ИДЗ - 6 Панфилов Борис

№1

Перейдем от многочленов к векторам их коэффициентов, в силу изоморфности пространств V и $\mathbb{R}^3$. Тогда можем считать, что $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, где базисом $\mathbb{R}^3$ являются $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ и нам требуется найти $\varphi \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v}$

Найдем коор-ты v в базисе $v_1 v_2 v_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -4 & -1 \\ -2 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \text{УСВ}: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \text{коор-ты равны} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Теперь воспользуемся матрицей лин. отобр., чтобы найти коор-ты $\varphi(v)$ в базисе $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ -4 & -5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi(v) = -9 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + 15 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -30 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

№2

а) Попробуем найти матрицу лин. отобр. A. Нам известно, что $Aa_1 = b_1$, $Aa_2 = b_2$, $Aa_3 = b_3$, $Aa_4 = b_4$, $Aa_5 = b_5$. Получаем матричное уравнение $AX = Y$, где в матрицу X в столбцы записаны векторы $a_1 \dots a_5$, а в матрицу Y — $b_1 \dots b_5$.

$$AX = Y \Leftrightarrow X^T A^T = Y^T$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc} 3 & -4 & -5 & -2 & 1 & -45 & 45 & -54 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & -9 & 21 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & 3 & 9 & -9 & 30 \\ 3 & -1 & -1 & -3 & 3 & -9 & 9 & -27 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 4 & 6 & -6 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \\ 3 & -3 & 12 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

Только одна матрица A подходит => φ - единственно. ∎

б) Найдем ядро:

Для этого нужно найти ФСР системы $Ax=0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 6 & 12 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{УСВ}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ФСР}: \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{v_2}{\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ - ядро

Найдем образ:

Для этого нужно найти базис лин оболочки столбцов матрицы A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 6 & 12 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{УСВ}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{u_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}} \underset{u_2}{\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}} \text{ - базис образа}$$

$\Rightarrow \langle u_1, u_2 \rangle$ - образ

№3

Найдем $\ker\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi$:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -15 & -24 & -4 & 13 & -1 \\ -6 & -12 & -9 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \end{array} \longrightarrow \text{УСВ}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -51 & 47 \\ 0 & 1 & 0 & 33 & -31 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ФСР}: \underset{u_1}{\begin{pmatrix} 51 \\ -33 \\ 10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{u_2}{\begin{pmatrix} -47 \\ 31 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \ker\varphi = \langle u_1, u_2 \rangle$$

$$\operatorname{Im}\varphi = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

Зададим $\mathrm{Im}\,\varphi$ с помощью мн-ва решений какой-то ОСЛУ:

$$\begin{pmatrix} -15 & -6 & -1 & -3 & 2 \\ -24 & -12 & -1 & -3 & 5 \\ -4 & -9 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{УСВ}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ФСР}: \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$\mathrm{Im}\,\varphi: \ Bx = 0, \quad \text{где } B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 & 5 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 & 5 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{УСВ}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 51 & -33 & 10 & 1 & 0 \\ -47 & 31 & -10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{УСВ}^T: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{31}{30} & \frac{47}{30} \\ \frac{11}{10} & \frac{17}{10} \end{pmatrix} \quad (**)$$

Зададим лин. отобр. $\psi: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ матрицей

$$C = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{10}{3} & 4 & -\frac{14}{3} \\ \frac{31}{30} & \frac{47}{30} & \frac{14}{3} & -\frac{57}{10} & \frac{187}{30} \\ \frac{11}{10} & \frac{17}{10} & 5 & -\frac{61}{10} & \frac{67}{10} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \end{array} \end{array}$$

Покажем, что в таком случае $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Im}\,\psi$ и $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\psi$. Для этого найдем $\mathrm{Ker}\,\psi$ и $\mathrm{Im}\,\psi$

$$C \longrightarrow \text{УСВ}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ФСР}: \underset{t_1}{\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{t_2}{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{t_3}{\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ker}\,\psi = \langle t_1, t_2, t_3 \rangle$$
$$\mathrm{Im}\,\psi = \langle w_1, w_2 \rangle$$

$(*) \Rightarrow \mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\psi$

$(**) \Rightarrow \mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Im}\,\psi$

$$\Rightarrow \text{Ответ}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{10}{3} & 4 & -\frac{14}{3} \\ \frac{31}{30} & \frac{47}{30} & \frac{14}{3} & -\frac{57}{10} & \frac{187}{30} \\ \frac{11}{10} & \frac{17}{10} & 5 & -\frac{61}{10} & \frac{67}{10} \end{pmatrix}.$$

№4

$$A = \begin{pmatrix} -30 & 13 & 32 & -31 & 4 \\ -30 & 4 & 38 & -23 & 4 \\ 15 & -34 & 37 & 19 & 11 \\ -30 & 10 & 2 & -9 & -8 \end{pmatrix}$$

Для решения задачи воспользуемся известным нам алгоритмом:

1 Шаг: Найдем $\ker\varphi$

$$A \to \text{УСВ}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{41}{240} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{31}{24} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{29}{48} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{ФСР}: \underset{v_4}{\begin{pmatrix} 41 \\ 310 \\ 145 \\ 240 \\ 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{v_5}{\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \langle v_4, v_5 \rangle$$

2 Шаг: выпишем вид матрицы D

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Шаг: Дополним v_4, v_5 до базиса $\mathbb{R}^5$

$$\begin{pmatrix} 41 & -3 \\ 310 & -2 \\ 145 & -3 \\ 210 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{по столбцам}]{} \text{УСВ}: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{40}{53} & \frac{33}{106} \\ -\frac{105}{212} & \frac{315}{424} \\ -\frac{155}{53} & \frac{41}{106} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ можем дополнить векторами

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4 Шаг: найдем коор-ты $\varphi(v_1), \varphi(v_2), \varphi(v_3)$

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 32 \\ 38 \\ 37 \\ 2 \end{pmatrix} = w_1$$

$$Av_2 = \begin{pmatrix} -31 \\ -23 \\ 19 \\ -9 \end{pmatrix} = w_2$$

$$Av_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 11 \\ -8 \end{pmatrix} = w_3$$

5 Шаг: Дополним w_1, w_2, w_3 до базиса $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 32 & -31 & 4 \\ 38 & -23 & 4 \\ 37 & 19 & 11 \\ 2 & -9 & -8 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{УСВ}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{5141}{18} & -\frac{2173}{6} & \frac{244}{9} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{можем дополнить вектором } w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

по столбцам

Теперь найдем матрицы C_1 и C_2.

Поскольку C_2 - матрица перехода от базиса $e_1 \dots e_5$ в базис $v_1 \dots v_5$, она равна матрице, в которой по столбцам записаны вектора $v_1 \dots v_5$. Аналогично матрицей C_1 будут вектора $w_1 \dots w_4$ записанные в столбцы матрицы, т.к. C_1 - матрица перехода от $f_1 \dots f_4$ к $w_1 \dots w_4$.

Ответ: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 41 \\ 310 \\ 145 \\ 240 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$ - базис $\mathbb{R}^5$

$\left\{ \begin{pmatrix} 32 \\ 38 \\ 37 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -31 \\ -23 \\ 19 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 11 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ - базис $\mathbb{R}^4$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A = C_1 D C_2^{-1}$, матрицы C_1 и C_2 описаны выше.

№5

Чтобы найти $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ представим ~~[illegible]~~ базис V, заданный многочленами, в виде векторов из коэффициентов.

$$V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -19 \end{pmatrix}$$

Т.к. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ - двойственный к $V_1 V_2 V_3$ базис, должно выполняться

$$AB = E \quad , \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$

$$B^T A^T = E$$

Решим данное матричное уравнение

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 9 & -19 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \text{УСВ:} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{10}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{28}{21} & -\frac{22}{21} & -\frac{5}{21} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{array}\right)$$

A^T //

$$\Rightarrow \varepsilon_1 = \left(-\frac{10}{7}, -\frac{28}{21}, -\frac{3}{7}\right), \quad \varepsilon_2 = \left(-\frac{3}{7}, -\frac{22}{21}, -\frac{3}{7}\right)$$

$$\varepsilon_3 = \left(-\frac{1}{7}, -\frac{5}{21}, -\frac{1}{7}\right)$$

Пусть
$$f_1 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$
$$f_2 = a_0' + a_1' x + a_2' x^2$$
$$f_3 = a_0'' + a_1'' x + a_2'' x^2$$

Из того, что p_1, p_2, p_3 - двойственный к $f_1 f_2 f_3$ базис можно сделать следующие выводы:

$$p_1(f_1) = a_0 + a_1 + a_2 = 1 \qquad p_2(f_1) = a_1 - 2a_2 = 0 \qquad p_3(f_1) = 3a_0 + 3a_1 + a_2 = 0$$
$$p_1(f_2) = a_0' + a_1' + a_2' = 0 \qquad p_2(f_2) = a_1' - 2a_2' = 1 \qquad p_3(f_2) = 3a_0' + 3a_1' + a_2' = 0$$
$$p_1(f_3) = a_0'' + a_1'' + a_2'' = 0 \qquad p_2(f_3) = a_1'' - 2a_2'' = 0 \qquad p_3(f_3) = 3a_0'' + 3a_1'' + a_2'' = 1$$

$$\frac{3}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{3}{2}\left(a_0 \cdot 2 + \frac{1}{2}a_1 \cdot 4 + \frac{1}{3}a_2 \cdot 8\right) = 3a_0 + 3a_1 + a_2$$

Получим 3 идентичных СЛУ на коэф-ты. Решим все сразу:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \text{УСВ}: \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow f_1 = 10 - 6x - 3x^2 \sim \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = -1 + x \sim \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = -3 + 2x + x^2 \sim \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = 2\varepsilon_1 - 4\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 = 2\cdot\left(-\frac{10}{7}, -\frac{29}{21}, -\frac{3}{7}\right) - 4\cdot\left(-\frac{3}{7}, -\frac{22}{21}, -\frac{3}{7}\right) +$$

$$+ 3\cdot\left(-\frac{1}{7}, -\frac{5}{21}, -\frac{1}{7}\right) = \left(-\frac{11}{7}, \frac{5}{7}, \frac{3}{7}\right)$$

$$h = 2f_1 - 4f_2 + 3f_3 = 2\cdot\begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\alpha(h) = \begin{pmatrix} -\frac{11}{7} & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{233}{7}.$$

Ответ: $-\frac{233}{7}$.