Задача 1.1. Найдите с помощью формулы с $(X^TX)^{-1}$ проекцию вектора v на подпространство L, где

$$v = \begin{pmatrix} 7\\ 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}, \quad L = \left\langle \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\\ -1\\ -1\\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Пример решения задачи про псевдорешения систем. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1,\\ 2x_1 + x_2 = 0,\\ -2x_1 + x_3 = 2,\\ -x_1 - 2x_2 = 1 \end{cases}$$

В ней уравнений больше, чем неизвестных, поэтому мы можем заподозрить, что она несовместна. Отметим, что систему можно переписать в виде

$$x_1 \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ -2\\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\\ -2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 2\\ 1 \end{pmatrix}$$

или, если обозначить каждый вектор одной буквой, то

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = v$$

Ясно, что абы какой вектор v четырёхмерного пространства не будет лежать в трёхмерном подпространстве $L := \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$. Но мы постараемся найти ближайший к v вектор L, то есть проекцию v на L. Это можно делать разными способами, например, по общей формуле. Пусть

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(векторы u_i записали по столбцам). Тогда

$$\hat{x} = (U^TU)^{-1}U^Tv = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)^T$$

(это и есть псевдорешение системы и ответ в задаче), а проекция равна

$$U\hat{x} = U(U^TU)^{-1}U^Tv = -\frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_2 - \frac{1}{3}u_3 = (0, -1, 1, 0)^T$$

Ещё раз резюмируя: псевдорешение — это такой вектор $\hat{x}$, для которого значение левой части системы ближе всего к значению правой части.

Разумеется, никто не заставляет вас искать проекцию по формуле; её можно найти и с помощью предварительной ортогонализации.

Задача 1.2. Методом наименьших квадратов найдите псевдорешение системы

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 = -1 \end{cases}$$

Напоминание про объёмы и расстояния. Для набора векторов $u_1, \ldots, u_k \in V$ найти k-мерный объём k-мерного параллелепипеда можно следующим образом:

$$(\mathrm{vol}(u_1, \ldots, u_k))^2 = \det G(u_1, \ldots, u_k),$$

где $G(u_1, \ldots, u_k)$ — матрица Грама это набора векторов, то есть матрица, составленная из них попарных скалярных произведений.

Если же $k = \dim V$, то объём также может быть вычислен по формуле

$$|\mathrm{vol}(u_1, \ldots, u_k)| = |\det([u_1, \ldots, u_k])|$$

где $[u_1, \ldots, u_k]$ — матрица, составленная из векторов u_i как из столбцов.

Расстояние от вектора v до подпространства $U = \langle u_1, \ldots, u_k \rangle$ находится по формуле

$$\rho(v, U) = \frac{\mathrm{vol}(v, u_1, \ldots, u_k)}{\mathrm{vol}(u_1, \ldots, u_k)}$$

Обратите внимание, что для применения этой формулы векторы $u_1, \ldots, u_k$ должны быть линейно независимы (то есть вам следует найти базис подпространства.

Другой способ найти расстояние от вектора v до подпространства $\langle u_1, \ldots, u_k \rangle$ — это ортогонализовать (не нормируя) систему $u_1, \ldots, u_k, u_{k+1} = v$. Вектор v_{k+1} (полученный на последнем, $(k+1)$-м шаге ортогонализации) будет ортогональной составляющей v относительно подпространства $\langle u_1, \ldots, u_k \rangle$, и расстояние будет равно $|v_{k+1}|$.

Задача 1.3. Вычислите объём 4-мерного параллелепипеда, натянутого на векторы

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Указание. Поскольку речь идёт об объёме 4-мерного параллелепипеда в 4-мерном пространстве, то вы можете использовать аж две формулы (например, для нахождения объёма 3-мерного параллелепипеда в 4-мерном пространстве формула с определителем матрицы из координат векторов не годится; его получилось бы найти только через матрицу Грама).

Задачи 1.4. Найдите расстояние между вектором v и подпространством L, где

$$v = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Задача 1.5. Зная, что объём тетраэдра, образованного тремя векторами u, v и w, равна $\frac{1}{3}$ объёма образованного ими параллелепипеда, найдите (трёхмерный) объём тетраэдра $ABCD$, где $A = (1, 1, -1, 1)$, $B = (0, 1, 0, 1)$, $C = (-1, 2, 0, 0)$, $D = (0, 1, 2, 1)$.

Указание. В этой задаче из двух способов нахождения объёма сработает только один: ведь речь идёт о трёхмерном объёкте в четырёхмерном пространстве.

Напоминание про векторное произведение. Вы должны знать несколько интерпретаций того, что есть векторное произведение:

- векторное произведение двух векторов $a, b \in \mathbb{R}^3$ — это вектор $[a, b]$, ортогональный a и b, длина которого равна площади параллелограмма, натянутого на a и b, а направление таково, что если смотреть с его конца, то поворот от a к b проходит против часовой стрелки.
- векторное произведение двух векторов $a, b \in \mathbb{R}^3$ — это такой вектор $[a, b]$, что для любого вектора w ориентированный объём $vol(a, b, w)$ (равный, естественно, смешанному произведению этих трёх векторов) может быть вычислен по формуле $(w, [a, b])$

Вам пригодятся и свойства векторного произведения:

- **антисимметричность** $[b, a] = -[a, b]$
- **билинейность** Можно я его не буду расписывать?:)
- **тождество Якоби** $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$

Задача 1.6. Найдите $[a, [b, c]]$ и (a, b, c), где

$$(a)\ a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Задача 1.7. Известно, что $[a, b] = c$. Выразите через c вектор $[3(a+b), 2b-a]$.

Указание. Воспользуйтесь свойствами векторного произведения. Конкретно, вам понадобится билинейность, свойство $[x, x] = 0$ и ещё антисимметричность.

Есть несколько полезных эвристик, связанных со скалярным, векторным и смешанным произведениями (некоторые мы уже обсудили на семинаре, но не будет лишним повторить их тут снова).

- Вектор $[a, b]$ ортогонален каждому из векторов a и b.
- Длина вектора $[a, b]$ равна площади параллелограмма, натянутого на a и b, и она же равна по известной школьной формуле $|a||b| \sin \angle(a, b)$.
- Векторы u и v коллинеарны (то есть лежат на одной прямой) тогда и только тогда, когда $[u, v] = 0$ (вспомним, кстати, что длина векторного произведения равна площади параллелограмма, натянутого на эти векторы; площадь равна нулю в самом деле тогда и только тогда, когда параллелограмм схлопывается в отрезок).
- Векторы u, v и w компланарны (то есть лежат в одной плоскости) тогда и только тогда, когда $(u, v, w) = 0$ или, что то же самое, $(u, [v, w]) = 0$. У этого есть вполне понятная геометрическая интерпретация: объём параллелепипеда равен нулю тогда и только тогда, когда это не параллелепипед вовсе, а нечто, лежащее в одной плоскости.
- Ну, и нелишне помнить, что $(u, v) = |u||v| \cos \angle(u, v)$.

Задача 2.1. Докажите, что $|[u,v]|^2 + (u,v)^2 = |u|^2|v|^2$.

Задача 2.2. Докажите, что для любых векторов $a, b, c, v \in \mathbb{R}^3$ векторы $[a,v]$, $[b,v]$ и $[c,v]$ компланарны. Геометрические соображения приветствуются!

Задача 2.3. Докажите, что если векторы $[a,b]$, $[b,c]$ и $[c,a]$ компланарны, то они коллинеарны.

Задача 2.4. Докажите, что если $[a,b]+[b,c]+[c,a]=0$, то векторы a, b и c компланарны.

Задачи 2.5-7. Докажите, что любых векторов a, b и c в трёхмерном пространстве выполняются равенства:

$$(5)[a,[b,c]] = b(a,c) - c(a,b),$$

$$(6)([a,b],[b,c],[c,a]) = (a,b,c)^2$$

$$(7)([a,b],[c,d]) = \begin{pmatrix} (a,c) & (a,d) \\ (b,c) & (b,d) \end{pmatrix}$$

Задача 2.8. Мы обсудили предыдущем на семинаре, что каждая (ок, квадратная невырожденная) матрица имеет QR-разложение. А будет ли она обладать RQ-разложением?