Задача 2.1. Выпишите все слагаемые определителя матрицы 4×4 с соответствующими знаками.

Задача 2.2. Задачи 190, 191 и 192 из скана.

Задача 2.3. Задача 198 из скана.

Задача 2.4. Найдите коэффициенты при x^4 и x^3 в определителе

$$\begin{vmatrix} 1 & 2x & x & 3 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -x & 2 & x \end{vmatrix}$$

Задача 2.5. Задача 204 из скана.

Указание: вспомните, как на лекциях вычислялся определитель верхнетреугольной матрицы.

Задача 2.6. Задача 205 из скана.

Подстановки и комбинаторика. Как мы уже хорошо знаем, всего подстановок на n элементах $n!$ штук. Напомним, что доказывается это так: если мы конструируем подстановку σ, то образ 1 мы можем выбрать n способами, образ 2 — $(n-1)$ способами (ведь $\sigma(1)$ уже использован и не может быть использован снова), образ 3 — $(n-2)$ способами (ведь $\sigma(1)$ и $\sigma(2)$ уже заняты) и так далее. По правилу произведения для подсчёта общего количества подстановок нам надо перемножить эти числа. Разберём ещё несколько примеров.

Пример 1. Сколько среди подстановок на n элементах циклов длины n? Цикл имеет вид $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Выбрать порядок $i_1, \ldots, i_n$ мы можем $n!$ способами, но так как элементы цикла можно сдвигать по циклу, ничего не меняя:

$$(i_1, i_2, \ldots, i_n) = (i_2, i_3 \ldots, i_n, i_1) = (i_3, i_4, \ldots, i_n, i_1, i_2) = \ldots$$

каждый цикл мы посчитали n раз (столько, сколько раз элементы $i_1, i_2, \ldots, i_n$ можно сдвинуть по циклу). Следовательно, циклов у нас $\frac{n!}{n} = (n-1)!$.

Пример 2. Сколько среди подстановок на n элементах циклов длины $k \leqslant n$? Если мы зафиксировали k различных элементов $i_1, \ldots, i_k$, которые составят цикл, то цикл на них можно выбрать $(k-1)!$ способами (см. выше!). А зафиксировать k различных элементов из n можно C_n^k способами. Итого циклов длины k у нас $C_n^k \cdot (k-1)!$ штук.

Пример 3. Сколько среди подстановок на n элементах подстановок, раскладывающихся в произведение независимых транспозиции и цикла длины 3? Нас интересуют подстановки вида $(i, j, k)(l, m)$. Цикл (i, j, k) можно выбрать $C_m^3 \cdot (3-1)!$ способами (см. выше!). Теперь из n мы заняли 3, свободными остались $n-3$. На них выбрать транспозицию (=цикл длины 2) можно $C_{n-3}^2 \cdot (2-1)! = C_{n-3}^2$ способами. Итого подстановок нужного вида

$$C_n^3 \cdot 2 \cdot C_{n-3}^2$$

Пример 4. Сколько среди подстановок на n элементах подстановок, раскладывающихся в произведение трёх независимых транспозиций? Нас интересуют подстановки вида $(i, j)(k, l)(m, n)$. Казалось бы, в чём проблема? Делаем так же, как в предыдущем номере, и получаем

$$C_n^2 \cdot C_{n-2}^2 \cdot C_{n-4}^2$$

Проблема в том, что $(i,j)(k,l)(m,n) = (i,j)(m,n)(k,l) = \dots$, то есть мы все подстановки посчитали по несколько раз. А именно, каждая подстановка учтена столько раз, сколько можно переставить три транспозиции — то есть 3! способами. Отметим, что в прошлый раз этой проблемы не возникало, так как сначала мы выбирали цикл длины 3, потом цикл длины 2 — это принципиально разные сущности, в отличие от трёх транспозиций. Итого нужных нам подстановок

$$\frac{C_n^2 \cdot C_{n-2}^2 \cdot C_{n-4}^2}{3!}$$

Задача 2.7. Найдите число подстановок на n элементах, представимых в виде произведения

(a) $(i,j,k,l,m)(s,t)$ - независимых цикла длины 5 и транспозиции;

(b) $(i_1,i_2,i_3,i_4)(j_1,j_2,j_3,j_4)(k_1,k_2,k_3,k_4)$ - трёх независимых циклов длины 4.

Вы можете оставлять в ответе факториалы, биномиальные коэффициенты, их суммы и произведения.

Задача 2.8. Задача 212 из скана.

Задача 2.9. Как изменится определитель, если второй столбец заменить на (2*второй + 3*третий), а третий столбец заменить на (3*второй - 5*третий)?

Указание: вспомните, что преобразования столбцов можно представлять в виде умножения исходной матрицы справа на некоторую другую. Что это за матрица? А дальше используйте то, что $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Задача 2.10. Вычислите определитель $(n+1) \times (n+1)$:

$$\begin{vmatrix} -n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -n & \dots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -n \end{vmatrix}$$

Указание: докажите, что он равен нулю. Проще всего это сделать, если обнулить некоторую строку с помощью элементарных преобразований.

Задача 3.1. Задача 214 из скана.

Задача 3.2. Докажите, что чётных перестановок на n элементов столько же, сколько и нечётных.

Указание: Постройте взаимно-однозначное соответствие между множествами чётных и нечётных перестановок. Как сделать из чётной перестановки нечётную? Вам поможет транспозиция!

Задача 3.3. Числа 20604, 53227, 25755, 20927 и 289 делятся на 17. Не вычисляя определителя

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

докажите, что он также делится на 17.

Задача 3.4. Докажите, что любую чётную перестановку можно представить в виде произведения циклов длины 3.

Задача 3.5. Задача 216 из скана.