ИДЗ-1 19 вариант

№1

$$A=\begin{pmatrix}4&5&4\\5&5&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-3&7&5\\-3&-3&3\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}3&-6\\7&1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}10&1\\1&5\end{pmatrix}$$

$$tr(BB^T)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}x_{ij}^2=9+9+9+9+25+49=61+49=110$$

$$\cancel{DA=\begin{pmatrix}10&1\\1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&5&4\\5&5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}45&55&41\\29&30&9\end{pmatrix}}\qquad AA^T=\begin{pmatrix}4&5&4\\5&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&5\\5&5\\4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}57&49\\49&51\end{pmatrix}$$

$$DAA^T=\begin{pmatrix}10&1\\1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}57&49\\49&51\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}619&541\\302&304\end{pmatrix}$$

$$(B+A)=\begin{pmatrix}-3&7&5\\-3&-3&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&5&4\\5&5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&12&9\\2&2&4\end{pmatrix}$$

$$B^T-A^T=\begin{pmatrix}-3&-3\\7&-3\\5&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&5\\5&5\\4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&-8\\2&-8\\1&2\end{pmatrix}$$

$$(B+A)(B^T-A^T)=\begin{pmatrix}1&12&9\\2&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7&-8\\2&-8\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26&-86\\-6&-24\end{pmatrix}$$

$(C^2-2CD+D^2)$

$$4C^2-8CD+4D^2=4\cancel{(C-D)^2}=\cancel{4\begin{pmatrix}7&77\\-66&-26\end{pmatrix}}=4\begin{pmatrix}20&45\\-33&-33\end{pmatrix}$$

$$C-D=\begin{pmatrix}3&-6\\7&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10&1\\1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&-7\\6&-4\end{pmatrix}$$

$$(C-D)^2=\begin{pmatrix}-7&-7\\6&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7&-7\\6&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&77\\-66&-26\end{pmatrix}$$

$$BA^T=\begin{pmatrix}-3&7&5\\-3&-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&5\\5&5\\4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}43&25\\-15&-27\end{pmatrix}$$

$$AB^T=\begin{pmatrix}4&5&4\\5&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&-3\\7&-3\\5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}43&-15\\25&-27\end{pmatrix}$$

$$BA^TD=\begin{pmatrix}43&25\\-15&-27\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10&1\\1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}455&*\\*&-150\end{pmatrix}$$

$$DBA^T = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 43 & 25 \\ -15 & -27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 415 & * \\ * & -110 \end{pmatrix}$$

$$AB^TD = \begin{pmatrix} 43 & -15 \\ 25 & -27 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 415 & * \\ * & -110 \end{pmatrix}$$

$$DAB^T = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 43 & -15 \\ 25 & -27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 455 & * \\ * & -150 \end{pmatrix}$$

$$tr\left(\left(3BA^T + 7AB^T\right)D + D\left(-3AB^T + 4BA^T\right)\right) =$$

$$= tr\left(11\begin{pmatrix} 415 & * \\ * & -110 \end{pmatrix}\right) = 415 \cdot 11 + 11 \cdot (-110) = 11 \cdot 305 = 3355$$

Подставляя все в изначальное выражение получаем:

$$110\begin{pmatrix} 619 & 541 \\ 302 & 304 \end{pmatrix} + 3355\begin{pmatrix} 26 & -86 \\ -6 & -24 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 20 & 45 \\ -89 & -39 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 110 \cdot 619 + 3355 \cdot 26 + 80 & 110 \cdot 541 + 3355 \cdot (-86) + 180 \\ 110 \cdot 302 + 3355 \cdot (-6) - 356 & 110 \cdot 304 + 3355 \cdot (-24) - 156 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 155400 & -228840 \\ 12634 & -47236 \end{pmatrix}$$

Ответ:

№2

Пусть S - полученная матрица

$$\begin{cases} A + B = S & (1) \\ S^T = A^T + B^T = A - B & (2) \end{cases}$$

$(1) + (2)$

$$2A = S + S^T$$

$$A = \frac{S + S^T}{2}$$

$$B = \frac{S - S^T}{2}$$

Получается, что по матрице S мы можем однозначно восстановить матрицы A и B.

$$A=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}-20&10&38&30\\58&54&4&-20\\-54&34&24&52\\-14&50&-16&-10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-20&58&-54&-14\\10&54&34&50\\38&4&24&-16\\30&-20&52&-10\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-40&68&-16&16\\68&108&38&30\\-16&38&48&36\\16&30&36&-20\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-20&34&-8&8\\34&54&19&15\\-8&19&24&18\\8&15&18&-10\end{pmatrix}$$

$$B=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}-20&10&38&30\\58&54&4&-20\\-54&34&24&52\\-14&50&-16&-10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-20&58&-54&-14\\10&54&34&50\\38&4&24&-16\\30&-20&52&-10\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-48&-92&44\\48&0&-30&-70\\92&30&0&68\\-44&70&-68&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&-24&-46&22\\24&0&-15&-35\\46&15&0&34\\-22&35&-34&0\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}-20&34&-8&8\\34&54&19&15\\-8&19&24&18\\8&15&18&-10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-24&-46&22\\24&0&-15&-35\\46&15&0&34\\-22&35&-34&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}34\cdot24-8\cdot46-8\cdot22 & 20\cdot24-8\cdot15+8\cdot35 & 20\cdot46-34\cdot15-8\cdot34 & -20\cdot22-34\cdot35-8\cdot34\\ 54\cdot24+19\cdot46-15\cdot22 & -34\cdot24+19\cdot15+15\cdot35 & -46\cdot34-15\cdot54-34\cdot15 & 22\cdot34-35\cdot54+34\cdot19\\ 19\cdot24+24\cdot46-18\cdot22 & 8\cdot24+24\cdot15+18\cdot35 & 46\cdot8-15\cdot19-34\cdot18 & -8\cdot22-19\cdot35+34\cdot24\\ 15\cdot24+18\cdot46+10\cdot22 & -24\cdot8+18\cdot15+10\cdot35 & -46\cdot8-15\cdot15+34\cdot10 & 8\cdot22-35\cdot15+34\cdot18\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}272&640&138&-1902\\1840&-6&-2884&-436\\1164&1182&-529&-25\\1408&-272&-253&263\end{pmatrix}$$

Ответ:

№3

$$DC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -18 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что

$$A = CJD$$

$$A^2 = CJ\underbrace{DC}_{=E}JD = CJ^2D$$

$$A^3 = CJ\underbrace{DC}_{=E}J\underbrace{DC}_{=E}JD = CJ^3D$$

$\vdots$

$$A^{2021} = CJDC \dots JD = CJ^{2021}D$$

Тогда $S = E + A + A^2 + \dots + A^{2021} = E + C(J + J^2 + \dots + J^{2021})D$

Покажем по индукции, что $J^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & n\cdot(-1)^{n+1} & \frac{n(n-1)}{2}\cdot(-1)^n \\ 0 & (-1)^n & n\cdot(-1)^{n+1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

База: $n = 1$ $\quad J^1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Шаг:

$$\begin{pmatrix} (-1)^n & n\cdot(-1)^{n+1} & \frac{n(n-1)}{2}\cdot(-1)^n \\ 0 & (-1)^n & n\cdot(-1)^{n+1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & (n+1)\cdot(-1)^{n+2} & \frac{(n+1)n}{2}\cdot(-1)^{n+1} \\ 0 & (-1)^{n+1} & (n+1)(-1)^{n+2} \\ 0 & 0 & (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

Теперь посчитаем сумму $J + J^2 + \ldots + J^{2021} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$

Очевидно, что x_4, x_7, x_8 — нули

$$x_1 = x_5 = x_9 = \underbrace{-1+1}_{0} \underbrace{-1+1}_{0} + \ldots \underbrace{-1+1}_{0} - 1 = -1$$

$$x_2 = x_6 = 1 + 3 + \ldots + 2021 - 2 - 4 - \ldots - 2020 = \frac{1+2021}{2} \cdot 1011 - \frac{2+2020}{2} \cdot 1010$$

$$= 1011 \cdot 1011 - 1011 \cdot 1010 = 1011(1011 - 1010) = 1011$$

x_3:

Для четных n: $\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$ (Из формулы, доказанной по индукции)

Для нечетных n: $\frac{n}{2} - \frac{n^2}{2}$

Посчитаем сумму при $n = 2, 4, \ldots, 2020$

$$n^2 = 4\sum_{k=1}^{1010} k^2 = 4 \cdot \frac{1010 \cdot 1011 \cdot 2021}{6} = 2 \cdot 1010 \cdot 337 \cdot 2021$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{n^2}{2} = 1010 \cdot 337 \cdot 2021$$

$$n = \frac{2+2020}{2} \cdot 1010 = 1011 \cdot 1010$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{n}{2} = 1011 \cdot 505$$

Посчитаем сумму при $n = 1, 3, \ldots, 2021$

$$n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3} = \frac{2021 \cdot 2022 \cdot 2023}{3 \cdot 2} = \frac{2021 \cdot 674 \cdot 2023}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{n^2}{2} = \frac{2021 \cdot 674 \cdot 2023}{2 \cdot 2} = \frac{2021 \cdot 2023 \cdot 337}{2}$$

Scanned with CamScanner

$$n = \frac{1+2021}{2} \cdot 1011 = 1011 \cdot 1011$$

$$\frac{n}{2} = \frac{1011 \cdot 1011}{2}$$

Итог: $x_3 = 1010 \cdot 337 \cdot 2021 - 1011 \cdot 505 - \frac{2023 \cdot 2021 \cdot 337}{2} + \frac{1011 \cdot 1011}{2} =$

$$= -1021110$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1011 & -1021110 \\ 0 & -1 & 1011 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B$$

$$CB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1011 & -1021110 \\ 0 & -1 & 1011 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1010 & -1020107 \\ 0 & -1 & 1021 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$CBD = \begin{pmatrix} -1 & 1010 & -1020107 \\ 0 & -1 & 1021 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -18 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1011 & -1009989 \\ 0 & -1 & 1011 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S = E + CBD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1011 & -1009989 \\ 0 & -1 & 1011 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1011 & -1009989 \\ 0 & 0 & 1011 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 1011 & -1009989 \\ 0 & 0 & 1011 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

№4

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad v^T = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$uv^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -10 & 8 \\ -4 & -5 & 4 \\ 20 & 25 & -20 \end{pmatrix}$$

Проверено.

$$S^2 = u\underbrace{v^T u}_{=-33} v^T = -33 \cdot u \cdot v^T$$

$$v^T u = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = -33$$

$$S^3 = u\underbrace{v^T u}_{=-33}\underbrace{v^T u}_{=-33} v^T = (-33)^2 \cdot uv^T$$

$\vdots$

$$S^{2003} = uv^T uv^T \ldots uv^T = (-33)^{2002} \cdot uv^T = (-33)^{2002} \cdot \begin{pmatrix} -8 & -10 & 8 \\ -4 & -5 & 4 \\ 20 & 25 & -20 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow tr(S^{2003}) = 33^{2002} \cdot (-8) + 33^{2002} \cdot (-5) + 33^{2002} \cdot (-20) =$$

$$= 33^{2002} \cdot (-33) = (-33)^{2003}$$

Ответ: $(-33)^{2003}$.

№5

в) $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 6 \\ -8x_1 - x_2 + 10x_3 - 20x_4 = -9 \\ 5x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 10x_4 = -2 \\ -5x_1 + 7x_2 - 9x_3 + 18x_4 = -4 \end{cases}$

Запишем в расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -2 & -3 & 6 & 6 \\ -8 & -1 & 10 & -20 & -9 \\ 5 & -5 & 5 & -10 & -2 \\ -5 & 7 & -9 & 18 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{II \to II + I} \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -2 & -3 & 6 & 6 \\ -1 & -3 & 7 & -14 & -3 \\ 5 & -5 & 5 & -10 & -2 \\ -5 & 7 & -9 & 18 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[I \leftrightarrow II]{II \to II \cdot (-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -7 & 14 & 3 \\ 7 & -2 & -3 & 6 & 6 \\ 5 & -5 & 5 & -10 & -2 \\ -5 & 7 & -9 & 18 & -4 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[\substack{III \to III - 5 \cdot I \\ IV \to IV + 5 \cdot I}]{II \to II - 7 \cdot I} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -7 & 14 & 3 \\ 0 & -23 & 46 & -92 & -15 \\ 0 & -20 & 40 & -80 & -17 \\ 0 & 22 & -44 & 88 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[II \to II \cdot (-1)]{II \to II + IV} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -7 & 14 & 3 \\ 0 & +1 & -2 & +4 & +4 \\ 0 & -20 & 40 & -80 & -17 \\ 0 & 22 & -44 & 88 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[IV \to IV - 22 \cdot II]{III \to III + 20 \cdot II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -7 & 14 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 63 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -77 \end{array}\right)$$

Из III и IV уравнений системы можно сделать вывод, что система несовместна.

Scanned with CamScanner

б) $$\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 6x_4 = -20 \\ -8x_1 - x_2 + 10x_3 - 20x_4 = 13 \\ 5x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 10x_4 = -25 \\ -5x_1 + 7x_2 - 9x_3 + 18x_4 = 31 \end{cases}$$

Запишем в расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -2 & -3 & 6 & -20 \\ -8 & -1 & 10 & -20 & 13 \\ 5 & -5 & 5 & -10 & -25 \\ -5 & 7 & -9 & 18 & 31 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II} \to \text{II}\cdot(-1)]{\text{II} \to \text{II} + \text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -2 & -3 & 6 & -20 \\ 1 & 3 & -7 & 14 & 7 \\ 5 & -5 & 5 & -10 & -25 \\ -5 & 7 & -9 & 18 & 31 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -7 & 14 & 7 \\ 7 & -2 & -3 & 6 & -20 \\ 5 & -5 & 5 & -10 & -25 \\ -5 & 7 & -9 & 18 & 31 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{III} \to \text{III} - 5\cdot\text{I} \\ \text{IV} \to \text{IV} + 5\cdot\text{I}}]{\text{II} \to \text{II} - 7\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -7 & 14 & 7 \\ 0 & -23 & 46 & -92 & -69 \\ 0 & -20 & 40 & -80 & -60 \\ 0 & 22 & -44 & 88 & 66 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\text{III} \to -\frac{1}{20}\cdot\text{III} \\ \text{IV} \to \frac{1}{22}\cdot\text{IV}}]{\text{II} \to -\frac{1}{23}\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -7 & 14 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{IV} \to \text{IV} - \text{II}]{\text{III} \to \text{III} - \text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -7 & 14 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{\text{I} \to \text{I} - 3\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 3 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_1 = -2 + x_3 - 2x_4 \\ x_2 = 3 + 2x_3 - 4x_4 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} -2 + x_3 - 2x_4 \\ 3 + 2x_3 - 4x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \; x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

Частное решение $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ подходит.

Scanned with CamScanner