**184*.** Найти все подстановки чисел 1, 2, 3, 4, перестановочные с подстановкой
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

**185.** Найти все подстановки чисел 1, 2, 3, 4, 5, перестановочные с подстановкой
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**186*.** Для любых целых чисел $x$ и $m$, где $m \neq 0$, обозначим через $r(x,m)$ остаток (принимаемый неотрицательным) от деления $x$ на $m$. Доказать, что если $m \geqslant 2$ и $a$ — целое число, взаимно простое с $m$, то соответствие $x \to r(ax,m)$, $x = 1,2,\ldots,m-1$, является подстановкой чисел $1,2,\ldots,m-1$.

**187.** Написать подстановку чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, при которой число $x$ переходит в остаток от деления $5x$ на 9.

## § 3. Определение и простейшие свойства определителей любого порядка

Задачи этого параграфа имеют целью пояснение понятия определителя любого порядка и его простейших свойств, включая равенство нулю определителя, строки которого линейно зависимы, и разложение определителя по строке.

Задачи на развитие навыка вычисления определителей с числовыми элементами, на методы вычисления определителей специального вида, на теорему Лапласа, на умножение определителей и т. д. содержатся в следующих параграфах.

Выяснить, какие из приведенных ниже произведений входят в определители соответствующих порядков и с какими знаками:

**188.** $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$.

**189.** $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$.

**190.** $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$.

**191.** $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$.

**192.** $a_{12}a_{23}a_{34}\ldots a_{n-1,n}a_{kk}$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

**193.** $a_{12}a_{23}\ldots a_{n-1,n}a_{n1}$.

**194.** $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}\ldots a_{2n-1,2n}a_{2n,2n-1}$.

**195.** $a_{11}a_{2,n}a_{3,n-1}\ldots a_{2n,2}$.

**196.** $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64}\ldots a_{3n-2,3n}a_{3n-1,3n-1}a_{3n,3n-2}$.

**197.** Выбрать значения $i$ и $k$ так, чтобы произведение
$$a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$$
входило в определитель 6-го порядка со знаком минус.

**198.** Выбрать значения $i$ и $k$ так, чтобы произведение

$$a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$$

входило в определитель 7-го порядка со знаком плюс.

**199.** Найти члены определителя 4-го порядка, содержащие элемент $a_{32}$ и входящие в определитель со знаком плюс.

**200.** Найти члены определителя

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix},$$

содержащие $x^4$ и $x^3$.

**201.** С каким знаком входит в определитель порядка $n$ произведение элементов главной диагонали?

**202.** С каким знаком входит в определитель порядка $n$ произведение элементов побочной диагонали?

**203.** Пользуясь только определением, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

в котором все элементы по одну сторону от главной диагонали равны нулю.

**204.** Пользуясь только определением, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix},$$

в котором все элементы по одну сторону от побочной диагонали равны нулю.

**205.** Пользуясь только определением, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

**206.** Доказать, что если в определителе порядка $n$ на пересечении некоторых $k$ строк и $l$ столбцов стоят элементы, равные нулю, причем $k+l>n$, то определитель равен нулю.

**207*.** Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = 0,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные числа.

**208.** Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & n-x \end{vmatrix} = 0.$$

**209.** Найти элемент определителя порядка $n$, симметричный элементу $a_{ik}$ относительно побочной диагонали.

**210.** Найти элемент определителя порядка $n$, симметричный элементу $a_{ik}$ относительно «центра» определителя.

**211.** Назовем место элемента $a_{ik}$ определителя четным или нечетным, смотря по тому, будет ли сумма $i+k$ четна или нечетна. Найти число элементов определителя порядка $n$, стоящих на четных и на нечетных местах.

**212.** Как изменится определитель порядка $n$, если первый столбец переставить на последнее место, а остальные столбцы передвинуть влево, сохраняя их расположение?

**213.** Как изменится определитель порядка $n$, если его строки написать в обратном порядке?

**214.** Как изменится определитель, если каждый его элемент заменить элементом, симметричным с данным относительно «центра» определителя.

**215*.** Как изменится определитель, если каждый его элемент заменить элементом, симметричным с данным относительно побочной диагонали.

**216*.** Определитель называется *кососимметрическим*, если элементы, симметрично лежащие относительно главной диагонали, отличаются знаком, т.е. $a_{ik} = -a_{ki}$ для любых индексов $i$, $k$.

Доказать, что кососимметрический определитель нечетного порядка $n$ равен нулю.

**217*.** Доказать, что определитель, элементы которого, симметрично лежащие относительно главной диагонали, являются сопряженными комплексными (в частности, действительными) числами, есть число действительное.

**218.** При каких значениях $n$ все определители порядка $n$, элементы которых удовлетворяют условиям

$$(\alpha)\ a_{jk} \text{ — действительное число при } j > k,$$

$$(\beta)\ a_{kj} = ia_{jk} \text{ при } j \geqslant k\ (i = \sqrt{-1}),$$

будут действительными?

**219.** При каких $n$ все определители порядка $n$, элементы которых удовлетворяют условиям $(\alpha)$ и $(\beta)$ предыдущей задачи, будут чисто мнимыми?

**220.** Показать, что при нечетном $n$ все определители порядка $n$, элементы которых удовлетворяют условиям $(\alpha)$ и $(\beta)$ задачи 218, имеют вид $a(1 \pm i)$, где $a$ — действительное число.

**221.** Как изменится определитель порядка $n$, если у всех его элементов изменить знак на противоположный?

**222*.** Как изменится определитель, если каждый его элемент $a_{ik}$ умножить на $c^{i-k}$, где $c \neq 0$?

**223*.** Доказать, что в каждый член определителя входит четное число элементов, занимающих нечетное место; элементов же, занимающих четное место, входит четное число, если определитель четного порядка, и нечетное число, если определитель нечетного порядка.

**224*.** Доказать, что определитель не изменится, если изменить знак всех элементов на нечетных местах; если же изменить знак всех элементов на четных местах, то определитель не изменится, если он четного порядка, и изменит знак, если нечетного порядка.

**225.** Доказать, что определитель не изменится, если к каждой строке, кроме последней, прибавить последующую строку.

**226.** Доказать, что определитель не изменится, если к каждому столбцу, начиная со второго, прибавить предыдущий столбец.

**227.** Доказать, что определитель не изменится, если из каждой строки, кроме последней, вычесть все последующие строки.

**228.** Доказать, что определитель не изменится, если к каждому столбцу, начиная со второго, прибавить все предыдущие столбцы.

**229.** Как изменится определитель, если из каждой строки, кроме последней, вычесть последующую строку, из последней строки вычесть прежнюю первую строку?

**230*.** Как изменится определитель, если к каждому столбцу, начиная со второго, прибавить предыдущий столбец и в то же время к первому прибавить последний?

**231.** Как изменится определитель порядка $n$, если его матрицу повернуть на $90^\circ$ вокруг «центра»?

**232.** Чему равен определитель, у которого сумма строк с четными номерами равна сумме строк с нечетными номерами?

**233.** Найти сумму всех определителей порядка $n \geqslant 2$, в каждом из которых в каждой строке и каждом столбце один элемент равен единице, а остальные равны нулю. Сколько всех таких определителей?

**234.** Найти сумму определителей порядка $n \geqslant 2$:

$$\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{1\alpha_1} & a_{1\alpha_2} & \ldots & a_{1\alpha_n} \\ a_{2\alpha_1} & a_{2\alpha_2} & \ldots & a_{2\alpha_n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n\alpha_1} & a_{n\alpha_2} & \ldots & a_{n\alpha_n} \end{vmatrix},$$

где сумма берется по всем значениям $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, независимо друг от друга изменяющимся от 1 до $n$.

**235.** Пусть все элементы определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

являются целыми однозначными числами. Обозначим через $N_l$ число, записанное цифрами $i$-й строки определителя с сохранением их расположения ($a_{in}$ — число единиц, $a_{i,n-1}$ — число десятков и т. д.). Доказать, что значение определителя делится на наибольший общий делитель чисел $N_1, N_2, \ldots, N_n$.

**236.** Разлагая по 3-й строке, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

**237.** Разлагая по 2-му столбцу, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

Вычислить определители:

**238.** $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$. **239.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. **240.** $\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$.

**241.** Пусть $M_{ij}$ — минор элемента $a_{ij}$ определителя $D$. Показать, что если $D$ — симметрический определитель или кососимметрический определитель нечетного порядка, то $M_{ij} = M_{ji}$; если же $D$ — кососимметрический определитель четного порядка, то $M_{ij} = -M_{ji}$.

**242.** Пусть $D$ — определитель порядка $n > 1$, $D'$ и $D''$ — определители, полученные из $D$ заменой каждого элемента $a_{ij}$ на его алгебраическое дополнение $A_{ij}$ для $D'$ и на его минор $M_{ij}$ для $D''$. Доказать, что $D' = D''$. Определитель $D'$ называется взаимным (или присоединенным) к $D$. О выражении $D'$ через $D$ см. задачу 506.

**243.** Вычислить следующий определитель, не развертывая его:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \dfrac{b+c}{2} & \dfrac{c+a}{2} & \dfrac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}.$$

Не развертывая определителей, доказать следующие тождества:

**244.*** $$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

**245.*** $$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

**246.*** $$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{i-1} & a_i^{1+1} & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{i-1} & a_2^{i+1} & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{i-1} & a_n^{i+1} & \dots & a_n^n \end{vmatrix} =$$

$$= \left( \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{n-i}} a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_{n-i}} \right) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

где сумма берется по всем сочетаниям из $n$ чисел $1, 2, 3, \dots, n$ по $n - i$.

Пользуясь свойствами определителей, включая разложение по строке или столбцу, доказать тождества:

**247*.** $$\begin{vmatrix} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} & \sin\frac{\alpha+\beta}{2} & \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos\frac{\beta-\gamma}{2} & \sin\frac{\beta+\gamma}{2} & \cos\frac{\beta+\gamma}{2} \\ \cos\frac{\gamma-\alpha}{2} & \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} & \cos\frac{\gamma+\alpha}{2} \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2}[\sin(\beta-\alpha)+\sin(\gamma-\beta)+\sin(\alpha-\gamma)].$$

**248.** $$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \sin\beta\cos\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \sin\gamma\cos\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix} =$$
$$= \sin(\alpha-\beta)\cos\alpha\cos\beta + \sin(\beta-\gamma)\cos\beta\cos\gamma + \sin(\gamma-\alpha)\cos\gamma\cos\alpha.$$

**249.** $$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3.$$

**250.** $$\begin{vmatrix} \frac{1}{a+x} & \frac{1}{a+y} & 1 \\ \frac{1}{b+x} & \frac{1}{b+y} & 1 \\ \frac{1}{c+x} & \frac{1}{c+y} & 1 \end{vmatrix} = \frac{(a-b)(a-c)(b-c)(x-y)}{(a+x)(b+x)(c+x)(a+y)(b+y)(c+y)}.$$

**251.** $$\begin{vmatrix} \frac{1}{a+x} & \frac{1}{a+y} & \frac{1}{a+z} \\ \frac{1}{b+x} & \frac{1}{b+y} & \frac{1}{b+z} \\ \frac{1}{c+x} & \frac{1}{c+y} & \frac{1}{c+z} \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{(a-b)(a-c)(b-c)(x-y)(x-z)(y-z)}{(a+x)(b+x)(c+x)(a+y)(b+y)(c+y)(a+z)(b+z)(c+z)}.$$

**252.** $$\begin{vmatrix} a^2+(1-a^2)\cos\varphi & ab(1-\cos\varphi) & ac(1-\cos\varphi) \\ ba(1-\cos\varphi) & b^2+(1-b^2)\cos\varphi & bc(1-\cos\varphi) \\ ca(1-\cos\varphi) & cb(1-\cos\varphi) & c^2+(1-c^2)\cos\varphi \end{vmatrix} = \cos^2\varphi$$
при $a^2+b^2+c^2 = 1$.

**253*.** $$\begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\cos\theta & -\sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta \\ \cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi\cos\theta & -\cos\psi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1.$$

**254.** $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ c- & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$

**255.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ac+2d.$

**256*.** $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & -1 & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 & -1 & u \\ x & y & z & u & 0 \end{vmatrix} =$

$$= -4[x^2+y^2+z^2+u^2-2(xy+xz+xu+yz+yu+zu)].$$

## § 4. Вычисление определителей с числовыми элементами

Вычислить определители:

**257.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$. **258.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. **259.** $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

**260.** $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$. **261.** $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

**262.** $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$. **263.** $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

**264.** $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$. **265.** $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$. **266.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

**267.** $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$. **268.** $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$. **269.** $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

**270.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$. **271.** $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$. **272.** $\begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix}$.

**273.** $\begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}$. **274.** $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$.

**275.** $\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$. **276*.** $\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ 3 & -12 & \frac{21}{5} & 15 \\ \frac{2}{3} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix}$.

**277.** $\begin{vmatrix} \frac{3}{4} & 2 & -\frac{1}{2} & -5 \\ 1 & -2 & \frac{3}{2} & 8 \\ \frac{5}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{2} & \frac{12}{5} \end{vmatrix}$. **278.** $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$.

## § 5. Методы вычисления определителей $n$-го порядка

Введение. Метод вычисления определителей с числовыми элементами, состоящий в обращении в нуль всех элементов некоторой строки (столбца), кроме одного, и последующем понижении порядка, становится весьма громоздким в случае определителей данного порядка с буквенными элементами. Этот путь в общем случае приводит к выражению, которое получается вычислением определителя прямым применением его определения. Тем более этот метод неудобен в случае определителя с буквенными или числовыми элементами и произвольным порядком $n$.

Общего метода для вычисления таких определителей не существует (если не считать выражения определителя, данного в его определении).

Вычислить следующие определители приведением к треугольному виду[1]:

**279.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.
**280.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n & n & \end{vmatrix}$.

**281.** $\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}$.
**282.** $\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1-b_1 & a_1 \\ a_2 & \dots & a_2-b_2 & a_2 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n-b_n & \dots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}$.

**283.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$.
**284.** $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$.

**285*.** $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix}$.

**286.** Вычислить определитель порядка $n$, элементы которого заданы условиями $a_{ij} = \min(i, j)$.

**287.** Вычислить определитель порядка $n$, элементы которого заданы условиями $a_{ij} = \max(i, j)$.

**288*.** Вычислить определитель порядка $n$, элементы которого заданы условиями $a_{ij} = |i - j|$.

Вычислить следующие определители методом выделения линейных множителей:

**289.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix}$.
**290.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n+1-x \end{vmatrix}$.

---

[1] Всюду, где по виду определителя нельзя узнать его порядок, предполагается, что порядок равен $n$.

**291.** $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \ldots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & x \end{vmatrix}$.  **292.** $\begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}$.

**293.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$.  **294*.** $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$.

Вычислить следующие определители методом рекуррентных соотношений:

**295*.** $\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \ldots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \ldots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \ldots & a_3b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \ldots & a_nb_n \end{vmatrix}$.  **296*.** $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x_n \end{vmatrix}$.

**297.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}$.  **298.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a_n \end{vmatrix}$.

**299.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 \end{vmatrix}$.  **300.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 3 \end{vmatrix}$.  **301.** $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \ldots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 7 \end{vmatrix}$.

**302.** $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 3 \end{vmatrix}$.  **303.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

**304.** $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

Вычислить определители методом представления их в виде суммы определителей:

**305*.** $\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x+a_n \end{vmatrix}$. **306*.** $\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & x_n \end{vmatrix}$.

**307*.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & x_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & x_n \end{vmatrix}$. **308.** $\begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1n_n \\ a_2b_1 & x_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & x_3 & \dots & a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}$.

Вычислить определители[1]:

**309.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$.

**310.** $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$. **311.** $\begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 3 & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & n-1 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

**312.** $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$. **313.** $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$.

**314.** $\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix}$. **315.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -n & \dots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

[1] Всюду, где неясно, чему равен порядок определителя, он предполагается равным $n$.

**316.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$. **317.** $\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & n & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & n & \ldots & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & n \end{vmatrix}$. **318.** $\begin{vmatrix} a & b & \ldots & b & b \\ b & a & \ldots & b & b \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ b & b & \ldots & a & b \\ b & b & \ldots & a & b \end{vmatrix}$.

**319.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 3 \end{vmatrix}$. **320.** $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}$.

**321.** $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \ldots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \ldots & a_{n-1} & 1 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n & 1 \end{vmatrix}$. **322.** $\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & x \end{vmatrix}$.

**323.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & x \end{vmatrix}$. **324.** $\begin{vmatrix} n & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ n-1 & x & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ n-2 & 0 & x & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \ldots & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & x \end{vmatrix}$.

**325.** $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \ldots & x^n \\ a_{11} & 1 & x & x^2 & \ldots & x^{n-1} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & x & \ldots & x^{n-2} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \ldots & 1 \end{vmatrix}$.

**326.** $\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & \ldots & C_n^{n-1} & C_n^n \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \ldots & C_{n-1}^{n-1} & 0 \\ 1 & C_{n-2}^1 & C_{n-2}^2 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & C_1^1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$. **327.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \ldots & x & x \\ 1 & x & 0 & \ldots & x & x \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 1 & x & x & \ldots & 0 & x \\ 1 & x & x & \ldots & x & 0 \end{vmatrix}$.

**328.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \ldots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \ldots & 3^n \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \ldots & (n+1)^n \end{vmatrix}$.