Задача 1.1. Пусть

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rangle$$

— подпространство пространства $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ матриц размера 2×2. Найдите два каких-нибудь подпространства W, для которых $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = U \oplus W$.

Задача 1.2. Пусть

$$V: \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$U = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle, \qquad W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Докажите, что $V = U \oplus W$.

Указание. Обратите внимание, что на этот раз V — это не всё пространство. Поэтому из того, что $\dim V = \dim U + \dim W$ и $U \cap W = 0$, уже не будет следовать, что $V = U \oplus W$. Тут вам важно доказать, что $U + W$ — это именно V, а не какое-то другое трёхмерное подпространство. Я предлагаю действовать следующим образом: (1) всё-таки проверить, что $\dim V = \dim U + \dim W$, (2) убедиться, что U и W линейно независимы (для этого достаточно проверить, что объединение их базисов является линейно независимой системой), а затем (3) доказать, что $U, W \subseteq V$ (это вы покажете, продемонстрировав, что все базисные векторы U и W принадлежат V).

Подсказка. В какой-то момент вам. вероятно, придётся дополнять некоторое семейство векторов до базиса всего пространства. Так вот, это обычно можно сделать несколькими способами. Убедитесь только, что в итоге получаются разные подпространства (например, это можно сделать, проверив, лежит ли какой-нибудь базисный вектор одного в другом).

Проверка на линейность отображений, заданных в координатах

Мы не успели обсудить, как проверять линейность отображений, заданных в координатах. Например, пусть $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

Мы должны проверить две вещи:

(1) Что $F(x+y) = F(x) + F(y)$:

$$F(x+y) = F\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1+y_1) + (x_2+y_2) \\ (x_1+y_1) - (x_2+y_2) \\ 3(x_1+y_1) - 2(x_2+y_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (2x_1 + x_2) + (2y_1 + y_2) \\ (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \\ (3x_1 - 2x_2) + (3y_1 - 2y_2) \end{pmatrix} = F(x) + F(y)$$

(2) Что $F(tx) = tF(y)$, где t — скаляр:

$$F(tx) = F\begin{pmatrix} tx_1 \\ tx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(tx_1) + (tx_2) \\ (tx_1) - (tx_2) \\ 3(tx_1) - 2(tx_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t(2x_1 + x_2) \\ t(x_1 - x_2) \\ t(3x_1 - 2x_2) \end{pmatrix} = tF(x)$$

А как быть, если отображение не линейно?

Как и во всех других ситуациях: надо привести контрпример. Вот как это бывает:

(1) $F : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $F(g) = g(x)+1$. Отображение не сохраняет ноль: $F(0) = 0 + 1 = 1 \neq 0$ — так что уже не может быть линейным. Что ещё можно сказать: $F(g+h) = g(x)+h(x)+1 \neq (g(x)+1)+(h(x)+1) = F(g)+F(h)$. Или вот так: $F(-g) = -g(x)+1 \neq -(g(x)+1) = -F(g)$. Любого (одного) из этих контрпримеров достаточно, чтобы опровергнуть линейность. А мораль такая: прибавление к линейной функции константы портит линейность.

(2) $F : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $F(g) = (g(x))^2$. Тут сразу хочется указать на проблемы со сложением: $F(g+h) = (g(x)+h(x))^2 \neq (g(x))^2+(h(x))^2 = F(g)+F(h)$, но вам могут возразить: "а может быть, вы просто не умеете этого доказывать?" (для тех, кто понимает: над полем $\mathbb{F}_2$ это отображение на самом деле является линейным!). Поэтому (над $\mathbb{R}$) мы приведём совсем конкретный пример: $F(1 + x) = (1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 \neq 1 + x^2 = F(1) + F(x)$ (для педантов заметим, что значения этих многочленов в точке 1 различны). Или можно придраться к умножению на константу: $F(-x) = (-x)^2 = x^2 \neq -x^2 = -F(x)$. Любого (одного) из этих двух контрпримеров достаточно, чтобы опровергнуть линейность. А мораль такая: нелинейные функции (возведение в степень, синусы, экспоненты,...) портят линейность.

(3) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 1 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

Что-то я уже устал, поэтому просто замечу, что

$$F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и это уже хоронит всякие надежды на линейность этого отображения.

Задачи 1.3-5. Проверьте, являются ли линейными следующие отображения:

(a) $F : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $F(g) = \frac{d}{dx}g - 2x$;
(b) $F : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $F(g) = \frac{d}{dx}g - 2g$;
(c) $F : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $F(g)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt$;
(d) $F : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $F(g)(x) = g(2x - 3)$;
(e) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

(f) $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$,

$$F\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10x_1+35x_2\\ \pi x_1-\frac{1}{136}x_2+3\\ e^{x_1}-13x_2\end{pmatrix}$$

Задача 1.6-7. Запишите в базисе, составленном из матричных единиц, матрицы следующих линейных операторов $f:\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})\to\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

(a) $f(X)=XA$, где $A=\left(\begin{smallmatrix}1&3\\-1&3\end{smallmatrix}\right)$

(b) $f(X)=AX-X^TA$, где A — та же матрица, что и в пункте (a).

Напоминание. Во-первых, не забывайте, что пространство матриц 2×2 четырёхмерно, то есть матрицы операторов в обоих случаях будут 4×4. Ну, а чтобы выписать эту матрицу, вы можете сделать просто: берёте очередную матричную единицу, например, E_{11}, считаете значение линейного оператора (например, в первом пункте это $E_{11}A$) и образ “вытягиваете в вектор”, записывая в соответствующий столбец матрицы.

Задача 1.8. Выпишите матрицу линейного отображения f, действующего из пространства симметрических матриц 3×3 в пространство матриц 3×2 по следующему правилу:

$$f(X)=XA,\ \text{где } A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\\-1&1\end{pmatrix}$$

Базисы можете выбрать сами.

Воспоминания о базисах и координатах

Задача 2.1. Найдите какой-нибудь базис в пространстве $\mathbb{R}[x]_3$ многочленов степени не выше 3 от переменной x, в котором многочлен x^3-x-1 имел бы координаты $(1,1,1,1)^T$.

Задача 2.2. Допустим у нас есть два базиса: $e_1,\ldots,e_n$ и $u_1,\ldots,u_n$ в пространстве V. Рассмотрим множество X, состоящее из всех векторов, которые в обоих базисах имеют одинаковые координаты. Ясно, что X непусто: ведь там лежит нулевой вектор (у него в любом базисе все координаты равны нулю). Приведите пример базисов, для которых X состоит только из нулевого вектора. Приведите пример базисов, для которых это не так. Что вообще представляет из себя X как геометрический объект?

Задачи про линейные отображения

На всякий случай поясню, что под (линейным) оператором везде ниже имеется в виду линейное отображение из пространства в себя.

Задачи 2.3-4. Пусть $V=U\oplus W$. Определим **оператор проектирования** на U вдоль W как оператор, переводящий $v\in V$ в u, где $v=u+w$ — единственное представление v в виде суммы $u\in U$ и $w\in W$. Докажите, что для оператора проектирования F выполнено соотношение $F^2=F$.

Пусть $V=\mathbb{R}^3$,

$$U=\langle\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\rangle,\qquad W=\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\rangle$$

Напишите матрицу оператора проектирования на U вдоль W.

Задача 2.5. Как изменится матрица линейного оператора (напоминаю, что это линейное отображение из некоторого векторного пространства в себя), если поменять местами i-й и j-й базисные векторы?

Задача 2.6. Докажите, что отражение плоскости относительно прямой, проходящей через начало координат, является линейным оператором. Напишите матрицу этого отображения в каком-нибудь удобном базисе (подсказка: лучше выбирать систему координат с оглядкой на заданную прямую!).