150*. Показать, что число перестановок чисел $1, 2, \dots, n$, содержащих k инверсий, равно числу перестановок тех же чисел, содержащих $C_n^2 - k$ инверсий.

Следующие подстановки разложить в произведение независимых циклов и по декременту (т. е. разности между числом действительно перемещаемых элементов и числом циклов) определить их четность. Для удобства подсчета декремента можно для чисел, остающихся на месте, ввести в разложение одночленные циклы.

151. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. **152.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

153. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. **154.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

155. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$. **156.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

157. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \dots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix}$.

158. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & \dots & 3n & 3n-1 & 3n-2 \end{pmatrix}$.

159. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-3 & 2n-2 & 2n-1 & 2n \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 2n-1 & 2n & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

160. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & \dots & 3n-1 & 3n & 3n-2 \end{pmatrix}$.

161. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

162. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & nk-k+1 & nk-k+2 & \dots & nk \\ k+1 & k+2 & \dots & 2k & \dots & 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}$.

В следующих подстановках перейти от записи в циклах к записи двумя строками:

163. $(1\,5)(2\,3\,4)$. **164.** $(1\,3)(2\,5)(4)$.

165. $(7\,5\,3\,1)(2\,4\,6)(8)(9)$. **166.** $(1\,2)(3\,4)\dots(2n-1, 2n)$.

167. $(1, 2, 3, 4, \dots, 2n-1, 2n)$. **168.** $(3\,2\,1)(6\,5\,4)\dots(3n, 3n-1, 3n-2)$.

Перемножить подстановки:

169. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. **170.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

171. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

172. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^2$. **173.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}^3$.

174. Доказать, что если некоторая степень цикла равна единице, то показатель степени делится на длину цикла. (Длиной цикла называется число его элементов.)

175. Доказать, что среди всех степеней подстановки, равных единице, наименьший показатель равен наименьшему общему кратному длин циклов, входящих в разложение подстановки.

176*. Найти A^{100}, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$.

177. Найти A^{150}, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 9 & 7 & 1 & 10 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

178. Найти подстановку X из равенства $AXB = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

179. Доказать, что умножение подстановки на транспозицию (т. е. двучленный цикл) (α, β) слева равносильно транспозиции (т. е. перемене местами) чисел α и β в верхней строке подстановки, а умножение на ту же транспозицию справа равносильно транспозиции α и β в нижней строке подстановки.

180. Доказать, что если числа α и β входят в один цикл подстановки, то при умножении этой подстановки на транспозицию (α, β) (слева или справа) данный цикл распадается на два цикла, а если числа α и β входят в различные циклы, то при указанном умножении эти циклы сливаются в один.

181*. Пользуясь двумя предыдущими задачами, доказать, что число инверсий и декремент любой подстановки имеют одинаковую четность.

182*. Доказать, что наименьшее число транспозиций, на произведение которых разлагается данная подстановка, равно ее декременту.

183*. Доказать, что наименьшее число транспозиций, переводящих перестановку $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в перестановку $b_1, b_2, \ldots, b_n$ тех же элементов, равно декременту подстановки

$$P = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix}.$$