Линал ДЗ-17 Панфилов Борис БПМИ-216 Волшебное число - 4

№1.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Найдем ядро:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\overline{IV} \to \overline{IV} - 3\cdot \overline{I}]{\overline{II} \to \overline{II} - 2\cdot \overline{I},\ \overline{III} \to \overline{III} + \overline{I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & -6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\overline{II} \to -\frac{1}{3}\cdot \overline{II}]{\overline{III} \to \overline{III} + 2\cdot \overline{II},\ \overline{IV} \to \overline{IV} - 2\cdot \overline{II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{I} \to \overline{I} - 2\cdot \overline{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \text{ФСР}: \underset{u_3}{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}} \Rightarrow \dim \ker \varphi = 1$$

2) Из предыдущего пункта можем сделать вывод, что

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Дополним u_3 до базиса $\mathbb{R}^3$

Нетрудно видеть, что $\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ можем дополнить

векторами $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4) Найдем образы u_1 и u_2 в $\mathbb{R}^4$

$\varphi(u_1) = w_1$

$\varphi(u_2) = w_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = w_1$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = w_2$$

5) дополним w_1 и w_2 до базиса $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Нетрудно заметить, что $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ можем

дополнить векторами $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ответ: если $e = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

$f = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, то

$$A(\varphi, e, f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

№1.2

Зафиксируем базисы $1, x, x^2$ и $1, x, x^2, x^3, x^4$. И напишем матрицу лин. отображения:

$\varphi(1) = x - 1$

$\varphi(x) = x^2 - x^2 = 0$

$\varphi(x^2) = x^3 - x^4$

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & x & x^2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

1) Найдем ядро:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ФСР}: \underset{u_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} \varphi = 1$$

2) Из первого пункта можем сделать вывод, что

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Дополним u_3 до базиса $\mathbb{R}^3$

Т.к. $\det\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \neq 0$ можем дополнить векторами $u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $u_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

4) Найдем образы u_1 и u_2 в $\mathbb{R}^5$

$$\varphi(u_1)=A\cdot u_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=w_1$$

$$\varphi(u_2)=A\cdot u_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}=w_2$$

5) Дополним w_1 и w_2 до базиса $\mathbb{R}^5$

Нетрудно заметить, что $\det\begin{pmatrix}-1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&-1&1\end{pmatrix}\neq 0$

$\Rightarrow$ можем дополнить векторами $w_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $w_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ $w_5=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

Ответ: базис $\mathbb{R}[x]_{\le 2}=\{1, x, x^2\}=e$

базис $\mathbb{R}[x]_{\le 4}=\{x-1, x, x^2, x^3-x^4, x^4\}=f$

$$A(\varphi, e, f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

№1.3

Зафиксируем базис E_{11}, $E_{12}+E_{21}$, E_{22}. И найдем матрицу перехода A.

$$\varphi(E_{11})=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\varphi(E_{12}+E_{21})=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\varphi(E_{22})=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\2&-2\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{array}{c} \\ E_{11}\\ E_{12}+E_{21}\\ E_{22}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}E_{11} & E_{12}+E_{21} & E_{22}\end{array}\\ \begin{pmatrix}2&4&0\\0&0&2\\0&0&-2\end{pmatrix}\end{array}$$

1) Найдем ядро:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ФСР}: \underset{u_3}{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \Rightarrow \dim \ker \varphi = 1$$

2) Можем написать, как выглядит A':

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Дополним u_3 до базиса $\mathbb{R}^3$

Нетрудно заметить, что $\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ можно дополнить

векторами $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4) Найдем образы u_1 и u_2 в $\mathbb{R}^3$

$$\varphi(u_1) = A \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = w_1$$

$$\varphi(u_2) = A \cdot u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = w_2$$

5) Дополним w_1 и w_2 до базиса $\mathbb{R}^3$. Нетрудно заметить, что можно дополнить вектором $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, т.к

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Ответ: базис прост-ва, из которого действует отображение: $\{E_{11}, E_{22}, -2E_{11} + E_{12} + E_{21}\}$

базис пр-ва, в которое действует отображение: $\{2E_{11}, E_{12} + E_{21}, 2E_{12} + 2E_{21} - 2E_{22}\}$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

№ 1.4

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Найдем f_1, f_2, f_3, т.ч. для матрицы $B = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ выполнено $BA = E$, где $A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$

$$\Updownarrow$$

$$A^T B^T = E$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[III \to III - 3 \cdot II]{III \to III - 2 \cdot I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[III \to -1 \cdot III]{II \to II + 2 \cdot III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ответ: f_1, f_2, f_3.

№ 1.5 - 1.7

а) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[I \to -1 \cdot I]{II \to II + 2 \cdot I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{I \to I + 3 \cdot II + 2 \cdot III} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$ $\Rightarrow$ координаты равны $4, -1, 3$.

б) $(v_1 v_2 v_3) = (e_1 e_2 e_3) \cdot C \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Т.к. $f' = f \cdot C$, где $f = g = (3, 1, -1)$

$$f' = (3, 1, -1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} = (4, -1, 3)$$

c) Просто ~~...~~ применим g к v_1, v_2, v_3 по-очереди. Тогда $g(v_1)$ - коэф-т при f_1, $g(v_2)$ - при f_2, $g(v_3)$ - при f_3.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\shortparallel$$

$$g\begin{pmatrix} v_1 v_2 v_3 \end{pmatrix}$$

$$\shortparallel$$

$$\begin{pmatrix} g(v_1), g(v_2), g(v_3) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ коэф-ты равны $4, -1, 3$.

№ 1.8

Запишем матрицы этих функций как линейных отображений из $\mathbb{R}^{n+1}$ в $\mathbb{R}$. То есть их размер будет $1 \times n$.

Запишем получившиеся строки, как строки матрицы.

Далее считаем $y=2$:

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 y & a_2 y^2 & \cdots & a_n y^n \\ & a_1 & 2a_2 y & \cdots & \vdots \\ & & 2a_2 & \cdots & \vdots \\ & & & 6a_3 & \vdots \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & n!\,a_n \end{pmatrix}$$

Нетрудно заметить, что в M все строки лин. независимы.

$\Rightarrow$ функции $\varphi_i(f) = f^{(i)}(2)$, $i = 0, \dots n$ составляют базис пр-ва двойственного к $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$