Эквивалентность билинейных функций (квадратичных функций). Мы будем называть две билинейных функции (точней сказать, две матрицы билинейных функций) *эквивалентными*, если они переводятся друг в друга заменой координат. Поясню, что это значит. Пусть у вас есть две матрицы A и B, которые, само собой, задают билинейные функции. Мы можем задаться вопросом: правда ли, что эти матрицы могут быть матрицами одной и той же билинейной функции в различных базисах? Если ответ утвердительный, то такие матрицы мы назовём эквивалентными.

Симметричные матрицы легко проверять на эквивалентность. Любую симметричную матрицу заменами координат можно привести к нормальному виду, а теорема утверждает, что различные (то есть с различным количеством нулей и ± 1) нормальные виды не эквивалентны — то есть **две симметричные матрицы эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие квадратичные функции приводятся (методом Лагранжа) к одному и тому же нормальному виду**.

Разберём пример. Пусть три (симметричные) билинейные функции φ, ψ и η задаются матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Первая из них записывается в координатах как

$$\varphi(x, y) = 2x_1 y1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y2$$

Соответствующая квадратичная форма имеет вид

$$\varphi(x, x) = 2x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 = 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + x_2^2 =$$

$$= \left(\sqrt{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_2\right)^2$$

то есть φ имеет нормальный вид с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Аналогично

$$\psi(x, x) = 2x_1^2 + 4x_1 x_2 + x_2^2 = 2(x_1 + x_2)^2 - 2x_2^2 + x_2^2 =$$

$$= \left(\sqrt{2}x_1 + \sqrt{2}x_2\right)^2 - x_2^2$$

то есть ψ имеет нормальный вид с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Матрица η уже диагональная с ± 1 на диагонали — по сути это уже нормальный вид.

Таким образом, ψ и η имеют один и тот же нормальный вид и потому эквивалентны. А функция φ не эквивалентна ни одной из них.

Если вы рассматриваете не симметричные функции, то жизнь становится сложнее. В общем случае непонятно, как проверять две матрицы на эквивалентность. Тем не менее, вы должны понимать следующее:

- свойства (косо)симметричности сохраняются при заменах координат. То есть если, к примеру, одна матрица симметричная, а другая нет, то они заведомо не эквивалентны;

- ранг матрицы билинейной функции сохраняется при заменах координат. То есть если матрицы имеют различные ранги, то они не эквивалентны.

Задачи 1.1-2. Определите, какие из следующих функций являются билинейными (в одном из пунктов обязательно докажите, в одном обязательно опровергните, в остальных можете отделаться простым да/нет):

$(a) f(A, B) = \operatorname{tr}(AB)$ (A, B — квадратные матрицы одного размера над полем F)

$(b) f(A, B) = \operatorname{tr}(AB - BA)$, $\quad (c) f(A, B) = \det(AB)$, $\quad (d) f(A, B) = \operatorname{tr}(A + B)$,

$(e) f(u, v) = \int\limits_a^b g(t)u(t)v(t)dt$ (где $g(t)$, $u(t)$, $v(t)$ — непрерывные функции от t на отрезке $[a, b]$),

$(f) f(u, v) = \int\limits_a^b u(t)v'(t)dt$

Задачи 1.3-5. Напишите матрицы следующих билинейных функций:

$(a) f(A, B) = \operatorname{tr}(AB)$ (A, B — квадратные матрицы 2×2 над полем $\mathbb{R}$)

$(b) f(u, v) = \int\limits_a^b t^2\, u(t)v(t)dt$ (где $u(t), v(t) \in \mathbb{R}[x]_2$),

$(c) f(x, y) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 4x_3y_1 - 17x_2y_3 + x_3y_3,$ (где $x, y \in \mathbb{R}^3$)

К пункту (c): убедитесь, что коэффициент при x_iy_j — это как раз (i, j)-й элемент матрицы билинейной функции.

Задача 1.6. Для билинейной функции f с матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

найдите $f(u, v)$, где

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Задача 1.7. Запишите матрицу билинейной функции

$$f(x, y) = x_1y_1 - 2x_2y_1 + 3x_1y_2 - 4x_2y_2$$

в базисе $v_1 = 2e_1 - e_2$, $v_2 = -e_1 + e_2$.

Указание: для этого сначала напишите матрицу функции в исходном базисе!

Задача 1.8. Выпишите матрицу квадратичной функции $q(x) = -x_1^2 - 6x_1x_2 + 7x_2^2 + 2x_1x_3 + x_2x_3 + x_3^2$, а также её поляризацию (то есть такую билинейную функцию $B(x, y)$, для которой $q(x) = B(x, x)$). Пожалуйста, укажите последнюю не в виде матрицы, а в именно в виде выражения от x_i и y_j.

Указание. Из равенства для симметричной функции B

$$Q(x + y) = B(x + y, x + y) = \underbrace{B(x, x)}_{=Q(x)} + 2B(x, y) + \underbrace{B(y, y)}_{=Q(y)}$$

можно вывести, что

$$B(x, y) = \frac{1}{2}\left(Q(x + y) - Q(x) - Q(y)\right)$$

Проницательный читатель может заметить, что над полем характеристики 2 (где $1 + 1 = 0$; например, над $\mathbb{Z}_2$). Именно поэтому осмотрительные люди избегают заниматься теорией билинейных функций и квадратичных форм над полями характеристики 2.

Задача 2.1. Не проводя вычислений (то есть не приводя ничего ни к каким нормальным видам и не занимаясь поисками замен координат) определите, эквивалентны ли билинейные функции $2x_1y_2 - 3x_1y_3 + x_2y_3 - 2x_2y_1 - x_3y_2 + 3x_3y_1$ и $x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_1y_3 - 3x_3y_1$.

Указание: ответ, видимо, нет; вспомните, что я говорил в начале листка про то, что сохраняется при заменах координат и мешает эквивалентности.

Задача 2.2. Не проводя вычислений, определите, существует ли базис, в котором билинейная функция $x_1y_2 + x_2y_1 - 3x_2y_2 + 3x_2y_3 - 3x_3y_2$ имеет диагональную матрицу.

Указание: такое же, как и в предыдущей задаче.

Задача 2.3. Придумайте симметричную билинейную функцию φ на пространстве $\mathbb{R}^3$, для которой $\varphi(v, v) = 1$, где $v = (1, 1, -1)^T$.

Указание: Если бы вам был дан вектор $v = (1, 0, 0)^T$, вам было бы легче придумать такую функцию? Не забывайте, что вы всегда можете сначала написать матрицу функции в каком-нибудь другом базисе, а потом сделать обратную замену.

Задача 2.4. Придумайте билинейную функцию φ на пространстве $\mathbb{R}^3$, для которой $\varphi(v, v) = 0$ для любого вектора v из подпространства $x_1 - x_2 = 0$.

Указание: Не забывайте, что вы всегда можете сначала написать матрицу функции в каком-нибудь другом базисе, а потом сделать обратную замену.

Задача 2.5. Для двух линейных функций $f : V \longrightarrow \mathbb{F}$ и $g : V \longrightarrow \mathbb{F}$ определим их тензорное произведение как

$$(f \otimes g)(u, v) = f(v)g(v)$$

Проверьте, что это билинейная функция. Докажите, что если $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — базис V^*, то функции $\varphi_i \otimes \varphi_j$ образуют базис пространства билинейных функций на V.

Не указание, но пример. Пусть $V = \mathbb{R}[x]_2$. Возьмём две линейных функции: $\varphi(f) = f(0)$ и $\psi(f) = f'(1)$ (они принимают на вход многочлен f и делают из него число). Тогда $(\varphi \otimes \psi)(f, g) = f(0)g'(1)$.