Линал ДЗ-22 Панфилов Борис БПМИ-216 Волшебное число-4

№1

$$v = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad L = \langle \underset{u_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}} \rangle$$

Для начала заметим, что векторы u_1, u_2 лин независимы, а значит являются базисом L.

Теперь можем воспользоваться формулой $x = (u^T u)^{-1} u^T v$, чтобы найти координаты $v_{\shortparallel}$ в базисе $\{u_1, u_2\}$.

$$x = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 27 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} \ominus$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 6 & -6 & 1 & 0 \\ -6 & 27 & 0 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 21 & 1 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{21} & \frac{1}{21} \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{14} & \frac{1}{21} \\ 0 & 1 & \frac{1}{21} & \frac{1}{21} \end{array} \right)$$

$$\ominus \begin{pmatrix} \frac{3}{14} & \frac{1}{21} \\ \frac{1}{21} & \frac{1}{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{7} \\ \frac{25}{21} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v_{\shortparallel} = \frac{20}{7} u_1 + \frac{25}{21} u_2 = \frac{20}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{25}{21} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45/7 \\ -25/21 \\ 5/3 \\ 20/21 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 45/7 \\ -25/21 \\ 5/3 \\ 20/21 \end{pmatrix}$.

№2

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = -1 \end{cases} \iff x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_2} + x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{u_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v}$$

Чтобы найти псевдорешение найдем проекцию v на $L := \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$

Найдем коор-ты проекции v по формуле $x = (u^T u)^{-1} u^T v$, где $u := (u_1 | u_2 | u_3)$

$$x = \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{5}{9} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{11}{36} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

№1.3

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Т.к. размерность $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ совпадает с размерностью пр-ва, из которого взяты векторы

$$|vol\, P(v_1, v_2, v_3, v_4)| = |\det[v_1 v_2 v_3 v_4]| = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & -5 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \left| \det \begin{pmatrix} -2 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} -5 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \right| = |5 \cdot 6| = 30$$

Ответ: 30.

№ 1.4

Расстоянием между вектором v и подпр-м L будет ортогональное дополнение v. Как мы знаем $V_\perp = V - V_{\parallel}$. А $v_{\parallel}$ мы уже искали в первом номере. Таким образом

$$V_\perp = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 45/7 \\ -25/21 \\ 5/3 \\ 20/21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/7 \\ 46/21 \\ -2/3 \\ 1/21 \end{pmatrix} \qquad \rho(V, L) = |V_\perp| = \sqrt{\frac{38}{7}}$$

Ответ: $\cancel{\begin{pmatrix} 4/7 \\ 46/21 \\ -2/3 \\ 1/21 \end{pmatrix}}$ $\sqrt{\frac{38}{7}}$

№ 1.5.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{vol}(A, B, C, D) = \sqrt{\det\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}} = \sqrt{-\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}} =$$

$$= \sqrt{-\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -8 & -2 \\ 0 & -6 & -19 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}} = \sqrt{-\det\begin{pmatrix} -2 & -8 & -2 \\ -6 & -19 & -8 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}} = \sqrt{-\det\begin{pmatrix} -2 & -8 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot \det\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

$\Rightarrow$ объем тетраэдра равен $\frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{4}{3}$.

Ответ: $\frac{4}{3}$

N 1.6

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[b, c] = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$[a, [b, c]] = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & [b,c]_2 \\ a_3 & [b,c]_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & [b,c]_3 \\ a_1 & [b,c]_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & [b,c]_1 \\ a_2 & [b,c]_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-14 \\ 4-12 \\ 21-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -8 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$(a, b, c) = vol(a, b, c) = det[a, b, c] = det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = -7$$

Ответ: $[a, [b, c]] = \begin{pmatrix} -15 \\ -8 \\ 19 \end{pmatrix}$

$(a, b, c) = -7$

N 1.6

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[b, c] = \begin{pmatrix} 4-7 \\ 4-2 \\ 7-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[a, [b, c]] = \begin{pmatrix} 6+3 \\ -6+3 \\ -1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$(a, b, c) = \operatorname{vol}(a, b, c) = \det[a, b, c] = \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & -19 & -5 \\ 0 & -10 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= -\det\begin{pmatrix} -19 & -5 \\ -10 & -3 \end{pmatrix} = -7$$

Ответ: $[a, [b, c]] = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$

$(a, b, c) = -7.$

N 1.7

$[a, b] = c$

$$[3(a+b), 2b-a] = 3[a+b, 2b-a] = 3[a, 2b-a] + 3[b, 2b-a] =$$

$$= 3[a, 2b] - 3\underbrace{[a, a]}_{=0} + 3\underbrace{[b, 2b]}_{=6[b,b]=0} - 3[b, a] = 6[a, b] + 3[a, b] = 9[a, b] = 9c.$$

Ответ: $9c$.