КР №2 по линалу. Напоминание.

Алина Лозовская ПМИ 205

Задание подпространств системами линейных уравнений

F^n мы можем задать как линейную оболочку системы векторов (I) или как множество решение ОСЛУ (II)

Переход от I к II: записать векторы в строки, найти ФСР, координаты ФСР – коэффициеты ОСЛУ

Переход от II к I: найти ФСР

Сумма и пересечение двух подпространств векторного пространства

U, W заданы способом I – $U + W = \langle u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m \rangle$ и выделить линейно независимые векторы.

U, W заданы способом II – $U \cap W$ = записать все уравнения U и W в одно большое. Его базис – ФСР объединенной системы уравнений.

Матрицы перехода, преобразование координат вектора при замене базиса

$e' = e \cdot C$ – матрица перехода от одного базиса к другому, тогда координаты вектора меняются так (проще выводить каждый раз):

$v = e' \cdot x' = e \cdot x \implies (e \cdot C) \cdot x' = e \cdot x \implies Cx' = x \implies x' = C^{-1}x$

Линейные отображения и их матрицы

Пусть есть линейное отображение $\varphi\colon V \to W$, $e = (e_1 \dots e_n)$ – базис V, $f = (f_1 \dots f_m)$ – базис W.

Тогда $A(\varphi, e, f) = Mat_{m \times n} = (\varphi(e_1) \dots \varphi(e_n))$ в координатах базиса f.
То есть: $(\varphi(e_1) \dots \varphi(e_n)) = (f_1 \dots f_m) \cdot A$

С помощью матрицы лин. отображения удобно считать в координатах.

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$
$$\varphi(v) = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m$$
$$\implies \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Как меняется матрица линейного отображения при смене базисов?

$$e' = e \cdot C, f' = f \cdot D, A = A(\varphi, e, f)$$
$$\implies A' = A(\varphi, e', f') = D^{-1}AC$$

Нахождение базиса ядра и базиса образа линейного отображения, приведение матрицы линейного отображения к диагональному виду с единицами и нулями на диагонали

Базис $Ker\varphi$ – ФСР $Ax = 0$, где $A = A(\varphi, e, f)$ (в координатах).

Пусть $(e_1 \dots e_k)$ - базис ядра, дополним его до базиса всего пространства V: $(e_1 \dots e_k, e_{k+1}, \dots e_n)$, тогда $\varphi(e_{k+1}, \dots, \varphi(e_n))$ – базис $Im\varphi$. То есть базис образа (в координатах) – столбцы "главных неизвестных"матрицы A.

Другой алгоритм поиска базиса $Im\varphi$: найти базис линейной оболочки столбцов матрицы A.

Приведение матрицы к диагональному виду с единицами и нулями на диагонали.
Найдем базис ядра: $(e_{k+1} \dots e_n)$, дополним до базиса всего пространства V векторами $(e_1 \dots e_k)$; возьмем $\varphi(e_1)...\varphi(e_k)$, дополним до базиса всего пространства W векторами $(f_{k+1} \dots f_m)$.
Тогда в базисах $(e_1 \dots e_k, e_{k+1} \dots e_n)$ пространства V и $(\varphi(e_1)...\varphi(e_k), \dots, f_{k+1}, \dots, f_m)$ пространства W матрица линейного отображения φ будет иметь искомый вид.

Линейные функции и двойственные базисы

Линейная функция – просто частный случай линейного отображение, полезно помнить про изоморфизм с строкой.

Базис, двойственный базису e, – это такой базис ε, что

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} = E$$

Матрица перехода между двойственными базисами.
Если $e' = e \cdot C$, то $\varepsilon = C \cdot \varepsilon' \iff \varepsilon' = C^{-1} \cdot \varepsilon$

Билинейные функции, квадратичные формы и их матрицы

Билинейная форма – отображение $\beta\colon V \times V \to F$

Если $e = (e_1 \dots e_n)$ – базис V, то матрица б. ф. $B = B(\beta, e), b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$

Вычисление значений билинейной формы в координатах:

$$\beta(x, y) = x^T B y = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum b_{ij} x_i y_j$$

Квадратная форма $\beta(x,x) = Q_\beta(x) = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum b_{ii}x_i^2 + \sum(2b_{ij})x_ix_j$

Приведение квадратичной формы к каноническому и нормальному виду

Как мы уже знаем, $x = C \cdot x' \iff x' = C^{-1} \cdot x$. Тогда $B' = C^TBC$.

Метод Лагранжа – выделять полные квадраты, дает в итоге матрицу C^{-1} (выражение новых координат через старые).

Симметричный Гаусс – преобразованиями строк и симметричным преобразованием столбцов приводим матрицу к улучшенному ступенчатому виду. Тогда слева от черты получаем C^T (выражение старых координат через новые).

Метод Якоби – считаем угловые миноры, тогда канонический вид будет $\delta_1 x_1'^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1}x_2'^2 + \ldots + \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}x_n'^2$

Исследование квадратичных форм на положительную и отрицательную определённость, а также определение нормального вида в зависимости от значений параметра

Положительная определенность – нормальный вид $x_1^2 + ... + x_n^2$. Положительная определенность – нормальный вид $-x_1^2 - ... - x_n^2$.

Критерий Сильвестра (положительной определенности): $Q > 0 \iff \delta_k > 0 \forall k = 1\ldots n$

Критерий отрицательной определенности: $Q < 0 \iff \delta_k < 0$ если k – нечётно, и $\delta_k > 0$, если k – четно.

Если есть параметр, лучше закидывать его в последнюю переменную (например, меняя переменные местами) и применять метод Якоби.

Евклидовы пространства

$$|x| = \sqrt((x,x))$$
$$(x,y) = |x| \cdot |y| \cdot \cos\alpha$$

Матрица Грама:

$$G(v_1 \ldots v_k) = \begin{pmatrix} (v_1,v_1) & \dots & (v_1,v_k) \\ & \dots & \\ (v_k,v_1) & \dots & (v_k,v_k) \end{pmatrix}$$

Как изменяется матрица Грама при изменении системы векторов?

$$(v_1', \ldots, v_n') = (v_1, \ldots, v_n) \cdot C \implies G(v_1', \ldots, v_n') = C^TGC$$

G - матрица Грама $\iff$ G – симметрична и неотрицательно определенная.

Найти систему векторов, в которой данная матрица – матрица Грама:

1. Найдем симметричным Гауссом или Лагранжем матрицу С, тогда $C^TAC = D$, где $D = diag(d_1, \dots, d_k)$.

2. Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ – стандартный базис. Тогда система векторов с матрицей Грама D – это $(f_1, \dots, f_k)$, где $f_i = \sqrt{d_i} e_i$.

3. Значит, у системы векторов $(f_1, \dots, f_k)C^{-1}$ матрицей Грама будет как раз $(C^{-1})^T D(C^{-1}) = A$

$S = \{v_1, \dots, v_k\}, S \subseteq E$
Ортогональное дополнение S – это $S^\perp = \{x \in E \mid (x, y) = 0 \forall y \in S\}$. Базис ортогонального дополнения: ФСР ОСЛУ $(x, v_i) = 0\ \forall i$, то есть записать $v_1 \dots v_k$ в строки матрицы и найти ФСР.

Ортогональная система векторов $v_1 \dots v_k$ – $(v_i, v_j) = 0$ при $i \neq j$
Ортонормированная система векторов $v_1 \dots v_k$ – ортогональная система, где $|v_i| = 1$

$(e_1 \dots e_n)$ – ортогональный базис, тогда $\forall v = \frac{(v,e_1)}{(e_1,e_1)} e_1 + \dots + \frac{(v,e_n)}{(e_n,e_n)} e_n$

Метод ортогонализации Грама-Шмидта

Ортогонализуем базис $e_1 \cdot e_k$ (по сути на каждом шаге мы считаем проекцию нашего вектора на предыдущие и берем его ортогональную составляющую ort):

$$
\begin{aligned}
&f_1 = e_1 \\
&f_2 = e_2 - \frac{(e_2, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 \\
&f_3 = e_3 - \frac{(e_3, f_1}{(f_1, f_1)} f_1 - \frac{(e_3, f_2}{(f_2, f_2)} f_2 \\
&\dots \\
&f_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(e_k, f_i}{(f_i, f_i)} f_i
\end{aligned}
$$

Если в какой-то момент f_i равен нулю, то это значит, что у нас была линейно зависимая система, просто забиваем и выкидываем этот вектор.

Если надо дополнить систему до ортогонального базиса, есть два пути:

1. Найти базис в $\langle e_1 \dots e_k \rangle^\perp$ и ортогонализовать

2. Дополнить как-то и ортогонализовать

Ортогональная проекция вектора на подпространство

$E = S \oplus S^\perp \implies v = x + y$
$x =: pr_S v$ – ортогональная проекция
$y =: ort_S v$ – ортогональная составляющая

Полезно держать в голове двухмерную картинку, тогда:
$pr_S v = ort_{S^\perp v}$
$ort_S v = pr_{S^\perp v}$

Формулы для проекции:

1. Если $e_1 \dots e_k$ *ортогональный* базис, то

$$pr_S v = \sum_{i=1}^{k} \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$$

2. Если $a_1 \dots a_k$ какой-то базис и $A = (a_1 \dots a_k)$

$$pr_S v = A(A^T A)^{-1} A^T v$$

Объём k-мерного параллелепипеда

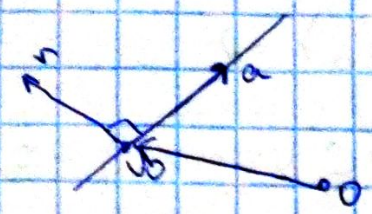
$volP(a_1 \dots a_k) = volP(a_1 \dots a_{k-1}) \cdot |h|$

$volP(a_1 \dots a_k) = \sqrt{detG(a_1 \dots a_k)}$

Только при $k = n$! Если $(e_1 \dots e_n)$ - ортонормированный базис и $(a_1 \dots a_n) = (e_1 \dots e_n)A$, то $volP(a_1 \dots a_k) = |detA|$

Прямые в $\mathbb{R}^2$

1) $Ax+By=C$, $(A,B)\neq 0$
2) $(n, v-v_0)=0$
3) $v=v_0+at$ — парам. уравнение



1) => 2) $n=(A,B)$, v_0 - частное решение

2) => 1) $n=(A,B)$, $v_0=(x_0,y_0) \Rightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$

1) => 3) v_0 - частное решение
$a=(-B,A)$

3) => 1)
$$\begin{cases} x=x_0+a_1t \\ y=y_0+a_2t \end{cases} \Rightarrow \frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}$$
$$\Leftrightarrow a_2(x-x_0)=a_1(y-y_0)$$

- $v_0=(7,0)$, $a=\{-4,2\} \Rightarrow \dfrac{x-7}{-4}=\dfrac{y-0}{2}$

Ур-ние прямой через 2 различ. точки

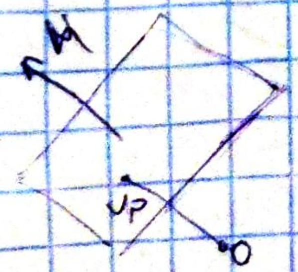
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 \end{vmatrix}=0 \qquad \frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y_1-y_0}{y_1-y_0} \qquad a=(x_1-x_0, y_1-y_0)$$

Пример: $(2,3)$, $(-4,-6)$ $\begin{vmatrix} x-2 & y-3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 3x-2y=0$

Плоскость в $\mathbb{R}^3$

1) $Ax+By+Cz=D$
2) $(v-v_0, n)=0$
3) $v=v_0+at+bs$ парам. уравн.

напр. векя



1) => 2) $n = (A, B, C)$ v_0 частное реш

2) => 1) $n = (A, B, C)$, $v_0 = (x_0, y_0, z_0) \Rightarrow$

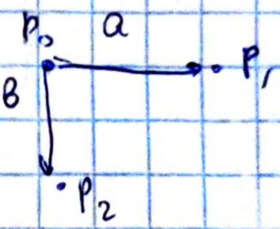
$\Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

1) => 3) общее решение $v = v_0 + t_1 a + t_2 b$

3) => 2) $n = [a, b]$

Плоскость, прох. через 3 заданные точки, не леж. на одной прямой

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$



$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

у-ние через $(3, 7, 2)$ направ. $\{4, 1, 2\}$ и $\{5, 3, 1\}$

$$\begin{vmatrix} x - 3 & y - 7 & z - 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

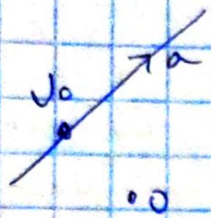
<u>Пример</u>

$$\begin{cases} x = 2 + 3u - 4v \\ y = 4 - v \\ z = 2 + 3u \end{cases}$$

$v_0 = (2, 4, 2)$
$a = (1, 0, 1)$
$b = (4, 1, 0)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Прямые в $\mathbb{R}^3$



1) $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases}$

2) $[v - v_0, a] = 0$ - вект

3) $v = v_0 + at$ - парам

$\uparrow$ напр. вектор

1) => 2) найти общее решение СЛУ

$a = [n_1, n_2]$

3) => 1) $\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3}$

каноническое у-ние прямой

прямая, прох. через 2 точки

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

$\begin{cases} x - 2y + 4z = 0 \\ 3x - 2y + 5z = 0 \end{cases}$ $a = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$ $v_0 = (1, 2, 3)$

Взаимное расположение лин. многообр. в $\mathbb{R}^3$

1) 2 пл-ти

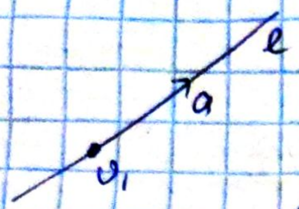
$[n_1, n_2] = 0$:

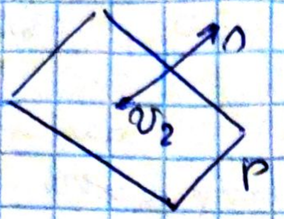
а) совпадают $\begin{cases} [n_1, n_2] = 0 \\ v \in P_2 \end{cases}$

б) параллельны $\begin{cases} [n_1, n_2] = 0 \\ v \notin P_2 \end{cases}$

в) пересекаются по прямой $[n_1, n_2] \neq \vec{0}$

2) прямая и плоскость





$(a,n)=0$:

a) $l \subseteq P \iff \begin{cases}(a,n)=0\\ v_1 \in P\end{cases}$

б) $l \parallel P \iff \begin{cases}(a,n)=0\\ v_1 \notin P\end{cases}$

c) пересекаются в 1 точке

$(a,n) \neq 0$

3) 2 прямые

l_1, l_2 лежат в 1 плоскости:

$[a_1, a_2] = \vec{0}$:

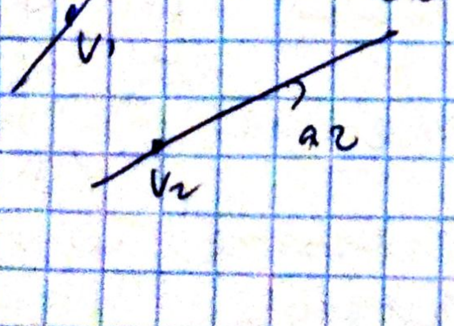
a) $l_1 = l_2 \iff \begin{cases}[a_1, a_2] = \vec{0}\\ v_1 \in l_2\end{cases}$

b) $l_1 \parallel l_2 \iff \begin{cases}[a_1, a_2] = \vec{0}\\ v_1 \notin l_2\end{cases}$

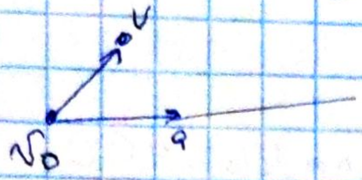
c) $l_1 \cap l_2 \neq \vec{0}$ $\begin{cases}[a_1, a_2] \neq \vec{0}\\ (a_1, a_2, v_1 - v_2) = 0\end{cases}$

d) l_1 и l_2 скрещив

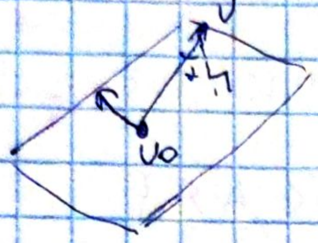
$(a_1, a_2, v_1 - v_2) \neq 0$



Метрические задачи в $\mathbb{R}^3$

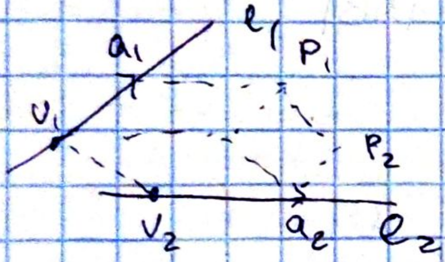


$$\rho(v,l) = |ort_{\langle a\rangle}(v-v_0)| = \frac{|[v-v_0,a]|}{|a|}$$



$$\rho(v,P) = |ort_{\langle n^\perp\rangle}(v-v_0)| = |pr_{\langle n\rangle}(v-v_0)| = \left|\frac{(v-v_0,n)}{(n,n)}n\right| = \frac{|(v-v_0,n)|}{|n|} \quad (= |v-v_0|\cdot\cos\alpha)$$

Расст. между скрещ. прямыми l_1 и l_2

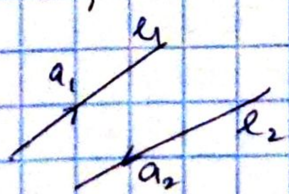


достраиваем до параллел.

$$\rho(l_1,l_2) = \rho(P_1,P_2) = \frac{|(a_1,a_2,v_1-v_2)|}{|[a_1,a_2]|}$$

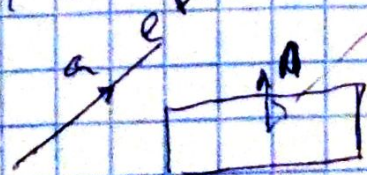
$\boxed{\text{Углы}}$

1) l_1, l_2 – прямые



$$\angle(l_1,l_2) = \min(\angle(a_1,a_2), \angle(a_1,-a_2))$$

2) l – прямая, P – плоскость



$$\angle(P,l) = \frac{\pi}{2} - \angle(l,\langle n\rangle)$$

2) $P_1\ P_2$ – две плоскости

$$\angle(P_1,P_2) = \angle(\langle n_1\rangle, \langle n_2\rangle)$$