$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d \end{pmatrix}.$$

7.16. Доказать, что матрица с определителем, равным 1, является произведением элементарных матриц вида $E + \lambda E_{ij}$, $\quad i \neq j$.

7.17. Доказать, что если строки (столбцы) матрицы A линейно зависимы, то с помощью элементарных преобразований II типа со строками и столбцами матрицу A можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где E_r — единичная матрица порядка r.

7.18. Пусть A и B — матрицы размеров $m \times n$, $n \times t$ и рангов $r(A)$, $r(B)$ соответственно. Доказать, что ранг матрицы AB не меньше, чем $r(A) + r(B) - n$.

7.19. Доказать, что всякую матрицу элементарными преобразованиями над строками можно привести к виду

$$\begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix},$$

и такой вид определен однозначно.

§ 8. Системы линейных уравнений

8.1. Найти общее решение и одно частное решение системы линейных уравнений, используя метод Гаусса:

$$\text{а)} \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2; \end{cases}$$

б) $\begin{cases} -9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3, \\ -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} -9x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7, \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7; \end{cases}$

д) $\begin{cases} -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ -4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12; \end{cases}$

з) $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases}$

8.2. Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ:

а) $\begin{cases} 18x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5, \\ -12x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ \lambda x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 2; \end{cases}$