Линал ДЗ - 1 Панфилов Борис Волшебное число 4

№ 1.1

а) $\{(x_1, x_2 \dots x_n)^T \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = 0\}$

(i) $x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = 0$

$y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n = 0$

$X + Y = x_1 + y_1 + 2x_2 + 2y_2 + \dots + nx_n + ny_n =$

$= (x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) + \dots + n(x_n + y_n) = 0$

выполняется сложение

(ii) $\lambda X = \lambda x_1 + \lambda 2x_2 + \dots + \lambda n x_n =$

$= \lambda(x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n) = \lambda \cdot 0 = 0$

умножение на скаляр выполняется

(iii) При $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ X - нулевой элемент

Данное множество - векторное пространство

б) $\{(x_1, x_2 \dots x_n)^T \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1\}$

(i) $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$

$y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$

$X + Y = x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + \dots + x_n + y_n = 1 + 1 = 2$

Для $X + Y$ не выполняется операция сложения

$\Rightarrow$ Данное множество - не векторное пространство.

№ 1.2

c) $\{ (x, 2x, \dots, nx)^T \mid x \in \mathbb{R} \}$

(i) $X + Y = x + y + 2x + 2y + \dots + nx + ny = (x+y) + 2(x+y) + \dots + n(x+y)$

- сложение выполняется

(ii) $\lambda X = \lambda x + \lambda \cdot 2x + \dots + \lambda \cdot nx = \lambda \cdot \frac{y}{\lambda} + \lambda \cdot 2 \cdot \frac{y}{\lambda} + \dots + \lambda \cdot n \cdot \frac{y}{\lambda} =$

$= y + 2y + \dots + ny$

умножение выполняется

(iii) При $x = 0$ $(x, 2x, \dots, nx)^T$ - нулевой элемент.

=> данное множество - векторное пространство.

d) $\{ (x_1, x_2 \dots x_n)^T \mid x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{Q} \}$

(i) $X + Y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \dots + (x_n + y_n)$

сложение выполняется

(ii) $y = \sqrt{2} \cdot X = (\sqrt{2} x_1, \sqrt{2} x_2, \dots, \sqrt{2} x_n)^T$

$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n \notin \mathbb{Q}$ => умножение не выполняется

=> данное множеств - не векторное пространство.

№ 1.3

$\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$

№ 1.4.

а) $\{ a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \mid a_2 = 1 \} = V$

(i) $\lambda f(x) = \lambda a_n x^n + \ldots + \lambda x^2 + \lambda a_1 x + \lambda a_0$

получившийся многочлен $\notin V$ т.к. коэф. при $x^2 \neq 1$

$\Rightarrow$ V не подпространство $\mathbb{R}[x]$

б) $\{ a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \mid a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = 0 \} = V$

(i) $a_n x^n + b_n x^n + \ldots + a_1 x + b_1 x + a_0 + b_0 =$

$= x^n (a_n + b_n) + \ldots + (a_1 + b_1) x + a_0 + b_0$

$a_n + b_n + a_{n-1} + b_{n-1} + \ldots + a_1 + b_1 + a_0 + b_0 = 0 + 0 = 0$

сложение выполняется

(ii) $\lambda f(x) = \lambda a_n x^n + \ldots + \lambda a_1 x + \lambda a_0$

$\lambda a_n + \lambda a_{n-1} + \ldots + \lambda a_1 + \lambda a_0 = \lambda \cdot 0 = 0$

умножение выполняется

(iii) При $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_0 = 0$ $f(x)$ - нулевой элемент

$\Rightarrow$ V - ~~[illegible]~~ подпространство $\mathbb{R}[x]$

№ 1.5

c) $\{ f(x) \mid f'(2) + 2f''(1) = 0 \}$

(i) $(f(x) + g(x))' + 2(f(1) + g(1))'' =$
$= f'(2) + g'(2) + 2f''(1) + g''(1) = 0 + 0 = 0$

(ii) $(\lambda \cdot f(x))' + 2(\lambda f(x))'' = \lambda \cdot f'(2) + 2 \cdot \lambda \cdot (f''(1)) = \lambda(f'(2) + 2f''(1)) =$
$= \lambda \cdot 0 = 0$

(iii) $f(x) = 0$ – нулевой элемент (при $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_0 = 0$)

d) $\{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \mid a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = 0\} = V$

(i) $a_n x^n + b_n x^n + \ldots + a_1 x + b_1 x + a_0 + b_0 = x^n(a_n + b_n) + \ldots + x(a_1 + b_1) + a_0 + b_0$

$a_1 + b_1 = a_3 + b_3 = \ldots = 0$

сложение выполняется

(ii) $\lambda f(x) = \lambda a_n x^n + \lambda a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \lambda a_1 x + \lambda a_0$

$\lambda a_1 = \lambda a_3 = \ldots = \lambda \cdot 0 = 0$

(iii) при $a_0 = a_2 = a_4 = \ldots = 0$ $f(x)$ - нулевой элемент

$\Rightarrow V$ - подпространство $\mathbb{R}[x]$

№1.6

Предположим, что матрица $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ лежит в линейной оболочке u_1, u_2, u_3

Тогда решим следующую систему, чтобы найти коэффициенты

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&1\\2&1&1&1\\-1&-2&1&1\\0&1&-2&1\end{array}\right) \xrightarrow[\overline{III}\to\overline{III}+\overline{I}]{\overline{II}\to\overline{II}-2\cdot\overline{I}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&1\\0&1&-3&-1\\0&-2&3&2\\0&1&-2&1\end{array}\right) \xrightarrow[\overline{IV}\to\overline{IV}-\overline{II}]{\overline{III}\to\overline{III}+2\cdot\overline{II}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&1\\0&1&-3&-1\\0&0&-3&0\\0&0&1&2\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&1\\0&1&-3&-1\\0&0&-3&0\\0&0&0&2\end{array}\right)$$

Получим несовместную систему $\Rightarrow$ матрица $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ не лежит в линейной оболочке u_1, u_2, u_3.

Предположим, что матрица $\begin{pmatrix}0&0\\3&1\end{pmatrix}$ лежит в линейной оболочке u_1, u_2, u_3

Тогда решим следующую систему, чтобы найти коэффициенты

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&0\\2&1&1&3\\-1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{array}\right) \xrightarrow[\overline{III}\to\overline{III}+\overline{I}]{\overline{II}\to\overline{II}-2\cdot\overline{I}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&0\\0&1&-3&3\\0&-2&3&0\\0&1&-2&1\end{array}\right) \xrightarrow[\overline{IV}\to\overline{IV}-\overline{II}]{\overline{III}\to\overline{III}+2\cdot\overline{II}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&0\\0&1&-3&3\\0&0&-3&6\\0&0&1&-2\end{array}\right) \xrightarrow[\overline{IV}\to\overline{IV}-\overline{III}]{\overline{III}\to-\frac{1}{3}\cdot\overline{III}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&0\\0&1&-3&3\\0&0&1&-2\end{array}\right) \xrightarrow[\overline{I}\to\overline{I}-2\cdot\overline{III}]{\overline{II}\to\overline{II}+3\cdot\overline{III}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&4\\0&1&0&\cancel{3}\ -3\\0&0&1&-2\end{array}\right)$$

Получим решение $(4, \cancel{3}\ {-3}, -2)^T$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}0&0\\3&1\end{pmatrix} = 4u_1 \cancel{+3}\ {-3}u_2 - 2u_3$$

№2.1

$$x + 0\cdot x = (1+0)x = 1\cdot x = x$$

$\Rightarrow$ $0\cdot x$ – нейтральный элемент по сложению

$\Rightarrow$ $0\cdot x = \vec{0}$

№2.2

т.е. $-1\cdot(x) = -x$

Докажем, что произведение слева является противоположным элементом к элементу x.

$$x + (-1)\cdot x = (1+(-1))\,x = 0\cdot x = \vec{0}$$

∎

№2.3

Для доказательства приведем пример бесконечного множества подпространств $\mathbb{R}^5$, являющимися к тому же линейными оболочками $S = \{e_1, \dots, e_5\}$

$$e_1 = \begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\\alpha\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\\alpha\\0\\0\end{pmatrix} \quad e_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\alpha\\0\end{pmatrix} \quad e_5 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\\alpha\end{pmatrix}$$

, где $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

∎

№2.4

Если $\forall v \in M \ |v| \le C$, то $\exists x \in M \mid |x| = C$, иначе C — не верхняя грань

~~[illegible]~~

Тогда домножим вектор x на скаляр 100.

Получаем

$$|100x| = 10\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = 10|x| > |x| = C \text{ — противоречие}$$

∎

~~При $C = 0$~~

~~Док.~~

№ 2.5

Все подпространства $\mathbb{R}^3$ можно описать следующим образом:

- $\mathbb{R}^3$
- Все плоскости
- Все прямые
- Точка $(0,0,0)$

Scanned with CamScanner