ДЗ-6 Панфилов Борис БПМИ-216

№2.1

$id \quad + a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44}$

(i,k)

$(1,2) \quad - a_{12} a_{21} a_{33} a_{44}$

$(1,3) \quad - a_{13} a_{22} a_{31} a_{44}$

$(1,4) \quad - a_{14} a_{22} a_{33} a_{41}$

$(2,3) \quad - a_{11} a_{23} a_{32} a_{44}$

$(2,4) \quad - a_{11} a_{24} a_{33} a_{42}$

$(3,4) \quad - a_{11} a_{22} a_{34} a_{43}$

$(i,k)(j,p)$

$(1,2)(3,4) \quad + a_{12} a_{21} a_{34} a_{43}$

$(1,3)(2,4) \quad + a_{13} a_{24} a_{31} a_{42}$

$(1,4)(2,3) \quad + a_{14} a_{23} a_{32} a_{41}$

(i,j,k)

$(1,2,3) \quad + a_{12} a_{23} a_{31} a_{44}$

$(1,2,4) \quad + a_{12} a_{24} a_{33} a_{41}$

$(1,3,4) \quad + a_{13} a_{22} a_{34} a_{41}$

$(2,3,4) \quad + a_{11} a_{23} a_{34} a_{42}$

$(2,4,3) \quad + a_{11} a_{24} a_{32} a_{43}$

$(1,3,2) \quad + a_{13} a_{21} a_{32} a_{44}$

$(1,4,2) \quad + a_{14} a_{21} a_{33} a_{42}$

$(1,4,3) \quad + a_{14} a_{22} a_{31} a_{43}$

(i,j,k,p)

$(1,2,3,4) \quad - a_{12} a_{23} a_{34} a_{41}$

$(1,2,4,3) \quad - a_{12} a_{24} a_{43} a_{31}$

$(1,3,4,2) \quad - a_{13} a_{21} a_{34} a_{42}$

$(1,3,2,4) \quad - a_{13} a_{24} a_{32} a_{41}$

$(1,4,3,2) \quad - a_{14} a_{21} a_{32} a_{43}$

$(1,4,2,3) \quad - a_{14} a_{23} a_{31} a_{42}$

$A \in M_{4 \times 4}$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} +$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} +$$

$$+ a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} -$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} -$$

$$- a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{43}a_{31} -$$

$$- a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}.$$

№2.2

180.

$a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$

Такое произведение не может входить в определитель, т.к. в определителе все элементы каждого произведения берутся из разных строк. А в данном мы можем заметить a_{27}, a_{25}
$\Rightarrow$ противоречие

181.

$a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$

Такое произведение может входить в определитель.
Этот элемент соответствует перестановке $(1,6)\cdot(2,7) \Rightarrow$ входит со знаком „+"

182

$a_{12}a_{23}\ldots a_{n-1,n}a_{kk}$, $1 \le k \le n$

При $n=k=1$ получаем, что это произведение входит в определитель со знаком „+" (определитель $A \in Mat_{1\times1}$)
В остальных случаях рассмотрев первые $n-1$ сомножителей мы понимаем, что в произведении уже есть элементы со всех строк и столбцов, кроме последней строки и 1-го столбца. Значит последний элемент должен равняться $a_{n,1}$, однако $a_{kk} \neq a_{n,1}$
$\Rightarrow$ противоречие

№2.3

188

$i=6$

$k=2$

В таком случае $\sigma = (163)\cdot(247)$

$sgn(\sigma) = (-1)^{6-2} = (-1)^4 = 1 \Rightarrow$ входит со знаком „+"

№2.4

$$\begin{vmatrix} 1 & 2x & x & 3 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -x & 2 & x \end{vmatrix} \xrightarrow[\operatorname{sgn}(\det) \to -1\cdot \operatorname{sgn}(\det)]{I \leftrightarrow II} \begin{vmatrix} 1 & x & 2 & 3 \\ 1 & 2x & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -x & 2 & x \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{II \to II - 2\cdot I \\ IV \to IV + I}} \begin{vmatrix} 1 & x & 2 & 3 \\ -1 & 0 & x-2 & -3 \\ x & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & x+3 \end{vmatrix}$$

$$x(x-2)x(x+3) = x^4 + x^3 + \ldots$$

Так как такие коэффициенты будут у $-\det A$

У $\det A$ будет $-x^4 - x^3 \ldots$

Других комбинаций с „x“ не будет, т.к. в матрице есть всего 4 элемента с „x“ и они все расположены в разных строках и столбцах.

Ответ: -1; -1.

№2.5 (204)

~~Найдем слагаемое~~

Найдем слагаемое неравное нулю

$a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)} \neq 0 \Rightarrow a_{1,\sigma(1)} \neq 0 \Rightarrow \sigma(1) = n$

$a_{2,\sigma(2)} \neq 0 \Rightarrow \sigma(2) = n-1$, т.к. из последнего столбца уже есть сомножитель

$a_{3,\sigma(3)} \neq 0 \Rightarrow \sigma(3) = n-2$ — " —

$\vdots$

$a_{n,\sigma(n)} \neq 0 \Rightarrow \sigma(n) = 1$, т.к. из остальных столбцов уже есть сомножители

$\Rightarrow \det A = \pm(a_{n1} \cdot a_{n-1,2} \cdot \ldots \cdot a_{2,n-1} \cdot a_{1n})$ в зависимости от четности перестановки

При $n \underset{4}{\equiv} 0$; $n \underset{4}{\equiv} 1$ знак будет „+“

При $n \underset{4}{\equiv} 2$; $n \underset{4}{\equiv} 3$ знак будет „-“

№2.6 (205)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\overline{V} \to \overline{V} - \overline{IV} \cdot \frac{a_{52}}{a_{42}}]{\overline{II} \to \overline{II} - \overline{I} \cdot \frac{a_{25}}{a_{15}}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Найдём слагаемое неравное нулю

$a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{5,\sigma(5)} \neq 0 \Rightarrow a_{5,\sigma(5)} \neq 0 \Rightarrow \sigma(5) = 1$

$a_{4,\sigma(4)} \neq 0 \Rightarrow \sigma(4) = 2$, т.к. из 1-го столбца уже есть сомножитель

$a_{3,\sigma(3)} \neq 0$

$\Downarrow$

противоречие, т.к. мы можем взять элементы только из 3,4,5 столбцов, а они все равны нулю

$\Rightarrow$ все слагаемые нулевые $\Rightarrow \det A = 0$

Ответ: 0.

№2.7

а) $C_n^5 \cdot (5-1)! \cdot C_{n-5}^2 \, (2-1)! = C_n^5 \cdot C_{n-5}^2 \cdot 4!$

б) $\dfrac{C_n^4 \cdot C_{n-4}^4 \cdot C_{n-8}^4}{3!}$

№2.8 (212)

Действие, описанное в условии равносильно $n-1$ смене столбцов (1-й со 2-м затем 2-й с 3-м ...... $n-1$ с n-м)

Так как при каждой перестановке столбцов определитель меняет знак, в итоге $\det A$ будет равен $(-1)^{n-1} \cdot \det A$

№ 2.9

Преобразования описанные в условии равносильны $\overbrace{\text{умножению}}^{\text{исходной матрицы } B}$ на матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 2 & 3 & & 0 & \\ & 3 & 5 & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

справа. Получаем $BA = B'$

$$\det(B) \cdot \det(A) = \det(B')$$
$$\Updownarrow$$
$$\det(B) \cdot (10-9) = \det(B) = \det(B')$$

$\det A = 10 - 9$, т.к. тут есть всего 2 возможных перестановки

$\Rightarrow$ определитель не изменится

Ответ: не изменится

№2.10

$$\begin{vmatrix} -n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & 1-n \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{I \to I + n+1}]{\substack{I \to I + II \\ I \to I + III \\ I \to I + IV \\ \vdots}} \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & -n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix} \Rightarrow \det A = 0$$

первая строка обнулилась, т.к. в каждом ее элементе мы получили $1 \cdot n - n$

№3.1 (214)

(Замена элемента, элементом, симметричным ему, относительно „центра" определителя) $\Leftrightarrow$ $a_{i,j} \longrightarrow a_{n-i+1,\, n-j+1}$

Посмотрим, как меняется при этом $\det A$

Было:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}$$

Стало:

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot a_{n,\, n-\sigma(1)+1} \cdot a_{n-1,\, n-\sigma(2)+1} \cdot \ldots \cdot a_{1,\, n-\sigma(n)+1} \; = $$

Поскольку $n-\sigma(1)+1,\ n-\sigma(2)+1, \ldots, n-\sigma(n)+1$ по прежнему пробегает все значения от 1 до n обозначим это ~~как~~ ρ

Продолжаем равенство:

$$= \sum_{\rho \in S_n} (\operatorname{sgn} \rho) \cdot a_{n,\rho(n)} \cdot \ldots \cdot a_{1,\rho(n)} = \det A$$, т.к. перестановки σ и ρ пробегаются по всем возможным перестановкам

Ответ: $\det A$ не изменится

№3.2

Пусть A - множество четных подстановок на n элементах. Умножив любой элемент множества справа на транспозицию $(1,2)$ у элемента изменится четность, т.к. транспозиция нечетна. Таким образом отображение $\sigma \to \sigma \cdot \tau_{12}$ является биекцией между множеством четных перестановок в S_n и мн-вом нечет. перестановок в S_n. $\Rightarrow$ число нечет. перест. = числу чет. перест.

№3.3.

$$A \cdot B = C$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 8 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 10000 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1000 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 20604 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 53227 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 25755 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 20827 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 289 \end{pmatrix}$$

Заметим, что $\det(C) \vdots 17$, т.к. мы можем из последнего столбца вынести множитель 17

В свою время $\det(B) = 1 \Rightarrow \det(B) \not\vdots 17$

А значит $\det(A)$ обязан $\vdots 17$.