.4)

(8.3.5)
其中7T表示/?+的余集.
例8.3.1 设|，...，又为独立同分布样本，且X, −6(1,0).假设
沒的先验分布为0~/?(0，1),考虑以下假设检验问题的否定域H。: 0石 1/2 一
H、:6>>1/2.
解 由例8.】.1可知，没的后验分布为芦分布B£(r+l,n−T+l), n
其中r= 因此后验概率(幻和%U)可由不完全冷函数表示 i=I
为7T0(X) =P(0^ 1/2 I X)=/1/2(T+1,n−T+1)^077!(x) =1 −7TO(X)= /1/2(n−r+i,r+i).因此否定域为zr = U:/,/2 (71−r+i, r+i) >
1/2).例如，当n=5,观察值T=0,1,2,3,4,5时，我们计算出后验 概率 tt,(x)的值分别为 0.015,0. 109,0. 344,0. 656,0. 891,0. 984.因此
时就否定原假设，这显然是合理的. I 下面我们从统计判决函数的观点出发，根据定理8. 2. 1来证明上述

直观论断的正确性. 首先考虑检验问题的判决函数和损失函数.对于假设检验问题
(8.3.1)，假设其否定域为/T (不一定是(8.3.4)的形式)，检验函数 </>(x)如(8.3.5)
式所示.检验问题的判决函数只取两个值: < 表示% 成立，d0表示H。成立，通常取d' = 1
表示Hx成立，Jo = 0表示Ho成 立 ，因此判决函数就等同于非随机化的检验函数
6(%) = </)(x) = J (8. 3. 6) 0, x e 7?'.
这时，否定域zr，检验函数少(幻以及判决函数su)三者统计意义基 本相同.对于给定的判决
函数5(x),通常取o-i损失函数，即判错时 损失为1，判对时损失为0,具体可表示为
[(^,6(x))= fl， 6 6>0 且 5(幻=1 或 0J 且 3(幻=0, 0，沒e0o 且汐O) =0 或汐
且5(x) =1.
(8.3.7) 根据Bayes观点，我们必须求出对应于以上检验函数和损失函数的
后验风险，并找出使后验风险达到最小值的解，即 Bayes解.
引理8.3.1 对于假设检验问题(8.3.1)的任一判决函数5(%),假
设相应的否定域为/?+,则在0-1损失下，其后验风险可表示为
770(%)， 心(4)x)
x e /? + ,
% e 7? ~ ,
7T](X), x e 尺_
(8. 3.8)
,

其中tt/x)=P(0,|幻(/=0，1)如(8.3.2)和(8.3.3)所示. 证明 根据(8.3.7)式的定义，/^(5|幻可表示为
R($ | x) = f L(0,8(x))n(0\x)de + f L(098(x))ir(e\x)de. •Mo
记上式第一项为z?。(幻，第二项为^(x),则积分主要计算L(10)(X)) =1
的部分. 首先计算尺。(幻，这时0e0。;而当时，5(x)=1,因而由
(8.3.7)式有 L(0，S(x)) =1,
R0(x) = [L(M(x))一 | 幻相=jl。一 I 幻相=%(x)，x W ， J❷0
同理可得
.0,
0,
77!(x), XE.R.
x e R~.
两式合并即可得到(8.3.8)式. 这个引理说明，对于给定的假设检验问题(8.3.1),尽管其判决函
数5(*)可能有多种多样的形式，但是后验风险只能取两个值:tt0(x)和 它们由0。和0,决定.这给求Bayes解，即后验风险最小的解
提供了方便.直观上，Bayes解的后验风险每次都应该取两个值7r0(x) 和% (%)中较小者.今具体考虑检验问题(8. 3. 1)的Bayes解可能的形 式，具体分析如下.首先，若5*(%)使(8.3.8)式中的达到最 小值，其相应的否定域和检验函数记为
S (x)=</>*(x)=
1, x e. R*
— (8.3.9)
,0, xg/?*, 因此，求Bayes解5" (x)主要就是求否定域/T的形式;其次，由(8.3.8)
式可知，对于任意固定的*，任何判决3(包括S*)只能取两个值77。(幻和
%(幻，若5*(%)使 \x)^Rv(8\x)成立，则RW |幻必取这两个
值中较小者，而当%G7?* , R„W \X)=770(%), Ix)=7T0(x)或

A(幻，则应有77o(^)^7T1(X),因此8*(%)对应的7T应满足)%:77O(X)^
^1(^))—同理，5*(%)对应的t应满足|%:7r1(%)^7T0(X)|.因此尺•可取
为!X:7TO(X)<77,(%)!(为了保证否定原假设77。的理由充分，所以把集合)X:7TO(%)
=7T}(X)}归人接受域)，由此可得
定理8. 3. 1 设X 0的先验分布为7r(<9).对于 假设检验问题(8.3.1),在0-1损失下，
检验问题的Bayes解可由 (8.3.9〉式表示，其否定域7T满足
% e 7? + ,
■

(8.3. 10) =770(x),且由假 设有770(x) <77.(x)(见(8.3.10)式).对于任一其他判决5(%),如
(8.3.6)式所示，由引理8.3.1及(8.3.8)式可知，其后验风险为久(幻 或77!(X), 但都有
770(x)=Rn(8* |%)彡心(5|%)， V%e ,V3(x). 当xe/?•日寸，心(5* I%) =77,
(X),且有77!(%) 770(%)(见(8.3.10)
式).而对任一判决S(x),其值为7TO(X)或77,(*)，因而也都有
证明由引理8.3.1，当时，有
77,(%) =7?^(S* | %)彡I (5 I x),
综合以上两式可知，对任何*和<5(.1;〉
5* (X)为 Bayes 解. ■
在实用上，(8.3. 10)式可表示为
(8. 3. 11) Kio(x)称为交比(odds ratio),实际上就是后验概率比.另外，由于
77)(^) +^0(^) = 1，因此有 推论1 7T可表示为
^*= |x: 7F((%) = 7T(0\X)d0> • (8.3.12)
由以上定理和推论的结果可知，Bayes假设检验问题的求解过程比 较简单直接，只需求出后验概率，即可根据(8.3.11)式或(8.3.12)式
77(o\
it{6\ X)dO
Vx e , V5(.vz). 都有即
得到假设检验问题的Bayes否定域. 、 例8.3.2 设X,, ..., X。为独立同分布样本，且有X
假
设沒的先验分布为6-7r(e) ~/V(m, t2)，求以下单边假设检验问题的 Bayes 解:Hoi❷
彡
解 由例8.1.2可知，<9的后验分布亦为正态分布:tt(6>|x)- /V(a, i72)，其中
(8. 3. 13)

对于本问题，(90 = \e^e0 (, 0l = \e>eo \,因而由 e\x—N(«, ”2) 即可求出后验概率:
TTi(X)=P(0>0O | %) = P[-—"- >— - | x\ [VVJ
由于(6-a)/V\x服从标准正态分布，因而有
77](%) =1 -<1A)，^o(x)-达fl. \V) \V/
(8. 3. 14)
由此即可根据样本的取值进行假设检验.根据(8.3.12)式，其否定域 可表示为>1/2|,因此

有
f 十少旧兮卜卜^<0}
域类似 分布决定.
=\x:a>Oo | = {x:n(x - 00) > (00 -fjL)/r2). 易见，这个否定域与根据Neyman-Pearson理论(MLR检验)得到的否定
，但是此处常数k = -fjL)/r2,
由先验 ■ 以下例题说明，对于简单假设问题，Bayes解与Neyman-Pearson理
论得到的解是一致的.
例8.3.3 设对于简单假设检验问题Ho:0=
❷q
U =❷"若取先验分布为
「丌0, e = e0, 7T(0)=
(8-3-15) 叹=氐，77(6>t|x)=c(x)7r/(%,6>() (i=
则其Bayes否定域可表示为
其中 c = ir0/7ry.
证明 由假设可知 H . 则有
0,1)
7T,(X) = f7T(0|X)=7T(^(|%) =C(%)7r/(%)
(i=0,1)•
因此代人(8.3.U)式有
苁0 (幻 f(X^Q)7T0 因此根据(8. 3. 11)式，简单假设检验问题的Bayes否定域为
尺* = \x: Ki0(x) > 1 由此即可得到(8. 3. 15)式.
J TTol ['f(x,eo) >77JJ
,
o = e},
苁】(4))7T,
(8. 3. 16)

在不少文献中(如Berger 1985,Shao 1998,茆诗松1999),经常提到 假设检验问题的Bayes因子这一名字，我们首先结合简单假设检验问题 说明其统计意义.由(8.3. 16)式可得
770(%)/% (幻 3 口)
该式右端为^假设下和仏假设下的似然比，其值越大，则成
立的可能性越大，因此它反映了样本对假设圮支持的程度. (8.3. 17)式左端为Ho假设下和尽 假设下后验概率比与先验概率比 之间的比值，它应该与右端有相同的含义，即反映了样本对原假设
支持的程度.
对于一般假设检验问题(8.3. 1)，我们得不到象(8. 3. 17)式那样简
单明了的表达式，但是该式左端仍然有类似的含义，可以推广到一般情 形，称为Bayes因子，定义如下:
定义8.3.1 设X-f(x90)f 0的先验分布为甘(9)，其相 应的后验分布为77(<9 |%).对于假设检验问题(8.3. 1),其Bayes因子 定义为
_ z 、 770(%)/7ri (x)
t
=P(G0,),
=P(^e |x),i=0,1.

^(x) =---------;---------，77
;
(8.3. 18) 在这个定义中，后验概率比770 (%)/7T1(X)综合了先验信息与样本 信息的影响，其值越大，表明好。成立的可能性越大;它除以先验概率
比770/77,以后，就抵消了一部分先验信息的影响，因而就较多地突出 了样本，即数据的影响。因此不少学者认为，Bayes因子反映了样本对 原假设H。支持的程度。另外，若把
(8.3. 18)式表示为%(%)/%(*) = B(x)('/%)，由此式亦可看出:5(幻越大，则汉。成立的可能性越 大。但是，Bayes检验的主要任务还是根据定理8.3. 1 以及(8. 3. 10) — (8. 3. 12)式求出检验问题的后验概率和否定域。
在 Bayes检验中，需要特别予以关注的是以下常见的单点双边假设
检验问题:
W0:6> = 6>0 — :0^00. (8.3. 19) 对于这个检验，其先验分布不能简单地套用前面两节所介绍的若干 连续型分布。因为连续型分布在一个点^处的概率恒为零，从而导致 后验概率亦为零，无法进行有效的检验。因此对于检验(8.3. 19),通
常应在处应赋予一定概率，以便得到非零的后验概率。所以，其先 验分布的一般形式应当为

其中 因此有，
77(沒)=,
f% ,
0 = 60,
(8. 3. 20
U —开0)仫(沒)，❷爹❷0,
其中0 <7T0< 1表示在0 = 00处的先验权重，在6>#6>0上，77! = 1 - 7T0 S
示先验权重， 为一个连续型或离散型先验分布.因此，若I ～ f(x, 0)， 6>,则后验分布可表示为
rc(x)7r0f(xfe0), c(x)TTlgl(e)f(xie),
7r(^)f(x,^)dff.
m(x):=_A)a 叫(4)，—,(x)=1
由此可得检验(8. 3. 19)的后验概率和交比K 。以及Bayes因子分别为
7T(0\ X)=C(X)7T(0)/(X, 0) c~' (x) = m(x) =
o =
z 、 7Tof(X,eo) 7TX 7nt(x) ～(1):一^—, %(1)=]^~.
7T| (x) Kw(x)
(8.3.22)
(8.3. 23)
开of(x, Oo) 由以上公式可知，在假设检验问题(8.3. 19)的求解过程中，要考
虑到e = e0处权重的影响，而在e^e0处则要扣除权重的影响(即% = I-%)，因而要分别进行计算.至于先验分布g](e)9若是连续型分 布，则由它得到的后验分布与前两节介绍的情况类似，因为e = e0处的 概率为零.
另外，根据充分性准则(见(8.1.3)式)，以上公式中X-f{x,0)的 分布密度可以换成充分统计量T = T(X)的分布密度，结果不变.
例8.3.4 设A, ..., Xn为独立同分布样本，且X} -6(1,6>).求以 下假设检验问题的Bayes解:HQ-e = 1/2^^ : ^#1/2.假设<9的先验 分布如(8. 3. 20)所示，其中
77(1/2)=77。，在0#1/2处先验分布gi(0) 为均匀分布/?(0,1).
解 由假设可知，氐=1/2, =0T(l 其中T = x,.

因而/(X,氏)=(1/2广.当沒#1/2时， 为均匀分布/?(0,1)，由例 8.1.1可知，的后验分布为分布BE(T+l,n-r+l),因此有
饥1(幻 = [
J0^0o Jo
g}(e)f(x9e)d0，f eT(i - o)n'Tde
扇. (8.3.21)
)

r(r+i)r(n -r+i)二丁!(沒一71)! r(n+2) 0 +1)!
A (4) =1 -订 0 T\(n-T) !2„ 7To/(X,0O) TTo O + 1) !
例如，若取 77。=1/2, n =6,当观察值/^ 0，1，2, 3, 4, 5, 6 时， /C10(%)的值分别为 9. 143, 1. 524, 0. 610, 0. 457, 0.610, 1.524, 9. 143. 因此r =0, 1,或r = 5, 6时就否定原假设，即r取值太大或太小则 0 = 1/2不成立，这显然是合理的.另外，T = 3时(即成功与失败的次数 相等)，Bayes因子5(3) =2. 185,这表明，样本强烈支持原假设77。: 6 =1/2,这也显然是合理的. | 例8.3.5设,•••,Xn为独立同分布样本，且有-N(0,a2)f cr2已知，求以下假设检验问题的Bayes解:Ho : 0 = : 0^0^.假设～沒的先验分布如(8.3.20)所示，其中=1,0^eQ;ii)gi(0)
(其中i)为无信息先验;关于ii)，若 0接近于e。， 把先验均值设置为00是合适的).
解 i)当a2已艺时，r = r(x)=无为充分统计量，x a2/n).因此可用T=X的分布代替X的分布.由(8.3.23)式可得
由于交比Ki0(x)为 \x-0Q\/a 的严增函数，因此否定域可表示为
x ~00
这个否定域与经典的结果一致，但是此处常数c 与先验分布有关. H)这时 -/V(0o,cro),由(8.3.23)式可得
R' ={Kl0(x) >1} =
尺 io(龙)
S\(沒)一 :， exP(- -6)2 ____ V 2tt€72 I
J
exP(- T~~2(x - 沒o) 由于gt(0)～TV(氏， 为连续型分布，因此上式分子就是一般的边缘

分布，这在例8.1.2中已经给出，(8.1.6)式的结果代人上式分子可得 (沒0 - x)2
尺io(x)
2 (o-Q+a2/n)
/ 2 2_; \ + ((t0+er/n) 2a
n(x-Oo)2 nal] a2 na\ +a2
苁I 1 exp 苁0 ^/1 + na^/a2
1 2
由于交比A:10(%)为Z= \x-Oo\/a的严增函数，因此否定域可表示为
R* ={KM >i}= 这个否定域也与经典的结果一致，但是此处常数(与先验分布有关.I
8. 3. 2 Bayes区间估计和HPD可信区间
设X-f(x.e) , e 6>, 0的先验分布为77(0).对于区间估计， Bayes方法比经典方法简单直接，不需要求枢轴量以及枢轴量的分布. 因为0是随机变量，有了后验分布n(e\x)以

后，就很容易算出它落在 一个区间(或区域)的概率，从而得到区间估计.
定义8.3.2 若区域C(x)C&满足条件
P{0e C(x) \ x] =
tt{0 I x)d^^l -a. (8. 3. 24)
J.0EC(x)i 则称c(幻为参数0的一个水平为1 -a 的Bayes置信域，或称为可信域(credible region).特别，若 C(x) = [0(%) ,^(%)], 则称[^(x) ,^(x)] 为沒的二个水平为1 -a 的Bayes置信区间，或可信区间;若C(x)=
(-oo,0(x)]和4(%)，oo)，则称<90)和fO)分别为6的水平为1-a 的 Bayes置信上限和Bayes置信下限. ■
与参数置信域的定义类似，若 7T(0\x)为连续型分布，则以上定义 中的不等式可改为等式，以便于计算.另外，实用上大多考虑一维单参
数的情形.
例8. 3.6 设X, 为独立同分布样本，且有X. ~/V(<9,(r2),
tr2已知.假设(9的先验分布为e-ir(e) -N(pl9t2),求参数<9的Bayes 置信区间.
解 由例8.1.2的结果可知~N(a,v2),其中a和巧2如
(6>。-%)2 n 21
(无-氐)
 384

(8. 1.4)所示.因此可化为标准正态分布: 由此可得
Qa V
从而即可反解得到
[6(x), 0(x)]=[a a+^i_f], (8.3.25)
其中，,_f 为标准正态分布的1 分位数.这是以后验期望为中心的一
个区间，与经典结果不同.例如:若 67=10, /X = 100, 7 = 15, 并设 n = l, X, = 115,则由(8. 3. 25)式可得水平为95%的可信区间为 (94.08,126.70).而相应的经典置信区间为(95.4,134.6).但是，由 (8.1.4)式可知，若7-oo(即0退化为广，均匀分布)，则a=x, v =
<r/扣 ，这时(8.3.25)与经典解一致. ■ 例8.3.7 设某镇每周火灾发生的次数服从Poisson分布P(A)，今 观测到:连续5周火灾发生的次数分别为0,1,1,0,0.假设样本独立同分布，A 服从无信息先验分布7t(A) 求平均次数A 的水平为 90%的可信区间.又若观测值为0,1,1,0,1,其结果如何?
解 对于本问题，n = 5, (x"..., x5)t = (0, 1, 1, 0, 0)T,
x^2.与例8.1.3类似，A的后验分布可表示为 i=1
77(A | x) =c(x)7r(A)f(x,A) =<?(x)A _, e_nAAT =ce~5AA. / 即tt(A |x)服从厂分布r(5,2),式中c=25.因此由厂分布与 分布 的关系有10A 由此可得
P 1?(4, 0. 05) <10A </(4, 0.95) \x | =P)0.711 <10A < 9. 488 |x j=0. 9.
因此，A 的水平为90%的可信区间为(0.07,0.95).又若观测值为0, 5
1, 1, 0, 1, 则 r= 2 %, =3, 10A I % -X(6), A 的水平为 90% 的可信 i-I
区间为(0. 16,1.26).这些结果都是比较合理的. I 与参数的置信域类似，满足条件(8.3.24)的可信域通常有很多， 我们应该从其中寻找最优的.通常就是体积或区间长度最小的可信域，
在 Bayes统计中，经常采用HPD可信域，其定义如下:
定义8. 3.3 若区域C(x)ce满足条件(8.3.24)，并且存在Wa) >0,使C(幻可表示为
 =j e0: \x) \. (8.3.26)

则称C(幻为参数0的水平为1 - a的最大后验密度(highest posterior density)可信域，简称为水平为1 -a的HPD可信域. ■
HPD可信域有许多特点，今摘要概述如下.
(1) 首先，C(幻必然是有界的区域，因为由(8.3.26)式可知，
0e C(x)时 77(0 | 幻 >A:(a);若 C(X)无界，则积分 f 7T(0 | x)do J\0eC(x)\
必为无穷.特别，HPD可信区间都是有限的区间.
(2) 由于HPD可信域集中了密度尽量大的点，因而它应该有最小
的体积或区间长度，这可表述为以下定理:
定理8. 3.2 在同等水平的可信域中，HPD可信域具有最小的体
积.即若P\0e.C{x)IX)=P{0GC*(x)IXI=1-a<1 ，其中C(x) 为HPD可信域，则必有f f
d3.
证明 设在0 上，对应于集合C(幻与C*(x)的示性函数分别记为 </)(幻与(幻，即(/
>(^)=Zj<9:6>e6(x)(;(/>*(0)=1{0:0E
C* (%) |.则要证f [初等价于要证f </>(^)
C(x)| J{»eC*(x)|
(沒)^0.并且水平条件P| eC(%)|x)=P|^eC(x)|x|=1-
a等价于[</>(^)7r(^|x)d6>=[</>*(6>)77-(<9|^)d(9=l-a.以下证明类 JO Jo
似于Neyman - Pearson基本引理的证明方法.考虑函数A(0) = [(/>(0) -
KW]•[n(0\x)-k(a)]及其积分:
£4(沒)仞=[</>(60-<(沒)][77(a|x)-々(a)]收 (8.3.27)
则当 6eC(x)时，</>((?) -</>* (<9)^0; it(0\x) -A;(a)^0,因而 A(0)^ 0;而当0^C(x)时，小(沒)-<(权)CO; 7r(0\x)-k(a)<0,也有4(4)
>0.因此恒有积分[A(^)d(9^0,从而由(8. 3. 27)式可得
灸(a) L [小(沒)-</>*(沒)]d沒多 f [</>(沒)-</>*(^)]77(|x)dO. J&
(8. 3. 28) 由假设条件可知，[4>(e)7T(e \x)de= ((/>* | %)d^ = 1
々(a) >0,因此由(8. 3. 28)式可得 £ [</>(!?) -</>*(^)] 0 ，即
f </>(0) f(/>* (0)d0,因此有[f d0. | 川 J<9 C(x) I J i 6 e C • (
J/

(3)若(9为一维单参数，则tt(<9|x)对应于平面上一条曲线，可用 水平线77(幻把密度曲线截为上下两部分，则上面部分对应的e 就是HPD可信区间，见图8. 3.1和8.3.2.特别，若^{e\x)的密度曲
线为单峰的(这是很常见的情形)，并且关于某一个点M(幻对称，则此 水平线截取的HPD可信区间必然关于弘(幻对称，并具有形式[/x(x)- c(a)，m(幻 +c(a):，其中c(a)由(8.3.24)式决定.上面例8.3.6的 (8.3.25)式就是这种情形，因而是HPD可信区间.若密度曲线为单峰 非对称的，则HPD可信区间应满足
{0\x)do=1-a，77(^(x)|x)=tt(6(x)|x): (8.3.29)
J^(x)
例8. 3.8 设弋，...， 为独立同分布样本，且4~6(1，0)，求参
数沒的水平为1 -a的HPD可信区间:(1)0的先验分布为冷分布 BE(p，q)；(2) 61的先验分布为均匀分布7?(0, 1).
解 (1)由例8.1.1可知，0的后验分布为BE(P+T，q+n-T)，
其中J;X，，因而后验密度可表示为 £=1

77(4) X) =C(X)r +r_1(l —❷)”
易见，77(^|x)为[0，1]区间上的一条曲线，由77(^|%)的一阶导数可 以看出，对于不同的p，q，n，r的取值，该曲线可能为以下4种情况
之一(见图 8. 3. 1、8. 3. 2 及 Lehmann 1985):
1];
ii) 77(0 | %)在[0, 1]上为沒的减函数，则 HPD可信区间为[0,
a2(x)];

图 8.3.2 单峰和单谷函数的HPD可信区间
iii) 77(^1%)在[0, 1]上先增后减，则HPD可信区间为[a,(x), a2(x)];
iv) 在[0，l]上先减后增，则HPD可信区间为[0，七(幻] 和[a2(x) ,1].
其中a,(x)或a2(x)由(8.3.24)式决定，并且在iii) , iv)两种情 形，aj(x)和a2(x)同时还应满足77(fl] (%) |x)=77(a2(x) |%)(见 (8. 3. 29)式).
(2)对于0～尺(0, 1)的情形，即p = l，g = l，这时77(6 |%)= c(x)eT(i 沒的HPD町信区间与71，r 的取值有关.若 r = n， 则7T(^ I X)=(n + l)6>", 77(191%)在[0, 1]上为(9 的增函数，其 HPD 可
信区间为[a,(x)，l]. 而a1 (x)由
77■(沒 | %) = a决定，因此
0
fl](x)=a"77.若T=0， 则7T(^I%)=(n+1)(1-0Y, 7T(e\X)在[0,
门上为e的减函数， 其HPD可信区间为[0, a2 (幻]，a2(x)由
广2(*) J0
7T，(0\x) =c(x)n^-l(l 该式表明，当 0<—时， \71/ n
7T(汐1%)为沒的增函数;当0>—时，7T(e\x)为0的减函数;而当e= - nn
时，n(0\x)达到其峰值• 这就是上述第iii)种情形，因此HPD可信区 间为[a,(x)，a2(x)]，其中a,(x)或七(4)由(8. 3. 29)式决定. |
例8.3.9 设弋，...，X。为独立同分布样本，且有~7V(M,a2).
假设(/Z，a)服从无信息先验分布77(/1,cr) CC(T_1,求参数)11和a的水平 为1 -a的HPD可信区间.
77(0\x)dG~\—a决定，因此a2(x)=1-a~.若0<* <n，则
解 由假设可知，(/u,a)的后验分布为

| %) =c(x)a exp
(8.3.30). 首先求M的边缘分布，这时77(fJL | X)= 77(/X,67 | %)d<T.记
S2= Z -x)2,并令y=cr_2,则7r(/z,o-|x)dcr可表示为 i=1
-3/2 j -x)2 + y ay.
f°°
7r(/z | x) = I 77(/x,a | %) dtr = c(x)[n(/i-x)2 +S2]
该式町进一步化简，令
S/ 扣 - 1
)da =c(x)y(n+,)/2exp
由此根据厂函数的积分可得
7T(/x,(r | a;
其中a=SX/n^T,则有n(M-%)2=z2S2/(n-l),该式代人以上7r(/x|%), 并把S2纳人c(幻

可得
2 -n/2 %)=C(X)I1+ _J .
这说明，*给定时，t=^(pL-x)/a服从自由度为n-1的《分布(见第 一章).因此有
令 | <令-1，1-号)|x)=1-a.
易见77(/|x)的分布关于Z=0对称，77(^1 X)的分布关于A=x对称，因 此根据前面第(3)点的论证以及上式可知，M的水平为1 -a 的HPD可 信区间为*
[M,只]=
这一结果与经典方法所得到的结果在形式上完全一致，但是，基本假设与
推导过程完全不一样.在(8.3.31)式中，给定X = x, /!•是随机变量，而 在第七章的经典方法中，m 为参数，I 是随机变量.
再求f的边缘分布，这时77(a|%)=C 77(M,a|%)dM.在 J- 00
(8.3.30)式中，77(/z,cr | x)关于m 为正态分布，其均值为方差为 o-2/n,因此有
7T(;
|
- -n/2
(8. 3. 31)

7F(/z,tr | %)d/i =c(x)-exp (么-x)2
(8. 3. 32) 这时77(<r |x)作为a 的函数，是一个单峰函数.因为若令Z(a |%)= log 7r(cr | %),则有 l{a\x) =logc(%) - nlog a - S2/(2a2) , Zz(a | x)= na-3[- -a2].这说明，Z(a | %)及77(a | %)为先增后减的单峰函数，且
在a2=—时达到峰值.这属于例8. 3.8的第iii)种情况，cr的HPD可信
区间可表示为[R(幻，a2(x)],其中^(x)和a2(x)满足(8. 3. 29)式， 显然，其求解过程比较复杂.
我们亦可求的一般的Bayes置信区间.事实上，可以证明，龙给
n /分布.由(8.3.32)式可
定时，W= 2 (A-I)2At2的条件分布为 is1
知，后验密度tt(a | x)可表示为7F(a | x) =c(x')wn/2e~1'w, 若记M的密 度为(p(w I幻则有
(p(w \ x) = 7r(<7 | x) aw =c(x)wn/2e-1_ww_3/2 =c(x)w(n-3)/2e-+w.
n
这说明，X给定时，w= I (Xi-x)2/a2 =s2/a2服从自由度为zi-1的 1=1
Y 分布(见第一章).这与第七章例7. 1.2的枢轴量G(X,a2)十分类似， 因此有
-a. 因此可得a2的Bayes置信区间为[a2(x), a2 (x)], 其中
这一结果与经典方法所得到的结果在形式上完全一致，但是，基本假设
与推导过程完全不一样.在本例的访=-x)2/a2 =S2/a2中，给 i=1
定X =x, O■是随机变量;而在例7. 1.2中，a 为参数，X是随机变量. 另外，以上Bayes置信区间并不是HPD可信区间，因为它们不满足 (8.3.29)式. |
(4)在文献中，HPD可信域还有另一种定义(例如，可参见茆诗 松，1999)，我们就权且称之为定义8.3.3',其定义如下:若区域C'(幻

C0满足条件(8.3.24)，并且对任何^eC(x)及❷、宅 有77(糾%)
^77(^|%),则称Cf(x)为参数0的水平为1-a的HPD可信域.这两
种定义虽然不完全等价，但是差别很小.易见，若Ch)满足定义 8. 3.3,则必满足定义

8.3.3',因为由(8.3.26)式可知，若0eC(x)t 0. 则有 77(6 I 幻 <k(a)^7r(0\x). 反之，若 C'(x)满足定义 8.3.3',则可记❷W(x)时77(叫幻的下确界为Wa),对此，可 根据(8.3.26)式定义相应的C(%).则对任何0eC'(x)有77(0 |幻多 々(a)，因而0eC(x)，即C,(x)CC(x).事实上，Cf(x)与C(幻的差 别主要在集合 = \6:7r(0 \ x) = A:(a) | 上，因为若 77(^ | x) < k(a)， 则显然0笨C(x)，0 Cf(x);若77(0|%)>k(a)，则有0gC(x), 0e cr(x).在 R° = {e:7T(e | x) -k(a) j 上，C\x)与C(幻可能有差别，见 图 8. 3.3 左，其中 C(幻=[aU)，6(x)]，而 C’{x)可以具有 Cr(x)=[af(x),br(x)^的形式.但是若， 为零测集，则 C’(x)与 C(x)没有差 别，见图8.3.3右.所以在实际应用上，这两种定义差别不大.另外， 在实际应用上也不一定非要求HPD可信域，大多数情形下求解水平为
90%或95%的Bayes置信区间即可.

图 8.3.3 HPD可信区间的两种定义

习题八

1.设苓，...，总为 i. i·d.样本，在给定久的分布和参数先验分布
的情况下，求相应的后验分布:

(1) X. ,并设0的先验分布为指数分布E(a)，但a已
知，求的后验分布;

(2) Xj ~f(A;f), p已知.A～r(a,p)，求A的后验分布;

(3)xx -f(xi9e)=2x^_2z |,并设 e-^e'2i \
求沒的后验分布.

2. 证明下列先验分布是共轭先验分布:
,

(1) 设 ...， 为i. i. d.样本，X,服从两点分布b(l，❷)，其中0 已知，样本容量ri未知，ri的先验分布为P(A);

(2) 设X,，...，X。为i.i.d.样本，X.服从指数分布E(l/a)= r(i/<r,i), a的先验分布为逆r分布r-*(a,p);

(3) 设 为i. i. d.样本， 服从负二项分布NB(0, r)，r 已知，0未知;其先验分布为BE(?,g);

(4)设为i.i.d.样本，mm^gR\并设沒～
^(Mo，乏。)，其中M。和各已知.

3. 设 ，...人 为i.i.d.样本，X{服从幂函数分布A ~PF(c，的，
即/(^1;c,6>) =cx\~xe cI I (c>0;<9>0).证明:若 c 已知， 则沒的共轭先验分布为Pareto分布;若已知，则c的共轭先验分布为 厂分布.

4. 设X,，...人 为 样本，X, -N(/jL9cr2)9 m 和Y 都未知.又设5 2cr 的先验分布为77(6) ~ r(a,p);在a2给定条件下，{JL的先验分布为
77(/1| a2)～

(1) 求(M，5)的联合后验分布;

(2) 求5的后验边缘分布，以及给定5条件下M的后验边缘分布. 5. 设 1 ，...，Xn 为 i. i. d.样本，Xx ~/V(/i，(r2)，其中/z 和 8= a2 未
知，又设0=(p，8)的先验密度=8—、.证明:

(1) ❷= (/JL，8)的后验密度函数可表示为7T(0\X) =77,(^|5,^).
772(5|X)，其中 \8,X) ^7V(X,5/n), tt2 (5 | X)服从逆 r 分布 厂i(s，n')，其中n'=^，3=^-2 (Xt.-X)2;

(2) S的后验边缘分布服从逆厂分布f I(s,nr); .
(3) 的后验边缘密度是其中?=— (X: —X)2,
/(•)是自由度为n-1的分布的密度函数.
6. 设X=(^,,--,XJT服从多项分布MN(n,0)9 即f(x;0)=
^TnJ—;n什，其中❷，，...，❷V为参数，f =1,g^=n, 0 的先验分布为Dirichlet分布，即为

77(0) = ~7——~ nr(W
t=1
k
其中a,>0, i=l,...，k;
i=1

,1 ^i^k).
a, = a0.记 a = (a"...，at)T，并把这一
分布记为Z)(a).证明:19的后验分布服从Dirichlet分布D(a+x).
7.设X = (X{1...，X,.)T服从指数族分/(x, 0)= rA
/i(x)exp(Z —6(0).. i=1
fk i=l
验分布;
ii) 把以上结果用于双参数的分布和厂分布.
8. 设X,，...，Xn为i. i. d.样本，由Jeffreys准则确定以下参数的先
验分布:
(1) X，～r(A;p)，但p已知;A未知;
(2) X, ~E(1/^)为寿命分布，但只观测到前r个寿命的值:y]=
X(1)，...，Fr =X(ri ;
(3) 但r已知，沒未知;
(4) X=(XI?-,XJT服从第6题的多项分布MN、n，❷).
9. 根据Jeffreys准则证明:
(1) 若X=(X1,...,XJT服从位置参数分布则77(/£) □C1;
(2) 若JV=(X,，...，XJT服从尺度参数分布a-n/(%/a),则Wcr) oc 1/a;
a),(3) 若 ，...，XJT服从位置尺度参数分布族a-y((x<Ml)/ 贝IJtt(a ,/t) cc 1/cr2.
W.设岑，...，^ 为i. i. d.样本，在均方损失下，求相应参数的 Bayes估计:
(1) X} ~/(x).6) =2x]0^2I 0 服从 Pareto 分布 PR(a，从); (2) X, |，A 服从厂分布 r(a,p); (3) Xt ~r(l/(r;r), p 已知，cr 服从逆厂分布 r_1(a，p);
(4) ～y(x1;c)=cx「7)OC1|(c>0)，c服从厂分布r(a，p). 11.设 X'，.“，
xn^i.i.d.样本，X,
(1)若 = H A的先验分布为77(/1) =e' a >0,在均方损失下，
i) 证明:tt(0) =c(a1m') exp.
a夂/沒)-mb(❷)，为沒的共扼先

求;u， 的Bayes估计;
(2) 若y已知，0～r_l(a，p)，求<9的后验期望估计;
(3) 条件同(2)，在损失函数L(e,d) 下，求久的Bayes

估计.
12. 设久，...， 为 i. i. d.样本，X. ~7V(M，tr2)，/I 和(r2 都未知.
义设S=2^的先验分布为町(8)～r(a，p);在a2给定条件下，#的先
验分布为7r(/jc\a2) - . 在均方损失下，求/x，<r2的Bayes 估计.
13. 设岑，...，为i.i.d.样本，J,～尸(1)，A~r(a，p). (1)在均方损失下，求
g(A)=A;Ol)的Bayes估计;
(2) 在损失函数L(A,J) = ^~A)下，求A的Bayes估计及其后
A
验风险和Bayes风险.
.14.设 为 i. i. d.样本，x,～b(i，P)，o<P<i，的先验
分布77(P)～/?(0，1).在损失函数L{d,p) P(1 -P)下，求P的Bayes
估计，并求其Bayes风险.
15.设X,，...，X„，为i. i. d.样本，X.服从均匀分布
尺(沒_ + ，0+去).在无信息先验分布和均方损失下，求~的Bayes估计.
16. 设X,，•--,Xn为i.i.d.样本，X} +r^,lj.在无信息先验•
分布下，求相应参数的后验期望估计:i)a = 1 ，/I未知;ii)/z=O，cr未 知;iii) ^ =(cr，/i)都未知.
17. 设X，，...，X"为i. i. d.样本，Xj ~ -^-,1j表示寿命分布，E(X,)
=6>为平均寿命.若只观测到前r个寿命值:K，=X(1),...， 取损失 函数为
L(e,d)=[(J-0)/0]2,求0的Bayes估计.若0的先验分布为: (1)逆厂分布r_'(a，p);
(2) 7T(0)oc^_,(由Jeffreys准则确定的先验分 布).
18. 设X,，...， 为i. i. d.样本，损失函数为均方损失，证明:以 下参数的Bayes估计是渐近无偏的和相合的:
(1) X， b(k，e)，<9e(0，l) ，沒的先验分布 77(^9) -BE(p，q)；(2) X,～尺(0,6>)， 的先验分布 77(61) -PR(a960) -a % 0'(a+i} •
=
21.设(从，cr2),从>0未知，a2已知，fjL的先验分布为77(/1) 证明:在均方损失下，M的Bayes估计为: = X +
其中汐和少分别是标准正态的密度函数和分

I \o^eo I，•且 e0^x(n);
(3) X. -P(A) ，A 的先验分布 77(A) ~r(a，p).
19. 设苓，...人为i.i.d.样本，Xx～b(l，p)，0〈戶<1.
(1) 当p ~ BE(a，/3)时，在均方损失下，求g(p) =P(1 ~P)的
Bayes估计，并讨论其渐近无偏性和相合性;
(2) 设p服从广义先验分布n(P) =p'*(l \0<p<i|，在
均方误差损失下，求P和g(p)的Bayes估计，并讨论其渐近无偏性和
相合性.
20. 设久，...， 为/乂次 样本，弋服从负二项分布NB(p，r、，r
>0已知;又设”
(1) 在均方损失下，求p和p_1的Bayes估计; (2) 证明(1)中得到的Bayes估计是相合的.
布函数. .
22. 设X,服从几何分布G(p) ，0 1，p - 7T(p) 当损失函数为
L(p,d) = (d -p)2/p 时证明:p 的 Bayes 估计为

[(1 -p)xir(p)dp
P = 1 - -------------------------, 口1, 2, ...
(1 - p)*_17T(p)dp
"23.设X,, ..., X。为i. i. d.样本, X, ,❷的先验分布为逆 厂分布e-r~l(a,p),证明:在均方损失下, 0的Bayes估计为:
二 a P ll2(2a') <2a/%(7)} B~^V(2n^+2) <2a/x(n)T /
其中/=n” -l,久„)为样本最大值(提示:利用厂分布与 分布的关 系).
24. (1)设5, (X)是g, (0)在均方损失下的Bayes估计, Z = 1, ..., p. pP
证明: qSJX)是2 Cigi(O)在均方损失下的Bayes估计; i=1 ixl
(2)设 X、, ...,Xn 为 i. i. d.样本, X, -PR(a,0o) -a^0x;{a^}I \0
多氏f, 其中0。已知, a~r(a, p),在均方损失下求g(a)=a+a2的 Bayes估计.
*25.(1)设77(0)为正常的先验分布, 3(幻是g((9)在均方误差损失

下的Bayes估计, 估计的偏差是6(幻, 即E(5(X) .1^) =g(6?) +b(6). 假设Eg2(0) <oo ,则5(尤)的Bayes风险Rv(d)可表示为
Rn(S) =E[5(X) -g(6>)]2 = - ^g(O)b(0)n(O)d0, 其中钉•]表示对(X, 幻的联合分布求期望(提示:参考定理8. 2.3的证
明).
(2)设 Xl9-,Xn 为 i. i. d.样本, X,服从 Poisson 分布 P(A),设入
的先验分布为77(A)~r(a, p),通过直接计算验证以上公式.
26. 谀叉、, ."人为 样本, X,〜尸(A), A~r(a, p).设K,, ...人 为i. i. d·样本且与X}, -,Xn独立, Y, ~尸(弘),於〜r(b, q), 且
与A独立.在均方损失下, 求p =X/fJL的Bayes估计.
27. 设 X, X2 〜/(%2,氏), 且 A 与 X2 独立;0' ~
KD, 且久与么独立;又设久是0.在均方损失下基于 X,•的Bayes估计, i=1, 2.证明:
(1) S| -82是A -02在均方损失下基于, X2)的Bayes估计; (2) S, S2是久02在均方损失下基于(A, X2)的Bayes估计.
28. 设又~ , 6>=(,6>2), e0,, Z=1, 2; e-7r(0)= tt(氏|氏)7T(02),其中77(么)是02上的密度函数, 对任意给定的么,
是A 上的密度函数, 若在氏给定条件下, h(^) =g(eife2) 在均方损失下的Bayes估计是8(X902),则g(氏, 么)在均方损失下的
Bayes估计是8(X), 且满足5(X)=f 8(X902)n(02|X)d02,其中 J❷2
77(么|X)是么的后验分布密度函数.把以上结果用于本章习题4,求
(^2及g(蚪, S) =/JLa2在均方误差下的Bayes估计. 29.在均方损失函数L(ld):We))2下证明:g(幻的Bayes
解的后验风险为Var(g(6>) |X),其中Var(- |X)表示关于后验分布 7r(e\X)的方差.
30. 设孓, ..., 叉为i. i. d.样本, 求相应参数的后验极大似然估计:
(1)X,〜f(xl90)=2%16>-2/|0^x1^<9),0服从Pareto分布 P7?(a, 弘);
(2) X, - =A2x1e-Ax7(x1^0 I, A 服从尸分布 r(a,p);
(3) X, ~r(l/o-;i/), p 已知, a 服从逆厂分布 r-*(a,p);
(4) V(xi;c)=cx;夂jOCXj<1I(c>0).c的先验分布为r 分布 r(a,p).
31. 设戈, ..., 冬为i. i. d.样本, Xx〜NCft.a2') , /£已知

(1)设cr的先验分布求a的后验极大似然估计;
估计;
(2)记5=<r2，设5的先验分布7T(5) 00
求6的后验极大似然 (3)设S的先验分布tt(3) - r_l(a, P)，求5的后验极大似然
估计.32. 设 X:，...，知，记S=€F2,0x(M, S)T，又设77(0)\求沒的后验极大似然 估计.
33. 设X,,...，叉为i.i.d.样本，弋服从幂函数分布%,V(^i; % ❸)^cx\-xO-I |(c>0;^>0).求相应参数的后验极大似然估 计:i)若0已知，c的先验分布为厂分布r(a, p); ii)若c已知，0的先 验分布为Pareto分布PR(a^).
34.设X,为i.i.d.样本，X. + 1).若只观测到前
r个寿命值:y. =x(I),...，y、=xM. 在以下三种无信息先验分布下，求 相应参数的后验极大似然估计:i)a = l,从未知;n)/i = 0, tr未知; iii)0 = (<r, /A)都未知.
•35.设X-f(x.e), Q氏&，0的先验分布为K6)，对g(<9)的估 计，取损失函数为L(0, d)=三二)-log -1;求发(0)的Bayes 估计. 'i
36.设芩，...，X,.为独立同分布样本，且有弋~6(1,0),损失函数为 L(0, d) 证明:『/a 为 0 的 Minimax 估计，其中 T= X..
为i.
样本，X, a2)9其中M，乂都未
37.设久:，...，X„， 为 i. i. d.样本，Xx +
均匀分
布).证明:在均方损失下，§=(^(!) +X(n))/2为0的Minimax估计 (提示:取一列先验分布为(一k，+幻上的均匀分布).
38.设X,，...，叉为独立同分布样本，Xx ~r(y,l).取损失为L(<9, d) ^[(d-0)/ey9 证明:在此损失函数下，证明:T/(n + l)为0的
Minimax估计，其中r = 布:r~l(k''l9k-1))•
i=\
Xt(提示:取一列先验分布为逆Gamma分
0
习题八
397
39. 弋，...，Xn为独立同分布样本，求以下单边假设检验问题的 Bayes 解:Ho : • 0 > 0Q. (1) Xx - ❷,a2)，但 a2 已知，0 服从无信息先验分布77(^)^1; (2) X. -P(0)为Poisson分布，沒的先 验分布77(沒)~r(a, p)为厂分布.
40. 假设X服从二项分布B(5J), 0的先验分布为BE(1,9),若 观察值为%=0, Ho: 0>0. 1 , 求检验问题的后验概率和 交比.
41. 假设X服从正态分布N(e9a2),参数都未知，e，a2服从无信 息先验分布
77(^,a2)oca-2,其“d.观察值为(1.2,1.6,1.3,1.4, 1.4), ^0: 0>1,求检验问题的后验概率和交比.
42. 假设某公共汽车站的候车时间X服从均匀分布/?(0,^),近日 观察到的候车时间分别为10, 3, 2, 5, 14分钟.考虑假设检验问题圯: 0 15*-*//! : > 15 , 假设0的先验分布为Pareto分布PR(5,3)，求
检验问题设的后验概率和交比.
6•的先验分布为<9-77(60.对于假设检验问
0OU0,=仪 取损失函数为 C、，6g.0q 且8(x) =1,
L(e,8(x)) = , Co, 0^01 且 5(x) =0,

0, 0 e 且 3(x) =0 或 且 5(x) = 1.
证明:以上假设检验问题Bayes解的否定域满足/?• = \x-itx (x) > C、/ (C,+Co)(, 其中77!(X)=£ 7T(0|X)d^(提示:参考定理8.3.1和引理
8. 3. 1).
44. 对于假设检验问题(8.3.19),其先验分布如(8.3.20)所示. 证明:
. 题付0:
:
43沒
(1)
爪1(4) •
=[1 +灸10(龙)]"*;
(2)叫1德K,
其中々(幻为在0- |氏!上的最大值点.
(3)对于例8.3.5的检验ii),记Z=^\x-0Q\/a,证明: ^o(x)[1 •exp|yZ2Jj .
45-设 A , ...人 为i. i. d.样本, X,服从Poisson分布P(❷), ❷的 先验分布tt(0)为r 分布r(a,/?), 求0的一个水平为1 - a 的Bayes置

信区间.
46. 设 X:, ..., 为 i. i. d.样本,
(1) 当弘已知, 且tt((t2) 1时, 求(T2的水平为1-a的Bayes区 间估计;
(2) 当/x未知, 7r(cr2)occr"2时, 求cr2的水平为1-a的Bayes 区间估计;
(3) 记5 = tr2, 0 = (/z,5), 设沒的先验分布7T(0) ocg-1 , 求弘的水 平为1 -a 的Bayes区间估计.
47. 车间生产出大批零件, 要检测其次品率.今从中抽出6件, 假
设次品数X服从二项分布5(6,6>), 0的先验分布为B£(l, 10),若观察 值为尤=*=0,求的水平为95%的HPD可信区间.
48. 用仪器观测某星体的质量6>, 其5次i.i.d.观察值为1.2, 1.6, 1.3, L4, 1.4质量单位.假设观察值X 服从正态分布N(❷, a2), 参数 都未知, 且0, <r2服从无信息先验分布7r( ) oc a '2. 求0的水平为
90%的HPD可信区间.

参考文献

1. 陈希孺.数理统计引论.北京:科学出版社, 1981
2. 陈希孺.高等数理统计.合肥:中国科技大学出版社, 1999
3. 陈家鼎, 孙山泽, 李东风.数理统计讲义.北京:高等教育出
版社, 1993
4. 方开泰, 许建伦.统计分布.北京:科学出版社, 1987
5. 范金城, 吴可法.统计推断导引.北京:科学出版社, 2001
6. 李贤平.概率论基础.北京:高等教育出版社, 1997
7. 茆诗松, 王静龙.数理统计.上海:华东师范大学出版社, 1986 8. 茆诗松, 王静龙, 濮晓龙.高等数理统计.北京:高等教育出
版社, 1998
9. 茆诗松.贝叶斯统计.北京:中国统计出版社, 1999
10. 王梓坤.概率论基础及其应用.北京:科学出版社, 1979
H.严士健, 刘秀芳.测度与概率.北京:北京师范大学出版 社 , 1994
12. 张尧庭, 方开泰.多元统计分析引论.北京:科学出版社, 1983 13. 郑忠国.高等统计

学.北京:北京大学出版社，1998
14. Berger J 0. Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis. New
York: Springer - Verlag, 1985(贾乃光译，北京:中国统计出版社,1998) 15. Bickel P J, Doksum K A. Mathematical Statistics. San Francisco: Holden Day, 1977(李泽慧等译，兰州:兰州大学出版社,2004)
16，Cramer H. Mathematical Methods of Statistics. Princeton: Prince ton University Press，1946 (魏宗舒等译，上海:上海科学技术出版社，1966)
17. Lehmann E L. Testing of Statistical Hypothesis. New York : Spring
er - Verlag, 1986
18. Lehmann E L. Elements of Large - Sample Theory. New York: Springer - Verlag, 1999
19. Lehmann E L, Casella G. Theory of Point Estimation. New York: Springer - Verlag, 1998(郑忠国等译，北京:中国统计出版社，2005)
20. Rao C R. Linear Statistical Inference and Its Applications. New

York: Wiley, 1973
21. Shao J. Mathematical Statistics. New York: Springer - Verlag, 1998 22. Zacks, S. Parameteric Statistical Inference. New York: Pergamon
Press, 1981

索引

B

L

M

N

P

Q

S

ISBN 7-04-020054-6 9787040200546
9> 定价35.90元