Линал ДЗ-28 Панфилов Борис БПМИ-216 Волшебное число - 4

№1.1.

$$A = \begin{pmatrix}-2 & 6\\ 9 & -2\end{pmatrix}$$

По теореме $A = U\Sigma V^T$, где $\Sigma$ - диаг, а $U, V$ - ортог.

$$AA^T = U\Sigma V^T \cdot V\Sigma^T U^T = U\Sigma^2 U^T$$

$$AA^T = \begin{pmatrix}-2 & 6\\ 9 & -2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2 & 9\\ 6 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}40 & -30\\ -30 & 85\end{pmatrix}$$

Собственные значения 100 и 25.

$V_{100} = Ker(AA^T - 100E)$

$$\begin{pmatrix}-60 & -30\\ -30 & -15\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{pmatrix} \to \text{ФСР: } \begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix} \quad \text{Возьмем } e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$$

$V_{25} = Ker(AA^T - 25E)$

$$\begin{pmatrix}15 & -30\\ -30 & 60\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix} \to \text{ФСР: } \begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix} \quad \text{Возьмем } e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$$

Получаем, что $U = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ $\quad \Sigma = \begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$

Теперь вспомним, что мы ищем разложение в $A = U\Sigma V^T$
решим эту расширенную СЛУ.

$$U\Sigma = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-10 & 10\\ 20 & 5\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}-10 & 10 & -2\sqrt{5} & 6\sqrt{5}\\ 20 & 5 & 9\sqrt{5} & -2\sqrt{5}\end{array}\right) \xrightarrow{II \to II + 2\cdot I} \left(\begin{array}{cc|cc}-10 & 10 & -2\sqrt{5} & 6\sqrt{5}\\ 0 & 25 & 5\sqrt{5} & 10\sqrt{5}\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{array}\right) \Rightarrow V^T = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

Таким образом искомое сингулярное разложение имеет вид $A = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

По теореме ближайшей к $A$ по норме Фробениуса матрицей ранга 1 будет

$$B = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4 & 2\\ 8 & -4\end{pmatrix}$$

№ 1.2

$A = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 13 & 1 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$   Найти разложение $A = U\Sigma V^T$

1) $A^TA = V\Sigma^T U^T U \Sigma V^T = V\Sigma^2 V^T$

$$A^TA = \begin{pmatrix} -8 & 13 & 10 \\ 4 & 1 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 13 & 1 \\ 10 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 333 & 81 \\ 81 & 117 \end{pmatrix}$$

Собственные значения 360 и 90

$V_{360} = \mathrm{Ker}(A^TA - 360E)$

$\begin{pmatrix} -27 & 81 \\ 81 & -243 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ ФСР: $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$   $e_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$V_{90} = \mathrm{Ker}(A^TA - 90E)$

$\begin{pmatrix} 243 & 81 \\ 81 & 27 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ ФСР: $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$   $e_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Получаем, что $V = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$   $\Sigma = \begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Перейдем ~~Перейдем~~ к поиску усеченного разложения $A = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^T \Leftrightarrow A^T = \hat{V}\hat{\Sigma}^T\hat{U}^T$

Найдем $U^T$ решив расширенную систему:

$$\hat{V}\hat{\Sigma}^T = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 18 & -3 & -8 & 13 & 10 \\ 6 & 9 & 4 & 1 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & -30 & -20 & 10 & -20 \\ 6 & 9 & 4 & 1 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{5}{3} \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \Rightarrow \hat{U}^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{U} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Вернемся к полному разложению. Для этого дополним $\hat{U}$ до ортогональной матрицы $3\times 3$: $U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Полное разложение:

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

№1.3

2 Способ.

$$AA^T = U\Sigma V^T V \Sigma^T U^T = U\Sigma^2 U^T$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 13 & 1 \\ 10 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 13 & 10 \\ 4 & 1 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 & -100 & -40 \\ -100 & 170 & 140 \\ -40 & 140 & 200 \end{pmatrix}$$

Собственные значения: 360, 90, 0

$V_{360} = Ker(AA^T - 360E)$

$$\begin{pmatrix} -280 & -100 & -40 \\ -100 & -190 & 140 \\ -40 & 140 & -160 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ФСР}: \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad e_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$V_{90} = Ker(AA^T - 90E)$

$$\begin{pmatrix} -10 & -100 & -40 \\ -100 & 80 & 140 \\ -40 & 140 & 110 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ФСР}: \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$V_0 = Ker(AA^T)$

$$\begin{pmatrix} 80 & -100 & -40 \\ -100 & 170 & 140 \\ -40 & 140 & 200 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ФСР}: \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad e_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Получаем $U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \Sigma = \begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

В этот момент резко перестанем искать полное SVD и начнем искать усеченное. $A = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^T$

$$\hat{U}\hat{\Sigma} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{10} & 2\sqrt{10} \\ 4\sqrt{10} & -\sqrt{10} \\ 4\sqrt{10} & 2\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2\sqrt{10} & 2\sqrt{10} & -8 & 4 \\ 4\sqrt{10} & -\sqrt{10} & 13 & 1 \\ 4\sqrt{10} & 2\sqrt{10} & 10 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow V^T = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Возвращаясь обратно получаем полное сингулярное разл.

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

По теореме, ближайшей к A по норме Фробениуса матрицей ранга 1 будет

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 12 & -4 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$$

## № 1.4

Между определителем квадратной матрицы и её сингулярным разложением есть связь. Они совпадают с точностью до знака, т.к. $A = U\Sigma V^T$, где $U$ и $V$ - ортогональные матрицы. А определитель ортогональной матрицы равен $\pm 1$.

## № 1.5.

Сингулярное разложение вектора $v \in \mathbb{R}^n$ будет выглядеть так:

$$\underset{n\times 1}{v} = \underset{n\times n}{U}\ \underset{n\times 1}{\Sigma}\ \underset{1\times 1}{V^T}, \text{ где}$$

$U \in M_n(\mathbb{R})$ - ортог. матрица

$\Sigma \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$

$V \in M_{1\times 1}(\mathbb{R})$ - ортог матрица $(\pm 1)$