ИДЗ-7 Поморилов Борис Вариант 18

№1

$$Q(x_1,x_2,x_3) = 25x_1^2 - 80x_2^2 - 12x_3^2 + 10x_1x_2 + 20x_1x_3 + 94x_2x_3$$

Найдем матрицу B кв. ф. Q в базисе $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$B(Q,e) = \begin{pmatrix}25 & 5 & 10\\ 5 & -80 & 47\\ 10 & 47 & -12\end{pmatrix}.$$

Теперь воспользуемся алгоритмом симметричного Гаусса, чтобы найти нормальный вид кв.ф и параллельно будем искать матрицу перехода от исходного базиса к базису в котором Q имеет норм вид.

$$\left(\begin{array}{ccc}25 & 5 & 10\\ 5 & -80 & 47\\ 10 & 47 & -12\\ \hline 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow[I \to \frac{1}{5}\cdot I]{I \to \frac{1}{5}\cdot I} \left(\begin{array}{ccc}1 & 1 & 2\\ 1 & -80 & 47\\ 2 & 47 & -12\\ \hline \frac{1}{5} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{\substack{II \to II - I\\ III \to III - 2\cdot I}} \left(\begin{array}{ccc}1 & 1 & 2\\ 0 & -81 & 45\\ 0 & 45 & -16\\ \hline \frac{1}{5} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow[\substack{II \to II - I\\ III \to III - 2\cdot I}]{} \left(\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & -81 & 45\\ 0 & 45 & -16\\ \hline \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[II \to \frac{1}{9}\cdot II]{II \to \frac{1}{9}\cdot II} \left(\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 5 & -16\\ \hline \frac{1}{5} & -\frac{1}{45} & -\frac{2}{5}\\ 0 & \frac{1}{9} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{III \to III + 5\cdot II} \left(\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 9\\ \hline \frac{1}{5} & -\frac{1}{45} & -\frac{2}{5}\\ 0 & \frac{1}{9} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow[III \to III + 5\cdot II]{} \left(\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 9\\ \hline \frac{1}{5} & -\frac{1}{45} & -\frac{23}{45}\\ 0 & \frac{1}{9} & +\frac{5}{9}\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow[III \to \frac{1}{3}\cdot III]{III \to \frac{1}{3}\cdot III}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \hline \frac{1}{5} & -\frac{1}{45} & -\frac{23}{135}\\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{5}{27}\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{array}\right)$$

Ответ: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ – нормальный вид Q

$\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & -\frac{1}{45} & -\frac{23}{135}\\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{5}{27}\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix} = C$ – замена координат, приводящая к нормальному виду

Невырождена, т.к. $\det C = \frac{1}{135}$.

№2

$$Q(x_1,x_2,x_3) = 4x_1^2 + (-b+8)x_2^2 + (-4b+9)x_3^2 - 8x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2(2b-6)x_2x_3$$

Найдем матрицу B кв. ф Q в базисе $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$B(Q,e) = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -4 & -b+8 & 2b-6 \\ 1 & 2b-6 & -4b+9 \end{pmatrix}$$

Воспользуемся алгоритмом симм. Гаусса для приведения B к норм виду.

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -4 & -b+8 & 2b-6 \\ 1 & 2b-6 & -4b+9 \end{pmatrix} \xrightarrow{III \to III + 2\cdot II} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -4 & -b+8 & 2b-6 \\ -7 & 10 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[III \to III + 2\cdot II]{} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -7 \\ -4 & -b+8 & 10 \\ -7 & 10 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \leftrightarrow III}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & -7 \\ -7 & 10 & 17 \\ -4 & -b+8 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[II \leftrightarrow III]{} \begin{pmatrix} 4 & -7 & -4 \\ -7 & 17 & 10 \\ -4 & 10 & -b+8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{II \to II + \frac{7}{4}\cdot I \\ III \to III + I}} \begin{pmatrix} 4 & -7 & -4 \\ 0 & \frac{19}{4} & 3 \\ 0 & 3 & -b+4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{II \to II + \frac{7}{4}\cdot I \\ III \to III + I}]{} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{19}{4} & 3 \\ 0 & 3 & -b+4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[I \to \frac{1}{2}\cdot I]{I \to \frac{1}{2}\cdot I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{19}{4} & 3 \\ 0 & 3 & -b+4 \end{pmatrix} \xrightarrow{III \to III - \frac{12}{19}\cdot II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{19}{4} & 3 \\ 0 & 0 & -b+\frac{40}{19} \end{pmatrix} \xrightarrow[III \to III - \frac{12}{19}\cdot II]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{19}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -b+\frac{40}{19} \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[II \to II \cdot \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{19}}]{II \to II \cdot \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{19}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b+\frac{40}{19} \end{pmatrix}$$

Ответ:
$$\left\{ \begin{array}{ll} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & b = \frac{40}{19} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & b < \frac{40}{19} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & b > \frac{40}{19} \end{array} \right.$$

№3

$$Q(f) = \int_{-2}^{0} f^2 dx - \int_{-1}^{1} f^2 dx$$

а) Для того, чтобы доказать, что Q - кв. ф. приведем пример билинейной формы $\beta(f,g)$, т.что $\beta(f,f) = Q(f)$.

Пусть $\beta(f,g) = \int_{-2}^{0} fg\, dx - \int_{-1}^{1} fg\, dx$

Тогда $\beta(f,f) = \int_{-2}^{0} f^2 dx - \int_{-1}^{1} f^2 dx = Q(f)$ => по определению $Q(f)$ яв-ся

кв.ф. ассоциированной с $\beta(f,f)$.

б) Найдем матрицу B кв.ф Q в базисе $1, x, x^2, x^3$

$$\int_{-2}^{0} fg\,dx - \int_{-1}^{1} fg\,dx = \left.\frac{x^{\alpha+\beta+1}}{\alpha+\beta+1}\right|_{-2}^{0} - \left.\frac{x^{\alpha+\beta+1}}{\alpha+\beta+1}\right|_{-1}^{1} =$$

$$= -\frac{(-2)^{\alpha+\beta+1}}{\alpha+\beta+1} - \frac{1}{\alpha+\beta+1} + \frac{(-1)^{\alpha+\beta+1}}{\alpha+\beta+1}$$, где α - степень в f, β - степень в g

$$B(Q,e) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & -4 & 6 \\ 2 & -4 & 6 & -\frac{32}{3} \\ -4 & 6 & -\frac{32}{3} & 18 \end{pmatrix}$$

Выпишем матрицу B кв. ф. Q в базисе e' (из условия)

$$B(Q,e') = \begin{pmatrix} 17 & -5 & -11 & 19 \\ -5 & -23 & -12 & 33 \\ -11 & -12 & -2 & 13 \\ 19 & 33 & 13 & 25 \end{pmatrix}$$

Проверим эквивалентны ли эти матрицы. Для этого симметричным Гауссом приведем их к нормальному виду и посмотрим на сигнатуры. Они должны совпадать.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & -4 & 6 \\ 2 & -4 & 6 & -\frac{32}{3} \\ -4 & 6 & -\frac{32}{3} & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 6 & -\frac{32}{3} \\ -4 & 6 & -\frac{32}{3} & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}]{} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 6 \\ -2 & 0 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 6 & -\frac{32}{3} \\ 6 & -4 & -\frac{32}{3} & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\mathrm{II} \to \mathrm{II} + \mathrm{I} \\ \mathrm{III} \to \mathrm{III} + 2\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{IV} \to \mathrm{IV} - 3\cdot\mathrm{I}}}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 2 & \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\mathrm{II} \to \mathrm{II} + \mathrm{I} \\ \mathrm{III} \to \mathrm{III} + 2\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{IV} \to \mathrm{IV} - 3\cdot\mathrm{I}}]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 2 & \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\mathrm{III} \to \mathrm{III} - \mathrm{II} \\ \mathrm{IV} \to \mathrm{IV} + \mathrm{II}}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{\mathrm{III} \to \mathrm{III} - \mathrm{II} \\ \mathrm{IV} \to \mathrm{IV} + \mathrm{II}}]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III} \leftrightarrow \mathrm{IV}]{\mathrm{III} \leftrightarrow \mathrm{IV}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{IV} \to \mathrm{IV} + \mathrm{III} \cdot \frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{9} \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\mathrm{IV} \to \mathrm{IV} + \mathrm{III} \cdot \frac{1}{3}]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{9} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 17 & -5 & -11 & 19 \\ -5 & -23 & -12 & 33 \\ -11 & -12 & -2 & 13 \\ 19 & 33 & 13 & 25 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV \to IV - I} \begin{pmatrix} 17 & -5 & -11 & 19 \\ -5 & -23 & -12 & 33 \\ -11 & -12 & -2 & 13 \\ 2 & 38 & 24 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV \to IV - I]{} \begin{pmatrix} 17 & -5 & -11 & 2 \\ -5 & -23 & -12 & 38 \\ -11 & -12 & -2 & 24 \\ 2 & 38 & 24 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\cancel{II \to I + II + III \quad \begin{pmatrix} 1 & -40 & -25 & 64 \\ -5 & -23 & -12 & 38 \\ -11 & -12 & -2 & 24 \\ 2 & 38 & 24 & 4 \end{pmatrix} \quad II \to}$$

$$\xrightarrow[IV \to \frac{1}{2} \cdot IV]{IV \to \frac{1}{2} \cdot IV} \begin{pmatrix} 17 & -5 & -11 & 1 \\ -5 & -23 & -12 & 19 \\ -11 & -12 & -2 & 12 \\ 1 & 19 & 12 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[I \leftrightarrow IV]{I \leftrightarrow IV} \begin{pmatrix} 1 & 19 & 12 & 1 \\ 19 & -23 & -12 & -5 \\ 12 & -12 & -2 & -11 \\ 1 & -5 & -11 & 17 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{\substack{II \to II - 19 \cdot I \\ III \to III - 12 \cdot I \\ IV \to IV - I}} \begin{pmatrix} 1 & 19 & 12 & 1 \\ 0 & -384 & -240 & -24 \\ 0 & -240 & -146 & -23 \\ 0 & -24 & -23 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{II \to II - 19 \cdot I \\ III \to III - 12 \cdot I \\ IV \to IV - I}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -384 & -240 & -24 \\ 0 & -240 & -146 & -23 \\ 0 & -24 & -23 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{III \to III - \frac{5}{8} \cdot II \\ IV \to IV - \frac{1}{16} \cdot II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -384 & -240 & -24 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & \frac{35}{2} \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow[\overline{IV} \to \overline{IV} - \frac{1}{16}\cdot \overline{II}]{\overline{III} \to \overline{III} - \frac{5}{8}\cdot\overline{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -384 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & \frac{35}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{IV} \to \overline{IV} + 2\cdot\overline{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -384 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{IV} \to \overline{IV} + 2\cdot\overline{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -384 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \cancel{-8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \to$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Нетрудно заметить, что сигнатуры получились разные

$\Rightarrow$ подходящего базиса не существует.

Ответ: не существует.

№4

$$\beta(x,y) = (-4b+13)x_1y_1 + (-2b+6)x_1y_2 + (-a+2{,}5)x_1y_3 + (-2b+6)x_2y_1 + 2x_2y_2 + (-2b+4)x_2y_3 +$$
$$+ (-2b+5)x_3y_1 + (-2b+4)x_3y_2 + 3x_3y_3$$

Так как мы хотим, чтобы эта билин. ф. задавала скалярное произведение на $\mathbb{R}^3$ она должна быть симметричной и кв. ф. ассоциированная с ней должна быть положительно определенной. Проверим эти св-ва.

Запишем матрицу билин. ф. в базисе $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$B(\beta, e) = \begin{pmatrix} -4b+13 & -2b+6 & -a+2{,}5 \\ -2b+6 & 2 & -2b+4 \\ -2b+5 & -2b+4 & 3 \end{pmatrix}$$

Из условия симметричности можем сделать вывод, что $-2b+5 = -a+2{,}5$

$4b - 2a = 5$

~~Подставим~~

$b = \frac{2a+5}{4}$

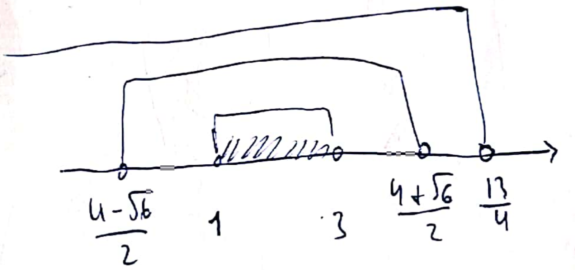
Теперь выпишем кв.-ф., используя полученное соотношение.

$$Q(b) = \begin{pmatrix} -4b+13 & -2b+6 & -2b+5 \\ -2b+6 & 2 & -2b+4 \\ -2b+5 & -2b+4 & 3 \end{pmatrix}$$

Проверим положительную определенность при помощи метода Якоби.

$$\begin{cases} |-4b+13| > 0 \\ \begin{vmatrix} -4b+13 & -2b+6 \\ -2b+6 & 2 \end{vmatrix} > 0 \\ |Q(b)| > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < \frac{13}{4} \\ -8b+26-(-2b+6)^2 > 0 \\ -24b+78+2\cdot(-2b+6)\cdot(-2b+5)(-2b+4) - 3\cdot(-2b+6)^2 - \\ -2\cdot(-2b+5)^2 - (-4b+13)(-2b+4)^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b < \frac{13}{4} \\ \frac{4-\sqrt{6}}{2} < b < \frac{4+\sqrt{6}}{2} \\ 1 < b < 3 \end{cases}$$



$\Rightarrow 1 < b < 3$

Получим аналогичное нер-во для a, выразив b через a.

$$1 < \frac{2a+5}{4} < 3$$

$$4 < 2a+5 < 12$$

$$-1 < 2a < 7$$

$$-\frac{1}{2} < a < \frac{7}{2}$$

Ответ: $b \in (1, 3)$

$a \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

№5

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 10 & -90 \\ 10 & 26 & -108 \\ -90 & -108 & 594 \end{pmatrix}$$

Заметим, что A - симметричная. Значит остается проверит неотрицательную определенность.

Для этого воспользуемся мет. Гаусса, т.к. нам может быть понадобится матрица перехода.

$$\left(\begin{array}{ccc} 20 & 10 & -90 \\ 10 & 26 & -108 \\ -90 & -108 & 594 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III} \to \mathrm{III} + \frac{9}{2}\cdot \mathrm{I}]{\mathrm{II} \to \mathrm{II} - \frac{1}{2}\cdot \mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc} 20 & 10 & -90 \\ 0 & 21 & -63 \\ 0 & -63 & 189 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III} \to \mathrm{III} + \frac{9}{2}\cdot \mathrm{I}]{\mathrm{II} \to \mathrm{II} - \frac{1}{2}\cdot \mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & -63 \\ 0 & -63 & 189 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III} \to \mathrm{III} + 3\cdot \mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & -63 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{III} \to \mathrm{III} + 3\cdot \mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\mathrm{I} \to \frac{1}{\sqrt{20}}\cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \to \frac{1}{\sqrt{21}}\cdot \mathrm{II}}]{\substack{\mathrm{I} \to \frac{1}{\sqrt{20}}\cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \to \frac{1}{\sqrt{21}}\cdot \mathrm{II}}} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{\sqrt{20}} & -\frac{1}{2\sqrt{21}} & 3 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{21}} & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = A', \quad C$$

$$A' = C^T A C \quad \Rightarrow \quad A = C^{-T} A' C^{-1}$$

Так как $C^{-1} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & 21\sqrt{5} & -69\sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{21} & -3\sqrt{21} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, получаем

$$A = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 21\sqrt{5} & \sqrt{21} & 0 \\ -69\sqrt{5} & -3\sqrt{21} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & 21\sqrt{5} & -69\sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{21} & -3\sqrt{21} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & 0 \\ 21\sqrt{5} & \sqrt{21} \\ -69\sqrt{5} & -3\sqrt{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & 21\sqrt{5} & -69\sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{21} & -3\sqrt{21} \end{pmatrix}$$

А это равно $V^T V$, где

$$V = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & 21\sqrt{5} & -69\sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{21} & -3\sqrt{21} \end{pmatrix}$$

По столбцам в этой матрице написана система векторов, матрицей Грама которой является исходная матрица А.

~~Ответ: да, существует~~

Поскольку нам нужна более система векторов из $\mathbb{R}^3$ можем дополнить получившиеся векторы 0. От этого матрица Грама не изменится.

Ответ: да, существует $v_1 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 21\sqrt{5} \\ \sqrt{21} \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} -69\sqrt{5} \\ -3\sqrt{21} \\ 0 \end{pmatrix}$.