

$$U = \left\langle \underset{u_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

$$W: \begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Представим U в виде множества решений системы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{I \rightarrow I - II \\ II \rightarrow \frac{1}{2} \cdot II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ФСП: } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U: \begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Представим W в виде линейной оболочки базиса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ФСП: } \underset{w_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{w_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow W = \langle w_1, w_2 \rangle$$

Найдем базис $U + W$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{III \rightarrow III - 2 \cdot I \\ IV \rightarrow IV - I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{IV \rightarrow IV - III \\ II \leftrightarrow IV}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \{u_1, u_2, w_1\} - \text{базис } U + W$$

Найдем базис $U \cap W$. Для этого "соединим" системы
 в одну и ~~найдем~~ найдем ее ФЛР:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV} \rightarrow \text{IV} + \text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \text{II} \rightarrow \text{II} - \text{I} \\ \text{II} \leftrightarrow \text{III} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{matrix} \text{I} \rightarrow \text{I} - \text{II} \\ \text{III} \rightarrow \text{III} \cdot (-1) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ФЛР}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_V$$

$\{v\}$ - базис $U \cap W$

Аналог: $\{u_1, u_2, w_1\}$ - базис $U+W$

$\{v\}$ - базис $U \cap W$