Разбор экзаменов и контрольных работ

Арунова Маргарита и Ларсик

https://vk.com/clublarsi

Содержание

Обозначения

Элементарные преобразования строк

- $Э_1(i, j, \lambda)$ – к i-й строке прибавить j-ю строку, умноженную на λ $(i \neq j)$
- $Э_2(i, j)$ – поменять местами i-ю и j-ю строки $(i \neq j)$
- $Э_3(i, \lambda)$ – i-ю строку умножить на $\lambda \neq 0$

Элементарные преобразования столбцов

- $Э_1^T(i, j, \lambda)$ – к i-му столбцу прибавить j-й столбец, умноженную на λ $(i \neq j)$
- $Э_2^T(i, j)$ – поменять местами i-й и j-й столбцы $(i \neq j)$
- $Э_3^T(i, \lambda)$ – i-й столбец умножить на $\lambda \neq 0$

Контрольная работа 1 – 2016/2017 учебный год

Задача 1. Найдите общее решение и укажите какое-нибудь частное решение следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 16x_4 = -1 \\ 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 13x_4 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 3 \end{cases}$$

Решение. Решим данную систему с помощью метода Гаусса. Запишем расширенную матрицу системы и применим к ней элементарные преобразования строк.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 5 & 6 & 16 & -1 \\ 5 & 2 & -2 & 13 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 8 & 3 \end{array}\right) \overset{\text{Э}_1(1,3,-2)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 10 & 0 & -7 \\ 5 & 2 & -2 & 13 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 8 & 3 \end{array}\right) \underset{\text{Э}_1(3,1,-3)}{\overset{\text{Э}_1(2,1,-5)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 10 & 0 & -7 \\ 0 & -13 & -52 & 13 & 39 \\ 0 & -8 & -32 & 8 & 24 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\underset{\text{Э}_3(3,-\frac{1}{8})}{\overset{\text{Э}_3(2,-\frac{1}{13})}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 10 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & -3 \end{array}\right) \overset{\text{Э}_1(3,2,-1)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 10 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{Э}_1(1,2,-3)}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Из полученного улучшенного ступенчатого вида матрицы несложно получить общее решение, выразив главные переменные через свободные.

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 2x_3 - 3x_4 \\ x_2 = -3 - 4x_3 + x_4 \\ x_3 \in \mathbb{R} \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Имеем следующее общее решение: $(2 + 2x_3 - 3x_4,\ -3 - 4x_3 + x_4,\ x_3,\ x_4),\ \ x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

Чтобы найти частное решение зафиксируем значения свободных переменных. Пусть $x_3 = 0$ и $x_4 = 0$, тогда $x_1 = 2 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0$ и $x_2 = -3 - 4 \cdot 0 + 0$, то есть частное решение имеет следующий вид $(2, -3, 0, 0)$.

Ответ: общее решение: $(2 + 2x_3 - 3x_4,\ -3 - 4x_3 + x_4,\ x_3,\ x_4),\ \ x_3, x_4 \in \mathbb{R}$

частное решение: $(2, -3, 0, 0)$

Задача 2. Вычислите матрицу $4AA^T - 6AB + 2B^TA^T - 3B^TB$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение. Вычислим матрицу $4AA^T$:

$$4AA^T = 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 & 4 \\ 4 & 56 \end{pmatrix}$$

Вычислим матрицу $-3B^TB$:

$$-3B^TB = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 0 & -42 \end{pmatrix}$$

Вычислим матрицу AB:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Зная AB, нетрудно получить матрицы $-6AB$ и $2B^TA^T = 2(AB)^T$:

$$-6AB = \begin{pmatrix} 6 & -66 \\ -24 & 36 \end{pmatrix}$$

$$2B^TA^T = 2(AB)^T = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}^T = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 11 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 22 & -12 \end{pmatrix}$$

Найдём матрицу $4AA^T - 6AB + 2B^TA^T - 3B^TB$:

$$\begin{pmatrix} 56 & 4 \\ 4 & 56 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -66 \\ -24 & 36 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 22 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 0 & -48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & -54 \\ 2 & 38 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 45 & -54 \\ 2 & 38 \end{pmatrix}$

Задача 3. (а) Вставьте вместо звёздочек недостающие числа так, чтобы получилась нечётная подстановка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 11 & 10 & * & 9 & 3 & 4 & 5 & * & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(б) Найдите 58 степень полученной в пункте (а) подстановки.

Решение. Перестановка (подстановка) σ называется нечётной, если $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$ (нечётное количество инверсий). Вместо звёздочек в данной перестановке должны быть числа 6 и 8, так как именно этих чисел из множества $\{1, \dots, 12\}$ не хватает в нижней строке.

Пусть на месте первой звёздочки стоит 6, а на месте второй 8. Найдём число инверсий в полученной перестановки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 11 & 10 & 6 & 9 & 3 & 4 & 5 & 8 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{число инверсий: } 11 + 10 + 9 + 5 + 7 + 2 + 2 + 2 + 3 + 2 + 0 + 0 = 53$$

В полученной перестановке нечётное число инверсий, значит, найденная перестановка нечётная и удовлетворяет условию.

Найдём 58 степень этой перестановки. Для этого разложим перестановку в произведение независимых циклов.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 11 & 10 & 6 & 9 & 3 & 4 & 5 & 8 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 12\ 2\ 11)(3\ 10\ 7\ 4\ 6)(5\ 9\ 8)$$

Если $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ длины независимых циклов в перестановке σ, то $\sigma^{\text{НОК}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} = id$. Значит, при возведении найденной перестановки σ в $4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$ степень мы получим id. Найти 58 степень можно следующим образом: $\sigma^{58} = \sigma^{60} \cdot \sigma^{-2} = id \cdot \sigma^{-2} = \sigma^{-1} \cdot \sigma^{-1}$. То есть достаточно найти обратную к σ перестановку и возвести её в квадрат. Перестановка σ^{-1} равна:

$$\begin{pmatrix} 12 & 11 & 10 & 6 & 9 & 3 & 4 & 5 & 8 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 11 & 12 & 6 & 7 & 8 & 4 & 10 & 9 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Возведём σ^{-1} в квадрат

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 11 & 12 & 6 & 7 & 8 & 4 & 10 & 9 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{\longleftarrow}{\cdot} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 11 & 12 & 6 & 7 & 8 & 4 & 10 & 9 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 1 & 4 & 10 & 9 & 7 & 3 & 5 & 8 & 6 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$

Ответ: (а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 11 & 10 & 6 & 9 & 3 & 4 & 5 & 8 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 1 & 4 & 10 & 9 & 7 & 3 & 5 & 8 & 6 & 12 & 11 \end{pmatrix}$

Задача 4. Вычислите определитель:

$$\begin{vmatrix} -7 & -2 & 10 & 6 \\ 10 & 8 & -25 & -5 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ -4 & -2 & 10 & 4 \end{vmatrix}$$

Решение. Вычислим определитель применяя к описанной матрице элементарные преобразования строк. Сведя матрицу к верхнетреугольному виду, нетрудно найти определитель, равный произведению диагональных элементов.

$$\begin{vmatrix} -7 & -2 & 10 & 6 \\ 10 & 8 & -25 & -5 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ -4 & -2 & 10 & 4 \end{vmatrix} \overset{\text{Э}_1(1,4,-2)}{\underset{\text{Э}_1(2,3,-5)}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -10 & -2 \\ 0 & 3 & -15 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ -4 & -2 & 10 & 4 \end{vmatrix} \overset{\text{Э}_1(4,3,2)}{\underset{\text{Э}_3(2,\frac{1}{3})}{=}} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -10 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{Э}_1(3,1,-2)}{\underset{\text{Э}_3(4,\frac{1}{2})}{=}}$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -10 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 18 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{Э}_1(3,2,3)}{=} 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -10 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{Э}_1(4,3,-1)}{=}$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -10 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-2) = -36$$

Ответ: -36

Задача 5. Найдите матрицу, обратную к данной:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Найдём обратную к A матрицу, решив матричное уравнение $AX = E$, расширенная матрица которого равна $(A \mid E)$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{Э_1(2,3,-1)}{\overset{Э_1(1,4,-1)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{Э_1(3,2,-4)}{\overset{Э_1(4,1,-2)}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \underset{Э_3(3,\frac{1}{2})}{\overset{Э_1(1,4,1)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \underset{Э_3(3,-1)}{\overset{Э_2(1,2)}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 5/2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \end{matrix}}_{A^{-1}} \right)$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 5/2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Задача 6. Как изменится определитель матрицы 57×57, если с её строками одновременно выполнить следующие действия:

– к каждой строке, кроме последней прибавить следующую;

– к последней строке прибавить первую?

Ответ обоснуйте.

Решение (способ 1). Пусть изначально была матрица A с определителем $\det A$. После одновременного применения описанных действий к матрице A получим матрицу B.

$$A = \begin{pmatrix} \hline A_{(1)} \\ \hline A_{(2)} \\ \hline \vdots \\ \hline A_{(57)} \\ \hline \end{pmatrix} \rightsquigarrow B = \begin{pmatrix} \hline A_{(1)} + A_{(2)} \\ \hline A_{(2)} + A_{(3)} \\ \hline \vdots \\ \hline A_{(56)} + A_{(57)} \\ \hline A_{(57)} + A_{(1)} \\ \hline \end{pmatrix}$$

Если записать матрицу A как «столбец из строк матрицы», то несложно увидеть, на какую матрицу нужно будет домножить этот столбец слева, чтобы получить матрицу B:

$$A = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_{(56)} \\ A_{(57)} \end{pmatrix} \Rightarrow B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} \cdot \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_{(56)} \\ A_{(57)} \end{pmatrix}$$

Известно, что $\det(C \cdot A) = \det C \cdot \det A$. Значит, чтобы понять, как изменится определитель, достаточно найти $\det C$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{Э_1^T(2,1,-1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{Э_1^T(3,2,-1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cdots$$

$$\cdots = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{Э_1^T(57,56,-1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 2 = 2$$

Таким образом, $\det B = 2 \cdot \det A$, то есть определитель матрицы A после применения к ней описанных в условии операций увеличится в 2 раза.

Ответ: увеличится в 2 раза

Решение (способ 2). Пусть изначально была матрица A с определителем $\det A$. После одновременного применения описанных действий к матрице A получим матрицу B.

$$A = \left(\begin{array}{c} \hline A_{(1)} \\ \hline A_{(2)} \\ \hline \vdots \\ \hline A_{(57)} \\ \hline \end{array}\right) \rightsquigarrow B = \left(\begin{array}{c} \hline A_{(1)} + A_{(2)} \\ \hline A_{(2)} + A_{(3)} \\ \hline \vdots \\ \hline A_{(56)} + A_{(57)} \\ \hline A_{(57)} + A_{(1)} \\ \hline \end{array}\right)$$

Найдём определитель матрицы B. Для этого воспользуемся элементарными преобразованиями строк:

$$\left|\begin{array}{c} \hline A_{(1)} + A_{(2)} \\ \hline A_{(2)} + A_{(3)} \\ \hline A_{(3)} + A_{(4)} \\ \hline \vdots \\ \hline A_{(56)} + A_{(57)} \\ \hline A_{(57)} + A_{(1)} \\ \hline \end{array}\right| \overset{Э_1(2,1,-1)}{=} \left|\begin{array}{c} \hline A_{(1)} + A_{(2)} \\ \hline A_{(2)} + A_{(3)} - (A_{(1)} + A_{(2)}) \\ \hline A_{(3)} + A_{(4)} \\ \hline \vdots \\ \hline A_{(56)} + A_{(57)} \\ \hline A_{(57)} + A_{(1)} \\ \hline \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \hline A_{(1)} + A_{(2)} \\ \hline A_{(3)} - A_{(1)} \\ \hline A_{(3)} + A_{(4)} \\ \hline \vdots \\ \hline A_{(56)} + A_{(57)} \\ \hline A_{(57)} + A_{(1)} \\ \hline \end{array}\right| =$$

$$\overset{Э_1(3,2,-1)}{=} \left|\begin{array}{c} \hline A_{(1)} + A_{(2)} \\ \hline A_{(3)} - A_{(1)} \\ \hline A_{(3)} + A_{(4)} - (A_{(3)} - A_{(1)}) \\ \hline \vdots \\ \hline A_{(56)} + A_{(57)} \\ \hline A_{(57)} + A_{(1)} \\ \hline \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \hline A_{(1)} + A_{(2)} \\ \hline A_{(3)} - A_{(1)} \\ \hline A_{(4)} + A_{(1)} \\ \hline \vdots \\ \hline A_{(56)} + A_{(57)} \\ \hline A_{(57)} + A_{(1)} \\ \hline \end{array}\right| = \cdots$$

Аналогичные действия проделаем с оставшимися строками, то есть последовательно для каждого $i = 4, \ldots, 56$ сделаем элементарное преобразование $Э_1(i, i-1, -1)$. Тогда в полученной матрице в строках с номерами $i = 1, \ldots, 56$ будет выражение $A_{(i+1)} + A_{(1)}$, если i – нечётное, или $A_{(i+1)} - A_{(1)}$, если i – чётное. При этом определитель никак не изменится.

$$\left|\begin{array}{c} \hline A_{(1)} + A_{(2)} \\ \hline A_{(3)} - A_{(1)} \\ \hline A_{(4)} + A_{(1)} \\ \hline \vdots \\ \hline A_{(56)} + A_{(57)} \\ \hline A_{(57)} + A_{(1)} \\ \hline \end{array}\right| = \overset{\textit{описан.}}{\underset{\textit{преоб.}}{\cdots}} = \left|\begin{array}{c} \hline A_{(1)} + A_{(2)} \\ \hline A_{(3)} - A_{(1)} \\ \hline A_{(4)} + A_{(1)} \\ \hline \vdots \\ \hline A_{(57)} - A_{(1)} \\ \hline A_{(57)} + A_{(1)} \\ \hline \end{array}\right| \overset{Э_1(57,56,-1)}{=}$$

$$= \left|\begin{array}{c} \hline A_{(1)} + A_{(2)} \\ \hline A_{(3)} - A_{(1)} \\ \hline A_{(4)} + A_{(1)} \\ \hline \vdots \\ \hline A_{(57)} - A_{(1)} \\ \hline A_{(57)} + A_{(1)} - (A_{(57)} - A_{(1)}) \\ \hline \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \hline A_{(1)} + A_{(2)} \\ \hline A_{(3)} - A_{(1)} \\ \hline A_{(4)} + A_{(1)} \\ \hline \vdots \\ \hline A_{(57)} - A_{(1)} \\ \hline 2A_{(1)} \\ \hline \end{array}\right| = 2 \cdot \left|\begin{array}{c} \hline A_{(1)} + A_{(2)} \\ \hline A_{(3)} - A_{(1)} \\ \hline A_{(4)} + A_{(1)} \\ \hline \vdots \\ \hline A_{(57)} - A_{(1)} \\ \hline A_{(1)} \\ \hline \end{array}\right|$$

Для каждого $i = 1, \ldots, 56$ последовательно сделаем элементарное преобразование $Э_1(i, 57, (-1)^i)$. Определитель при этом не изменится.

$$2 \cdot \begin{vmatrix} A_{(1)} + A_{(2)} \\ A_{(3)} - A_{(1)} \\ A_{(4)} + A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(57)} - A_{(1)} \\ A_{(1)} \end{vmatrix} = \overset{\textit{описан.}}{\underset{\textit{преоб.}}{\cdots}} = 2 \cdot \begin{vmatrix} A_{(2)} \\ A_{(3)} \\ A_{(4)} \\ \vdots \\ A_{(57)} \\ A_{(1)} \end{vmatrix}$$

«Протолкнём» последнюю строку наверх, последовательно меняя её с вышестоящей. Всего будет сделано 56 перестановок строк, так как фиксированная строка будет меняться местами с каждой из 56 остальных.

$$2 \cdot \begin{vmatrix} A_{(2)} \\ A_{(3)} \\ A_{(4)} \\ \vdots \\ A_{(57)} \\ A_{(1)} \end{vmatrix} \overset{Э_2(57,56)}{=} -2 \cdot \begin{vmatrix} A_{(2)} \\ A_{(3)} \\ A_{(4)} \\ \vdots \\ A_{(1)} \\ A_{(57)} \end{vmatrix} = \cdots = (-1)^{56} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ A_{(3)} \\ \vdots \\ A_{(56)} \\ A_{(57)} \end{vmatrix} = 2 \det A$$

Таким образом, определитель матрицы A после применения к ней описанных в условии операций увеличится в 2 раза.

Ответ: увеличится в 2 раза

Контрольная работа 1 – 2017/2018 учебный год

Задача 1. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 8x_4 = -5 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 4x_4 = -7 \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 + 7x_4 = c \end{cases}$$

(а) Найдите общее решение и укажите какое-нибудь частное решение этой системы при $c = 5$.

(б) Определите число решений при $c \neq 5$.

Решение. Решим данную систему с помощью метода Гаусса. Запишем расширенную матрицу системы и применим к ней элементарные преобразования строк.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 6 & 5 & 8 & -5 \\ 5 & 6 & 7 & 4 & -7 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & c \end{array}\right) \overset{\text{Э}_1(1,2,-1)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -2 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 4 & -7 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & c \end{array}\right) \overset{\text{Э}_3(1,\frac{1}{2})}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 4 & -7 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & c \end{array}\right) \underset{\text{Э}_1(3,1,-3)}{\overset{\text{Э}_1(2,1,-5)}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 12 & -6 & -12 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & c-3 \end{array}\right) \overset{\text{Э}_3(1,\frac{1}{6})}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & c-3 \end{array}\right) \overset{\text{Э}_1(3,2,1)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-5 \end{array}\right)$$

При $c = 5$ полученная матрица имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Из полученного улучшенного ступенчатого вида матрицы несложно получить общее решение, выразив главные переменные через свободные.

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_3 - 2x_4 \\ x_2 = -2 - 2x_3 + x_4 \\ x_3 \in \mathbb{R} \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Имеем следующее общее решение: $(1 + x_3 - 2x_4,\ -2 - 2x_3 + x_4,\ x_3,\ x_4),\ \ x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

Чтобы найти частное решение зафиксируем значения свободных переменных. Пусть $x_3 = 0$ и $x_4 = 0$, тогда $x_1 = 1 + 0 - 2 \cdot 0$ и $x_2 = -2 - 2 \cdot 0 + 0 \Rightarrow$ частное решение $(1, -2, 0, 0)$.

Исследуем систему на число решений при $c \neq 5$. Последняя строка полученной матрицы описывает уравнение $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = c - 5$, то есть $0 = c - 5 \neq 0$, что говорит о том, что при $c \neq 5$ система несовместна.

Ответ: (а) общее решение: $(1 + x_3 - 2x_4,\ -2 - 2x_3 + x_4,\ x_3,\ x_4),\ \ x_3, x_4 \in \mathbb{R}$

частное решение: $(1, -2, 0, 0)$

(б) при $c \neq 5$ система несовместна

Задача 2. Найдите след матрицы $(6AB^T - 4BA^T)^T C + C(2AB^T - 3BA^T)$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение. Упростим данное в условии выражение:

$$(6AB^T - 4BA^T)^T C + C(2AB^T - 3BA^T) = ((6AB^T)^T - (4BA^T)^T)C + C(2AB^T - 3BA^T) =$$
$$= (6BA^T - 4AB^T)C + C(2AB^T - 3BA^T) = 6BA^TC - 4AB^TC + 2CAB^T - 3CBA^T$$

Известны следующие равенства:

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) \qquad \operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr}(A) \qquad \operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(CAB) = \operatorname{tr}(BCA)$$

С помощью этих равенств упростим выражение:

$$\operatorname{tr}(6BA^TC - 4AB^TC + 2CAB^T - 3CBA^T) =$$
$$= 6\operatorname{tr}(BA^TC) - 4\operatorname{tr}(AB^TC) + 2\operatorname{tr}(CAB^T) - 3\operatorname{tr}(CBA^T) =$$
$$= 6\operatorname{tr}(CBA^T) - 4\operatorname{tr}(CAB^T) + 2\operatorname{tr}(CAB^T) - 3\operatorname{tr}(CBA^T) =$$
$$= 3\operatorname{tr}(CBA^T) - 2\operatorname{tr}(CAB^T)$$

Найдём матрицу AB^T, зная эту матрицу несложно получить $BA^T = (AB^T)^T$.

$$AB^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BA^T = (AB^T)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вычислим матрицы CBA^T и CAB^T:

$$CBA^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$CAB^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Получаем, что след исходной матрицы равен:

$$\operatorname{tr}(6BA^TC - 4AB^TC + 2CAB^T - 3CBA^T) = 3\operatorname{tr}(CBA^T) - 2\operatorname{tr}(CAB^T) =$$
$$= 3 \cdot (1+2) - 2 \cdot (-2+5) = 3$$

Ответ: 3

Задача 3. Подстановки $\sigma, \tau \in S_7$ таковы, что $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 7 & 1 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ и

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 1 & 6 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдите подстановку $(\tau\sigma^{-1})^{90}$.

Решение. Обозначим перестановки

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 1 & 6 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдём перестановку τ. Так как $\rho\tau = \eta$, перестановка τ легко выражается после домножения обеих частей равенства слева на ρ^{-1}, то есть $\rho^{-1}\rho\tau = \tau = \rho^{-1}\eta$.

$$\rho^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 6 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix} \underset{\longleftarrow}{\cdot} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдём перестановку σ^{-1} и $\tau\sigma^{-1}$:

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 & 1 & 6 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 2 & 1 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \tau\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \underset{\longleftarrow}{\cdot} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 2 & 1 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Разложим $\tau\sigma^{-1}$ в произведение независимых циклов: $\tau\sigma^{-1} = (1362)(457)$.

Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ длины независимых циклов в перестановке σ, то $\sigma^{\text{НОК}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)} = id$. Отсюда получаем, что перестановка $(\tau\sigma^{-1})^{90} = (\tau\sigma^{-1})^{84} \cdot (\tau\sigma^{-1})^6 = id \cdot (\tau\sigma^{-1})^6 = (\tau\sigma^{-1})^6$. Найдём $(\tau\sigma^{-1})^6$:

$$(\tau\sigma^{-1})^6 = (1362)^6(457)^6 = (1362)^2 =$$

$$= (1362) \cdot (1362) = (16)(23) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

Задача 4. Найдите коэффициент при x^4 в выражении определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & x & -2 & 2 \\ x & 2 & 1 & 4 & -5 \\ x & 1 & x & 5 & x \\ 3 & x & -1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 4 & x & -2 \end{vmatrix}$$

Решение. Сделаем некоторые элементарные преобразования строк.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & x & -2 & 2 \\ x & 2 & 1 & 4 & -5 \\ x & 1 & x & 5 & x \\ 3 & x & -1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 4 & x & -2 \end{vmatrix} \overset{Э_1(3,1,-1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & x & -2 & 2 \\ x & 2 & 1 & 4 & -5 \\ x-1 & -2 & 0 & 7 & x-2 \\ 3 & x & -1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 4 & x & -2 \end{vmatrix} \overset{Э_1(3,2,-1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & x & -2 & 2 \\ x & 2 & 1 & 4 & -5 \\ -1 & -4 & -1 & 3 & x+3 \\ 3 & x & -1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 4 & x & -2 \end{vmatrix}$$

Определителем матрицы $A \in M_n$ называется число

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

В описанной сумме найдём слагаемые с x^4. Для этого нужно найти перестановку σ, такую что произведение $a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \ldots, a_{n\sigma(n)}$ содержит x^4.

Выделим в матрице любые четыре элемента с x, так чтобы в каждой строке и в каждом столбце был выделен только один элемент. Это можно сделать единственным образом, получив следующие выбранные элементы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & x & -2 & 2 \\ x & 2 & 1 & 4 & -5 \\ -1 & -4 & -1 & 3 & x+3 \\ 3 & x & -1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 4 & x & -2 \end{vmatrix}$$

Единственное слагаемое, которое может содержать x^k, $k \geqslant 4$, равно $x^4(x+3) = x^5 + 3x^4$. Найдём знак, стоящий перед слагаемым. Для этого нужно узнать знак соответствующей перестановки.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{число инверсий: } 2+0+2+0+0 = 4 \ \Rightarrow \ \operatorname{sgn}(\sigma) = 1$$

Таким образом, слагаемое $x^5 + 3x^4$ входит в определитель со знаком «+», то есть искомый коэффициент при x^4 равен 3.

Ответ: 3

Задача 5. Вычислите определитель:

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 6 & -3 \\ 3 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & -8 & 7 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Решение. Вычислим определитель применяя к описанной матрице элементарные преобразования строк. После сведения матрицы к верхнетреугольному виду, нетрудно найти определитель, равный произведению диагональных элементов.

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 6 & -3 \\ 3 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & -8 & 7 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \overset{Э_1(1,4,-2)}{\underset{Э_1(2,4,-1)}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 7 \\ 5 & 5 & -8 & 7 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \overset{Э_1(3,1,-5)}{\underset{Э_1(4,1,-3)}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \end{vmatrix} \overset{Э_1(2,4,2)}{\underset{Э_3(3,\frac{1}{2})}{=}}$$

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \end{vmatrix} \overset{Э_1(2,3,1)}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \end{vmatrix} \overset{Э_1(3,2,2)}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \end{vmatrix} \overset{Э_2(3,4)}{=}$$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} \overset{Э_2(2,3)}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot 1 \cdot (-7) = 28$$

Ответ: 28

Задача 6. Найдите матрицу, обратную к данной:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. Найдём обратную к A матрицу, решив матричное уравнение $AX = E$, расширенная матрица которого равна $(A \,|\, E)$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{Э}_1(2,4,-1)}{\overset{\text{Э}_1(1,3,-1)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{Э}_1(4,2,-2)}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \underset{\text{Э}_1(4,3,-2)}{\overset{\text{Э}_2(1,2)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 3 \end{array}\right) \underset{\text{Э}_1(3,4,-2)}{\overset{\text{Э}_1(1,4,1)}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 3 \end{array}\right) \overset{\text{Э}_1(4,3,\frac{1}{2})}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{Э}_3(3,\frac{1}{2})}{\overset{\text{Э}_2(2,4)}{\rightsquigarrow}}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E} & \underbrace{\begin{matrix} 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 5/2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{matrix}}_{A^{-1}} \end{array}\right)$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 5/2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Контрольная работа 1 – 2018/2019 учебный год

Задача 1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$. Найти все матрицы $X \in M_2(\mathbb{R})$, удовлетворяющие условию $2AX - X^T A = B$.

Решение. Пусть матрица X равна

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

Подставив эту матрицы в выражение $2AX - X^T A$, получим

$$\begin{aligned} 2AX - X^T A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 4x_1 + 8x_3 & 4x_2 + 8x_4 \\ 6x_1 + 12x_3 & 6x_2 + 12x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_3 & 4x_1 + 6x_3 \\ 2x_2 + 3x_4 & 4x_2 + 6x_4 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 2x_1 + 5x_3 & -4x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 8x_4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 12x_3 - 3x_4 & 2x_2 + 6x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Получаем систему на неизвестные x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_3 = 2 \\ -4x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 8x_4 = -8 \\ 6x_1 - 2x_2 + 12x_3 - 3x_4 = 7 \\ 2x_2 + 6x_4 = -4 \end{cases}$$

Решим данную систему с помощью метода Гаусса. Запишем расширенную матрицу системы и применим к ней элементарные преобразования строк.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ -4 & 4 & -6 & 8 & -8 \\ 6 & -2 & 12 & -3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & -4 \end{array}\right) \underset{Э_1(2,4,-2), Э_1(3,4,1)}{\overset{Э_1(2,1,2), Э_1(3,1,-3)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & -4 \end{array}\right) \underset{Э_3(4,\frac{1}{2})}{\overset{Э_3(2,\frac{1}{4}), Э_3(3,\frac{1}{3})}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right) \underset{Э_2(3,4)}{\overset{Э_1(1,2,-5), Э_1(3,2,1)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{Э_2(2,3)}{\overset{Э_3(1,\frac{1}{2})}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Получаем общее решение системы: $(-3/2 - 5/2t,\ -2 - 3t,\ 1 + t,\ t),\ \ t \in \mathbb{R}$. По этому решению нетрудно восстановить искомую матрицу X.

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}t & -2 - 3t \\ 1 + t & t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

Задача 2. Существует ли матрица $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ со следующими свойствами:

(1) наборы $(3, 2, 1)$ и $(2, -1, 3)$ являются решениями системы $Ax = 0$;

(2) система $Ay = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ является совместной?

Решение. Пусть матрица A равна

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$$

Чтобы матрица A удовлетворяла условию (1), должно выполняется

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 3x_4 + 2x_5 + x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ 2x_4 - x_5 + 3x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Получаем ОСЛУ на переменные $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_4 + 2x_5 + x_6 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_4 - x_5 + 3x_6 = 0 \end{cases}$$

Решим данную систему с помощью метода Гаусса. Запишем расширенную матрицу системы и применим к ней элементарные преобразования строк.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{Э}_1(2,4,-1)}{\overset{\text{Э}_1(1,3,-1)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{Э}_1(2,4,-2)}{\overset{\text{Э}_1(3,1,-2)}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 7 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{Э}_3(4,-\frac{1}{7})}{\overset{\text{Э}_3(3,-\frac{1}{7})}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{Э}_1(2,4,-3)}{\overset{\text{Э}_1(1,3,-3)}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} -x_3 & x_3 & x_3 \\ -x_6 & x_6 & x_6 \end{pmatrix}, \; x_3, x_6 \in \mathbb{R}$$

Для выполнения условия (2) можно положить $x_3 = 5$ и $x_6 = 2$, тогда система $Ay = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ будет иметь бесконечное число решений.

Ответ: существует

Задача 3. Подстановка $\sigma \in S_9$ записана в виде $\sigma = (1385)(49k)(26)$. Найдите все допустимые значения для цифры k, при которых множество $F = \{i \,|\, \sigma^{68}(i) = i\}$ имеет наименьшее возможное число элементов.

Решение. В задаче требуется найти такие значения параметра k, что перестановка σ^{68} имеет наименьшее число элементов переходящих в самих себя.

Значения $k = 4, 9$ сразу можно отбросить, так как при таких значениях запись будет некорректна.

Пусть все циклы независимы $\Rightarrow$ параметр k может принимать единственное значение, равное 7. При $k = 7$ выражение $\sigma^{68} = \big((1385)(497)(26)\big)^{68} = (1385)^{68}(497)^{68}(26)^{68} = (497)^2 = (479)$, то есть в множестве F всего 6 элементов.

Пусть второй и первый циклы зависимы, тогда $k \in \{1, 3, 5, 8\}$. Рассмотрим случай $k = 1$, случаи $k = 3, 5, 8$ аналогичны.

$$\sigma = (1\overleftarrow{385)(4}91)(26) = (493851)(26)$$

$$\sigma^{68} = \big((493851)(26)\big)^{68} = (493851)^{68}(26)^{68} = (493851)^2 = (435)(981)$$

Получаем, что при $k = 1, 3, 5, 8$ множество F содержит 3 элемента.

Пусть второй и третий циклы зависимы, тогда $k \in \{2, 6\}$. Рассмотрим случай $k = 2$, случай $k = 6$ аналогичны.

$$\sigma = (1385)\ \overleftarrow{(492)\ }(26) = (1385)(2649)$$

$$\sigma^{68} = \big((1385)(2649)\big)^{68} = (1385)^{68}(2649)^{68} = id$$

При $k = 2, 6$ множество F содержит 9 элементов.

Таким образом, при $k = 1, 3, 5, 8$ описанное множество содержит наименьшее возможное число элементов.

Ответ: $k = 1, 3, 5, 8$

Задача 4. Вставьте вместо звёздочки и ромбика подходящие числа таким образом, чтобы в выражении определителя

$$\begin{vmatrix} * & 2 & -1 & x & \diamond \\ 2 & 4 & x & 3 & -1 \\ x & -3 & 1 & x & 2 \\ 3 & -3 & 2 & x^2 & x \\ -1 & x & 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

коэффициент при x^5 равнялся -2.

Решение. Определителем матрицы $A \in M_n$ называется число

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

В описанной сумме найдём слагаемые с x^5. Для этого нужно найти перестановку σ, такую что произведение $a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \ldots, a_{n\sigma(n)}$ содержит x^5.

Всего два способа получить слагаемое с x^5:

$$\underset{\text{первый способ}}{\begin{vmatrix} * & 2 & -1 & x & \diamond \\ 2 & 4 & x & 3 & -1 \\ x & -3 & 1 & x & 2 \\ 3 & -3 & 2 & x^2 & x \\ -1 & x & 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}} \quad \text{и} \quad \underset{\text{второй способ}}{\begin{vmatrix} * & 2 & -1 & x & \diamond \\ 2 & 4 & x & 3 & -1 \\ x & -3 & 1 & x & 2 \\ 3 & -3 & 2 & x^2 & x \\ -1 & x & 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}}$$

Найдём знаки соответствующих этим слагаемым перестановок. Для этого нужно определить чётность перестановки.

- перестановка первого способа: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ – чётная $\Rightarrow$ слагаемое x^5 входит в определитель со знаком «+»
- перестановка первого способа: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ – нечётная $\Rightarrow$ слагаемое $\diamond x^5$ входит в определитель со знаком «−»

По условию $x^5 - \diamond x^5 = -2x^5$. Таким образом, получаем уравнение $1 - \diamond = -2 \Rightarrow \diamond = 3$. Слагаемое x^5 в определителе никак не зависит от $*$, поэтому $*$ может принимать любое значение.

Ответ: $*$ – любая, $\diamond = 3$

Задача 5. Даны матрицы $A, B \in M_4(\mathbb{R})$. При каждом $i = 1, 2, 3, 4$ обозначим через a_i (соответственно b_i) i-ый столбец матрицы A (соответственно B). Известно, что $\det A = 1$ и

$$b_1 = 2a_1 + 3a_3, \qquad b_2 = 3a_2 - 2a_3, \qquad b_3 = -2a_1 + a_2 + 2a_4, \qquad b_4 = 2a_2 + 3a_4$$

Найдите $\det B$.

Решение (способ 1). Выразим столбцы матрицы B через матрицу $A = (|\, a_1 \,|\, a_2 \,|\, a_3 \,|\, a_4 \,|)$:

$$b_1 = (|\, a_1 \,|\, a_2 \,|\, a_3 \,|\, a_4 \,|) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 2a_1 + 3a_3, \qquad b_2 = (|\, a_1 \,|\, a_2 \,|\, a_3 \,|\, a_4 \,|) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 3a_2 - 2a_3,$$

$$b_3 = (|\, a_1 \,|\, a_2 \,|\, a_3 \,|\, a_4 \,|) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -2a_1 + a_2 + 2a_4, \quad b_4 = (|\, a_1 \,|\, a_2 \,|\, a_3 \,|\, a_4 \,|) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 2a_2 + 3a_4$$

Отсюда несложно получить следующее выражение для матрицы B:

$$B = (|\, b_1 \,|\, b_2 \,|\, b_3 \,|\, b_4 \,|) = (|\, a_1 \,|\, a_2 \,|\, a_3 \,|\, a_4 \,|) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{C}$$

Известно, что $\det(A \cdot C) = \det A \cdot \det C$. Значит, для нахождения определителя матрицы B достаточно найти определитель C, так как $\det B = \det A \cdot \det C = 1 \cdot \det C = \det C$.

Найдём определитель C, сведя матрицу элементарными преобразованиями строк к верхнетреугольному виду.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{Э_1(1,\underline{3},-1)}{=} \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{Э_1(\underline{3},1,3)}{=} \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{Э_1(2,\underline{3},-1)}{=} \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 2 \\ 0 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{Э_1(\underline{3},2,4)}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 22 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{Э_1(3,\underline{4},-11)}{=} \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{Э_2(\underline{3},4)}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -25 \end{vmatrix} = 50$$

Ответ: 50

Решение (способ 2). Найдём определитель матрицы B. Для этого выразим определитель матрицы B через сумму определителей матрицы A.

Воспользуемся равенством $b_1 = 2a_1 + 3a_3$ и получим

$$\begin{aligned} \det\big(b_1, b_2, b_3, b_4\big) &= \det\big(2a_1 + 3a_3, b_2, b_3, b_4\big) = \\ &= 2\det\big(a_1, b_2, b_3, b_4\big) + 3\det\big(a_3, b_2, b_3, b_4\big) \end{aligned}$$

Подставим $b_2 = 3a_2 - 2a_3$ в полученное выражение и сделаем соответствующие преобразования. Сразу будем зачёркивать определители с двумя одинаковыми столбцами, так как они равны нулю.

$$\begin{aligned} &\ 2\det\big(a_1, b_2, b_3, b_4\big) + 3\det\big(a_3, b_2, b_3, b_4\big) = \\ &= 2\det\big(a_1, 3a_2 - 2a_3, b_3, b_4\big) + 3\det\big(a_3, 3a_2 - 2a_3, b_3, b_4\big) = \\ &= 6\det\big(a_1, a_2, b_3, b_4\big) - 4\det\big(a_1, a_3, b_3, b_4\big) + 9\det\big(a_3, a_2, b_3, b_4\big) - \cancel{6\det\big(a_3, a_3, b_3, b_4\big)} = \\ &= 6\det\big(a_1, a_2, b_3, b_4\big) - 4\det\big(a_1, a_3, b_3, b_4\big) + 9\det\big(a_3, a_2, b_3, b_4\big) \end{aligned}$$

Аналогично подставим $b_3 = -2a_1 + a_2 + 2a_4$

$$\begin{aligned} &\ 6\det\big(a_1, a_2, b_3, b_4\big) - 4\det\big(a_1, a_3, b_3, b_4\big) + 9\det\big(a_3, a_2, b_3, b_4\big) = \\ &= 6\det\big(a_1, a_2, -2a_1 + a_2 + 2a_4, b_4\big) - 4\det\big(a_1, a_3, -2a_1 + a_2 + 2a_4, b_4\big) + \\ &\quad + 9\det\big(a_3, a_2, -2a_1 + a_2 + 2a_4, b_4\big) = \\ &= \cancel{-12\det\big(a_1, a_2, a_1, b_4\big)} + \cancel{6\det\big(a_1, a_2, a_2, b_4\big)} + 12\det\big(a_1, a_2, a_4, b_4\big) + \\ &\quad + \cancel{8\det\big(a_1, a_3, a_1, b_4\big)} - 4\det\big(a_1, a_3, a_2, b_4\big) - 8\det\big(a_1, a_3, a_4, b_4\big) + \\ &\quad - 18\det\big(a_3, a_2, a_1, b_4\big) + \cancel{9\det\big(a_3, a_2, a_2, b_4\big)} + 18\det\big(a_3, a_2, a_4, b_4\big) = \\ &= 12\det\big(a_1, a_2, a_4, b_4\big) - 4\det\big(a_1, a_3, a_2, b_4\big) - 8\det\big(a_1, a_3, a_4, b_4\big) \\ &\quad - 18\det\big(a_3, a_2, a_1, b_4\big) + 18\det\big(a_3, a_2, a_4, b_4\big) = \\ &= 12\det\big(a_1, a_2, a_4, b_4\big) - 22\det\big(a_1, a_3, a_2, b_4\big) - 8\det\big(a_1, a_3, a_4, b_4\big) + 18\det\big(a_3, a_2, a_4, b_4\big) \end{aligned}$$

Подставим $b_4 = 2a_2 + 3a_4$ и получим искомое выражение

$$\begin{aligned} &\ 12\det\big(a_1, a_2, a_4, b_4\big) - 22\det\big(a_1, a_3, a_2, b_4\big) - 8\det\big(a_1, a_3, a_4, b_4\big) + 18\det\big(a_3, a_2, a_4, b_4\big) = \\ &= 12\det\big(a_1, a_2, a_4, 2a_2 + 3a_4\big) - 22\det\big(a_1, a_3, a_2, 2a_2 + 3a_4\big) + \\ &\quad - 8\det\big(a_1, a_3, a_4, 2a_2 + 3a_4\big) + 18\det\big(a_3, a_2, a_4, 2a_2 + 3a_4\big) = \\ &= \cancel{24\det\big(a_1, a_2, a_4, a_2\big)} + \cancel{36\det\big(a_1, a_2, a_4, a_4\big)} + \\ &\quad - \cancel{44\det\big(a_1, a_3, a_2, a_2\big)} - 66\det\big(a_1, a_3, a_2, a_4\big) + \\ &\quad - 16\det\big(a_1, a_3, a_4, a_2\big) - \cancel{24\det\big(a_1, a_3, a_4, a_4\big)} + \\ &\quad + \cancel{36\det\big(a_3, a_2, a_4, a_2\big)} + \cancel{54\det\big(a_3, a_2, a_4, a_4\big)} = \\ &= -66\det\big(a_1, a_3, a_2, a_4\big) - 16\det\big(a_1, a_3, a_4, a_2\big) = 66\det\big(a_1, a_2, a_3, a_4\big) - 16\det\big(a_1, a_2, a_3, a_4\big) = \\ &= 50\det\big(a_1, a_2, a_3, a_4\big) = 50 \cdot \det A = 50 \end{aligned}$$

Таким образом, $\det B = 50$.

Ответ: 50

Задача 6. Про матрицу $A \in M_4(\mathbb{R})$ известно, что она обратима и

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Выясните, обратима ли матрица $2A + E$.

Решение (способ 1). Матрица $2A+E$ обратима $\Leftrightarrow \det 2A + E \neq 0$. По условию A обратима $\Rightarrow$ числа $\det A \neq 0$ и $\det A^{-1} \neq 0$. Отсюда получаем, что

$$\det(2A+E) \neq 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; \det(2A+E) \cdot \det A^{-1} \neq 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; \det\left((2A+E) \cdot A^{-1}\right) = \det\left(2E + A^{-1}\right) \neq 0$$

Таким образом, чтобы проверить обратимость матрицы $2A+E$ достаточно узнать определитель матрицы $2E + A^{-1}$, которая легко вычисляется, так как известна матрица A^{-1}.

$$\det(2E + A^{-1}) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} \overset{Э_1(4,1,-1)}{=} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{Э_1(3,4,-3)}{=} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Определитель матрицы $2E + A^{-1}$ равен нулю, значит матрица $2A+E$ необратима.

Ответ: нет

Решение (способ 2). Найдём матрицу A, то есть обратную к матрице A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{Э_1(4,1,-2)}{\overset{Э_1(2,1,-1)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{Э_1(4,3,1)}{\overset{Э_1(1,3,-2),Э_1(2,3,2)}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{Э_3(1,\frac{1}{2}),Э_3(4,-1)}{\overset{Э_1(2,4,1),Э_1(1,4,-1)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E} & \underbrace{\begin{matrix} 3/2 & 0 & -3/2 & -1/2 \\ -3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{matrix}}_{A} \end{array}\right)$$

Матрица $2A+E$ обратима $\Leftrightarrow \det(2A+E) \neq 0$, поэтому найдём определитель матрицы $2A+E$.

$$\det(2A+E) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} \overset{Э_1(4,1,-1)}{=} \begin{vmatrix} 4 & 0 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{Э_1(3,4,-3)}{=} \begin{vmatrix} 4 & 0 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Определитель матрицы $2A+E$ равен $0 \Leftrightarrow 2A+E$ необратима.

Ответ: нет

Контрольная работа 1 – 2019/2020 учебный год

Задача 1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$. Найдите все необратимые матрицы $X \in M_2(\mathbb{R})$, удовлетворяющие условию $2AX - X^TA = B$.

Решение. Пусть матрица X равна

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

Подставив эту матрицы в выражение $2AX - X^TA$, получим

$$\begin{aligned} 2AX - X^TA &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4x_1 + 8x_3 & 4x_2 + 8x_4 \\ 6x_1 + 12x_3 & 6x_2 + 12x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_3 & 4x_1 + 6x_3 \\ 2x_2 + 3x_4 & 4x_2 + 6x_4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2x_1 + 5x_3 & -4x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 8x_4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 12x_3 - 3x_4 & 2x_2 + 6x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Решим данную систему с помощью метода Гаусса. Запишем расширенную матрицу системы и применим к ней элементарные преобразования строк.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 5 & 0 & 3 \\ -4 & 4 & -6 & 8 & -6 \\ 6 & -2 & 12 & -3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & -4 \end{array}\right) \underset{\text{Э}_1(2,4,-2),\text{Э}_1(3,4,1)}{\overset{\text{Э}_1(2,1,2),\text{Э}_1(3,1,-3)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & -4 \end{array}\right) \underset{\text{Э}_3(4,\frac{1}{2})}{\overset{\text{Э}_3(2,\frac{1}{4}),\text{Э}_3(3,\frac{1}{3})}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right) \underset{\text{Э}_2(3,4)}{\overset{\text{Э}_1(1,2,-5),\text{Э}_1(3,2,1)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{Э}_2(2,3)}{\overset{\text{Э}_3(1,\frac{1}{2})}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5/2 & -7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Получаем общее решение системы: $(-7/2 - 5/2t,\ -2 - 3t,\ 2 + t,\ t),\ \ t \in \mathbb{R}$. По этому решению нетрудно восстановить искомую матрицу X.

По условию матрица X должна быть необратима $\Leftrightarrow\ \det X = 0$:

$$\begin{vmatrix} -\frac{7}{2} - \frac{5}{2}t & -2 - 3t \\ 2 + t & t \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -7 - 5t & -4 - 6t \\ 2 + t & t \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \big((-7 - 5t)t - (2 + t)(-4 - 6t)\big) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(t^2 + 9t + 8\right) = 0 \ \Leftrightarrow\ t = -1, -8$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 33/2 & 22 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$

Задача 2. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 7x_1 + bx_2 + 8x_3 + 9x_4 = -3 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + 8x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 + 7x_4 = 5 \end{cases}$$

Определите все значения параметра b, для которых эта система имеет ровно две свободных неизвестных, и для каждого найденного значения b выпишите соответствующее общее решение системы.

Решение. Решим данную систему с помощью метода Гаусса. Запишем расширенную матрицу системы и применим к ней элементарные преобразования строк. Для удобства уравнение с параметром переставим в последнюю строку.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & 1 & 8 & 1 \\ 3 & -1 & -6 & 7 & 5 \\ 7 & b & 8 & 9 & -3 \end{array}\right) \overset{\text{Э}_1(1,2,-2)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 4 & 13 & -6 & -9 \\ 3 & -1 & -6 & 7 & 5 \\ 7 & b & 8 & 9 & -3 \end{array}\right) \underset{\text{Э}_1(3,1,7)}{\overset{\text{Э}_1(2,1,3)}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 4 & 13 & -6 & -9 \\ 0 & 11 & 33 & -11 & -22 \\ 0 & b-28 & 99 & -33 & -66 \end{array}\right) \underset{\text{Э}_3(1,-1),\text{Э}_3(2,\frac{1}{11})}{\overset{\text{Э}_1(3,2,-3)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & -13 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & b-5 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{Э}_1(1,2,4)}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & b-5 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Если $b = 5$, то последняя строка матрицы будет нулевая. Тогда система имеет две свободные переменные и общее решение системы: $(1 + x_3 - 2x_4,\ -2 - 3x_3 + x_4,\ x_3,\ x_4),\ \ x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

Пусть $b \neq 5 \Rightarrow$ в матрице будет 3 ненулевые строки. Это говорит о том, что всего будет $4 - 3 = 1$ свободная переменная.

Ответ: при $b = 5$ общее решение системы $(1 + x_3 - 2x_4,\ -2 - 3x_3 + x_4,\ x_3,\ x_4),\ \ x_3, x_4 \in \mathbb{R}$

Задача 3. Решите уравнение $XA = B + 3X$ относительно неизвестной матрицы X, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -6 & 7 \\ -3 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

Решение. Преобразуем исходное уравнение:

$$XA = B + 3X \;\Leftrightarrow\; XA - 3X = B \;\Leftrightarrow\; XA - X \cdot 3E = B \;\Leftrightarrow\; X(A - 3E) = B$$

Обозначим $C = A - 3E$:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Чтобы решить уравнение $XC = B$ транспонируем обе его части. Получим равносильное ему уравнение $C^T X^T = B^T$, которое легко решается.

$$\left(\overbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & -4 & -2 \end{array}}^{C^T} \middle| \overbrace{\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -6 & 1 \\ 2 & 7 & -9 \end{array}}^{B^T}\right) \underset{Э_1(3,1,-1)}{\overset{Э_1(2,1,-2)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 2 & -1 & -8 & 7 \\ 0 & -4 & -2 & 0 & 6 & -6 \end{array}\right) \underset{Э_3(3,-\frac{1}{2})}{\overset{Э_1(2,3,1)}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \overset{Э_1(3,2,-2)}{\rightsquigarrow} \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{E} \middle| \underbrace{\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}}_{X^T}\right)$$

Таким образом, получаем

$$X^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 4. Две перестановки $\sigma, \tau \in S_7$ заданы своими разложениями в произведение независимых циклов как $\sigma = (25)(347)$ и $\tau = (14653)$. Найдите $(\sigma\tau)^{70}$ и $\rho = (\tau^{-1}\sigma)^{68}$.

Решение. Вычислим $\sigma\tau$.

$$\sigma\tau = \overleftarrow{\big[(25)(347)\big] \cdot \big[(14653)\big]} = (173)(4625)$$

Найдем $(\sigma\tau)^{70}$, пользуясь тем, что если $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ длины независимых циклов в некоторой перестановке, то при возведении этой перестановки в степень НОК$(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ получим id.

$$(\sigma\tau)^{70} = \big[(173)(4625)\big]^{70} = (173)^{70}(4625)^{70} = (173)^{69+1}(4625)^{68+2} = (173)(4625)^2 = (173)(42)(65)$$

Найдём перестановку τ^{-1}. Для этого достаточно развернуть все независимые циклы $\tau = (14653)$ в обратную сторону: $\tau^{-1} = (35641)$.

Вычислим $\tau^{-1}\sigma$ и $\rho = (\tau^{-1}\sigma)^{68}$.

$$\tau^{-1}\sigma = \overleftarrow{\big[(35641)\big] \cdot \big[(25)(347)\big]} = (26475)(31)$$

$$\rho = (\tau^{-1}\sigma)^{68} = \big[(26475)(31)\big]^{68} = (26475)^{68}(31)^{68} = (26475)^{65+3}(31)^{68} = (26475)^3 = (27654)$$

Ответ: $(\sigma\tau)^{70} = (173)(42)(65)$ и $\rho = (\tau^{-1}\sigma)^{68} = (27654)$

Задача 5. Найдите коэффициент при x^4 в выражении определителя

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2x & 1 & x & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 1 & x \\ x & x & 4 & 5 & -2 \\ 2 & -3 & x & 4 & -5 \end{vmatrix}$$

Решение. Сделаем некоторые элементарные преобразования строк.

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2x & 1 & x & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 1 & x \\ x & x & 4 & 5 & -2 \\ 2 & -3 & x & 4 & -5 \end{vmatrix} \overset{\text{Э}_1(2,1,-2)}{\underset{\text{Э}_1(4,1,-1)}{=}} \begin{vmatrix} 3 & x & -1 & 2 & 4 \\ -5 & 0 & 3 & x-4 & -7 \\ -3 & 2 & -1 & 1 & x \\ x-3 & 0 & 5 & 3 & -6 \\ 2 & -3 & x & 4 & -5 \end{vmatrix}$$

Определителем матрицы $A \in M_n$ называется число

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

В описанной сумме найдём слагаемые с x^4. Для этого нужно найти перестановку σ, такую что произведение $a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \ldots, a_{n\sigma(n)}$ содержит x^4. Единственный способ выбрать слагаемое, в котором x входит в степени $\geqslant 4$, имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -1 & 2 & 4 \\ -5 & 0 & 3 & x-4 & -7 \\ -3 & 2 & -1 & 1 & x \\ x-3 & 0 & 5 & 3 & -6 \\ 2 & -3 & x & 4 & -5 \end{vmatrix}$$

Это слагаемое равно $x^3(x-3)(x-4) = x^3(x^2-7x+12) = x^5 - 7x^4 + 12x^3$. Найдём знак, с котором оно входит в определитель. Для этого нужно узнать знак соответствующей перестановки.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{число инверсий: } 1+2+2+0+0 = 5 \;\Rightarrow\; \operatorname{sgn}(\sigma) = -1$$

Получаем, что слагаемое $x^5 - 7x^4 + 12x^3$ входит в определитель со знаком «$-$», значит перед x^4 в определителе стоит коэффициент 7.

Ответ: 7

Задача 6. Некоторое число $a \in \mathbb{R}$ таково, что определитель

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & 3 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & a & 7 \\ 7 & * & 2 & -5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

принимает одно и то же значение независимо от того, какое число вставить вместо звёздочки. Найдите это число a.

Решение. Представим 4 строку определителя как сумму двух строк $(7, 0, 2, -5, 6) + (0, *, 0, 0, 0)$. Разложим определитель, используя это представление.

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & 3 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & a & 7 \\ 7 & * & 2 & -5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 7 & 5 & 3 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & a & 7 \\ 7 & 0 & 2 & -5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{vmatrix} 7 & 5 & 3 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & a & 7 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}_{B}$$

При фиксированном a определитель матрицы A – константа. Определитель матрицы A никак не зависит от $*$.

Рассмотрим определитель матрицы B. Разложим этот определитель по 4 строке.

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & 3 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & a & 7 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = * \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 7 & 3 & 6 & -3 \\ 3 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & a & 7 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}_{C}$$

Таким образом, определитель B при фиксированном a – это константа $\det C$, умноженная на $*$. Чтобы определитель исходной матрицы, равный $\det A + * \cdot \det C$, не зависел от $*$, нужно подобрать такое значение параметра a, чтобы константа $\det C$ при данном a была нулевой.

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 6 & -3 \\ 3 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & a & 7 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \overset{\text{Э}_2(3,4)}{=} - \begin{vmatrix} 7 & 3 & 6 & -3 \\ 3 & 5 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & a & 7 \end{vmatrix} \overset{\text{Э}_2^T(3,4)}{=} \begin{vmatrix} 7 & 3 & -3 & 6 \\ 3 & 5 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 7 & a \end{vmatrix} \overset{\text{Э}_1(1,3,-2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 7 & a \end{vmatrix} \overset{\text{Э}_1(2,1,-3),\text{Э}_1(3,1,-3)}{\underset{\text{Э}_1(4,1,-5)}{=}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & a \end{vmatrix} \overset{\text{Э}_1(3,2,1)}{\underset{\text{Э}_1(4,2,\frac{1}{2}))}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & a+1 \end{vmatrix} \overset{\text{Э}_1(4,3,1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a+6 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-3) \cdot (a+6) = 0 \;\Rightarrow\; a = -6$$

Ответ: -6

Контрольная работа 1 – 2020/2021 учебный год

Задача 1. Решите матричное уравнение $AXB = 2AX$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 8 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

Решение (способ 1). Преобразуем уравнение

$$AXB = 2AX \;\Leftrightarrow\; AXB = AX \cdot 2 \;\Leftrightarrow\; AXB - AX \cdot 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; AX(B - 2E) = 0$$

Найдем размер матрицы. Зная размеры матриц A и $B - 2E$ нетрудно понять, какого размера должна быть матрица X, чтобы размеры матриц в произведении были согласованы

$$\overset{2\times 3}{A} \cdot \overset{m\times n}{X} \cdot (\overset{2\times 2}{B - 2E}) \;\Rightarrow\; X \in \mathrm{Mat}_{3\times 2}(\mathbb{R}) \;\Rightarrow\; X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{pmatrix}$$

Покажем, что матрица $(B - 2E)^{-1}$ существует $\Leftrightarrow \det(B - 2E) \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 3 = 2 \neq 0 \;\Rightarrow\; (B - 2E)^{-1}\text{существует}$$

Домножим обе части $AX(B - 2E) = 0$ справа на $(B - 2E)^{-1}$ и получим равносильное уравнение $AX = 0$.

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 8 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 11x_3 + 8x_5 & 2x_2 - 11x_4 + 8x_6 \\ x_1 - 5x_3 + 3x_5 & x_2 - 5x_4 + 3x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 11x_3 + 8x_5 = 0 \\ 2x_2 - 11x_4 + 8x_6 = 0 \\ x_1 - 5x_3 + 3x_5 = 0 \\ x_2 - 5x_4 + 3x_6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} x_1 - 5x_3 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 11x_3 + 8x_5 = 0 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} x_2 - 5x_4 + 3x_6 = 0 \\ 2x_2 - 11x_4 + 8x_6 = 0 \end{cases} \quad (2) \end{array} \right.$$

Решим системы (1) и (2) по-отдельности:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_3 & x_5 & \\ 1 & -5 & 3 & 0 \\ 2 & -11 & 8 & 0 \end{array}\right) \overset{Э_1(2,1,-2)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{Э_3(2,-1)}{\overset{Э_1(1,2,-5)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = 7x_5 \\ x_3 = 2x_5 \end{cases}, \; x_5 \in \mathbb{R}$$

Аналогичное решение и для системы (2). Таким образом, имеем систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 7x_5, \; x_3 = 2x_5 \\ x_5 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} x_2 = 7x_6, \; x_4 = 2x_6 \\ x_6 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2) \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 7x_5, \; x_2 = 7x_6 \\ x_3 = 2x_5, \; x_4 = 2x_6 \\ x_5, x_6 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 7x_5 & 7x_6 \\ 2x_5 & 2x_6 \\ x_5 & x_6 \end{pmatrix}, \; x_5, x_6 \in \mathbb{R}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 7a & 7b \\ 2a & 2b \\ a & b \end{pmatrix}, \; a, b \in \mathbb{R}$

Решение (способ 2). Преобразуем уравнение

$$AXB = 2AX \;\Leftrightarrow\; AXB = AX\cdot 2 \;\Leftrightarrow\; AXB - AX\cdot 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; AXB - AX\cdot 2E = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; AX(B-2E) = 0$$

Найдем размер матрицы. Зная размеры матриц A и $B-2E$ нетрудно понять, какого размера должна быть матрица X, чтобы размеры матриц в произведении были согласованы

$$\overset{2\times 3}{A}\cdot\overset{m\times n}{X}\cdot\overset{2\times 2}{(B-2E)} \;\Rightarrow\; X\in \mathrm{Mat}_{3\times 2}(\mathbb{R}) \;\Rightarrow\; X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\\ x_5 & x_6\end{pmatrix}$$

Обозначим $C = AX$ и решим уравнение $C(B-2E) = 0$ относительно неизвестной $C\in\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Решим транспонированное уравнение $(B-2E)^TC^T = 0$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 0 & 0\\ -1 & 5 & 0 & 0\end{array}\right) \overset{Э_1(2,1,1)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\end{array}\right) \underset{Э_1(1,2,\frac{3}{2})}{\overset{Э_3(2,\frac{1}{2})}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right) \;\Rightarrow\; EC^T = 0 \;\Rightarrow\; C = 0$$

Получаем, что $C = AX = 0$. Решим уравнение $AX = 0$:

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 8\\ 1 & -5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\\ x_5 & x_6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 11x_3 + 8x_5 & 2x_2 - 11x_4 + 8x_6\\ x_1 - 5x_3 + 3x_5 & x_2 - 5x_4 + 3x_6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 11x_3 + 8x_5 = 0\\ 2x_2 - 11x_4 + 8x_6 = 0\\ x_1 - 5x_3 + 3x_5 = 0\\ x_2 - 5x_4 + 3x_6 = 0\end{cases} \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{ll} \begin{cases} x_1 - 5x_3 + 3x_5 = 0\\ 2x_1 - 11x_3 + 8x_5 = 0\end{cases} & (1)\\ \begin{cases} x_2 - 5x_4 + 3x_6 = 0\\ 2x_2 - 11x_4 + 8x_6 = 0\end{cases} & (2)\end{array}\right.$$

Решим системы (1) и (2) по-отдельности:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_5 \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & 0\\ 2 & -11 & 8 & 0\end{array}\right)\end{array} \overset{Э_1(2,1,-2)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0\end{array}\right) \underset{Э_3(2,-1)}{\overset{Э_1(1,2,-5)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = 7x_5\\ x_3 = 2x_5\end{cases},\; x_5\in\mathbb{R}$$

Аналогичное решение и для системы (2). Таким образом, имеем систему

$$\left\{\begin{array}{ll} \begin{cases} x_1 = 7x_5,\; x_3 = 2x_5\\ x_5\in\mathbb{R}\end{cases} & (1)\\ \begin{cases} x_2 = 7x_6,\; x_4 = 2x_6\\ x_6\in\mathbb{R}\end{cases} & (2)\end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x_1 = 7x_5,\; x_2 = 7x_6\\ x_3 = 2x_5,\; x_4 = 2x_6\\ x_5, x_6\in\mathbb{R}\end{cases} \;\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 7x_5 & 7x_6\\ 2x_5 & 2x_6\\ x_5 & x_6\end{pmatrix},\; x_5, x_6\in\mathbb{R}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 7a & 7b\\ 2a & 2b\\ a & b\end{pmatrix},\;\; a, b\in\mathbb{R}$

Задача 2. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} ax_3 + bx_4 = 6 \\ 3x_2 - x_3 - 5x_4 = 6 \\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -3 \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 2 \end{cases}$$

Найдите все значения параметров a и b, при которых эта система имеет хотя бы два решения, и выпишите общее решение для найденных значений параметров.

Решение. Решим данную систему с помощью метода Гаусса. Запишем расширенную матрицу системы и применим к ней элементарные преобразования строк. Для удобства уравнение с параметром переставим в последнюю строку.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & a & b & 6 \\ 0 & 3 & -1 & -5 & 6 \\ -3 & 3 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & -5 & -5 & 2 \end{array}\right) \underset{Э_2(2,3)}{\overset{Э_2(1,4)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & -5 & -5 & 2 \\ -3 & 3 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & a & b & 6 \end{array}\right) \overset{Э_1(1,2,1)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 & -1 \\ -3 & 3 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & a & b & 6 \end{array}\right) \overset{Э_1(2,1,3)}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 9 & -7 & -11 & -6 \\ 0 & 3 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & a & b & 6 \end{array}\right) \overset{Э_1(2,3,-3)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -24 \\ 0 & 3 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & a & b & 6 \end{array}\right) \underset{Э_2(2,3)}{\overset{Э_3(2,-\frac{1}{4})}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & a & b & 6 \end{array}\right) \underset{Э_1(2,3,1)}{\overset{Э_1(1,3,3)}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -7 & 17 \\ 0 & 3 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & a & b & 6 \end{array}\right) \underset{Э_3(2,\frac{1}{3})}{\overset{Э_1(1,2,-\frac{2}{3})}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & a & b & 6 \end{array}\right) \overset{Э_1(4,3,-a)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & b+a & 6-6a \end{array}\right)$$

Система не имеет решений, если $b + a = 0$ и $6 - 6a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$ и $b = -a$. Если $b + a \neq 0$, то система имеет единственное решение. Система будет иметь хотя бы два решения, если $b + a = 0$ и $6 - 6a = 0$, то есть $a = 1$ и $b = -1$. В этом случае система имеет бесконечно много решений:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & b+a & 6-6a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ общее решение: } (9 + 3x_4,\ 4 + 2x_4,\ 6 + x_4,\ x_4),\ \ x_4 \in \mathbb{R}$$

Ответ: при $a = 1$ и $b = -1$ общее решение $(9 + 3x_4,\ 4 + 2x_4,\ 6 + x_4,\ x_4),\ \ x_4 \in \mathbb{R}$

Задача 3. Существует ли такая нечётная перестановка $\sigma \in S_7$, что перестановка σ^{68} является решением уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 5 & 7 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Решение. Найдем все перестановки удовлетворяющие описанному уравнению. Для этого обе части уравнения домножим на

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 5 & 7 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 7 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Получим следующее решение уравнения:

$$\longleftarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (14572)$$

Если описанная σ существует, то $\sigma^{68} = (14572)$, так как по условию σ^{68} является решением уравнения. Известно, что при возведении в степень k цикл длины m распадается на НОД(k, m) циклов длины $m/$НОД(k, m). Отсюда получаем: чтобы в σ^{68} был цикл длины 5, нужно, чтобы в σ был цикл длины 5. Цикл этой длины равен $(14572)^{1/68}$. Заметим, что $(14572)^{1/68}$ состоит из тех же цифр, что и (14572), и является циклом длины 5, так как НОД$(5, 68) = 1$.

Имеем два возможных варианта $\sigma_1 = (14572)^{1/68}(3)(6)$ и $\sigma_2 = (14572)^{1/68}(36)$. Проверим, что их 68 степень – решение уравнения

$$\sigma_1^{68} = \left((14572)^{1/68}\right)^{68}(3)^{68}(6)^{68} = (14572) \Rightarrow \text{ является решением уравнения}$$
$$\sigma_2^{68} = \left((14572)^{1/68}\right)^{68}(36)^{68} = (14572) \Rightarrow \text{ является решением уравнения}$$

Вычислим чётность перестановок σ_1 и σ_2. Количество независимых циклов в σ_1 всего 3 $\Rightarrow$ знак перестановки $\operatorname{sgn}(\sigma_1) = (-1)^{7-3} = 1$ – перестановка чётная $\Rightarrow$ этот случай не подходит. Знак σ_2 равен $\operatorname{sgn}(\sigma_2) = (-1)^{7-2} = -1$, значит, σ_2 нечётная и полностью удовлетворяет условию задачи.

Таким образом, описанная перестановка существует.

Ответ: существует

Задача 4. Найдите коэффициент x^5 в выражении определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & x & 3 \\ 2 & 4 & x^2 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 2 & x & x \\ -1 & x & 1 & 5 & -2 \\ x & -3 & 1 & x & 2 \end{vmatrix}$$

Решение. Сделаем некоторые элементарные преобразования строк.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & x & 3 \\ 2 & 4 & x^2 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 2 & x & x \\ -1 & x & 1 & 5 & -2 \\ x & -3 & 1 & x & 2 \end{vmatrix} \overset{Э_1(3,1,-1)}{\underset{Э_1(5,1,-1)}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & x & 3 \\ 2 & 4 & x^2 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 0 & x-3 \\ -1 & x & 1 & 5 & -2 \\ x-1 & -5 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Определителем матрицы $A \in M_n$ называется число

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

В описанной сумме найдём слагаемые с x^5. Для этого нужно найти перестановку σ, такую что произведение $a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \ldots, a_{n\sigma(n)}$ содержит x^5. Единственный способ выбрать слагаемое, в котором x входит в степени $\geqslant 5$, имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & x & 3 \\ 2 & 4 & x^2 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 0 & x-3 \\ -1 & x & 1 & 5 & -2 \\ x-1 & -5 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Это слагаемое равно $x^4(x-3)(x-1) = x^4(x^2-4x+3) = x^6 - 4x^5 + 3x^4$. Найдём знак, с котором оно входит в определитель. Для этого нужно узнать знак соответствующей перестановки.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{число инверсий: } 3+2+2+1+0 = 8 \;\Rightarrow\; \operatorname{sgn}(\sigma) = 1$$

Получаем, что слагаемое $x^6 - 4x^5 + 3x^4$ входит в определитель со знаком «+», значит перед x^5 в определителе стоит коэффициент -4.

Ответ: -4

Задача 5. Даны матрицы $A, B \in M_4(\mathbb{R})$ известно, что $\det A = 1$ и

$$B_{(1)} = 3A_{(2)} + 2A_{(4)}, \quad B_{(2)} = -2A_{(1)} + 3A_{(3)} + 2A_{(4)}, \quad B_{(3)} = 2A_{(2)} - A_{(3)}, \quad B_{(4)} = 3A_{(1)} + 2A_{(3)}$$

где нижний индекс (i) обозначает i-ю строку соответствующей матрицы. Чему равен $\det B$?

Решение. Выразим строки матрицы B через матрицу A:

$$B_{(1)} = (0,3,0,2) \cdot \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ A_{(3)} \\ A_{(4)} \end{pmatrix} = 2A_{(2)} + 2A_{(4)}, \quad B_{(2)} = (-2,0,3,2) \cdot \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ A_{(3)} \\ A_{(4)} \end{pmatrix} = -2A_{(1)} + 3A_{(3)} + 2A_{(4)},$$

$$B_{(3)} = (0,2,-1,0) \cdot \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ A_{(3)} \\ A_{(4)} \end{pmatrix} = 2A_{(2)} - A_{(3)}, \quad B_{(4)} = (3,0,2,0) \cdot \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ A_{(3)} \\ A_{(4)} \end{pmatrix} = 3A_{(1)} + 2A_{(3)}$$

Отсюда несложно получить следующее выражение для матрицы B:

$$B = \begin{pmatrix} B_{(1)} \\ B_{(2)} \\ B_{(3)} \\ B_{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ A_{(3)} \\ A_{(4)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{C} \cdot A$$

Известно, что $\det(C \cdot A) = \det C \cdot \det A$. Значит, для нахождения определителя матрицы B достаточно найти определитель C, так как $\det B = \det C \cdot \det A = \det C \cdot 1 = \det C$.

Найдём определитель C, сведя матрицу элементарными преобразованиями строк к верхнетреугольному виду.

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \underset{Э_1(2,4,1)}{\overset{Э_1(1,3,-1)}{=}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \underset{Э_1(4,2,-3)}{\overset{Э_1(3,1,-2)}{=}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -13 & -6 \end{vmatrix} \overset{Э_1(4,3,-4)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} \overset{Э_1(3,4,-3)}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -34 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} \underset{Э_1(3,4)}{\overset{Э_2(1,2)}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -34 \end{vmatrix} = 34$$

Ответ: 34

Задача 6. Про матрицу $A \in M_4(\mathbb{R})$ известно, что она обратима

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Можно ли в первой строке матрицы A изменить один элемент таким образом, чтобы полученная матрица стала необратимой? Ответ обоснуйте.

Решение (способ 1). Найдём матрицу A, то есть обратную к A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{Э_1(4,1,1)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{Э_1(1,2,-1)}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{Э_1(1,3,-2)}{\overset{Э_1(2,1,-3)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 2 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{Э_2(3,4)}{\overset{Э_1(2,3,8)}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{Э_2(2,4)}{\overset{Э_3(2,\frac{1}{2}),Э_1(1,2,\frac{1}{2})}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array} \underbrace{\begin{array}{cccc} -1/2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -\,3/2 & 2 & 4 & 0 \end{array}}_{A}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3/2 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица необратима, если её определитель равен нулю. Известно, что если в матрице есть две одинаковые строки, то её определитель равен нулю. Изменив значение элемента a_{11} первой строки матрицы A на $a_{11} = -3/4$, получим

$$\det A = \begin{vmatrix} -3/4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3/2 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -3/4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3/4 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

Таким образом, при данном изменении элемента a_{11} матрица A становится необратимой.

Ответ: можно

Решение (способ 2). Найдём числа стоящие в первой строке матрицы A. Для этого рассмотрим выражение матрицы A через матрицу A^{-1} с помощью формулы для обратной матрицы. Для удобства обозначим $B = A^{-1}$, тогда

$$A = \frac{1}{\det B} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} & B_{41} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} & B_{42} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & B_{43} \\ B_{14} & B_{24} & B_{34} & B_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Найдём $\det B$ и $B_{11}, B_{21}, B_{31}, B_{41}$. Чтобы найти всё это одновременно, определитель матрицы B разложим по первому столбцу:

$$\det B = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \underbrace{4 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{B_{11}} + \underbrace{3 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{B_{21}} +$$

$$\underbrace{+0 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{B_{31}} - \underbrace{4 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{B_{41}} = 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 4 - 4 \cdot 0 = 2$$

Получаем, что элементы первой строки матрицы A равны:

$$a_{11} = \frac{B_{11}}{\det B} = -\frac{1}{2} \qquad a_{12} = \frac{B_{21}}{\det B} = \frac{2}{2} = 1 \qquad a_{13} = \frac{B_{31}}{\det B} = \frac{4}{2} = 2 \qquad a_{14} = \frac{B_{41}}{\det B} = \frac{0}{2} = 0$$

Матрица A будет необратима, если $\det A$ равен нулю. Определитель матрицы A выражается $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$. Получаем уравнение $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} = 0$. Зафиксируем число $C = \det A \neq 0$ и поделим на него обе части уравнения:

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} = 0 \Leftrightarrow a_{11}\overbrace{\frac{A_{11}}{\det A}}^{C_1} + a_{12}\overbrace{\frac{A_{12}}{\det A}}^{C_2} + a_{13}\overbrace{\frac{A_{13}}{\det A}}^{C_3} + a_{14}\overbrace{\frac{A_{14}}{\det A}}^{C_4} = 0$$

Заметим, что значения C_1, C_2, C_3, C_4 уже известны – это элементы первого столбца B:

$$B = A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} C_1 = 4 \\ C_2 = 3 \\ C_3 = 0 \\ C_4 = -4 \end{matrix}$$

Пусть значение элемента a_{11} изменено на x. При этой замене значения $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}$ никак не изменятся, поэтому описанное уравнение остаётся корректным. Подставляя значения элементов a_{12}, a_{13}, a_{14}, получим: $x \cdot C_1 + C_2 + 2 \cdot C_3 + 0 \cdot C_4 = x \cdot 4 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3/4$.

Таким образом, описанная замена существует.

Ответ: можно

Экзамен – 2 модуль

Экзамен 1 – 2016/2017 учебный год

Задача 1. Решите уравнение $\rho x \sigma = \tau$ относительно неизвестной подстановки x, где

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 6 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение. Перестановку x нетрудно получить, домножив обе части уравнения на ρ^{-1} слева и σ^{-1} справа: $\rho^{-1}\rho x \sigma \sigma^{-1} = x = \rho^{-1}\tau\sigma^{-1}$.

$$\rho^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 & 6 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 & 1 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 6 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longleftarrow$$

$$x = \rho^{-1}\tau\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 6 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\longleftarrow$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 6 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 6 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

Задача 2. Решите уравнение $XA = B$ относительно неизвестной матрицы X, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -9 \\ -2 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Решим транспонированное уравнение $A^T X^T = B^T$. Запишем матрицу $(A^T \mid B^T)$ и приведём её левую часть элементарными преобразованиями строк к улучшенному ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{A^T}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{B^T}} \\ 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & -7 & 5 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & -9 & 6 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{Э}_1(2,1,-2)}{\underset{\text{Э}_1(3,1,1)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & -13 & 9 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -6 & 4 & 2 \end{array}\right) \overset{\text{Э}_1(2,3,-2)}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -6 & 4 & 2 \end{array}\right) \overset{\text{Э}_1(3,2,-2)}{\underset{\text{Э}_3(3,\frac{1}{2})}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{E}} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{X^T}} \end{array}\right)$$

$$X^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Задача 3. Найдите все комплексные решения уравнения

$$(2\sqrt{3}-i)z^4 = 10-6\sqrt{3}i$$

Решение. Поделим обе части уравнения на $2\sqrt{3}-i \neq 0$:

$$(2\sqrt{3}-i)z^4 = 10-6\sqrt{3}i \;\Leftrightarrow\; z^4 = \frac{10-6\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}-i}$$

Преобразуем полученную дробь, домножив числитель и знаменатель на число $2\sqrt{3}+i$, сопряжённое к $2\sqrt{3}-i$:

$$\frac{10-6\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}-i} = \frac{(10-6\sqrt{3}i)(2\sqrt{3}+i)}{(2\sqrt{3}-i)(2\sqrt{3}+i)} = \frac{20\sqrt{3}+10i-36i+6\sqrt{3}}{12+1} = \frac{26\sqrt{3}-26i}{13} =$$
$$= 2\sqrt{3}-2i = 4\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = 4\cdot\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

Имеем следующее уравнение:

$$z^4 = 4\cdot\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

Из обеих частей уравнения извлечём корень четвёртой степени:

$$z = \sqrt[4]{4}\cdot\left(\cos\frac{\frac{11\pi}{6}+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\frac{11\pi}{6}+2\pi k}{4}\right),\ k=0,1,2,3$$

Таким образом, имеем четыре корня уравнения:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{11\pi}{24}+i\sin\frac{11\pi}{24}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{24}+i\sin\frac{11\pi}{24}\right)\\
z_1 &= \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{23\pi}{24}+i\sin\frac{23\pi}{24}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{23\pi}{24}+i\sin\frac{23\pi}{24}\right)\\
z_2 &= \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{35\pi}{24}+i\sin\frac{35\pi}{24}\right) = \sqrt{2}\left(-\cos\frac{11\pi}{24}-i\sin\frac{11\pi}{24}\right)\\
z_3 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{47\pi}{24}+i\sin\frac{47\pi}{24}\right) = \sqrt{2}\left(-\cos\frac{23\pi}{24}-i\sin\frac{23\pi}{24}\right)
\end{aligned}$$

Ответ: $z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{24}+i\sin\frac{11\pi}{24}\right)$

$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{23\pi}{24}+i\sin\frac{23\pi}{24}\right)$

$z_2 = \sqrt{2}\left(-\cos\frac{11\pi}{24}-i\sin\frac{11\pi}{24}\right)$

$z_3 = \sqrt{2}\left(-\cos\frac{23\pi}{24}-i\sin\frac{23\pi}{24}\right)$

Задача 4. Докажите, что функции $\sin x, \sin 2x, \cos 3x, \cos 4x$ линейно независимы в пространстве всех действительнозначных функций на $\mathbb{R}$.

Решение. Запишем линейную комбинацию описанных функций и приравняем эту комбинацию к нулю: $\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin 2x + \alpha_3 \cos 3x + \alpha_4 \cos 4x = 0$. Если функции линейно независимы, то из записанного равенства должно следовать $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

При определённых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ выражение $\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin 2x + \alpha_3 \cos 3x + \alpha_4 \cos 4x$ равно нулю при любом значении $x \in \mathbb{R}$, в частности при $x = \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$.

$$x = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \alpha_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \alpha_2 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \alpha_3 \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \alpha_4 \cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \alpha_1 + \alpha_4 = 0$$

$$x = -\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \alpha_1 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \alpha_2 \sin\left(-2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \alpha_3 \cos\left(-3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \alpha_4 \cos\left(-4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = -\alpha_1 + \alpha_4 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_4 \\ \alpha_1 = \alpha_4 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_4 = 0$$

С учётом $\alpha_1 = \alpha_4 = 0$ получаем $\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin 2x + \alpha_3 \cos 3x + \alpha_4 \cos 4x = \alpha_2 \sin 2x + \alpha_3 \cos 3x = 0$. Рассмотрим это выражение при $x = \pi$:

$$x = \pi \;\Rightarrow\; \alpha_2 \sin 2\pi + \alpha_3 \cos 3\pi = -\alpha_3 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_3 = 0$$

С учётом $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ получаем $\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin 2x + \alpha_3 \cos 3x + \alpha_4 \cos 4x = \alpha_2 \sin 2x = 0$. Рассмотрим это выражение при $x = \frac{\pi}{4}$:

$$x = \frac{\pi}{4} \;\Rightarrow\; \alpha_2 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \alpha_2 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_2 = 0$$

Таким образом, выражение $\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin 2x + \alpha_3 \cos 3x + \alpha_4 \cos 4x$ равно нулю при любом $x \in \mathbb{R}$ тогда и только, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Значит, функции $\sin x, \sin 2x, \cos 3x, \cos 4x$ линейно независимы.

Задача 5. Найдите базис и размерность подпространства в $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, состоящую из всех матриц X, для которых

$$X\begin{pmatrix}-6 & 4\\ -9 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6 & 4\\ -9 & 6\end{pmatrix}X.$$

Решение. Пусть матрица X равна

$$X = \begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$$

Преобразуем описанное в условии уравнение

$$X\begin{pmatrix}-6 & 4\\ -9 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6 & 4\\ -9 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6x_1-9x_2 & 4x_1+6x_2\\ -6x_3-9x_4 & 4x_3+6x_4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-6 & 4\\ -9 & 6\end{pmatrix}X = \begin{pmatrix}-6 & 4\\ -9 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6x_1+4x_3 & -6x_2+4x_4\\ -9x_1+6x_3 & -9x_2+6x_4\end{pmatrix}$$

$$X\begin{pmatrix}-6 & 4\\ -9 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6 & 4\\ -9 & 6\end{pmatrix}X \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-6x_1-9x_2 & 4x_1+6x_2\\ -6x_3-9x_4 & 4x_3+6x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6x_1+4x_3 & -6x_2+4x_4\\ -9x_1+6x_3 & -9x_2+6x_4\end{pmatrix}$$

Получаем ОСЛУ на неизвестные x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases}-6x_1-9x_2 = -6x_1+4x_3\\ 4x_1+6x_2 = -6x_2+4x_4\\ -6x_3-9x_4 = -9x_1+6x_3\\ 4x_3+6x_4 = -9x_2+6x_4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-9x_2-4x_3 = 0\\ 4x_1+12x_2-4x_4 = 0\\ 9x_1-12x_3-9x_4 = 0\\ 9x_2+4x_3 = 0\end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}0 & -9 & -4 & 0\\ 4 & 12 & 0 & -4\\ 9 & 0 & -12 & -9\\ 0 & 9 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & -9 & -4 & 0\\ 4 & 12 & 0 & -4\\ 9 & 0 & -12 & -9\\ 0 & 9 & 4 & 0\end{pmatrix} \underset{\text{Э}_1(3,1,1),\text{Э}_3(1,-\frac{1}{9})}{\overset{\text{Э}_1(3,2,-\frac{9}{4}),\text{Э}_3(2,\frac{1}{4})}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix}0 & 1 & 4/9 & 0\\ 1 & 3 & 0 & -1\\ 0 & -27 & -12 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \underset{\text{Э}_2(1,2)}{\overset{\text{Э}_1(2,1,-3),\text{Э}_1(3,1,27)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix}1 & 0 & -4/3 & -1\\ 0 & 1 & 4/9 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3	x_4
12	-4	9	0
1	0	0	1

ФСР системы: $v_1 = \begin{pmatrix}12\\ -4\\ 9\\ 0\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

Полученные два вектора легко преобразуются в матрицы X_1 и X_2, которые и являются базисом описанного подпространства:

$$v_1 = \begin{pmatrix}12\\ -4\\ 9\\ 0\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow X_1 = \begin{pmatrix}12 & -4\\ 9 & 0\end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Базис состоит из двух матриц, значит, размерность подпространства равна двум.

Ответ: $\begin{pmatrix}12 & -4\\ 9 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ – базис подпространства, размерность равна двум

Задача 6. (а) Найдите базис и размерность подпространства в $\mathbb{R}^5$, являющийся линейной оболочкой векторов

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 4 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$$

(б) Дополните полученный в пункте (а) базис до базиса всего $\mathbb{R}^5$.

Решение. Для нахождения базиса $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ применим известный алгоритм: запишем векторы v_1, v_2, v_3, v_4 в строки матрицы и приведём её к ступенчатому виду, из ступенчатого вида матрицы возьмём ненулевые строки – они и образуют искомый базис.

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -5 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & -2 \\ 9 & -2 & 4 & -3 & -8 \end{pmatrix} \underset{\text{Э}_1(4,1,4)}{\overset{\text{Э}_1(2,1,-1),\text{Э}_1(3,1,1)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -8 & 5 & 4 \end{pmatrix} \underset{\text{Э}_1(4,2,-1)}{\overset{\text{Э}_1(3,2,-1)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\overset{\text{Э}_1(1,4,2)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -15 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{\text{Э}_1(2,1,-2)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -15 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 28 & 1 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -15 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 28 & 1 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получаем, что векторы $u_1 = (1, 0, -6, 0, 3)$, $u_2 = (0, 1, -15, 2, 9)$, $u_3 = (0, 0, 28, 1, -17)$ – базис линейной оболочки векторов v_1, v_2, v_3, v_4. Этот базис легко дополняется до базиса всего $\mathbb{R}^5$. Из ступенчатого вида матрицы видно, что номера ведущих элементов строк равны 1, 2 и 3. Значит, векторы $e_4 = (0, 0, 0, 1, 0)$ и $e_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$ стандартного базиса $\mathbb{R}^5$ дополняют u_1, u_2, u_3, u_4 до базиса $\mathbb{R}^5$.

Ответ: (а) $(1, 0, -6, 0, 3)$, $(0, 1, -15, 2, 9)$, $(0, 0, 28, 1, -17)$ – базис $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$

(б) дополнение векторами $e_4 = (0, 0, 0, 1, 0)$ и $e_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$

Задача 7. Найдите наименьшее положительное значение, которое может принимать определитель целочисленной матрицы 4×4, содержащей строку $(96, 80, 66, 45)$.

Решение. Так как по условию матрица целочисленная, определитель этой матрицы также целочисленный. Значит, наименьшее положительное значение, которое может принимать определитель, не меньше 1. Докажем, что определитель может принимать значение 1.

Над столбцами матрицы произведём элементарные преобразования первого типа ($Э_1^T(i, j, \lambda)$ – к i-му столбцу прибавить j-й столбец, умноженный на λ) и сведём строку $(96, 80, 66, 45)$ к $(0, 0, 0, 1)$, причём в каждом преобразовании λ будет *целочисленной*. Такие преобразования не изменят определитель матрицы. Пусть для определённости строка $(96, 80, 66, 45)$ в матрице стоит первой.

$$\begin{vmatrix} 96 & 80 & 66 & 45 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix} \overset{Э_1^T(1,4,-2), Э_1^T(2,4,-2)}{\underset{Э_1^T(3,4,-1)}{=}} \begin{vmatrix} 6 & -10 & 21 & 45 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix} \overset{Э_1^T(2,1,2), Э_1^T(3,1,-4)}{\underset{Э_1^T(4,1,-7)}{=}} \begin{vmatrix} 6 & 2 & -3 & 3 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix} \overset{Э_1^T(1,2,-3), Э_1^T(3,2,2)}{\underset{Э_1^T(4,2,-1)}{=}}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix} \overset{Э_1^T(2,4,-2)}{\underset{Э_1^T(3,4,-1)}{=}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix}$$

Поставим вместо звёздочек такие *целочисленные* значения, чтобы матрица имела определитель, равный 1. Например, рассмотрим следующую матрицу

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Известно, что элементарные преобразования обратимы. Для преобразования $Э_1^T(i, j, \lambda)$ обратным будет $Э_1^T(i, j, -\lambda)$. Так как все описанные элементарные преобразования производились с *целочисленной* λ, обратные им преобразования не испортят *целочисленности* матрицы и сохранят определитель равным 1.

Таким образом, произведя обратные преобразования, получим матрицу, содержащую строку $(96, 80, 66, 45)$, определитель которой равен 1.

Ответ: 1

Проверка. Сделаем обратные элементарные преобразования и убедимся, что матрица действительно осталось целочисленной с определителем, равным 1.

$$1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{Э}_1^T(3,4,1)}{\overset{\text{Э}_1^T(2,4,2)}{=}} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{Э}_1^T(4,2,1)}{\overset{\text{Э}_1^T(1,2,3),\text{Э}_1^T(3,2,-2)}{=}} \begin{vmatrix} 6 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{Э}_1^T(4,1,7)}{\overset{\text{Э}_1^T(2,1,-2),\text{Э}_1^T(3,1,4)}{=}}$$

$$= \begin{vmatrix} 6 & -10 & 21 & 45 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 10 & 22 \\ 1 & -2 & 4 & 7 \end{vmatrix} \underset{\text{Э}_1^T(3,4,1)}{\overset{\text{Э}_1^T(1,4,2),\text{Э}_1^T(2,4,2)}{=}} \begin{vmatrix} 96 & 80 & 66 & 45 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 47 & 39 & 32 & 22 \\ 15 & 12 & 11 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 96 & 80 & 45 \\ 47 & 39 & 22 \\ 15 & 12 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= -(96 \cdot 39 \cdot 7 + 80 \cdot 22 \cdot 15 + 45 \cdot 47 \cdot 12 - 15 \cdot 39 \cdot 45 - 12 \cdot 22 \cdot 96 - 7 \cdot 47 \cdot 80) = 1$$

Задача 8. Пусть A – матрица 5×5, причем $\operatorname{rk} A = 3$. Найдите все возможные значения величины $\operatorname{rk}(5A - 2E)$.

Решение. Известно, $\operatorname{rk}(A+B) \leqslant \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$, $\operatorname{rk}(A-B) \geqslant \operatorname{rk} A - \operatorname{rk} B$, $\operatorname{rk}(\lambda A) = \operatorname{rk}(A)$ при $\lambda \neq 0$ и $\operatorname{rk} A = 0 \Leftrightarrow A = 0$. На основе этих утверждений покажем, что $\operatorname{rk}(5A - 2E) \geqslant 2$. Из равенства $\operatorname{rk}(A-B) \geqslant \operatorname{rk} A - \operatorname{rk} B$ следует, что $\operatorname{rk}(5A-2E) = \operatorname{rk}(2E-5A) \geqslant \operatorname{rk}(2E) - \operatorname{rk}(5A) = \operatorname{rk} E - \operatorname{rk} A = 2$.

Рассмотрим примеры матрицы A для $\operatorname{rk}(5A - 2E) = 2, 3, 4, 5$.

$$\operatorname{rk}(5A-2E) = 2 \Rightarrow \text{ пример: } A = \begin{pmatrix} 2/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow 5A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rk}(5A-2E) = 3 \Rightarrow \text{ пример: } A = \begin{pmatrix} 2/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow 5A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rk}(5A-2E) = 4 \Rightarrow \text{ пример: } A = \begin{pmatrix} 2/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow 5A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rk}(5A-2E) = 5 \Rightarrow \text{ пример: } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow 5A - 2E = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ответ: 2, 3, 4, 5

Замечание. Показать, что ранг матрицы $5A - 2E$ не может принимать значение 0 и 1 можно и по-другому.

Если $\operatorname{rk}(5A-2E) = 0$, то $5A-2E = 0 \Leftrightarrow 5A = 2E \Rightarrow \operatorname{rk}(5A) = \operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(2E) = 5 \Rightarrow$ противоречие с условием задачи.

Пусть теперь $\operatorname{rk}(5A - 2E) = 1$. Обозначим столбцы матрицы $5A$ как $v_1, \ldots, v_5$, а матрицы $2E$ как $e_1, \ldots, e_5$. Если ранг матрицы $5A - 2E$ равен единице, то все столбцы этой матрицы пропорциональны какому-нибудь ненулевому столбцу в $5A - 2E$ (такой найдётся, так как ранг не равен нулю). Без ограничения общности будем считать, что ненулевой столбец – это v_1, тогда

$$\begin{matrix} v_2 - e_2 = \lambda_2(v_1 - e_1) \\ v_3 - e_3 = \lambda_3(v_1 - e_1) \\ v_4 - e_4 = \lambda_4(v_1 - e_1) \\ v_5 - e_5 = \lambda_5(v_1 - e_1) \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} v_2 = \lambda_2 v_1 + (e_2 - \lambda_2 e_1) \\ v_3 = \lambda_3 v_1 + (e_3 - \lambda_3 e_1) \\ v_4 = \lambda_4 v_1 + (e_4 - \lambda_4 e_1) \\ v_5 = \lambda_5 v_1 + (e_5 - \lambda_5 e_1) \end{matrix}$$

Ранг матрицы $5A$ совпадает с рангом матрицы $A \Rightarrow$ система столбцов $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ имеет ранг 3 по условию задачи. С другой стороны, сделав элементарные преобразования столбцов в $5A$, не меняющие ранг матрицы, получим

$$\begin{aligned} 5A &= \big(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\big) = \\ &= \big(v_1,\ \lambda_2 v_1 + (e_2 - \lambda_2 e_1),\ \lambda_3 v_1 + (e_3 - \lambda_3 e_1),\ \lambda_4 v_1 + (e_4 - \lambda_4 e_1),\ \lambda_5 v_1 + (e_5 - \lambda_5 e_1)\big) \underset{i=2,3,4,5}{\overset{\text{Э}_1^T(i,1,-\lambda_i)}{\rightsquigarrow}} \\ &\rightsquigarrow \big(v_1,\ e_2 - \lambda_2 e_1,\ e_3 - \lambda_3 e_1,\ e_4 - \lambda_4 e_1,\ e_5 - \lambda_5 e_1\big) \end{aligned}$$

У полученной системы ранг минимум 4, так как векторы $e_2 - \lambda_2 e_1, e_3 - \lambda_3 e_1, e_4 - \lambda_4 e_1, e_5 - \lambda_5 e_1$ линейно независимы $\Rightarrow$ противоречие с $\operatorname{rk}(5A) = 3$.

Экзамен 1 – 2017/2018 учебный год

Задача 1. Решите уравнение $XA = B$ относительно неизвестной матрицы X, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 10 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 3 & 9 & -1 \\ 1 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Решим транспонированное уравнение $A^TX^T = B^T$. Запишем матрицу $(A^T \mid B^T)$ и приведём её левую часть элементарными преобразованиями строк к улучшенному ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 10 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{matrix}}^{A^T} & \overbrace{\begin{matrix} 3 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 9 \\ -2 & -1 & 8 \end{matrix}}^{B^T} \end{array}\right) \overset{Э_1(2,1,-3)}{\underset{Э_1(1,3,-1)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 3 & -2 & -1 & 8 \end{array}\right) \overset{Э_1(3,2,-1)}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \overset{Э_1(1,4,-2)}{\underset{Э_1(2,4,-4)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \overset{Э_1(1,2,-1)}{\underset{Э_3(2,-\frac{1}{2})}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \overset{Э_1(3,2,-1)}{\underset{Э_2(2,3)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E} & \underbrace{\begin{matrix} 5 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{matrix}}_{X^T} \end{array}\right)$$

$$X^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 2. Найдите все комплексные решения уравнения $(2-\sqrt{3}i)z^3 = -\sqrt{2}-3\sqrt{6}i$, принадлежащие II четверти комплексной плоскости.

Решение. Поделим обе части уравнения на $2-\sqrt{3}i \neq 0$:

$$(2-\sqrt{3}i)z^3 = -\sqrt{2}-3\sqrt{6}i \Leftrightarrow z^3 = \frac{-\sqrt{2}-3\sqrt{6}i}{2-\sqrt{3}i}$$

Преобразуем полученную дробь, домножив числитель и знаменатель на число $2+\sqrt{3}i$, сопряжённое к $2-\sqrt{3}i$:

$$\frac{-\sqrt{2}-3\sqrt{6}i}{2-\sqrt{3}i} = \frac{(-\sqrt{2}-3\sqrt{6}i)(2+\sqrt{3}i)}{(2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)} = \frac{-2\sqrt{2}-\sqrt{6}i-6\sqrt{6}i+9\sqrt{2}}{4+3} = \frac{7\sqrt{2}-7\sqrt{6}i}{7} =$$

$$= \sqrt{2}-\sqrt{6}i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

Имеем следующее уравнение:

$$z^3 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

Из обеих частей уравнения извлечём корень третий степени:

$$z = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\cdot\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi k}{3}\right),\ k=0,1,2$$

Таким образом, имеем три корня уравнения:

$$z_0 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{5\pi}{9}+i\sin\frac{5\pi}{9}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{9}+i\sin\frac{5\pi}{9}\right)$$
$$z_1 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{11\pi}{9}+i\sin\frac{11\pi}{9}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{9}+i\sin\frac{11\pi}{9}\right)$$
$$z_2 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{17\pi}{9}+i\sin\frac{17\pi}{9}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{9}+i\sin\frac{17\pi}{9}\right)$$

Посмотрев на аргумент комплексного числа, нетрудно увидеть, что корень z_0 лежит во второй четверти комплексной плоскости.

Ответ: $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{9}+i\sin\frac{5\pi}{9}\right)$

Задача 3. Обозначим через a_1, a_2, a_3, a_4 соответственно первый, второй, третий и четвёртый столбцы матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{4\times4}(\mathbb{R})$. Положим

$$b_1 = a_1 + 2a_2, \qquad b_2 = a_1 + 3a_2 + a_3, \qquad b_3 = -a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4, \qquad b_4 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 - a_4$$

Чему равен определитель матрицы B со столбцами b_1, b_2, b_3, b_4, если определитель матрицы A равен 5?

Решение. Выразим столбцы матрицы B через матрицу $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$:

$$b_1 = (a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 + 2a_2, \qquad b_3 = (a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4,$$

$$b_2 = (a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 + 3a_2 + a_3, \qquad b_4 = (a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = a_1 + 2a_2 + 3a_3 - a_4$$

Отсюда несложно получить следующее выражение для матрицы B:

$$B = (b_1, b_2, b_3, b_4) = (a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{C}$$

Известно, что $\det(A \cdot C) = \det A \cdot \det C$. Значит, для нахождения определителя матрицы B достаточно найти определитель C, так как $\det B = \det A \cdot \det C = 5 \cdot \det C$.

Найдём определитель C, сведя матрицу элементарными преобразованиями строк к верхнетреугольному виду.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{Э}_1(2,1,-2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{Э}_1(3,2,-1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{Э}_1(4,3,1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Таким образом, $\det B = 5 \cdot (-4) = -20$.

Ответ: -20

Задача 4. Докажите, что множество всех матриц $X \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию $\mathrm{tr}(XY) = 0$, где $Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, является подпространством в пространстве $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$; найдите базис и размерность этого подпространства.

Решение. Обозначим через U множество описанных матриц X. Ясно, что множество U вложено в $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Чтобы доказать, что U подпространство, нужно проверить следующие три условия:

1. $\vec{0} \in U$
2. $\forall X_1, X_2 \in U \Rightarrow X_1 + X_2 \in U$
3. $\forall X \in U,\ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha X \in U$

Проверим первое условие: $X = 0 \Rightarrow \mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(0 \cdot Y) = \mathrm{tr}(0) = 0 \Rightarrow 0 \in U$. Проверим второе условие: $X_1, X_2 \in U \Rightarrow \mathrm{tr}((X_1 + X_2)Y) = \mathrm{tr}(X_1Y + X_2Y) \overset{\textit{св-во}}{\underset{\textit{следа}}{=}} \mathrm{tr}(X_1Y) + \mathrm{tr}(X_2Y) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow X_1 + X_2 \in U$. Проверим последнее условие: $X \in U, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathrm{tr}(\alpha XY) \overset{\textit{св-во}}{\underset{\textit{следа}}{=}} \alpha\,\mathrm{tr}(XY) = \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha X \in U$. Таким образом, U – подпространство в $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.

Найдём базис и размерность подпространства. Пусть матрица X равна

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow XY = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 & 3x_1 + 5x_2 \\ 2x_3 + 4x_4 & 3x_3 + 5x_4 \end{pmatrix}$$

Подпространство U задано условием $\mathrm{tr}(XY)$, значит

$$\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 & 3x_1 + 5x_2 \\ 2x_3 + 4x_4 & 3x_3 + 5x_4 \end{pmatrix} = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0$$

Получаем уравнение на неизвестные x_1, x_2, x_3, x_4. Нетрудно найти ФСР этого уравнения.

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2x_2 - \frac{3}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4 \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 0 & 2 & 0 \\ \hline -5 & 0 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow X_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Полученные три матрицы и есть базис подпространства U. Размерность подпространства совпадает с числом векторов в базисе этого пространства, поэтому размерность равна 3.

Ответ: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ – базис подпространства, размерность равна трём

Задача 5. В пространстве $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (5,3,7), \quad v_2 = (2,6,-2), \quad v_3 = (1,-9,11), \quad v_4 = (3,2,2), \quad v_5 = (3,7,-5)$$

(а) Выберете среди данных векторов базис их линейной оболочки.

(б) Для каждого вектора данной системы, не вошедшего в базис, найдите его линейное выражение через векторы базиса.

Решение. Для нахождения базиса $\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$ применим известный алгоритм: запишем векторы v_1, v_2, v_3, v_4 в столбцы матрицы и приведём её к улучшенному ступенчатому виду. Номера столбцов, содержащих ведущие элементы строк, – это номера векторов, образующих базис, а коэффициенты, стоящие в остальных столбцах, – это линейное выражение векторов, не вошедших в базис, через найденный базис.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & -9 & 2 & 7 \\ 7 & -2 & 11 & 2 & -5 \end{pmatrix} \end{array} \overset{\text{Э}_1(1,2,-2)}{\underset{\text{Э}_1(3,2,-2)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -1 & -10 & 19 & -1 & -11 \\ 3 & 6 & -9 & 2 & 7 \\ 1 & -14 & 29 & -2 & -19 \end{pmatrix} \overset{\text{Э}_1(2,1,3)}{\underset{\text{Э}_1(3,1,1)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -1 & -10 & 19 & -1 & -11 \\ 0 & -24 & 48 & -1 & -26 \\ 0 & -24 & 48 & -3 & -30 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\overset{\text{Э}_1(3,2,-1)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & -10 & 19 & -1 & -11 \\ 0 & -24 & 48 & -1 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \overset{\text{Э}_1(1,3,-\frac{1}{2}),\text{Э}_1(2,3,-\frac{1}{2})}{\underset{\text{Э}_3(3,-\frac{1}{2})}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -1 & -10 & 19 & 0 & -9 \\ 0 & -24 & 48 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\overset{\text{Э}_3(1,-1)}{\underset{\text{Э}_3(2,-\frac{1}{24})}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 10 & -19 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{Э}_1(1,2,-10)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Из улучшенного ступенчатого вида получаем, что векторы v_1, v_2, v_4 – базис $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\rangle$, а векторы v_3 и v_5 выражаются через этот базис следующим образом:

$$v_3 = v_1 - 2v_2 \qquad\qquad v_5 = -v_1 + v_2 + 2v_4$$

Ответ: векторы v_1, v_2, v_4 – базис $\langle v_1, \dots, v_5\rangle$, $v_3 = v_1 - 2v_2$ и $v_5 = -v_1 + v_2 + 2v_4$

Задача 6. В пространстве $\mathbb{R}^5$ даны три вектора

$$v_1 = (5, 4, 1, -2, -3), \quad v_2 = (3, 3, 1, 3, 7), \quad v_3 = (7, -1, -3, 4, 5).$$

Докажите, что эти векторы линейно независимы, и дополните их до базиса всего $\mathbb{R}^5$.

Решение. Чтобы доказать, что v_1, v_2, v_3 линейно независимы, покажем, что ранг этой системы равен трём, тогда $\dim\langle v_1, v_2, v_3\rangle = \mathrm{rk}\{v_1, v_2, v_3\} = 3 \;\Rightarrow\; v_1, v_2, v_3$ – базис $\langle v_1, v_2, v_3\rangle \Rightarrow v_1, v_2, v_3$ линейно независимы.

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 7 \\ 7 & -1 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \overset{Э_1(1,2,-2)}{\underset{Э_1(3,2,-2)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & -8 & -17 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & -7 & -5 & -2 & -9 \end{pmatrix} \overset{Э_1(2,1,3)}{\underset{Э_1(3,1,1)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & -8 & -17 \\ 0 & -3 & -2 & -21 & -44 \\ 0 & -9 & -6 & -10 & -26 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\overset{Э_1(3,2,-3)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & -8 & -17 \\ 0 & -3 & -2 & -21 & -44 \\ 0 & 0 & 0 & 53 & 106 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{rk}\{v_1, v_2, v_3\} = 3$$

Получаем, что векторы v_1, v_2, v_3 линейно независимы. Дополним их до базиса всего $\mathbb{R}^5$. Для этого применим известный алгоритм: запишем векторы в строки матрицы и приведём её к ступенчатому виду, векторы $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$ стандартного базиса $\mathbb{R}^5$, где $i_1, \ldots, i_k$ – номера столбцов, не содержащих ведущих элементов строк, являются искомым дополнением.

Ступенчатый вид матрицы уже найден. Из полученной матрицы видно, что номера ведущих элементов строк равны 1, 2 и 4. Значит, векторы $e_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$ и $e_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$ стандартного базиса $\mathbb{R}^5$ дополняют v_1, v_2, v_3 до базиса $\mathbb{R}^5$.

Ответ: v_1, v_2, v_3 – линейно независимы, дополнение векторами $e_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$ и $e_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$

Задача 7. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Существует ли матрица B того же размера, для которой $\operatorname{rk} B = \operatorname{rk}(A - B) = 1$?

Решение. Найдём ранг матрицы A

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{Э_1(3,1,-1)}{\overset{Э_1(2,1,-2)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{Э_1(3,2,1)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rk} A = 2$$

Известно, что любую матрицу ранга r можно разложить в сумму r матриц ранга 1. Отсюда следует, что $A = B + C$, где $\operatorname{rk} B = \operatorname{rk} C = 1$. С другой стороны, $A = B + C \;\Leftrightarrow\; C = A - B$. Получаем $\operatorname{rk}(A - B) = \operatorname{rk} C = 1 \Rightarrow \operatorname{rk}(A - B) = \operatorname{rk} B = 1$.

Таким образом, описанная матрица B существует.

Задача 8. Известно, что векторы $v_1, v_2, \dots, v_{25}$ некоторого векторного пространства над $\mathbb{R}$ линейно независимы. При каких значениях λ векторы

$$v_1 - v_2,\ v_2 - v_3,\ \dots,\ v_{24} - v_{25},\ v_{25} - \lambda v_1$$

будут также линейно независимы?

Решение (способ 1). Запишем линейную комбинацию данных в условии задачи векторов

$$\alpha_1(v_1 - v_2) + \alpha_2(v_2 - v_3) + \ldots + \alpha_{24}(v_{24} - v_{25}) + \alpha_{25}(v_{25} - \lambda v_1)$$

Векторы будут линейно независимыми, если из равенства нулю описанной комбинации будет следовать $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{25} = 0$. Преобразуем записанное выражение и приравняем его к нулю

$$\begin{gathered}\alpha_1(v_1 - v_2) + \alpha_2(v_2 - v_3) + \ldots + \alpha_{24}(v_{24} - v_{25}) + \alpha_{25}(v_{25} - \lambda v_1) = \\ = \underbrace{(\alpha_1 - \alpha_{25}\lambda)}_{\beta_1}v_1 + \underbrace{(\alpha_2 - \alpha_1)}_{\beta_2}v_2 + \ldots + \underbrace{(\alpha_{24} - \alpha_{23})}_{\beta_{24}}v_{24} + \underbrace{(\alpha_{25} - \alpha_{24})}_{\beta_{25}}v_{25} = \\ = \beta_1 v_1 + \beta_1 v_2 + \ldots + \beta_{24} v_{24} + \beta_{25} v_{25} = 0\end{gathered}$$

Последнее выражение – это линейная комбинация векторов $v_1, v_2, \dots, v_{25}$. По условию векторы $v_1, v_2, \dots, v_{25}$ линейно независимы, поэтому из равенства $\beta_1 v_1 + \beta_1 v_2 + \ldots + \beta_{24} v_{24} + \beta_{25} v_{25} = 0$ следует, что $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{25} = 0$. Получаем следующую ОСЛУ на неизвестные $\alpha_1, \dots, \alpha_{25}$

$$\begin{cases}\beta_1 = 0\\ \vdots\\ \beta_{25} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 - \alpha_{25}\lambda = 0\\ \vdots\\ \alpha_{25} - \alpha_{24} = 0\end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{24} & \alpha_{25}\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & 0\\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0\end{array}\right)\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\lambda & 0\\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right) \overset{Э_1(2,1,1)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\lambda & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\lambda & 0\\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right) \rightsquigarrow \cdots$$

$$\cdots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\lambda & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -\lambda & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right) \overset{Э_1(25,24,1)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\lambda & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -\lambda & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1-\lambda & 0\end{array}\right)$$

Чтобы описанная система имела только нулевое решение значение $1 - \lambda$ должно быть отличным от нуля, то есть $\lambda \neq 1$, иначе ОСЛУ будет иметь бесконечное число решений. Получаем, что при $\lambda \neq 1$ векторы $v_1 - v_2,\ v_2 - v_3,\ \dots,\ v_{24} - v_{25},\ v_{25} - \lambda v_1$ линейно независимы.

Ответ: $\lambda \neq 1$

Решение (способ 2). Векторы $v_1, \dots, v_{25}$ линейно независимы, поэтому они образуют базис в $\langle v_1, \dots, v_{25}\rangle$. Если векторы $v_1 - v_2,\ v_2 - v_3,\ \dots,\ v_{24} - v_{25},\ v_{25} - \lambda v_1$ линейно независимы, то они образуют базис в $\langle v_1, \dots, v_{25}\rangle$, так как эти векторы лежат в $\langle v_1, \dots, v_{25}\rangle$ и их 25 штук.

Если векторы $v_1 - v_2, \dots, v_{25} - \lambda v_1$ – базис $\langle v_1, \dots, v_{25}\rangle$, то существует матрица $C \in M^0_{25}(\mathbb{R})$, такая что $(v_1 - v_2, \dots, v_{25} - \lambda v_1) = (v_1, \dots, v_{25}) \cdot C$. Матрицу C нетрудно получить, записав координаты векторов $v_1 - v_2, \dots, v_{25} - \lambda v_1$ в базисе $v_1, \dots, v_{25}$:

$$(v_1 - v_2,\ v_2 - v_3,\ \dots,\ v_{24} - v_{25},\ v_{25} - \lambda v_1) = (v_1, v_2, \dots, v_{24}, v_{25}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдём такие значения параметра λ, что полученная матрица невырождена, то есть является матрицей перехода:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{Э_1(2,1,1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\lambda \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} = \dots =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{Э_1(25,24,1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot (1 - \lambda) = 1 - \lambda \neq 0 \ \Rightarrow\ \lambda \neq 1$$

Таким образом, матрица C невырождена тогда и только тогда, когда $\lambda \neq 1$, поэтому при данном значении λ система векторов $v_1 - v_2, \dots, v_{25} - \lambda v_1$ является базисом $\langle v_1, \dots, v_{25}\rangle$, то есть эти векторы линейно независимы.

Ответ: $\lambda \neq 1$

Экзамен 1 – 2018/2019 учебный год

Задача 1. Найдите все матрицы $X \in M_3(\mathbb{R})$, удовлетворяющие уравнению $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 1 & 9 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем матрицу $(A \mid B)$ и приведём её левую часть элементарными преобразованиями строк к улучшенному ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \multicolumn{3}{c|}{\overbrace{\hphantom{3\quad 1\quad 0}}^{A}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{-1\quad 1\quad -4}}^{B}} \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 9 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right) \overset{Э_1(1,2,-1)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -5 & -2 & -8 & -3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 9 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right) \overset{Э_1(2,1,-2)}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -5 & -2 & -8 & -3 \\ 0 & 10 & 15 & 5 & 25 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right) \underset{Э_2(2,3)}{\overset{Э_1(2,3,-5)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{3}{c|}{\underbrace{\hphantom{1\quad 0\quad -1/2}}_{A'}} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\hphantom{-1/2\quad -1/2\quad -3/2}}_{B'}} \end{array}\right)$$

Описанное уравнение $AX = B$ равносильно $A'X = B'$. Пусть матрица X равна

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} \Rightarrow A'X = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{1}{2}x_7 & x_2 - \frac{1}{2}x_8 & x_3 - \frac{1}{2}x_9 \\ x_4 + \frac{3}{2}x_7 & x_5 + \frac{3}{2}x_8 & x_6 + \frac{3}{2}x_9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & -3/2 \\ 1/2 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_7,\ x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_8 \\ x_3 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_9,\ x_4 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x_7 \\ x_5 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_8,\ x_6 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x_9 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}b & -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{2}a & \frac{5}{2} - \frac{3}{2}b & \frac{1}{2} - \frac{3}{2}c \\ a & b & c \end{pmatrix},\ a, b, c, \in \mathbb{R}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}b & -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{2}a & \frac{5}{2} - \frac{3}{2}b & \frac{1}{2} - \frac{3}{2}c \\ a & b & c \end{pmatrix}$, $a, b, c, \in \mathbb{R}$

Задача 2. Найдите все комплексные решения уравнения

$$z^6 - (\sqrt{2} - 2\sqrt{6}i)z^3 - 6 - 2\sqrt{3}i = 0$$

Решение. Произведём замену $t = z^3$, получим следующее квадратное уравнение

$$t^2 - (\sqrt{2} - 2\sqrt{6}i)t - 6 - 2\sqrt{3}i = 0$$

Решим это уравнение стандартным способом, выразив корни через дискриминант

$$D = (-\sqrt{2} + 2\sqrt{6}i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6 - 2\sqrt{3}i) = (2 - 8\sqrt{3}i - 24) + 24 + 8\sqrt{3}i = 2$$

$$t = \left[\begin{aligned} t_1 &= \frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{6}i - \sqrt{2}}{2} = -\sqrt{6}i = \sqrt{6} \cdot (0 - i) = \sqrt{6}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) \\ t_2 &= \frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{6}i + \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - \sqrt{6}i = 2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) \end{aligned}\right.$$

Имеем два уравнения

$$(1)\ \ z^3 = t_1 \ \Leftrightarrow\ z^3 = \sqrt{6}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ z = \sqrt[3]{\sqrt{6}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)} = \sqrt[6]{6}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right),\ k = 0, 1, 2$$

$$(2)\ \ z^3 = t_2 \ \Leftrightarrow\ z^3 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ z = \sqrt[3]{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{3} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{3} + 2\pi k}{3}\right),\ k = 0, 1, 2$$

Таким образом, получаем следующие корни уравнения

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[6]{6}\left(\cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6}\right) = \sqrt[6]{6}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt[6]{6}i \\ z_1 &= \sqrt[6]{6}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt[6]{6} \cdot \sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt[6]{6}}{2}i = -\frac{\sqrt[6]{162}}{2} - \frac{\sqrt[6]{6}}{2}i \\ z_2 &= \sqrt[6]{6}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt[6]{6} \cdot \sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt[6]{6}}{2}i = \frac{\sqrt[6]{162}}{2} - \frac{\sqrt[6]{6}}{2}i \\ z_3 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}\right) \\ z_4 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{9} + i\sin\frac{11\pi}{9}\right) \\ z_5 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{9} + i\sin\frac{17\pi}{9}\right) \end{aligned}$$

Ответ: $z_0 = \sqrt[6]{6}i,\ z_1 = -\frac{\sqrt[6]{162}}{2} - \frac{\sqrt[6]{6}}{2}i,\ z_2 = \frac{\sqrt[6]{162}}{2} - \frac{\sqrt[6]{6}}{2}i,$
$z_3 = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}),\ z_4 = \sqrt{2}(\cos\frac{11\pi}{9} + i\sin\frac{11\pi}{9}),\ z_5 = \sqrt{2}(\cos\frac{17\pi}{9} + i\sin\frac{17\pi}{9})$

Задача 3. Выясните, принадлежит ли функция $\sin 3x$ линейной оболочке функций $\sin x$, $\cos x$, $\cos^3 x$ в пространстве всех действительнозначных функций на $\mathbb{R}$.

Решение. Если функция $\sin 3x$ лежит в линейной оболочке $\sin x$, $\cos x$, $\cos^3 x$, то она линейно выражается через эти функции, то есть $\sin 3x = \alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x + \alpha_3 \cos^3 x$. Последнее означает, что для любого $x \in \mathbb{R}$ значение функции $\sin 3x$ совпадает с $\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x + \alpha_3 \cos^3 x$, в частности при $x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
&x = 0 \;\Rightarrow\; \sin(3\cdot 0) = 0 = \alpha_1 \sin 0 + \alpha_2 \cos 0 + \alpha_3 \cos^3 0 = \alpha_2 + \alpha_3\\
&x = \frac{\pi}{4} \;\Rightarrow\; \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \alpha_1 \sin\frac{\pi}{4} + \alpha_2 \cos\frac{\pi}{4} + \alpha_3 \cos^3\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_2 + \frac{\sqrt{2}}{4}\alpha_3\\
&x = \frac{\pi}{3} \;\Rightarrow\; \sin\frac{3\pi}{3} = 0 = \alpha_1 \sin\frac{\pi}{3} + \alpha_2 \cos\frac{\pi}{3} + \alpha_3 \cos^3\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{8}\alpha_3\\
&x = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \sin\frac{3\pi}{2} = -1 = \alpha_1 \sin\frac{\pi}{2} + \alpha_2 \cos\frac{\pi}{2} + \alpha_3 \cos^3\frac{\pi}{2} = \alpha_1
\end{aligned}$$

Получаем СЛУ на неизвестные $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{Э_3(2,\frac{4}{\sqrt{2}}),Э_3(3,8)}{\overset{Э_2(1,4)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1\\ 2 & 2 & 1 & 2\\ 4\sqrt{3} & 4 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{Э_1(3,1,-4\sqrt{3})}{\overset{Э_1(2,1,-2)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 4 & 1 & 4\sqrt{3}\\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{Э_1(3,4,-4)}{\overset{Э_1(2,4,-2)}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 4\\ 0 & 0 & -3 & 4\sqrt{3}\\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{Э_1(3,2,-3)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 4\sqrt{3}-12\\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

В третьей строке получаем уравнение $0\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 = 4\sqrt{3} - 12$. Значит, СЛУ несовместна, то есть не существует таких $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, что при $x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ значения функции $\sin 3x$ совпадают с $\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x + \alpha_3 \cos^3 x$.

Таким образом, функцию $\sin 3x$ невозможно представить в виде линейной комбинации функций $\sin x$, $\cos x$, $\cos^3 x \Rightarrow \sin 3x$ не принадлежит $\langle \sin x, \cos x, \cos^3 x\rangle$.

Ответ: не принадлежит

Задача 4. Пусть V – векторное пространство всех многочленов степени не выше 4 с действительными коэффициентами, и пусть $U \subseteq V$ – подмножество состоящее из всех многочленов $f(x)$, удовлетворяющих условиям $2f(-1) = 3f^{'}(1)$, $f^{''}(\frac{1}{2}) = 0$. Докажите, что U является подпространством в V; найдите базис и размерность этого подпространства.

Решение. Чтобы доказать, что U является подпространством в V, нужно проверить следующие три условия: (1) $\vec{0} \in U$, (2) $\forall f_1, f_2 \in U \Rightarrow f_1 + f_2 \in U$ и (3) $\forall f \in U,\ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f \in U$.

Проверим первое условие: пусть $f = 0$, тогда $2f(-1) = 0$ и $3f^{'}(1) = 0$, то есть $2f(-1) = 3f^{'}(1)$, и $f^{''}(\frac{1}{2}) = 0$. Значит, многочлен $f = 0 \in U$.

Проверим второе условие: пусть $f_1, f_2 \in U$, тогда выполнено $2f_1(-1) = 3f_1^{'}(1)$, $f_1^{''}(\frac{1}{2}) = 0$ и $2f_2(-1) = 3f_2^{'}(1)$, $f_2^{''}(\frac{1}{2}) = 0$. Имеем следующие равенства

$$\left.\begin{array}{l} 2\big(f_1+f_2\big)(-1) = 2f_1(-1) + 2f_2(-1) = 3f_1^{'}(1) + 3f_2^{'}(1) = 3\big(f_1+f_2\big)^{'}(1) \\ \big(f_1+f_2\big)^{''}(\frac{1}{2}) = f_1^{''}(\frac{1}{2}) + f_2^{''}(\frac{1}{2}) = 0 + 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ f_1 + f_2 \in U$$

Проверим третье условие: пусть $f \in U$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Так как $f \in U$, верно $2f(-1) = 3f^{'}(1)$, $f^{''}(\frac{1}{2}) = 0$. Имеем следующие равенства

$$\left.\begin{array}{l} 2\big(\alpha f\big)(-1) = \alpha \cdot 2f(-1) = \alpha \cdot 3f^{'}(1) = 3\big(\alpha f\big)^{'}(1) \\ \big(\alpha f\big)^{''}(\frac{1}{2}) = \alpha \cdot f^{''}(\frac{1}{2}) = \alpha \cdot 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ \alpha f \in U$$

Выполнены все три описанных условия, значит, U – подпространство в V. Найдём базис этого подпространства. Пусть вектор $f = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ лежит в U, тогда на на коэффициенты $a_0, \ldots, a_4$ накладываются следующие условия

$$(1)\quad \left.\begin{array}{l} 2f(-1) = 2a_4 - 2a_3 + 2a_2 - 2a_1 + 2a_0 \\ 3f^{'}(1) = 12a_4 + 9a_3 + 6a_2 + 3a_1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a_4 - 2a_3 + 2a_2 - 2a_1 + 2a_0 = 12a_4 + 9a_3 + 6a_2 + 3a_1$$

$$(2)\quad f^{''}(\tfrac{1}{2}) = 3a_4 + 3a_3 + 2a_3 = 0$$

Получаем ОСЛУ на неизвестные $\alpha_0, \ldots, \alpha_4$:

$$\begin{cases} 2a_4 - 2a_3 + 2a_2 - 2a_1 + 2a_0 = 12a_4 + 9a_3 + 6a_2 + 3a_1 \\ 3a_4 + 3a_3 + 2a_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_0 - 5a_1 - 4a_2 - 11a_3 - 10a_4 = 0 \\ 2a_3 + 3a_3 + 3a_4 = 0 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 & -11 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{Э_3(1,\frac{1}{2}),Э_3(2,\frac{1}{2})}{\overset{Э_1(1,2,2)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \overset{ФСР}{\rightsquigarrow}$$

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
5	2	0	0	0
5	0	−3	2	0
4	0	−3	0	2

Получаем следующий базис U: $f_1 = 5 + 2x,\ f_2 = 5 - 3x^2 + 2x^3,\ f_3 = 4 - 3x^2 + 2x^4$. Всего в базисе 3 вектора, значит, $\dim U = 3$.

Ответ: $f_1 = 5 + 2x,\ f_2 = 5 - 3x^2 + 2x^3,\ f_3 = 4 - 3x^2 + 2x^4$ – базис U, $\dim U = 3$

Задача 5. Докажите, что векторы

$$v_1 = (1, -1, -1, -2, -5), \quad v_2 = (3, 6, 3, -1, 1), \quad v_3 = (2, 4, 2, a, -2) \in \mathbb{R}^5$$

линейно независимы при всех значениях параметра a, и для каждого значения a дополните эти векторы до базиса всего пространства $\mathbb{R}^5$.

Решение. Чтобы доказать, что v_1, v_2, v_3 линейно независимы, покажем, что ранг этой системы равен трём, тогда $\dim\langle v_1, v_2, v_3\rangle = \operatorname{rk}\{v_1, v_2, v_3\} = 3 \Rightarrow v_1, v_2, v_3$ – базис $\langle v_1, v_2, v_3\rangle \Rightarrow v_1, v_2, v_3$ линейно независимы.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 & -5 \\ 3 & 6 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & a & -2 \end{pmatrix} \underset{Э_1(3,1,-2)}{\overset{Э_1(2,1,-3)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 9 & 6 & 5 & 16 \\ 0 & 6 & 4 & a+4 & 8 \end{pmatrix} \overset{Э_3(3,3)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 9 & 6 & 5 & 16 \\ 0 & 18 & 12 & 3a+12 & 24 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\overset{Э_1(3,2,-2)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 9 & 6 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 3a+2 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rk}\{v_1, v_2, v_3\} = 3 \text{ при любом } a$$

Получаем, что векторы v_1, v_2, v_3 линейно независимы. Дополним их до базиса всего $\mathbb{R}^5$. Для этого применим известный алгоритм: запишем векторы в строки матрицы и приведём её к ступенчатому виду, векторы $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$ стандартного базиса $\mathbb{R}^5$, где $i_1, \ldots, i_k$ – номера столбцов, не содержащих ведущих элементов строк, являются искомым дополнением.

Ступенчатый вид матрицы уже найден. Пусть $3a + 2 \neq 0$, тогда матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 9 & 6 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 3a+2 & -8 \end{pmatrix}$$

Из полученной матрицы видно, что номера ведущих элементов строк равны 1, 2 и 4. Значит, векторы $e_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$ и $e_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$ стандартного базиса $\mathbb{R}^5$ дополняют v_1, v_2, v_3 до базиса $\mathbb{R}^5$ при $a \neq -\frac{2}{3}$.

Пусть теперь $3a + 2 = 0$, тогда матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 9 & 6 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Номера ведущих элементов строк равны 1, 2 и 5. То есть $e_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$ и $e_4 = (0, 0, 0, 1, 0)$ стандартного базиса $\mathbb{R}^5$ дополняют v_1, v_2, v_3 до базиса $\mathbb{R}^5$ при $a = -\frac{2}{3}$.

Ответ: v_1, v_2, v_3 – линейно независимы

дополнение векторами $e_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$ и $e_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$ при $a \neq -\frac{2}{3}$

дополнение векторами $e_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$ и $e_4 = (0, 0, 0, 1, 0)$ при $a = -\frac{2}{3}$

Задача 6. В пространстве $\mathbb{R}^5$ заданы векторы

$$v_1 = (1,0,0,-1,-1),\ \ v_2 = (0,1,0,2,2),\ \ v_3 = (2,1,0,0,0),\ \ v_4 = (1,0,1,0,1),\ \ v_5 = (0,1,2,0,2)$$

Выясните, можно ли среди этих векторов выбрать подмножество, являющееся фундаментальной системой решений для однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Решение. Найдём ранг матрицы описанной системы, обозначим матрицу системы A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{Э_2(1,2)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rk} A = 2$$

Известно, что число векторов ФСР системы $Ax = 0$ равно $n - r$, где n – число неизвестных, $r = \operatorname{rk} A$. Таким образом, в ФСР описанной системы 3 вектора.

Если вектор v входит в ФСР $Ax = 0$, то он удовлетворяет равенству $Av = 0$. Проверим, какие из описанных векторов являются решениями уравнения. Для этого умножим матрицу A справа на матрицу, столбцы которой – векторы $v_1, \ldots, v_5$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} Av_1 & Av_2 & Av_3 & Av_4 & Av_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Векторы v_1, v_2, v_3, v_5 – решения $Ax = 0$, а вектор v_4 не является решением. Выделим линейно независимую подсистему среди v_1, v_2, v_3, v_5. Для этого запишем эти векторы в столбцы матрицы и приведём её элементарными преобразованиями к ступенчатому виду. Столбцы, содержащие ведущие элементы строк, будут указывать на векторы, образующие базис системы.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \underset{Э_1(4,1,1)}{\overset{Э_1(5,4,-1),Э_1(5,3,-1)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{Э_1(4,3,1)}{\overset{Э_1(4,2,-2)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Столбцы 1, 2 и 4 содержат ведущие элементы строк, значит, векторы v_1, v_2, v_5 образуют базис в системе v_1, v_2, v_3, v_5. Векторы v_1, v_2, v_5 линейно независимы и являются решениями уравнения $Ax = 0$, фундаментальная система решений которого состоит из 3 векторов. Получаем, что v_1, v_2, v_5 – базис пространства решений $Ax = 0$, то есть ФСР.

Ответ: можно

Задача 7. Квадратная матрица A порядка 58 имеет блочный вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & R \\ 0 & Q & T \\ P & S & U \end{pmatrix},$$

в котором блоки P, Q, R квадратны порядков 11, 28, 19 соответственно. Известно, что определители блоков P, Q, R равны p, q, r соответственно. Чему равен определитель матрицы A? Ответ обоснуйте.

Решение. Сделаем элементарные преобразования строк и переместим построчно блок $(P\,|\,S\,|\,U)$ матрицы A наверх. Каждую i строку блока $(P|S|U)$, начиная с $i = 1$, будем «проталкивать вверх» на одну позицию (то есть менять с выше стоящей строкой) пока она не окажется на i-й позиции во всей матрицы A.

$$\det\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & R \\ \hline 0 & Q & T \\ \hline P & S & U \end{array}\right) = \dots = (-1)^k \cdot \det\left(\begin{array}{c|c|c} P & S & U \\ \hline 0 & 0 & R \\ \hline 0 & Q & T \end{array}\right)$$

Вычислим число k – количество сделанных перестановок строк. Каждая из 11 строк блока $(P \mid S \mid U)$ была поменяна местами с 28+19 строками, то есть всего перестановок строк было сделано $k = 11 \cdot (28 + 19)$ – нечётное число раз.

Аналогичным образом протолкнём блок $(0\,|\,Q\,|\,T)$ в «середину». Для каждой из 28 строк будет сделано 19 перестановок, то есть всего $28 \cdot 19$ – чётное число перестановок.

$$\det\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & R \\ \hline 0 & Q & T \\ \hline P & S & U \end{array}\right) = -\det\left(\begin{array}{c|c|c} P & S & U \\ \hline 0 & 0 & R \\ \hline 0 & Q & T \end{array}\right) = \dots = -\det\left(\begin{array}{c|c|c} P & S & U \\ \hline 0 & Q & T \\ \hline 0 & 0 & R \end{array}\right)$$

Обозначим блоки $\left(\begin{array}{c|c} P & S \\ \hline 0 & Q \end{array}\right) = F$ и $\left(\begin{array}{c} U \\ \hline T \end{array}\right) = H$. Заметим, что блок F квадратный порядка $11 + 28 = 39$. Отсюда следует, что определитель можно раскрыть как определитель с углом нулей следующим образом

$$\det\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & R \\ \hline 0 & Q & T \\ \hline P & S & U \end{array}\right) = -\det\left(\begin{array}{c|c|c} P & S & U \\ \hline 0 & Q & T \\ \hline 0 & 0 & R \end{array}\right) = -\det\left(\begin{array}{c|c} F & H \\ \hline 0 & R \end{array}\right) = -\det F \cdot \det R =$$

$$= -\det\left(\begin{array}{c|c} P & S \\ \hline 0 & Q \end{array}\right) \cdot \det R$$

Определитель матрицы F аналогичным образом можно раскрыть как определитель с углом нулей. Таким образом, имеем

$$\det A = -\det\left(\begin{array}{c|c} P & S \\ \hline 0 & Q \end{array}\right) \cdot \det R = -\det P \cdot \det Q \cdot \det R = -pqr$$

Ответ: $-pqr$

Задача 8. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найдите все возможные значения величины $\operatorname{rk}(A+B)$, где B – матрица того же размера и $\operatorname{rk} B = 1$. Ответ обоснуйте.

Решение. Найдём ранг матрицы A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \underset{Э_1(3,1,-1),Э_1(3,2,1)}{\overset{Э_1(3,1,-1),Э_1(3,2,-1)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rk} A = 2$$

Известны следующие равенства $\operatorname{rk}(P+Q) \leqslant \operatorname{rk} P + \operatorname{rk} Q$ и $\operatorname{rk}(P-Q) \geqslant \operatorname{rk} P - \operatorname{rk} Q$. Из этих равенств следует, что для описанных в условии матриц верно $1 \leqslant \operatorname{rk}(A+B) \leqslant 3$.

Приведём примеры матриц B, $\operatorname{rk} B = 1$, для которых $\operatorname{rk}(A+B) = 1, 2, 3$.

$$(1)\ \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rk}(A+B) = 1$$

$$(2)\ \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rk}(A+B) = \operatorname{rk} A = 2$$

$$(2)\ \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

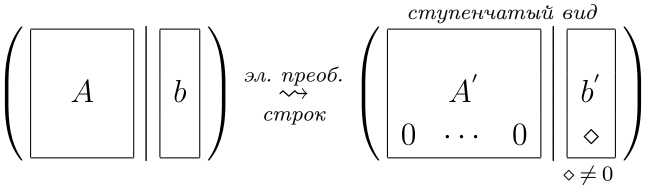
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rk}(A+B) = 3$$

Ответ: 1, 2, 3

Экзамен 1 – 2019/2020 учебный год

Задача 1. Матрица $A \in \mathrm{Mat}_{3\times n}(\mathbb{R})$ такова, что система $Ax = b$ несовместна при некотором $b \in \mathbb{R}^3$, а система $A^T y = c$ совместна для всех $c \in \mathbb{R}^n$. Каково наибольшее значение n, при котором такое возможно? Ответ обоснуйте.

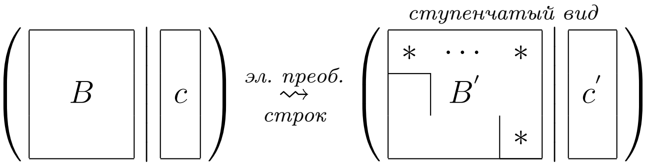
Решение. Так как существует такое b, что $Ax = b$ несовместна, при приведении матрицы A к ступенчатому виду получим хотя бы одну нулевую строку



Отсюда следует, что строковый ранг матрицы A не больше 2.

Обозначим $B = A^T$. По условию система $By = c$ совместна при любом $c \in \mathbb{R}^n$. Это означает, что в B' – ступенчатом виде матрицы B, нет нулевых строк, так как иначе можно подобрать такое c, что после всех сделанных преобразований на позиции нулевой строки матрицы B' будет стоять ненулевое значение в столбце c'. Такое c можно построить через c', например, взяв $c' = (1, \ldots, 1)$ и сделав обратные элементарные преобразования.

Таким образом, в B' – ступенчатом виде матрицы B, нет нулевых строк.



Всего строк в матрице $B = A^T$ по условию n штук. При приведении матрицы B к ступенчатому виду получаем, что все строки ненулевые, значит, $\operatorname{rk} B = n$.

Имеем следующие равенства:

$$\begin{cases} \operatorname{rk} A \leqslant 2 \\ \operatorname{rk} B = \operatorname{rk} A^T = \operatorname{rk} A = n \end{cases} \Rightarrow\ n \leqslant 2$$

Приведём пример, когда верхняя оценка достигается, то есть $n = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ при } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ система } Ax = b \text{ несовместна: } \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{Э_1(3,2,-1)}{\overset{Э_1(3,1,-1)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \forall c \in \mathbb{R}^2 \text{ система } A^T x = c \text{ несовместна: } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \diamond_1 \\ 0 & 1 & 1 & \diamond_2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = \diamond_1 - x_3 \\ x_2 = \diamond_2 - x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ответ: $n = 2$

Задача 2. Найдите все комплексные решения уравнения

$$(2\sqrt{3}+i)z^4 = -6\sqrt{3}+10i,$$

у которых один из аргументов принадлежит интервалу $(3\pi, 7\pi/2)$

Решение. Поделим обе части уравнения на $2\sqrt{3}+i \neq 0$:

$$(2\sqrt{3}+i)z^4 = -6\sqrt{3}+10i \;\Leftrightarrow\; z^4 = \frac{-6\sqrt{3}+10i}{2\sqrt{3}+i}$$

Преобразуем полученную дробь, домножив числитель и знаменатель на число $2\sqrt{3}-i$, сопряжённое к $2\sqrt{3}+i$:

$$\frac{-6\sqrt{3}+10i}{2\sqrt{3}+i} = \frac{(-6\sqrt{3}+10i)(2\sqrt{3}-i)}{(2\sqrt{3}+i)(2\sqrt{3}-i)} = \frac{-36+6\sqrt{3}i+20\sqrt{3}i+10}{12+1} = \frac{-26+26\sqrt{3}i}{13} =$$
$$= -2+2\sqrt{3}i = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

Имеем следующее уравнение:

$$z^4 = 4\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

Из обеих частей уравнения извлечём корень четвёртой степени:

$$z = \sqrt[4]{4}\cdot\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}\right) = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k\right)\right),\ k=0,1,2,3$$

Для того, чтобы найти комплексное число, аргумент которого принадлежит интервалу $(3\pi, 7\pi/2)$, достаточно найти число, чей аргумент лежит $(\pi, 3\pi/2)$. Найдём аргументы, полученных решений

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \arg z_0 = \frac{\pi}{6} \notin (\pi, 3\pi/2)$$
$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \arg z_1 = \frac{2\pi}{3} \notin (\pi, 3\pi/2)$$
$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right) \Rightarrow \arg z_2 = \frac{7\pi}{6} \in (\pi, 3\pi/2)$$
$$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right) \Rightarrow \arg z_3 = \frac{5\pi}{3} \notin (\pi, 3\pi/2)$$

Ответ: $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

Задача 3. Известно, что векторы v_1, v_2, v_3 и v_4 некоторого векторного пространства над $\mathbb{R}$ линейно независимы. Могут ли векторы

$$u_1 = 3v_1 + 2v_2 + v_4, \quad u_2 = 2v_1 + v_2 + 3v_3 - v_4, \quad u_3 = v_1 + v_2 - v_3$$

быть линейно зависимыми? Ответ обоснуйте.

Решение. Если векторы u_1, u_2, u_3 линейно зависимы, то существуют такие $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, что $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq (0, 0, 0)$ и $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$. Найдём значения $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, при которых выполняется $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$. Преобразуем последнее выражение:

$$\begin{gathered}\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = \alpha_1(3v_1 + 2v_2 + v_4) + \alpha_2(2v_1 + v_2 + 3v_3 - v_4) + \alpha_3(v_1 + v_2 - v_3) = \\ = \underbrace{(3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)}_{\beta_1} v_1 + \underbrace{(2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}_{\beta_2} v_2 + \underbrace{(3\alpha_2 - \alpha_3)}_{\beta_3} v_3 + \underbrace{(\alpha_1 - \alpha_2)}_{\beta_4} v_4 = \\ = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \beta_4 v_4 = 0\end{gathered}$$

Полученное выражение – это линейная комбинация векторов v_1, v_2, v_3, v_4, равная нулю. Из линейной независимости v_1, v_2, v_3, v_4 следует, что $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$. Таким образом, имеем ОСЛУ на неизвестные $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\begin{cases}\beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = 0 \\ \beta_4 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0\end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \underset{\text{Э}_1(2,4,-2)}{\overset{\text{Э}_1(1,4,-3)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix}0 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \underset{\text{Э}_1(3,2,-1)}{\overset{\text{Э}_1(1,2,-2)}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \underset{\text{Э}_1(4,1,-1),\text{Э}_3(1,-1)}{\overset{\text{Э}_1(2,1,3),\text{Э}_1(2,3,-1)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \underset{\text{Э}_3(2,-\frac{1}{2})}{\overset{\text{Э}_1(1,3,\frac{1}{2}),\text{Э}_1(2,3,\frac{1}{2})}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \text{ – единственное решение этой ОСЛУ}$$

Получаем, что выражение $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$ равно нулю тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Это означает, что векторы u_1, u_2, u_3 линейно независимы.

Ответ: нет, не могут

Задача 4. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Докажите, что множество всех матриц $X \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию $XA^T + AX^T = 0$, является подпространством в пространстве $\mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$; найдите базис и размерность этого подпространства.

Решение. Обозначим через U множество описанных матриц X. Ясно, что множество U вложено в $\mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Чтобы доказать, что U подпространство, нужно проверить следующие три условия: (1) $\vec{0} \in U$, (2) $\forall X_1, X_2 \in U \;\Rightarrow\; X_1 + X_2 \in U$ и (3) $\forall X \in U,\ \alpha \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \alpha X \in U$.

Проверим первое условие:

$$X = 0 \Rightarrow XA^T + AX^T = 0 \cdot A^T + A \cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 \in U$$

Проверим второе условие:

$$X_1, X_2 \in U \Rightarrow X_1A^T + AX_1^T = 0 \text{ и } X_2A^T + AX_2^T = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (X_1 + X_2)A^T + A(X_1 + X_2)^T = \underbrace{X_1A^T + AX_1^T}_{=0} + \underbrace{X_2A^T + AX_2^T}_{=0} = 0 + 0 = 0 \Rightarrow X_1 + X_2 \in U$$

Проверим последнее условие:

$$X \in U, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow (\alpha X)A^T + A(\alpha X)^T = \alpha\underbrace{(XA^T + AX^T)}_{=0} = 0$$

Найдём базис и размерность подпространства. Пусть матрица X равна

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \Rightarrow XA^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 & -x_2 + 3x_3 \\ x_4 + 2x_5 & -x_5 + 3x_6 \end{pmatrix}$$

Подпространство U задано условием $XA^T + AX^T = 0 \Leftrightarrow XA^T = -(XA^T)^T$, значит, диагональные элементы матрицы XA^T равны нулю, а симметричные относительно главной диагонали противоположны по знаку. Получаем ОСЛУ на неизвестные x_1, x_2, x_3, x_4.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_5 + 3x_6 = 0 \\ -x_2 + 3x_3 = -x_4 - 2x_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_5 + 3x_6 = 0 \\ -x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{\textit{эл. преоб.}}{\underset{\textit{строк}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \overset{\textit{ФСР}}{\rightsquigarrow}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-6	3	1	0	0	0
2	1	0	1	0	0
-12	6	0	0	3	1

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -12 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Полученные три матрицы и есть базис подпространства U. Размерность подпространства совпадает с числом векторов в базисе этого пространства, поэтому размерность равна 3.

Ответ: $\begin{pmatrix} -6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -12 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ – базис подпространства, размерность равна трём

Задача 5. В пространстве $\mathbb{R}^5$ даны векторы

$$v_1 = (1, 2, 1, 3, 3), \quad v_2 = (3, 7, 3, 5, 4), \quad v_3 = (1, 1, 1, 7, 8), \quad v_4 = (3, 4, 3, 8, 2).$$

(а) Выберите среди данных векторов базис их линейной оболочки.

(б) Дополните полученный в пункте (а) базис до базиса всего пространства $\mathbb{R}^5$.

Решение. Найдём среди векторов v_1, v_2, v_3, v_4 базис $\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$. Для этого применим известный алгоритм: запишем векторы в столбцы матрицы и приведём её к ступенчатому виду. Номера столбцов, содержащих ведущие элементы строк, – это номера векторов, образующих базис.

$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{Э_1(3,1,-3),\\ Э_1(4,1,-3)}}{\overset{\substack{Э_1(2,1,-2),\\ Э_1(3,1,-1)}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -7 \end{pmatrix} \underset{Э_2(3,4)}{\overset{\substack{Э_1(4,2,4),\\ Э_1(5,2,5)}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{Э_1(4,3,-\frac{6}{17})}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Номера столбцов, содержащих ведущие элементы строк, равны 1, 2 и 4, значит, векторы v_1, v_2, v_4 образуют базис $\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$.

Дополним найденный базис до базиса всего $\mathbb{R}^5$. Для этого применим следующий алгоритм: запишем векторы в строки матрицы и приведём её к ступенчатому виду, векторы $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$ стандартного базиса $\mathbb{R}^5$, где $i_1, \ldots, i_k$ – номера столбцов, не содержащих ведущих элементов строк, являются искомым дополнением.

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 8 & 2 \end{pmatrix} \underset{Э_1(3,1,-3)}{\overset{Э_1(2,1,-3)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -7 \end{pmatrix} \overset{Э_1(3,2,2)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -17 \end{pmatrix}$$

Из полученной матрицы видно, что номера ведущих элементов строк равны 1, 2 и 4. Отсюда получаем, что векторы $e_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$ и $e_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$ стандартного базиса $\mathbb{R}^5$ дополняют v_1, v_2, v_4 до базиса $\mathbb{R}^5$.

Ответ: векторы v_1, v_2, v_4 – базис $\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$
дополнение векторами $e_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$ и $e_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$

Задача 6. Существует ли однородная система линейных уравнений, для которой векторы

$$v_1 = (0, -1, -1, 1, 0), \quad v_2 = (1, 2, 2, 0, 0), \quad v_3 = (1, 0, 2, 0, 2)$$

образуют фундаментальную систему решений? Если существует, то укажите её.

Решение. Если векторы v_1, v_2, v_3 образуют ФСР какой-нибудь системы $Ax = 0$, то множеством решений этой системы является $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Воспользуемся алгоритмом, производящим переход между двумя способами задания подпространства, то есть передём от линейной оболочки $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ к ОСЛУ $Ax = 0$, множество решений которой совпадает с описанным подпространством.

Запишем векторы v_1, v_2, v_3 в строки матрицы B и найдём ФСР для $Bx = 0$. Найденные векторы ФСР запишем в строки матрицы, полученная матрица и есть искомая матрица A.

$$\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}}^{B} \overset{Э_1(2,1,2)}{\underset{Э_1(2,3,-1)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{Э_1(1,2,-\frac{1}{2}), Э_1(3,2,1)}{\underset{Э_3(1,-1), Э_3(2,-\frac{1}{2})}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{ФСР для}}{\underset{Bx=0}{\rightsquigarrow}} \quad u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} u_1^T \\ u_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ – матрица искомой системы}$$

Получаем ОСЛУ $Ax = 0$, множество решений которой совпадает с $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Покажем, что векторы v_1, v_2, v_3 – ФСР этой системы, то есть некоторый базис пространства решений $Ax = 0$. Всякое решение системы можно выразить через линейную комбинацию v_1, v_2, v_3, так как пространство решений $Ax = 0$ – это $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ по построению. Векторы v_1, v_2, v_3 линейно независимы: строковый ранг матрицы B равен 3 (то есть строки матрицы линейно независимы).

Таким образом, векторы v_1, v_2, v_3 – базис пространства решений $Ax = 0$, то есть её ФСР.

Ответ: $\begin{cases} -2x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$

Задача 7. Найдите все значения параметра a, при которых матрица

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

представима в виде суммы двух матриц ранга 1, и для каждого значения укажите такое представление.

Решение (способ 1). Известно, что всякую матрицу ранга r можно представить в виде суммы r матриц ранга 1, причём матрицу невозможно представить в виде суммы меньшего числа матриц ранга 1. Отсюда получаем, что для того, чтобы матрицу A можно было разложить на сумму двух матриц ранга 1, ранг A должен быть не больше 2.

Покажем, что ранг матрицы A не меньше 2. Ранг матрицы равен наибольшему порядку ненулевого минора. В матрице A нетрудно найти минор второго порядка, отличный от нуля, например

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} \cline{2-3} a & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ \cline{2-3} \multicolumn{1}{c}{-2} & 5 & \multicolumn{1}{c}{1} & 7 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rk} A \geqslant 2$$

Чтобы ранг матрицы A не превышал 2, все миноры третьего порядка должны быть равны нулю.

$$\left(\begin{array}{c|ccc|} \cline{2-4} a & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 7 \\ \cline{2-4} \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -14 - 6 + 20 = 0 \text{ -- верно}$$

$$\left(\begin{array}{|ccc|c} \cline{1-3} a & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 7 \\ \cline{1-3} \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3a + 4 + 3 - 10a = -7a + 7 = 0 \Rightarrow a = 1$$

Получаем, что матрица разложима в сумму двух матриц ранга один только при $a = 1$. Найдём это разложение, для этого среди столбцов матрицы A найдём базис системы, которую они образуют, и выразим оставшиеся столбцы через найденный базис.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix} \underset{Э_1(3,1,2)}{\overset{Э_1(2,1,-3)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{Э_3(2,\frac{1}{6})}{\overset{Э_1(3,2,-\frac{1}{2}),Э_1(1,2,\frac{1}{6})}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как при элементарных преобразованиях строк матрицы сохраняются все линейные зависимости столбцов, получаем, что $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ – базис системы столбцов, а $A^{(3)} = \frac{1}{3}A^{(1)} + \frac{1}{3}A^{(2)}$ и $A^{(4)} = -A^{(1)} + A^{(2)}$. Отсюда нетрудно получить искомое разложение

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -\frac{2}{3} & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & \frac{5}{3} & 5 \end{pmatrix}$$

Ответ: при $a = 1$ имеем $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -\frac{2}{3} & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & \frac{5}{3} & 5 \end{pmatrix}$

Решение (способ 2). Известно, что всякую матрицу ранга r можно представить в виде суммы r матриц ранга 1, причём матрицу невозможно представить в виде суммы меньшего числа матриц ранга 1. Сделаем некоторые элементарные преобразования столбцов в матрице A

$$\begin{pmatrix} a & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix} \underset{Э_1^T(4,2,-2)}{\overset{Э_1^T(1,2,1)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & -6 \\ 3 & 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underset{Э_1^T(4,3,3)}{\overset{Э_1^T(1,3,-3)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Из полученной матрицы видно, что столбцовый ранг матрицы A не меньше 2 (в матрице есть два линейно независимых столбца). Если $a \neq -1$, то матрица будет иметь ранг 3, то есть её будет невозможно разложить на сумму двух матриц ранга 1. При $a = 1$ первый столбец матрицы A нулевой $\Rightarrow \operatorname{rk} A = 2$ и требуемое разложение можно получить.

При $a = 1$ доделаем элементарные преобразования столбцов, сведя матрицу A к транспонированному улучшенному ступенчатому виду.

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix} \underset{\textit{столбцов}}{\overset{\textit{эл. преоб.}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{a=1}{=} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{Э_3^T(2,\frac{1}{2})}{\overset{Э_1^T(1,2,-\frac{3}{2})}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{Э_3^T(1,-1)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -7/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Нетрудно заметить, что в матрице B строки $B_{(1)}$ и $B_{(2)}$ базис системы $\{B_{(1)}, B_{(2)}, B_{(3)}\}$, а строка $B_{(3)} = -\frac{7}{2}B_{(1)} + \frac{1}{2}B_{(2)}$. Известно, что элементарные преобразования столбцов матрицы сохраняют все линейные зависимости строк матрицы, отсюда получаем, что в матрице A строки $A_{(1)}$ и $A_{(2)}$ базис системы её строк, а $A_{(3)} = -\frac{7}{2}A_{(1)} + \frac{1}{2}A_{(2)}$.

Найдём разложение A в сумму двух матриц ранга 1.

$$A = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ -\frac{7}{2}A_{(1)} + \frac{1}{2}A_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ 0 \\ -\frac{7}{2}A_{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{(2)} \\ 0 \\ \frac{1}{2}A_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: при $a = 1$ имеем $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Задача 8. Как изменится определитель матрицы 58×58, если с её столбцами одновременно выполнить следующие действия

– к каждому столбцу, кроме первого, прибавить предыдущий;

– из первого столбца вычесть последний?

Решение. Пусть изначально была матрица A с определителем $\det A$. После одновременного применения описанных действий к матрице A получим матрицу B.

$$A = \left(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(57)}, A^{(58)}\right) \rightsquigarrow B = \left(A^{(1)} - A^{(58)}, A^{(2)} + A^{(1)}, \ldots, A^{(57)} + A^{(56)}, A^{(58)} + A^{(57)}\right)$$

Если записать матрицу A как «строка из столбцов матрицы», то несложно увидеть, на какую матрицу нужно будет домножить эту строку справа, чтобы получить матрицу B:

$$A = \left(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(57)}, A^{(58)}\right) \Rightarrow B = \left(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(57)}, A^{(58)}\right) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C}$$

$$= \left(A^{(1)} - A^{(58)}, A^{(2)} + A^{(1)}, \ldots, A^{(57)} + A^{(56)}, A^{(58)} + A^{(57)}\right)$$

Известно, что $\det(C \cdot A) = \det C \cdot \det A$. Значит, чтобы понять, как изменится определитель, достаточно найти $\det C$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{Э_1^T(2,1,-1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{Э_1^T(3,2,-1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cdots$$

$$\cdots = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & \ldots & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{Э_1^T(57,56,-1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & \ldots & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 2 = 2$$

Таким образом, $\det B = 2 \cdot \det A$, то есть определитель матрицы A после применения к ней описанных в условии операций увеличится в 2 раза.

Ответ: увеличится в 2 раза

Экзамен 1 – 2020/2021 учебный год

TODO

Контрольная работа – 4 модуль

Контрольная работа 2 – 2017/2018 учебный год

Задача 1. Найдите базис пересечения двух подпространств $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^4$, где L_1 состоит из всех решений уравнения $3x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0$, а L_2 есть линейная оболочка векторов $(3, -5, 1, 2), (2, 3, 2, -1), (2, 2, 1, -3)$.

Решение. Зададим подпространство L_2 как множество решений некоторой ОСЛУ $Ax = 0$. Для этого воспользуемся алгоритмом перехода между двумя способами задания подпространства: от линейной оболочки к множеству решений ОСЛУ.

Запишем векторы $(3, -5, 1, 2), (2, 3, 2, -1), (2, 2, 1, -3)$ в строки матрицы B и найдём ФСР системы $Bx = 0$. Полученные векторы ФСР запишем в строки матрицы A, множество решений $Ax = 0$ задаёт L_2.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underset{Э_1(3,2,-1)}{\overset{Э_1(1,2,-1)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -8 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \overset{Э_1(2,1,-2)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 19 & 4 & -7 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \underset{Э_1(2,3,19)}{\overset{Э_1(1,3,-8)}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 19 \\ 0 & 0 & -15 & -45 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \underset{Э_3(2,-\frac{1}{15}),Э_3(3,-1)}{\overset{Э_1(1,2,\frac{7}{15}),Э_1(3,2,-\frac{1}{15})}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{Э_2(2,3)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{ФСР}{\rightsquigarrow} u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{система, задающая } L_2, \text{ является уравнением } 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$$

Найдём базис $L_1 \cap L_2$. Если вектор $v \in L_1 \cap L_2$, то он удовлетворяет системе, задающей L_1, и удовлетворяет системе, задающей L_2. Таким образом, векторы, лежащие в $L_1 \cap L_2$, – это решения объединения описанных систем для L_1 и L_2.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \overset{Э_1(1,2,-1)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \overset{Э_1(2,1,-2)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{ФСР}{\rightsquigarrow} v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Векторы v_1 и v_2 – это базис пространства решений составленной ОСЛУ, задающей $L_1 \cap L_2$, то есть эти векторы искомый базис пересечения.

Ответ: $(2, -1, 1, 0), \ (-1, 1, 0, 1)$

Задача 2. Пусть $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ – пространство многочленов с действительными коэффициентами от переменной x степени не выше 2. Линейное отображение $\varphi : V \to \mathbb{R}^2$ в базисе $(-x+x^2, 1+2x, x)$ пространства V и базисе $\big((3,1),(2,1)\big)$ пространства $\mathbb{R}^2$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Найдите $\varphi(3+2x+x^2)$.

Решение. Обозначим базис $\mathbb{e} = (-x+x^2, 1+2x, x)$ и $\mathbb{f} = \big((3,1),(2,1)\big)$ и матрицу φ в этих базисах

$$A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Найдём координаты вектора $3+2x+x^2$ в базисе $(-x+x^2, 1+2x, x)$. Пусть координаты вектора $3+2x+x^2$ в описанном базисе – это $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$, тогда

$$3+2x+x^2 = \alpha_1(-x+x^2) + \alpha_2(1+2x) + \alpha_3 x = \alpha_2 + (-\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)x + \alpha_1 x^2$$

Так как система многочленов 1, x, x^2 линейно независима, получаем следующую ОСЛУ на неизвестные $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$\begin{cases} \alpha_2 = 3 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 2 \\ \alpha_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 3 \\ \alpha_3 = -3 \end{cases}$$

Пусть координаты $\varphi(3+2x+x^2)$ в базисе $\big((3,1),(2,1)\big)$ равны $(\beta_1, \beta_2)^T$. Найдём эти координаты воспользовавшись следующей формулой связи координат вектора и его образа при линейном отображении

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Таким образом, вектор $\varphi(3+2x+x^2)$ имеет координаты $(-13, 22)^T$ в базисе $\mathbb{f}$, значит этот вектор равен

$$\varphi(3+2x+x^2) = \mathbb{f} \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 22 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = -13 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 22 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Ответ: $(5, 9)$

Задача 3. Найдите невырожденную замену координат (выражение старых координат через новые), приводящую квадратичную форму

$$Q(x,y,z) = 8x^2 + 9y^2 - 8z^2 - 24xy + 16xz$$

к нормальному виду и выпишете этот вид.

Решение. Приведём квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа

$$\begin{gathered} Q(x,y,z) = 8x^2 + 9y^2 - 8z^2 - 24xy + 16xz = (16x^2 - 24xy + 9y^2) - 8x^2 - 8z^2 + 16xz = \\ = (4x-3y)^2 - 8(x^2 - 2xz + z^2) = \underbrace{(4x-3y)}_{x'}{}^2 - 8\underbrace{(x-z)}_{y'}{}^2 = (x')^2 - 8(y')^2 \end{gathered}$$

Текущая замена координат

$$\begin{cases} x^{'} = 4x - 3y \\ y^{'} = x - z \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \\ z^{'} \end{pmatrix}$$

Замена должна быть невырожденной, поэтому замену для z можно сделать следующей: $z^{'} = z$

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{ замена невырожденная}$$

Приведём Q к нормальному виду

$$Q(x,y,z) = (x')^2 - 8(y')^2 + 0(z^{'})^2 = (x')^2 - (2\sqrt{2}y')^2 + 0(z^{'})^2 = (x^{''})^2 - (y^{''})^2 + 0(z^{''})^2$$

$$\begin{cases} x^{''} = x^{'} \\ y^{''} = 2\sqrt{2}y' \\ z^{''} = z^{'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{''} = 4x - 3y \\ y^{''} = 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}z \\ z^{''} = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{''} = 4x - 3y \\ y^{''} = 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}z \\ z = z^{''} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^{''} = 4x - 3y \\ x = \frac{1}{2\sqrt{2}}y^{''} + z^{''} \\ z = z^{''} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x^{''} + \frac{2}{3\sqrt{2}}y^{''} + \frac{4}{3}z^{''} \\ x = \frac{1}{2\sqrt{2}}y^{''} + z^{''} \\ z = z^{''} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{4}y^{''} + z^{''} \\ y = -\frac{1}{3}x^{''} + \frac{\sqrt{2}}{3}y^{''} + \frac{4}{3}z^{''} \\ z = z^{''} \end{cases}$$

Ответ: – нормальный вид: $Q = (x^{''})^2 - (y^{''})^2$

– невырожденная замена координат:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{4}y^{''} + z^{''} \\ y = -\frac{1}{3}x^{''} + \frac{\sqrt{2}}{3}y^{''} + \frac{4}{3}z^{''} \\ z = z^{''} \end{cases}$$

Задача 4. Найдите ортогональную проекцию вектора v на плоскость подпространство $U \subseteq \mathbb{R}^4$, где $v = (2, 1, 3, 1)$ и $U = \langle(2, -2, -1, 1), (1, 0, -5, 3), (4, -6, 7, -3)\rangle$.

Решение. Найдём базис пространства $U^\perp$. Для этого найдём ФСР для ОСЛУ $Ax = 0$, где строки матрицы A – векторы, порождающие U.

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -5 & 3 \\ 4 & -6 & 7 & -3 \end{pmatrix} \overset{Э_1(1,2,-2)}{\underset{Э_1(3,2,-4)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 9 & -5 \\ 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & -6 & 27 & -15 \end{pmatrix} \overset{Э_1(3,1,-3)}{\underset{Э_3(1,-\frac{1}{2}),Э_2(1,2)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -9/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\overset{ФСР}{\rightsquigarrow} u_1^\perp = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_2^\perp = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Базис $U^\perp$ – это векторы $u_1^\perp$ и $u_2^\perp$. Заметим, что $\dim U = 2$: ранг матрицы, составленных из векторов, порождающих U, равен 2. Более того, верно следующее разложение в прямую сумму $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^4$, а $\dim U^\perp = 2 \Rightarrow \dim U = 4 - \dim U^\perp = 2$.

Размерность U равна двум, векторы $u_1 = (2, -2, -1, 1)$ и $u_2 = (1, 0, -5, 3)$ лежат в U и линейно независимы, значит, они являются базисом этого подпространства.

Так как $\mathbb{R}^4 = U \oplus U^\perp$ и u_1, u_2 – базис U, $u_1^\perp, u_2^\perp$ – базис $U^\perp$, для любого $v \in \mathbb{R}^4$ существует единственное представление $v = x_1u_1 + x_2u_2 + y_1u_1^\perp + y_2u_2^\perp$. Вектор $x_1u_1 + x_2u_2$ – это $\mathrm{pr}_U\, v$, а вектор $y_1u_1^\perp + y_2u_2^\perp$ – это $\mathrm{ort}_U\, v$. Для данного вектора $v = (2, 1, 3, 1)$ найдём такие x_1, x_2 и y_1, y_2, что $v = x_1u_1 + x_2u_2 + y_1u_1^\perp + y_2u_2^\perp$.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + y_1 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 & -6 \\ -2 & 0 & 9 & -5 \\ -1 & -5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 10 & -6 & 2 \\ -2 & 0 & 9 & -5 & 1 \\ -1 & -5 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{Э_1(1,4,-2), \\ Э_1(2,4,2)}}{\underset{\substack{Э_1(3,4,1), \\ Э_2(1,4)}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 9 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 10 & -10 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{Э_1(1,4,\frac{3}{5}), \\ Э_1(2,4,\frac{6}{5})}}{\underset{\substack{Э_1(3,4,-\frac{2}{5})), \\ Э_3(4,-\frac{1}{5}), \\ Э_2(2,4)}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 21 & -13 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\overset{\substack{Э_1(1,3,3), \\ Э_1(2,3,-1)}}{\underset{\substack{Э_1(4,3,\frac{21}{2}), \\ Э_3(3,-\frac{1}{2})}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 14 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 45 \end{array}\right) \overset{\substack{Э_1(1,4,-\frac{7}{25}), \\ Э_1(2,4,\frac{2}{25})}}{\underset{\substack{Э_1(3,4,\frac{3}{50}), \\ Э_3(4,\frac{1}{50})}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{9}{10} \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ -2/5 \\ 7/10 \\ 9/10 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{pr}_U\, v = \frac{2}{5}u_1 - \frac{2}{5}u_2 = \frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ -4/5 \\ 8/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}$$

Ответ: $(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, -\frac{4}{5})$

Задача 5. Составьте уравнения прямой $\mathbb{R}^3$, перпендикулярной плоскости $3x - y - 2z = 4$ и пересекающую каждую из двух прямых

$$\begin{cases} 4x + 5z = -2 \\ x + y = -3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y - z = 3 \end{cases}$$

Решение. Обозначим описанную плоскость π и прямые l_1 и l_2. Плоскость π задана уравнением $3x - y - 2z = 4$. Из этого вида нетрудно получить нормаль плоскости $n = (3, -1, -2)$.

Искомая прямая v перпендикулярная π, значит, если задавать эту прямую как параметрическое уравнение $v = v_0 + at$, направляющий вектор a должен быть параллелен n, так как нормаль перпендикулярна плоскости. Таким образом, направляющий вектор $a = \alpha n = (3\alpha, -\alpha, -2\alpha)$, $\alpha \neq 0$. Без ограничения общности $\alpha = 1$, то есть $a = n = (3, -1, -2)$.

Прямая $v = v_0 + at$ по условию пересекает прямую l_1. Это означает, что существует такая точка $v_1 = (x_1, y_1, z_1) \in v$, что она принадлежит l_1. Если точка v_1 принадлежит l_1, то она удовлетворяет системе

$$\begin{cases} 4x + 5z = -2 \\ x + y = -3 \end{cases} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & 5 & -2 \end{array}\right) \overset{Э_1(2,1,-4)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 5 & 10 \end{array}\right) \underset{Э_3(2,-\frac{1}{4})}{\overset{Э_1(1,2,\frac{1}{4})}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5/4 & -1/2 \\ 0 & 1 & -5/4 & -5/2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow (x_1, y_1, z_1) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{5q}{4},\ -\frac{5}{2} + \frac{5q}{4},\ q\right),\ q \in \mathbb{R}$$

Прямая $v = v_0 + at$ по условию пересекает прямую l_2. Это означает, что существует такая точка $v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in v$, что она принадлежит l_2. Заметим, что точки v_1 и v_2 связаны соотношением $v_2 = v_1 + ap$ для некоторого $p \in \mathbb{R}$. Получаем, что

$$v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = v_1 + at = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{5}{4}q \\ -\frac{5}{2} + \frac{5}{4}q \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3p \\ -p \\ -2p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{5}{4}q + 3p \\ -\frac{5}{2} + \frac{5}{4}q - p \\ q - 2p \end{pmatrix}$$

Найдём такие q и p, при которых v_2 лежит на l_2, то есть удовлетворяет системе

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y - z = 3 \end{cases} \overset{\textit{подставим } v_2}{\rightsquigarrow} \begin{cases} (-\frac{1}{2} - \frac{5}{4}q + 3p) - 2(-\frac{5}{2} + \frac{5}{4}q - p) + (q - 2p) = 0 \\ (-\frac{5}{2} + \frac{5}{4}q - p) - (q - 2p) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{2} - \frac{11}{4}q + 3p = 0 \\ -\frac{5}{2} + \frac{1}{4}q + p = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{11}{4}q + 3p = -\frac{9}{2} \\ \frac{1}{4}q + p = \frac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -11q + 12p = -18 \\ q + 4p = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 6 \\ p = 4 \end{cases}$$

Получаем, что прямая v пересекает l_1 в точке $(x_1, y_1, z_1) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{5q}{4},\ -\frac{5}{2} + \frac{5q}{4},\ q\right)$, $q = 6$, прямую l_2 в точке $v_2 = v_1 + 4a$. Возьмём точку (x_1, y_1, z_1) как v_0. Таким образом, искомая прямая равна

$$v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{5}{4}q \\ -\frac{5}{2} + \frac{5}{4}q \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} t$$

Ответ: $v = (-8, 5, 6) + (3, -1, -2)t$

Задача 6. В пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением задан тетраэдр с вершинами $A(-8,6,2), B(4,12,8), C(18,10,12), D(-20,-12,8)$. Пусть BH – высота грани ABC и AM – медиана грани ACD. Найдите угол и расстояние между прямыми BH и AM.

Решение. Параметрически зададим прямые l_1 и l_2, проходящие через BH и AM соответственно. Пусть $l_1 = B + t \cdot \vec{BH}$, а $l_2 = A + t \cdot \vec{AM}$.

Найдём вектор $\vec{BH}$. Так как BH – высота, опущенная на прямую AC, $\vec{BH}$ является ортогональной составляющей $\vec{BA} = (x_A - x_B, y_A - y_B, z_A - z_B) = (-12,-6,-6)$ относительно подпространства U, натянутого на прямую, проходящую через $\vec{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) = (26,4,10)$.

Подпространство $U = \langle \vec{AC} \rangle$, отсюда получаем, что $\vec{AC}$ – *ортогональный* базис U. Воспользуемся формулой ортогональной проекции вектора на подпространство, используя найденный *ортогональный* базис U

$$\operatorname{pr}_U \vec{BA} = \frac{(\vec{BA}, \vec{AC})}{(\vec{AC}, \vec{AC})}\vec{AC} = \frac{-396}{792}\vec{AC} = -\frac{1}{2}\vec{AC} = (-13,-2,-5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{BH} = \operatorname{ort}_U \vec{BA} = \vec{BA} - \operatorname{pr}_U \vec{BA} = (-12,-6,-6) - (-13,-2,-5) = (1,-4,-1)$$

Найдём вектор $\vec{AM}$. Для этого найдём M середину отрезка CD.

$$M\left(\frac{x_C + x_D}{2}, \frac{y_C + y_D}{2}, \frac{z_C + z_D}{2}\right) \Rightarrow M(-1,-1,10)$$

$$\Rightarrow \vec{AM} = (x_M - x_A, y_M - y_A, z_M - z_A) = (7,-7,8)$$

Таким образом, получаем прямые, проходящие через BH и AM

$$l_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} t = v_1 + a_1 t \qquad l_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} t = v_2 + a_2 t$$

По формуле расстояния и угла между прямыми найдём расстояние и угол между l_1 и l_2

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|(a_1, a_2, v_1 - v_2)|}{|[a_1, a_2]|} = \frac{\left|\begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 7 & -7 & 8 \\ 12 & 6 & 6 \end{vmatrix}\right|}{\left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -4 & -1 \\ 7 & -7 & 8 \end{vmatrix}\right|} = \frac{432}{\sqrt{2187}} = \frac{16}{\sqrt{3}}$$

$$\cos(l_1, l_2) = \frac{(a_1, a_2)}{|a_1| \cdot |a_2|} = \frac{27}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{162}} = \frac{27}{54} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle(l_1, l_2) = \frac{\pi}{3}$$

Ответ: $\rho(l_1, l_2) = \frac{16}{\sqrt{3}}$ и $\angle(l_1, l_2) = \frac{\pi}{3}$

Контрольная работа 2 – 2018/2019 учебный год

Задача 1. Составьте систему линейных уравнений, множеством решений которой является пересечение подпространств $U, W \subseteq \mathbb{R}^4$, где

$$U = \langle (1,0,1,1), (4,2,2,1), (2,2,0,-1) \rangle \text{ и } W = \langle (3,1,1,1), (2,0,0,1) \rangle$$

Решение. Зададим подпространства U и W как множество решений $Ax = 0$ и $Bx = 0$ соответственно. Для этого воспользуемся алгоритмом перехода между двумя способами задания подпространства: от линейной оболочки к множеству решений ОСЛУ.

Запишем векторы, порождающие U, в строки матрицы C и найдём ФСР для $Cx = 0$. Найденные векторы ФСР запишем в строки матрицы, полученная матрица и есть искомая матрица A.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{Э}_1(3,1,-2)}{\overset{\text{Э}_1(2,1,-4)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \underset{\text{Э}_3(2,\frac{1}{2})}{\overset{\text{Э}_1(3,2,-1)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\overset{\textit{ФСР}}{\rightsquigarrow} \; v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{система } \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{задаёт } U$$

Запишем векторы, порождающие W, в строки матрицы C и найдём ФСР для $Cx = 0$. Найденные векторы ФСР запишем в строки матрицы, полученная матрица и есть искомая матрица B.

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{Э}_1(1,2,-1)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{Э}_1(2,1,-2)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{Э}_3(2,-\frac{1}{2})}{\overset{\text{Э}_1(1,2,\frac{1}{2})}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\overset{\textit{ФСР}}{\rightsquigarrow} \; v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{система } \begin{cases} -x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{задаёт } W$$

Если вектор v лежит в $U \cap W$, то он одновременно удовлетворяет системе, задающей U, и системе, задающей W. Таким образом, все векторы лежащие в пересечении удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Множество решений полученной системы задаёт $U \cap W$.

Ответ: $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

Задача 2. Известно, что при некотором значении параметра a вектор $(0, 0, 1)$ не лежит в образе линейного отображения $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, имеющее в стандартных базисах матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдите базис ядра линейного отображение φ при том же значении a.

Решение. В координатах образ φ порождают столбцы матрицы A. Так как базисы, в которых задана матрица A, стандартные, столбцы A порождают образ не только в координатах, но и само подпространство $\operatorname{Im}\varphi$.

По условию $(0, 0, 1) \notin \operatorname{Im}\varphi$, значит, вектор $(0, 0, 1) \neq x_1A^{(1)} + x_2A^{(2)} + x_3A^{(3)} + x_4A^{(4)}$ для любых x_1, x_2, x_3, x_4. То есть описанная СЛУ на неизвестные x_1, x_2, x_3, x_4 не имеет решений

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{Э}_1(1,3)}{\overset{\text{Э}_1(2,3,-2)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ a & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{Э}_1(3,1,-a)}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2-a & -a & 1 & -a \end{array}\right) \overset{\text{Э}_1(3,2,2-a)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2-2a & a-1 & a-4 \end{array}\right)$$

Система не будет иметь решения, если $2 - 2a = 0$, $a - 1$ и $a - 4 \neq 0$. Последнее возможно только при $a = 1$.

При $a = 1$ найдём базис ядра φ. Для этого найдём ФСР для ОСЛУ $Ax = 0$, так как координаты вектора, лежащего в ядре φ, удовлетворяют $Ax = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{Э}_1(3,\,1,\,-1)}{\overset{\text{Э}_1(2,\,1,\,-2)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{Э}_3(3,\,-1), \\ \text{Э}_2(2,\,3)}}{\overset{\substack{\text{Э}_1(1,\,3,\,2), \\ \text{Э}_1(2,\,3,\,-3)}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{ФСР}}{\rightsquigarrow} v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Векторы v_1 и v_2 – базис ядра в координатах. Так как матрица A задана в стандартных базисах, координаты v_1 и v_2 образовывают базис $\ker\varphi$.

Ответ: $(-2, 1, 1, 0),\ (1, -1, 0, 1)$

Задача 3. Пусть $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ – пространство многочленов с действительными коэффициентами от переменной x степени не выше 2. Пусть β – билинейная форма на V, имеющая в базисе $(1 - x^2, x^2, x + 2x^2)$ матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

а α – линейная функция на V, заданная формулой $\alpha(f) = 2f(1) + f^{'}(-1)$. Найдите такой вектор $v \in V$, что $\alpha(f) = \beta(v, f)$ для всех $f \in V$.

Решение. Пусть искомый вектор v в базисе $(1 - x^2, x^2, x + 2x^2)$ имеет координаты (x_1, x_2, x_3), тогда для любого вектора $f = y_1(1 - x^2) + y_2x^2 + y_3(x + 2x^2) \in V$

$$\beta(v, f) = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1 + 3x_3y_2 =$$
$$= (2x_1 + x_3)y_1 + (x_2 + 3x_3)y_2 + (x_1 + x_3)y_3$$

В то же время $f = y_1(1 - x^2) + y_2x^2 + y_3(x + 2x^2) = y_1 + y_3x + (-y_1 + y_2 + 2y_3)x^2$ и $\alpha(f)$

$$\alpha(f) = 2\big(y_1 + y_3x + (-y_1 + y_2 + 2y_3)x^2\big)(1) + \big(y_1 + y_3x + (-y_1 + y_2 + 2y_3)x^2\big)^{'}(-1) =$$
$$= 2\big(y_2 + 3y_3\big) + \big(2y_1 - 2y_2 - 3y_3\big) = 2y_1 + 3y_3$$

По условию вектор v таков, что $\alpha(f) = \beta(v, f)$ при любом f, то есть

$$(*)\ \ 2y_1 + 3y_3 = (2x_1 + x_3)y_1 + (x_2 + 3x_3)y_2 + (x_1 + x_3)y_3 \ \ \forall(y_1, y_2, y_3)$$

Рассмотрим случаи, когда (y_1, y_2, y_3) равно $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$. Подставим эти значения в уравнение $(*)$ и получим следующие уравнения

$$(y_1, y_2, y_3) = (1, 0, 0) \Rightarrow 2 = 2x_1 + x_3$$
$$(y_1, y_2, y_3) = (0, 1, 0) \Rightarrow 0 = x_2 + 3x_3$$
$$(y_1, y_2, y_3) = (0, 0, 1) \Rightarrow 3 = x_1 + x_3$$

Получаем СЛУ на переменные x_1, x_2, x_3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{Э_2(1,3)}{\overset{Э_1(1,3,-2)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right) \underset{Э_2(3,-1)}{\overset{Э_1(1,3,1),Э_1(2,3,3)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Покажем, что вектор v, образованный координатами $(-1, -12, 4)$ в описанном базисе, удовлетворяет условию $\alpha(f) = \beta(v, f)$ для всех $f \in V$. Координаты $(x_1, x_2, x_3) = (-1, -12, 4) \Rightarrow$ выражение $(*)$ $(2x_1 + x_3)y_1 + (x_2 + 3x_3)y_2 + (x_1 + x_3)y_3 = 2y_1 + 3y_3$ – верно для всех (y_1, y_2, y_3).

Таким образом, вектор $v = x_1(1 - x^2) + x_2x^2 + x_3(x + 2x^2) = -1 + 4x - 3x^2$ – искомый.

Ответ: $-1 + 4x - 3x^2$

Задача 4. Найдите все значения параметра a, при которых квадратичная форма

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + 4x_3 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$$

является неопределённой.

Решение. Переименуем переменные, сделав следующие замены:

$$\begin{cases} x_1^{'} = x_1 \\ x_2^{'} = x_3 \\ x_3^{'} = x_2 \end{cases} \rightsquigarrow Q(x_1^{'}, x_2^{'}, x_3^{'}) = (x_1^{'})^2 + a(x_3^{'})^2 + 4(x_2^{'})^2 + 2x_1^{'}x_3^{'} - 4x_2^{'}x_3^{'}$$

Запишем матрицу квадратичной формы, для этого запишем матрицу соответствующей ей симметричной билинейной формы.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$$

Приведём Q к каноническому виду с помощью метода Якоби

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} &\delta_1 = 1 \\ &\delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \\ &\delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix} = 4a - 4 - 4 = 4a - 8 \end{aligned} \Rightarrow \text{метод Якоби применим} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = \delta_1(x_1^{''})^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1}(x_2^{''})^2 + \frac{\delta_3}{\delta_2}(x_3^{''})^2 = (x_1^{''})^2 + 4(x_2^{''})^2 + (a-2)(x_3^{''})^2 \text{ – канонический вид}$$

По данному каноническому виду нетрудно получить нормальный вид

$$Q = (x_1^{'''})^2 + (x_2^{'''})^2 + \operatorname{sgn}(a-2)(x_3^{'''})^2$$

Если $a - 2 > 0$, то Q положительно определена. Если $a - 2 = 0$, то Q неотрицательно определена. При $a - 2 < 0$ квадратичная форма не определена, так как её нормальный вид при данном a равен $Q = (x_1^{'''})^2 + (x_2^{'''})^2 - (x_3^{'''})^2$. Таким образом, Q является неопределённой при $a < 2$.

Ответ: $a < 2$

Задача 5. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ пространство U есть множество решений уравнения $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$, а подпространство W – линейная оболочка векторов $(2, -1, 2, -1)$ и $(3, -3, 1, 1)$. Найдите вектор $v \in \mathbb{R}^4$, для которого $\operatorname{pr}_U v = (4, -1, 8, -5)$ и $\operatorname{pr}_W v = (4, 1, 8, -7)$.

Решение. Заметим, что строки матрицы системы $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$ порождают $U^\perp$. То есть $U^\perp = \langle (1, 1, -1, -1) \rangle$. Существует единственное разложение $v = \operatorname{pr}_U v + \operatorname{ort}_U v$. Так как $\operatorname{ort}_U v \in U^\perp$, $\operatorname{ort}_U v = (1, 1, -1, -1)\alpha$. Таким образом,

$$v = \operatorname{pr}_U v + \operatorname{ort}_U v = (4, -1, 8, -5) + (1, 1, -1, -1)\alpha = (4 + \alpha, -1 + \alpha, 8 - \alpha, -5 - \alpha)$$

Векторы $(2, -1, 2, -1)$ и $(3, -3, 1, 1)$ образуют базис W, так как они порождают W и линейно независимы. Ортогонализуем этот базис методом Грама-Шмидта

$$\left.\begin{array}{l} e_1 = (2, -1, 2, -1) \\ e_2 = (3, -3, 1, 1) \end{array}\right| \rightsquigarrow \begin{array}{l} f_1 = e_1 = (2, -1, 2, -1) \\ f_2 = e_2 - \dfrac{(f_1, e_2)}{(f_1, f_1)} f_1 = (3, -3, 1, 1) - \dfrac{10}{10} \cdot (2, -1, 2, -1) = (1, -2, -1, 2) \end{array}$$

Базис W, состоящий из f_1, f_2, является ортогональным, поэтому с помощью этого базиса можно выразить ортогональную проекцию вектора v на W

$$\operatorname{pr}_W v = \frac{(f_1, v)}{(f_1, f_1)} f_1 + \frac{(f_2, v)}{(f_2, f_2)} f_2 = (4, 1, 8, -7)$$

Подставим $v = (4 - \alpha, -1 + \alpha, 8 - \alpha, -5 - \alpha)$ в полученное выражение

$$\operatorname{pr}_W v = \frac{(f_1, v)}{(f_1, f_1)} f_1 + \frac{(f_2, v)}{(f_2, f_2)} f_2 =$$

$$= \frac{8 + 2\alpha + 1 - \alpha + 16 - 2\alpha + 5 + \alpha}{10} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{4 + \alpha + 2 - 2\alpha - 8 + \alpha - 10 - 2\alpha}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{30}{10} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{-12 - 2\alpha}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} - \frac{\alpha}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} - \frac{-\alpha}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -10 \\ 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha = 4 \Rightarrow v = (8, 3, 4, -9)$$

Ответ: $(8, 3, 4, -9)$

Задача 6. В пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением задан тетраэдр с вершинами $A(-1,2,3), B(5,-1,6), C(1,4,-1), D(6,-3,2)$. Пусть CH – высота тетраэдра, опущенная на грань ABD, и AF – биссектриса грани ABC. Найдите угол и расстояние между CH и AF.

Решение. Параметрически зададим прямые l_1 и l_2, проходящие через CH и AF соответственно. Пусть $l_1 = C + t\cdot\vec{CH}$, а $l_2 = A + t\cdot\vec{AF}$.

Найдём $\vec{CH}$. Так как CH – высота, опущенная на грань ABD, вектор $\vec{CH}$ является ортогональной составляющей $\vec{CA} = (x_A - x_C, y_A - y_C, z_A - z_C) = (-2,-2,4)$ относительно подпространства U – плоскости $(ABD) = \langle \vec{AB}, \vec{AD}\rangle$.

$$\begin{gathered}\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (6,-3,3)\\ \vec{AD} = (x_D - x_A, y_D - y_A, z_D - z_A) = (7,-5,-1)\end{gathered}$$

Векторы $\vec{AB}, \vec{AD}$ – базис U. Ортогонализуем этот базис методом Грамма-Шмидта:

$$\left.\begin{aligned} e_1 = \vec{AB} = (6,-3,3)\\ e_2 = \vec{AD} = (7,-5,-1)\end{aligned}\right| \rightsquigarrow \begin{aligned} &f_1 = e_1 = (6,-3,3)\\ &f_2 = e_2 - \frac{(f_1,e_2)}{(f_1,f_1)}f_1 = (7,-5,-1) - \frac{54}{54}\cdot(6,-3,3) = (1,-2,-4)\end{aligned}$$

Воспользуемся формулой ортогональной проекции вектора на подпространство, используя найденный *ортогональный* базис f_1, f_2 в U

$$\begin{gathered}\operatorname{pr}_U \vec{CA} = \frac{(\vec{CA}, f_1)}{(f_1,f_1)}f_1 + \frac{(\vec{CA}, f_2)}{(f_2,f_2)}f_2 = \frac{6}{54}f_1 - \frac{14}{21}f_2 = \frac{1}{9}f_1 - \frac{2}{3}f_2 = (0,1,3) \Rightarrow\\ \Rightarrow \vec{CH} = \operatorname{ort}_U \vec{CA} = \vec{CA} - \operatorname{pr}_U \vec{CA} = (-2,-2,4) - (0,1,3) = (-2,-3,1)\end{gathered}$$

Найдём $\vec{AF}$. Так как это биссектриса угла $\angle(\vec{AB}, \vec{AC})$, вектор $\vec{AF}$ коллинеарен вектору w

$$w = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} + \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} = \frac{1}{54}\cdot(6,-3,3) + \frac{1}{24}\cdot(2,2,-4) = \left(\frac{1}{36}, -\frac{5}{36}, \frac{2}{9}\right)$$

Пусть $\vec{AF} = 36w = (1,-5,8)$. Таким образом, получаем прямые, проходящие через CH и AF

$$l_1 = \begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}t = v_1 + a_1 t \qquad l_2 = \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-5\\8\end{pmatrix}t = v_2 + a_2 t$$

По формуле расстояния и угла между прямыми найдём расстояние и угол между l_1 и l_2

$$\rho(l_1,l_2) = \frac{|(a_1, a_2, v_1 - v_2)|}{|[a_1,a_2]|} = \frac{\left|\begin{vmatrix}-2 & -3 & 1\\ 1 & -5 & 8\\ 2 & 2 & -4\end{vmatrix}\right|}{\left|\begin{vmatrix}i & j & k\\ -2 & -3 & 1\\ 1 & -5 & 8\end{vmatrix}\right|} = \frac{56}{\sqrt{361}} = \frac{56}{19}$$

$$\cos(l_1,l_2) = \frac{(a_1,a_2)}{|a_1|\cdot|a_2|} = \frac{21}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{90}} = \frac{\sqrt{35}}{10} \Rightarrow \angle(l_1,l_2) = \arccos\frac{\sqrt{35}}{10}$$

Ответ: $\rho(l_1,l_2) = \frac{56}{19}$ и $\angle(l_1,l_2) = \arccos\frac{\sqrt{35}}{10}$

Контрольная работа 2 – 2019/2020 учебный год

Задача 1. Рассмотрим линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $v \to Av$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдите базис $\mathbb{e}$ пространства $\mathbb{R}^4$ и базис $\mathbb{f}$ пространства $\mathbb{R}^3$, в которых φ имеет диагональный вид с единицами и нулями на диагонали, и выпишите этот вид.

Решение. Воспользуемся стандартным алгоритмом нахождения пары базисов, в которых матрица линейного отображения диагональна. Найдём базис ядра φ. Для этого найдём ФСР $Ax = 0$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 7 & 3 \end{pmatrix} \underset{Э_1(2,1,1)}{\overset{Э_1(1,2,-1),Э_1(1,3,1)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 \\ -1 & 3 & 7 & 3 \end{pmatrix} \underset{Э_3(1,\frac{1}{3})}{\overset{Э_1(2,1,-\frac{5}{3}),Э_1(3,1,-1)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \overset{Э_3(3,-1)}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Так как матрица A задана в стандартных базисах, v_1 и v_2 – искомый базис ядра. Положим $e_3 = v_1$ и $e_4 = v_2$. Дополним эту систему векторов до базиса всего $\mathbb{R}^4$. Эта система легко дополняется векторами $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ и $e_2 = (0, 1, 0, 0)$.

Найдём $f_1 = \varphi(e_1)$ и $f_2 = \varphi(e_2)$:

$$f_1 = Ae_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad f_2 = Ae_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Дополним векторы f_1 и f_2 до базиса всего $\mathbb{R}^4$ по стандартному алгоритму:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \overset{Э_2(1,2)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \overset{Э_1(2,3)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

По построению в найденных базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$, матрица $A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ имеет диагональный вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: – $\mathbb{e} = \big((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (-2, -3, 1, 0), (-3, -2, 0, 1)\big)$

– $\mathbb{f} = \big((3, 2, -1), (-1, -1, 3), (0, 0, 1)\big)$

– $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Задача 2. Пусть $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ – пространство многочленов с действительными коэффициентами от переменной x степени не выше 2. Пусть β – билинейная форма на V, имеющая в базисе $(1-x^2, x^2, x+2x^2)$ матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим линейные функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ на V, такие что $\alpha_1(f) = \beta(1, f), \alpha_2(f) = \beta(x, f)$ и $\alpha_3(f) = \beta(x^2, f)$ для всех $f \in V$. Найдите базис пространства V, для которого $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ является двойственным базисом пространства V^*.

Решение. Выразим координаты векторов $1, x, x^2$ в базисе $\mathbb{e} = (1-x^2, x^2, x+2x^2) = (e_1, e_2, e_3)$:

$$1 = 1 \cdot (1-x^2) + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot (x+2x^2) = (e_1, e_2, e_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x = 0 \cdot (1-x^2) - 2 \cdot x^2 + 1 \cdot (x+2x^2) = (e_1, e_2, e_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^2 = 0 \cdot (1-x^2) + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot (x+2x^2) = (e_1, e_2, e_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

В силу того, что $(1-x^2, x^2, x+2x^2)$ – базис, найденные координаты единственны.

Пусть $f = a \cdot (1-x^2) + b \cdot x^2 + c \cdot (x+2x^2)$ – произвольный многочлен в V, заданный в описанном базисе координатами (a, b, c), тогда значения билинейной формы

$$\beta(1, f) = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + b + c$$

$$\beta(x, f) = \begin{pmatrix} 0, & -2, & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + b + 2c$$

$$\beta(x^2, f) = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = b$$

По условию $\alpha_1(f) = \beta(1, f), \alpha_2(f) = \beta(x, f)$ и $\alpha_3(f) = \beta(x^2, f)$ для всех $f \in V$, поэтому выполняется $\alpha_1(f) = a + b + c, \alpha_2(f) = a + b + 2c$ и $\alpha_3(f) = b$.

Пусть искомый базис в V, которому двойственен $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, равен

$$f_1 = a_1 e_1 + b_1 e_2 + c_1 e_3 \qquad f_2 = a_2 e_1 + b_2 e_2 + c_2 e_3 \qquad f_3 = a_3 e_1 + b_3 e_2 + c_3 e_3$$

Тогда по определению двойственного базиса

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \cdot (f_1,\ f_2,\ f_3) = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 + c_1 & a_2 + b_2 + c_2 & a_3 + b_3 + c_3 \\ a_1 + b_1 + 2c_1 & a_2 + b_2 + 2c_2 & a_3 + b_3 + 2c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Получаем следующие системы на коэффициенты искомых многочленов:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 = 1 \\ a_1 + b_1 + 2c_1 = 0 \\ b_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 2,\ b_1 = 0,\ c_1 = -1$$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 = 0 \\ a_2 + b_2 + 2c_2 = 1 \\ b_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_2 = -1,\ b_2 = 0,\ c_2 = 1$$

$$\begin{cases} a_3 + b_3 + c_3 = 0 \\ a_3 + b_3 + 2c_3 = 0 \\ b_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow a_3 = -1,\ b_3 = 1,\ c_3 = 0$$

Таким образом, искомые многочлены равны:

$$\begin{aligned} f_1 &= 2e_1 - e_3 = 2 \cdot (1 - x^2) + (x + 2x^2) = 2 + x \\ f_2 &= -e_1 + e_3 = -(1 - x^2) + (x + 2x^2) = -1 + x + 3x^2 \\ f_3 &= -e_1 + e_2 = -(1 - x^2) + x^2 = -1 + 2x^2 \end{aligned}$$

Ответ: $\big(2 + x, -1 + x + 3x^2, -1 + 2x^2\big)$

Задача 3. Даны две квадратичные формы

$$Q_1(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3,\ \ Q_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3)^2.$$

Определите нормальный вид квадратичной формы $Q_1 + aQ_2$ в зависимости от параметра a.

Решение. Чтобы избежать длинных вычислений, раскрытий скобок и долгих упрощений, а также свести появление параметра к минимуму, произведём невырожденную замену

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_1 - x_2 - x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_1 - y_2 - y_3 \end{cases}, \text{ замена невырождена} - \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Теперь вторая квадратичная форма в новых координатах будет иметь очень простой вид $Q_2 = y_3^2$, что упрощает исследование зависимости

$$\begin{aligned}(Q_1 + aQ_2)(y_1, y_2, y_3) &= 5y_1^2 - y_2^2 - 2y_1y_2 - 4y_1(y_1 - y_2 - y_3) + ay^3 = \\ &= 5y_1^2 - y_2^2 - 2y_1y_2 - 4y_1^2 + 4y_1y_2 + 4y_1y_3 + ay^3 = \\ &= y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_2 + 4y_1y_3 + ay^3\end{aligned}$$

Составим матрицу симметричной билинейной формы ассоциированной с $Q_1 + aQ_2$ и применим метод Якоби

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \delta_1 = 1 \\ \delta_2 = -2 \\ \delta_3 = -2a + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta_1 = 1 \\ \frac{\delta_2}{\delta_1} = -2 \\ \frac{\delta_3}{\delta_2} = a - 2 \end{cases}$$

Заметим, что метод Якоби применим при любом значении a, так как от параметра зависит только последний угловой минор, для которого допустимо быть равным нулю. По знакам $\delta_1, \frac{\delta_2}{\delta_1}, \frac{\delta_3}{\delta_2}$ однозначно определяется нормальный вид, откуда в новых координатах

$$(Q_1 + aQ_2)(z_1, z_2, z_3) = \begin{cases} z_1^2 - z_2^2,\ a = 2 \\ z_1^2 - z_2^2 - z_3^2,\ a < 2 \\ z_1^2 - z_2^2 + z_3^2,\ a > 2 \end{cases}$$

Ответ: $(Q_1 + aQ_2)(z_1, z_2, z_3) = \begin{cases} z_1^2 - z_2^2,\ a = 2 \\ z_1^2 - z_2^2 - z_3^2,\ a < 2 \\ z_1^2 - z_2^2 + z_3^2,\ a > 2 \end{cases}$

Задача 4. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ даны следующие два подпространства $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ и $W = \langle w_1, w_2 \rangle$, где $u_1 = (2, -1, 2, -1)$, $u_2 = (3, -3, 1, 1)$, $w_1 = (1, 2, -1, 2)$, $w_2 = (1, -3, 3, -1)$. Найдите вектор $v \in \mathbb{R}^4$, для которого $\operatorname{pr}_U v = (9, -12, -1, 8)$ и $\operatorname{ort}_W v = (1, -8, -7, 4)$.

Решение. Известно, что $v = \operatorname{pr}_U v + \operatorname{ort}_U v$ и $v = \operatorname{pr}_W v + \operatorname{ort}_W v$. Найдём базис $U^\perp$, для этого найдём ФСР для ОСЛУ, в строках матрицы которой лежат векторы u_1 и u_2

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/3 & -4/3 \\ 0 & 1 & 4/3 & -5/3 \end{pmatrix} \overset{\text{\textit{ФСР}}}{\rightsquigarrow} u_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Так как $\operatorname{ort}_U v \in U^\perp = \langle u_3, u_4 \rangle$ и $\operatorname{pr}_W v \in W = \langle w_1, w_2 \rangle$, верны выражения $\operatorname{ort}_U v = au_3 + bu_4$ и $\operatorname{pr}_W v = cw_1 + dw_2$ для некоторых $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} v = \operatorname{pr}_U v + \operatorname{ort}_U v \\ v = \operatorname{pr}_W v + \operatorname{ort}_W v \end{cases} \Leftrightarrow \operatorname{pr}_U v + \operatorname{ort}_U v = \operatorname{pr}_W v + \operatorname{ort}_W v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}}_{\operatorname{pr}_U v} + \underbrace{a \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\operatorname{ort}_U v} = \underbrace{c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\operatorname{pr}_W v} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\operatorname{ort}_W v} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ – СЛУ относительно } a, b, c, d$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 4 & -1 & -1 & -8 \\ -4 & 5 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right) \underset{\text{\textit{строк}}}{\overset{\text{\textit{эл. преоб.}}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = 1/3 \\ b = 2/3 \\ c = 5 \\ d = 4 \end{cases}$$

Зная коэффициенты a, b, c, d несложно найти искомый вектор v

$$v = \operatorname{pr}_U v + 1/3u_3 + 5/3u_4 = 5w_1 + 4w_2 + \operatorname{ort}_W v = (10, -10, 0, 10)$$

Ответ: $v = (10, -10, 0, 10)$

Задача 5. В пространстве $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, снабженном структурой евклидова пространства относительно некоторого скалярного произведения, объём параллелепипеда, натянутого на векторы $2 - x + 3x^2, 3 + x + x^2, 1 + 3x - 3x^2$, равен 4. Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы $1 + x + x^2, 3 - 2x + 3x^2, -1 + 2x - 2x^2$.

Решение (способ 1). Обозначим данные в условии системы как

$$(u_1, u_2, u_3) = (2 - x + 3x^2, 3 + x + x^2, 1 + 3x - 3x^2)$$
$$(v_1, v_2, v_3) = (1 + x + x^2, 3 - 2x + 3x^2, -1 + 2x - 2x^2)$$

Найдём такую матрицу C, что $(v_1, v_2, v_3) = (u_1, u_2, u_3) \cdot C$. Фактически нужно решить матричное уравнение $UC = V$, где $U = (u_1, u_2, u_3)$ и $V = (v_1, v_2, v_3)$.

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \end{matrix}}_{U} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{matrix}}_{V}\right) \overset{\textit{эл. преоб.}}{\underset{\textit{строк}}{\rightsquigarrow}} \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 6 & -7 & 5 \\ -5 & 15/2 & -5 \\ 4 & -11/2 & 4 \end{matrix}}_{C}\right)$$

Известно, что объём k-мерного параллелепипеда, натянутого на систему векторов $(a_1, \ldots, a_k)$ равен $\operatorname{Vol} P(a_1, \ldots, a_k) = \sqrt{\det G(a_1, \ldots, a_k)}$, где $G(a_1, \ldots, a_k)$ – матрица Грама этой системы векторов. Так же известно, как получить матрицу Грама системы векторов $(b_1, \ldots, b_l)$, зная матрицу $G(a_1, \ldots, a_k)$ и $C \in \operatorname{Mat}_{k \times l}$, такую что $(b_1, \ldots, b_l) = (a_1, \ldots, a_k) \cdot C$. Верно следующее:

$$G(b_1, \ldots, b_l) = C^T \cdot G(a_1, \ldots, a_k) \cdot C$$

Таким образом, несложно получить ответ на задачу

$$\operatorname{Vol} P(v_1, v_2, v_3) = \sqrt{\det G(v_1, v_2, v_3)} = \sqrt{\det\left(C^T \cdot G(u_1, u_2, u_3) \cdot C\right)} \overset{\textit{матрица } C}{\underset{\textit{квадратная}}{=}}$$
$$= \sqrt{\det C^T \cdot \det G(u_1, u_2, u_3) \cdot \det C} =$$
$$= \sqrt{\det C^T} \cdot \underbrace{\sqrt{\det G(u_1, u_2, u_3)}}_{= \operatorname{Vol} P(v_1, v_2, v_3)} \cdot \sqrt{\det C} = 4\left(\sqrt{\det C}\right)^2 = 4|\det C|$$

Остаётся найти только определитель матрицы C: $\det C = 5/2$. Получаем, что искомый объём параллелепипеда равен $4 \cdot 5/2 = 10$.

Ответ. 10

Замечание. Следующее решение работает тогда и только тогда, когда система векторов u является базисом подпространства, а число векторов в системе v равно размерности пространства.

Решение (способ 2). Известно, что объём k-мерного параллелепипеда, натянутого на систему векторов $(a_1, \dots, a_k)$, равен $\det C$, где $(a_1, \dots, a_k) = (e_1, \dots, e_k) \cdot C$, а $(e_1, \dots, e_k)$ – ортонормированный базис.

Обозначим данные в условии системы как

$$(u_1, u_2, u_3) = (2 - x + 3x^2, 3 + x + x^2, 1 + 3x - 3x^2)$$
$$(v_1, v_2, v_3) = (1 + x + x^2, 3 - 2x + 3x^2, -1 + 2x - 2x^2)$$

Пусть (e_1, e_2, e_3) – ортонормированный базис в данном $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ и $(u_1, u_2, u_3) = (e_1, e_2, e_3) \cdot C$, $(v_1, v_2, v_3) = (e_1, e_2, e_3) \cdot D$. Тогда определители описанных матриц C и D равны соответственно $\det C = \mathrm{Vol}(u_1, u_2, u_3)$ и $\det D = \mathrm{Vol}(v_1, v_2, v_3)$

$$\det(u_1, u_2, u_3) = \det(e_1, e_2, e_3) \cdot \det C \Rightarrow \det(e_1, e_2, e_3) = \frac{\det(u_1, u_2, u_3)}{\det C}$$
$$\det(v_1, v_2, v_3) = \det(e_1, e_2, e_3) \cdot \det D \Rightarrow \det D = \frac{\det(v_1, v_2, v_3)}{\det(e_1, e_2, e_3)}$$

По условию $\mathrm{Vol}(u_1, u_2, u_3) = 4$, отсюда

$$\det D = \mathrm{Vol}(v_1, v_2, v_3) = \frac{\det(v_1, v_2, v_3)}{\det(e_1, e_2, e_3)} = \frac{\det(v_1, v_2, v_3)}{\det(u_1, u_2, u_3)} \cdot \det C = 4 \cdot \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}} = 4 \cdot \frac{5}{2} = 10$$

Ответ. 10

Задача 6. Прямая $l \subset \mathbb{R}^3$ проходит через точку $P = (2, 0, 1)$, а также пересекает прямую $l_1 = \{4x - 3z = 1, x + y = -2\}$ и перпендикулярна прямой $l_2 = \{x + 2y - 3z = 5, y - z = 2\}$. Найдите расстояние между прямыми l и l_2.

Решение. Параметрически зададим l_2. Для этого решим систему из уравнений, задающие l_2.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \underset{\text{строк}}{\overset{\text{эл. преоб.}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 2 \\ x = t \end{cases} \Rightarrow l_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{a_2} = v_2 + a_2 t$$

Положим l в некоторую плоскость S, пусть эта плоскость такова, что $l_2 \perp S$, тогда уравнение для S строится по a_2 и точке $P \in l$ (так как $l \subset S \Rightarrow P \in S$ и $l_2 \perp S \Rightarrow$ вектор a_2 – нормаль S).

$$S:\ 1 \cdot (x - 2) + 1 \cdot (y - 0) + 1 \cdot (z - 1) = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 3$$

Известно, что l и l_1 пересекаются. Чтобы найти точку Q пересечения l и l_1, найдём пересечение l и плоскости S, так как $l \subset S$. Для этого достаточно решить систему, состоящую из уравнений, задающих l_1 и S

$$\begin{cases} 4x - 3z = 1 \\ x + y = -2 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{\text{строк}}{\overset{\text{эл. преоб.}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Таким образом, $Q = l_1 \cap S = l \cap l_1 = (4, -6, 5)$. Заметим, что если бы оказалось так, что $l_1 \subset S$ (то есть ранг построенной матрицы был бы не полный), то такой способ нахождения точки пересечения прямых не подошёл бы.

Зная две точки P и Q прямой l несложно получить её параметрическое уравнение

$$l = P + (P - Q)t = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}}_{a} = v + at$$

Найдём расстояние между l и l_2, зная параметрические уравнения этих прямых.

$$\rho(l, l_2) = \frac{|(a, a_2, v - v_2)|}{|[a, a_2]|} = \frac{\left|\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right|}{\left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right|} = \frac{6}{\sqrt{2^2 + 8^2 + 10^2}} = \frac{6}{\sqrt{168}} = \frac{3}{\sqrt{42}}$$

Ответ: $\frac{3}{\sqrt{42}}$