3) $(2,3)$, $(1,1)$;
4) $(1,1,1,1)$, $(1,2,1,3)$;
5) $(1,1,2,2)$;
6) $(1,1,1,1)$, $(1,1,1,3)$, $(3,-5,7,2)$, $(1,-7,5,-2)$;
7) $(1,1,1,1)$, $(1,2,1,3)$, $(1,1,2,2)$, $(1,1,1,3)$;
8) $(0,0,0,0)$.

1050. Принадлежит ли число $\sqrt[6]{2}$ линейной оболочке чисел 1, $\sqrt{2}$ и $\sqrt[4]{2}$ над полем рациональных чисел?

1051. В линейном пространстве $\mathbb{R}_8[t]$ многочленов степени не выше 8 заданы два подпространства $L_1 = \{P \in \mathbb{R}_8[t]\ ;\ P(1) = P'(1) = P''(1) = 0\}$ и $L_2 = \{P \in \mathbb{R}_8[t]\ ;\ P(-1) = P'(-1) = P''(-1) = 0\}$ соответственно. Найти базисы суммы и пересечения этих подпространств.

1052. В пространстве матриц Mat_n порядка n заданы подпространство S_n симметричных матриц и подпространство T_n строго верхнетреугольных матриц. Доказать, что $\mathrm{Mat}_n = S_n \oplus T_n$. Найти проекцию произвольной матрицы A на каждое из этих подпространств параллельно другому подпространству.

1053. В пространстве матриц Mat_n заданы подпространства S_n симметричных матриц и $V_{n,r}$ матриц, у которых последние $n-r$ строк нулевые Найти размерности и базисы суммы и пересечения этих подпространств.

1054. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств L_1 и L_2:
1) $L_1 = \langle(4,2,1),(-3,2,0),(-1,4,0)\rangle$, $L_2 = \langle(-2,3,1),(5,3,13),(7,0,12)\rangle$,
2) $L_1 = \langle(1,2,3),(4,3,1),(2,-1,-5)\rangle$, $L_2 = \langle(1,1,1),(-3,2,0),(-2,3,1)\rangle$,
3) $L_1 = \langle(1,2,3),(0,1,1),(1,1,2)\rangle$, $L_2 = \langle(4,3,1),(1,1,0),(5,3,2)\rangle$;
4) $L_1 = \langle(1,1,1),(4,2,1),(2,0,-1)\rangle$, $L_2 = \langle(-2,3,1),(1,4,1),(5,-2,-1)\rangle$,
5) $L_1 = \langle(1,2,3),(1,-2,i),(2,0,3+i)\rangle$, $L_2 = \langle(1,0,3i),(1,4,3+2i),(-1,4,3-4i)\rangle$;
6) $L_1 = \langle(1,-i,1+i),(1,0,3i),(-1,2i,-2+i)\rangle$, $L_2 = \langle(1,-2,i),(2,1+i,-i),(0,5+i,-3i)\rangle$;
7) $L_1 = \langle(1,1,1,1),(1,2,1,3-i),(2,3,2,4-i),(1,1,1,1-i)\rangle$, $L_2 = \langle(0,1,0,3-i),(0,2,0,5-2i),(0,2+i,0,6+i),(1,4+i,5-i,-2-i)\rangle$;
8) $L_1 = \langle(1,2,3,1,1),(1,0,1,-2,-2),(2,0,1,-1,0),(0,1,1,0,0)\rangle$, $L_2 = \langle(1,2,0,0,2),(0,1,-2,3,-3),(-1,2,1,2,0),(1,1,-2,0,0)\rangle$;
9) $L_1 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0$, $L_2 = \langle(1,1,1,1,1),(1,0,-1,1,-1),(0,1,-1,-1,1),(-2,1,0,1,-1)\rangle$,

10) $L_1 : \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \end{cases} \quad L_2 : \begin{cases} x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_5 = 0; \end{cases}$

11) $L_1 = \langle (1,1,-1,1,1), (0,1,-1,1,0), (1,2,-3,2,0) \rangle$,
$L_2 = \langle (1,0,-2,1,1), (1,1,-2,1,0), (2,1,0,0,1) \rangle$;

12) $L_1 = \langle (1,2,-2,2,1), (2,4,-5,4,1), (2,3,-3,3,2) \rangle$,
$L_2 : \begin{cases} x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 0; \end{cases}$

13) $L_1 = \langle (1,1,-1,-1), (0,1,3,2), (2,1,-1,0) \rangle$,
$L_2 = \langle (1,1,2,0), (0,1,1,0), (1,3,1,3) \rangle$.

§ 10.4. Линейные функции и отображения

Отображение $\mathbf{A} : U \to V$ двух линейных пространств над одним и тем же полем $\Bbbk$ называется *линейным*, если для любых векторов $x, y \in U$ и любого числа $\lambda \in \Bbbk$ имеют место равенства

$$\mathbf{A}(u+v) = \mathbf{A}(u) + \mathbf{A}(v), \qquad \mathbf{A}(\lambda u) = \lambda \mathbf{A}(u). \tag{10.1}$$

Линейные отображения из U в $\Bbbk$ называются *линейными функциями* на U.

Биективное линейное отображение векторных пространств называется *линейным изоморфизмом.* Два пространства, между которыми существует линейный изоморфизм, называются *изоморфными.*

Если в пространствах U и V даны базисы $e_1, \dots, e_m$ и $f_1, \dots, f_n$ соответственно, то каждому линейному отображению $\mathbf{A} : U \to V$ сопоставляется матрица $A = (a^i_j)$ размера $n \times m$, называемая *матрицей отображения* $\mathbf{A}$ в указанных базисах, по столбцам которой стоят координаты векторов $\mathbf{A}(e_1), \dots \mathbf{A}(e_m)$ в базисе $f_1, \dots, f_n$:

$$\mathbf{A}(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a^j_i f_j. \tag{10.2}$$

Если $C = (c^i_j)$ — матрица перехода от базиса $e_1, \dots, e_m$ к другому базису $e'_1, \dots, e'_m$ в пространстве U, а $D = (d^i_j)$ — матрица перехода от базиса $f_1, \dots, f_n$ к другому базису $f'_1, \dots, f'_n$ в пространстве V, то отображение $\mathbf{A}$ имеет по отношению к паре базисов $e'_1, \dots, e'_m$ и $f'_1, \dots, f'_n$ матрицу

$$A' = D^{-1} A C.$$

В случае поля $\Bbbk = \mathbb{C}$ рассматриваются также *антилинейные* (или *полулинейные*) отображения, которые определяются аналогично линейным, с той лишь разницей, что

$$\mathbf{A}(\lambda u) = \overline{\lambda} \mathbf{A}(u). \tag{10.3}$$