Линал ДЗ-16

№1.1

Найдем матрицу линейного оператора:

Пусть $E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}$ - базис

$$f(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T$$

$$f(E_{12}) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P$$

$$f(E_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = Q$$

$$f(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = S$$

Матрица лин. отобр.:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} E_{11} & E_{12} & E_{21} & E_{22} \end{array} \\ \begin{array}{c} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \end{array} = B$$

Чтобы найти ядро решим С/У $Bx = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{II} \to \frac{1}{6}\cdot\mathrm{II} \quad \mathrm{IV} \to \frac{1}{6}\mathrm{IV}]{\mathrm{II} \to \mathrm{II} - 3\cdot\mathrm{I} \quad \mathrm{IV} \to \mathrm{IV} - 3\cdot\mathrm{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I} \to \mathrm{I} + \mathrm{II} \quad \mathrm{III} \to \mathrm{III} + \mathrm{IV}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ ядро состоит только из нулевого вектора (матрицы)

Из проделанных эл. преобр видно, что $\det B \neq 0$ $\Rightarrow$ все столбцы B лин независимы $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}\, B = \langle T, P, Q, S \rangle$

№1.2

Перейдем от многочленов к векторам их коэффициентов.
Получаем базис, состоящий из 3-х векторов: $\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}}_{v_3}$

Найдем коорд-ты $F(x^2-1) \cong \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}_{v}$ в этом базисе:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II} \to \text{II}+\text{I}]{\text{I} \to (-1)\cdot \text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III} \to \text{III} - \text{I} + 2\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow v = -2v_1 - v_2 - v_3$

Чтобы перейти к другому подпр-ву домножаем вектор коор-т на матрицу линейного оператора слева:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-3\\-5\end{pmatrix}$$

То есть $\begin{pmatrix}-1\\-3\\-5\end{pmatrix}$ - коор-ты $F(v)$

Теперь запишем сам образ в виде многочлена. Для этого найдем коэф-т перед каждой степенью икса.

$$-1\cdot v_1 - 3\cdot v_2 - 5\cdot v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-3\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\5\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow F(x^2-1) = 5x^2 + 2x.$

№ 1.3

Давайте попробуем найти матрицу A нашего оператора. Мы знаем, что он переводит векторы u_1, u_2, u_3 в векторы w_1, w_2, w_3 соответственно, то есть

$$Au_1 = w_1, \quad Au_2 = w_2, \quad Au_3 = w_3$$

$$\Updownarrow$$

$$A(u_1 u_2 u_3) = w_1 w_2 w_3$$

$$\Updownarrow$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Запишем в расширенную матрицу.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III} \to \text{III} - \text{I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III} \to \text{III} + \text{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I} \to \text{I} - \text{II} - \text{III}}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Существует единственная подходящая матрица A.

Ответ: $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

№1.4

Перепишем условие задачи, переходя от многочленов к векторам их коэффициентов.

Существует ли отображение $\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, для которого

$$\varphi((1,-1,-1,1)^T) = (0,0,1,1)^T$$

$$\varphi((1,0,1,-2)^T) = (0,1,0,1)^T$$

$$\varphi((1,1,0,-2)^T) = (1,0,0,1)^T$$

$$\varphi((1,0,0,-1)^T) = (0,0,0,-2)^T$$

Попробуем найти матрицу лин. отобр. A. Мы знаем, что

$$Au_1 = w_1, \quad Au_2 = w_2, \quad Au_3 = w_3, \quad Au_4 = w_4$$

$$\Updownarrow$$

$$A(u_1, u_2, u_3, u_4) = w_1, w_2, w_3, w_4$$

$$\Updownarrow$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Запишем в расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{III \to III - I \\ IV \to IV - I}]{II \to II - I} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[IV \to IV - II]{III \to III - 2 \cdot II} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) =$$

$$\xrightarrow{III \to III - 3 \cdot IV} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Получили несовместную систему (тут их 4 но подойдет любая)

$\Rightarrow$ подходящей матрицы A нет

$\Rightarrow$ такого отображения не существует.

Ответ: нет, не существует.

№1.5

Найдем матрицу перехода к ~~от~~ стандартному ~~го~~ базису от базиса ~~а~~ u_1, u_2, u_3.

$$(u_1\ u_2\ u_3)\cdot C = (e_1, e_2, e_3)$$

Запишем в расширенную матрицу получившуюся СЛУ

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II} \to -1\cdot\text{II}]{\text{I} \leftrightarrow \text{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & +1 & +2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{I} \to \text{I} - \text{III}]{\text{II} \to \text{II} - 2\cdot\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{\text{I} \to \text{I} - 2\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем координаты вектора, отображение которого мы ищем, в исходном базисе. Для этого домножим координаты в стандартном базисе на C ~~слева~~ слева ~~справа~~:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Теперь найдем коор-ты $\varphi((0,1,-1)^T)$ в базисе w_1, w_2. Для этого домножим наш вектор на матрицу лин. отобр сле~~справа~~:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = V$$

Найдем матрицу перехода от стандартного базиса к базису $w_1 w_2$

$$(e_1, e_2)\cdot D = w_1, w_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем коор-ты вектора V в стандартном базисе. Для этого домножим коор-ты в базисе $w_1 w_2$ на D слева

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

№ 1.6

Назовем базис $1, x, x^2$ коротким, а другой из условия — длинным.

Найдем матрицу перехода от длинного базиса к короткому.

Для этого перейдем к работе с векторами коэф-тов многочленов.

$$\underset{u_1}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{u_3}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}} \text{ — короткий базис}$$

$$\underset{w_1}{\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}}, \underset{w_2}{\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}}, \underset{w_3}{\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}} \text{ — длинный базис}$$

$$(u_1 u_2 u_3) = (w_1 w_2 w_3)\cdot C \iff (w_1 w_2 w_3)\cdot C = (u_1 u_2 u_3)$$

Запишем в расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&1&2&0&0&1\\2&3&1&0&1&0\\1&2&3&1&0&0\end{array}\right) \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&3&1&0&1&0\\3&1&2&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[III \to III - 3\cdot I]{II \to II - 2\cdot I} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-1&-5&-2&1&0\\0&-5&-7&-3&0&1\end{array}\right) \xrightarrow{III \to III - 5\cdot II}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-1&-5&-2&1&0\\0&0&18&7&-5&1\end{array}\right) \xrightarrow[I \to I + 2\cdot II]{III \to \frac{1}{18}\cdot III} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-7&-3&2&0\\0&-1&-5&-2&1&0\\0&0&1&\frac{7}{18}&-\frac{5}{18}&\frac{1}{18}\end{array}\right) \xrightarrow[I \to I + 7\cdot III]{II \to II + 5\cdot III}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{5}{18}&\frac{1}{18}&\frac{7}{18}\\0&-1&0&-\frac{1}{18}&-\frac{7}{18}&\frac{5}{18}\\0&0&1&\frac{7}{18}&-\frac{5}{18}&\frac{1}{18}\end{array}\right) \xrightarrow{II \to -1\cdot II} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\\0&1&0&\underbrace{\begin{matrix}-\frac{5}{18}&\frac{1}{18}&\frac{7}{18}\\\frac{1}{18}&\frac{7}{18}&-\frac{5}{18}\\\frac{7}{18}&-\frac{5}{18}&\frac{1}{18}\end{matrix}}_{C}\\0&0&1&\end{array}\right)$$

Найдем матрицу перехода от короткого к длинному

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&0&1&3&1&2\\0&1&0&2&3&1\\1&0&0&1&2&3\end{array}\right) \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&2&3\\0&1&0&2&3&1\\0&0&1&3&1&2\end{array}\right) \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}$$

Пусть X — короткий, Y — длинный

$$\varphi(Y)\cdot C = \varphi(X) = X\cdot A = Y\cdot C\cdot A \Rightarrow \varphi(Y) = Y\cdot C\cdot A\cdot C^{-1}$$

$$\Rightarrow A' = C\cdot A\cdot C^{-1}$$

$$A' = \begin{pmatrix}-\frac{5}{18}&\frac{1}{18}&\frac{7}{18}\\\frac{1}{18}&\frac{7}{18}&-\frac{5}{18}\\\frac{7}{18}&-\frac{5}{18}&\frac{1}{18}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

№1.7

Пусть $\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ - базис X

$\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ - базис Y

$X = Y \cdot C$, где C - матрица перехода.

$Y = X \cdot C^{-1}$

Найдем C

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{I \to I - 2\cdot II} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -11 & -9 \\ 2 & 1 & 6 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{II \to II - 2\cdot I} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -11 & -9 \\ 0 & -1 & 28 & 23 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[II \to (-1)\cdot II]{I \to I + II} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 17 & 14 \\ 0 & 1 & -28 & -23 \end{array}\right) \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 17 & 14 \\ -28 & -23 \end{pmatrix}$$

Найдем C^{-1}

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II \to II - 6\cdot I} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -28 & -17 \end{array}\right) \xrightarrow{I \to I + II} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -23 & -14 \\ 0 & -1 & -28 & -17 \end{array}\right) \xrightarrow{II \to -1\cdot II}$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -23 & -14 \\ 0 & 1 & 28 & 17 \end{array}\right) \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -23 & -14 \\ 28 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(Y) \cdot C = \varphi(X) = X \cdot A = Y \cdot C \cdot A \Rightarrow \varphi(Y) = Y \cdot C \cdot A \cdot C^{-1}$$

$$\Rightarrow A' = C \cdot A \cdot C^{-1}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 17 & 14 \\ -28 & -23 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -23 & -14 \\ 28 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2532 & -1539 \\ 4169 & 2534 \end{pmatrix}$$

№2.1

Допустим у нас есть подпр-во U. Мы можем задать его, как лин. оболочкой базисных векторов, так и ~~[illegible]~~ ОСЛУ, множеством решений которой является U.

С семинаров мы знаем, что ядро - это множество решений уравнения $Ax = 0$, где A - матрица лин. отображения.

Так давайте зададим U при помощи ОСЛУ. В таком случае мы просто напрямую получим матрицу A, которая является матрицей какого-нибудь линейного отображения.

Таким образом мы привели алгоритм, а следовательно доказали, что каждое подпр-во является ядром какого-нибудь лин. отобр.

№2.2.

Давайте зададим U при помощи лин. оболочки базисных векторов. Запишем эти вектора в столбцы матрицы. И о чудо, это окажется матрица A какого-то лин. отображения, причем U будет образом этого лин. отображения, т.к. ~~[illegible]~~ образом, ~~[illegible]~~ является лин оболочка векторов составляющих матрицу A.

№2.3

Может. Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$ - матрица лин. оператора

Найдем ядро:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Найдем образ:

Нетрудно заметить, что 1 и 2 столбцы лин зависимы $\Rightarrow \operatorname{Im}\varphi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Ядро и образ совпали.

№2.4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

A и A' не могут быть матрицами одного и того же лин. оператора, т.к. $\operatorname{tr} A = 0 \neq 7 = \operatorname{tr} A'$. А насколько нам известно tr является инвариантом.

Ответ: нет.

№2.5

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

A и A' не могут быть матрицами одного и того же лин. оператора, т.к. $\det A = -10 \neq -4 = \det A'$. А насколько нам известно $\det$ является инвариантом

Ответ: нет.

№2.6

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

A и A' не могут быть матрицами одного и того же лин оператора, т.к. $\operatorname{rk} A = 1 \neq 2 = \operatorname{rk} A'$. А насколько нам известно rk является инвариантом.

№2.7

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Попробуем найти матрицу X, т.что $A' = X^{-1} A X \Leftrightarrow XA' = AX$

Пусть $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 & 2x_2 \\ x_3 + x_4 & 2x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_3 & 2x_2 - x_4 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

Получаем следующую систему:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу:

$$\left(\begin{matrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \longrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \qquad \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Пусть $x_2 = x_3 = 1$. Получаем матрицу перехода $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\exists$ матрица перехода $\Rightarrow$ A и A' могут быть матрицами одного и того же лин оператора.

Ответ: да, могут.

№ 2.8

а) Пусть $V = \langle e_1, e_2, e_3 \ldots \rangle$

счетный набор линейно независимых векторов.

Определим оператор $\varphi: V \to V$ следующим образом:

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = 0 \\ \varphi(e_i) = e_{i-1} \quad \forall i \neq 1 \end{cases}$$

Получаем, что $\operatorname{Ker} \varphi \neq 0$ и $\operatorname{Im} \varphi = V$

Для полученного φ не существует φ^{-1}, т.к. для этого φ должен быть биективен. А в нашем случае он не инъективен => не биективен.

б) Пусть $V = \langle e_1, e_2, e_3 \ldots \rangle$

счетный набор лин. нез. векторов.

Определим оператор $\varphi: V \to V$ следующим образом:

$\varphi(e_i) = e_{i+1}$

Получаем, что $\operatorname{Ker} \varphi = 0$ и $\operatorname{Im} \varphi \neq V$

Для полученного φ не существует φ^{-1}, т.к. для этого φ должен быть биективен. А в нашем случае он не сюръективен => не биективен.