Линал ДЗ-9 Панфилов Борис БПМИ-216

Волшебное число – 4.

№1.1 (21.1) з)

$$-1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

Ответ: $2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

№1.2 (21.1) о)

$$\sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

Ответ: $2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

№1.3 (22.7) з)

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right)\right), \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

1) $k=0$, Получаем $\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1+i$

2) $k=1$, Получаем $\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1+i$

3) $k=2$, Получаем $\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1-i$

4) $k=3$, Получаем $\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1-i$

Ответ: $1+i$, $1-i$, $i-1$, $-1-i$.

N 1.4 (22.7) м)

$$\sqrt[4]{8\sqrt{3}i-8} = \sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} = 2\cdot\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}\right) =$$

$$= 2\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}\right)\right), \quad k\in\{0,1,2,3\}$$

1) $k=0$, $2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}+i$

2) $k=1$, $2\cdot\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1+\sqrt{3}i$

3) $k=2$, $2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -\sqrt{3}-i$

4) $k=3$, $2\cdot\left(\frac{1}{2}+i\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 1-\sqrt{3}i$

Ответ: $\sqrt{3}+i$, $-1+\sqrt{3}i$, $-\sqrt{3}-i$, $1-\sqrt{3}i$.

№1.5 (22.7) р)

$$\sqrt[4]{-\frac{18}{1+i\sqrt{3}}} = \sqrt[4]{-\frac{18(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}} = \sqrt[4]{-\frac{9(1-i\sqrt{3})}{2}} = \sqrt[4]{-\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\sqrt{3}i} =$$

$$= \sqrt[4]{9\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} = \sqrt[4]{9\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt[4]{9}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}\right)$$

$$= \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}+i\sin\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{2}\right), \quad k \in \{0,1,2,3\}$$

1) $k=0$, $\sqrt{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $k=1$, $\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{3}{2}$

3) $k=2$, $\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

4) $k=3$, $\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{2}+i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{3}{2}$

Ответ: $\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{3}{2}$.

№2.1 (21.1) т)

$$\cos\alpha - i\sin\alpha = 1\cdot(\cos\alpha - i\sin\alpha) = \cos\alpha - i\sin\alpha$$

Ответ: $\cos\alpha - i\sin\alpha$.

№2.2 (21.1) х)

$$1+\cos\varphi+i\sin\varphi = z$$

$$|z| = \sqrt{(1+\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi} = \sqrt{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi} = \sqrt{2+2\cos\varphi} =$$

$$= \sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}} = 2\cos\frac{\varphi}{2}$$ Можем извлечь корень с плюсом, т.к. в минусе будет аналогично.

$$z = 2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\frac{1+\cos\varphi}{2\cos\frac{\varphi}{2}}+i\frac{\sin\varphi}{2\cos\frac{\varphi}{2}}\right) = 2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}}+i\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\cos\frac{\varphi}{2}}\right) =$$

$$= 2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

Ответ: $2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$

№ 2.3 (22.6)

Не верно, т.к. в первом случае мы получим ns корней, а во втором только n.
А по условию $ns > n \Leftrightarrow s > 1$

№ 2.4 (22.4) в)

$T.g.$ $\sqrt[n]{zw} = u\sqrt[n]{w}$, где u - одно из значений $\sqrt[n]{z}$

По определению $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$

$$\sqrt[n]{|z||w|(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi)} = \sqrt[n]{|z|}\sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\cos\frac{\psi+2\pi t}{n} + i\sin\frac{\psi+2\pi t}{n}\right) =$$

$$= \sqrt[n]{|z|}\sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n} + \frac{\psi+2\pi t}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n} + \frac{\psi+2\pi t}{n}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[n]{|z|}\sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\varphi+\psi+2\pi k+2\pi t}{n} + i\sin\frac{\varphi+\psi+2\pi k+2\pi t}{n}\right) \ominus$$

Заметим, что и k, и t пробегают все значения от 0 до $n-1$. А значит весь аргумент пробегает все значения от $\frac{\varphi+\psi}{n}$ до $\frac{\varphi+\psi+4\pi(n-1)}{n}$, хотя нам требуется только до $\frac{\varphi+\psi+2\pi(n-1)}{n}$ $\Rightarrow$ мы можем взять $k=0$ и равенство соблюдется

$$\ominus \sqrt[n]{|z|}\sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\varphi+\psi+2\pi t}{n} + i\sin\frac{\varphi+\psi+2\pi t}{n}\right) = u\sqrt[n]{w},$$

где u - значение $\sqrt[n]{z}$ при $k=0$

■

Scanned with CamScanner

№2.5 (22.22)

$$z = \frac{2+i}{2-i} = \frac{(2+i)^2}{(2-i)(2+i)} = \frac{3+4i}{5}$$

$$z = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i = \cos\left(\arccos\frac{3}{5}\right) + i\sin\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$$

Предположим, что

$$z^n = \cos\left(n\arccos\frac{3}{5}\right) + i\sin\left(n\arcsin\frac{4}{5}\right) = 1$$

$\Rightarrow$ не должно быть мнимой части $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin\left(n\arcsin\frac{4}{5}\right) = 0$$

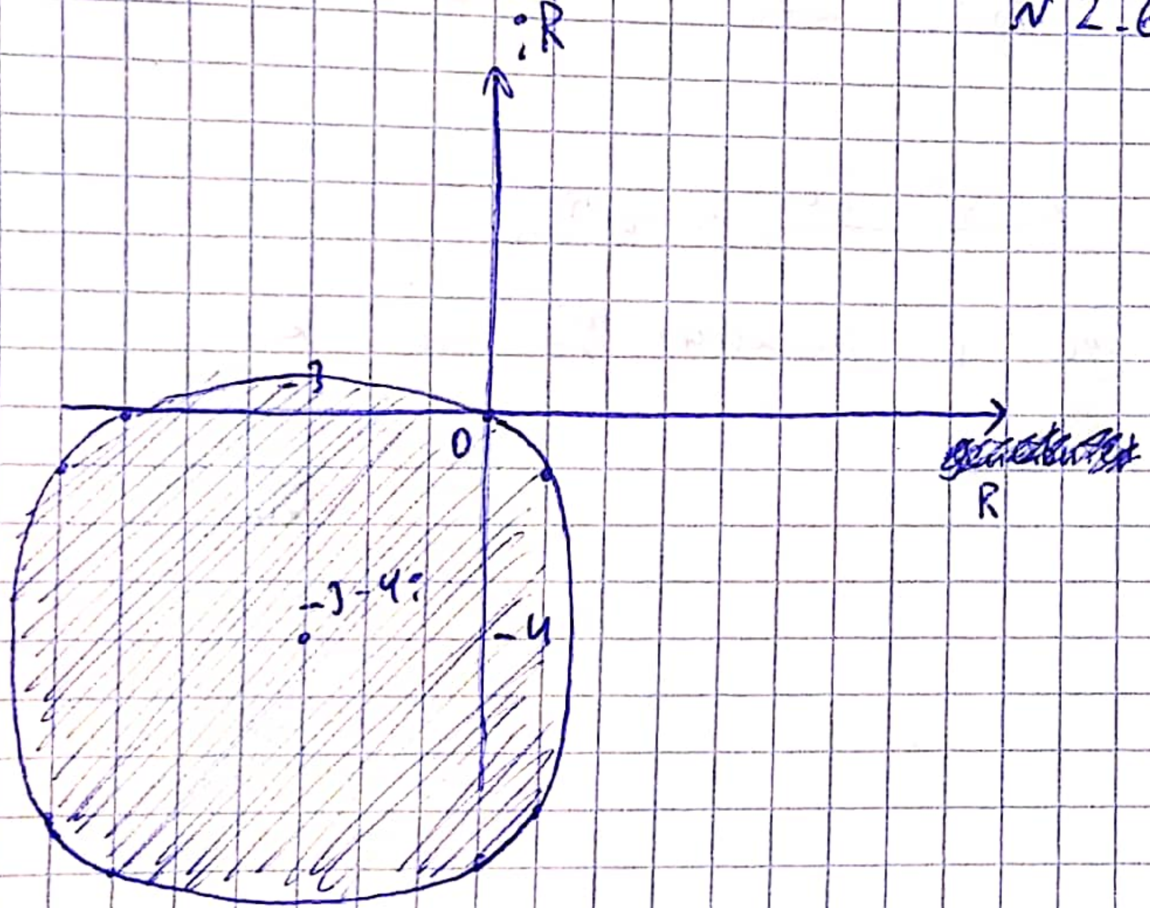
$$n\arcsin\frac{4}{5} = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$n = \frac{\pi k}{\arcsin\frac{4}{5}} \notin \mathbb{N}$$

противоречие

Ответ: не является

N 2.6 (24.6) g)



№27

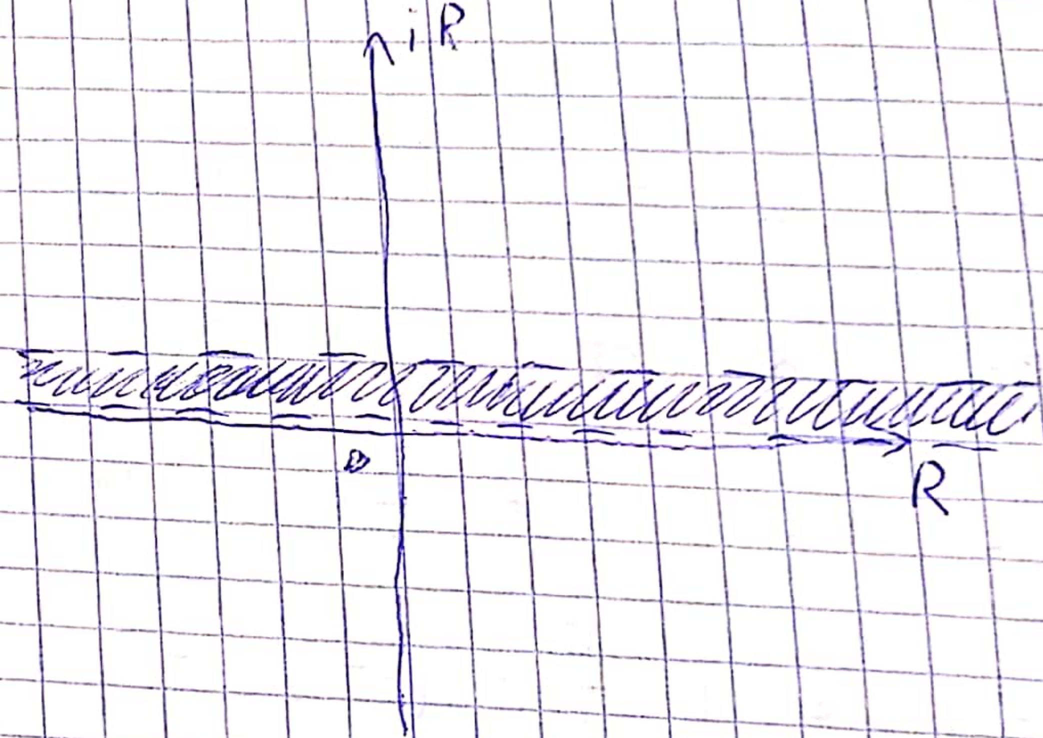
$z = a + ib$

$-1 < \mathrm{Re}\, iz < 0$

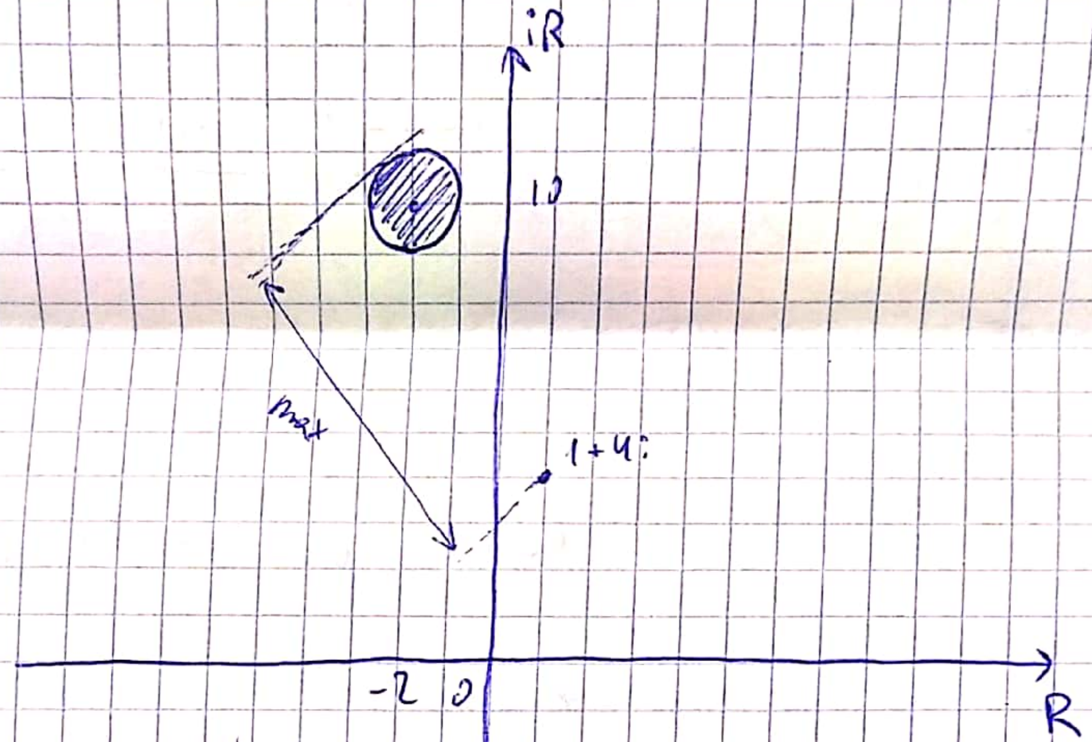
$-1 < \mathrm{Re}\, ai - b < 0$

$-1 < -b < 0$

$0 < b < 1$



№ 3.1 (24.15)



$$|-2+10i-1-4i|+1$$

$$\max|1-4i-z| = \sqrt{(-2-1)^2+(10-4)^2}+1 = \sqrt{9+36}+1 = \sqrt{45}+1 = 3\sqrt{5}+1$$

радиус окружности
+ расстояние между точками.

Ответ: $3\sqrt{5}+1$.

№ 3.2 (22.11)

$$\sqrt[n]{1} = 1\cdot\left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right), \quad k\in\{0, 1, \ldots, n-1\}$$

$$\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\cos\frac{2\pi(n-1)}{n} + i\sin\frac{2\pi(n-1)}{n}\right) =$$

$$= \left(\cos\frac{2\pi+4\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi+4\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{6\pi}{n} + i\sin\frac{6\pi}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\cos\frac{2\pi(n-1)}{n} + i\sin\frac{2\pi(n-1)}{n}\right) =$$

$$= \left(\cos\frac{6\pi}{n} + i\sin\frac{6\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{6\pi}{n} + i\sin\frac{6\pi}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\cos\frac{2\pi(n-1)}{n} + i\sin\frac{2\pi(n-1)}{n}\right) =$$

Аналогичным образом перемножим все скобки и получим

$$\cos\frac{(2+4+\ldots+2(n-1))\pi}{n} + i\sin\frac{(2+4+\ldots+2(n-1))\pi}{n} =$$

$$= \cos\frac{\frac{2+2(n-1)}{2}\cdot(n-1)\cdot\pi}{n} + i\sin\frac{\frac{2+2(n-1)}{2}\cdot(n-1)\cdot\pi}{n} =$$

$$= \cos(n-1)\pi + i\sin(n-1)\pi$$

Ответ: $\cos(n-1)\pi + i\sin(n-1)\pi$.

№ 3.3 (23.1) б)

$$1 + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \ldots = C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots = 2^n$$

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots = 0$$

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = \frac{2^n+0}{2} = 2^{n-1}$$

$$C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots = Re(1+i)^n = \sqrt{2}^n\cdot\cos\frac{\pi n}{4}$$

$$C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots = \frac{2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{\pi n}{4}}{2} = 2^{n-2} + 2^{\frac{n-2}{2}}\cos\frac{\pi n}{4}$$

Ответ: $2^{n-2} + 2^{\frac{n-2}{2}}\cos\frac{\pi n}{4}$.