Линал ДЗ-28 Помарихов Борис БПМИ-216 Волшебное число - 4

№ 718(4)

$$4x^2+4y^2-8z^2-10xy+4yz+4zx-16x-16y+10z-2=0$$

$$Q=\begin{pmatrix}4&-5&2\\-5&4&2\\2&2&-8\end{pmatrix}$$

$$\chi_Q(t)=-t^3+0\cdot t^2-(-9-36-36)t+\det Q \ominus$$

$$\det\begin{pmatrix}4&-5&2\\-5&4&2\\2&2&-8\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}0&-9&18\\1&10&-22\\2&2&-8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-9&18\\1&10&-22\\0&-18&36\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-9&18\\-18&36\end{vmatrix}=0$$

$$\ominus\ -t^3+81t=t(9-t)(9+t)$$

$V_0=\ker(Q)$

$$\begin{pmatrix}4&-5&2\\-5&4&2\\2&2&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&10&-22\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&-2\end{pmatrix}\rightsquigarrow ФСР:\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\quad e_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

$V_9=\ker(Q-9E)$

$$\begin{pmatrix}-5&-5&2\\-5&-5&2\\2&2&-17\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&2&-17\\-5&-5&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&2&-17\\1&1&-43\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\rightsquigarrow ФСР\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\quad e_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$V_{-9}=\ker(Q+9E)$

$$\begin{pmatrix}13&-5&2\\-5&13&2\\2&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&13&5\\13&-5&2\\2&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&13&5\\0&-36&-9\\0&-252&-63\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&13&5\\0&1&\frac14\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac14\\0&1&\frac14\end{pmatrix}\rightsquigarrow ФСР\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}$$

$$e_3=\frac{1}{3\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}$$

Получили новый базис e_1, e_2, e_3, в котором Q диаг и равна $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&9&0\\0&0&-9\end{pmatrix}$

Матрица перехода C к этому базису равна $C=\begin{pmatrix}\frac23&-\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{3\sqrt2}\\\frac23&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{3\sqrt2}\\\frac13&0&\frac{4}{3\sqrt2}\end{pmatrix}$

Раньше была лин. форма ε, хотим найти ε', т.ч. $\varepsilon'\cdot h'=\varepsilon'\cdot C^{-1}h=\varepsilon\cdot h$

$\Rightarrow \varepsilon'=\varepsilon\cdot C$

$$\varepsilon'=(-16\ -16\ 10)\cdot\begin{pmatrix}\frac23&-\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{3\sqrt2}\\\frac23&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{3\sqrt2}\\\frac13&0&\frac{4}{3\sqrt2}\end{pmatrix}=(-28\ \ 0\ \ 12\sqrt2)$$

Теперь найдем выражение старых координат через новые (другими словами каноническую сист. коорд-т)

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C\cdot\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=C\cdot\begin{pmatrix}x''+\frac{3}{14}\\y'\\z''+\frac{2\sqrt2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac23x''+\frac17-\frac{y'}{\sqrt2}-\frac{z''}{3\sqrt2}-\frac29\\\frac23x''+\frac17+\frac{y'}{\sqrt2}-\frac{z''}{3\sqrt2}-\frac29\\\frac13x''+\frac{1}{14}+\frac{4z''}{3\sqrt2}+\frac89\end{pmatrix}$$

Ответ

В новом базисе:

$$9(y')^2-9(z')^2-28x'+12\sqrt2z'-2=0$$

$$9(y')^2-9\underbrace{\left(z'-\frac{2\sqrt2}{3}\right)}_{z''}{}^2=28x'-6=14\cdot2\underbrace{\left(x'-\frac{3}{14}\right)}_{x''}$$

$$\frac{(y')^2}{\left(\frac{\sqrt{14}}{3}\right)^2}-\frac{(z'')^2}{\left(\frac{\sqrt{14}}{3}\right)^2}=2x''$$

– итоговый вид, т.е. каноническое ур-е поверхности, которая наз-ся гиперболический параболоид (в народе седло)

N 718 (7)

$$2x^2+2y^2-5z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0$$

$$Q=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&-5\end{pmatrix}$$

$$\chi_Q(t)=-t^3-t^2-(-17)t+(-15)=-t^3-t^2+17t-15=(t-1)(t-3)(t+5)$$

Получаем с.з. $1, +3, -5$.

$$\begin{array}{l|l} -t^3-t^2+17t-15 & t-1 \\ \hline -(-t^3+t^2) & -t^2-2t+15 \\ \quad -2t^2+17t & \\ \quad -(-2t^2+2t) & \\ \qquad 15t-15 & \\ \qquad -(15t-15) & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$D=4+60=64=8^2$

$t=\frac{2\pm 8}{-2}=-1\pm 4$

$t_1=+3$

$t_2=-5$

$V_1=\mathrm{Ker}(Q-E)$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\rightsquigarrow \text{ФСР: }\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\quad e_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$V_3=\mathrm{Ker}(Q-3E)$

$$\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1&0\\0&0&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\rightsquigarrow \text{ФСР }\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\quad e_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$V_{-5}=\mathrm{Ker}(Q+5E)$

$$\begin{pmatrix}7&1&0\\1&7&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\rightsquigarrow \text{ФСР }\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Получили новый базис e_1, e_2, e_3 в котором $Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-5\end{pmatrix}$

Матрица перехода от старого базиса к новому $C=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$\varepsilon'=\varepsilon C=(-2\ -4\ -4)\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}=(-\sqrt2\ \ -3\sqrt2\ \ -4)$$

Теперь найдем выражение старых координат через новые

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C\cdot\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=C\cdot\begin{pmatrix}x''+\frac{1}{\sqrt2}\\y''+\frac{1}{\sqrt2}\\z''-\frac{2}{5}\end{pmatrix}=$$

$=$ что-то страшное

В новом базисе:

$$(x')^2+3(y')^2-5(z')^2-\sqrt2x'-3\sqrt2y'-4z'+2=0$$

$$\underbrace{\left(x'-\frac{1}{\sqrt2}\right)}_{x''}{}^2+3\underbrace{\left(y'-\frac{1}{\sqrt2}\right)}_{y''}{}^2-5\underbrace{\left(z'+\frac{2}{5}\right)}_{z''}{}^2=\frac{4}{5}$$

Ответ:

$$\frac{(x'')^2}{\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)^2}+\frac{(y'')^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{15}}\right)^2}-\frac{(z'')^2}{\left(\frac{2}{5}\right)^2}=1$$

– канонический вид однополостного гиперболоида

№ 71k (11)

$$2x^2+y^2+2z^2-2xy+2yz+4x+4z=0$$

$$Q=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\qquad \begin{vmatrix}2&-1&0\\-1&1&1\\0&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1&1\\2&-1&0\\0&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1&1\\0&1&2\\0&1&2\end{vmatrix}=0$$

$$\chi_Q(t)=-t^3+5t^2-(1+1+4)t+0=t(-t^2+5t-6)=-t(t^2-5t+6)=$$

$$=-t(t-2)(t-3) \Rightarrow$$ Собственные знач равны 0, 2, 3

$V_0=\ker(Q)$

$$\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}\rightsquigarrow \text{ФСР}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}\qquad e_1=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$V_2=\ker(Q-2E)$

$$\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\rightsquigarrow \text{ФСР}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\qquad e_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$V_3=\ker(Q-3E)$

$$\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-1&-2&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\rightsquigarrow \text{ФСР}:\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\qquad e_3=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Получим новый базис, в котором $Q=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

Матрица перехода от старого базиса к новому равна $C=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{2}{\sqrt6}&0&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$

$$\varepsilon'=\varepsilon\cdot C=(4\ 0\ 4)\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{2}{\sqrt6}&0&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}=(0\ \ 4\sqrt2\ \ 0)$$

В новом базисе:

$$2(y')^2+3(z')^2+4\sqrt2\,y'=0$$

$$2(y'+\sqrt2)^2+3(z')^2=4$$

y''

$$\frac{(y'')^2}{(\sqrt2)^2}+\frac{(z')^2}{\left(\frac{2}{\sqrt3}\right)^2}=1$$ – канонический $\underbrace{\text{вид цилиндра}}_{\text{эллиптического}}$

Теперь найдем выражение старых коор-т через новые

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C\cdot\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=C\cdot\begin{pmatrix}x'\\y''-\sqrt2\\z'\end{pmatrix}=\ldots$$

Ответ: