Задача 1.1. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку $(2,-3,1)$ и перпендикулярной прямой

$$\begin{cases} x+2y-z+5=0, \\ 3x+y+z-7=0 \end{cases}$$

Задача 1.2. Составьте уравнение биссекторных плоскостей двугранных углов, образованных плоскостями $x+3y-2z+5=0$ и $-4x+y-3z-4=0$.

Задача 1.3. Составьте уравнение общего перпендикуляра к двум прямым

$$l_1:\ \frac{x}{1}=\frac{y+4}{3}=\frac{z}{2}, \quad l_2:\ \frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z+3}{-2}$$

Задача 1.4. Составьте уравнение ортогональной проекции прямой

$$l:\ \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1}$$

на плоскость $5x+6y-2z+1=0$.

Собственные векторы и собственные значения

Для начала немного повторения и пара дополнительных примеров.

(1) Характеристический многочлен для матриц 2×2 имеет вид

$$\chi_A(\lambda)=\lambda^2-\operatorname{tr}(A)\cdot\lambda+\det(A)$$

(2) Характеристический многочлен для матриц 3×3 имеет вид

$$\chi_A(\lambda)=-\lambda^3+\operatorname{tr}(A)\cdot\lambda^2-\sigma_2(A)\cdot\lambda+\det(A)$$

где $\sigma_2(A)$ — это сумма главных миноров 2×2, вот этих:

$$\begin{pmatrix} \color{red}{a_{11}} & \color{red}{a_{12}} & a_{13} \\ \color{red}{a_{21}} & \color{red}{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & \color{red}{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \color{red}{a_{31}} & a_{32} & \color{red}{a_{33}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \color{red}{a_{22}} & \color{red}{a_{23}} \\ a_{31} & \color{red}{a_{32}} & \color{red}{a_{33}} \end{pmatrix}$$

Если вам встретилась матрица большей размерности, а под рукой нет Питона с мощными библиотеками, то почти наверняка в ней много нулей.

Пример 1. Найдём собственные значения матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1051 & -42 & \sqrt{13} \\ 0 & 5 & -786 & \pi \\ 0 & 0 & 177 & 2^{95} \\ 0 & 0 & 0 & 964 \end{pmatrix}$$

Запишем характеристический многочлен в самом наивном виде и узрим, что он находится совершенно очевидным образом:

$$\chi_A(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1051 & -42 & \sqrt{13} \\ 0 & 5-\lambda & -786 & \pi \\ 0 & 0 & 177-\lambda & 2^{95} \\ 0 & 0 & 0 & 964-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(5-\lambda)(177-\lambda)(964-\lambda)$$

Как я и обещал, собственные значения верхнетреугольной (равно как и нижнетреугольной) матрицы — это её диагональные элементы.

Пример 2. Найдём собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 13 & \frac{1}{\pi} \\ 1 & 2 & 17 & 42 & e^7 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Здесь мы воспользуемся формулой определителя с углом нулей:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 5 & 13 & \frac{1}{\pi} \\ 1 & 2-\lambda & 17 & 42 & e^7 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ -3 & -3-\lambda & -3 \\ -1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

Таким образом, определитель блочно верхнетреугольной матрицы у нас развалился в произведение определителей диагональных блоков.

Пример 3. Найдём собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ -5 & 6 & 7 & 9 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Рекомендую не двигаться дальше, пока вы не осознаете, что сразу видно, что e_3 — это собственный вектор с собственным значением 7 (а во что он переходит под действием оператора?). После этого запишем характеристический многочлен и узрим приятное (разложили определитель по третьему столбцу):

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -2-\lambda & 0 & 1 \\ -5 & 6 & 7-\lambda & 9 \\ -2 & 2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -2-\lambda & 1 \\ -2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

Пример 4. Допустим нам нужно найти собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Её характеристический многочлен равен $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 17\lambda + 13$. Теперь вам надо найти его корни. Скорее всего, вы, конечно, воспользуетесь каким-нибудь онлайн-решателем, но можно себе представить ситуацию, когда это не получится (например, в постапокалиптическом мире, где у вас под рукой будет лишь уголь и побелённая стенка, или если вы попадёте во временную аномалию и угодите в Средние Века, ну, или на контрольной). Как тогда искать корни многочлена третьей степени? Даже не пытайтесь пользоваться формулой Кардано — её и не упомнишь, да и много вариантов выстрелить себе в ногу. Соответственно, остаётся один способ — "угадай и раздели". Во-первых, давайте сразу договоримся, что мы будем искать только рациональные корни (искать иррациональные изначально гиблое дело). Есть теорема: если $\frac{p}{q}$ — корень многочлена $a_n x^n + \ldots + a_1 x_1 + a_0$ с целыми коэффициентами, то $a_0 \vdots p$ и $a_n \vdots q$. Таким образом, у нашего многочлена $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 17\lambda + 13$ все рациональные корни целые, причём они являются делителями числа 13. То есть надо подставить всего четыре числа: ± 1 и ± 13. Найдя нужный корень, вы можете поделить многочлен на $(x - x_0)$ в столбик — и дальше уже без труда найти корни частного, которое является квадратным трёхчленом. А если вы находите значение с помощью схемы Горнера, то частное и вовсе появится у вас бесплатно.

Задачи 1.5-6. Найдите собственные векторы и собственные значения операторов

(1) Оператора транспонирования в пространстве матриц 2×2;
(2) Оператора $f \mapsto \int_{-x}^{x} f(t)dt$ в пространстве

$$\langle \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x \rangle$$

Указание. В пункте (1) ответ можно легко угадать. Успешное угадывание — это значит, что вы нашли 4 линейно независимых собственных вектора (ведь пространство матриц 2×2 четырёхмерно): например, у вас два собственных значения, и у каждого по два линейно независимых собственных вектора. Но если не получается, выпишите матрицу, и честно всё найдите.

Задача 1.7. Докажите, что линейный оператор $f \mapsto f(ax+b)$ в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ имеет собственные значения $1, a, a^2, \ldots, a^n$.

Указание. И снова: напишите матрицу!

Задачи 1.8 и 1.9. Найдите собственные значения и собственные векторы (а точнее, базисы собственных подпространств) операторов, заданных матрицами

$$(1.4)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (1.5)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Когда матрица диагонализуется? Напомню, что матрица имеет в каком-то базисе диагональный вид тогда и только тогда, когда в пространстве есть базис из собственных векторов этой матрицы (и это очевидно) — практический критерий проверки выглядит следующим образом: матрица диагонализуется в некотором базисе тогда и только тогда, когда выполняются два условия:

- Характеристический многочлен раскладывается на линейные множители над рассматриваемым полем. К примеру, многочлен $(x-1)(x^2+1)$ не таков над полем $\mathbb{R}$, но над полем $\mathbb{C}$ проблем с этим нет (более того, над полем $\mathbb{C}$ этот пункт всегда выполняется в силу его алгебраической замкнутости);
- Алгебраическая кратность каждого собственного значения равна их геометрической кратности. Здесь *алгебраическая кратность* равна кратности соответствующего корня характеристического многочлена (например, если $\chi_A(\lambda) = (\lambda-2)^3(\lambda+1)^2$, то алгебраическая кратность собственного значения (-1) равна 2), а *геометрическая кратность* — это $\dim V_\lambda$, то есть тому, сколько векторов у вас получилось в ФСР системы $(A - \lambda E)x = 0$.

Пример 5. Рассмотрим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Не буду скрывать, что её характеристический многочлен я нашёл в каком-то онлайн-решателе:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 16\lambda - 16 = \lambda^4 - 16 - 4(\lambda^3 - 4\lambda) =$$

$$= (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 + 4) - 4\lambda(\lambda^2 - 4) = (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) =$$

$$= (\lambda - 2)^3(\lambda + 2)$$

Видим: даже и над $\mathbb{R}$ многочлен раскладывается на линейные множители, так что первое условие выполнено. Теперь проверяем второе

$\lambda = \mathbf{2}$. Алгебраическая кратность равна 3. Чтобы найти геометрическую, решим систему $(A - 2E)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Уже не решая её, можно понять, что ранг матрицы равен 1, то есть в ФСР будет $4 - 1 = 3$ вектора — а значит, геометрическая кратность тоже равна 3 и равна алгебраической. Но всё-таки напишем и ФСР, она нам понадобится дальше:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = \mathbf{-2}$. Алгебраическая кратность равна 1. Чтобы найти геометрическую, решим систему $(A + 2E)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ФСР у неё состоит из одного вектора $(-1, 1, 1, 1)^T$ — то есть геометрическая кратность тоже равна 1 и равна алгебраической.

Итого: оба условия выполнены, матрица диагонализуется. А поскольку мы не поленились найти ФСР, то можем сказать сразу, что диагональный вид равен

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

а матрица перехода получается, если наши собственные векторы записать по столбцам:

$$\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}}_{V_2} & \underbrace{\begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}}_{V_{-2}} \end{pmatrix}$$

Задачи 1.10-11. Выясните, какие из следующих матриц можно привести к диагональному виду путём перехода к новому базису на полем $\mathbb{R}$ или над полем $\mathbb{C}$; если можно, то найдите диагональный вид и соответствующий базис:

$$(1.6)\ \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (1.7)\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Задача 1.12 Придумайте какую-нибудь матрицу, для которой вектор $(1,-1,1)^T$ был бы собственным с собственным значением (-1), а вектор $(0,1,2)^T$ был бы собственным с собственным значением 2.

Указание. Эта задача из тех, где нужный оператор легко задать в каком-то специфическом базисе, после чего ответ получается обратной заменой. Дополним набор $u_1 = (1,-1,1)^T, u_2 = (0,1,2)^T$ каким-нибудь вектором u_3 до базиса. Теперь как будет выглядеть матрица нужного нам оператора в базисе u_1, u_2, u_3? Ну, должно быть $u_1 \mapsto -u_1$, $u_2 \mapsto 2u_2$, поэтому мы уверенно пишем

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & * \\ 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

где вместо звёздочек могут быть любые числа (придумайте их сами!). Теперь осталось перейти от базиса u_1, u_2, u_3 к исходному.

В этой части очень много задач, некоторые трудные. Я готов буду поставить полный балл за любые 8 полностью решённых задач.

Задача 2.1. Даны две точки $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$. Найдите, в каком отношении точка пересечения прямой P_1P_2 с плоскостью $\alpha:\ ax+by+cz+d=0$ делит отрезок PQ.

Указание. А что вы можете посчитать, не ища точку пересечения? Задачу эту надо решить, не находя явно никаких пересечений, иначе не считается.

Задача 2.2. Даны две точки $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$. Найдите, в каком отношении точка пересечения прямой P_1P_2 с плоскостью

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 v, \\ y = y_0 + \beta_1 u + \beta_2 v, \\ z = z_0 + \gamma_1 u + \gamma_2 v \end{cases}$$

делит отрезок PQ.

Указание. И эту задачу надо решить, не находя явно никаких пересечений, иначе не считается.

Задача 2.3. Найдите собственные значения и собственные векторы оператора отражения относительно прямой в $\mathbb{R}^2$. Решать эту задачу лучше из геометрических соображений, нежели выписывая какие-то матрицы (какие прямые сохраняет отражение?). Но если уж совсем никак, то хотя бы выберите хороший базис.

Задача 2.4. Найдите собственные значения, собственные векторы и инвариантные подпространства оператора φ в $\mathbb{R}^3$, задаваемого правилом $\varphi(v) = [w, v]$, где w — некоторый фиксированный вектор. Опять же, лучше матриц не писать, а воспользоваться определением векторного произведения.

Задача 2.5. Найдите собственные значения матрицы ww^T, где w — вектор-столбец.

Задача 2.6. Найдите собственные значения и собственные векторы оператора транспонирования в пространстве матриц $n \times n$ для произвольного n.

Задача 2.7. Докажите, что если матрица A невырожденна, то A и A^{-1} имеют одни и те же собственные векторы (но не собственные значения; а как, кстати, связаны их собственные значения?). Эта задача решается в лоб по определению.

Задача 2.8. Докажите, что если оператор A^2 имеет собственное значение λ^2, то оператор A имеет хотя бы одно из собственных значний λ и $-\lambda$. В этом вам, возможно, поможет характеристический многочлен. Не попадитесь в ловушку с исходным определением: из равенства нулю произведения матриц не следует то, что один из сомножителей равен нулю.

Задача 2.9. Докажите, что каждый многочлен второй степени со старшим коэффициентом 1 является характеристическим многочленом какой-либо матрицы 2×2. Попробуйте доказать аналогичное утверждение для многочленов степени n и матриц $n \times n$ (старший коэффициент стоит считать равным 1 или $(-1)^n$ в зависимости от подробностей определения характеристического многочлена). Возможно, вам пригодится теорема Гамильтона-Кэли, которая говорит, что $\chi_A(A) = 0$, то есть что если подставить матрицу в свой характеристический многочлен, то получится нулевая матрица.

Задача 2.10. Как вам кажется, каких матриц больше: диагонализуемых или не диагонализуемых? Сформулируем более строго: допустим элементы матрицы — это случайные числа из отрезка $[0; 1]$ (например, выбранные из равномерного распределения, если вы понимаете, о чём я). Что больше: вероятность того, что матрица диагонализуема, или вероятность того, что нет?