

Задача 2.1. Задайте системой уравнений подпространство в пространстве $\mathbb{R}[x]_4$ многочленов степени не выше 4, являющееся линейной оболочкой многочленов $x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$, $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$, $x^4 - x^3 - 2x - 4$. Проверьте, принадлежат ли многочлены $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$ и $x^3 - 1$ этому подпространству.

Задача 2.2. Найдите все значения параметра a , при которых матрица

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

представима в виде суммы двух матриц ранга 1, и для каждого найденного значения укажите такое представление, а также представление в виде произведения матриц 3×2 и 2×4 .

Указание. Прежде всего, вам нужно привести матрицу к ступенчатому виду и таким образом найти её ранг (постарайтесь, чтобы параметр a как можно позже начал влиять на вычисления!). Далее, по-видимому, при каких-то a в ступенчатом виде останется две строки (и тогда ответ положительный), а при каких-то три (и тогда ответ отрицательный).

Задача 2.3. Докажите, что $\text{rk}A - \text{rk}B \leq \text{rk}(A + B) \leq \text{rk}A + \text{rk}B$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что ранг матрицы равен рангу системы столбцов и равен размерности их линейной оболочки. Это позволит вам доказать правое неравенство. Левое выведите из правого.

Задача 2.4. Пусть A и B — матрицы 20×20 , причём $\text{rk}(2A - B) = 15$, $\text{rk}(A + 3B) = 17$. Какие значения могут принимать A и B ?

Предостережение. Когда вопрос имеет вид «какие значения могут принимать», то мало указать ограничения сверху и снизу. Надо и показать, что все промежуточные значения могут приниматься, то есть надо взять конкретные A и B и продемонстрировать, что всё может быть.