Линал ДЗ-15 Панфилов Борис БПМИ-216 Волшебное число 4

№1.1

$$U = \left\langle \underset{A_1}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}, \underset{A_2}{\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}, \underset{A_3}{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Вытянем матрицы порождающие U в векторы и выберем из них те, которые являются базисом U.

$$A_1 \to V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad A_2 \to V_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad A_3 \to V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV} \to \text{IV} + \text{I}]{\substack{\text{II} \to \text{II} - \text{I} \\ \text{III} \to \text{III} - \text{I}}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} \to \text{III} - \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \{V_1, V_2\}$ - базис U.

Поскольку мы перешли от матриц к векторам, требуется найти 2 каких-нибудь подпр-ва W, т.что $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$

То есть $\dim W = 2$ и векторы базиса U и векторы базиса W лин независимы

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{столбцы}]{\text{II} \to \text{II} + 2 \cdot \text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1 вариант

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Тогда $\dim W = 2$ и $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \mathbb{R}^4 = U \oplus W$

2 вариант

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Тогда $\dim W = 2$ и $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \mathbb{R}^4 = U \oplus W$

Нетрудно заметить что это разные подпр-ва, т.к. вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ принадлежит первому, но не принадлежит второму.

№ 1.2

$$V: \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$U = \left\langle \underset{u_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\rangle \qquad W = \left\langle \underset{w_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Представим V в виде лин. оболочки базисных векторов

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ФСР}: \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{v_3}{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

1) $\dim U = 2$
$\dim W = 1$ $\Rightarrow$ $\dim V = \dim U + \dim W$
$\dim V = 3$

2) Проверим, что U и W линейно независимы. Для этого убедимся в том, что объединение их базисов линейно независимо:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[V \to V + I]{II \to II - I,\ III \to III - 2I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[V \to V + III]{II \leftrightarrow IV,\ IV \to IV - III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ ~~линейна~~ u_1, u_2, w_1 лин независимы

3) Покажем, что $u_1, u_2, w_1 \in V$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{III \to III - I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[V \to V - III]{II \leftrightarrow IV,\ IV \to IV + III} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{I \to I + III} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow u_1 = v_1 - v_3$

$u_2 = v_2$

$w_1 = v_1 + v_2 + v_3$

Из 1), 2), 3) следует, что $V = U \oplus W$.

№ 1.3 – 1.5

а) Нет, не является:

$$F(g+h) = \frac{d}{dx}(g+h) - 2x = \frac{dg}{dx} + \frac{dh}{dx} - 2x \neq \frac{dg}{dx} - 2x + \frac{dh}{dx} - 2x = F(g) + F(h)$$

б) Является. Проверим необходимые св-ва.

$$F(g+h) = \frac{d}{dx}(g+h) - 2(g+h) = \frac{dg}{dx} + \frac{dh}{dx} - 2g - 2h = F(g) + F(h)$$

$$F(\lambda g) = \frac{d}{dx}\lambda g - 2(\lambda g) = \lambda\frac{dg}{dx} - \lambda\cdot 2\cdot g = \lambda\left(\frac{dg}{dx} - 2g\right) = \lambda F(g)$$

в) Является. Проверим необходимые св-ва.

$$F(g+h)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (g+h)(t)dt = \frac{1}{x}\int_0^x g(t) + h(t)\,dt = \frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt + \frac{1}{x}\int_0^x h(t)dt =$$

$$= F(g)(x) + F(h)(x)$$

$$F(\lambda g)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (\lambda g)(t)dt = \frac{1}{x}\int_0^x \lambda g(t)\,dt = \frac{1}{x}\lambda\int_0^x g(t)dt = \lambda F(g)(x)$$

г) Является. Проверим необходимые св-ва.

$$F(g+h)(x) = (g+h)(2x-3) = g(2x-3) + h(2x-3) = F(g)(x) + F(h)(x)$$

$$F(\lambda g)(x) = (\lambda g)(2x-3) = \lambda g(2x-3) = \lambda F(g)(x)$$

д) Является. Проверим необходимые св-ва

$$F\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1+y_1) - (x_2+y_2) \\ x_1+y_1+x_3+y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 2y_1 - y_2 \\ x_1+x_3 + y_1+y_3 \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + F\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$F\left(\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = F\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha x_1 - \alpha x_2 \\ \alpha x_1 + \alpha x_3 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix} = \alpha F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

е) Нет, не является.

Контрпример

$$F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

№1.6 - 1.7

а) $F : Mat_{2\times2}(\mathbb{R}) \to Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$

$$f(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(E_{12}) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F(E_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$F(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Матрица лин отобр:

$$\begin{array}{c} \\ E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_{11} & E_{12} & E_{21} & E_{22} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

б) $f(X) = AX - X^T A$

$$f(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$f(E_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$f(E_{21}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F(E_{22}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Матрица лин. отобр:

$$\begin{array}{c} \\ E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_{11} & E_{12} & E_{21} & E_{22} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

№ 1.8

$f(X) = XA$, причем $X = X^T$

Зафиксируем базисы:

$\{E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}+E_{21}, E_{13}+E_{31}, E_{32}+E_{23}\}$ - базис пр-ва симметрических матриц 3x3

$\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, E_{31}, E_{32}\}$ - базис пр-ве матриц 3x2.

$$f(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F(E_{33}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F(E_{12}+E_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F(E_{13}+E_{31}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F(E_{23}+E_{32}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица лин. отобр:

$$\begin{array}{c} \\ E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \\ E_{31} \\ E_{32} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} E_{11} & E_{22} & E_{33} & E_{12}+E_{21} & E_{13}+E_{31} & E_{23}+E_{32} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

№2.1

Пусть $\{x^3, x^2-2x, -x^2+x, -1\}$ - базис $\mathbb{R}^3[x]_3$

Нетрудно заметить, что они лин. независимы, т.к. если представить их при помощи векторов из $\mathbb{R}^4$, где элементами вектора являются коэф-ты ~~[illegible]~~ и записать их в матрицу, то мы получим

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Далее проверим условие данное в условии:

$1\cdot x^3 + 1\cdot(x^2-2x) + 1\cdot(-x^2+x) + 1\cdot(-1) = x^3 - x - 1$

выполняется => такой базис подходит.

№2.2

Пример базисов, для которых X состоит только из нулевого вектора:

$\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ и $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Пример базисов, для которых X состоит не только из нулевого вектора:

$\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ и $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

X представляет из себя подпр-во, базисом которого являются ~~[illegible]~~ совпадающие в представленных базисах векторы.

№2.3 - 2.4

а) Требуется доказать, что для оператора проектирования F выполнено соотношение $F^2 = F$.

F переводит $v \in V$ в u, где $v = u + w$

F^2 переводит полученный после F вектор u в u, то есть проектирует вектор u на u. Очевидно, что это будет тот же самый вектор.

б)

$$U = \langle \underset{u_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \rangle \qquad W = \langle \underset{w_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \rangle$$

Нетрудно заметить, что векторы в U базисе U и W лин независимы и $\dim \mathbb{R}^3 = \dim U + \dim W$

$\Rightarrow \mathbb{R}^3 = U \oplus W$

Зафиксируем базисы:

Пусть $\{e_1, e_2, e_3\}$ - базис V, $\{u_1, u_2\}$ - базис U, $\{w_1\}$ - базис W

$$F(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F(e_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матрица оператора проектирования:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

N 2.5

В матрице линейного оператора поменяются местами i-я и j-я строки и i-й и j-й столбцы, т.к. мы меняем местами базисные векторы, а их порядок учитывается и в столбцах, и в строках, ведь мы работаем с линейным оператором.