Задача 1.1. Напишите уравнение плоскости по её параметрическим уравнениям:

$$x = u - 6v,\ y = y = 1 + 2u,\ z = 2 + 3u$$

Задача 1.2. Найдите каноническое уравнение прямой пересечения двух плоскостей:

$$x + 2y - z + 2 = 0 \text{ и } 2x + y + z + 1 = 0.$$

Задача 1.3. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $(4, 3, 2)$, $(5, 2, 4)$ и $(1, -1, 1)$.

Задача 1.4. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $(1, 2, 1)$ и $(3, 1, 1)$ и параллельной вектору $(-1, 1, 2)^T$.

Задача 1.5. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M = (1, 2, -2)$ и содержащей прямую

$$l:\ \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$$

Задача 1.6. Напишите уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{3}, \quad \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{3}$$

Задача 1.7. Установите взаимное расположение двух прямых:

$$l_1 : x = 3 + t,\ y = -1 + 2t,\ z = 4,$$

$$l_2 : \begin{cases} x - 3y + z = 0, \\ x + y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

Задача 1.8. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $(1, 2, -1)$ и пересекающей прямые

$$l_1 : \begin{cases} x - z = 0, \\ 3x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \qquad l_2 : \begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ x + 2y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

Задача 1.9. Найдите расстояние от точки $M = (1, 3, 5)$ до прямой

$$l : \begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0, \\ 3x + y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

Задача 1.10. Найдите расстояние между прямыми

$$l_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3},$$

$$l_2 : \begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

Задача 1.11. Найдите расстояние от точки $(1, 2, 3)$ до плоскости

$$x = 1 - 2u + 3v,\ y = 2 - u - v,\ z = v$$

Задача 1.12. Найдите угол между прямой

$$l : \begin{cases} x = 5 + 4t, \\ y = 1 + t, \\ z = 2 - t \end{cases}$$

и плоскостью $7x + 4y - 4z + 5 = 0$.

Задачи 1.12 и 1.13. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E — середина ребра AA_1, а точка F — середина ребра B_1C_1. Найдите расстояние между прямыми CE и BF, а также угол между прямой CE и плоскостью ACF.

Задача 2.1. Методами аналитической геометрии (!) докажите, что шесть плоскостей, каждая из которых проходит через ребро тетраэдра и середину противоположного ему ребра, пересекаются в одной точке.

Указание. Есть несколько способов решить эту задачу. Можно честно выстрадать её, поместив одну вершину тетраэдра на ось z, а другие расположив в плоскости xOy (тут придётся повозится с синусами и косинусами). Можно удобно вложить тетраэдр в четырёхмерное пространство (мы обсуждали на семинаре, как); правда, тогда писать уравнения плоскостей станет чуть сложнее: ведь формулы с векторным произведением, которые мы писали на семинаре, утратят смысл. Можно заметить, что всё то, о чём идёт речь в задаче, не меняется при растяжении или сжатии к плоскости одной из граней (хотя лучше бы объяснить, почему, конечно; тогда тетраэдр можно удобно расположить и в трёхмерном пространстве.

Задача 2.2. Даны две прямые:

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}, \qquad \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0. \end{cases}$$

Используя только буквы, данные в условии, сформулируйте необходимые и достаточные условия для того, чтобы эти прямые: (а) скрещивались, (б) пересекались в одной точке, (в) были параллельны.

Задача 2.3. Методами аналитической геометрии (!) найдите геометрическое место середин отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых.

Задача 2.4. Найдите координаты точки, делящей отрезок AB, $A=(x_0,y_0,z_0)$, $B=(x_1,y_1,z_1)$ в отношении $\frac{\lambda}{\mu}$.

Задача 2.5. Через точку P $(-1,2,3)$ проведите плоскость так, чтобы в треугольнике, отсекаемом на ней плоскостями координат (то есть в треугольнике, вершины которого — это точки пересечения плоскости с осями), точка P была точкой пересечения медиан.

И несколько задач про геометрию на плоскости

Задача 2.6. Известно, что окружность с центром (x_0,y_0) радиуса R задаётся уравнением $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ Как написать уравнение окружности, проходящей через точки (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3)?

Задача 2.7. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон BC, CA и AB в точках P, Q и R соответственно. Методами аналитической геометрии докажите, что прямые AP, BQ и CR проходят через одну точку.

Задача 2.8. Стороны BC, CA и AB треугольника ABC разделены точками P, Q и R соответственно в соотношениях

$$\frac{BP}{PC}=\lambda, \qquad \frac{CQ}{QA}=\mu, \qquad \frac{AR}{RB}=\nu$$

Сформулируйте условия, при которых AP, BQ и CR (а) проходят через одну точку и (б) параллельны.

Указание. Поскольку в задаче не фигурируют длины или углы, нет никакой нужды придерживаться декартовой системы координат (=ортогонального базиса). Вы можете выбрать за начало координат любую точку, а за базис любые два удобных вам вектора, которые из неё выходят.