Общие и частные решения

Расмотрим систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 1; \\ x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$$

Её расширенная матрица имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

Как видите, она уже имеет усиленный ступенчатый вид, поэтому можно сразу записать решение:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 - 2x_2 + x_4 \\ x_2 \\ 2 + 3x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Это *общее решение* системы — единообразное описание всей совокупности решений системы.

Каждое конкретное решение системы (каждый конкретный вектор, являющийся решением) называется *частным решением* системы. Чтобы получить частное решение, надо в качестве свободных неизвестных (в данном случае это x_2 и x_4) подставить какие-нибудь числа. Например, подстановка $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ даёт частное решение

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Подстановка $x_2 = 1$, $x_4 = -1$ даёт частное решение

$$\begin{pmatrix} 1 - 2 \cdot 1 + (-1) \\ 1 \\ 2 + 3 \cdot (-1) \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Как видите, число различных частных решений в данном случае бесконечно.

Больше примеров на метод Гаусса

Пример 1. Расмотрим систему

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = -1 \\ -4x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 + 2x_5 = -2 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Её расширенная матрица имеет вид

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -2 & 1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & -4 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ -4 & 3 & 6 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Сейчас мы будем приводить её к ступенчатому виду. Я не умею рисовать ступеньки, поэтому просто буду оставлять пустые места вместо нулей под ступеньками.

На первом шаге мы должны оставить в первом столбце только один элемент. Лучше всего, чтобы он был как можно проще. Желательно — ± 1 (как мы увидим во втором примере, этого можно будет довольно часто добиться в тех задачах, которые вам будут попадаться в домашних заданиях и на контрольных). У нас -1 стоит в третьей строке. Поэтому тащим третью строку на первое место (поменяв с первой), а затем с помощью новой первой строки уничтожаем всё, что стоит под -1 (я записываю на стрелках, какие элементарные преобразования осуществляются):

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -2 & 1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & -4 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ -4 & 3 & 6 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 1 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & -4 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ -4 & 3 & 6 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{II \mapsto II + 3\cdot I \\ III \mapsto III - 2\cdot I \\ IV \mapsto IV - 4\cdot I \\ V \mapsto V + 2\cdot I}} \left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 9 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & -10 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 7 & -2 \end{array}\right)$$

Итак, у нас появилась первая ступенька! Дальше мы смотрим на подматрицу, которая выделена красным, и проделываем те же манипуляции для неё (напоминаю, пустое место — это нули под ступенькой, которые больше нас никогда уже не побеспокоят):

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ & \color{red}{1} & \color{red}{2} & \color{red}{1} & \color{red}{9} & \color{red}{-2} \\ & \color{red}{-1} & \color{red}{-2} & \color{red}{-1} & \color{red}{-9} & \color{red}{2} \\ & \color{red}{-1} & \color{red}{-2} & \color{red}{-5} & \color{red}{-10} & \color{red}{2} \\ & \color{red}{1} & \color{red}{2} & \color{red}{1} & \color{red}{7} & \color{red}{-2} \end{array}\right)$$

К счастью, в левом верхнем углу красной подматрицы уже стоит единица, поэтому можно ничего не переставлять. С помощью этой единицы уничтожаем всё, что стоит под ней:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ & 1 & 2 & 1 & 9 & -2 \\ & -1 & -2 & -1 & -9 & 2 \\ & -1 & -2 & -5 & -10 & 2 \\ & 1 & 2 & 1 & 7 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{III \mapsto III + \cdot II \\ IV \mapsto IV + \cdot II \\ V \mapsto V - \cdot II}} \left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ & 1 & 2 & 1 & 9 & -2 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & -4 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Здесь мы видим две приятные вещи. Во-первых, третья строка обратилась в ноль — её мы отправляем вниз (все нулевые строки всегда идут в самый низ, после чего их можно уже не писать больше). Получается вот что:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ & 1 & 2 & 1 & 9 & -2 \\ & 0 & 0 & -4 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Во-вторых, у нас появилась вторая ступенька (обратите внимание, что мы сместились сразу на два столбца):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ & 1 & 2 & 1 & 9 & -2 \\ & & & {\color{red}-4} & {\color{red}-1} & {\color{red}0} \\ & & & {\color{red}0} & {\color{red}-2} & {\color{red}0} \end{array}\right)$$

Теперь, вообще говоря, мы должны все те же манипуляции проделать с красной подматрицей, но благодаря нулю в её левом нижнем углу у нас уже сразу есть следующая ступенька:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ & 1 & 2 & 1 & 9 & -2 \\ & & & -4 & -1 & 0 \\ & & & & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Итак, мы **привели матрицу к ступенчатому виду**!

Следующий этап — **приведение к улучшенному ступенчатому виду**. Напоминаю, что для этого нужно (а) чтобы в начале каждой ненулевой строки стояли единицы и (б) чтобы над этими единицами стояли нули. Первым делом делим на нужные числа, чтобы в начале строк оказались единицы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ & 1 & 2 & 1 & 9 & -2 \\ & & & -4 & -1 & 0 \\ & & & & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{I \mapsto (-1)\cdot I \\ III \mapsto -\frac{1}{4}\cdot III \\ IV \mapsto -\frac{1}{2}\cdot IV}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & -3 & 1 \\ & 1 & 2 & 1 & 9 & -2 \\ & & & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ & & & & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Теперь осуществляем “обратный ход метода Гаусса”. Сначала берём единицу в начале последней строки и с её помощью истребляем всё, что над ней:

$$\ldots \xrightarrow[]{\substack{I \mapsto I + 3\cdot IV \\ II \mapsto II - 9\cdot IV \\ III \mapsto III - \frac{1}{4}\cdot IV}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Далее, с помощью единицы в начале третьей строки уничтожаем всё, что над ней:

$$\ldots \xrightarrow[]{\substack{I \mapsto I + III \\ II \mapsto II - III}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Наконец, с помощью единицы в начале второй строки убиваем то, что над ней:

$$\ldots \xrightarrow{I\mapsto I+II} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & 1 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Итак, мы **привели матрицу к усиленному ступенчатому виду**!

Осталось только написать решение. Отметим, что главные (то есть первые ненулевые) элементы строк у нас находятся в столбцах с номерами 1, 2, 4 и 5 — то есть главными будут неизвестные x_1, x_2, x_4, x_5. Оставшееся неизвестное x_3 является свободным. Выпишем систему, которая соответствует последней матрице:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = -1 \\ x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

Из неё нам нужно выразить главные неизвестные через свободные, после чего получается

Ответ:

$$\left\{ \left.\begin{pmatrix} -1 - x_3 \\ -2 - 2x_3 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Sanity check. Под этим словосочетанием я всегда буду иметь в виду некий простой способ проверить, разумен ли получившийся ответ. Для систем есть очевидный способ: нужно взять какое-нибудь частное решение и подставить его! Возьмём, например, решение $(-1, -2, 0, 0, 0)$, получающееся при x_3. Нетрудно видеть, что при подстановке этого решения в исходную систему будут получаться верные равенства. Пожалуйста, не забывайте делать это, особенно в домашнем задании! В целом, я буду снисходительно относиться к арифметическим ошибкам, но если ваш ответ не проходит элементарный sanity check, то кара будет более значительной.

Пример 2. Расмотрим систему

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -4 & -2 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & -1 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

Проблема с ней в том, что в первом столбце нет ни единиц, ни минус единиц. В этой ситуации можно либо поделить на что-нибудь:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -4 & -2 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & -1 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{I\mapsto -\frac{1}{2}I} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 3 & -2 & -4 & -2 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & -1 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

и страдать, потому что появление дробей воистину умножает страдания (а представьте, если в знаменателе будет не безобидная двойка, а 7 или 13). В некоторых случаях этого не избежать, но в данной системе можно схитрить:

ведь единицу можно получить, сложив первую и вторую строки!

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -4 & -2 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & -1 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{I \mapsto I+II} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & -4 & -2 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & -1 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

Дальше уже понятно, что делать. Пожалуйста, не забывайте об этом приёме и избегайте дробей!

И всё-таки домашнее задание

Задачи 1.1-1.4. Из скана задачи 8.1(а,б,в,е). Не забудьте найти частные решения!

Задача 2.1. Дополните матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

одной строкой так, чтобы система, соответствующая полученной матрице, (а) имела единственное решение, (б) не имела решение, (в) имела бесконечно много решений. Обязательно решите вашу систему и покажите, что она в самом деле обладает нужными свойствами.

Подсказка. Самый простой способ получить систему, имеющую бесконечно много решений — сделать так, чтобы третье уравнение следовало из первых двух. Самый простой способ получить систему, не имеющую решений — ввести в систему явное противоречие. Что же до третьего случая, то, как мы увидим, случайно сгенерированная система из n уравнений с n неизвестными почти наверняка имеет единственное решение, так что этот случай не должен вызвать у вас затруднений.

Задача 2.2. В этой задаче мы попробуем понять, как выглядит в общем случае решение системы 2×2 (системы с 2 уравнениями и 2 неизвестными). А именно, пусть дана система:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right)$$

Решите её в общем виде любым приятным вам способом (то есть выразите x_1 и x_2 через a_{ij} и b_k). Покажите, что система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ (напомню, что величина $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ называется определителем матрицы A и уже встречалась нам в предыдущем домашнем задании).

Задача 2.3. Квадратная матрица называется блочно-диагональной, если она имеет вид

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

где A_i — квадратные блоки, а 0 – нулевые блоки соответствующего размера. Докажите, что произведение блочно-диагональных матриц одинакового размера с одинаковыми размерами блоков снова является блочно-диагональным с теми же размерностями блоков.

Задача 2.4. Проверьте, являются ли блочные матрицы
$$\begin{pmatrix} X & E \\ E & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & Y \end{pmatrix}$$
с блоками совместимого размера коммутирующими. Воспользуйтесь полученными при перемножении знаниями для того, чтобы найти матрицу, обратную к матрице
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Будьте внимательны с размерностями блоков!

Задача 2.5. Пусть A — матрица $m \times n$, а B — матрица $m \times k$. Пусть также $b_1, \dots b_k$ — столбцы матрицы B, то есть B можно расписать в виде блочной матрицы $(b_1|b_2|\dots|b_k)$. Пусть, наконец, s_i — столбец, являющийся решением системы $Ax = b_i$ $(i = 1, \dots, k)$. Докажите, что матрица $S = (s_1|s_2|\dots|s_k)$ (то есть матрица, склеенная из столбцов s_i) является решением матричного уравненич $AX = B$. С помощью этого правила решите уравнение
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$