Линал ФЗ-23 Панфилов Борис БПМИ-216 Волшебное число - 42

$a = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

№ 1.1.

$L: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & -4 & 2 & 3 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{II \to II - I} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{I \to I + II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

Общее решение: $\begin{pmatrix} 6 - x_4 \\ -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\Rightarrow L = \underset{b}{\begin{pmatrix} 6 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + \underbrace{\left\langle \underset{u_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\rangle}_{S}$$

$\rho(a, b+S) = \rho(b-a, S)$ $\quad b - a = \begin{pmatrix} 6 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{7}{2} \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = u_3$

Ортогонализуем систему $u_1, u_2, \underset{u_3}{\overset{\|}{b-a}}$, получим систему f_1, f_2, z, где z и будет искомым расстоянием

$v_1 = u_1 \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_2 = u_2 - \frac{(u_2, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 = u_2 - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}} v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2/5 \\ -1/5 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$v_3 = u_3 - \frac{(u_3, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 - \frac{(u_3, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2 = u_3 - \frac{\frac{13}{4}}{\frac{5}{4}} v_1 - \frac{-27}{55} v_2 =$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{7}{2} \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{13}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{27}{55}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/11 \\ -42/11 \\ 21/11 \\ 16/11 \end{pmatrix}$

Т.к. $\rho(b-a, S) = |v_3|$, $\rho(b-a; S) = \sqrt{\left(-\frac{5}{11}\right)^2 + \left(-\frac{43}{11}\right)^2 + \left(\frac{21}{11}\right)^2 + \left(\frac{16}{11}\right)^2} = \frac{\sqrt{2486}}{11}$

Ответ: $\frac{\sqrt{2486}}{11}$.

1

CamScanner

Прямая: $x_1 = x_2 = 2x_3 = 2x_4$

$$L: \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Прямую можем задать след. образом: $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{a} + \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_1} \rangle$

Теперь зададим плоскость, как „точка + лин. оболочка":

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{I \to I + 2 \cdot II} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Общее решение: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ -1 - x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow L = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b} + \langle \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_3} \rangle$$

$$\rho(a + \langle u_1 \rangle, b + \langle u_2, u_3 \rangle) = \rho(b - a, \langle u_1, u_2, u_3 \rangle)$$

Ортогонализуем систему $u_1, u_2, u_3, \underbrace{b-a}_{u_4}$, чтобы найти расстояние.

$$v_1 = u_1 \sim \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = u_2 - \frac{(u_2, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 = u_2 - \frac{-3}{10} v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{10} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ -2/5 \\ 13/10 \\ 3/10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = u_3 - \frac{(u_3, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 - \frac{(u_3, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2 = u_3 - \frac{0}{*} v_1 - \frac{5}{210} v_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{42} \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17/42 \\ 2/21 \\ -13/42 \\ 39/42 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -17 \\ 4 \\ -13 \\ 39 \end{pmatrix}$$

$$V_4 = u_4 - \frac{(u_4, v_1)}{(v_1, v_1)} - \frac{(u_4, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2 - \frac{(u_4, v_3)}{(v_3, v_3)} v_3 =$$

$$= u_4 - \frac{-3}{10} v_1 - \frac{6}{210} v_2 - \frac{\frac{9}{2}}{1995} v_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{10} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{35} \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{3}{1330} \begin{pmatrix} -17 \\ 4 \\ -13 \\ 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24/95 \\ -28/95 \\ -4/95 \\ 12/95 \end{pmatrix}$$

Т.к. $\rho(b-a, \langle u_1, u_2, u_3 \rangle) = |V_4|$,

$$\rho(b-a, \langle u_1, u_2, u_3 \rangle) = \frac{4\sqrt{95}}{95}$$

Ответ: $\frac{4\sqrt{95}}{95}$

№1.3

$$A = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Можем задать плоскость как точка + лин. оболочка:

$$L = A + \langle B-A, C-A \rangle = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

В виде системы это будет:

$$\cancel{\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = -16 \\ 8x_1 - 4x_3 + x_4 = -26 \end{cases}}$$

~~Ответ:~~

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 1 \\ 8 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \to II - 2 \cdot I} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \\ -x_1 + 2x_2 + 8x_4 = 27 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \\ -x_1 + 2x_2 + 8x_4 = 27 \end{cases}$.