Общие и частные решения

Про определители блочных матриц

Альберт Ягодин (ведь это вы были?) после пары всё-таки помог мне преодолеть неприязнь к инверсиям; с их помощью задача про определитель блочных матриц нормально решается. Так что рассказываю вам и такое решение.

Пример 1. Матрицы P, Q и R квадратные размеров 3, 7 и 5 соответственно. Найдём определитель

$$\begin{vmatrix} A & B & P \\ C & Q & 0 \\ R & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Ясно, что надо сделать из этой матрицы нормальную блочно верхнетреугольную матрицу:

$$\begin{vmatrix} P & B & A \\ 0 & Q & C \\ 0 & 0 & R \end{vmatrix}$$

Для этого нам нужно совершить следующую перестановку блоков (смотрим на столбцы!):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Как известно, чётность перестановки — это чётность числа инверсий, а инверсия (в ситуации, когда в первой строке у нас все номера упорядочены по возрастанию) есть просто пара чисел $\cdots i \cdots j \cdots$ во второй строке, для которой $i > j$ (на первую строку можно вообще не смотреть).

Вот и смотрим. Внутри каждого из цветных блоков инверсий нет. Каждая пара (зелёный, синий) является инверсией — таких пар $5 \cdot 7$; каждая пара (зелёный, красный) также является инверсией — таких пар $5 \cdot 3$, и каждая пара (синий, красный) также является инверсией — этих $7 \cdot 5$. Кажется, итого получается, что знак перестановки равен $(-1)^{5\cdot7+5\cdot3+7\cdot5}$, а определитель блочной матрицы равен

$$(-1)^{5\cdot7+5\cdot3+7\cdot5}|P| \cdot |Q| \cdot |R|$$

Поиск определителей с помощью элементарных преобразований

Пример 2. Найдём определитель

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & -8 & -13 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Наша задача — привести элементарными преобразованиями матрица к верхнетреугольному виду, внимательно отслеживая, как меняется при этом определитель. Важно: тут везде будут знаки равенства, иначе мы все запутаемся. Итак:

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & -8 & -13 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix}$$

Обратите внимание: мы здесь не просто переставили местами две строки, а переставили строки по циклу (всегда внимательно отслеживайте такие вещи!), поэтому знак, который появился перед определителем, — это знак цикла $(1,2,3,4)$.

Теперь мы можем с помощью преобразований первого типа убить всё, что лежит под единицей в левом верхнем углу:

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & -19 \end{vmatrix}$$

Теперь у нас проблема: во втором столбце (в блоке 3×3) у нас нет единицы, но её легко сделать, прибавив ко второй четвёртую:

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & -19 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -14 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & -19 \end{vmatrix}$$

Теперь можно и сделать следующую ступеньку:

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -14 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & -19 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \\ 0 & 0 & -26 & -61 \end{vmatrix}$$

Теперь мы можем вынести из третьей строки (-11), чтобы оно нам не мешало:

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \\ 0 & 0 & -26 & -61 \end{vmatrix} = 11\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -26 & -61 \end{vmatrix}$$

А теперь мне стало лень делать элементарные преобразования: определитель посчитаем как определитель блочно диагональной матрицы:

$$11\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -26 & -61 \end{vmatrix} = 11\cdot 1\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -26 & -61 \end{vmatrix} = 11\cdot(-61-2\cdot(-26)) = 11\cdot(-9) = -99$$

Я торопился и, возможно, где-то накосячил в арифметике, но принцип в целом такой.

Пример 3. Найдём определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Тут мы видим много нулей; фактически, матрица станет почти верхнетреугольной после небольшой перестановки строк или столбцов.

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Почему знак не поменялся? Потому, что мы переставили по циклу первые три столбца (цикл длины 3 чётный).

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

И снова знак не поменялся, потому что мы переставили по циклу первые три строки! Теперь уже всё легко:

$$\begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 2\cdot((-1)\cdot 5-(-3)\cdot 4)$$

И всё-таки домашнее задание

Задача 1.1. Определитель матрицы 4×4 со столбцами a_1, a_2, a_3, a_4 равен 5. Чему равен определитель матрицы со столбцами $a_1-a_2+a_3-2a_4$, $a_1+3a_2-a_3+3a_4$, $-a_1-a_2+4a_3+3a_4$, $-3a_1-8a_3-13a_4$?

Задача 1.2. Определитель матрицы 4×4 со строками a_1, a_2, a_3, a_4 равен 17. Чему равен определитель матрицы со строками $3a_1-3a_2-2a_3-5a_4$, $2a_1+5a_2+4a_3+6a_4$, $5a_1+5a_2+8a_3+7a_4$, $4a_1+4a_2+5a_3+6a_4$.

Задачи 1.3-1.5. Задачи 259, 270, 275 (начните с вынесения знаменателей из-под определителя!).

Задача 1.6. Матрицы P, Q и R квадратные размеров 13, 19 и 9 соответственно и с определителями, равными $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ соответственно. Найдите определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & P \\ 0 & Q & C \\ R & A & B \end{vmatrix}$$

Задача 2.1. Задача 279 из скана (используйте элементарные преобразования, и довольно быстро настанет счастье)

Задача 2.2. Задача 316 из скана.

Задача 2.3. Задача 278 из скана.

Задача 2.4. Чему может быть равен определитель целочисленной матрицы A, если известно, что матрица A^{-1} тоже целочисленная?

Подсказка: Как связаны определители матрицы и её обратной?

Задача 3.1. Придумайте способ генерировать матрицы заданного порядка с заданным определителем. Ваш способ должен удовлетворять трём условиям:

(1) это не должны быть матрицы специального вида (если у них какие-то элементы всегда нулевые или, скажем, значительная доля элементов равна нулю, то это не подходит), (2) алгоритм должен уметь генерировать сколь угодно много различных матриц и (3) этот способ можно запрограммировать.

Задача 3.2. Докажите, что если матрица $E + AB$ обратима, то матрица $E + BA$ также обратима.