Глава V

# КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

## § 20. Комплексные числа в алгебраической форме

**20.1.** Вычислить выражения:

а) $(2+i)(3-i)+(2+3i)(3+4i)$;

б) $(2+i)(3+7i)-(1+2i)(5+3i)$;

в) $(4+i)(5+3i)-(3+i)(3-i)$; г) $\dfrac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$;

д) $\dfrac{(5+i)(3+5i)}{2i}$; е) $\dfrac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$;

ж) $\dfrac{(2+i)(4+i)}{1+i}$; з) $\dfrac{(3-i)(1-4i)}{2-i}$;

и) $(2+i)^3+(2-i)^3$; к) $(3+i)^3-(3-i)^3$;

л) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$; м) $\left(-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$.

**20.2.** Вычислить $i^{77}$, $i^{98}$, $i^{-57}$, $i^n$, где $n$ — целое число.

**20.3.** Доказать равенства:

а) $(1+i)^{8n}=2^{4n}$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $(1+i)^{4n}=(-1)2^{2n}$, $n\in\mathbb{Z}$.

**20.4.** Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases}(1+i)z_1+(1-i)z_2=1+i,\\(1-i)z_1+(1+i)z_2=1+3i;\end{cases}$

б) $\begin{cases}iz_1+(1+i)z_2=2+2i,\\2iz_1+(3+2i)z_2=5+3i;\end{cases}$ в) $\begin{cases}(1-i)z_1-3iz_2=-i,\\2z_1-(3+3i)z_2=3-i;\end{cases}$



г) $\begin{cases}2z_1-(2+i)z_2=-i,\\(4-2i)z_1-5z_2=-1-2i;\end{cases}$ д) $\begin{cases}x+iy-2z=10,\\x-y+2iz=20,\\ix+3iy-(1+i)z=30.\end{cases}$

**20.5.** Найти вещественные числа $x$ и $y$, удовлетворяющие уравнению:

а) $(2+i)x+(1+2i)y=1-4i$; б) $(3+2i)x+(1+3i)y=4-9i$.

**20.6.** Доказать, что:

а) комплексное число $z$ является вещественным тогда и только тогда, когда $\overline{z}=z$;

б) комплексное число $z$ является чисто мнимым тогда и только тогда, когда $\overline{z}=-z$.

**20.7.** Доказать, что:

а) произведение двух комплексных чисел является вещественным тогда и только тогда, когда одно из них отличается от сопряжённого к другому вещественным множителем;

б) сумма и произведение двух комплексных чисел являются вещественными тогда и только тогда, когда данные числа или сопряжены, или оба вещественны.

**20.8.** Найти все комплексные числа, сопряжённые:

а) своему квадрату; б) своему кубу.

**20.9.** Доказать, что если из данных комплексных чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$ при применении конечного числа операций сложения, вычитания, умножения и деления получается число $z$, то из чисел $\overline{z}_1, \overline{z}_2, \ldots, \overline{z}_n$ при применении тех же операций получается число $\overline{z}$.

**20.10.** Доказать, что определитель

$$\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z}_1 & a\\ z_2 & \overline{z}_2 & b\\ z_3 & \overline{z}_3 & c\end{vmatrix},$$

где $z_1, z_2, z_3$ — комплексные и $a, b, c$ — вещественные числа, является чисто мнимым числом.

**20.11.** Решить уравнения:

а) $z^2=i$; б) $z^2=3-4i$;

в) $z^2=5-12i$; г) $z^2-(1+i)z+6+3i=0$;

д) $z^2-5z+4+10i=0$; е) $z^2+(2i-7)z+13-i=0$.

## § 21. Комплексные числа в тригонометрической форме

**21.1.** Найти тригонометрическую форму числа:

а) $5$; б) $i$; в) $-2$; г) $-3i$;
д) $1+i$; е) $1-i$; ж) $1+i\sqrt{3}$; з) $-1+i\sqrt{3}$;
и) $-1-i\sqrt{3}$; к) $1-i\sqrt{3}$; л) $\sqrt{3}+i$; м) $-\sqrt{3}+i$;
н) $-\sqrt{3}-i$; о) $\sqrt{3}-i$; п) $1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; р) $2+\sqrt{3}+i$;
с) $1-(2+\sqrt{3})i$; т) $\cos\alpha - i\sin\alpha$; у) $\sin\alpha + i\cos\alpha$;
ф) $\dfrac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$; х) $1+\cos\varphi + i\sin\varphi$, $\varphi\in[-\pi,\pi]$;
ц) $\dfrac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\psi + i\sin\psi}$.

**21.2.** Вычислить выражения:

а) $(1+i)^{1000}$; б) $(1+i\sqrt{3})^{150}$; в) $(\sqrt{3}+i)^{30}$;
г) $\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)^{24}$; д) $(2-\sqrt{3}+i)^{12}$; е) $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{12}$;
ж) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$; з) $\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}+\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$.

**21.3.** Решить уравнения:

а) $|z|+z=8+4i$; б) $|z|-z=8+12i$.

**21.4.** Доказать следующие свойства модуля комплексных чисел:

а) $|z_1\pm z_2|\leqslant |z_1|+|z_2|$; б) $||z_1|-|z_2||\leqslant |z_1\pm z_2|$;

в) $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$ тогда и только тогда, когда векторы $z_1$ и $z_2$ имеют одинаковые направления;

г) $|z_1+z_2|=||z_1|-|z_2||$ тогда и только тогда, когда векторы $z_1$ и $z_2$ имеют противоположные направления.

**21.5.** Доказать, что:

а) если $|z|<1$, то $|z^2-z+i|<3$;
б) если $|z|\leqslant 2$, то $1\leqslant |z^2-5|\leqslant 9$;
в) если $|z|<1/2$, то $|(1+i)z^3+iz|<3/4$.

**21.6.** Доказать неравенство

$$|z_1-z_2|\leqslant ||z_1|-|z_2||+\min\{|z_1|,|z_2|\}\cdot|\arg z_1-\arg z_2|.$$

В каком случае это неравенство обращается в равенство?



**21.7.** Доказать, что если $u=\sqrt{z_1z_2}$, то

$$|z_1|+|z_2|=\left|\frac{z_1+z_2}{2}-\sqrt{z_1z_2}\right|+\left|\frac{z_1+z_2}{2}+\sqrt{z_1z_2}\right|.$$

**21.8.** Доказать формулу Муавра

$$\big[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\big]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

для целых $n\neq 0$.

**21.9.** При $n\in\mathbb{Z}$ вычислить выражения:

а) $(1+i)^n$; б) $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n$;
в) $\left(\dfrac{1-i\operatorname{tg}\alpha}{1+i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n$; г) $(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)^n$.

**21.10.** Доказать, что если $z+z^{-1}=2\cos\varphi$, то $z^n+z^{-n}=2\cos n\varphi$, где $n\in\mathbb{Z}$.

**21.11.** Представить в виде многочленов от $\sin x$ и $\cos x$ функции:

а) $\sin 4x$; б) $\cos 4x$; в) $\sin 5x$; г) $\cos 5x$.

**21.12.** Доказать равенства:

а) $\cos nx=\displaystyle\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}x\cdot\sin^{2k}x$;

б) $\sin nx=\displaystyle\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}(-1)^k\binom{n}{2k+1}\cos^{n-2k-1}x\cdot\sin^{2k+1}x$.

**21.13.** Выразить через первые степени синуса и косинуса аргументов, кратных $x$, функции:

а) $\sin^4 x$; б) $\cos^4 x$; в) $\sin^5 x$; г) $\cos^5 x$.

**21.14.** Доказать равенства:

а) $\cos^{2m}x=\dfrac{1}{2^{2m-1}}\left[\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\binom{2m}{k}\cos(2m-2k)x+\frac{1}{2}\binom{2m}{m}\right]$;

б) $\cos^{2m+1}x=\dfrac{1}{2^{2m}}\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{k}\cos(2m+1-2k)x$;

в) $\sin^{2m} x =$

$$= \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}} \left[ \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{2m}{k} \cos(2m-2k)x + \frac{(-1)^m}{2} \binom{2m}{m} \right];$$

г) $\sin^{2m+1} x = \dfrac{(-1)}{2^{2m}} \sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^k \dbinom{2m+1}{k} \sin(2m+1-2k)x.$

## § 22. Корни из комплексных чисел и многочлены деления круга

**22.1.** Доказать, что если комплексное число $z$ является одним из корней степени $n$ из числа вещественного $a$, то и сопряжённое число $\overline{z}$ является одним из корней степени $n$ из $a$.

**22.2.** Доказать, что если $\sqrt[n]{z} = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, то $\sqrt[n]{\overline{z}} = \{\overline{z}_1, \overline{z}_2, \ldots, \overline{z}_n\}$.

**22.3.** Какие из множеств $\sqrt[n]{z}$ содержат хотя бы одно вещественное число?

**22.4.** Пусть $z$ и $w$ — комплексные числа. Доказать равенства[1]:

а) $\sqrt[n]{z^n w} = z\sqrt[n]{w}$; б) $\sqrt[n]{-z^n w} = -z\sqrt[n]{w}$;

в) $\sqrt[n]{zw} = u\sqrt[n]{w}$, где $u$ — одно из значений $\sqrt[n]{z}$.

**22.5.** Доказать, что объединение множеств $\sqrt[n]{z}$ и $\sqrt[n]{-z}$ есть множество $\sqrt[2n]{z^2}$.

**22.6.** Верно ли равенство $\sqrt[ns]{z^s} = \sqrt[n]{z}$ $(s > 1)$?

**22.7.** Вычислить:

а) $\sqrt[6]{i}$; б) $\sqrt[10]{512(1-i\sqrt{3})}$; в) $\sqrt[8]{2\sqrt{2}(1-i)}$;

г) $\sqrt[3]{1}$; д) $\sqrt[4]{1}$; е) $\sqrt[6]{1}$;

ж) $\sqrt[3]{i}$; з) $\sqrt[4]{-4}$; и) $\sqrt[6]{64}$;

к) $\sqrt[8]{16}$; л) $\sqrt[6]{-27}$; м) $\sqrt[4]{8\sqrt{3}i-8}$;

н) $\sqrt[4]{-72(1-i\sqrt{3})}$; о) $\sqrt[3]{1+i}$; п) $\sqrt[3]{2-2i}$;

р) $\sqrt[4]{-\dfrac{18}{1+i\sqrt{3}}}$; с) $\sqrt[4]{\dfrac{7-2i}{1+i\sqrt{2}} + \dfrac{4+14i}{\sqrt{2}+2i} - (8-2i)}$;

[1] Множество $zA$ есть по определению $\{za \mid a \in A\}$.



т) $\sqrt[3]{\dfrac{1-5i}{1+i} - 5\dfrac{1+2i}{2-i} + 2}$; у) $\sqrt[4]{\dfrac{-2+2\sqrt{3}i}{2+i\sqrt{5}} - 5\dfrac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{5}+5i}}$.

**22.8.** Найти двумя способами корни степени 5 из единицы и выразить в радикалах:

а) $\cos\dfrac{2\pi}{5}$; б) $\sin\dfrac{2\pi}{5}$; в) $\cos\dfrac{4\pi}{5}$; г) $\sin\dfrac{4\pi}{5}$.

**22.9.** Решить уравнения:

а) $(z+1)^n + (z-1)^n = 0$; б) $(z+1)^n - (z-1)^n = 0$;

в) $(z+i)^n + (z-i)^n = 0$.

**22.10.** Выразить в радикалах вещественные и мнимые части корней из единицы степеней 2, 3, 4, 6, 8, 12.

**22.11.** Найти произведение всех корней степени $n$ из единицы.

**22.12.** Пусть $\varepsilon_k = \cos\dfrac{2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{2\pi k}{n}$ $(0 \leqslant k < n)$. Доказать, что:

а) $\sqrt[n]{1} = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}\}$;

б) $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$ $(0 \leqslant k < n)$;

в) $\varepsilon_k \varepsilon_l = \begin{cases} \varepsilon_{k+l}, & \text{если } k+l < n, \\ \varepsilon_{k+l-n}, & \text{если } k+l \geqslant n \end{cases}$ $(0 \leqslant k < n,\ 0 \leqslant l < n)$;

г) множество $\mathbf{U}_n$ корней степени $n$ из единицы является циклической группой порядка $n$ относительно умножения;

д) всякая циклическая группа порядка $n$ изоморфна группе $\mathbf{U}_n$.

**22.13.** Доказать, что:

а) если числа $r$ и $s$ взаимно просты и $\alpha^r = \alpha^s = 1$, то $\alpha = 1$;

б) если $d$ — наибольший общий делитель чисел $r$ и $s$, то $\mathbf{U}_r \cap \mathbf{U}_s = \mathbf{U}_d$;

в) если числа $r$ и $s$ взаимно просты, то всякий корень из единицы степени $rs$ однозначно представляется в виде произведения корня степени $r$ на корень степени $s$.

**22.14.** Доказать, что следующие утверждения равносильны:

а) $\varepsilon$ является первообразным корнем из единицы степени $n$;

б) порядок $\varepsilon$ в группе $\mathbf{U}_n$ равен $n$;

в) $\varepsilon$ является порождающим элементом группы $\mathbf{U}_n$.

**22.15.** Доказать, что если $\varepsilon$ является первообразным корнем степени $n$ из единицы, то $\overline{\varepsilon}$ также является первообразным корнем степени $n$ из единицы.

**22.16.** Доказать, что если числа $r$ и $s$ взаимно просты, то $\varepsilon$ является первообразным корнем степени $rs$ из единицы тогда и только тогда, когда $\varepsilon$ является произведением первообразного корня степени $r$ и первообразного корня степени $s$.

**22.17.** а) Пусть $z$ — первообразный корень $n$-й степени из 1. Вычислить

$$1 + 2z + 3z^2 + \ldots + nz^{n-1}.$$

б) Пусть $z$ — первообразный корень степени $2n$ из 1. Вычислить

$$1 + z + \ldots + z^{n-1}.$$

в) Пусть $z$ — корень из 1 и $z^n \pm z^m \pm 1 = 0$. Найти $n$ и $m$.

**22.18.** Доказать, что:

а) число первообразных корней степени $n$ из единицы равно $\varphi(n)$ (см. 1.4);

б) если числа $m$ и $n$ взаимно просты, то $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

**22.19.** Доказать, что если $z$ — первообразный корень нечётной степени $n$ из единицы, то $-z$ — первообразный корень степени $2n$.

* * *

**22.20.** Обозначим через $\sigma(n)$ сумму всех первообразных корней степени $n$ из единицы. Доказать, что:

а) $\sigma(1) = 1$;

б) если $n > 1$, то $\sum\limits_{d|n} \sigma(d) = 0$;

в) $\sigma(p) = -1$, если $p$ — простое число;

г) $\sigma(p^k) = 0$, если $p$ — простое число, $k > 1$;

д) $\sigma(rs) = \sigma(r) \cdot \sigma(s)$, если числа $r$ и $s$ взаимно просты;

е) функция $\sigma(n)$ совпадает с функцией Мёбиуса $\mu(n)$.

**22.21.** Пусть $d$ — (положительный) наибольший общий делитель целого числа $s$ и натурального числа $n$, $\varepsilon_i$ — первообразный корень степени $n$ из единицы ($i = 1, 2, \ldots, \varphi(n)$). Доказать равенство

$$\sum_{i=1}^{\varphi(n)} \varepsilon_i^s = \frac{\varphi(n)}{\varphi(n/d)}\, \mu\left(\frac{n}{d}\right).$$



**22.22.** Является ли число $\dfrac{2+i}{2-i}$ корнем некоторой степени из единицы?

**22.23.** Найти многочлены деления круга (круговые многочлены) $\Phi_n(x)$ для $n$, равного:

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 6; е) 12;

ж) $p$, где $p$ — простое число;

з) $p^k$, где $p$ — простое число, $k > 1$.

**22.24.** Доказать следующие свойства круговых многочленов:

а) $\prod\limits_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$;

б) $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$ ($n$ — нечётное число, большее 1);

в) $\Phi_n(x) = \prod\limits_{d|n} (x^d - 1)^{\mu(n/d)}$;

г) если $k$ делится на любой простой делитель числа $n$, то

$$\Phi_n(x) = \Phi_k(x^{n/k});$$

д) если $n$ делится на простое число $p$ и не делится на $p^2$, то

$$\Phi_n(x) = \Phi_{n/p}(x^p) \left(\Phi_{n/p}(x)\right)^{-1}.$$

**22.25.** Найти круговые многочлены для $n$, равного 10, 14, 15, 30, 36, 100, 216, 288, 1000.

**22.26.** Доказать, что у всякого кругового многочлена:

а) все коэффициенты — целые числа;

б) старший коэффициент равен 1;

в) свободный член равен $-1$ при $n = 1$ и равен 1 при $n > 1$.

**22.27.** Найти сумму коэффициентов кругового многочлена $\Phi_n(x)$.

## § 23. Вычисления с помощью комплексных чисел

**23.1.** Вычислить суммы:

а) $1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \ldots$;

б) $\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \ldots$;

в) $1+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\ldots$; г) $\binom{n}{1}+\binom{n}{5}+\binom{n}{9}+\ldots$

**23.2.** Доказать равенства:

а) $\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ $(x\neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z})$;

б) $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ $(x\neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z})$;

в) $\cos\dfrac{\pi}{n}+\cos\dfrac{3\pi}{n}+\cos\dfrac{5\pi}{n}+\ldots+\cos\dfrac{(2n-1)\pi}{n}=0$;

г) $\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{3\pi}{n}+\sin\dfrac{5\pi}{n}+\ldots+\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{n}=0$;

д) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}(x+\varepsilon_k y)^n=x^n+y^n$ $(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1}$ — корни степени $n$ из единицы);

е) $x^{2n+1}-1=(x-1)\prod\limits_{k=1}^{n}\left(x^2-2x\cos\dfrac{\pi k}{2n+1}+1\right)$;

ж) $x^{2n}-1=(x^2-1)\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\dfrac{\pi k}{n}+1\right)$;

з) $\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\dfrac{\pi k}{2n}=\dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$; и) $\prod\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{\pi k}{2n+1}=\dfrac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$.

* * *

**23.3.** Решить уравнение

$$\cos\varphi+\binom{n}{1}\cos(\varphi+\alpha)x+\binom{n}{2}\cos(\varphi+2\alpha)x^2+\ldots$$
$$\ldots+\binom{n}{n}\cos(\varphi+n\alpha)x^n=0.$$

**23.4.** Доказать, что:

а) $1+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\ldots=\dfrac{1}{3}\left(2^n+2\cos\dfrac{\pi n}{3}\right)$;

б) $\binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\binom{n}{7}+\ldots=\dfrac{1}{3}\left(2^n+2\cos\dfrac{(n-2)\pi}{4}\right)$;



в) $\binom{n}{2}+\binom{n}{5}+\binom{n}{8}+\ldots=\dfrac{1}{3}\left(2^n+2\cos\dfrac{(n-4)\pi}{3}\right)$;

г) $$2\cos mx=(2\cos x)^m-\frac{m}{1}(2\cos x)^{m-2}+\frac{m(m-3)}{1\cdot 2}(2\cos x)^{m-4}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^k\frac{m(m-k-1)\ldots(m-2k+1)}{k!}(2\cos x)^{m-2k}+\ldots$$

**23.5.** Найти суммы:

а) $\cos x+\binom{n}{1}\cos 2x+\ldots+\binom{n}{n}\cos(n+1)x$;

б) $\sin x+\binom{n}{1}\sin 2x+\ldots+\binom{n}{n}\sin(n+1)x$;

в) $\sin^2 x+\sin^2 3x+\ldots+\sin^2(2n-1)x$;

г) $\cos x+2\cos 2x+3\cos 3x+\ldots+n\cos nx$;

д) $\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x+\ldots+n\sin nx$.

**23.6.** Доказать, что:

а) $\cos^2 x+\cos^2 2x+\ldots+\cos^2 nx=\dfrac{n}{2}+\dfrac{\cos(n+1)x\sin nx}{2\sin x}$;

б) $\sin^2 x+\sin^2 2x+\ldots+\sin^2 nx=\dfrac{n}{2}-\dfrac{\cos(n+1)x\sin nx}{2\sin x}$.

**23.7.** Доказать, что для нечётного натурального числа $m$

$$\frac{\sin mx}{\sin x}=(-4)^{(m-1)/2}\prod_{1\leqslant j\leqslant(m-1)/2}\left(\sin^2 x-\sin^2\frac{2\pi j}{m}\right).$$

## § 24. Связь комплексных чисел с геометрией на плоскости

**24.1.** Изобразить на плоскости точки, соответствующие числам $5,\ -2,\ -3i,\ \pm1\pm i\sqrt{3}$.

**24.2.** Найти комплексные числа, соответствующие:

а) вершинам квадрата с центром в начале координат, со сторонами длины 1, параллельными осям координат;

б) вершинам правильного треугольника с центром в начале координат, стороной, параллельной оси координат, вершиной на отрицательной вещественной полуоси и радиусом описанного круга, равным 1;

в) вершинам правильного шестиугольника с центром в точке $2+i\sqrt{3}$, стороной, параллельной оси абсцисс, и радиусом описанного круга, равным 2;

г) вершинам правильного $n$-угольника с центром в начале координат, одной из вершин которого является 1.

**24.3.** Указать геометрический смысл выражения $|z_1 - z_2|$, где $z_1$ и $z_2$ — заданные комплексные числа.

**24.4.** Указать геометрический смысл числа $\arg\dfrac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3}$, где $z_1$, $z_2$, $z_3$ — различные комплексные числа.

**24.5.** Как расположены на плоскости точки, соответствующие:

а) комплексным числам $z_1$, $z_2$, $z_3$, для которых

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0, \qquad |z_1| = |z_2| = |z_3| \neq 0;$$

б) комплексным числам $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$, для которых

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0, \qquad |z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| \neq 0;$$

**24.6.** Изобразить на плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам $z$, удовлетворяющим условиям:

а) $|z| = 1$; б) $\arg z = \pi/3$; в) $|z| \leqslant 2$;
г) $|z - 1 - i| < 1$; д) $|z + 3 + 4i| \leqslant 5$; е) $2 < |z| < 3$;
ж) $1 \leqslant |z - 2i| < 2$; з) $|\arg z| < \pi/6$; и) $|\operatorname{Re} z| \leqslant 1$;
к) $-1 < \operatorname{Re} iz < 0$; л) $|\operatorname{Im} z| = 1$; м) $|\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z| < 1$;
н) $|z-1|+|z+1| = 3$; о) $|z+2|-|z-2| = 3$; п) $|z-2| = \operatorname{Re} z+2$;
р) $\alpha < \arg(z - z_0) < \beta$, где $-\pi < \alpha < \beta \leqslant \pi$ и $z_0$ — заданное комплексное число.

**24.7.** Доказать тождество

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$$

и указать его геометрический смысл.

**24.8.** Пусть комплексные числа $z_1$, $z_2$, $z_3$ соответствуют вершинам параллелограмма $A_1$, $A_2$, $A_3$. Найти число, соответствующее вершине $A_4$, противолежащей $A_2$.

**24.9.** Найти комплексные числа, соответствующие противоположным вершинам квадрата, если двум его другим противоположным вершинам соответствуют числа $z$ и $w$.



**24.10.** Найти комплексные числа, соответствующие вершинам правильного $n$-угольника, если двум его соседним вершинам соответствуют числа $z_0$ и $z_1$.

**24.11.** Изобразить на плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам $z = \dfrac{1+ti}{1-ti}$, где $t \in \mathbb{R}$.

**24.12.** Доказать, что:

а) точки плоскости, соответствующие комплексным числам $z_1$, $z_2$, $z_3$, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда существуют вещественные числа $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, не все равные нулю, такие, что

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 = 0, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0;$$

б) точки плоскости, соответствующие различным комплексным числам $z_1$, $z_2$, $z_3$, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда число $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ является вещественным;

в) точки плоскости, соответствующие различным комплексным числам $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ и не лежащие на одной прямой, лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда их двойное отношение $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \dfrac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$ является вещественным числом.

**24.13.** Изобразить на плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам $z$, удовлетворяющим равенству $\left|\dfrac{z - z_1}{z - z_2}\right| = \lambda$, где $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ и $\lambda$ — положительное действительное число.

**24.14.** Найти $\min|3 + 2i - z|$ при $|z| \leqslant 1$.

**24.15.** Найти $\max|1 + 4i - z|$ при $|z - 10i + 2| \leqslant 1$.

**24.16.** (*Лемниската.*) Изобразить на плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам $z$, удовлетворяющим равенству $|z^2 - 1| = \lambda$. При $\lambda = 1$ записать уравнение полученной кривой в полярных координатах.

**24.17.** *Расширенной комплексной плоскостью* называется комплексная плоскость, дополненная бесконечно удаленной точкой $\infty$. Доказать, что если $(z_1, z_2, z_3)$ и $(w_1, w_2, w_3)$ — две тройки попарно различных точек расширенной комплексной плоскости, то существует дробно-линейное преобразование

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0,$$

переводящее первую тройку во вторую.

**24.18.** Доказать, что если в каждой из двух четвёрок $(z_1, z_2, z_3, z_4)$ и $(w_1, w_2, w_3, w_4)$ точек расширенной комплексной плоскости все точки попарно различны, то дробно-линейное преобразование, переводящее одну из этих четвёрок в другую, существует тогда и только тогда, когда совпадают двойные отношения:

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = \frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3} : \frac{w_1 - w_4}{w_2 - w_4}.$$

**24.19.** Доказать, что при дробно-линейном преобразовании расширенной комплексной плоскости прямые и окружности переходят в прямые и окружности.

**24.20.** Доказать, что дробно-линейное преобразование

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad ad - bc = 1,$$

переходит вещественную прямую в себя тогда и только тогда, когда матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ пропорциональна вещественной матрице.

**24.21.** Выяснить геометрический смысл дробно-линейного преобразования $w = 1/z$.

**24.22.** Выяснить геометрический смысл преобразования комплексной плоскости, заданного формулой $w = z^n$ $(n \geqslant 2)$.

* * *

**24.23.** Доказать, что функция Жуковского $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ отображает:

а) окружность $|z| = 1$ на отрезок $[-1, 1]$ действительной оси;

б) окружность $|z| = R$, $R \neq 1$, в эллипс с фокусами $-1, 1$;

в) луч $\arg z = \varphi$ в ветвь гиперболы с фокусами $-1, 1$.

**24.24.** Доказать, что всякое дробно-линейное преобразование, отображающее открытую верхнюю полуплоскость на внутренность единичного круга с центром в начале координат, имеет вид

$$w = a\frac{z - b}{z - \overline{b}}, \qquad |a| = 1, \quad \operatorname{Im} b > 0.$$



**24.25.** Доказать, что всякое дробно-линейное преобразование, отображающее единичный круг с центром в начале координат на себя, имеет вид

$$w = a\frac{z - b}{1 - z\overline{b}}, \qquad |a| = 1, \quad b < 1.$$

**24.26.** Для каких комплексных чисел $a$ отображение $z \to z + az^2$ отображает круг $|z| \leqslant 1$ биективно в себя?