Линал ДЗ-7 Панфилов Борис Волшебное число - 4

№ 1.1

Пусть C - получившаяся матрица.
Тогда нетрудно заметить, что

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -8 \\ -2 & 3 & 3 & -13 \end{pmatrix}}_{B} = C$$

Из этого можем перейти к:

$$\det(A) \cdot \det(B) = \det(C)$$

$\det(A)$ - известен из условия и равен 5

Осталось найти $\det(B)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -8 \\ -2 & 3 & 3 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 & -13 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & -5 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 11 & -29 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 11 & -29 \\ 0 & 2 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 11 & -29 \\ 0 & 0 & -27 & 63 \\ 0 & 0 & 8 & -13 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (27 \cdot 13 - 63 \cdot 8) =$$

$$= -153$$

$$\Rightarrow \det(C) = 5 \cdot (-153) = -765$$

Ответ: -765.

№1.2

Пусть C – получившаяся матрица

Тогда нетрудно заметить, что:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}}_{A} = C$$

$\Rightarrow \det(B) \cdot \det(A) = \det(C)$

$\det(C) = 17 \det(B)$

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & -6 & -3 & -6 \end{vmatrix} = -9 \begin{vmatrix} 1 & -8 & -6 & -11 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9 \begin{vmatrix} 1 & -8 & -6 & -11 \\ 0 & 21 & 16 & 28 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 9 \begin{vmatrix} 1 & -8 & -6 & -11 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 21 & 16 & 28 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 1 & -8 & -6 & -11 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -26 & -14 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (26 \cdot 2 - 14 \cdot 3) =$$

$$= 9 \cdot 10 = 90$$

$\Rightarrow \det(C) = 17 \cdot 90 = 1530$

№1.3 (259)

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{III \to III + II \\ III \to III - I \\ IV \to IV - 2\cdot I}} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{II \to II + I \\ I \leftrightarrow II}} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{I \to -1\cdot I} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -6 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$\xrightarrow{II \to II - 2\cdot I} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & 14 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{III \to III + 3\cdot II \\ IV \to IV + 4\cdot II}} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 3 & 51 \\ 0 & 0 & 3 & 54 \end{vmatrix} \xrightarrow{IV \to IV - III} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 3 & 51 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -1\cdot 3\cdot 3 = -9$$

Ответ: -9.

№1.4 (270)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{II \to II - 2\cdot I \\ III \to III - 3\cdot I \\ IV \to IV - 2\cdot I \\ V \to V - I}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -11 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{II \to -1\cdot II} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -11 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{III \to III + II \\ IV \to IV + 11\cdot II \\ V \to V - 2\cdot II}}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -23 & -41 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 11 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{IV \to -1\cdot IV \\ IV \to IV - 10\cdot III \\ V \to V - 4\cdot III}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 1\cdot \left(3\cdot(-1) + 11\cdot 5\right) =$$

$$= 55 - 3 = 52$$

Ответ: 52.

№ 1.5 (275)

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{III} \to 3\cdot\text{III}]{\substack{\text{I} \to 2\cdot\text{I} \\ \text{II} \to 3\cdot\text{II}}} \frac{1}{18} \begin{vmatrix} 3 & -9 & -3 & -6 \\ 5 & -8 & -2 & -7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{II} \to \text{II} - \text{III}]{\substack{\text{IV} \to \text{IV} - \text{III} \\ \text{IV} \to \text{IV} - \text{I}}} \frac{1}{18} \begin{vmatrix} 3 & -9 & -3 & -6 \\ 1 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 0 & 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\xlongequal{\text{I} \leftrightarrow \text{II}} -\frac{1}{18} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -5 \\ 3 & -9 & -3 & -6 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 0 & 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{III} \to \text{III} - 4\cdot\text{I}]{\text{II} \to \text{II} - 3\cdot\text{I}} -\frac{1}{18} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 7 & -7 & 18 \\ 0 & 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{II} \leftrightarrow \text{III}]{\text{III} \to \text{III} - \text{IV}} \frac{1}{18} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -9 & 15 \\ 0 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\xlongequal[\text{IV} \to \text{IV} - 6\cdot\text{II}]{\text{III} \to \text{III}\cdot\frac{1}{3}} \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -9 & 15 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 56 & -87 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{IV} \to \text{IV} + 28\cdot\text{III}} \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -9 & 15 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot(-2)\cdot(-3) = 1$$

Ответ: 1.

№ 1.6

$$\begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} 9 & 19 & 13 \end{array} & \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & P \\ 0 & Q & C \\ R & A & B \end{vmatrix} & \begin{array}{c} 13 \\ 19 \\ 9 \end{array} \end{array}$$

Мы хотим поменять местами первые 13 строк и последние 9, чтобы получилась верхнетреугольная матрица.

Для этого нам нужно совершить следующую перестановку блоков (смотрим на строки!)

$$\begin{pmatrix} \overbrace{1\ 2\ 3 \ldots\ldots 13}^{13} & \overbrace{14 \ldots\ldots 32}^{19} & \overbrace{33 \ldots\ldots 41}^{9} \\ \underbrace{33 \ldots\ldots 41}_{9} & \underbrace{14 \ldots\ldots 32}_{19} & \underbrace{1\ 2 \ldots\ldots 13}_{13} \end{pmatrix}$$

Четность перестановки — четность числа инверсий. Посчитаем кол-во инверсий.

$$9\cdot 19 + 13\cdot 19 + 9\cdot 13 = 19\cdot 22 + 9\cdot 13 = 418 + 117 = 535$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & P \\ 0 & Q & C \\ R & A & B \end{vmatrix} = (-1)^{535} \begin{vmatrix} R & A & B \\ 0 & Q & C \\ 0 & 0 & P \end{vmatrix} = -1\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5} = -\sqrt{30}$$

Ответ: $-\sqrt{30}$

Панфилов Борис БПМИ-216

№2.1 (279)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\overline{n} \to \overline{n} + \overline{I}]{\overline{II} \to \overline{II} + \overline{I},\ \overline{III} \to \overline{III} + \overline{I},\ \dots} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = n!$$

Ответ: $n!$

№2.2 (316)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0\ 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\overline{n} \to \overline{n} - \overline{I}]{\overline{II} \to \overline{II} - \overline{I},\ \overline{III} \to \overline{III} - \overline{I},\ \dots} (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1\ 1 & \dots & 1\ 0 \\ -1\ 0 & & 1 \\ & 0 & \vdots \\ 0 & & 0\ 1 \\ & & -1\ 1 \end{vmatrix} =$$

$$\xrightarrow[\overline{I} \to \overline{I} + \overline{n}]{\overline{I} \to \overline{I} + \overline{II},\ \overline{I} \to \overline{I} + \overline{III},\ \dots} (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & n-1 \\ -1 & & & 1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & \ddots & \\ & & & -1\ 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \cdot (-1)^{n-1} \cdot (n-1) \cdot (-1) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)$$

Ответ: $(-1)^{n-1} \cdot (n-1)$

№2.3 (278)

$$\begin{vmatrix} \sqrt2 & \sqrt3 & \sqrt5 & \sqrt3 \\ \sqrt6 & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt3 \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt6 \\ 2 & 2\sqrt6 & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{\sqrt{30}}]{\overline{II} \to \sqrt3 \cdot \overline{II},\ \overline{III} \to \sqrt5 \cdot \overline{III},\ \overline{IV} \to \sqrt2 \cdot \overline{IV}} \begin{vmatrix} \sqrt2 & \sqrt3 & \sqrt5 & \sqrt3 \\ 3\sqrt2 & 3\sqrt7 & \sqrt{30} & -6 \\ 5\sqrt2 & 10\sqrt3 & 5\sqrt5 & \sqrt{30} \\ 2\sqrt2 & 4\sqrt3 & 2\sqrt5 & \sqrt{30} \end{vmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{\sqrt{30}}]{\overline{II} \to \overline{II} - 3\cdot\overline{I},\ \overline{III} \to \overline{III} - 5\cdot\overline{I},\ \overline{IV} \to \overline{IV} - 2\cdot\overline{I}} \begin{vmatrix} \sqrt2 & \sqrt3 & \sqrt5 & \sqrt3 \\ 0 & 3(\sqrt7-\sqrt3) & \sqrt{30}-3\sqrt5 & -6-3\sqrt3 \\ 0 & 5\sqrt3 & 0 & \sqrt{30}-5\sqrt3 \\ 0 & 2\sqrt3 & 0 & \sqrt{30}-2\sqrt3 \end{vmatrix} =$$

$$\xrightarrow{\overline{II}\ \text{столбец} \leftrightarrows \overline{III}\ \text{столбец}} -\frac{1}{\sqrt{30}} \begin{vmatrix} \sqrt2 & \sqrt5 & \sqrt3 & \sqrt3 \\ 0 & \sqrt{30}-3\sqrt5 & 3(\sqrt7-\sqrt3) & -6-3\sqrt3 \\ 0 & 0 & 5\sqrt3 & \sqrt{30}-5\sqrt3 \\ 0 & 0 & 2\sqrt3 & \sqrt{30}-2\sqrt3 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{30}}\left(-\sqrt2 \cdot (\sqrt{30} - 3\sqrt5) \cdot (15\sqrt{10} - 30 - 6\sqrt{10} + 30)\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{30}}\left(-\sqrt2 \cdot (\sqrt{30} - 3\sqrt5) \cdot 9\sqrt{10}\right) = -\frac{1}{\sqrt{30}}\left(-2\sqrt{15} + 3\sqrt{10}\right) \cdot 9\sqrt{10} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{30}}\left(-90\sqrt6 + 270\right) = (270 - 90\sqrt6) \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} = 9\sqrt{30} - 18\sqrt5$$

Ответ: $9\sqrt{30} - 18\sqrt5$

№2.4

A - целочисленная матрица $\Rightarrow$ $\det(A) \in \mathbb{Z}$, т.к. когда мы считаем определитель у нас нет операции деления

Аналогично $\det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} \det(A) = \dfrac{1}{\det(A^{-1})} \\ \det(A^{-1}) \in \mathbb{Z} \\ \det(A) \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \det(A) = \det(A^{-1}) = \pm 1$$

Ответ: ± 1.