Задачи 1.1-1.5. Из скана задачи с номерами 17.1 (б, в, ж), 17.3 (б), 17.5 (а)

Задача 2.1. *Матричная единица* (не путайте с единичной матрицей!) — это матрица E_{ij}, у которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит 1, а все остальные элементы — нули. Чему равно произведение двух матричных единиц E_{ij} и E_{st}?

Задача 2.2. Квадратная матрица A называется *симметричной*, если $A^T = A$ (из этого следует, конечно, что она симметрична относительно главной диагонали). Докажите, что сумма двух симметричных матриц является симметричной.

Задача 2.3. Будет ли произведение двух симметричных квадратных матриц одного размера симметричной матрицей?

Подсказка. Правильный ответ "нет". Чтобы его обосновать, вам нужно придумать контрпример, то есть привести пример двух симметричных матриц, произведение которых не будет симметричным.

Небольшое отступление. Вы привыкли, должно быть, что из равенства $AB = 0$ следует, что $A = 0$ или $B = 0$. Так вот, для матриц (размера больше 1×1) это, вообще говоря, неверно! Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Задача 2.4. Придумайте ненулевую матрицу A размера 2×2, для которой $A^2 = 0$ (некоторые из её элементов могут быть равны нулю; главное, чтобы был хотя бы один отличный от нуля элемент).

Задача 2.5. Докажите, что квадратные диагональные матрицы одного размера коммутируют.

Указание. возьмите две таких матрицы, одну с буквами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ на диагонали, другую с $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, например, — и перемножьте их в разном порядке. Получится ли один и тот же результат?

Задача 2.6. Пользуясь лишь основными свойствами сложения матриц (коммутативность, ассоциативность, существование нейтрального элемента, существование противоположных элементов) докажите единственность противоположной матрицы для заданной матрицы A.

Задача 3.1. Квадратная матрица A называется *кососимметрической*, если $A^T = -A$. Приведите пример кососимметрической матрицы. Докажите, что для любой квадратной матрицы A существуют, притом единственные, симметричная матрица S и кососимметричная матрица K, для которых $A = S + K$. Укажите явно эти матрицы для

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 3.2. Квадратная матрица A называется *верхнетреугольной*, если отличны от нуля только те её элементы, которые лежат на диагонали или выше — иными словами, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$ (убедитесь, что вы понимаете, что это одно и то же!). Докажите, что произведение двух верхнетреугольных матриц одного размера - это снова верхнетреугольная матрица. Если вы хотите получить убедительное доказательство, используйте определение "$a_{ij} = 0$ при $i > j$".

Задача 3.3. Определим на квадратных матрицах фиксированного размера $n \times n$ операцию $A * B = AB + A + B$. Какими свойствами она обладает? Является ли она коммутативной? Ассоциативной? Дистрибутивной (по отношению к сложению)? Есть ли нейтральный элемент в каком-либо смысле? Есть ли обратные?

Задача 3.4. Найдите все квадратные матрицы X размера $n \times n$, коммутирующие со всеми матрицами того же порядка (то есть удовлетворяющие равенству $AX = XA$ для любой матрицы A размера $n \times n$).

Указание: если X коммутирует с каждой матрицей, то она коммутирует с любой конкретной. Предлагается взять какие-нибудь конкретные простые матрицы A и посмотреть, какие выводы можно извлечь из того, что $AX = XA$. Подскажу даже более явно: для начала самые простые матрицы — это матричные единицы.