Определите все значения, которые может принимать размерность пересечения ядра и образа линейного оператора $\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ при условии, что в ядре содержится вектор $v = (1, 0, -1, 2)$

Решение:

1. В задаче требуется найти всевозможные значения $\dim(\ker\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi) = \alpha$. Покажем, что $\alpha \leq 2$. Пусть $\alpha \geq 3$, тогда $\dim\ker\varphi \geq 3$ и $\dim\operatorname{Im}\varphi \geq 3$, но это означает, что $\begin{cases} \dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = \dim\mathbb{R}^4 = 4 \\ \dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi \geq 6 \end{cases}$ $\Rightarrow$ противоречие

2. Покажем примеры для $\alpha = 0, 1, 2$

- $\alpha = 0$: возьмём $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, тогда $Av = 0$ $(A^{(1)} - A^{(3)} + 2A^{(4)} = 0)$

  базис $\ker\varphi$: $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow \operatorname{Im}\varphi \cap \ker\varphi = \{0\}$

  базис $\operatorname{Im}\varphi$: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow \dim(\operatorname{Im}\varphi \cap \ker\varphi) = 1$

- $\alpha = 1$: возьмём $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, тогда $Av = 0$ $(A^{(1)} - A^{(3)} + 2A^{(4)} = 0)$

  базис $\ker\varphi$: $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  базис $\operatorname{Im}\varphi$: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ – один вектор, причём $v_1 \in \ker\varphi \Rightarrow$

  $\Rightarrow \operatorname{Im}\varphi \cap \ker\varphi = \langle v \rangle \Rightarrow \dim(\operatorname{Im}\varphi \cap \ker\varphi) = 1$

- $\alpha = 2$: возьмём $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, тогда $Av = 0$ $(A^{(1)} - A^{(3)} + 2A^{(4)} = 0)$

  УСВ A: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  базис $\ker\varphi$: $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  базис $\operatorname{Im}\varphi$: $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow \dim(\operatorname{Im}\varphi \cap \ker\varphi) = 2$

Ответ: 0, 1, 2

Определите нормальный вид квадратичной формы $Q(x,y,z)=x^2+ay^2+2z^2+6xy-4xz-12yz$ в зависимости от значения параметра a.

Решение:

1. Запишем матрицу квадратичной формы

$$B=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 3 & a & -6\\ -2 & -6 & 2\end{pmatrix}$$

2. Переименуем переменные, чтобы отодвинуть a в угол по-дальше

$y \leftrightarrow z$: $\begin{cases} x=x' \\ y=z' \\ z=y' \end{cases} \Rightarrow B' = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} x & z & y \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ z \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -2 & 2 & -6\\ 3 & -6 & a\end{pmatrix}\end{array}$

3. Метод Якоби: $Q(x)=\delta_1 x_1^2+\frac{\delta_2}{\delta_1}x_2^2+\dots+\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}x_n^2$

$\delta_1=1$

$\delta_2=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 2\end{vmatrix}=-2$

$\delta_3=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ -2 & 2 & -6\\ 3 & -6 & a\end{vmatrix}=2a+36+36-18-4a-36=-2a+18$

4. • Случай 1: $-2a+18>0 \Leftrightarrow a<9$

$\Rightarrow Q(x,y,z)=x^2-2y^2-(-a+9)z^2$ – канон. вид после метода Якоби

$\Rightarrow Q(x,y,z)=x^2-y^2-z^2$ – норм. вид.

• Случай 2: $-2a+18<0 \Leftrightarrow a>9 \Rightarrow Q(x,y,z)=x^2-y^2+z^2$

• Случай 3: $-2a+18=0 \Leftrightarrow a=9 \Rightarrow Q(x,y,z)=x^2-y^2$

Ответ: $Q=x^2-y^2-z^2 \quad a<9$

$Q=x^2-y^2+z^2 \quad a>9$

$Q=x^2-y^2 \quad a=9$

В четырёхмерном евклидовом пространстве E даны векторы v_1, v_2, v_3. Известно, что матрица Грама векторов v_1, v_2 равна $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, вектор v_3 имеет длину 10 и его ортогональная проекция на $\langle v_1, v_2 \rangle$ равна $2v_1 - v_2$. Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы v_1, v_2, v_3

Решение:

1. По условию $|v_3| = 10$, $pr_{\langle v_1, v_2\rangle} v_3 = 2v_1 - v_2$ и $G(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

2. Известно, что $Vol(v_1, v_2, v_3) = |ort_{\langle v_1, v_2 \rangle} v_3| \cdot Vol(v_1, v_2)$

$ort_{\langle v_1, v_2\rangle} v_3 = v_3 - pr_{\langle v_1, v_2\rangle} v_3$

$\underset{100}{\underset{\shortparallel}{|v_3|^2}} = |ort_{\langle v_1, v_2\rangle} v_3 + pr_{\langle v_1, v_2\rangle} v_3|^2 = (ort\, v_3 + pr\, v_3, ort\, v_3 + pr\, v_3) =$

$= |ort\, v_3|^2 + |pr\, v_3|^2 + 2(ort\, v_3, pr\, v_3)$

- $2(ort\, v_3, pr\, v_3) = 0$, т.к. $ort\, v_3 \perp pr\, v_3$
- $|pr\, v_3|^2 = (2v_1 - v_2, 2v_1 - v_2) = 4(v_1, v_1) + (v_2, v_2) - 4(v_1, v_2) = 4 \cdot 3 + 5 - 4 \cdot 2 =$
  $= 9$ из матрицы Грама берём значения

$\Rightarrow |ort\, v_3|^2 = |v_3|^2 - |pr\, v_3|^2 = 100 - 9 = 91 \Rightarrow |ort\, v_3| = \sqrt{91}$

3. Векторы v_1 и v_2 линейно независимы $(\det G \neq 0) \Rightarrow Vol(v_1, v_2) = \sqrt{\det G} =$
$= \sqrt{11}$

4. Таким образом, $Vol(v_1, v_2, v_3) = |ort\, v_3| \cdot Vol(v_1, v_2) = \sqrt{11} \cdot \sqrt{91} = \sqrt{1001}$

Ответ: $\sqrt{1001}$

Приведите пример недиагонализируемого линейного оператора φ в $\mathbb{R}^2$, для которого $\varphi^2+3\varphi$ диагонализируем

Решение:

1. Пусть $A(\varphi, e) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Чтобы оператор был не диагонализируем, наложим условие на его характеристический многочлен (пусть он не раскладывается на линейные множители, то есть φ - недиагон.)

$$\begin{vmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{vmatrix} = (a-t)(d-t) - bc = t^2 - (a+d)t - bc$$

$$D = (a+d)^2 - 4bc < 0 \Rightarrow \begin{cases} (a+d)^2 < |4bc| \\ bc < 0 \end{cases}$$

2. Подберём коэффициенты a, b, c, d так, чтобы A^2+3A была симметр., то есть диагонализируема (в этом случае $\varphi = \varphi^*$ - диаг.)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc+3a & ab+bd+3b \\ ac+cd+3c & bc+d^2+3d \end{pmatrix}$$

Хотим:
$$\begin{cases} ac+cd+3c = ab+bd+3b \quad (1) \\ \left.\begin{array}{l}(a+d)^2 < |4bc| \\ bc<0\end{array}\right] (2) \\ b \neq c \text{ (иначе } A\text{-симметр. и } \varphi\text{-диаг)} \end{cases}$$

(1) $c(a+d+3) = b(a+d+3)$

т.к. $c \neq b$ возьмём $a = -d-3$, например, $a=1$, $d=-4$

(2) возьмём такие b и c, чтобы $(a+d)^2 = 9 < |4bc|$ и $bc<0$, например, $b=-5$, $c=3$

3. $A(\varphi, e) = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ - не диаг., т.к. $\chi_\varphi(t) = t^2+3t+15$ - не раскл. на лин. мн.

$A^2+3A = \begin{pmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix}$ - уже диагон. вид.

Про линейный оператор $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ известно, что $\varphi((0,1,-1)) = (0,-1,1)$, $\varphi((-1,2,0)) = (1,0,2)$ и φ не самосопряжён. Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид и выпишите эту матрицу

Решение

1. $\varphi \neq \varphi^*$ и φ - ортогон. $\Rightarrow$ канонический вид φ имеет вид

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \Pi(\alpha) & \\ \hline & -1 \end{array}\right)$$ в некотором ОНБ $\mathbb{e} = (e_1, e_2, e_3)$

т.к. $\varphi((0,1,-1)) = -1 \cdot (0,1,-1) = (0,-1,1)$

2. Положим $e_3' = (0,1,-1)$ - собственный вектор φ. Отнормируем его

$$e_3 = \frac{e_3'}{|e_3'|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ $\varphi(e_3) = -e_3$

3. Найдём векторы e_1 и e_2 в подпространстве $\langle e_3 \rangle^\perp$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{ФСР}}{\rightsquigarrow} e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{\text{норм.}}{\rightsquigarrow} e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

уже ортогон. друг другу

Итог: $\mathbb{e} = (e_1, e_2, e_3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Существует ли матрица $A \in Mat_{2\times3}(\mathbb{R})$ ранга 2 со следующими свойствами
1) одно из сингулярных значений матрицы A равно $\sqrt{20}$
2) ближайшая к A по норме Фробениуса матрица ранга 1 есть $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

Если существует, то предъявите такую матрицу.

Решение:

1. По теореме о низкоранговом приближении для матрицы $A = u_1 \sigma_1 v_1^T + u_2 \sigma_2 v_2^T$ ближай к A по норме Фробениуса матрицей ранга 1 будет матрица $B = u_1 \sigma_1 v_1^T$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ -1 \ 1) = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} (1 \ -1 \ 1) \cdot \sqrt{3} =$

$$= \underset{\uparrow \atop u_1}{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}} \cdot \underset{\uparrow \atop \sigma_1}{\sqrt{30}} \cdot \underset{\uparrow \atop v_1^T}{(1/\sqrt{3} \ -1/\sqrt{3} \ 1/\sqrt{3})}$$

3. $\sqrt{30} > \sqrt{20} \Rightarrow$ выполнено, что $\sigma_1 = \sqrt{30} \to max \Rightarrow$ можно взять следующ. матрицу A:

$$\underbrace{u_1 \sigma_1 v_1^T}_{B} + u_2 \underset{\sqrt{20}}{\underset{\parallel}{\sigma_2}} v_2^T, \text{ где } \begin{matrix} (u_1, u_2) = 0, \ |u_2| = 1 \\ (v_1, v_2) = 0, \ |v_2| = 1 \end{matrix}$$

$u_2 = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow A = B + \begin{pmatrix} -3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \sqrt{20} \cdot (0 \ 1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2}) =$

$$= B + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ 1) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

B - ближ. по норм. Фроб. к A по построению

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $-2y^2+3z^2-4xz+4y+a=0$ определяет однополостный гиперболоид в $\mathbb{R}^3$. Для каждого найденного a укажите прямоугольную декартову систему координат в $\mathbb{R}^3$ (выражение старых координат через новые), в которой данное уравнение принимает канонический вид.

Решение:

1. $-2y^2+3z^2-4xz+4y+a=0$

$-2(y^2-2y+1)+3z^2-4xz+a+2=0$

$$\begin{cases} y'=y-1 \\ x'=x \\ z'=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=y'+1 \\ x=x' \\ z=z' \end{cases} \Rightarrow -2y'^2+\underbrace{3z'^2-4x'z'}_{Q(x',z')}+a+2=0$$

2. Приведём $Q(x',z')$ к главным осям

$$B=\begin{array}{c|cc} & x' & z' \\ \hline x' & 0 & -2 \\ z' & -2 & 3 \end{array} \Rightarrow \det(B-tI)=\begin{vmatrix} -t & -2 \\ -2 & 3-t \end{vmatrix}=t(t-3)-2=t^2-3t-4=0$$

$t=-1,\ t=4$

$\lambda_1=-1$: $B+I=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (1\ \ -2) \overset{\text{ФСР}}{\rightsquigarrow} v_1'=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{\text{норм.}}{\rightsquigarrow} u_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2=4$: $B-4I=\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-2\ \ -1) \overset{\text{ФСР}}{\rightsquigarrow} v_2'=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow u_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ замена $\begin{cases} x'=\frac{2}{\sqrt{3}}x''-\frac{1}{\sqrt{3}}z'' \\ z'=\frac{1}{\sqrt{3}}x''+\frac{2}{\sqrt{3}}z'' \end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} x' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ z'' \end{pmatrix}$

Но замена неполная $\Rightarrow$ дополним её так, чтобы в ней был y' и она осталась ортогональной !!!

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \qquad (y'=y'')$$

3. Новый вид: $-(x'')^2-2(y'')^2+4(z'')^2+a+2=0 \Leftrightarrow (x'')^2+2(y'')^2-4(z'')=a+2$

- Если $a=-2$, то это конус
- Если $a<-2$, то это двуполостный гиперболоид
- Если $a>-2$, то это однополостный гиперболоид вида

$$\frac{x''^2}{(\sqrt{a+2})^2}+\frac{y''^2}{\left(\frac{\sqrt{a+2}}{\sqrt{2}}\right)^2}-\frac{z''^2}{\left(\frac{\sqrt{a+2}}{2}\right)^2}=1$$

$$\begin{cases} x=x' \\ y=y'+1 \\ z=z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2x''}{\sqrt{3}}-\frac{z''}{\sqrt{3}} \\ y=y''+1 \\ z=\frac{x''}{\sqrt{3}}+\frac{2z''}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$