ИДЗ - 8 Панфилов Борис Вариант - 17

№1

Пусть $v_{\parallel}$ - ортогональное дополнение

$v_{\perp}$ - проекция.

$$v = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Чтобы дополнить v до ортонормированного базиса, сначала найдем $\langle v \rangle^{\perp}$, то есть ортогональное дополнение к $\langle v \rangle$, и, затем ортонормируем его.

$$\langle v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$(1\ -4\ 4\ 4) \rightsquigarrow \text{ФСР}: \underset{u_1}{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{u_2}{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{u_3}{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \langle v \rangle^{\perp} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$$

Воспользуемся алгоритмом ортогонализации Грама-Шмидта, чтобы ортогонализовать полученное подпр-во.

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 - \frac{(u_2, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 = u_2 - \frac{-16}{17} v_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{16}{17}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{17} \\ \frac{16}{17} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix}$$

// можем рассмотреть в качестве v_2 пропорциональный вектор, т.к. нам важно только направление //

$$v_3 = u_3 - \frac{(u_3, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 - \frac{(u_3, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2 = u_3 - \frac{-16}{17} v_1 - \frac{16}{561} v_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{16}{17}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{16}{561}\begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{33} \\ \frac{16}{33} \\ -\frac{16}{33} \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ -16 \\ 33 \end{pmatrix}$$

Теперь ортонормируем полученные векторы:

$$w_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_3 = \frac{v_3}{|v_3|} = \frac{1}{7\sqrt{33}}\begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ -16 \\ 33 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \frac{1}{\sqrt{561}}\begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{561}}\begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{7\sqrt{33}}\begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ -16 \\ 33 \end{pmatrix}.$

№2

$$U: \begin{cases} -2x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ -5x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases} \qquad v = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Представим U как линейную оболочку векторов. Для этого найдем ФСР системы, которой она задана.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -5 & 5 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & -3 & -5 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{19}{31} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{20}{31} & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \text{ФСР } \underset{u_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{u_2}{\begin{pmatrix} -19 \\ 20 \\ 0 \\ 31 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow U = \langle u_1, u_2 \rangle$$

$pr_{\langle u_1, u_2 \rangle} v = pr_{\langle f_1, f_2 \rangle} v$, где f_1, f_2 - ортогональный базис U

Найдем f_1, f_2 при помощи ортогонализации Грама-Шмидта

$f_1 = u_1$

$$f_2 = u_2 - \frac{(u_2, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 = u_2 - \frac{20}{2} f_1 = \begin{pmatrix} -19 \\ 20 \\ 0 \\ 31 \end{pmatrix} - 10 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ 10 \\ -10 \\ 31 \end{pmatrix}$$

$$pr_{\langle f_1, f_2 \rangle} v = \frac{(v, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 + \frac{(v, f_2)}{(f_2, f_2)} f_2 = \frac{8}{2} f_1 + \frac{-128}{1522} f_2 = 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{8}{97} \begin{pmatrix} -19 \\ 10 \\ -10 \\ 31 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 152/97 \\ 308/97 \\ 468/97 \\ -248/97 \end{pmatrix}$$

$$V_{\parallel} = V - V_{\perp} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 152/97 \\ 308/97 \\ 468/97 \\ -248/97 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 333/97 \\ -17/97 \\ 17/97 \\ -43/97 \end{pmatrix}$$

Расстояние от v до U - это длина ортогонального допол-я, то есть $|V_{\parallel}|$

$$|V_{\parallel}| = \sqrt{\left(\frac{333}{97}\right)^2 + \left(\frac{17}{97}\right)^2 + \left(\frac{17}{97}\right)^2 + \left(\frac{43}{97}\right)^2} = \frac{\sqrt{113316}}{97}$$

Ответ: $V_{\perp} = \begin{pmatrix} 152/97 \\ 308/97 \\ 468/97 \\ -248/97 \end{pmatrix}$, $V_{\parallel} = \begin{pmatrix} 333/97 \\ -17/97 \\ 17/97 \\ -43/97 \end{pmatrix}$, $\rho(V, U) = \frac{\sqrt{113316}}{97}$.

№3

$U = \langle u_1, u_2 \rangle \quad u_1 = \begin{pmatrix}1\\4\\-4\\-1\end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix}3\\-5\\5\\-3\end{pmatrix}$ Пусть $v = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$

$W = \langle w_1, w_2 \rangle \quad w_1 = \begin{pmatrix}4\\-1\\-4\\1\end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix}-8\\0\\0\\2\end{pmatrix}$

$pr_{\langle u_1,u_2\rangle} v = pr_{\langle f_1,f_2\rangle} v$, где f_1, f_2 - ортогональный базис U

~~[illegible]~~ Найдем f_1, f_2

$f_1 = u_1$

$$f_2 = u_2 - \frac{(u_2,f_1)}{(f_1,f_1)} f_1 = u_2 - \frac{-34}{34} f_1 = \begin{pmatrix}3\\-5\\5\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\4\\-4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-1\\1\\-4\end{pmatrix}$$

$$pr_{\langle f_1,f_2\rangle} v = \frac{(v,f_1)}{(f_1,f_1)} f_1 + \frac{(v,f_2)}{(f_2,f_2)} f_2 = \frac{x_1+4x_2-4x_3-x_4}{34}\begin{pmatrix}1\\4\\-4\\-1\end{pmatrix} + \frac{3x_1-5x_2+5x_3-3x_4}{68}\begin{pmatrix}3\\-5\\5\\-3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}34\\-34\\34\\-34\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 2x_1+8x_2-8x_3-2x_4\begin{pmatrix}1\\4\\-4\\-1\end{pmatrix} + 3x_1-5x_2+5x_3-3x_4\begin{pmatrix}3\\-5\\5\\-3\end{pmatrix} = 68\cdot\begin{pmatrix}34\\-34\\34\\-34\end{pmatrix}$$

Можно заметить, что 1 и 4, 2 и 3 уравнения линейно зависимы => отсюда можем получить 2 уравнения:

$$\begin{cases} 2x_1+8x_2-8x_3-2x_4+9x_1-15x_2+15x_3-9x_4 = 68\cdot 34 \\ 8x_1+32x_2-32x_3-8x_4-15x_1+25x_2-25x_3+15x_4 = -68\cdot 34 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 11x_1-7x_2+7x_3-11x_4 = 68\cdot 34 \\ -7x_1+57x_2-57x_3+7x_1 = -68\cdot 34 \end{cases}$$

Чтобы найти еще 2 ур-я воспользуемся вторым условием.
Ортогонализуем систему векторов w_1, w_2, v
Получим систему y_1, y_2, z, где z - $ort_W v$

$y_1 = w_1$

$$y_2 = w_2 - \frac{(w_2, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 = w_2 - \frac{-34}{34} y_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$z = v - \frac{(v, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 - \frac{(v, y_2)}{(y_2, y_2)} y_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} - \frac{4x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4}{34} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-4x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4}{34} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\text{ort}_w v$$

$$\parallel$$

$$(10, -88, 22, -40)^T$$

$$\Leftrightarrow 34 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} - (4x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4) \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} - (-4x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4) \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -88 \\ 22 \\ -40 \end{pmatrix}$$

Получаем следующие 4 ур-я:

$$\begin{cases} 34x_1 - 16x_1 + 4x_2 + 16x_3 - 4x_4 - 16x_1 - 4x_2 - 16x_3 - 4x_4 = 10 \\ 34x_2 + 4x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 - 4x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4 = -88 \\ 34x_3 + 16x_1 - 4x_2 - 16x_3 + 4x_4 - 16x_1 - 4x_2 - 16x_3 - 4x_4 = 22 \\ 34x_4 - 4x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 - 4x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4 = -40 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 8x_4 = 10 \\ 32x_2 - 8x_3 = -88 \\ -8x_2 + 2x_3 = 22 \\ -8x_1 + 32x_4 = -40 \end{cases}$$

можно заметить, что 1 и 4, 2 и 3 уравнения лин зависимы.

$$\Downarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 8x_4 = 10 \\ 32x_2 - 8x_3 = -88 \end{cases}$$

Объединяя полученные системы получаем:

$$\begin{cases} 2x_1 - 8x_4 = 10 \\ 32x_2 - 8x_3 = -88 \\ 11x_1 - 7x_2 + 7x_3 - 11x_4 = 34 \cdot 68 \\ -7x_1 + 57x_2 - 57x_3 + 7x_4 = -34 \cdot 68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 265 \\ 5/3 \\ 53/3 \\ 65 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 265 \\ 5/3 \\ 53/3 \\ 65 \end{pmatrix}$

№4

$$v_1 = -3-3x+3x^2 \sim \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = 6+9x-7x^2 \sim \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = 3-x^2 \sim \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ -3 & 9 & 0 \\ 3 & -7 & -1 \end{pmatrix}$, X - матрица Грама скал. произведения.

Тогда $vol(v_1, v_2, v_3) = \sqrt{\det(A^T X A)} = 5$

$$\Rightarrow \det(A^T X A) = 25 \Rightarrow (\det A)^2 \cdot \det X = 25 \Rightarrow \det X = \frac{25}{(\det A)^2} = \frac{25}{81}$$

$$w_1 = 3+x+5x^2 \sim \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = 12+6x+17x^2 \sim \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = -3-4x-8x^2 \sim \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Пусть $B = \begin{pmatrix} 3 & 12 & -3 \\ 1 & 6 & -4 \\ 5 & 17 & -8 \end{pmatrix}$

Тогда $vol(w_1, w_2, w_3) = \sqrt{\det(B^T X B)} = \sqrt{(\det B)^2 \cdot \frac{25}{81}} = \sqrt{45^2 \cdot \frac{25}{81}} = 25$

Ответ: 25.

N5

$$V_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 6 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \\ 14 \\ -1 \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \\ -8 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$V_0, V_1, V_2, V_3 \in L \Rightarrow L = V_0 + \langle \overrightarrow{V_0V_1}, \overrightarrow{V_0V_2}, \overrightarrow{V_0V_3} \rangle$$

$$u_1 = \overrightarrow{V_0V_1} = V_1 - V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 6 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \overrightarrow{V_0V_2} = V_2 - V_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \\ 14 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -5 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \overrightarrow{V_0V_3} = V_3 - V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$pr_L V = pr_{\langle u_1, u_2, u_3 \rangle} \overrightarrow{V_0V}$$

$$\overrightarrow{V_0V} = V - V_0 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \\ -8 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 1 \\ -15 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}$, тогда $pr_{\langle u_1, u_2, u_3 \rangle} \overrightarrow{V_0V} = A (A^T A)^{-1} A^T \overrightarrow{V_0V} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{36452}{6735} \\ \frac{364}{151} \\ \frac{38678}{20385} \\ -\frac{210613}{20385} \\ -\frac{307156}{20385} \end{pmatrix}$$

Расстоянием от этой точки будет длина ортогонального дополнения

$$|v_{\parallel}| = |v - v_{\perp}| = \frac{\sqrt{347344}}{\sqrt{4077}}$$