Алгоритмы

1 Выделение базиса из системы векторов

Дано Пусть $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ – вектора и $V = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ – их линейная оболочка.

Задача Среди векторов $v_1, \ldots, v_m$ найти базис пространства V и разложить оставшиеся вектора по этому базису.

Алгоритм

1. Запишем вектора $v_1, \ldots, v_m$ по столбцам в матрицу $A \in \mathrm{M}_{n\,m}(\mathbb{R})$. Например, при $n = 3$, $m = 5$
$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} & v_{51} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} & v_{42} & v_{52} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} & v_{43} & v_{53} \end{pmatrix}$$

2. Приведем матрицу A элементарными преобразованиями строк к улучшенному ступенчатому виду. Например
$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{31} & 0 & a_{51} \\ 0 & 1 & a_{32} & 0 & a_{52} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{53} \end{pmatrix}$$

3. Пусть $k_1, \ldots, k_r$ – номера главных позиций в матрице A'. Тогда вектора $v_{k_1}, \ldots, v_{k_r}$ образуют базис V. Например, в примере выше это вектора v_1, v_2 и v_4.

4. Пусть v_i – вектор соответствует неглавной позиции в A'. Тогда в i-ом столбце A' записаны координаты разложения v_i через найденный базис выше. Например, в примере выше $v_3 = a_{31}v_1 + a_{32}v_2$ и $v_5 = a_{51}v_1 + a_{52}v_2 + a_{53}v_4$.

Пример Пусть
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 12 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto$$
$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Тогда v_1, v_2 и v_4 – базис линейной оболочки. $v_3 = 2v_1 + 3v_2$ и $v_5 = v_1 - 2v_4$.

2 Нахождение какого-то базиса линейной оболочки

Дано Пусть $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ – вектора и $V = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ – их линейная оболочка.

Задача Найти какой-нибудь базис подпространства V.

Алгоритм

1. Уложить все вектора v_i в строки матрицы $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$.

2. Элементарными преобразованиями строк привести матрицу к ступенчатому виду.

3. Ненулевые строки полученной матрицы будут искомым базисом.

3 Дополнение линейно независимой системы до базиса всего пространства стандартными векторами

Дано Пусть $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ – линейно независимая система векторов, $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ – их линейная оболочка и e_i – стандартные базисные векторы, т.е. на i-ом месте стоит 1, а в остальных 0.

Задача Найти такие вектора $e_{k_1}, \dots, e_{k_{n-m}}$, что система $v_1, \dots, v_m, e_{k_1}, \dots, e_{k_{n-m}}$ является базисом $\mathbb{R}^n$.

Алгоритм

1. Уложить вектора v_i в строки матрицы $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$.
2. Привести матрицу A к ступенчатому виду.
3. Пусть $k_1, \dots, k_{n-m}$ – номера неглавных столбцов. Тогда $e_1, \dots, e_{k_{n-m}}$ – искомое множество.

4 Найти ФСР однородной СЛУ

Дано Система однородных линейных уравнений $Ax = 0$, где $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ и $x \in \mathbb{R}^n$.

Задача Найти ФСР системы $Ax = 0$.

Алгоритм

1. Привести матрицу A элементарными преобразованиями строк к улучшенному ступенчатому виду. Например
$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{31} & 0 & a_{51} \\ 0 & 1 & a_{32} & 0 & a_{52} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{53} \end{pmatrix}$$
2. Пусть $k_1, \dots, k_r$ – позиции свободных переменных. Если положить одну из этих переменных равной 1, а все остальные нулями, то существует единственное решение, которое мы обозначим через u_i (всего r штук). Например, для матрицы A' выше свободные переменные имеют номера 3 и 5. Тогда вектора (записанные в строку)
$$u_1 = \begin{pmatrix} -a_{31} & -a_{32} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \, u_2 = \begin{pmatrix} -a_{51} & -a_{52} & 0 & -a_{53} & 1 \end{pmatrix}$$
являются ФСР.

5 Задать подпространство базисом, если оно задано матричным уравнением

Дано Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ и $V \subseteq \mathbb{R}^n$ задано в виде $V = \{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\}$.

Задача Найти базис подпространства V.

Алгоритм

1. Найти ФСР системы $Ay = 0$. Векторы ФСР будут базисом V.

6 Задать подпространство матричным уравнением, если оно задано линейной оболочной

Дано Пусть $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ – набор векторов и $V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

Задача Для некоторого m найти матрицу $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ такую, что $V = \{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\}$.

Алгоритм

1. Уложить вектора v_i в строки матрицы $B \in \mathrm{M}_{k\,n}(\mathbb{R})$.
2. Найти ФСР системы $Bz = 0$.
3. Уложить ФСР в строки матрицы $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$, где m – количество векторов в ФСР. Матрица A и будет искомой.

7 Найти матрицу замены координат

Дано Векторное пространство V, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и $f = (f_1, \ldots, f_n)$ – два базиса пространства V. Известна матрица перехода от e к f, т.е. $(f_1, \ldots, f_n) = (e_1, \ldots, e_n)A$, где $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Дан вектор $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$.

Задача Найти разложение v по базису f.

Алгоритм

1. Если $v = ex$, где $x \in \mathbb{R}^n$, а также $v = fy$, где $y \in \mathbb{R}^n$, то $y = A^{-1}x$.

8 Найти матрицу линейного оператора при замене базиса

Дано Векторное пространство V, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и $f = (f_1, \ldots, f_n)$ – два базиса пространства V. Известна матрица перехода от e к f, т.е. $(f_1, \ldots, f_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$, где $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Дано линейное отображение $\phi\colon V \to V$ заданное в базисе e матрицей $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, т.е. $\phi e = eA$.

Задача Найти матрицу отображения ϕ в базисе f.

Алгоритм

1. Пусть $\phi f = fB$, где B – искомая матрица. Тогда $B = C^{-1}AC$.

9 Найти сумму подпространств заданных линейными оболочками

Дано Подпространства $V, U \subseteq \mathbb{R}^n$ заданные в виде $V = \langle v_1, \ldots, v_m\rangle$, $U = \langle u_1, \ldots, u_k\rangle$, где $v_i, u_j \in \mathbb{R}^n$.

Задача Найти базис $V + U$.

Алгоритм

1. Надо найти базис линейной оболочки $\langle v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots, u_k\rangle$.

10 Найти пересечение подпространств заданных линейными оболочками

Дано Подпространства $V, U \subseteq \mathbb{R}^n$ заданные в виде $V = \langle v_1, \ldots, v_m\rangle$, $U = \langle u_1, \ldots, u_k\rangle$, где $v_i, u_j \in \mathbb{R}^n$.

Задача Найти базис $V \cap U$.

Алгоритм [1]

1. Найти ФСР системы $Dx = 0$, где $D = (v_1|\ldots|v_m| - u_1|\ldots| - u_k)$ и $x = \left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right)$, где $\alpha \in \mathbb{R}^m$, $\beta \in \mathbb{R}^k$.
2. Пусть $\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\middle|\ldots\middle|\frac{\alpha_s}{\beta_s}\right)$ – ФСР.
   (a) Множество векторов $R = (v_1|\ldots|v_m)(\alpha_1|\ldots|\alpha_s)$ – порождают $V \cap U$.

[1] В это задаче можно задать подпространства системами, потом найти пересечение в виде системы, потом задать результат базисом.

(b) Среди $(\alpha_1|\dots|\alpha_s)$ можно выкинуть те α_i, для которых $\beta_i = 0$.[2]

3. Выделить базис среди столбцов R. Это и будет базис $V \cap U$.

   - Вместо стандартного алгоритма, можно выделить среди полученных $(\alpha_1|\dots|\alpha_s)$ базис, либо найти любой базис их линейной оболочки $(\alpha_1'|\dots|\alpha_t')$. Тогда $R = (v_1|\dots|v_m)(\alpha_1'|\dots|\alpha_t')$ и будет базисом пересечения.[3]

11 Найти пересечение подпространств заданных матричным уравнением

Дано Подпространства $V, U \subseteq \mathbb{R}^n$ заданные в виде $V = \{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\}$, $U = \{y \in \mathbb{R}^n \mid By = 0\}$, где $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ и $B \in \mathrm{M}_{k\,n}(\mathbb{R})$.

Задача Задать $V \cap U$ в виде $\{y \in \mathbb{R}^n \mid Dy = 0\}$ для некоторого $D \in \mathrm{M}_{k\,n}(\mathbb{R})$, где $\operatorname{rk} D = k \leqslant n$.

Алгоритм

1. Рассмотреть матрицу $D' = \left(\frac{A}{B}\right)$.
2. Выделить среди строк D' линейно независимую подсистему. Результат и будет искомая D.

12 Найти сумму подпространств заданных матричным уравнением

Дано Подпространства $V, U \subseteq \mathbb{R}^n$ заданные в виде $V = \{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\}$, $U = \{y \in \mathbb{R}^n \mid By = 0\}$, где $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ и $B \in \mathrm{M}_{k\,n}(\mathbb{R})$.

Задача Задать $V + U$ в виде $\{y \in \mathbb{R}^n \mid Ry = 0\}$ для некоторого $R \in \mathrm{M}_{k\,n}(\mathbb{R})$, где $\operatorname{rk} R = k \leqslant n$.

Алгоритм [4]

1. Найти ФСР системы $Dx = 0$, где $D = (A^t| - B^t)$ и $x = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$, где $\alpha \in \mathbb{R}^m$ и $\beta \in \mathbb{R}^k$.
2. Пусть $\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\middle|\dots\middle|\frac{\alpha_s}{\beta_s}\right)$ – ФСР. Если определим $S^t = (v_1|\dots|v_m)(\alpha_1|\dots|\alpha_s)$, то $V + U = \{y \in \mathbb{R}^n \mid Sy = 0\}$.
3. Выделить базис среди строк S. Это и будет искомая матрица R.

13 Найти проекцию вектора на подпространство вдоль другого подпространства

Дано $\mathbb{R}^n = V \oplus U$, где V и U заданы базисами $V = \langle v_1, \dots, v_m\rangle$, $U = \langle u_1, \dots, u_k\rangle$. Пусть $z \in \mathbb{R}^n$ раскладывается $z = v + u$, где $v \in V$ и $u \in U$.

Задача Найти v и u.

Алгоритм

1. Решить СЛУ $Dx = z$, где $D = (v_1|\dots|v_m|u_1|\dots|u_k)$ и $x = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$, где $\alpha \in \mathbb{R}^m$ и $\beta \in \mathbb{R}^k$.
2. Тогда $v = (v_1|\dots|v_m)\alpha$ и $u = (u_1|\dots|u_k)\beta$.

14 Найти оператор проекции на подпространство вдоль другого подпространства

Дано $\mathbb{R}^n = V \oplus U$, где V задано базисом $V = \langle v_1, \dots, v_m\rangle$, $U = \{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\}$, где $A \in \mathrm{M}_{k\,n}(\mathbb{R})$ и $\operatorname{rk} A = k \leqslant n$.

[2] Если ФСР построен по стандартному базису, то останутся α_i с нулевыми свободными переменными.

[3] Если $u_1, \dots, u_k$ были линейно независимы, то полученный на предыдущем шаге набор $(\alpha_1|\dots|\alpha_s)$ уже будет линейно независим.

[4] В этой задаче можно задать подпространства базисами, потом найти сумму заданной базисом, потом задать эту сумму системой.

Задача Найти матрицу отображения $\phi\colon V \to V$ такого, что $\phi(U) = 0$ и $\phi(v) = v$ для любого $v \in V$.[5]

Алгоритм

1. Положим $B = (v_1| \ldots |v_m) \in \mathrm{M}_{n\,m}(\mathbb{R})$.
2. Обязательно получится, что $m = k$ и матрица AB невырождена.
3. Искомый ϕ имеет матрицу $B(AB)^{-1}A$.

15 Определить существует ли линейный оператор заданный на векторах

Дано Векторное пространство V и набор векторов $v_1, \ldots, v_k \in V$, векторное пространство U и набор векторов $u_1, \ldots, u_k \in U$.

Задача Определить существует ли линейное отображение $\phi\colon V \to U$ такое, что $\phi(v_i) = u_i$.

Алгоритм

1. Среди векторов $v_1, \ldots, v_k$ выделить линейно независимые, а остальные разложить по ним.
2. Пусть на предыдущем этапе базис получился $v_1, \ldots, v_r$, а $v_{r+i} = a_{i1}v_1 + \ldots + a_{ir}v_r$.
3. Искомое линейное отображение ϕ существует тогда и только тогда, когда выполняются равенства $u_{r+i} = a_{i1}u_1 + \ldots + a_{ir}u_r$.[6]

16 Найти базис образа и ядра линейного отображения

Дано $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ задан $x \mapsto Ax$, где $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$.

Задача Найти базис $\operatorname{Im}\phi \in \mathbb{R}^m$ и базис $\ker\phi \in \mathbb{R}^n$.

Алгоритм

1. Выделить базис среди столбцов матрицы A. В результате получится базис $\operatorname{Im}\phi$.
2. Найти ФСР системы $Ax = 0$. Полученная ФСР будет базисом $\ker\phi$.

17 Поиск собственных значений и векторов

Следующий алгоритм годится как для комплексных так и для вещественных матриц. Разница лишь в том, что в вещественном случае у нас вообще говоря будет меньше собственных значений. Для определенности алгоритм рассказывается для комплексных матриц.

Дано Матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Задача Найти все собственные значения λ_i для A и для каждого λ_i найти базис пространства $V_{\lambda_i} = \{v \in \mathbb{C}^n \mid Av = \lambda_i v\}$.

Алгоритм

1. Посчитать характеристический многочлен $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$.
2. Найти корни многочлена $\chi_A(\lambda)$. Корни $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ будут собственным значениями A.
3. Для каждого λ_i найти ФСР системы $(A - \lambda_i E)x = 0$. Тогда ФСР будет базисом V_{λ_i}.

[5] Заметим, что если $z \in \mathbb{R}^n$ раскладывается $z = v + u$, где $v \in V$ и $u \in U$, то $\phi(z) = v$.
[6] В частности, если все v_i оказались линейно независимыми, то линейное отображение ϕ обязательно существует.

18 Проверка на диагонализуемость

Дано Матрица $A \in \mathrm{M}_n(F)$, задающая линейный оператор $\varphi\colon F^n \to F^n$.

Задача Выяснить существует ли базис, в котором φ задается диагональной матрицей и если задается, то какой именно. На матричном языке: существует ли невырожденная матрица $C \in \mathrm{M}_n(F)$ такая, что $C^{-1}AC$ является диагональной и найти эту диагональную матрицу.

Алгоритм

1. Найдем характеристический многочлен $\chi(t)$ для φ, он же для A по формуле $\chi(t) = \det(A - tE)$.
2. Проверим, раскладывается ли $\chi(t)$ на линейные множители над F, то есть представляется ли он в виде $\chi(t) = (t-\lambda_1)^{d_1} \ldots (t-\lambda_k)^{d_k}$. Если не представляется, то φ (или что то же самое A) не диагонализируется
3. Если $\chi(t) = (t-\lambda_1)^{d_1} \ldots (t-\lambda_k)^{d_k}$. Найдем для каждого λ_i базис V_{λ_i} как ФСР системы $(A - \lambda_i E)x = 0$. Если для хотя бы одного i количество элементов в ФСР меньше соответствующей кратности корня d_i, то φ не диагонализируется.
4. Если для каждого i мы получили, что размер ФСР совпадает с кратностью корня, то есть $\dim V_{\lambda_i} = d_i$. То φ диагонализируется и диагональная матрица $C^{-1}AC$ на диагонали содержит числа λ_i в количестве d_i штук.

Заметим, что если поле F алгебраически замкнуто, то первый шаг алгоритма выполнен автоматически, а именно, над алгебраически замкнутым полем любой многочлен разлагается на линейные множители. Потому в этом случае вопрос о диагонализируемости – это лишь проверка всех равенств $\dim V_{\lambda_i} = d_i$.

19 Определить ЖНФ у оператора

Дано Матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$

Задача Определить все собственные значения и размеры клеток в жордановой нормальной форме.

Алгоритм

1. Собственные значения совпадают со спекторм их ищем, как корни характеристического многочлена $\chi_A(t) = (-1)^n \det(A - tE) = 0$. Получаем набор корней и их кратности $(\lambda_1, n_1), \ldots, (\lambda_k, n_k)$.
2. Для каждого λ_i суммарный размер клеток равен n_i. Потому надо определить количество клеток для всех $k \in [1, n_i]$. Количество клеток считается по формуле

$$\text{количество клеток размера } k \ = \operatorname{rk}(A - \lambda_i E)^{k+1} + \operatorname{rk}(A - \lambda_i E)^{k-1} + 2\operatorname{rk}(A - \lambda_i E)^k$$

Обратите внимание, что если вы нашли m клеток размера k, а кратность была n_i, то на оставшиеся клетки уходит $n_i - mk$ мест. Этим можно пользоваться, чтобы не считать все количества клеток подряд.

20 Определение ЖНФ у матриц 2 на 2

Дано Матрица $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$

Найти Жорданова форма может быть одной из

$$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix}$$

Определить какая форма в нашем случае и определить все числа.

Алгоритм Общая идея в том, чтобы подобрать инварианты, которые достаточно рассчитать для выбора из предоставленных вариантов.

1. Найдем характеристический многочлен $\chi_A(t) = \det(A - tE)$. И посчитаем его корни. Есть два варианта:

   (a) два разных корня λ и μ. В этом случае ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}$$

   (b) один корень λ кратности 2. В этом случае, если $A = \lambda E$, то ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{pmatrix}$$

   В противном случае ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix}$$

21 Определение ЖНФ у матриц 3 на 3

Дано Матрица $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$

Найти Жорданова форма может быть одной из

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & \gamma \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

Определить какая форма в нашем случае и определить все числа.

Алгоритм Общая идея в том, чтобы подобрать инварианты, которые достаточно рассчитать для выбора из предоставленных вариантов.

1. Найдем характеристический многочлен $\chi_A(t) = -\det(A - tE)$ и посчитаем его корни. Возможны следующие варианты:
   - три разных корня λ, μ, γ.
   - один корень λ кратности 2, один корень μ кратности 1.
   - один корень λ кратности 3.
2. Три разных корня. В этом случае ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

3. Два разных корня, λ кратности 2 и μ кратности 1. В этом случае, если $\mathrm{rk}(A - \lambda E) = 1$, то ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}$$

   В противном случае (то есть, если $\mathrm{rk}(A - \lambda E) = 2$) ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}$$

4. Один корень λ кратности 3. Если $A = \lambda E$, то ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

Если $\operatorname{rk}(A - \lambda E) = 1$, то ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

В противном случае (то есть $\operatorname{rk}(A - \lambda E) = 2$) ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

22 Определение ЖНФ у матриц 4 на 4 с одним собственным значением

Дано Матрица $A \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C})$ с единственным собственным значением.

Найти Жорданова форма может быть одной из

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Определить какая форма в нашем случае и определить собственное значение.

Алгоритм Общая идея в том, чтобы подобрать инварианты, которые достаточно рассчитать для выбора из предоставленных вариантов.

1. Найдем характеристический многочлен $\chi_A(t) = \det(A - tE)$. Так как он имеет вид $(t - \lambda)^4$, то можно найти его 3-ю производную и решить $\chi_A(t)^{(3)} = 0$ для нахождения корня.

2. Если $A = \lambda E$, то ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

3. Если $\operatorname{rk}(A - \lambda E) = 1$, то ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

4. Если $\operatorname{rk}(A - \lambda E) = 3$, то ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

5. Если $\mathrm{rk}(A - \lambda E) = 2$, то надо посмотреть на $(A - \lambda E)^2$. Если $(A - \lambda E)^2 = 0$, то ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

иначе (если $(A - \lambda E)^2 \neq 0$) ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

23 Найти матрицу билинейной формы при замене базиса

Дано Векторное пространство V, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и $f = (f_1, \ldots, f_n)$ – два базиса пространства V. Известна матрица перехода от e к f, т.е. $(f_1, \ldots, f_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$, где $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Дана билинейная форма $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$ заданная в базисе e матрицей $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, т.е. $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$.

Задача Найти матрицу билинейной формы β в базисе f.

Алгоритм

1. Пусть в базисе f мы имеем $\beta(x, y) = x^t B' y$, где B' – искомая матрица. Тогда $B' = C^t B C$.

24 Найти правое ортогональное дополнение к подпространству

Дано Подпространство $V \subseteq \mathbb{R}^n$, заданное образующими $V = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$, и билинейная форма $\beta\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, заданная $\beta(x, y) = x^t B y$, где $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Задача Найти $V^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \beta(V, y) = 0\}$.

Алгоритм

1. Составить вектора v_i в столбцы матрицы $D \in \mathrm{M}_{n\,k}(\mathbb{R})$.
2. Найти ФСР СЛУ $D^t B y = 0$. Данная ФСР дает базис $V^\perp$.

25 Найти левое ортогональное дополнение к подпространству

Дано Подпространство $V \subseteq \mathbb{R}^n$, заданное образующими $V = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$, и билинейная форма $\beta\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, заданная $\beta(x, y) = x^t B y$, где $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Задача Найти ${}^\perp V = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \beta(y, V) = 0\}$.

Алгоритм

1. Составить вектора v_i в столбцы матрицы $D \in \mathrm{M}_{n\,k}(\mathbb{R})$.
2. Найти ФСР СЛУ $D^t B^t y = 0$. Данная ФСР дает базис ${}^\perp V$.

26 Симметричный Гаусс

Дано Симметричная билинейная форма $\beta\colon F^n \times F^n \to F$ по правилу $(x, y) \mapsto x^t B y$, где $B \in \mathrm{M}_n(F)$ – симметричная матрица и при этом $2 \neq 0$ в поле F.

Задача Диагоналзовать β, то есть найти матрицу перехода к новому базису C такую, чтобы $B' = C^t B C$ была диагональная, и посчитать саму матрицу B'.

Алгоритм

1. Чтобы найти матрицу B' будем приводить ее к диагональному виду симметричными элементарными преобразованиями, то есть допускаются следующие преобразования:

   - Прибавить i-ю строку умноженную на λ к j-ой строке и сразу же прибавление i-го столбца умноженного на λ к j-ому столбцу.
   - Поменять местами i-ю и j-ю строку и тут же поменять местами i-ый и j-ый столбец.
   - Умножить i-ю строку на ненулевое λ и тут же умножить i-ый столбец на то же самое λ.

   Получившаяся диагональная матрица будет искомая B'.

2. Если при этом надо восстановить матрицу C, то рассматриваем $(B|E)$ и делаем симметричные элементарные преобразования над ней в том смысле, что преобразования над строками выполняются над всей матрицей, а преобразования над столбцами только над часть, где лежит B. Тогда матрица приведется к виду $(B'|C^t)$.

27 Метод Якоби

Дано Симметричная билинейная форма $\beta\colon V\times V \to F$, базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства V, такой, что $\det \beta|_{\langle e_1,\ldots,e_k\rangle} \neq 0$.

Задача Найти базис $e'_1, \ldots, e'_n$ такой, что $e'_i - e_i \in \langle e_1, \ldots, e_{i-1}\rangle = \langle e'_1, \ldots, e'_{i-1}\rangle$ такой, что $\beta(e'_i, e'_j) = 0$ при $i \neq j$.

Алгоритм

1. В начале положим $e'_1 = e_1$.

2. Пусть мы нашли вектора $e'_1, \ldots, e'_{i-1}$. Тогда положим вектор e'_i в виде[7]

$$e'_i = e_i - \frac{\beta(e_i, e'_1)}{\beta(e'_1, e'_1)}e'_1 - \ldots - \frac{\beta(e_i, e'_{i-1})}{\beta(e'_{i-1}, e'_{i-1})}e'_{i-1}$$

28 Алгоритм диагонализации на основе метода Якоби

Дано Симметрическая матрица $B \in \mathrm{M}_n(F)$.

Задача Проверить, что все ее угловые подматрицы B_k невырождены и если это так, то найти их значения, а также найти верхнетреугольную матрицу с единицами на диагонали $C \in \mathrm{M}_n(F)$ и диагональную матрицу $D \in \mathrm{M}_n(F)$ такие, что $B = C^tDC$.

Алгоритм

1. Начнем приводить матрицу B к верхнетреугольному виду элементарными преобразованиями первого типа, когда нам разрешено прибавлять строку с коэффициентом только к более низкой строке. Возможны два исхода:

   - На каком-то этапе получили, что на диагонали на k-ом месте стоит 0, а под диагональю есть ненулевой элемент. Это значит, что $\Delta_k = 0$. Условие на матрицу не выполнено.
   - Мы привели матрицу B к верхнетреугольной матрице U. Переходим к следующему шагу.

2. Восстановим все необходимые данные по матрице U следующим образом:

   (a) D – диагональ матрицы U.

   (b) $C = D^{-1}U$.

   (c) Δ_k – произведение первых k элементов диагонали матрицы D.

[7]В силу условия $\det \beta|_{\langle e_1,\ldots,e_k\rangle} \neq 0$ выражения вида $\beta(e'_k, e'_k)$ будут всегда отличны от нуля.

29 Привести квадратичную форму методом Лагранжа в нормальный вид

Дано Квадратичная форма $Q(x) = \sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j$, где $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Задача Линейной заменой координат x_i привести квадратичную форму к виду $Q(x) = \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{d} x_i^2$.

Алгоритм

1. Начнем с переменной x_1. Посмотреть, зависит $Q(x)$ от x_1^2 или нет.

2. Пусть не зависит от x_1^2, но вообще говоря зависит от x_1. Тогда можно считать, что есть член x_1x_2. Сделаем замену переменных $x_1 = u_1 + u_2$, $x_2 = u_1 - u_2$. Тогда $x_1x_2 = u_1^2 - u_2^2$. После этой замены, можно считать, что $Q(x)$ зависит от x_1^2.

3. Рассмотрим все слагаемые содержащие x_1:

$$Q(x) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + Q'(x)$$

   Выделим полный квадрат

$$Q(x) = a_{11}\left(x_1^2 + 2\left(\frac{a_{12}}{2a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{2a_{11}}x_n\right)x_1 + \left(\frac{a_{12}}{2a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{2a_{11}}x_n\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{a_{12}}{2a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{2a_{11}}x_n\right)^2\right) + Q'(x) =$$
$$= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{2a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{2a_{11}}x_n\right)^2 + Q''(x)$$

4. Теперь $Q''(x)$ не зависит от x_1. Повторить для него алгоритм с первого шага.