Пример на приведение к каноническому виду ортогонального оператора. Пусть

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \\ 7 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) Находим определитель: $\det A = -1$ (проверьте!). Стало быть, мы ищем канонический вид в виде:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(в красной клетке именно минус единица, а не единица).

(2) $\mathrm{tr} A = 0 = -1 + 2\cos\varphi$, откуда $\cos\varphi = \frac{1}{2}$. Стало быть, канонический вид у нас:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \mp\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Отмечу, что синус угла находится по косинусу однозначно с точностью до знака — а знак мы будем искать на последнем шаге.

(3) Найдём базис V_{-1}. Решаем систему $(A+E)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 4+9 & 1 & -8 \\ 4 & -8+9 & 1 \\ 7 & 4 & 4+9 \end{pmatrix}$$

Обратите внимание, что за избавление от дроби $\frac{1}{9}$ я расплатился появлением девяток на диагонали. ФСР: $(1,-5,1)^T$, не забываем нормировать: $e_3' = \frac{1}{3\sqrt{3}}(1,-5,1)$ — это третий вектор нового базиса.

(4) Первые два вектора — это любые два ортонормированных вектора в $\langle e_3' \rangle^{\perp}$. Я могу, например, найти ФСР системы с матрицей $(1,-5,1)$ и ортогонализовать полученные векторы или просто угадать ответ. Я, пожалуй, угадаю: $e_1' = \frac{1}{3\sqrt{6}}(5,2,5)^T$, $e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T$.

(5) Осталось разобраться со знаками. Для этого мы подставляем

$$Ae_1' = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \\ 7 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{27\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -18 \\ 9 \\ 63 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

В зависимости от того, какой там знак, это может быть равно $\frac{1}{2} \cdot e_1' + \frac{\sqrt{3}}{2} e_2'$ или $\frac{1}{2} \cdot e_1' - \frac{\sqrt{3}}{2} e_2'$. Посчитаем, чему это равно:

$$\frac{1}{2} \cdot e_1' + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e_2' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Ну, и не равно это тому, что я написал выше. На самом деле, можно было бы уже дальше не считать (если плюс не подходит, то точно подходит минус), но проверим всё-таки:

$$\frac{1}{2} \cdot e_1' - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e_2' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$$

О чудо, это совпадает с Ae'. Итого, канонический вид — это

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

А канонический базис — это e_1', e_2', e_3'. Тип движения — поворот вокруг оси $\langle e_3' \rangle$ с отражением относительно ортогональной ей плоскости.

Ещё пример на приведение к каноническому виду ортогонального оператора. Пусть

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ -4 & -1 & 8 \\ -4 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Вроде бы, только переставили строки и умножили матрицу на (-1), а как всё поменяется!

(1) Находим определитель: $\det A = 1$. Стало быть, мы ищем канонический вид в виде:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(в красной клетке именно минус единица, а не единица).

(2) $\mathrm{tr}A = -1 = 1 + 2\cos\varphi$, откуда $\cos\varphi = -1$, то есть угол поворота π, то есть мы имеет дело с отражением относительно прямой:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Хорошая новость — не надо будет искать никакие знаки (синусы равны нулю). Но зато алгоритм пойдёт немного по другому — и более простому — пути: ведь теперь все векторы, которые нам надо найти, являются собственными!

(3) Найдём базис V_{-1}. Решаем систему $(A+E)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} -7+9 & -4 & -4 \\ -4 & -1+9 & 8 \\ -4 & 8 & -1+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ -4 & 8 & 8 \\ -4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Это прекрасная матрица ранга 1, и ФСР можно угадать. Например, возьмём $(0,1,-1)^T$ и $(2,1,0)^T$. Но нам нужен ортонормированный базис, поэтому либо ортогонализуем и нормируем только что найденную ФСР, либо угадываем ортонормированный базис: $e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$, $e_2' = \frac{1}{3\sqrt{2}}(4,1,1)$.

(4) Теперь ищем базис V_1. В принципе, можно честно найти ФСР системы $(A-E)x = 0$, но она там какая-то страшная, мне лень этим заниматься. Я просто вспомню, что $V_1 \perp V_{-1}$, а все векторы из V_{-1} были ортогональны вектору $(-1,2,2)$ (это строка матрицы $(A+E)$!) — ну, вот мы и берём $e_3' = \frac{1}{3}(-1,2,2)$. Итого канонический вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

а базис — это e'_1, e'_2, e'_3. Тип движения — отражение относительно прямой $\langle e'_3 \rangle$ (на всякий случай напомню: "относительно чего" — это то, что с собственным значением 1).

Задачи 1.1 и 1.2. Приведите к главным осям квадратичную форму

(1) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
(2) $3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_3x_4 + x_4^2$.

Это значит, что надо предъявить диагональную матрицу и ортонормированный базис (=матрицу перехода к нему), в котором квадратичная форма имеет такой вид (а для этого вы сначала пишете матрицу, не забывая, что вне диагонали надо делить на 2, потом ищете её характеристический многочлен — ну, и далее по алгоритму; главное не забывайте, что, если у какого-то V_λ размерность больше 1, то вам нужно не абы какой базис там найти, а ортонормированный).

Задачи 1.3 и 1.4. Найдите канонический базис и матрицу в этом базисе ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$(3)\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad (4)\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

В каждом из пунктов определите, что за тип движения олицетворяет собой эта матрица.

Если особо не оговаривается иное, во всех задачах всё происходит в вещественном евклидовом пространстве.

Задача 2.1. Докажите, что оператор A^*A всегда является самосопряжённым (пожалуйста, имейте в виду, что речь тут идёт про операторы, а не про матрицы; это верно и в бесконечномерном пространстве, где никаких матриц нет).

Задачи 2.2. и 2.3 Пусть $\varphi : E \longrightarrow E'$ — линейное отображение евклидовых пространств. Докажите,что

$$\ker\varphi^* = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp, \qquad \mathrm{Im}\varphi^* = (\ker\varphi)^\perp.$$

Задача 2.4. Зная все собственные значения линейного оператора, можете ли вы найти собственные значения сопряжённого к нему?

Задача 2.5. Запишите условие ортогональности матрицы Q, если скалярное произведение задано матрицей Грама G.

Задачи 2.7 и 2.8. Докажите, что у всякой симметричной положительно определённой матрицы A есть *квадратный корень*: такая положительно определённая матрица B, для которой $B^2 = A$. Найдите эту матрицу для

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Задачи 2.9. А раз уж мы про это заговорили, попробуйте придумать (комплексную) матрицу, которая не является квадратом никакой другой (комплексной) матрицы.

Задачи 2.10. А можете ли вы придумать матрицу, которая является квадратом бесконечного числа различных матриц?

Задачи 2.11 и 2.12 Определите, может ли матрица

$$(5)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad (6)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

быть матрицей самосопряжённого оператора для какого-либо скалярного произведения, и если да, то укажите это скалярное произведение.

Указание. Докажите, что для того, чтобы нашлось скалярное произведение, относительно которого A самосопряжённый, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была диагонализуемой над $\mathbb{R}$ (и да, это неотъемлемая часть задачи, без того проверять не буду).

Задача 2.13. Докажите, что ядро оператора $AA^* + A^*A$ — это пересечение ядер операторов A и A^*.

Указание. Тут существенно, что мы работаем в $\mathbb{R}^n$. Вам совершенно точно пригодится скалярное произведение.

Задача 2.14. Пусть v и w — векторы одной длины (лежащие в одном и том же евклидовом пространстве). Докажите, что существует ортогональный оператор, переводящий v в w.

Задача 2.15. Докажите, что ортогональные операторы в $\mathbb{R}^n$ образуют группу по умножению (она обозначается $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$). Можете ли вы придумать в ней какую-нибудь собственную нормальную подгруппу? Какой уже известной вам группе изоморфна факторгруппа по этой подгруппе?