Листок 1. Матричные алгебры Ли. Панфилов Борис БПМИ-216

Задача 1

1) $[A,B] = AB - BA = -(BA - AB) = -[B,A]$

2) $[A,[B,C]] = A\cdot[B,C] - [B,C]\cdot A = A(BC-CB) - (BC-CB)A =$

$= ABC - ACB + CBA - BCA = ABC - \underline{BAC} - \underline{CAB} + CBA + \underline{BAC} - BCA - ACB + \underline{CAB} =$

$= (AB-BA)C - C(AB-BA) + B(AC-CA) - (AC-CA)B =$

$= [A,B]C - C[A,B] + B[A,C] - [A,C]B = [[A,B],C] + [B,[A,C]]$

Задача 2

Чтобы доказать, что SO_n является алгеброй Ли, покажем, что SO_n удовлетворяет всем трем условиям.

1) $A \in SO_n \quad B \in SO_n$

Покажем, что их сумма тоже принадлежит SO_n

Пусть $C = A + B$

Рассмотрим c_{ij} и c_{ji}

$$\left.\begin{aligned} c_{ij} &= a_{ij} + b_{ij} \\ c_{ji} &= a_{ji} + b_{ji} = -a_{ij} - b_{ij} = -(a_{ij} + b_{ij}) \end{aligned}\right| \Rightarrow c_{ij} = -c_{ji}$$

2) $A \in SO_n \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Покажем, что $\alpha A = C$ тоже принадлежит SO_n

$$\left.\begin{aligned} c_{ij} &= \alpha\cdot a_{ij} \\ c_{ji} &= \alpha\cdot a_{ji} = -\alpha\cdot a_{ij} = -(\alpha\cdot a_{ij}) \end{aligned}\right| \Rightarrow c_{ij} = -c_{ji}$$

3) $A \in SO_n \quad B \in SO_n$

Покажем, что $[A,B] = C$ тоже принадлежит SO_n

$C = AB - BA$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} - \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$$

$$c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} - \sum_{k=1}^{n} b_{jk} a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} -b_{ik}\cdot(-a_{kj}) - \sum_{k=1}^{n} -b_{kj}\cdot(-a_{ik}) = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} - \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\cdot a_{ik} =$$

$$= -\left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj}\cdot a_{ik} - \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}\right)$$

$c_{ij} = -c_{ji}$

№3

$L = gl_n$

а) $\{X \in L \mid [X, A] = 0$ для всех $A \in L\} = \{X \in L \mid XA = AX$ для всех $A \in L\}$

То есть требуется найти множество матриц X, коммутирующих со всеми матрицами множества L.

Рассмотрим $A = E_{ij}$, $i \neq j$

$$X \cdot E_{ij} = \begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} \\ \\ i \end{array} \begin{pmatrix} & 0 & \vdots \\ \cdots & \cdots & 1 \\ & 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & * & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & * & \end{pmatrix} = C$$

При перемножении элементы i-го столбца матрицы X „переместились" в j-й столбец итоговой матрицы, а все остальные элементы обнулились.

$$E_{ij} \cdot X = \begin{array}{c} \\ i \\ \end{array} \begin{pmatrix} & 0 & \vdots \\ \cdots & \cdots & 1 \\ & 0 & \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} \\ \\ j \end{array} \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ i \\ \end{array} \begin{pmatrix} & 0 & \\ * & \cdots & * \\ & 0 & \end{pmatrix} = D$$

При перемножении элементы j-й строки матрицы X „переместились" в i-ю строку итоговой матрицы, а все остальные элементы обнулились.

Поскольку полученные матрицы C и D должны быть равны, все элементы, кроме $C_{ij} = D_{ij}$ должны стать нулями. А значит в матрице X все элементы ~~[illegible]~~ в X^i и X_j, кроме x_{ii} и x_{jj} должны быть 0. (В первом случае $x_{ii} \mapsto C_{ij}$; во втором случае $x_{jj} \mapsto D_{ij}$). К тому же x_{ii} и x_{jj} переходят в один и тот же элемент C_{ij}, а значит и изначально они должны были быть равными.

Рассматривая все возможные E_{ij} мы понимаем, что матрица X принимает вид $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$

$L = sl_n$

$\{X \in L \mid [X, A] = 0$ для всех $A \in L\} = \{X \in L \mid XA = AX$ для всех $A \in L\}$

Рассмотрим $A = E_{ii} - E_{jj}$, $i \neq j$

$$X \cdot (E_{ii} - E_{jj}) = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} \\ i \\ j \end{array}\!\!\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} & * & & -* & \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ & * & & -* & \end{pmatrix} \end{array} = C$$

При перемножении элементы i-го столбца остались на своем месте, элементы j-го столбца поменяли знак, все остальные эл. обнулились

$$(E_{ii} - E_{jj}) \cdot X = \begin{array}{c} \\ i \\ j \end{array}\!\!\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \end{array}\!\!\begin{pmatrix} & 0 & \\ * & \cdots & * \\ & 0 & \\ -* & \cdots & -* \\ & 0 & \end{pmatrix} = D$$

При перемножении элементы i-й строки остались на своем месте, элементы j-й строки поменяли знак, все остальные эл. обнулились

Поскольку полученные матрицы C и D должны быть равны, все элементы, кроме $C_{ii} = D_{ii}$, $C_{jj} = D_{jj}$ должны стать нулями.

А значит в матрице X все элементы X^i, X_i, X^j, X_j, кроме $X_{ii} = C_{ii}$, $X_{jj} = -C_{jj}$ должны быть нулями.

Рассматривая все возможные $E_{ii} - E_{jj}$ мы понимаем, что матрица X принимает вид $\begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$

Рассмотрим $A = E_{ii} - E_{jj} + E_{1g}$, $i \neq j$, $g \in \{2, \ldots, n\}$

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} *' & & & & 0 \\ & *'' & & & \\ & & *''' & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & *^n \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} 1 \\ i \\ j \end{array}\!\!\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} 1 \\ i \\ j \end{array}\!\!\begin{pmatrix} 0 & \cdots & *' & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & *^i & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & -*^j \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} = P$$

$$A \cdot X = \begin{array}{c} 1 \\ i \\ j \end{array}\!\!\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} *' & & 0 \\ & *'' & \\ & & \ddots \\ 0 & & *^n \end{pmatrix} = \begin{array}{c} 1 \\ i \\ j \end{array}\!\!\begin{pmatrix} 0 & \cdots & *^g & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & *^i & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & -*^j \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} = Q$$

Данный пример показывает, что все элементы на гл. диагонали X должны быть равны. Но поскольку $X \in Sl_n$ на диагонали могут стоять только нули. $\Rightarrow X=0$.

б) $L \in SO_n$

$\{X \in L \mid [X,A]=0$ для всех $A \in L\} = \{X \in L \mid XA = AX$ для всех $A \in L\}$

Рассмотрим $A = E_{ij} - E_{ji}$, $i \neq j$

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} \\ i \\ j \end{array} \!\!\! \begin{array}{c} \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} & -* & & * & \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ & -* & & * & \end{pmatrix} \end{array} = C$$

Элементы X^j поменяли знак и переместились в C^i

элементы X^i переместились в C^j

Все остальные элементы обнулились

$$A \cdot X = \begin{array}{c} \\ i \\ j \end{array} \!\!\! \begin{array}{c} \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * \end{pmatrix} = \begin{array}{c} i \\ \\ j \end{array} \!\!\! \begin{pmatrix} * & \cdots 0 \cdots & * \\ & 0 & \\ -* & \cdots 0 \cdots & -* \end{pmatrix} = D$$

Элементы X_i поменяли знак и перешли в D_j

Элементы X_j переместились в D_i

Все остальные элементы обнулились

Поскольку полученные матрицы C и D должны быть равны, все элементы, кроме $D_{ji} = C_{ji}$, $D_{ij} = C_{ij}$ должны стать нулями.

А значит в матрице X все элементы X^i, X_i, X^j, X_j кроме X_{ii} и X_{jj} должны быть нулем (В первом случае $X_{ii} \mapsto C_{ij}$, $X_{jj} \mapsto -C_{ji}$; во втором случае $X_{ii} \mapsto -D_{ji}$, $X_{jj} \to D_{ij}$)

Но в любой кососимметрической матрице элементы на гл. диагонали равны нулю, т.к. $a_{ii} = -a_{ii}$

$\Rightarrow X = 0$.

№4

а) $L = n_n$

$\{X \in L \mid [X, A] = 0$ для всех $A \in L\} = \{X \in L \mid XA = AX$ для всех $A \in L\}$

Рассмотрим $A = E_{ij}$, $i < j$

$$XA = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & * \\ & & & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} & & j \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} & * & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & * & \\ & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{pmatrix} = C$$

X^i переместился в C^j. При этом в ~~…~~ X^i было ровно $i-1$ $*$

Все остальные элементы обнулились

$$AX = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} & & j \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & * \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c c} & \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \underbrace{* \cdots *}_{n-j} \\ & & 0 & \end{pmatrix} \end{array} = D$$

X_j переместилась в D_i. При этом в X_j было ровно $n-j$ $*$

Все остальные элементы обнулились

Поскольку полученные матрицы C и D должны быть равны, в данном случае они могут быть только нулевыми, все элементы X должны стать нулями, кроме X_{1n}, потому что при умножении любой строго верхнетреугольной матрицы на $\alpha \cdot E_{1n}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ мы гарантированно получим 0.

То есть $X = \alpha \cdot E_{1n}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.