Задача 1.1. Для отображения $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, задаваемого матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

найдите базисы, в которых оно имело бы вид

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

где E — единичная подматрица, а 0 — нулевые блоки того или иного размера (не обязательно квадратные), а также выпишите этот вид.

Задача 1.2. Для отображения $\varphi : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_4$, задаваемого формулой

$$\varphi(g)(x) = xg(x) - g(x^2)$$

найдите базисы, в которых оно имело бы вид

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

где E — единичная подматрица, а 0 — нулевые блоки того или иного размера (не обязательно квадратные), а также выпишите этот вид.

Задача 1.3. Для отображения φ из пространства симметричных матриц 2×2 в себя, задаваемого формулой

$$\varphi(g)(X) = AX + XA^T,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

найдите базисы, в которых оно имело бы вид

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

где E — единичная подматрица, а 0 — нулевые блоки того или иного размера (не обязательно квадратные), а также выпишите этот вид.

Напоминание про двойственные базисы. Пусть в пространстве U задан базис $e_1, \ldots, e_n$. Тогда в пространстве U^*, состоящем из линейных функций на U, можно рассмотреть набор *координатных функций* $\xi_1, \ldots, \xi_n$, то есть таких функций, что

Если $(x_1 \ldots, x_n)^T$ — координаты вектора v, то есть $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, то

$$\xi_i(v) = x_i$$

То есть ξ_i — это такая функция, которая вектор v переводит в его i-ю координату в базисе $e_1, \ldots, e_n$. Отсюда сразу следует, что

$$\xi_i(e_j) = \delta_{ij}$$

(вспомните, какие координаты в базисе $e_1, \ldots, e_n$ имеет вектор e_j).

Базисы $e_1, \ldots, e_n$ и $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называются **двойственными друг к другу**, то есть $e_1, \ldots, e_n$ — двойственный к $\xi_1, \ldots, \xi_n$, а $\xi_1, \ldots, \xi_n$ двойственный $e_1, \ldots, e_n$ (да, двойственность работает в обе стороны).

Приятное свойство двойственных базисов состоит вот в чём. Пусть f — некоторая линейная функция на U на v и пусть $(x_1, \ldots, x_n)^T$. Тогда

$$f(v) = f(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + \ldots x_n f(e_n) =$$
$$= f(e_1) x_1 + \ldots f(e_n) x_n = f(e_1)\xi_1(v) + \ldots + f(e_n)\xi_n(v) =$$
$$= \Big(f(e_1)\xi_1 + \ldots f(e_n)\xi_n \Big)(v)$$

Мы видим, что

$$f = f(e_1) \cdot \xi_1 + \ldots + f(e_n) \cdot \xi_n,$$

то есть $(f(e_1), \ldots f(e_n))$ — координаты функции f в базисе $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Пример с семинара. Пусть $U = \mathbb{R}[x]_n$ — пространство многочленов степени не выше n. Зафиксируем в нём базис $1, x-3, (x-3)^2, \ldots, (x-3)^n$. Поймём, что будем двойственным к нему базисом $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$. Как мы обсуждали, двойственный базис состоит из координатных функций. То есть функция ξ_i переводит произвольный многочлен $g(x)$ в i-ю координату этого многочлена в базисе $1, x-3, (x-3)^2, \ldots, (x-3)^n$. Что же это за i-я координата такая? Ну, это коэффициент c_i при x^i в разложении

$$g(x) = c_0 \cdot 1 + c_1(x-3) + c_2(x-3)^2 + \ldots c_n(x-3)^n$$

Чтобы узнать, чему равны коэффициенты, вспомним разложение Тейлора:

$$g(x) = f(3) \cdot 1 + \frac{g'(3)}{1!}(x-3) + \frac{g''(3)}{2!}(x-3)^2 + \ldots \frac{g^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n$$

Вот и видим, что

$$c_i = \frac{g^{(i)}(3)}{i!}$$

Итого, ξ_i — это функция, которая переводит многочлен $g(x)$ в $\frac{g^{(i)}(3)}{i!}$. Например, если $g(x) = x^2 - x + 2$, то $\xi_1(g) = \frac{g'(3)}{1!} = 5$.

Теперь, пусть для примера $n = 2$. Если я захочу найти координаты функции ψ, которая переводит многочлен g в $g'(1)$, в базисе ξ_0, ξ_1, ξ_2, то они равны

$$(\psi(1), \psi(x-3), \psi\left((x-3)^2\right) = (1'|_{x=1}, (x-3)'|_{x=1}, ((x-3)^2)'|_{x=1}) =$$
$$= (0, 1, -4)$$

Это означает, что $\psi = 0 \cdot \xi_0 + 1 \cdot \xi_1 - 4\xi_2$, то есть, если подставить произвольный многочлен g:

$$g'(1) = 0 \cdot g(3) + 1 \cdot \frac{g'(3)}{1!} - 4 \cdot \frac{f''(3)}{2!}$$

для любого многочлена g.

Пример не с семинара. Пусть снова $U = \mathbb{R}[x]_n$ — пространство многочленов степени не выше n, и пусть U^* — двойственное пространство (состоящее из линейных функций на U). Зафиксируем в U^* базис $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ следующего вида:

$$\xi_i(g) = g(i)$$

для любого многочлена g. Давайте найдём базис $g_1, \ldots, g_n$ в U, двойственный к базису $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$.

По определению двойственные базисы — это такие базисы, что

$$\xi_i(g_j) = \delta_{ij}$$

Таким образом, e_j — это такой многочлен, для которого

$$\xi_0(g_j)=0,\ \xi_1(g_j)=0,\ \dots,\ \xi_j(g_j)=1,\ \dots,\ \xi_n(g_j)=0$$

Иными словами,

$$g_j(0)=0,\ g_j(1)=0,\ \dots,\ g_j(j)=1,\ \dots,\ g_j(n)=0$$

С такими многочленами мы уже сталкивались, когда изучали интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$g_j(x)=\frac{(x-0)(x-1)\dots\widehat{(x-j)}\dots(x-n)}{(j-0)(j-1)\dots\widehat{(j-j)}\dots(j-n)}$$

где крышка означает пропуск слагаемого.

Проиллюстрируем на этом примере ещё и то, что ξ_i являются *координатными функциями* для двойственного базиса $g_0,\dots,g_n$. В самом деле, нетрудно видеть, что для любого многочлена $h(x)$ степени не выше n имеет место равенство

$$h(x)=\sum_{j=0}^{n}h(j)\frac{(x-0)(x-1)\dots\widehat{(x-j)}\dots(x-n)}{(j-0)(j-1)\dots\widehat{(j-j)}\dots(j-n)}=$$

$$=\sum_{j=0}^{n}h(j)g_j(x)$$

То есть коэффициентом при g_j, он же j-я координата в базисе $g_0,\dots,g_n$ многочлена $h(x)$ является $h(j)=\xi_j(h)$.

Задача 1.4. Найдите базис в пространстве линейных функций на $\mathbb{R}^3$, двойственный к базису

$$v_1=\langle\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\rangle$$

Указание: как вы, надеюсь, прочитали выше, двойственный базис будет состоять из трёх функций f_1,f_2,f_3, для которых $f_i(v_j)=\delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, то есть

$$\delta_{ij}=\begin{cases}(1,\ \text{если } i=j,\\ 0,\ \text{иначе}\end{cases}$$

Я предлагаю вам убедиться, что эти 9 равенств можно записать в виде одного матричного равенства:

$$\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{pmatrix}=E$$

Здесь в первой матрице f_i — это строки, а во второй v_j — это столбцы. В самом деле, элементы произведения в левой части это произведения строк первого сомножителя на столбцы второго.

Что происходит с линейной функцией при замене координат. Напомним, что линейная функция задаётся строкой

$$f=(f_1,\dots,f_n),$$

смысл которой такой. Для вектора $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ значение функции на этом векторе равно $f \cdot x$ (произведение строки на столбец, то есть число). При этом f_i равно значению функции на базисном векторе e_i (имеется в виду тот самый базис, в котором x имеет координаты $(x_1, \dots, x_n)$, конечно же). А что будет со строкой $(f_1, \dots, f_n)$, если мы сделаем замену координат с матрицей замены C? Ответ очень прост. Вспомним, что f — это линейное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. В $\mathbb{R}$ мы замены не производим, только в $\mathbb{R}^n$. Тогда по известному для линейных отображений правилу

$$f' = fC$$

Задачи 1.5-7. Пусть v_1, v_2, v_3 как в предыдущей задаче, а $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — соответствующий двойственный базис. В этой задаче вам нужно будет найти координаты в базисе $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ пространства V функции $g(x) = 3x_1 + x_2 - x_3$ тремя способами:

(a) Пользуясь найденным в предыдущей задаче двойственным базисом.
Подсказка: как представить строку $(3, 1, -1)$ в виде линейной комбинации трёх данных строк?

(b) С помощью замен координат.
Подсказка: вспомните, как поменяются координаты функции g при замене исходного базиса пространства $\mathbb{R}^3$ на базис v_1, v_2, v_3.

(c) Совсем просто, не пользуясь ни найденным двойственным базисом, ни матрицей перехода.
Подсказка: на семинаре мы обсуждали, какие координаты имеет функция в двойственном базисе, и выше это тоже написано.

Задача 1.8. Докажите, что функции $\varphi_i(f) = f^{(i)}(2)$, $i = 0, \dots, n$ составляют базис пространства, двойственного к пространству $\mathbb{R}[x]_n$.

Указание. Напишите матрицы этих функций как отображений из $\mathbb{R}^{n+1}$ в $\mathbb{R}$. Теперь проверьте, что эти строки из чисел линейно независимы.

Задача 2.1. Пусть линейные функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ составляют базис пространства V^* (двойственного к пространству V). Пусть также $u_1, \dots, u_n$ — двойственный базис пространства V. Докажите, что координаты вектора v в базисе $u_1, \dots, u_n$ равны $(\varphi_1(v), \dots, \varphi_n(v))$.

Задача 2.2. Вы уже знаете, что функции $\varphi_i(f) = f^{(i)}(2)$, $i = 0, \dots, n$ составляют базис пространства, двойственного к пространству $\mathbb{R}[x]_n$. Найдите базис пространства $\mathbb{R}[x]_n$, двойственный к нему. Найдите координаты многочлена x^n в этом базисе.

Задача 2.3. Пусть f — ненулевая линейная функция на пространстве V (не обязательно конечномерном), $U = \ker f$. Докажите, что

(a) U — максимальное подпространство, то есть оно не содержится ни в каком другом собственном (отличном от всего пространства) подпространстве (докажите, что если $W \supseteq U$ и $W \neq U$, то W — это всё V);

(b) $V = \ker f \oplus \langle a \rangle$ для любого $a \notin \ker f$.

Задача 2.4. Выпишите какой-нибудь базис пространства $\mathbb{R}^3$, для которого линейная функция $f(x) = 2x_1 - x_2 + x_3$ была бы первой координатной функцией (то есть в новых координатах имело бы место равенство $f(x') = x'_1$).

Задача 2.5. Придумайте какую-нибудь линейную функцию на $\mathbb{R}^3$, ядром которой было подпространство

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Задача 2.6. Придумайте какой-нибудь базис в пространстве матриц $n \times n$ с вещественными коэффициентами, для которого функция следа была бы первой координатной функцией.

Задача 2.7. Докажите, что $\mathrm{rk}(A^T A) = \mathrm{rk}(A)$, если A — вещественная матрица.

Указание. Предлагаю вывести это из двух неравенство: $\mathrm{rk}(A^T A) \leqslant \mathrm{rk}(A)$ и $\mathrm{rk}(A^T A) \leqslant \mathrm{rk}(A)$. Одно из них практически очевидно. Для доказательства другого полезно воспользоваться интерпретацией: если B — матрица $m \times n$, то $\mathrm{rk}B = n - \dim\{x \mid Bx = 0\}$. Кроме того, вам пригодится тот (тривиальный) факт, что для любого вещественного вектора y имеет место $y^T y = y_1^2 + y_2^2 + \ldots$.

Вы можете, конечно, попробовать решить эту задачу и исключительно матричными методами, не привлекая интерпретаций из мира отображений, но это принесёт вам много боли, и опыт показывает, что мало у кого выходит такими средствами получить корректное доказательство.

Задача 2.8. Докажите, что равенство $\mathrm{rk}(A^T A) = \mathrm{rk}(A)$ может не выполняться, если, например, A — комплексная матрица (приведите пример!).

Задача 2.9. Докажите, что система $A^T AX = A^T B$ всегда разрешима (если все матрицы, о которых идёт речь, вещественные).

Указание. Проверьте, что утверждение из условия равносильно следующему: "если нечто лежит в образе A^T, то оно лежит и в образе $A^T A$" и воспользуйтесь задачей 2.7.

Задача 2.10 (двойственное отображение; бонусная). Пусть $\varphi : U \longrightarrow V$ — линейное отображение. Вместе с ним возникает *двойственное* отображение $\varphi^* : V^* \longrightarrow U^*$, действующее по правилу $(\varphi^*(f))(u) = \varphi(f(u))$. Докажите, что если в некоторых базисах U и V отображение φ имеет матрицу A, то в двойственных к ним базисах φ^* имеет матрицу A^T.

Не указание, но пример. Рассмотрим отображение $\varphi = \frac{d}{dx} : \mathbb{R}[x]_3 \longrightarrow \mathbb{R}[x]_2$. В базисах $1, x, x^2, x^3$ пространства $\mathbb{R}[x]_3$ и $1, x, x^2$ пространства $\mathbb{R}[x]_2$ это отображение имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Теперь возьмём какую-нибудь функцию из $\mathbb{R}[x]_2^*$. Например, $f(h) = h(1)$ (здесь f — это та самая функция, а h — многочлен, и да, я понимаю, что это не лучший выбор обозначений). Тогда что есть $\varphi^*(f)$? Это функция, которая действует на многочленах степени не выше 3. Посчитаем, например, её значение на многочлене x^3. По определению

$$(\varphi^*(f))(x^3) = f(\varphi(x^3)) = f(3x^2) = 3x^2|_{x=1} = 3$$

Но нам придётся работать с двойственными базисами. Мы уже обсуждали на семинаре, что двойственный базис к $1, x, x^2, x^3$ — это $h \mapsto h(0)$, $h \mapsto \frac{h'(0)}{1!}$, $h \mapsto \frac{h''(0)}{2!}$ и $h \mapsto \frac{h'''(0)}{3!}$ (двойственный базис состоит из функций, которые осуществляют вот эти преобразования!). Точно так же, очевидно, двойственный базис к базису $1, x, x^2$ пространства W — это $h \mapsto h(0)$, $h \mapsto \frac{h'(0)}{1!}$ и $h \mapsto \frac{h''(0)}{2!}$. Заметим, что $\varphi^*[h \mapsto h(0)] = [h \mapsto h'(0)]$, $\varphi^*[h \mapsto \frac{h'(0)}{1!}] = [h \mapsto \frac{h''(0)}{1!}]$, $\varphi^*[h \mapsto \frac{h''(0)}{2!}] = [h \mapsto \frac{h'''(0)}{2!}]$. Что мы видим? Первая базисная функция пространства W^* перешла во вторую базисную функцию пространства U^*. Вторая базисная функция пространства W^* перешла в третью базисную функцию пространства U^*, умноженную на 2 (в знаменателе 1!, а не 2!). Таким образом φ^* имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

которая действительно является транспонированной к матрице φ.