Линал ДЗ 18-1 Понфалов Борис

№1.1

$$Q_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$B(Q_1, e) = \begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&1&3\end{pmatrix}$$

При помощи симметричного Гаусса найдем матрицу C, т.ч. $B' = C^T B C$, где B' – норм вид.

$$\left(\begin{array}{ccc}1&2&1\\2&1&1\\1&1&3\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{III} \to \text{III} - \text{I}]{\text{II} \to \text{II} - 2\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{ccc}1&2&1\\0&-3&-1\\0&-1&2\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{III} \to \text{III} - \text{I}]{\text{II} \to \text{II} - 2\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&-3&-1\\0&-1&2\\\hline 1&-2&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{II} \to \frac{1}{\sqrt3}\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&-\sqrt3&-\frac{1}{\sqrt3}\\0&-1&2\\\hline 1&-2&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow{\text{II} \to \frac{1}{\sqrt3}\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&-1&-\frac{1}{\sqrt3}\\0&-\frac{1}{\sqrt3}&2\\\hline 1&-\frac{2}{\sqrt3}&-1\\0&\frac{1}{\sqrt3}&0\\0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow{\text{III} \to \text{III} - \text{II}\cdot\frac{1}{\sqrt3}} \left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&-1&-\frac{1}{\sqrt3}\\0&0&\frac{7}{3}\\\hline 1&-\frac{2}{\sqrt3}&-1\\0&\frac{1}{\sqrt3}&0\\0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow{\text{III} \to \text{III} - \frac{1}{\sqrt3}\cdot\text{II}}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&\frac{7}{3}\\\hline 1&-\frac{2}{\sqrt3}&-\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{3}\\0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow{\text{III} \to \text{III}\cdot\frac{\sqrt3}{\sqrt7}} \left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&\frac{\sqrt7}{\sqrt3}\\\hline 1&-\frac{2}{\sqrt3}&-\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{3}\\0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow{\text{III} \to \frac{\sqrt3}{\sqrt7}\cdot\text{III}} \left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\\\hline 1&-\frac{2}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt{21}}\\0&\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt{21}}\\0&0&\frac{\sqrt3}{\sqrt7}\end{array}\right) = C$$

Т.к. $(v_1 v_2 v_3) = (e_1 e_2 e_3)\cdot C$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{21}} \\ -\frac{1}{\sqrt{21}} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \end{pmatrix}$

Ответ: Q_1 имеет нормальный вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ в базисе $\{v_1, v_2, v_3\}$.

№ 1.2.

$Q_2(x) = x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$B(Q_2, e) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

При помощи СГ найдем матрицу C, т.что $B' = C^T B C$, где B' - норм вид

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III} \to \text{III} - \text{I}]{\text{II} \to \text{II} + \text{I}} \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III} \to \text{III} - \text{I}]{\text{II} \to \text{II} + \text{I}} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III} \to \text{III} - 2\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\xrightarrow[\text{III} \to \text{III} - 2\cdot\text{II}]{} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = C$$

Т.к. $(v_1 v_2 v_3) = (e_1 e_2 e_3)\cdot C$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ответ: Q_2 имеет нормальный вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ в базисе $\{v_1 v_2 v_3\}$

№ 1.3

$$Q_3(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B(Q_3, e) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

При помощи СГ найдем матрицу C, что $B' = C^T B C$, где B' - норм вид

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{II} \to \mathrm{II} + \mathrm{I}]{\mathrm{II} \to \mathrm{II} + \mathrm{I}} \left(\begin{array}{cccc} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{I} \Leftrightarrow \mathrm{II}]{\mathrm{I} \Leftrightarrow \mathrm{II}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{\substack{\mathrm{II} \to \mathrm{II} - \frac{1}{2}\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{III} \to \mathrm{III} - \mathrm{I} \\ \mathrm{IV} \to \mathrm{IV} - \mathrm{I}}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\mathrm{II} \to \mathrm{II} - \frac{1}{2}\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{III} \to \mathrm{III} - \mathrm{I} \\ \mathrm{IV} \to \mathrm{IV} - \mathrm{I}}]{} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{II} \to \mathrm{II} \cdot 2]{\substack{\mathrm{II} \to \mathrm{II} \cdot 2 \\ \mathrm{IV} \to \mathrm{IV} - \frac{1}{2}\cdot\mathrm{III}}}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\overline{IV} \to \overline{IV} - \frac{1}{2}\cdot \overline{III}]{} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ \hline 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\overline{IV} \to \overline{IV} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}]{\overline{IV} \to \overline{IV} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & -1 & -1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{array}\right) = C$$

Т.к. $(v_1 v_2 v_3 v_4) = (e_1 e_2 e_3 e_4)\cdot C$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

Ответ: Q_3 принимает нормальный вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ в базисе $\{v_1 v_2 v_3 v_4\}$

Никакие из вышеописанных функций не эквивалентны друг другу, т.к. имеют разные сигнатуры.