1) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6x + 8y - 36z = 0$;

2) $4x^2 - y^2 - z^2 + 32x - 12z + 44 = 0$;

3) $3x^2 - y^2 + 3z^2 - 18x + 10y + 12z + 14 = 0$;

4) $6y^2 + 6z^2 + 5x + 6y + 30z - 11 = 0$.

716. Определить вид поверхности и ее расположение относительно системы координат, пользуясь поворотом системы координат вокруг одной из ее осей:

1) $z^2 = 2xy$;

2) $z = xy$;

3) $z^2 = 3x + 4y$;

4) $z^2 = 3x^2 + 4xy$;

5) $z^2 = x^2 + 2xy + y^2 + 1$.

717. Доказать, что каждая из следующих поверхностей является поверхностью вращения, определить ее вид, написать каноническое уравнение и найти расположение поверхности относительно исходной системы координат:

1) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 4yz - 8zx - 14x - 4y + 14z + 18 = 0$;

2) $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 - 4xy + 4yz + 8zx - 6x + 6y + 6z + 10 = 0$;

3) $2yz + 2zx + 2xy + 2x + 2y + 2z + 1 = 0$;

4) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$;

5) $2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xz - 4x - 8y + 3 = 0$;

6) $5x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 2zx + 10x - 4y - 2z + 4 = 0$;

7) $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx - 1 = 0$;

8) $4xy + 4yz + 4zx + 4x + 4y + 4z + 3 = 0$.

718. Определить вид каждой из следующих поверхностей, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат

1) $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 4yz - 8zx - 28x + 2y + 16z + 45 = 0$;

2) $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$;

3) $7x^2 + 7y^2 + 16z^2 - 10xy - 8yz - 8zx - 16x - 16y - 8z + 72 = 0$;

4) $4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4yz + 4zx - 16x - 16y + 10z - 2 = 0$;

5) $2x^2 - 7y^2 - 4z^2 + 4xy + 20yz - 16zx + 60x - 12y + 12z - 90 = 0$;

6) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$;

7) $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$;

8) $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2yz + 2zx - 4x + 6y - 2z + 3 = 0$;

9) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 6zx - 2x + 6y + 2z = 0$;

10) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 10zx + 2x + 4y - 10z - 1 = 0$;

11) $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 4x + 4z = 0$.

719. Определить аффинный тип поверхности с помощью метода Лагранжа:

1) $4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z + 3 = 0$;

2) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y - 10z = 0$;

3) $x^2 + y^2 - 3z^2 - 2xy - 6xz - 6yz + 2x + 2y + 4z = 0$;

4) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0$;

5) $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + x - 4y - 3z + 2 = 0$;

6) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz + x + y - z = 0$;

7) $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + 4x - 2y = 0$;

8) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz + 2x + 4y - 10z - 1 = 0$;

9) $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1 = 0$;

10) $4xy + 2x + 4y - 6z - 3 = 0$;

11) $xy + xz + yz + 2x + 2y - 2z = 0$.

Система координат аффинная.

§ 7.4. Ортогональные инварианты поверхностей второго порядка

720. С помощью инвариантов

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \qquad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{vmatrix}$$

найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы поверхность второго порядка, заданная общим уравнением

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}zx + \\ + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0,$$

была:

1) эллипсоидом;

2) мнимым эллипсоидом;

3) мнимым конусом;

4) однополостным гиперболоидом;

5) двуполостным гиперболоидом;

6) конусом;

7) эллиптическим параболоидом;

8) гиперболическим параболоидом.

721 (Ортогональные полуинварианты). Доказать, что:

1) функции

$$I_3^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{13} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a \end{vmatrix},$$

$$I_2^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & a \end{vmatrix}$$

от коэффициентов многочлена второй степени с тремя переменными

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}zx + \\ + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0$$

являются инвариантами однородного ортогонального преобразования переменных;

2) I_3^* является инвариантом неоднородного ортогонального преобразования переменных, если

$$I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{vmatrix} = 0, \quad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0;$$

3) I_2^* является инвариантом неоднородного ортогонального преобразования переменных, если $I_3 = I_4 = 0$ и

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad I_3^* = 0.$$

722. С помощью инвариантов I_1, I_2, I_3, I_4 и полуинвариантов I_2^*, I_3^* найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы поверхность второго порядка, заданная общим уравнением, была:

1) эллиптическим цилиндром;
2) мнимым эллиптическим цилиндром;
3) парой мнимых пересекающихся плоскостей;
4) гиперболическим цилиндром;
5) парой действительных пересекающихся плоскостей;
6) параболическим цилиндром;
7) парой действительных параллельных плоскостей;
8) парой мнимых параллельных плоскостей;
9) парой совпадающих плоскостей.

723. Не производя замен координат, составить канонические уравнения поверхностей: