Задача 1.1. Выпишите матрицы 4×4, отвечающие следующим элементарным преобразованиям:

(a) перестановка местами второй и четвёртой строки;
(b) умножение третьей строки на $2\sqrt{5}$;
(c) вычитание из четвёртого столбца второго, умноженного на 3.

Задачи 1.2–1.7. Задачи 154, 156, 157, 165, 171, 173 из скана (чётность пока нигде находить не надо, просто найдите разложение в произведение независимых циклов).

Возведение подстановок в степени

Допустим, вам нужно найти

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{506}$$

Перемножать перестановки 503 раза или даже логарифм от этого количества (кто-нибудь помнит про возведение в степень с помощью двоичной записи показателя?) — это унылое занятие. К счастью, это можно сделать гораздо быстрее с помощью разложения в произведение назависимых циклов.

Заметим, во-первых, что, поскольку умножение перестановок не коммутативно, $(\sigma\tau)^n \neq \sigma^n\tau^n$. С другой стороны, $(\sigma\tau)^n = \sigma^n\tau^n$, если $\sigma\tau = \tau\sigma$.

Напомним, что *носителем* перестановки σ называется $\operatorname{supp}(\sigma) = \{j \mid \sigma(j) \neq j\}$ (множество индексов, которые перестановка не оставляет на месте). Например, у тожественной перестановки носитель пуст, а у перестановки $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ он равен $\{1, 2, 3, 5, 6\}$.

Простое, но важное наблюдение: если носители перестановок σ и τ не пересекаются, то σ и τ коммутируют. В частности, независимые циклы коммутируют (помимо прочего, это означает, что нам всё равно, в каком порядке записывать эти циклы, когда мы раскладываем подстановку в произведение независимых циклов). Из этого следует то, что если $\sigma = \xi_1\xi_2\ldots\xi_t$ — разложение подстановки в произведение независимых циклов, то $\sigma^n = \xi_1^n\xi_2^n\ldots\xi_t^n$.

Ну, а возводить цикл в степень — одно удовольствие. Поскольку

$$(i_1, i_2, \ldots, i_k)^k = \mathrm{id}$$

(грубо говоря, если k переставить по циклу k объектов, то они после этого вернутся на свои места), мы можем, разделив любой показатель m с остатком на k (то есть записав $m = kq + r$, где $r \in \{0, 1, \ldots, k-1)$, написать:

$$(i_1, i_2, \ldots, i_k)^m = (i_1, i_2, \ldots, i_k)^{kq}(i_1, i_2, \ldots, i_k)^r =$$
$$= \Big(\underbrace{(i_1, i_2, \ldots, i_k)^k}_{=\mathrm{id}}\Big)^q (i_1, i_2, \ldots, i_k)^r = (i_1, i_2, \ldots, i_k)^r$$

Применим же это к нашей задаче! Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{506} = ((1, 6, 3) \cdot (2, 5))^{506} =$$
$$= (1, 6, 3)^{506} \cdot (2, 5)^{506} = (1, 6, 3)^2 \cdot \underbrace{(2, 5)^0}_{=\mathrm{id}} = (1, 3, 6)$$

Задача 1.8. Задача 176 из скана (не знаю, почему она там со звёдочкой; нормальная задача).

Уравнения в подстановках

Задачи 1.9–1.11. Рассмотрим уравнение $\sigma x \tau = \rho$, где σ, τ, ρ — заданные подстановки, а x — неизвестная. Чтобы его решить, умножим обе его части на σ^{-1} *слева* и на τ^{-1} *справа*. Оно примет вид

$$\underbrace{\sigma^{-1} \cdot \sigma}_{=\mathrm{id}} x \underbrace{\tau \cdot \tau^{-1}}_{=\mathrm{id}} = \sigma^{-1} \cdot \rho \cdot \tau^{-1} \Longleftrightarrow x = \sigma^{-1} \rho \tau^{-1}.$$

Решите уравнения:

$(a)\quad X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$(b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

$(c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{101} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Задачи 2.1 и 2.2. Для всех значений параметра λ решите системы:

$$(2.1)\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5, \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2. \end{cases} \qquad (2.2)\ \begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2. \end{cases}$$

Задача 2.3. Назовём *порядком* подстановки σ наименьшее натуральное (то есть целое положительное) число k, для которого $\sigma^k = \mathrm{id}$. Найдите порядки подстановок из задач 154 и 156 из скана.

Указание: воспользуйтесь разложением в произведение независимых циклов; чтобы в k-й степени подстановка обратилась в тождественную, необходимо, чтобы каждый из циклов стал тождественной подстановкой (в каких степенях становится тождественной подстановкой цикл длины k?).

Задача 2.4. Задача 179 из скана. Транспозиция — это цикл длины 2 (она меняет местами два элемента, а остальные оставляет на месте).

Задача 2.5. Верно ли, что степень цикла длины k — это цикл длины k или тождественная перестановка? Подсказка: нет, не верно. Приведите контрпример. Возьмите циклы каких-нибудь небольших длин и повозводите их в степени. Попробуйте придумать условие, при котором m-я степень цикла длины k тоже является циклом длины k (за это будут дополнительные баллы).

Задача 2.6. Представьте перестановку $(1,2)(3,4)$ в виде произведения двух циклов длины 3 (не обязательно независимых; точней сказать, они точно не будут независимыми).

Задача 3.1. Для подстановки из задачи 152 найдите хотя бы две подстановки, коммутирующих с ней, но не являющиеся её степенями. Какие дополнительные возможности появляются для подстановки из задачи 153?

Указание. Эти подстановки, конечно, можно угадать, но задача не про это, и за такое решение баллов не будет. Постарайтесь придумать метод, который работал бы без боли для произвольных подстановок (даже если они на 100 элементах). А поможет вам в этом разложение в произведение независимых циклов.

Задача 3.2. Найдите все подстановки на n элементах, коммутирующие с циклом $(1, 2, \ldots, n)$.

Задача 3.3. Докажите, что подстановка, коммутирующая со всеми подстановками на $n \geqslant 3$ элементах, есть id.

Задача 3.4. Пусть σ — цикл длины n. Докажите, что для любой подстановки τ произведение $\tau^{-1}\sigma\tau$ также является циклом длины n.

Задача 3.5. Докажите, что каждая перестановка представляется в виде произведения транспозиций.

Указание. Как обычно, надо воспользовать разложением в произведение независимых циклов. Докажите, что всякий цикл есть произведение транспозиций. Можно, например, рассуждать так. Представьте, что перед вами находится книжная полка, на которой стоит k книг. Вам нужно их переставить по циклу, но у вас есть только две руки, поэтому в каждый момент времени вы можете менять местами только две книги. Как же всё-таки осуществить сдвиг по циклу?