$$X^{in} = X^{out}$$

Задачи 1.1-1.4. Из скана задача 1054 (8, 11, 10, 12).

Задача 1.5. Пусть U и W — подпространства в $\mathbb{R}^{20}$, причём $\dim U = 7$, $\dim W = 15$. Какие значения могут принимать $\dim(U+W)$ и $\dim(U \cap W)$? Не забудьте, что нужна не только оценка, но и примеры! А чтобы не рисовать векторы длины 20, вы можете воспользоваться базисными векторами $e_1, \ldots, e_{20}$.

Проекции их нахождение. Рассмотрим простой случай, когда $V = U \oplus W$. Тогда для любого $v \in V$ существует единственное разложение $v = u + w, u \in U, w \in W$. В этой ситуации вектор u называется *проекцией вектора v на подпространство U вдоль подпространства W*.

Пусть теперь у нас есть конкретный пример, скажем,

$$\mathbb{R}^3 = \underbrace{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle}_{=U} \oplus \underbrace{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}_{=W}$$

Ясно, что U и W линейно независимы: ведь объединение их базисов является линейно независимой системой векторов. Найдём проекцию вектора $v = (1,1,1)^T$ на U вдоль W.

Обозначим через u_1, u_2 указанный выше базис U, а через w_1 указанный выше базис W. Тогда, так как их объединение u_1, u_2, w_1 является базисом $\mathbb{W}^3$, существует единственное разложение $v = x_1u_1 + x_2u_2 + y_1w_1$, где x_1, x_2, y_1 — некоторые скаляры. Тогда воистину x единственным образом представляется в виде

$$x = \underbrace{(x_1u_1 + x_2u_2)}_{\in U} + \underbrace{y_1w_1}_{\in W}$$

так что проекцией v на U вдоль W является вектор $x_1u_1 + x_2u_2$. Осталось найти коэффициенты. Для этого мы представляем равенство $x_1u_1 + x_2u_2 + y_1w_1 = v$

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & w_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = v$$

Подставляем числа:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Её решением является вектор $(6, -3, 1)^T$. Таким образом, проекция v на U вдоль W равна

$$x_1u_1 + x_2u_2 = 6\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Нелишне, кстати, проверить себя. Если всё ок, то вектор

$$v - (x_1u_1 + x_2u_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

должен быть равен y_1w_1. Ну, вроде, действительно равен.

Задачи 1.6. и 1.7. Пусть

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle, \qquad W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \rangle$$

Докажите, что $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$. Найдите проекцию вектора $v = (1, 2, -2, -1)^T$ на U вдоль W.

Задача 1.8. Пусть

$$U: \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases}, \qquad W: \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Не находя базисов этих подпространств, докажите, что $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Указание. Если $\dim \mathbb{R}^4 = \dim U + \dim W$, причём $U \cap W = 0$, то $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$. Первое вы легко проверите, если вспомните, что $\dim \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} = n - \mathrm{rk} A$. Ну, а искать пересечение подпространств, заданных системами линейных уравнений, вы тоже должны уметь.

Задача 1.9. Для подпространств из предыдущей задачи найдите проекцию вектора $v = (-1, 1, 0, 1)^T$ на U вдоль W.

Указание. А вот тут вам, наверное, лучше всё-таки найти базисы U и W; впрочем это несложно делается с помощью ФСР.

Задача 1.10. Пусть

$$U_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle, \qquad U_2: \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_3 - x_5 = 0 \end{cases}, \qquad U_3 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

Докажите, что $\mathbb{R}^5 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$. Докажите, что $\mathbb{R}^5 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$.

Указание. Найдите базисы этих подпространств и докажите, что объединение этих базисов является базисом $\mathbb{R}^5$ (что равносильно тому, что матрица, составленная из векторов этого базиса имеет ранг 5 — ну, или, что то же самое, она невырождена).

Задача 2.1. Пусть U и W — подпространства конечномерного векторного пространства V. Докажите, что если $\dim(U + W) = 1 + \dim(U \cap W)$, то сумма $U + W$ совпадает с одним из подпространств U и W, а пересечение $U \cap W$ — с другим.

Задача 2.2. Докажите, что

$$\dim((U + V) \cap W) + \dim(U \cap V) = \dim((V + W) \cap U) + \dim(V \cap W)$$

Указание. Вспомните формулу, связывающую размерности суммы и пересечения.

Задача 2.3. Докажите, что

$$U \cap (V + (U \cap W)) = (U \cap V) + (U \cap W)$$

Задача 2.4. Вы уже должны были привыкнуть к тому, что зная размерности двух подпространств и размерность их пересечения, вы можете запросто узнать размерность суммы. В этой задаче вы попробуете разобраться, так ли это просто для случая, когда подпространства три.

Пусть U_1, U_2, U_3 — три подпространства пространства V. Допустим, что вам известны их размерности, а также размерности всевозможных их пересечений: $U_1 \cap U_2 \cap U_3$, $U_1 \cap U_2$, $U_1 \cap U_3$, $U_2 \cap U_3$. Можете ли вы найти размерность $U_1 + U_2 + U_3$?

Указание. В этой задаче вам нужно либо ответить "да" и придумать (и желательно доказать) формулу, связывающую размерность суммы с размерностями подпространств и их всевозможных пересечений, либо ответить "нет" и привести примеры двух троек подпространств U_1, U_2, U_3 и W_1, W_2, W_3, для которых $\dim U_i = \dim W_i$, $\dim(U_i \cap U_j) = \dim(W_i \cap W_j)$ и $\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) = \dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3)$, но $\dim(U_1 + U_2 + U_3) \neq \dim(W_1 + W_2 + W_3)$. Во втором случае попробуйте понять, какие ещё сведения нужны для того, чтобы можно было найти размерность суммы.

Задача 2.5. Пусть U — подпространство симметричных матриц, W — подпространство верхненильтреугольных матриц (то есть верхнетреугольных с нулями на диагонали) в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ (то есть в пространстве матриц $n \times n$ с действительными коэффициентами). Докажите, что $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) = U \oplus W$. Найдите проекцию матрицы E_{31} (это матричная единица) на U вдоль W.

Задача 2.6. Найдите какое-нибудь подпространство в $\mathbb{R}^4$ такое, что проекция вектора $(1, 1, 1, 1)^T$ вдоль него на

$$U: \begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

равна $(1, -1, -1, 0)^T$. Обязательно объясните ответ!

Задача 2.7. Найдите какие-нибудь подпространства U и W в $\mathbb{R}^4$ такие, что проекции вектора $(1, 1, 1, 1)^T$ вдоль U на W и вдоль W на U равны $(1, 0, 1, -1)^T$ и $(0, 1, 0, 2)$ соответственно. Обязательно объясните ответ!