Панфилов Борис 77 Вариант

№2

$$(2-\sqrt{3}i)z^3 = -\sqrt{2} - 3\sqrt{6}i$$

$$z^3 = \frac{-\sqrt{2}-3\sqrt{6}i}{2-\sqrt{3}i} = \frac{(-\sqrt{2}-3\sqrt{6}i)(2+\sqrt{3}i)}{(2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)} =$$

$$= \frac{-2\sqrt{2}-\sqrt{6}i-6\sqrt{6}i+9\sqrt{2}}{4+3} = \frac{7\sqrt{2}-7\sqrt{6}i}{7} = \sqrt{2}-\sqrt{6}i =$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$z = \sqrt[3]{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi k}{3}\right), \ k\in\{0,1,2\}$$

при $k=0$ получаем $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{9}+i\sin\frac{5\pi}{9}\right)$

при $k=1$ получаем $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{9}+i\sin\frac{11\pi}{9}\right)$

при $k=2$ получаем $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{9}+i\sin\frac{17\pi}{9}\right)$

Теперь сравним мнимые части корней

$$\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{9} \vee \sqrt{2}\sin\frac{11\pi}{9} \vee \sqrt{2}\sin\frac{17\pi}{9}$$

$$\sin\frac{5\pi}{9} \vee \sin\frac{11\pi}{9} \vee \sin\frac{17\pi}{9}$$

Нетрудно заметить, что $\sin\frac{11\pi}{9}<0$ и $\sin\frac{17\pi}{9}<0$, т.к. их аргументы принадлежат $(\pi; 2\pi)$

В свою очередь $\sin\frac{5\pi}{9}>0$, т.к. $0<\frac{5\pi}{9}<\pi$

$\Rightarrow$ максимальная мнимая часть у первого корня.

Ответ: решения:

$\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}\right)$, $\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{9} + i\sin\frac{11\pi}{9}\right)$,

$\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{9} + i\sin\frac{17\pi}{9}\right.$

Корень с макс. мнимой частью:

$\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}\right)$

№3

Чтобы выяснить принадлежит ли одна функция лин оболочке других, проверим для любого ли значение проверяемой функции есть лин комбинация значений при таком же аргументе функций из лин оболочки.

Для этого подставим некоторые аргументы:

	$\sin^2 x$	$\sin x$	$2\cos x$	$\cos 2x$
0	0	0	2	1
π	0	0	-2	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	1	0	-1
	v_1	v_2	v_3	v_4

Получили 4 вектора. Проверим существует ли $\lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_3 + \lambda_3 v_4 = v_1$

Запишем это условие в расширенную матрицу.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\overline{III} \to \overline{III} \cdot 4]{\overline{I} \leftrightarrow \overline{IV}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2\sqrt{3} & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\overline{III} \to \overline{III} - 2 \cdot \overline{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{\overline{II} \to \overline{II} + \overline{IV}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\overline{II} \to \frac{1}{2} \cdot \overline{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\overline{IV} \to \overline{IV} - \overline{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{\overline{IV} \to \frac{1}{2} \cdot \overline{IV}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\overline{III} \to \overline{III} - 4 \cdot \overline{II} - 2\sqrt{3} \cdot \overline{IV}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Получили несовместную систему $\Rightarrow v_1 \notin \langle v_2, v_3, v_4 \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow$ и функция $\sin^2 x \notin \langle \sin x, 2\cos x, \cos 2x \rangle$

Ответ: нет, не принадлежит.

№4

По определению, если полученные векторы линейно независимы, то

$$\alpha_1(aV_1+V_2+2V_4)+\alpha_2(3V_1-3V_2+2V_3)+\alpha_3(2V_1-V_2+V_3+V_4)=0$$

$$\Downarrow$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,0)$$

Преобразуем полученное уравнение.

$$\alpha_1 aV_1+\alpha_1V_2+\alpha_1 2\cdot V_4+\alpha_2\cdot 3\cdot V_1-\alpha_2 3V_2+\alpha_2 2V_3+\alpha_3 2V_1-\alpha_3V_2+\alpha_3V_3+\alpha_3V_4=0$$

$$V_1(\alpha_1 a+3\alpha_2+2\alpha_3)+V_2(\alpha_1-3\alpha_2-\alpha_3)+V_3(2\alpha_2+\alpha_3)+V_4(2\alpha_1+\alpha_3)=0$$

Из условия лин. независимости V_1, V_2, V_3, V_4 получаем систему:

$$\begin{cases} a\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3=0 \\ \alpha_1-3\alpha_2-\alpha_3=0 \\ 2\alpha_2+\alpha_3=0 \\ 2\alpha_1+\alpha_3=0 \end{cases}$$

Запишем в расширенную матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 \\ a & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[IV \to IV - I\cdot 2]{II \to II - I\cdot a} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 3-3a & 2-a & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{IV \to IV - III\cdot 3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 3-3a & 2-a & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[II \leftrightarrow III]{III \to \frac{1}{2}\cdot III} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3-3a & 2-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{III \to III - II\cdot(3-3a)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+a}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Рассмотрим 2 случая.

1 случай: $a = -1$

Получаем систему со свободными неизвестными.
В таком случае будет бесконечно много решений $\Rightarrow$
вектор (x_1, x_2, x_3) будет принимать бесконечно много значений.
А нам нужно чтобы принимал одно
$\Rightarrow$ $a = -1$ не подходит

2 случай

$a \neq -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+a}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{III \to III \cdot \frac{2}{1+a}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[I \to I + III]{II \to II - \frac{1}{2} \cdot III} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{I \to I + 3II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Получили единственное решение $(0, 0, 0)$ $\Rightarrow$ $a \neq -1$ подходит

Ответ: $a \neq -1$

Пусть U - мн-во всех матриц X №5

Чтобы доказать, что мн-во является под-вом необходимо показать 3 вещи

1) $0 \in U$

2) $x, g \in U \Rightarrow x+g \in U$

3) $x \in U, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha x \in U$

Докажем эти св-ва

1) $tr(0 \cdot y) = tr(0) = 0 \Rightarrow 0 \in U$

2) $x, g \in U$

$$tr((x+g)^T y) = tr((x^T+g^T)y) = tr(x^T y + g^T y) = tr(x^T y) + tr(g^T y) =$$

$$= 0 + 0 = 0 \Rightarrow x+g \in U$$

3) $x \in U \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$$tr((\alpha x)^T y) = tr(\alpha x^T y) = \alpha\, tr(x^T y) = \alpha \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha x \in U$$

$\Rightarrow U$ - под-во $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$

Теперь найдем базис этого под-ва.

Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$

Тогда по условию

$$tr\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$tr\begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_3 & 5x_1 + 2x_3 \\ 4x_2 + 3x_4 & 5x_2 + 2x_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$4x_1 + 3x_3 + 5x_2 + 2x_4 = 0$$

$$x_1 = \frac{-3x_3 - 5x_2 - 2x_4}{4}$$

Получаем мн-во решений системы:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{-3x_3-5x_2-2x_4}{4} \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ФСР}} u_1=\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2=\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_3=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

А значит мы можем записать следующий базис и

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В базисе 3 вектора $\Rightarrow$ размерность равна 3.

Ответ: базис – A, B, C

Размерность равна 3.

№6

Найдем общее решение системы, для этого запишем ее в расш. матрицу.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Получаем решение $\begin{pmatrix} x_2 - x_4 \\ x_2 \\ 2x_4 - x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$

Нетрудно заметить, что размерность пространства равна 3, т.к. мы можем построить ФСР используя вектора стандартного базиса $\mathbb{R}^3$.

подставляя вместо (x_2, x_4, x_5)

Пусть у нас есть 3 вектора

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Они все являются частными решениями системы.

Покажем, что они лин независимы. Для этого используем известный алгоритм. Запишем векторы в столбцы матрицы $A \in Mat_{5\times 3}(\mathbb{R})$ и приведем ее к ступ виду при помощи эл преобр строк

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}]{\substack{\overline{\mathrm{III}} \to \overline{\mathrm{III}} - \overline{\mathrm{II}} \cdot 2 \\ \overline{\mathrm{IV}} \to \overline{\mathrm{IV}} - \overline{\mathrm{II}}}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\overline{\mathrm{III}} \to \overline{\mathrm{III}} + 2 \cdot \overline{\mathrm{II}} \\ \overline{\mathrm{IV}} \to \overline{\mathrm{IV}} + \overline{\mathrm{II}}}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\overline{\mathrm{III}} \to \overline{\mathrm{III}} \cdot (-1) \\ \overline{\mathrm{V}} \to \overline{\mathrm{V}} - \overline{\mathrm{III}}}}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получили 3 ступеньки $\Rightarrow$ векторы лин независимы

Мы получили 3 лин независимых вектора. При этом размерность пространства образованного их лин оболочкой равна 3 $\Rightarrow$ они являются базисом изначального пространства.

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ – базис мн-ва решений (т.е. ФСР) содержащий v_1

Ответ: да, существует.

v_1, v_2, v_3 – пример.

N 7.

Найдем rk B. Для этого приведем B к ступ виду.
Можем использовать эл преобр строк и столбцов, т.к. они не меняют ранг.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{II \to II - I \\ III \to III - I \\ IV \to IV - I \\ V \to V - I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получили одну ненулевую строку в ступ виде $\Rightarrow rkB = 1$

Применим известные нам оценки

$$rkA - rk(-B) \leq rk(A - B) \leq rkA + rk(-B)$$

С лекций нам известно, что $rk(\lambda B) = rkB \Rightarrow$ можем преобразовать

$$rkA - rkB \leq rk(A - B) \leq rkA + rkB$$

$$2 \leq rk(A - B) \leq 4$$

Приведем примеры для всех возможных значений $rk(A-B)$

Пример для $rk(A-B) = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$rk(A-B) = rk\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = rk \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Пример для $rk(A-B) = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rk(A-B) = rk\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= rk \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

Пример для $rk(A-B)=4$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rk(A-B) = rk\left(\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= rk\begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 4$$

Ответ: 2, 3, 4.

№8

$Q \in Mat_{13\times13}$

$S \in Mat_{31\times31}$

$U \in Mat_{18\times18}$

$$\begin{pmatrix} P & Q & R \\ S & 0 & 0 \\ T & 0 & U \end{pmatrix}$$

Проделаем некоторые преобразования:
Протолкнем вторую блочную строку наверх. Для этого нам потребуется 31×13 смен строк. Это число нечетное, поэтому определитель умножится на $(-1)^{13*31}$, то есть на -1

$$\det\begin{pmatrix} P & Q & R \\ S & 0 & 0 \\ T & 0 & U \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ P & Q & R \\ T & 0 & U \end{pmatrix}$$

Теперь протолкнем второй столбец вправо. Для этого нам понадобится $13 \cdot 18$ смен столбцов. Это число четное $\Rightarrow (-1)^{13\cdot18} = 1 \Rightarrow$ определитель не поменяет знак

$$-\det\begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ P & Q & R \\ T & 0 & U \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ P & R & Q \\ T & U & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь протолкнем вторую строку вниз. Для этого нам потребуется $13 \cdot 18$ смен строк. Это число четно $\Rightarrow (-1)^{13\cdot18} = 1 \Rightarrow$ определитель не поменяет знак

$$\cancel{-\det\begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ T & U & 0 \\ P & R & Q \end{pmatrix}}$$

$$-\det\begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ P & R & Q \\ T & U & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ T & U & 0 \\ P & R & Q \end{pmatrix}$$

Теперь заметим, что у нас определитель с углом нулей,

$$\Rightarrow -\det\begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ T & U & 0 \\ P & R & Q \end{pmatrix} = -1\cdot\det(S)\cdot\det\begin{pmatrix} U & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}$$

Аналогично

$$\det\begin{pmatrix} U & 0 \\ R & Q \end{pmatrix} = \det(U)\cdot\det(Q)$$

Собирая все вместе получаем

$$\det\begin{pmatrix} P & Q & R \\ S & 0 & 0 \\ T & 0 & U \end{pmatrix} = \dots = -1\cdot\det S\cdot\det U\cdot\det Q = -954$$

Ответ: -954.

№1

Пусть $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$

Тогда из первого св-ва следует:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_4 + x_5 + x_6 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ x_4 + 2x_5 + 5x_6 \end{pmatrix} = 0$$

Запишем полученные условия в расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{I} \to \mathrm{I} - \mathrm{II}\cdot 2]{\mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{III}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & -3 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{\mathrm{III} \to \mathrm{III} - 2\cdot\mathrm{IV} \\ \mathrm{III} \leftrightarrow \mathrm{IV}}]{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{IV} \to -\frac{1}{3}\cdot\mathrm{IV}]{\mathrm{II} \to -\frac{1}{3}\cdot\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\mathrm{III} \to \mathrm{III} - 2\cdot\mathrm{IV}]{\mathrm{I} \to \mathrm{I} - 2\cdot\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Получаем общее решение $\begin{pmatrix} x_3 \\ -3x_3 \\ x_3 \\ x_6 \\ -3x_6 \\ x_6 \end{pmatrix}$

Можем записать матрицу A следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_3 & -3x_3 & x_3 \\ x_6 & -3x_6 & x_6 \end{pmatrix} = A$$

$$A = \begin{pmatrix} x_3 & -3x_3 & x_3 \\ x_6 & -3x_6 & x_6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} \to \text{II} - \text{I} \cdot \frac{x_6}{x_3}} \begin{pmatrix} x_3 & -3x_3 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

При умножении матрицы A на любой вектор y мы будем получать вектор вида $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, т.к. при умножении нулевой строки на какой угодно столбец мы получим 0.

$\Rightarrow$ Мы получили противоречие со вторым условием, ведь там получили вектор $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, а он не принадлежит мн-ву векторов $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow$ система $Ay = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ несовместна

Ответ: не существует.