ИДЗ - 7 Панфилов Борис БПМИ-216 19 вариант

№1

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
-1 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-6 & -1 & -6 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow[\mathrm{III} \to \mathrm{III} + 6\cdot \mathrm{I}]{\substack{\mathrm{I} \to -1\cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \to \mathrm{II} - 2\cdot \mathrm{I}}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & -1 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -4 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -7 & 12 & 10 & -6 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow[\mathrm{IV} \to \mathrm{IV} - \mathrm{II}]{\substack{\mathrm{III} \to \mathrm{III} + 7\cdot \mathrm{II} \\ \mathrm{I} \to \mathrm{I} + \mathrm{II}}}
$$

$$
\to
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -4 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -16 & -11 & 8 & 7 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow{\mathrm{III} \to \mathrm{III} + 5\cdot \mathrm{IV}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -4 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 2 & 1 & 5 \\
0 & 0 & 3 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow[\mathrm{IV} \to \mathrm{IV} - 3\cdot \mathrm{III}]{\mathrm{III} \to -1\cdot \mathrm{III}}
$$

$$
\to
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -4 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & -1 & -5 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -8 & 5 & 3 & 16
\end{array}\right)
\xrightarrow[\mathrm{IV} \to -1\cdot \mathrm{IV}]{\substack{\mathrm{III} \to \mathrm{III} + \mathrm{IV} \\ \mathrm{II} \to \mathrm{II} - 3\cdot \mathrm{IV} \\ \mathrm{I} \to \mathrm{I} - 1\cdot \mathrm{IV}}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & -1 & 0 & 9 & -4 & -3 & -16 \\
0 & 1 & -4 & 0 & 26 & -14 & -9 & -48 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 3 & 2 & 11 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 8 & -5 & -3 & -16
\end{array}\right)
\xrightarrow[\mathrm{II} \to \mathrm{II} + 4\cdot \mathrm{III}]{\mathrm{I} \to \mathrm{I} + \mathrm{III}}
$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & -5 & -3 & -16 \end{array}\right)$$

Ответ:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & -1 & -4 \\ -6 & 3 & 2 & 11 \\ 8 & -5 & -3 & -16 \end{pmatrix}$$

№2

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 5 & 2 & 8 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{12} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 7 & 8 & 4 & 3 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\right)^{182} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 5 & 8 & 6 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 5 & 2 & 8 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{12} = (1427)^{12} \cdot (358)^{12} \cdot (6)^{12} = (1427) \cdot (358) \cdot (6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 5 & 2 & 8 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 7 & 8 & 4 & 3 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 5 & 4 & 6 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 5 & 2 & 8 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 5 & 4 & 6 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 8 & 2 & 6 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(\sigma\rho)^{182} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 8 & 2 & 6 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}^{182} = \left((13856) \cdot (24) \cdot (7)\right)^{182} = (13856)^{182} \cdot (24)^{182} \cdot (7)^{182} = (13856)^2 \cdot (24) \cdot (7) =$$

$$= (18635) \cdot (24)(7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 5 & 2 & 1 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = \tau$$

$$\tau \cdot X = \alpha$$

$$\tau^{-1} \cdot \tau \cdot X = \tau^{-1} \cdot \alpha$$

$$id \cdot X = \tau^{-1} \cdot \alpha$$

$$X = \tau^{-1} \cdot \alpha$$

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 5 & 2 & 1 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 6 & 2 & 3 & 8 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 6 & 2 & 3 & 8 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 5 & 8 & 6 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 3 & 1 & 8 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 3 & 1 & 8 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

№3

$$\begin{pmatrix} \overbrace{1\ \ 2 \ \dots \ 267}^{267} & \overbrace{268 \ \dots \ 341}^{74} & \overbrace{342 \ \dots \ 438}^{97} \\ \underbrace{342 \ \dots \ 438}_{A} & \underbrace{268 \ \dots \ 341}_{B} & \underbrace{1\ \ 2 \ \dots \ 267}_{C} \end{pmatrix}$$

Как известно, четность перестановки - это четность числа инверсий, а инверсия (в ситуации, когда в первой строке у нас все номера упорядочены по возрастанию) есть просто пара чисел $\dots i \dots j \dots$ во второй строке, для которой $i > j$. Внутри каждого из выделенных блоков такой ситуации очевидно нет.

Назовем выделенные блоки - A, B, C. Тогда каждая пара из блоков A и B является инверсией - $97 \cdot 74$ пар

Каждая пара из блоков A и C является инверсией - $97 \cdot 267$ пар

Каждая пара из блоков B и C является инверсией - $74 \cdot 267$ пар

$\Rightarrow$ знак перестановки будет равен $(-1)^{97 \cdot 74 + 97 \cdot 267 + 74 \cdot 267} = -1$

$\Rightarrow$ перестановка нечетная

Ответ: перестановка нечетная.

№4

$$\begin{vmatrix} 0&0&0&1&0&x\\ 0&0&8&0&0&8\\ 0&0&0&3&6&7\\ 0&4&0&0&1&7\\ 3&9&0&9&x&x\\ x&8&3&x&x&6 \end{vmatrix} \xrightarrow[\;-\frac{8}{3}\;]{\substack{V\to V-I\\ I\leftrightarrow VI\\ II\to\frac{3}{8}\cdot II}} \begin{vmatrix} x&8&3&x&x&6\\ 0&0&3&0&0&3\\ 0&0&0&3&6&7\\ 0&4&0&0&1&7\\ 3&9&0&8&x&0\\ 0&0&0&1&0&x \end{vmatrix} \xrightarrow[\;\frac{8}{3}\;]{\substack{\text{1 столбец}\leftrightarrow\text{3 столбец}\\ II\to II-I}} \begin{vmatrix} 3&8&x&x&x&6\\ 0&-8&-x&-x&-x&-3\\ 0&0&0&3&6&7\\ 0&4&0&0&1&7\\ 0&9&3&8&x&0\\ 0&0&0&1&0&x \end{vmatrix} =$$

$$= 8\begin{vmatrix} -8&-x&-x&-x&-3\\ 0&0&3&6&7\\ 4&0&0&1&7\\ 9&3&8&x&0\\ 0&0&1&0&x \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{I\to -9\,I\\ III\to 18\cdot III\\ IV\to 8\cdot IV}} -\frac{1}{18\cdot 9}\begin{vmatrix} 72&9x&9x&9x&27\\ 0&0&9&6&7\\ 72&0&0&18&126\\ 72&24&64&8x&0\\ 0&0&1&0&x \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{III\to III-I\\ IV\to IV-I}}$$

$$= -\frac{1}{18\cdot 9}\begin{vmatrix} 72&9x&9x&9x&27\\ 0&0&9&6&7\\ 0&-9x&-9x&18-9x&99\\ 0&24-9x&64-9x&-x&-27\\ 0&0&1&0&x \end{vmatrix} = -\frac{4}{9}\begin{vmatrix} 0&9&6&7\\ -9x&-9x&18-9x&99\\ 24-9x&64-9x&-x&-27\\ 0&1&0&x \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{1 столбец}\leftrightarrow\text{4 столбец}\\ I\leftrightarrow IV}}$$

$$= -\frac{4}{9}\begin{vmatrix} x&1&0&0\\ 99&-9x&18-9x&-9x\\ -27&64-9x&-x&24-9x\\ 7&9&6&0 \end{vmatrix} = -\frac{4x}{9}\begin{vmatrix} 1&\frac{1}{x}&0&0\\ 99&-9x&18-9x&-9x\\ -27&64-9x&-x&24-9x\\ 7&9&6&0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{II\to II-99I\\ III\to III+27I\\ IV\to IV-7I}} -\frac{4x}{9}\begin{vmatrix} 1&\frac{1}{x}&0&0\\ 0&-9x-\frac{99}{x}&18-9x&-9x\\ 0&64-9x+\frac{27}{x}&-x&24-9x\\ 0&9-\frac{7}{x}&6&0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{4x}{9}\begin{vmatrix} -9x-\frac{99}{x}&18-9x&-9x\\ 64-9x+\frac{27}{x}&-x&24-9x\\ 9-\frac{7}{x}&6&0 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} x+\frac{11}{x}&-2+x&x\\ 64-9x+\frac{27}{x}&-x&24-9x\\ 9x-7&6x&0 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\left(6x^2\left(64 - 9x + \frac{27}{x}\right) + (-2+x)(24-9x)(9x-7) + x^2(9x-7) - 6x(24-9x)\left(x + \frac{11}{x}\right)\right) =$$

$$= 4\Big(384x^2 - 54x^3 + 162x + (-48 + 18x + 24x - 9x^2)(9x-7) + 9x^3 - 7x^2 -$$

$$- (6x^2 + 66)(24-9x)\Big) =$$

$$= 4\Big(384x^2 - 54x^3 + 162x + 336 + 378x^2 - 294x - 81x^3 + 63x^2 + 9x^3 - 7x^2 - 144x^2 -$$

$$- 1584 + 594x\Big) =$$

$$= 4(-72x^3 + 674x^2 + 30x - 1248) = -288x^3 + 2696x^2 + 120x - 4992$$

Ответ: $-288x^3 + 2696x^2 + 120x - 4992$

№5

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & x & 5 & 1 & 6 & 3 \\ 2 & x & 1 & 7 & 8 & 6 & 5 \\ x & 1 & 2 & 4 & 1 & 8 & x \\ 5 & 7 & 4 & 10 & 10 & x & 3 \\ 1 & 8 & 1 & 10 & x & 9 & 3 \\ 6 & 6 & 8 & x & 9 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & x & 3 & 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} \overset{I \to I - VII}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 & 2 & -8 & -2 & -1 \\ 2 & x & 1 & 7 & 8 & 6 & 5 \\ x & 1 & 2 & 4 & 1 & 8 & x \\ 5 & 7 & 4 & 10 & 10 & x & 3 \\ 1 & 8 & 1 & 10 & x & 9 & 9 \\ 6 & 6 & 8 & x & 9 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & x & 3 & 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} \overset{\substack{1\text{ столбец} \\ \Downarrow \\ 1\text{ столбец} - 7\text{ столбец}}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 & 2 & -8 & -2 & -1 \\ -3 & x & 1 & 7 & 8 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 8 & x \\ 2 & 7 & 4 & 10 & 10 & x & 3 \\ -8 & 8 & -1 & 10 & x & 9 & 9 \\ -2 & 6 & 8 & x & 9 & 6 & 8 \\ -1 & 5 & x & 3 & 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} =$$

x^5 будет появляться только в тем случае, когда в перестановке участвуют ровно 5 x-ов. То есть ровно 5 x-ов будут множителями данного слагаемого определителя. Переберем все такие перестановки, благо их всего 6.

1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (12)\cdot(37)\cdot(46) \Rightarrow sgn\,\sigma = (-1)^{(2+2+2)-3} = (-1)^3 = -1$

1 Слагаемое: $-9x^5$

2) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 2 Слагаемое: 0

Тут знак не важен, т.к. в произведении будет 0 (a_{31})

3) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 7 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (164)\cdot(37) \Rightarrow sgn\,\sigma = (-1)^{(3+2)-2} = (-1)^3 = -1$

3 Слагаемое: $4x^5$

4) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (15)(37)(46) \Rightarrow sgn = (-1)^{(2+2+2)-3} = (-1)^3 = -1$

4 Слагаемое: $-64x^5$

5) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 7 & 6 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (146)(37) \Rightarrow sgn\,\sigma = -1$

5 Слагаемое: $4x^5$

6) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (137)(46) \Rightarrow \operatorname{sgn}\sigma = -1$

6 слагаемое : 0 , т.к. $(a_{13} = 0)$

Итого: $4x^5 + 4x^5 - 3x^5 - 64x^5 = (8 - 73)x^5 = -65x^5$

Ответ: -65.