1. Сумма двух матриц, произведение матрицы на скаляр.

Пусть $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$

Сумма:

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Умножение на скаляр: $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\lambda \cdot A := (\lambda a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\forall A,\ B,\ C \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:
(1) $A + B = B + A$ (коммутативность)
(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность)
(3) $A + \mathbb{O} = \mathbb{O} + A = A$, где

$$\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$$ — нулевая матрица

(4) $A + (-A) = (-A) + A = \mathbb{O}$, где $-A := (-a_{ij})$ — противоположная к A матрица
(5) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$
(6) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$
(7) $(\lambda\mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$
(8) $1 \cdot A = A$

Упражнение. Доказать эти свойства.
Замечание. Свойства (1)–(8) $\Rightarrow$ $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ — векторное пространство.

2. Транспонированная матрица.

$i -$ ая сторка становится $j -$ ым стобцом и наборот.
Размер матрицы меняется с mxn на nxm
еще что нибудь придумаешь, так ведь?

3.Поизведение двух матриц.

A) проверить согласованность размеров матриц(mxn для A $и$ nxp для B)
B) $A * B \coloneqq C$ размера mxp; $c_{ij} = A_i * B^j$
C) привести любой пример, ты ведь сможешь, да?

4. Диагональная матрица. Умножение на диагональную матрицу слева и справа.

Квадратная матрица называется диагональной, если все элементы вне ее главной диагонали равны нулю(т.е. $a_{ij} = 0\ \forall\ i\ \neq j$).

Пусть $\mathrm{A} = \mathrm{diag}(\mathrm{a}_1 \dots \mathrm{a}_\mathrm{n}) \in M_n$, тогда :
а) если $\mathrm{B} \in Mat_{nxp}$, то $\mathrm{A} * \mathrm{B}$
$=$ каждый $i -$ ый элемент диагональной матрицы умножить на каждую $i -$ ую строку
б) если $\mathrm{B} \in Mat_{mxn}$, то $B * A$
$=$ кажый $i -$ ый эдемент диагональной матрцы умножить на каждый $i -$ ый столбец

5. Единичная матрица и ее свойства.

Матрица Е =$E_n = diag(1,1,\dots,1) \in$
M_nназывается единичной матрицей порядка n

Свойства : 1) $E * A = A$
2) $A * E = A$

Для любых, согласованных в размере матриц

6. След квадратной матрицы и его поведение при сложении матриц , умножения матрицы на скаляр и транспонировании.

Следом квадратной матрицы $A \in$
M_n называется сумма всех элементов на ее главной диагонали

$$tr\ A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

свойства:

$$tr(A + B) = trA + trB$$
$$tr(\lambda A) = \lambda * trA$$
$$trA^T = trA$$

7. След произведения двух матриц.

$tr(A * B) = tr(B * A)$ при согласованных размерах.

8. Совместные и несовместные СЛУ.

СЛУ называется - совместной, если у нее есть хотя бы одно решение.
СЛУ называется - несовместной, если решений нет.

9. Эквивалентные СЛУ.

Две СЛУ от одних и тех же неизвестных называются эквивалентными, если они имеют одинаковые множества решений.

10. Расширенная матрица СЛУ.

Расширенная матрица СЛУ $(*)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) = (A \mid b)$$

$A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$

11. Элементарные преобразования строк матрицы.

	В СЛУ	В расширенной матрице
1-й тип	к i-му уравнению прибавить j-е, умноженное на $\lambda \in \mathbb{R}$ $(i \neq j)$	$Э_1(i, j, \lambda)$
2-й тип	поменять местами i-е и j-е уравнения $(i \neq j)$	$Э_2(i, j)$
3-й тип	умножить i-е уравнение на $\lambda \neq 0$	$Э_3(i, \lambda)$

На уровне расширенной матрицы:
$Э_1, Э_2, Э_3$ — элементарные преобразования строк расширенной матрицы СЛУ

$Э_1(i, j, \lambda)$ — к i-й строке прибавить j-ю, умноженную на λ
$Э_2(i, j)$ — переставить i-ю и j-ю строки
$Э_3(i, \lambda)$ — умножить i-ю строку на $\lambda \neq 0$

12. Ступенчатый вид матрицы.

Матрица М называется ступенчатой(или имеет такой вид), если:
1) номера ведущих элементов строк строго возрастают
2) все нулевые строки стоят внизу матрицы.

13. Улучшенный ступенчатый вид матрицы.

Матрица М имеет улучшенный ступенчатый вид, если :
1) М- ступенчатая(неожиданно)
2) Все ведущие элементы равны 1
3) В одном столбце с каждым ведущим элементом стоят лишь 0.

14. Теорема о виде, к которому можно привести матрицу при помощи элементарных преобразований строк.

Всякую матрицу элементарным преобразованием строк можно привести к ступенчатому(и даже улучшенному ступенчатому!) виду.

15. Общее решение совместной СЛУ.

Помним, что эл. Преобразование строк в (A|b) не меняют множество решений.
Алгоритм:
1. выполняя эл. Преобразования строк во всей (A|b) приводим A к ступенчатому виду.
Случай_1:
Существует $i \geq r, r+1$, т. что $b_j \neq 0$. тогда $i - e$ уравнение новой СЛУ имеет вид $0 * x_1 + 0 * x_2 + \cdots + 0 * x_n = (b_i \neq 0) \Rightarrow$
СЛУ несовместна.
Случай$_2$:
Либо $\mathrm{r} = \mathrm{m}$, либо $\mathrm{b_j} = 0 \ \forall \ \mathrm{i} \geq \mathrm{r} + 1$
2. Выполняя эл. Преобразованиястрок во всей (A|b) приведем A к улучшенному ступенчатому виду.
3. неизвестные $x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jr}$ называются главными, а остальные свободными.
Подслучай$_{2.1}$
$r = n$, т. е. Все неизвестные главные.
Подслучай$_{2.2}$

$r < n$, т. е. Есть хотя бы одна свободная неизвестная.
4. во всех уравнениях новой СЛУ перенесем члены со свободными неизвестными в правую часть получим выражение главных неизвестных через свободные.
эти выражения называются общим решением исходной СЛУ. Всякое решение исходной СЛУ полу − чается подстановкой произвольных значений в свободных неизвестных и вычислением соотв. значений главных неизвестных, СЛУ имеет ∞ много решений.

Дана СЛУ $(*)$ с расширенной матрицей $(A \mid b)$
$(A \mid b) \rightsquigarrow \langle$элементарные преобразования строк$\rangle \rightsquigarrow (A' \mid b')$,
где A' имеет ступенчатый вид

Случай 1: в $(A' \mid b')$ есть строка вида $(0 \ldots 0 \mid \diamond)$, где $\diamond \neq 0$
СЛУ $(*)$ несовместна

Случай 2: в $(A' \mid b')$ нет строк вида $(0 \ldots 0 \mid \diamond)$, где $\diamond \neq 0$
СЛУ $(*)$ совместна, все неизвестные делятся на главные и свободные

$(A' \mid b') \rightsquigarrow \langle$элементарные преобразования строк$\rangle \rightsquigarrow (A'' \mid b'')$,
где A'' имеет улучшенный ступенчатый вид

Подслучай 2.1: все неизвестные главные
СЛУ $(*)$ имеет единственное решение

Подслучай 2.2: есть хотя бы одна свободная неизвестная
Общее решение — выражение главных неизвестных через свободные

16. Сколько может быть решений у СЛУ с действительными коэффициентами?

Всякая СЛУ с коэффициентами из $\mathbb{R}$ либо
несовместна, либо имеет ровно одно решение,
либо имеет бесконечно много решений.

17. Однородная СЛУ. Сколько она может иметь решений и почему?

СЛУ называется однородной, если все ее правые части равны нулю.

Наблюдение: ОСЛУ всегда имеет решение
$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ (нулевое решение)

18. Свойство ОСЛУ, у которой число неизвестных больше числа уравнений.

Ещё одно следствие метода Гаусса

Всякая ОСЛУ, у которой число неизвестных больше числа уравнений, имеет ненулевое решение.

Доказательство. В ступенчатом виде будет хотя бы одна свободная неизвестная. Придавая ей ненулевое значение, получаем ненулевое решение.

19. Связь между множеством решений совместной СЛУ и множеством решений соответствующей ей однородной системы.

Лемма

Пусть СЛУ (∗) совместна, $L \subseteq \mathbb{R}^n$ — её множество решений, $x_0 \in L$ — её частное решение.

Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ — множество решений ОСЛУ $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (∗∗).

Тогда $L = x_0 + S$, где $x_0 + S := \{x_0 + v \mid v \in S\}$.

20. Обратная матрица.

A∈ M_n
Матрица $\mathrm{B} \in M_n$ называется обратной к A, если $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = \mathrm{E}$
и обозначается A^{-1}
Fuckты:
1) если она существует, то она определена однозначно.
2) если BA = E, то AB = E, т.е. B = A^{-1}

21. Перестановки множества {1,2,…,n}

Перестановкой множества {1,2,…,n}
называется всякое биективное (взаимно
однозначное) отображение:
$\sigma: \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$

22. Инверсия в перестановке. Знак перестановки. Четные и нечетные перестановки.

A) Говорят, что неупорядоченная пара {I, j } образует инверсию в σ, если i-j и $\sigma(i) - \sigma(j)$ имеют разный знак(т. е. Либо $i < j$ и $\sigma(i) > \sigma(j)$, либо $i > j$ и $\sigma(i) < \sigma(j)$)
B) знак перестановки σ — это число $\mathrm{sgn}(\sigma) := (-1)^{\text{число инверсий в } \sigma}$
C) σ называется четной, если $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ (число инверсий четно), иначе нечетной, если $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ (число инверсий нечетно)

23. Произведение двух перестановок.

Определение

Произведение (или композиция) двух перестановок $\sigma, \rho \in S_n$ — это перестановка $\sigma \cdot \rho$ (или просто $\sigma\rho$), действующая по правилу $(\sigma\rho)(x) = \sigma(\rho(x))$ для всех $x \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Пример. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$
$\sigma\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\rho\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

В частности, мы видим, что $\sigma\rho \neq \rho\sigma$, поэтому сделаем такое

Замечание. Вообще говоря, умножение перестановок не обладает свойством коммутативности.

24. Тождественная перестановка и ее свойства. Обратная перестановка и ее свойства.

Определение

Перестановка $\mathrm{id} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \in S_n$ называется тождественной.

Свойства: 1) $\mathrm{id} \cdot \sigma = \sigma \cdot \mathrm{id} = \sigma$ для всех $\sigma \in S_n$;
2) число инверсий в id равно 0 $\Rightarrow$ $\mathrm{sgn}(\mathrm{id}) = 1$.

Определение

Для всякой перестановки $\sigma \in S_n$ перестановка
$\sigma^{-1} := \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$ называется обратной к σ.

Свойства: $\sigma^{-1} \cdot \sigma = \sigma \cdot \sigma^{-1} = \mathrm{id}$.

25. Теорема о знаке произведения двух перестановок.

$$\forall\, \sigma, \rho \in S_n:\ \mathrm{sgn}(\sigma * \rho) = sgn\sigma * sgn\rho$$

26. Транспозиция. Знак транспозиции.

Транспозиция - это подстановка σ, при которой $\exists i, j$ такие что:
$\sigma(i) = j$
$\sigma(j) = i \quad i \neq j$ причем
$\sigma(k) = k, \quad \forall\, k \neq i.j$
Знак: $\tau \in S_n$ – транспозиция $\Rightarrow \mathrm{sgn}\,\tau = -1$ (всегда нечетна)

27. Общая формула для определителя квадратной матрицы произвольного порядка.

Определителем матрицы А называется величина:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\,\sigma * a_{1,\sigma(1)} * a_{1,\sigma(2)} * \cdots * a_{n,\sigma(n)}$$

28. Определители второго и третьего порядка.

Пример: $n = 2$

σ	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathrm{sgn}\,\sigma$	1	-1

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Пример: $n = 3$

σ	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
$\mathrm{sgn}\,\sigma$	1	1	1	-1	-1	-1

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

29. Поведение определителя при разложении строки(столбца) в сумму двух.

При разложении строки(столбца) в сумму двух определитель не меняется.

30. Поведение определителя при перестановке двух строк(столбцов)

При перестановке любых двух строк(столбцов) detA меняет знак на противоположный.

31. Поведение определителя при прибавлении к строке (столбцу), другой, умноженной на скаляр.

Если к строке(столбцу) прибавить другую, умноженную на скаляр, то определитель не изменится

32. Верхнетреугольные и нижнетреугольные матрицы.

Матрица называется верхнетреугольной(нижнетреугольной)
если $a_{ij} = 0$ при всех $i > j$ ($a_{ij} = 0$ при всех $i < j$)

33. Определитель верхнетреугольной(нижнетреугольной) матрицы.

Если матрица верхнетреугольная(нижнетреугольная), то ее определитель равен
$\det A = a_{11} * a_{22} * \cdots * a_{nn}$(то есть произведение элементов на главной диагонали)

34. Определитель диагональной матрицы. Определитель единичной матрицы.

Если матрица диагональная, то ее определитель равен произведению элементов на главной диагонали. Единичная матрица является частным случаем диагональной матрицы, а так как на главной диагонали у такой матрицы стоят только единицы, то и определитель равен 1.

35. Матрица с углом нулей и ее определитель.

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ n-k \end{array} & \begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & R \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{l} P \in M_k \\ R \in M_{n-k} \end{array} \qquad \Rightarrow detA = detP * detR$$

36. Определитель произведения двух матриц.

$A, B \in M_n \Rightarrow \det(AB) = \det(A) * \det(B)$

37. Дополнительный минор к элементу квадратной матрицы.

Дополнительный минор к элементу a_{ij}в А $-$ это определитель матрицы размера $(n-1) * (n-1)$, получается из А вычеркиванием $i-$ой сторки и $j-$го столбца.

38. Алгебраическое дополнение к элементу квадратной матрицы.

Алгебраическое дополнение к элементу
a_{ij} в А $-$ это
$A_{ij} := (-1)^{i+j} * \overline{M}_{ij}$(доп. минор)

39. Формула разложения определителя по строке(1) ,столбцу(2).

1) при любом фиксированном $i \in \{1, \dots, n\}$: $detA = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * A_{ij}$

2) при любом фиксированном $j \in \{1, \dots, n\}$: $detA = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} * Aij$

40. Лемма о фальшивом разложении определителя.

Для фикс. I, k $\in \{1, \dots, n\}, i \neq k$, верно $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0$

Для фикс. J, m $\in \{1, \dots, n\}, j \neq m$, верно $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{im} = 0$

41. Невырожденная матрица.

Матрица A называется невырожденной, если detA$\neq 0$ и вырожденной, если $detA = 0$

42. Присоединенная матрица.

Присоединенная к A матрица - это $\widehat{A} \coloneqq \left(A_{ij}\right)^T =$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

43. Критерий обратимости квадратной матрицы.

A — обратимая$(\exists\, \mathrm{A}^{-1}) \leftrightarrow A$ — невырожденная ($\det A \neq 0$). При этом
$A^{-1} = \frac{1}{detA}\widehat{A}$

44. Явная формула для обратной матрицы.

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\widehat{A}$$

45. Критерий обратимости произведения двух матриц.
Матрица, обратная к произведению двух матриц.

пусть A, B $\in M_n$, тогда $A * B$ обратима $\leftrightarrow$ обе матрицы A и B обратимы.
при этом $(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1} * \mathrm{A}^{-1}$

46. Формулы Крамера.

Если detA$\neq 0$, то СЛУ имеет единственное решение , и его можно найти по формулам
$$x_i = \frac{\det A_i}{detA}$$

47. Что такое поле?

Определение. Полем называется множество F, на котором заданы две операции «сложение», $(a, b) \mapsto a + b$, и «умножение», $(a, b) \mapsto a \cdot b$, удовлетворяющие следующим условиям (называемым аксиомами поля):
(1) $a + b = b + a \ \ \forall a, b \in F$ (коммутативность сложения);
(2) $(a+b)+c = a+(b+c) \ \ \forall a, b, c \in F$ (ассоциативность сложения);
(3) $\exists 0 \in F\colon \ a + 0 = 0 + a = a \ \ \forall a \in F$ (нулевой элемент);
(4) $\forall a \in F \ \exists -a \in F\colon \ a + (-a) = (-a) + a = 0$ (противоположный элемент);
(5) $a(b + c) = ab + ac \ \ \forall a, b, c \in F$ (дистрибутивность);
(6) $a \cdot b = b \cdot a \ \ \forall a, b \in F$ (коммутативность умножения);
(7) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \ \ \forall a, b, c \in F$ (ассоциативность умножения);
(8) $\exists 1 \in F \setminus \{0\}\colon \ a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \ \ \forall a \in F$ (единичный элемент);
(9) $\forall a \in F \setminus \{0\} \ \exists a^{-1} \in F\colon \ a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ (обратный элемент)

48. Алгебраическая форма комплексного числа. Сложение, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме.

Определение. Представление числа $z \in \mathbb{C}$ в виде $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ называется его алгебраической формой.
$a =: \operatorname{Re} z$ — действительная (или вещественная) часть
$b =: \operatorname{Im} z$ — мнимая часть
Числа вида bi $(b \in \mathbb{R})$ называются чисто мнимыми

Чтобы сложить два комплексных числа в алгебраической форме, надо отдельно сложить действительные части этих чисел, отдельно — коэффициенты при мнимых частях.

Произведением двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$
$z_2 = a_2 + b_2 i$ называется комплексное число z, равное

$$z = z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i$$

Частным двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется число z, которое задается соотношением:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$$

49. Комплексное сопряжение и его свойства: сопряжение суммы и произведения двух комплексных чисел.

Число $\overline{z}$:= a-b называется комплексно сопряженным к числу z = a + bi ∈ $\mathbb{C}$
$z \to z$ комплексное сопряжение
$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{z * w} = \overline{z} * \overline{w} \ \ \forall z, w \in \mathbb{C}$

50. Геометрическая модель комплексных чисел, интерпретация в ней сложения и сопряжения.

$\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2$
$a + bi \leftrightarrow (a, b) -$ точка или вектор
$z + w \ \leftrightarrow$ обычное сложение векотров
комплексное сопряжение
$\leftrightarrow$ отражение отн. действ. Оси(Ox)

51. Модуль комплексного числа и его свойства: неотрицательность, неравенство треугольника, модуль произведения двух комплексных чисел.

Модулем комплексного числа z = a + bi называется величина |z|:= $\sqrt{a^2 + b^2}$
1)$|z| \geq 0$, причем $|z| = 0 \leftrightarrow z = 0$
2) $|z + w| \leq |Z| + |w|$
3) $|z * w| = |z| * |w|$

52. Аргумент комплексного числа.

Аргументом компл. Числа $z = a + bi \ \neq 0$ называется такое $\varphi \in \mathbb{R}$, что
$\cos\varphi = \frac{a}{|z|}, \sin\varphi = \frac{b}{|z|}$
иными словами, $\varphi -$ это угол между осью Ox и соответ. вектором.

53. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме.

Если z $\in \mathbb{C}$ и $\varphi \in Arg\ z$, то пред $-$ е
z = |z| * ($\cos\varphi + i * sin\varphi$)   называется тригонометрической формой z.

1) $z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ \mathrm{z}_1 = |\mathrm{z}_1| * (\cos\varphi_1 + i * \sin\varphi_1),$
$\mathrm{z}_2 = |\mathrm{z}_2| * (\cos\varphi_2 + i * \sin\varphi_2) \Rightarrow \mathrm{z}_1 * \mathrm{z}_2 = |\mathrm{z}_1| * |\mathrm{z}_2| *$
$* (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i * \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
2) пусть z_1 и z_2 такие же как и выше, а также $\mathrm{z}_2 \neq 0$, тогда:
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} * \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i * \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$

54. Формула Муавра.

$z = |z| * (\cos\varphi + i * \sin\varphi)$, тогда $\forall n \in \mathbb{Z}$:
$z^n = |z|^n(\cos\varphi + i * \sin\varphi)$
при $\mathrm{n} > 0$: очевидно
при $\mathrm{n} = 0$: $\mathrm{z}^0 = |\mathrm{z}|^0(\cos(0\varphi) + \mathrm{i} * \sin(0\varphi)$
при $\mathrm{n} < 0$: $\mathrm{z}^\mathrm{n} = \left(\frac{1}{z}\right)^{|\mathrm{n}|} = \left[\frac{1}{|z|} * (\cos(-\varphi) + i * \sin(-\varphi))\right]^{|n|} = \cdots$

$1 = 1(\cos 0 + i * \sin 0)$

55. Извлечение корней из комплексных чисел.

Корнем n-той степени из числа z $\in \mathbb{C}$ называется всякое число $\mathrm{w} \in \mathbb{C}$, т. что $\mathrm{w}^\mathrm{n} = \mathrm{z}$

56. Основная теорема алгебры комплексных чисел.

Всякий многочлен степени большей или равной 1 с комплексными коэффициентами имеет (комплексный) корень.

57. Теорема Безу и её следствие.

Остаток равен значению многочлена f в точке c.
r = f(c)
Следствие: если c - корень многочлена f , то f кратен $(x - c)$

58. Кратность корня многочлена.

Кратностью корня c многочлена $f \in F[x]$ называется наибольшее $k \in \mathbb{N}$, т. что f кратно $(x - c)^k$, но f не кратно $(x - c)^{k+1}$

59. Векторное пространство.

Множество V называется векторным (линейным) пространством над полем F, если на V заданы две операции : сложение и умножение на скаляр.

60. Подпространство векторного пространства.

Пусть V — векторное пространство над полем F.
Определение. Подмножество $U \subseteq V$ называется подпространством (или ещё линейным подпространством), если выполнены следующие условия:
(1) $\vec{0} \in U$;
(2) $x, y \in U \Rightarrow x + y \in U$;
(3) $\alpha \in F,\ x \in U \Rightarrow \alpha \cdot x \in U$.

61. Линейная комбинация конечного набора векторов векторного пространства.

Пусть $v_1, \dots, v_m \in V$ — конечный набор векторов (не обязательно попарно различных).

Определение. Всякое выражение вида $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in F$, называется линейной комбинацией векторов $v_1, \dots, v_m$.

62. Линейная оболочка подмножества векторного пространства.

Пусть $S \subseteq V$ — произвольное подмножество (конечное или бесконечное).

Определение. Множество всех векторов из V, представимых в виде линейной комбинации (какого-то конечного набора) векторов из S, называется линейной оболочкой множества S.