Задача 1.1 (задача про поиск ступеней в неожиданных местах). Найдите общее и какое-нибудь частное решение системы

$$\begin{cases} 7x_1 + 15x_2 - x_3 - 13x_4 + 21x_6 - x_7 - 3x_8 = -2; \\ -4x_1 + 9x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 + 11x_6 + x_7 - 9x_8 = 1; \\ 9x_1 - 11x_2 + x_3 - 2x_4 - 12x_6 + 11x_8 = 0. \end{cases}$$

Задача 1.2. Найдите многочлен 3-й степени $f(x)$, для которого $f(-1) = -2, f(1) = 0, f'(1) = -1, f''(1) = 6$.

Задачи 1.3 и 1.4. Найдите все матрицы, коммутирующие с матрицей

$$(3)\ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (4)\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Задачи 1.5 и 1.6. Решите матричные уравнения:

$$(5)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (6)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Задача 1.7. Напомню, что матрицей, **обратной** к (квадратной) матрице A называется матрица B того же размера, для которого $AB = BA = E$. Иными словами, обратная матрица — это решение уравнения $AX = E$ (если таковое решение существует). Найдите матрицу, обратную к матрице

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Задача 1.8. Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Задача 2.1. Найдите все возможные значения λ и μ, при которых матричное уравнение имеет решение:

$$(5)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Обязательно объясните ответ.

Задача 2.2. Сколько операций сложения, умножения, вычитания и деления требуется, чтобы решить систему из m уравнений с n неизвестными методом Гаусса? Можете считать, что нулевых элементов никогда не возникает и переставлять строки никогда не приходится.

Задача 2.3. Может ли система линейных уравнений, которая получается из матричного уравнения $AX = XA$, иметь единственное решение? Ровно одну свободную неизвестную? Ровно три свободных неизвестных? Обязательно объясните ответ!

Задача 2.4. Матрица называется **обратимой**, если у неё есть обратная. Напомним также, что мы называем ненулевую матрицу A **делителем нуля**, если существует также ненулевая матрица B, для которой $AB = 0$ или $BA = 0$. Докажите, что обратимая матрица не может быть делителем нуля.

Задача 2.5. Как изменится произведение двух матриц A и B, если

(a) поменять местами первую и третью строки A;
(b) прибавить ко второму столбцу B третий, умноженный на 9;
(c) умножить второй столбец A на 4?

Обязательно объясните ответ.

Задача 2.6. Как изменится обратная матрица, если в матрице A:

(a) прибавить ко второму столбцу B третий, умноженный на 9;
(b) умножить вторую строку A на 4?

Обязательно объясните ответ.

Указание. В этой задаче вам пригодится правило нахождения матрицы, обратной к произведению: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Вам ведь её доказывали на лекциях, правда?

Задача 3.1. Представьте, что я сгенерировал случайным образом коэффициенты неоднородной системы из трёх линейных уравнений с тремя неизвестными (для простоты давайте считать, что все её коэффициенты - это случайные числа отрезка $[-1;1]$). Какой из следующих исходов вероятней: что полученная система будет несовместна? что она будет иметь единственное решение? или что она будет иметь бесконечно много решений? Постарайтесь обосновать свой ответ (без этого я проверять не буду).

Задача 3.2. Докажите, что существует, притом единственный многочлен n-й степени, принимающий в данных различных $(n+1)$ точках заданные значения. Возможно, тут имеет смысл думать не о системах уравнений.

Задача 3.3. Докажите, что матрица, обратная к блочно верхнетреугольной матрице

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

с квадратными блоками A и C также является блочно верхнетреугольной с теми же размерами блоков.

Указание. Рассмотрите блочную матрицу, представьте, что она обратна к заданной, и посмотрите, что из этого следует.

Задача 3.4. Найдите матрицу, обратную к матрице

$$\begin{pmatrix} t & 1 & & & \\ & t & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & t & 1 \\ & & & & t \end{pmatrix}$$

(матрица размера $n \times n$; в пустых ячейках стоят нули)

Задача 3.5*. Под целочисленными элементарными преобразованиями строк или столбцов мы будем понимать преобразования следующих двух типов:

- Прибавление к строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на целое число;
- Перестановка двух строк или столбцов

Иными словами, это такие преобразования, которые, будучи применены к целочисленной матрице, оставят её целочисленной.

Докажите, что с помощью целочисленных преобразований целочисленную матрицу можно привести к виду дигональному виду (то есть к такому, где ненулевые элементы стоят только на диагонали, ведущей из левого верхнего угла в правый нижний), причём диагональ имеет вид $d_1, d_2, \ldots, d_k, 0, 0, \ldots, 0$, где $d_i \vdots d_{i-1}$.