Напомню несколько алгоритмов, которые мы обсуждали на семинаре:

- (Минимальный многочлен) Есть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — все различные собственные значения оператора A (и да, если матрица вещественная, то это все *комплексные* собственные значения — а в общем случае это собственные значения из алгебраического замыкания поля), то его минимальный многочлен равен

$$(x-\lambda_1)^{m_1} \dots (x-\lambda_k)^{m_k}$$

где m_i — это размер наибольшей жордановой клетки с собственным значением λ_i.

- (Вычисление функции от матрицы) Все обозначения как в предыдущем пункте. Любую хорошую (то есть многочлен или раскладывающуюся в ряд) функцию $g(A)$ от матрицы можно вычислить как многочлен $\hat{g}(A)$ степени не выше $(M-1)$ от A, где M — степень минимального многочлена. Его коэффициенты могут быть найдены из системы, уравнения в которой имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{g}(\lambda) &= g(\lambda) \\ \hat{g}'(\lambda) &= g'(\lambda) \\ &\dots \\ \hat{g}^{(m_k-1)}(\lambda) &= g^{(m_k-1)}(\lambda) \end{aligned}$$

Пример. Допустим, матрица имеет жорданову нормальную форму (во всех пустых ячейках стоят нули; я не стал их писать, чтобы лучше были видны клетки):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & & \\ & 2 & & & & & & \\ & & 2 & 1 & & & & \\ & & & 2 & 1 & & & \\ & & & & 2 & & & \\ & & & & & 3 & & \\ & & & & & & 5 & 1 \\ & & & & & & & 5 \end{pmatrix}$$

Её минимальный многочлен равен $(x-2)^3(x-3)(x-5)^2$ и имеет степень 6. Если мы хотим вычислить $\exp(2A)$, то мы можем искать её в виде многочлена степени не больше 5:

$$\exp(A) = b_5A^5 + b_4A^4 + b_3A^3 + b_2A^2 + b_1A + b_0E \qquad (*)$$

Экспоненту мы можем искать отдельно от каждой клетки с помощью формулы

$$f\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \frac{f'''(\lambda)}{3!} & \\ & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ & & & & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

которая для $\exp(2x)$ примет вид

$$\exp\left[2\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1\\ & & & & \lambda\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} e^{2\lambda} & \frac{2e^{2\lambda}}{1!} & \frac{4e^{2\lambda}}{2!} & \frac{8e^{2\lambda}}{3!} & \\ & e^{2\lambda} & \frac{2e^{2\lambda}}{1!} & \frac{4e^{2\lambda}}{2!} & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & e^{2\lambda} & \frac{2e^{2\lambda}}{1!} \\ & & & & e^{2\lambda}\end{pmatrix}$$

Для нашей матрицы получается:

$$\exp(2A) = \begin{pmatrix} e^4 & 2e^4 & & & & & & \\ & e^4 & & & & & & \\ & & e^4 & 2e^4 & 2e^4 & & & \\ & & & e^4 & 2e^4 & & & \\ & & & & e^4 & & & \\ & & & & & e^6 & & \\ & & & & & & e^{10} & 2e^{10} \\ & & & & & & & e^{10}\end{pmatrix}$$

Многочлен из правой части равенства (*) можно посчитать таким же образом. Приравнивая теперь обе части (*), получаем систему, из которой можно найти коэффициенты многочлена:

$$\begin{cases} 32b_5 + 16b_4 + 8b_3 + 4b_2 + 2b_1 + b_0 & = e^{2\cdot 2}, \\ 5\cdot 16b_5 + 4\cdot 8b_4 + 3\cdot 4b_3 + 2\cdot 2b_2 + b_1 & = 2e^{2\cdot 2}, \\ 5\cdot 4\cdot 8b_5 + 4\cdot 3\cdot 4b_4 + 3\cdot 2\cdot 2b_3 + 2\cdot b_2 & = 4e^{2\cdot 2}, \\ 243b_5 + 81b_4 + 27b_3 + 9b_2 + 3b_1 + b_0 & = e^{2\cdot 3}, \\ 3125b_5 + 625b_4 + 125b_3 + 25b_2 + 5b_1 + b_0 & = e^{2\cdot 5}, \\ 5\cdot 625b_5 + 4\cdot 125b_4 + 3\cdot 25b_3 + 2\cdot 5b_2 + b_1 & = 2e^{2\cdot 5}, \end{cases}$$

Задачи 2.1-4. Двумя способами (с помощью вычисления функции от жордановой формы + обратной замены и с помощью многочлена, как описано выше) найдите

$$(2.1-2)\ \exp\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}, \qquad (2.3-4)\ \ln\begin{pmatrix}3 & -8 & 2\\ 1 & -3 & 1\\ 2 & -8 & 3\end{pmatrix}$$

Искать жорданов базис не очень просто, поэтому в этой задаче для его нахождения воспользуйтесь любым приятным вам онлайн-решателем (думаю, wolfram справиться; просто введите в поисковике “jordan normal form online”)

Напомню ещё алгоритм нахождения жордановой нормальной формы:

(1) Находим характеристический многочлен. Допустим, λ — собственное значение. Сумма размеров всех жордановых клеток с этим собственным значением равно его алгебраической кратности. Но нужно понять, каких размеров сами эти клетки.
(2) Число жордановых клеток с собственным значением λ (размера больше 0) равно $\dim V_\lambda = n - \mathrm{rk}(A - \lambda E)$;
(3) Число жордановых клеток с собственным значением λ размера больше 1 равно $\mathrm{rk}(A - \lambda E) - \mathrm{rk}(A - \lambda E)^2$;

(4) Число жордановых клеток с собственным значением λ размера больше 2 равно $\mathrm{rk}(A-\lambda E)^2 - \mathrm{rk}(A-\lambda E)^3$;

(5) и так далее. Этой информации вам хватит для того, чтобы найти ЖНФ.

Задача 2.5. Найдите ЖНФ матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 2.6. Найдите ЖНФ матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Задачи 2.7-8. В этой задаче вам нужно будет найти жордановы формы и жордановы базисы нескольких матриц. Не пытайтесь искать их характеристические многочлены на бумажке: это такое себе удовольствие. Лучше выясните, как искать собственные значения в Питоне (Яндекс подскажет, как!). То же относится и к операциям возведения матриц в степень и решения систем уравнений. В этой задаче вы можете поручить всю работу Питону или Вольфраму (может быть, вы даже напишете скрипт на Питоне, который распечатывает матрицу вместе со всеми нужными LaTeX-овскими командами, чтобы это всё не вбивать руками. Но я хочу увидеть, насколько вы поняли философию нахождения жорданова базиса!

$$(2.11)\ A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.12)\ A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 5 & 5 \\ 1 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Поиск инвариантных подпространств. Вообще говоря, это непростая задача, но если уж вы нашли ЖНФ оператора, то тут можно двигаться в следующих направлениях. Если подпространство U инвариантно относительно оператора φ, то можно рассмотреть *ограничение* φ на U, которое обозначается φ_U и получается так: надо просто забыть всё, что происходит вне U.

Задача 2.9. Докажите, что ЖНФ φ_U — это кусочек ЖНФ φ (это надо понимать следующим образом: мы берём какие-то из клеток и обрезаем их справа; надеюсь, что вы поймёте на примерах, что я имею в виду).

Поверим пока в то, что сказано в задаче. Допустим теперь наш оператор приводится к ЖНФ

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Обозначим через $e_1, \ldots, e_5$ векторы жорданова базиса. Будем искать инвариантные подпространства, а чтобы не сойти с ума, будем двигаться по возрастанию размерности.

dim $=$ **1**. Инвариантные прямые натянуты на векторы, которые под действием φ переходят в кратные себе — то есть на собственные векторы! Таким образом, одномерные инвариантные подпространства — это любые прямые, которые содержатся в плоскости $V_2 = \langle e_1, e_4 \rangle$.

dim $=$ **2**. Вот тут нам потребуются кусочки ЖНФ. Собрать из них матрицу 2×2 можно двумя способами: либо взяв два левых уголка двух разных клеток:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

либо взяв уголок 2×2 одной клетки, например, так:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(вы скоро, возможно, увидите, что есть и несколько более хитрые варианты).

В первом случае мы получаем, что каждый вектор в нашем инвариантном подпространстве является собственным. То есть нам подходит любое двумерное подпространство V_2 (которое, надо сказать, само двумерно — так что это и есть V_2).

Во втором же случае подпространство состоит из некого собственного вектора v и ещё одного вектора w, который хорош тем, что $(\varphi - 2\mathrm{id})w = v$. Ну, осталось подобрать их. Берём собственный вектор — и прикидываем, что могло бы в него перейти под действием $\varphi - 2\mathrm{id}$. Например, если $v = e_1$, то в качестве w подойдёт любой вектор вида $e_2 + te_4$ (вообще говоря, даже $e_2 + te_4 + se_1$, но $\langle e_1, e_2 + te_4 + se_1 \rangle = \langle e_1, e_2 + te_4 \rangle$).

Задача 2.10 Опишите все инвариантные подпространства для оператора

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$