Линал ДЗ-12 Панфилов Борис Волшебное число 4

№1.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AX = XA$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 & x_2 + 2x_4 \\ -x_1 + x_3 & -x_2 + x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & 2x_1 + x_2 \\ x_3 - x_4 & 2x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_3 = -x_2 \\ 2x_4 = 2x_1 \\ -x_1 = x_4 \\ -x_2 = 2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = -2x_3 \\ x_1 = x_4 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ Матрицы коммутирующие с A в общем виде - $\begin{pmatrix} x_4 & -2x_3 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_4 \\ -2x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Получаем ФСР: $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

№ 1.2

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$

$f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$

$a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 3a_3 - 2a_2 + a_1 = 0$

Получаем следующую систему:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{II \to II - 3 \cdot I} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{I \to I + \frac{1}{5} \cdot II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right).$$

$$\xrightarrow{II \to II \cdot (-\frac{1}{5})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{array}\right)$$

Получаем решение $\begin{pmatrix} -\frac{3}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4 \\ -\frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

ФСР: $e_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $-\frac{3}{5}x^3 - \frac{2}{5}x^2 + x$

$-\frac{2}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + 1$

№2.1

Нет, не существует.

Для доказательства предположим противное.

Пусть v_1, v_2, v_3 – базис. Тогда они должны быть линейно независимыми. Проверим это

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{IV}]{\mathrm{III} \to \mathrm{III} - \mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II} \to \mathrm{II} + \mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II} \to \mathrm{II} - 2\cdot\mathrm{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Получили только 2 ступеньки => тут всего 2 независимых вектора. => v_1, v_2, v_3 линейно зависимы => противоречие.

№2.2.

Возможно.

Для начала найдём мн-во решений данной ОСЛУ

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \text{Решение:} \begin{pmatrix} 2x_2 - x_5 \\ x_2 \\ -x_4 + x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

Нетрудно заметить, что размерность мн-ва решений равна 3.

=> нам требуется среди $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5$ найти 3 лин. нез. вектора принадлежащих мн-ву решений.

Я утверждаю, что векторы v_1, v_2, v_5 подходят.

Покажем их линейную независимость:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{V} \to \mathrm{V} + \mathrm{I}]{\mathrm{IV} \to \mathrm{IV} + \mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{IV} \to \mathrm{IV} \cdot \frac{1}{2}]{\mathrm{III} \to \frac{1}{2} \cdot \mathrm{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{V} \to \mathrm{V} - 2\cdot\mathrm{III} - 2\cdot\mathrm{IV}]{\mathrm{II} \to \mathrm{II} - \mathrm{III} - \mathrm{IV}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 ступеньки => они лин. нез.. Факт, что они принадлежат мн-ву решений нетрудно проверить, подставив значения => они являются ФСР.

№2.3

$rkM \geq rkA + rkC$

Док-во:

Приведем матрицы A и C к ступ виду, получим

$$M' = \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ 0 & C' \end{array}\right)$$

Если мы рассмотрим матрицу X состоящую из нижних двух блоков, то есть $0 | C'$, то нетрудно заметить, что $rkX = rkC' = rkC$

Далее рассмотрим матрицу Y, состоящую из верхних двух блоков, то есть $A' | B'$, то нетрудно заметить, что $rkY \geq rkA' = rkA$, т.к. кол-во линейно независимых строк может быть увеличено за счет элементов матрицы B

$rkM = rkM' = rkX + rkY \geq rkA + rkC$

■

№2.4

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} 2A & -B \\ 3A & 4B \end{pmatrix} = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 2A & -B \\ A & 5B \end{pmatrix} = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} A & 5B \\ 2A & -B \end{pmatrix} = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} A & 5B \\ 0 & -11B \end{pmatrix} =$$

$$= \mathrm{rk}\begin{pmatrix} A & 5B \\ 0 & B \end{pmatrix} = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \mathrm{rk}A + \mathrm{rk}B$$

№2.5

Нетрудно заметить, что матрица $\begin{pmatrix} E & 0 \\ Y & E \end{pmatrix}$ является нижнетреугольной, причем на гл. диагонали у нее стоят единицы $\Rightarrow \det\begin{pmatrix} E & 0 \\ Y & E \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \det\begin{pmatrix} E & 0 \\ Y & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} E & 0 \\ Y & E \end{pmatrix}$ обратима

№ 2.6.

Как ранее было доказано, следующие преобразования ранг не меняют

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^3 & A^4 \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A & A^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rk} A.$$

■