Линал ДЗ-20 Панфилов Борис БПМИ-216

№1.1

$$L = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle$$

Чтобы найти ~~A~~ $L^{\perp}$ запишем векторы порождающие L в строки матрицы A и решим ОСЛУ $Ax=0$. Тогда ФСР и будет базисом $L^{\perp}$, т.к. скалярное произведение любого вектора из L со всякими векторами из ~~...~~ линейной оболочки ФСР будет равно 0.

$$\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&-1&1&3\\3&4&2&3\end{pmatrix} \xrightarrow{III \to III - 3\cdot I} \begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&-1&1&3\\0&-2&2&6\end{pmatrix} \xrightarrow{III \to III - 2\cdot II} \begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&-1&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{II \to -1\cdot II} \begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&1&-1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{I \to I - II\cdot 2} \begin{pmatrix}1&0&2&5\\0&1&-1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ФСР: } v_1 = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix}-5\\3\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \{v_1, v_2\}$ - базис $L^{\perp}$.

№1.2.

$$L: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 + 7x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Заметим, что выражение $x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4$ является скалярным произведением векторов $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\3\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$. Таким образом L состоит из векторов, у которых равны 0 скалярные произведения с векторами $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-4\\-1\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\-1\end{pmatrix}$. А значит эти векторы и являются базисом $L^{\perp}$.

Ответ: $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-4\\-1\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ - базис $L^{\perp}$

CamScanner

№1.3

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = u_2 - \frac{(u_2, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 = u_2 - 2v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = u_3 - \frac{(u_3, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 - \frac{(u_3, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2 = u_3 - \frac{-4}{4} v_1 - \frac{14}{14} v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v_4 = u_4 - \frac{(u_4, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 - \frac{(u_4, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2 - \frac{(u_4, v_3)}{(v_3, v_3)} v_3 = u_4 - \frac{4}{4} v_1 - \frac{14}{14} v_2 - \frac{0}{12} v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{4}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{4} \\ -1/\sqrt{4} \\ -1/\sqrt{4} \\ -1/\sqrt{4} \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{14} \\ 0 \\ 2/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

$$w_3 = \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{12} \\ 3/\sqrt{12} \\ -1/\sqrt{12} \\ -1/\sqrt{12} \end{pmatrix}$$

Ответ: $\{w_1, w_2, w_3\}$ – ортонормированный базис.

№1.4

$$v_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Найдем базис u_3, u_4 ортогонального дополнения к $\langle v_1, v_2 \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ФСР } u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Теперь ортогонализуем по отдельности $\{v_1, v_2\}$ и $\{u_3\ u_4\}$

$$t_1 = v_1$$

$$t_2 = v_2 - \frac{(v_2, t_1)}{(t_1, t_1)} t_1 = v_2 - \frac{0}{*} t_1 = v_2$$

$$t_3 = u_3$$

$$t_4 = u_4 - \frac{(u_4, t_3)}{(t_3, t_3)} t_3 = u_4 - \frac{0}{*} t_3 = u_4$$

Получили $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ – ортогональный базис. Осталось его нормализовать.

$$w_1 = \frac{1}{|t_1|} \cdot t_1 = \frac{1}{1} \cdot t_1 = t_1$$

$$w_2 = \frac{1}{|t_2|} \cdot t_2 = \frac{1}{1} \cdot t_2 = t_2$$

$$w_3 = \frac{1}{|t_3|} \cdot t_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot t_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_4 = \frac{1}{|t_4|} \cdot t_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot t_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Ответ: (w_1, w_2, w_3, w_4) – ортонормированный базис $\mathbb{R}^4$.

3

№1.5

$$v = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad L = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}}_{u_2} \right\rangle$$

$$pr_L v = \frac{(v, u_1)}{(u_1, u_1)} u_1 + \frac{(v, u_2)}{(u_2, u_2)} u_2 = \frac{10}{6} u_1 + \frac{15}{27} u_2 = \frac{5}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{5}{9} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{5}{3} \left(\begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \right) = \frac{5}{9} \begin{pmatrix} 10/3 \\ -1 \\ -2/3 \\ -10/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50/27 \\ -5/9 \\ -10/27 \\ -50/27 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 50/27 \\ -5/9 \\ -10/27 \\ -50/27 \end{pmatrix}$

Переделаю дальше. 1.6 Тоже.

№1.5

$$v = \begin{pmatrix}7\\1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad L = \left\langle \underset{u_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\-4\end{pmatrix}} \right\rangle$$

Ортогонализуем L

$v_1 = u_1$

$$v_2 = u_2 - \frac{(u_2, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 = u_2 - \frac{-6}{6} v_1 = u_2 + v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

$$pr_L v = \frac{(v, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 + \frac{(v, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2 = \frac{10}{6} v_1 + \frac{25}{21} v_2 = \frac{35}{21} v_1 + \frac{25}{21} v_2 = \frac{5}{21}(7v_1 + 5v_2) =$$

$$= \frac{5}{21} \cdot \left(\begin{pmatrix}7\\0\\7\\14\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}20\\-5\\0\\-10\end{pmatrix} \right) = \frac{5}{21} \cdot \begin{pmatrix}27\\-5\\7\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}45/7\\-25/21\\5/3\\20/21\end{pmatrix}$$

№1.6

$$v = \begin{pmatrix}-1\\5\\3\\5\end{pmatrix} \qquad L = \begin{cases} -4x + 3y + 2z + t = 0 \\ 5x - 2y + z - 9t = 0 \end{cases}$$

Как мы поняли в задании 1.2 $\left\{ \underset{u_1}{\begin{pmatrix}-4\\3\\2\\1\end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix}5\\-2\\1\\-9\end{pmatrix}} \right\}$ - базис $L^\perp$

Найдем проекцию сначала на подпр-во $L^\perp$. Для этого ортогонализуем его

$$v_1 = u_1 = \begin{pmatrix}-4\\3\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\cancel{v_2 = u_2 - \frac{(u_2, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 = u_2 - \frac{-33}{111} v_1 = u_2 + \frac{11}{37} v_1 = \begin{pmatrix}5\\-2\\1\\-8\end{pmatrix} + \frac{11}{37}\begin{pmatrix}-4\\3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}141/37\\-41/37\\59/37\\-322/37\end{pmatrix}}$$

$$\cancel{pr_{L^\perp} v = \frac{(v, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 + \frac{(v, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2}$$

$$v_2 = u_2 - \frac{(u_2, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 = u_2 - \frac{-33}{30} v_1 = u_2 + \frac{11}{10} v_1 = \begin{pmatrix}5\\-2\\1\\-9\end{pmatrix} + \frac{11}{10}\begin{pmatrix}-4\\3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/5\\13/10\\16/5\\-79/10\end{pmatrix}$$

$$pr_{L^\perp} v = \frac{(v, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 + \frac{(v, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2 = \frac{30}{30} v_1 + \frac{240}{747} v_2 = v_1 + \frac{80}{249} v_2$$

$$\cancel{v_L = v - v_{L^\perp}}$$

$$\cancel{v_L = v - v_1 - \frac{80}{249} v_2 = \begin{pmatrix}-1\\5\\3\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-4\\3\\2\\1\end{pmatrix} - \frac{80}{249}\begin{pmatrix}3/5\\13/10\\16/5\\-79/10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}293/83\\384/249\\-7/249\\1628/249\end{pmatrix}}$$

~~Ответ:~~

Т.к. $V_{11} = V - V_1$

$$V_{11} = V - V_1 + \frac{80}{249} V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{80}{249} \begin{pmatrix} 3/5 \\ 13/10 \\ 16/5 \\ -79/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 265/83 \\ 602/249 \\ 505/249 \\ 364/249 \end{pmatrix}$$

Ответ

5

№2.5.

Подходящий под условия алгоритм:

Пусть мы хотим придумать ортогональную матрицу $n \times n$ без нулевых элементов:

1 Шаг: Заполняем все элементы кроме главных диагональных значением $\frac{2}{n}$

2 Шаг: Заполняем элементы на главной диагонали значением $\frac{2-n}{n}$

Проверим корректность:

Но это лишь одна матрица для каждого n

При перемножении двух разных векторов получаем

$$2 \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{2-n}{n} + (n-2) \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 = \frac{8-4n}{n^2} + \frac{4n-8}{n^2} = 0$$

При умножении вектора на себя получаем

$$\left(\frac{2-n}{n}\right)^2 + (n-1) \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 = \frac{4-4n+n^2}{n^2} + \frac{4n-4}{n^2} = \frac{n^2}{n^2} = 1$$

$\overline{+}$

№2.6.

$e_1 \dots e_m$ – базис U

$e_1' \dots e_k'$ – базис W

Докажем 2 включения:

$(U+W)^{\perp} \Rightarrow (x, u) = 0 \quad \forall u \in U+W$