Панфилов Борис БПМИ-216

№1

$$U = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{u_2} \right\rangle \qquad W = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{w_1} \right\rangle$$

1) Покажем, что ~~все~~ векторы в U базисов лин. нез.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} \to \text{III} - \text{I}]{\text{II} \to \text{II} + 2\cdot\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II} \to -1\cdot\text{II}]{\text{II} \leftrightarrow \text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} \to \text{III} - \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Покажем, что $\dim U + \dim W = \dim \mathbb{R}^3$

$\dim U = 2$

$\dim W = 1$

$\Rightarrow \dim U + \dim W = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

1) и 2) $\Rightarrow \mathbb{R}^3 = U \oplus W$

Найдем проекцию $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ на U вдоль W

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III} \to \text{III} - \text{I}]{\text{II} \to \text{II} + 2\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II} \to \text{II} + \text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow v = u_1 + 0\cdot u_2 - 3\cdot w_1$

$\Rightarrow$ Проекция v на U вдоль W равна $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

№2

Пусть базис U это $\{E_{11}, E_{12}, E_{22}\}$

базис W это $\{E_{12}-E_{21}, E_{13}-E_{31}, E_{23}-E_{32}\}$

$$\varphi(E_{11}) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix} = E_{13} - E_{31}$$

$$\varphi(E_{12}) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 0\\ 3 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 3 & 0 & -3\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\ -3 & 0 & 3\\ -1 & -3 & 0\end{pmatrix} =$$

$$\varphi(E_{22}) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

Матрицы лин. отобр:

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccc} E_{11} & E_{12} & E_{22} \end{array} \\
\begin{array}{c} E_{12}-E_{21} \\ E_{13}-E_{31} \\ E_{23}-E_{32} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$