**Разберём задачу**. Найдём SVD не для квадратной матрицы, а для прямоугольной, притом двумя способами. Итак, пусть

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 14 & -4 \\ -8 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим полное сингулярное разложение

$$A = \underset{2\times 2}{U} \underset{2\times 3}{\Sigma} \underset{3\times 3}{V^T}$$

Обратите внимание на размеры матриц.

SVD можно найти с помощью этого равенства:

$$A^TA = V\Sigma^T \underbrace{U^T \cdot U}_{=E} \Sigma V^T = V \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \sigma_2^2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \cdot V^T$$

или этого:

$$AA^T = U\Sigma \underbrace{V^T \cdot V}_{=E} \Sigma^T U^T = U \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \sigma_2^2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \cdot U^T$$

Смысл обоих таков: если $A^TA$ или $AA^T$ привести к главным осям, то мы получим и сигмы, и что-то из $U$ с $V$. Этим мы и займёмся. Но сперва надо понять, каким из равенств когда пользоваться. В общем и целом, ответ простой: пользоваться надо тем, для которого $A^TA$ или $AA^T$ соответственно имеет меньший размер. Если только в наш мир не вторгнутся демоны и не захотят предать мечу всех, кто не умеет находить SVD двумя способами, не стоит отдавать предпочтение другому. В данном случае $A^TA$ размера $3 \times 3$, а $AA^T$ размера $2 \times 2$. Что ж, выбор очевиден.

**Решение**.

*Шаг 1.* Найдём

$$U \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \sigma_2^2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \cdot U^T = AA^T = \begin{pmatrix} 333 & -144 \\ -144 & 117 \end{pmatrix}$$

*Шаг 2.* Найдём собственные значения $AA^T$ — они равны 45 и 405. Это квадраты наших сигм, причём, поскольку сигмы должны быть упорядочены по невозрастанию, $\sigma_1^2 = 405$, $\sigma_2^2 = 45$, откуда $\sigma_1 = 9\sqrt{5}$, $\sigma_2 = 3\sqrt{5}$.

*Шаг 3.* Ищем собственные векторы $AA^T$, отвечающие этим собственным значениям $(\sigma_1^2, \sigma_2^2)$:

Для собственного значения 405 берём вектор $\frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)^T$ (не забываем нормировать!).

Для собственного значения 45 берём вектор $\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)^T$.

*Шаг 4.* Итого:

$$U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 9\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Обратите внимание на размер $\Sigma$! В матрице $U$ по столбцам написаны найденные выше собственные векторы.

*Шаг 5.* В этот момент мы резко перестанем искать полное сингулярное разложение и начнём искать усечённое. Напомню, что это разложение с квадратной и невырожденной матрицей посередине. В данном случае оно имеет вид

$$A = \underset{2\times 2}{\widehat{U}} \cdot \underset{2\times 2}{\widehat{\Sigma}} \cdot \underset{2\times 3}{\widehat{V}^T}$$

где $\widehat{U} = U$, $\widehat{V}$ — это первые два столбца матрицы $V$, а

$$\widehat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

Матрицы $\widehat{U}$ и $\widehat{\Sigma}$ нам уже известны. При этом обе они квадратные и невырожденные (приятно!), и поэтому мы можем написать, что

$$\widehat{V}^T = (\widehat{U}\widehat{\Sigma})^{-1}A$$

В принципе, можно посчитать уже так:

$$\widehat{V}^T = \left[\begin{pmatrix} 18 & 3 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}\right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 14 & -4 \\ -8 & -2 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{45}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 14 & -4 \\ -8 & -2 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Отсюда

$$\widehat{V} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Поздравляю, мы нашли усечённое сингулярное разложение:

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

*Шаг 6.* А теперь мы напишем полное сингулярное разложение. Фактически, нам осталось только дополнить $\widehat{V}$ до $V$, добавив один столбец справа — то есть дополнив первые два столбца до ортонормированного базиса. Это вы уже должны неплохо уметь делать:

$$V = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, полное сингулярное разложение имеет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

**Разберём ещё задачу (по сути ту же, но транспонированную**. Найдём SVD матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -8 \\ 14 & -2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим полное сингулярное разложение

$$A = \underset{2\times 2}{U} \quad \underset{2\times 3}{\Sigma} \quad \underset{3\times 3}{V^T}$$

Снова обратите внимание на размеры матриц.

На этот раз $A^T A$ размера $2\times 2$, а $AA^T$ размера $3\times 3$. На сей раз воспользуемся первым.

**Решение**.

*Шаг 1.* Найдём

$$V \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \sigma_2^2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \cdot V^T = A^T A = \begin{pmatrix} 333 & -144 \\ -144 & 117 \end{pmatrix}$$

*Шаг 2.* Найдём собственные значения $A^T A$ — они равны 45 и 405. Это квадраты наших сигм, причём, поскольку сигмы должны быть упорядочены по невозрастанию, $\sigma_1^2 = 405$, $\sigma_2^2 = 45$, откуда $\sigma_1 = 9\sqrt{5}$, $\sigma_2 = 3\sqrt{5}$.

*Шаг 3.* Ищем собственные векторы $A^T A$, отвечающие этим собственным значениям $(\sigma_1^2, \sigma_2^2)$:

Для собственного значения 405 берём вектор $\frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)^T$ (не забываем нормировать!).

Для собственного значения 45 берём вектор $\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)^T$.

*Шаг 4.* Итого:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 9\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Обратите внимание на размер $\Sigma$ и на то, что мы нашли матрицу $V$ (а не $V^T$)! В матрице $V$ по столбцам написаны найденные выше собственные векторы.

*Шаг 5.* В этот момент мы резко перестанем искать полное сингулярное разложение и начнём искать усечённое. Напомню, что это разложение с квадратной и невырожденной матрицей посередине. В данном случае оно имеет вид

$$A = \underset{3\times 2}{\widehat{U}} \cdot \underset{2\times 2}{\widehat{\Sigma}} \cdot \underset{2\times 2}{\widehat{V}^T}$$

где $\widehat{U}$ — это первые два столбца матрицы $U$, $\widehat{V} = V$, а

$$\widehat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

Матрицы $\widehat{U}$ и $\widehat{\Sigma}$ нам уже известны. При этом обе они квадратные и невырожденные (приятно!), и поэтому мы можем написать, что

$$\widehat{U} = A(\widehat{\Sigma}\widehat{V}^T)^{-1}$$

Досчитываем точно так же, как и в предыдущем примере.

**Разберём задачу про низкоранговые приближения**. Найдём для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 14 & -4 \\ -8 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

ближайшую по норме Фробениуса матрицу ранга не выше 1.

По теореме, которую мы обсуждали на семинаре, такая матрица получается, если обнулить все сингулярные значения после 1-го:

$$\widehat{A} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Заметили ноль вместо второго сингулярного значения? Это же можно переписать и в усечённом виде:

$$\widehat{A} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left(9\sqrt{5}\right) \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Мы взяли первый столбец матрицы $U$, первое сингулярное значение и первую строчку матрицы $V^T$.

Итого получается

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 12 \\ -6 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

**Задачи 1.1-3.** Найдите полное (то есть с квадратными матрциами $U$ и $V$) и усечённое сингулярное разложение матриц

$$(1.1)\ \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} \quad (1.2-3)\ \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 13 & 1 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$$

причём для второй матрицы найдите его двумя способами: с помощью $A^TA$ и с помощью $AA^T$ (поэтому задачи там две). Сравните затраченные на это усилия. Для каждой из них найдите ближайшую относительно нормы Фробениуса ($||X||^2_{fro} = \mathrm{tr}(X^TX)$) матрицу ранга 1. Напоминаю, что для этого надо взять первое слагаемое из разложения матрицы в сумму матриц ранга 1 (полученного с помощью SVD).

**Задача 1.4.** Есть ли связь между определителем квадратной матрицы и её сингулярными значениями? Какая именно?

**Задача 1.5.** Вектор $v \in \mathbb{R}^n$ — это в некотором роде тоже матрица (вектор-столбец). Как выглядит его сингулярное разложение?

**Задача 2.1.** Найдите сингулярное разложение единичной матрицы. Найдите ещё одно (другое) сингулярных разложение единичной матрицы. Докажите, что у единичной матрицы бесконечно много сингулярных разложений.

**Задача 2.2.** Приведите пример невырожденной и не скалярной квадратной матрицы, чьё сингулярное разложение на единственно.

**Задача 2.3.** Что вы можете сказать о сингулярном разложении ортогональной матрицы?

**Задача 2.4.** Пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — сингулярные числа матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$ ($m \geqslant n$). Чему равны сингулярные числа матрицы $\left(\begin{smallmatrix} E \\ A \end{smallmatrix}\right)$?

**Задача 2.5.** С помощью сингулярного разложения найдите для квадратной матрицы $A$ ближайшую к ней в смысле нормы Фробениуса ортогональную матрицу. Будет ли такая матрица однозначно определена? Отметим, что всё становится сложнее, если $A$ вырождена.