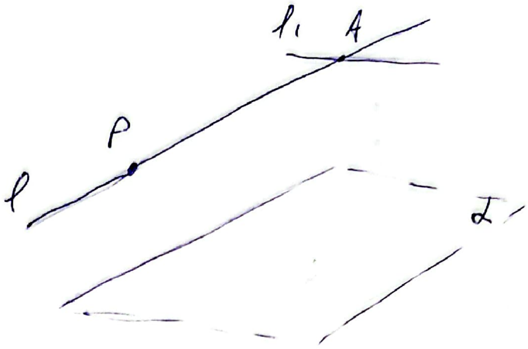
ИДЗ-9 Панфилов Борис 17 вариант.

№1

l - ? $l \parallel \alpha : 2x-5y-4z=3$

$P = \begin{pmatrix} 54 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix}$

l пересекает прямую $l_1 : \begin{cases} x = 2t-54 \\ y = 5t-24 \\ z = -4t-9 \end{cases}$



$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} -54 \\ -24 \\ -9 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Пусть α_1 - плоскость параллельная плоскости α и проходящая через точку P

$\alpha_1 : 2x-5y-4z+d=0$

Подставим P, чтобы найти d

$108-15-60+d=0$

$d=-33$

Предположим, что $\alpha_1 \nparallel l_1$ тогда они должны пересекаться в точке A.

Точка A будет задаваться системой

$$\begin{cases} 2x-5y-4z-33=0 \\ x=2t-54 \\ y=5t-24 \\ z=-4t-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5y-4z=33 \\ x-2t=-54 \\ y-5t=-24 \\ z+4t=-9 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -5 & -4 & 0 & 33 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & -54 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -24 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -48 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -48 \\ -9 \\ -21 \end{pmatrix}$$

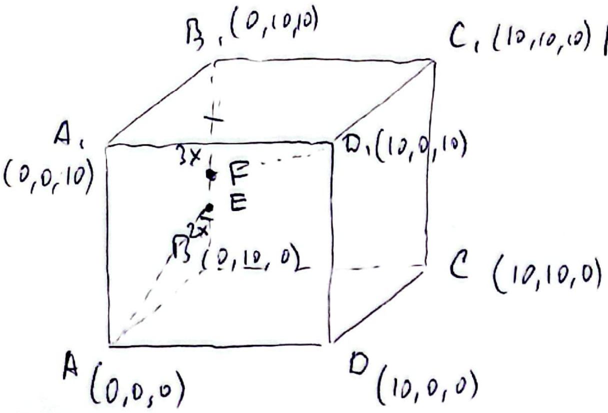
$$l = P + \langle \overrightarrow{PA} \rangle = \begin{pmatrix} 54 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -102 \\ -12 \\ -36 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} 54 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 51 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} \right\rangle$$

В каноническом виде:

$$l: \frac{x-54}{51} = \frac{y-3}{6} = \frac{z-15}{18}$$

Ответ: $\frac{x-54}{51} = \frac{y-3}{6} = \frac{z-15}{18}$.

№2



Найти угол и расстояние между AE и D_1F

Поместим куб в координаты, притом точка A будет совпадать с началом координат. Координаты всех остальных вершин куба я отметил на рисунке.

Теперь найдем координаты точек E и F.

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ \frac{10+0}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ \frac{2}{5}(0+10) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Зададим прямые AE и D_1F в виде „точка + лин. оболочка".

$$AE = A + \langle \overrightarrow{AE} \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{t_1} + \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}}_{u_1} \right\rangle$$

$$D_1F = D_1 + \langle \overrightarrow{D_1F} \rangle = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle = \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}}_{t_2} + \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{u_2} \right\rangle$$

$$\rho(AE, D_1F) = \frac{|vol(u_1, u_2, \overrightarrow{EF})|}{|[u_1, u_2]|} = \frac{10}{\sqrt{197}}$$

$$|vol(u_1, u_2, \overrightarrow{EF})| = \left|\det \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\right| = \left|\det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\right| = 10$$

$$|[u_1, u_2]| = \sqrt{81+16+100} = \sqrt{197}$$

$$[u_1, u_2] = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\cos\angle(AE, D_1F) = \frac{(u_1, u_2)}{|u_1|\cdot|u_2|} = \frac{8}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{9}} = \frac{8}{3\sqrt{29}}$$

$$\Rightarrow \angle(AE, D_1F) = \arccos\left(\frac{8}{3\sqrt{29}}\right)$$

Ответ: $\frac{10}{\sqrt{197}}$, $\arccos\left(\frac{8}{3\sqrt{29}}\right)$.

№3

а) $\mathcal{E} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ $\quad \varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$A(\varphi, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\varphi}(t) = -t^3 + 4t^2 - (7-5-1)t + \det A = -t^3 + 4t^2 - t - 6 =$$
$$= -(t+1)(t-2)(t-3)$$

Получаем собственные значения $-1, 2, 3$

$V_{-1} = \ker(A+E)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow V_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$ в качестве e_1' можно взять $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$V_2 = \ker(A-2E)$

$$\begin{pmatrix} -2 & -7 & 1 \\ 1 & +2 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow V_2 = \left\langle \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \quad e_2' = \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$$

$V_3 = \ker(A-3E)$

$$\begin{pmatrix} -3 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow V_3 = \left\langle \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \quad e_3' = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

Ответ: φ - диагонализуем. Принимает диаг. вид $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ в базисе $e_1' = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $e_2' = \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$, $e_3' = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$

б)

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 5 \\ -4 & 5 & 4 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\chi_\varphi(t) = -t^3 + 8t^2 - (-3+22+2)t + 18 = -t^3 + 8t^2 - 21t + 18 =$$

$= -(t-2)(t-3)^2$ Получаем собственные значения 2, 3

$V_2 = \ker(A - 2E)$

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 5 \\ -4 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ФСР}: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$V_3 = \ker(A - 3E)$

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 & 5 \\ -4 & 2 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ФСР}: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

φ - не диагонализуем, потому что алгебраическая кратность собств. значения 3 равна 2, а геометрическая - 1.

Ответ: не диагонализуем.

№4

$$Q(x_1, x_2, x_3) = -8x_1^2 - 5x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$$

$$B(Q) = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Чтобы найти ортогональное преобразование, вспомним, что любую симметричную матрицу мы можем ассоциировать с самосопряженным линейным оператором φ. Значит искомым преобразованием будет матрица перехода от исходного базиса к базису из собственных векторов.

$$\chi_\varphi(t) = -t^3 + (-18)t^2 - (39+21+39)t + (-162) = -t^3 - 18t^2 - 99t - 162 =$$

$= -(t+3)(t+6)(t+9)$ Получаем собств. значения $-3, -6, -9$

$V_{-3} = \ker(B+3E)$

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ФСР} : \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e_1' := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$V_{-6} = \ker(B+6E)$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ФСР} : \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =: e_2'$$

$V_{-9} = \ker(B+9E)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ФСР} : \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =: e_3'$$

$$(e_1' e_2' e_3') = (e_1\, e_2\, e_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Ответ: канонический вид: $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$

ортогональное преобразование: $C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

№5

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\qquad e = \left\{ \underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{e_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$

ортог лин оператор

$$A(e,e) = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -9 & -2 & -6 \\ -6 & 6 & 7 \\ 2 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$

1) $\det A = 1 \Rightarrow$ мы имеем дело с канон видом вида $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\operatorname{tr} A = -\frac{9}{11} \Rightarrow 2\cos\alpha + 1 = -\frac{9}{11} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{10}{11} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{21}}{11}$

3) Найдем собств подпр-во с собств. зн. 1 $\quad V_1 = \ker(A-E)$

$$\begin{pmatrix} -20 & -2 & -6 \\ -6 & -5 & 7 \\ 2 & 9 & -17 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ФСР} : \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{Возьмем } e_3' := \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4) Найдем подпр-во $\langle e_3\rangle^\perp$

$(-1\ \ 4\ \ 2) \rightsquigarrow$ ФСР: $\underset{u_1}{\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}}\ \underset{u_2}{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}}$

Ортогонализуем u_1 и u_2

$v_1 = u_1 \sim \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} \qquad w_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} =: e_1'$

$v_2 = u_2 - \frac{(u_2, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 = u_2 - \frac{8}{17} v_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{8}{17}\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/17\\-8/17\\1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2\\-8\\17\end{pmatrix}$

$w_2 = \frac{1}{\sqrt{357}}\begin{pmatrix}2\\-8\\17\end{pmatrix} =: e_2'$

5) Окончательно поймем как выглядит канонический вид:

$Ae_1' = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}-8 & -2 & -6\\-6 & 6 & 7\\2 & 9 & -6\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{11\sqrt{17}}\begin{pmatrix}-38\\-18\\17\end{pmatrix}$

$-\frac{10}{11}e_1' - \frac{\sqrt{21}}{11}e_2' = -\frac{1}{11\sqrt{17}}\begin{pmatrix}40\\10\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{11\sqrt{17}}\begin{pmatrix}2\\-8\\17\end{pmatrix} = \frac{1}{11\sqrt{17}}\begin{pmatrix}-38\\-18\\17\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \sin\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{11}$

Ответ: e_1', e_2', e_3' - ортонормированный базис

$\begin{pmatrix}-\frac{10}{11} & \frac{\sqrt{21}}{11} & 0\\ -\frac{\sqrt{21}}{11} & -\frac{10}{11} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ - канонический вид

Тип движения - поворот вокруг оси $\langle e_3'\rangle$ на угол $\pi + \arccos\left(\frac{10}{11}\right)$.