Семинар 23

8 апреля 2020

Прямая в $\mathbb{R}^3$

Способы задания прямой:

- $A + \langle u \rangle \sim A + tu, t \in \mathbb{F}$ (точка + направляющий вектор, траектория равномерного прямолинейного движения);
- система уравнений;

Направляющий вектор — любой (ненулевой!) вектор на прямой (параллельный прямой)

Все направляющие векторы коллинеарны (=пропорциональны)

Прямая в $\mathbb{R}^3$ — через две точки

Задача. $l \ni A\ (x_0, y_0, z_0), B\ (x_1, y_1, z_1)$ — ?

$M\ (x, y, z) \in l \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AB}$, то есть $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AB}$ пропорциональны:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Задача. $l \ni A\ (x_0, y_0, z_0); l \parallel u = (\alpha, \beta, \gamma)$ — ?

$M\ (x, y, z) \in l \iff \overrightarrow{AX} \parallel u$, то есть $\overrightarrow{AX}$ и u пропорциональны:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$$

Применяйте с осторожностью:
Пример. $l \ni A\ (1,2,0), B\ (-1,2,1)$ — ?

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-0}{1} \qquad ?!$$

Всё нормально, если правильно всё понимать:

$$\frac{y-2}{0} = \frac{z-0}{1} \text{ означает } (y-2)\cdot 1 = (z-0)\cdot 0$$

То есть $y=2$. Логично! Но важно не забыть $\frac{x-1}{-2} = \frac{z-0}{1}$.

Пример. $l = \{x - 2z = 1\} \cap \{y + 3z = -2\}$ — ?

- Пишем систему:

$$\begin{cases} x - 2z = 1; \\ y + 3z = -2 \end{cases}$$

- Находим общее решение:

$$\begin{pmatrix} 1 + 2z \\ -2 - 3z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} z$$

- Пишем ответ:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{-3} = \frac{z - 0}{1}$$

Прямая в $\mathbb{R}^3$ — взаимное расположение двух прямых

Дано. $l = A + \langle u \rangle$, $l = B + \langle v \rangle$

- Параллельность (или совпадение): $u \parallel v$ (они пропорциональны)
- Параллельность (и не совпадение): при этом ещё $\overrightarrow{AB} \nparallel u$
- Прямые не параллельны, но пересекаются в одной точке = прямые лежат в одной плоскости и не параллельны = векторы $u, v, \overrightarrow{AB}$ компланарны, $u \nparallel v$.
  Компланарность проверяем: $(u, v, \overrightarrow{AB}) = 0$
- Прямые скрещиваются: $(u, v, \overrightarrow{AB}) \neq 0$

Плоскость в $\mathbb{R}^3$

Способы задания плоскость:

- $A + \langle u, v \rangle$;
- Параметрическое задание (то же самое, но длинней):

$$\begin{cases} x = A_x + tu_x + sv_x, \\ y = A_y + tu_y + sv_y, \\ z = A_z + tu_z + sv_z \end{cases}$$

- Линейное уравнение $ax + by + cz + d = 0$;

Плоскость в $\mathbb{R}^3$ — нормальный вектор

Пусть $\alpha : ax + by + cz + d = 0$, $\alpha \ni A\ (x_0, y_0, z_0), B\ (x_0, y_0, z_0)$.

$$\begin{matrix} ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \end{matrix} \implies a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) = 0$$

Вывод: любой вектор в α ортогонален вектору $n_\alpha = (a, b, c)$.

Нормальный вектор к плоскости — это ненулевой вектор, ортогональный плоскости. Мы поняли: все нормальные векторы пропорциональны вектору (a, b, c).

Задача. $\alpha \ni A\ (x_0, y_0, z_0), B\ (x_1, y_1, z_1),\ C\ (x_2, y_2, z_2)$ — ?

$M\ (x, y, z) \in l \iff \overrightarrow{AM}$ коллинеарен $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, то есть $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$, то есть:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

Задача. $\alpha \ni A\ (x_0, y_0, z_0)$, $\alpha \parallel u\ (u_x, u_y, u_z), v\ (v_x, v_y, v_z)$ — ?

- $n_\alpha = [u, v] = (a, b, c)$;
- Теперь подставляем точку A, чтобы найти d:

$$d = -ax_0 - by_0 - cz_0$$

Плоскость в $\mathbb{R}^3$ — ещё пример

Задача. $\alpha \ni A\ (x_0, y_0, z_0), B\ (x_1, y_1, z_1),\ \alpha \parallel u\ (u_x, u_y, u_z)$ — ?

Плоскость в $\mathbb{R}^3$ — ещё пример

Задача. $\alpha \ni A\ (x_0, y_0, z_0), B\ (x_1, y_1, z_1),\ \alpha \parallel u\ (u_x, u_y, u_z)$ — ?

Сводим к тому, что уже умеем, одним из двух способов:

- $C = A + u$;
- $v = \overrightarrow{AB}$.

Задача. $\alpha \ni A$, $\alpha \supseteq l = B + \langle u \rangle$ — ?

Плоскость в $\mathbb{R}^3$ — ещё пример

Задача. $\alpha \ni A$, $\alpha \supseteq l = B + \langle u \rangle$ — ?

И снова сводим к тому, что уже умеем, одним из двух способов:

- $C = B + u$;
- $v = \overrightarrow{AB}$.

Плоскость в $\mathbb{R}^3$ — взаимное расположение трёх плоскостей

Дано. $\alpha_i : a_i x + b_i y + c_i z + d_i, i = 1, 2, 3$
$n_i = (a_i, b_i, c_i) \perp \alpha_i$

- Пересекаются в одной точке: $(n_1, n_2, n_3) \neq 0$;
- «Прямая пересечения любых двух параллельна третьей»: $(n_1, n_2, n_3) = 0$, но никакая пара не коллинеарна (и все прямые пересечения параллельны $[n_1, n_2]$), система не имеет решений;
- Пересекаются по прямой: $(n_1, n_2, n_3) = 0$, но никакая пара не коллинеарна, система имеет решения;
- $\alpha_i \parallel \alpha_j$: n_i и n_j пропорциональны.

Сложная задача

Задача. $l \ni A$, l пересекает $k = B + \langle u \rangle$ и $m = C + \langle v \rangle$

Сложная задача

Задача. $l \ni A$, l пересекает $k = B + \langle u \rangle$ и $m = C + \langle v \rangle$

- $l \ni A$, l пересекает $k = B + \langle u \rangle$ — это значит, что l лежит в плоскости, содержащей A и k — задаём эту плоскость уравнением;
- $l \ni A$, l пересекает $m = C + \langle v \rangle$ — это значит, что l лежит в плоскости, содержащей A и m — задаём эту плоскость уравнением;
- Находим прямую пересечения этих плоскостей!
- А что если плоскости совпали?

Задача. $l = A + \langle u \rangle$. $\rho(B, l) = ?$.

Задача. $l = A + \langle u \rangle$. $\rho(B, l) = ?$.

Расстояние равно длине высоты параллелограмма, образованного векторами $\overrightarrow{AB}$ и u. Оно равно

$$\frac{S(\overrightarrow{AB}, u)}{|u|}$$

Задача. $l = A + \langle u \rangle$, $k = B + \langle v \rangle$. $\rho(l, k) = ?$.

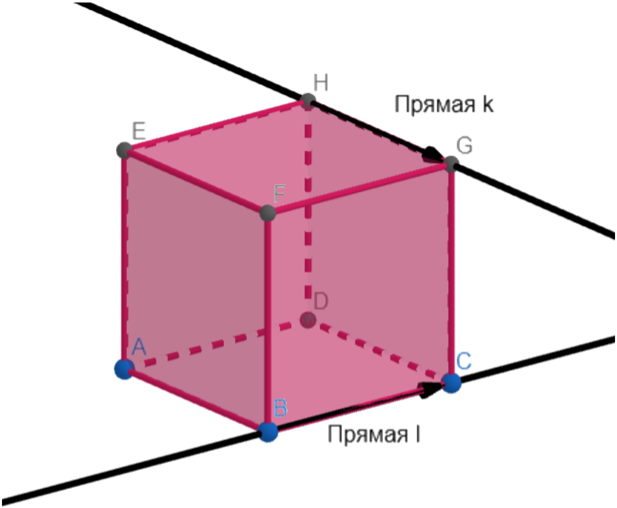
Расстояние между скрещивающимися прямыми

Задача. $l = A + \langle u \rangle$, $k = B + \langle v \rangle$. $\rho(l, k) = ?$.

Расстояние равно объёму параллелепипеда, построенного на этих прямых, делённому на площадь его основания:

$$\rho(l, k) = \frac{|(\overrightarrow{AB}, u, v)|}{|[u, v]|}$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми



Задача. $A = (x_0, y_0, z_0)$, $\alpha : ax + by + cz + d = 0$. $\rho(A, \alpha) =?$

Задача. $A = (x_0, y_0, z_0)$, $\alpha : ax + by + cz + d = 0$. $\rho(A, \alpha) = ?$

$$\rho(A, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Задача. $A = (x_0, y_0, z_0)$, $\alpha : ax + by + cz + d = 0$. $\rho(A, \alpha) = ?$

Задача. $A = (x_0, y_0, z_0)$, $\alpha : ax + by + cz + d = 0$. $\rho(A, \alpha) =?$

$$\rho(A, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Проекция точки на плоскость

Задача. $A = (x_0, y_0, z_0)$, $\alpha : ax + by + cz + d = 0$. $pr_\alpha(A) =?$

Проекция точки на плоскость

Задача. $A = (x_0, y_0, z_0)$, $\alpha : ax + by + cz + d = 0$. $pr_\alpha(A) =?$

$A - pr_\alpha(A)$ — это перпендикуляр, то есть что-то, коллинеарное $n_\alpha = (a, b, c)$.
Ищем такое $t \in \mathbb{R}$, для которого $A + tn_\alpha \in \alpha$. Подставляем в уравнение плоскости и находим:

$$a(x_0 + ta) + b(y_0 + tb) + c(z_0 + tc) + d = 0$$

$$t = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Углы

- Угол между прямыми = угол между направляющими векторами или (π - этот угол); в любом случае, косинус правильного угла — это модуль косинуса угла между напр. векторами;
- Косинус угла между плоскостями = модуль косинуса угла между нормальными векторами;
- Косинус угла между прямой и плоскостью =

- Угол между прямыми = угол между направляющими векторами или (π - этот угол); в любом случае, косинус правильного угла — это модуль косинуса угла между напр. векторами;
- Косинус угла между плоскостями = модуль косинуса угла между нормальными векторами;
- Косинус угла между прямой и плоскостью =синус угла между направляющим вектором прямой и нормальным вектором к плоскости.