ИДЗ Панфилов Борис БПМИ-216

18 вариант.

№1

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -7 & -7 & -23 & 1 \\ -15 & 6 & 6 & 20 & 2 \\ -35 & 7 & 7 & 13 & 3 \\ -35 & -2 & -2 & -2 & 6 \\ 50 & -5 & -5 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

Приведем A к ступ. виду:

$$\begin{pmatrix} -5 & -7 & -7 & -23 & 1 \\ -15 & 6 & 6 & 20 & 2 \\ -35 & 7 & 7 & 13 & 3 \\ -35 & -2 & -2 & -2 & 6 \\ 50 & -5 & -5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{II \to II - 3\cdot I \\ III \to III - 7\cdot I \\ IV \to IV - 7\cdot I \\ V \to V + 10\cdot I}} \begin{pmatrix} -5 & -7 & -7 & -23 & 1 \\ 0 & 27 & 27 & 89 & -1 \\ 0 & 56 & 56 & 174 & -4 \\ 0 & 47 & 47 & 159 & -1 \\ 0 & -75 & -75 & -235 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{V \to V + II + IV} \begin{pmatrix} -5 & -7 & -7 & -23 & 1 \\ 0 & 27 & 27 & 89 & -1 \\ 0 & 56 & 56 & 174 & -4 \\ 0 & 47 & 47 & 159 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 13 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{II \to II + 27\cdot V \\ III \to III + 56\cdot V \\ IV \to IV + 47\cdot V}} \begin{pmatrix} -5 & -7 & -7 & -23 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 440 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 902 & 164 \\ 0 & 0 & 0 & 770 & 140 \\ 0 & -1 & -1 & 13 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{III \to III - 2\cdot II \\ II \to \frac{1}{40}\cdot II \\ IV \to \frac{1}{70}\cdot IV}} \begin{pmatrix} -5 & -7 & -7 & -23 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 22 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 13 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{III \to III - 2\cdot II \\ IV \to IV - II}}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -5 & -7 & -7 & -23 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 13 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow rk A = 3$, т.к. эл. преобр. не меняют ранг.

$$\begin{pmatrix} -5 & -7 & -7 & -23 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{III \to III + 2\cdot II \\ IV \to IV + II}} \begin{pmatrix} -5 & -7 & -7 & -23 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{IV \to 70\cdot IV \\ II \to 40\cdot II \\ III \to III + 2\cdot II}} \begin{pmatrix} -5 & -7 & -7 & -23 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\substack{IV \to IV - 47\cdot V \\ III \to III - 56\cdot V \\ II \to II - 27\cdot V}} \begin{pmatrix} -5 & -7 & -7 & -23 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{V \to V - II - IV} \begin{pmatrix} -5 & -7 & -7 & -23 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{II \to II + 3\cdot I \\ III \to III + 7\cdot I \\ IV \to IV + 7\cdot I \\ V \to V - 10\cdot I}}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -5 & -7 & -7 & -23 & 1 \\ -15 & -21 & -21 & -69 & 3 \\ -35 & -49 & -49 & -161 & 7 \\ -35 & -49 & -49 & -161 & 7 \\ 50 & 70 & 70 & 230 & -10 \end{pmatrix} = B$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&11&2\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\overline{IV}\to\overline{IV}+\overline{II}]{\overline{III}\to\overline{III}+2\cdot\overline{II}} \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&11&2\\ 0&0&0&22&4\\ 0&0&0&11&2\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\overline{III}\to\overline{III}+2\cdot\overline{II}]{\overline{IV}\to 70\cdot\overline{IV},\ \overline{II}\to 40\cdot\overline{II}} \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&440&80\\ 0&0&0&902&164\\ 0&0&0&770&140\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\overline{II}\to\overline{II}-27\cdot\overline{V}]{\overline{IV}\to\overline{IV}-47\cdot\overline{V},\ \overline{III}\to\overline{III}-56\cdot\overline{V}}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&440&80\\ 0&0&0&902&164\\ 0&0&0&770&140\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{V}\to\overline{V}-\overline{II}-\overline{IV}} \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&440&80\\ 0&0&0&902&164\\ 0&0&0&770&140\\ 0&0&0&-1210&-220 \end{pmatrix} \xrightarrow[\overline{IV}\to\overline{IV}+7\cdot\overline{I},\ \overline{V}\to\overline{V}-10\cdot\overline{I}]{\overline{II}\to\overline{II}+3\cdot\overline{I},\ \overline{III}\to\overline{III}+7\cdot\overline{I}} \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&440&80\\ 0&0&0&902&164\\ 0&0&0&770&140\\ 0&0&0&-1210&-220 \end{pmatrix} = C$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&-1&-1&13&3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\overline{IV}\to\overline{IV}+\overline{II}]{\overline{III}\to\overline{III}+2\cdot\overline{II}} \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&-1&-1&13&3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\overline{III}\to\overline{III}+2\cdot\overline{II}]{\overline{IV}\to 70\cdot\overline{IV},\ \overline{II}\to 40\cdot\overline{II}} \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&-1&-1&13&3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\overline{II}\to\overline{II}-27\cdot\overline{V}]{\overline{IV}\to\overline{IV}-47\cdot\overline{V},\ \overline{III}\to\overline{III}-56\cdot\overline{V}}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&27&27&-351&-81\\ 0&56&56&-728&-168\\ 0&47&47&-611&-141\\ 0&-1&-1&13&3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{V}\to\overline{V}-\overline{II}-\overline{IV}} \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&27&27&-351&-81\\ 0&56&56&-728&-168\\ 0&47&47&-611&-141\\ 0&-75&-75&975&225 \end{pmatrix} \xrightarrow[\overline{IV}\to\overline{IV}+7\cdot\overline{I},\ \overline{V}\to\overline{V}-10\cdot\overline{I}]{\overline{II}\to\overline{II}+3\cdot\overline{I},\ \overline{III}\to\overline{III}+7\cdot\overline{I}} \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&27&27&-351&-81\\ 0&56&56&-728&-168\\ 0&47&47&-611&-141\\ 0&-75&-75&975&225 \end{pmatrix} = D$$

$rk\,B = rk\,C = rk\,D = 1$, т.к. они получились при помощи эл. преобр из матриц очевидно ранга 1.

Получаем

$A = B + C + D$ где $rk\,B = rk\,C = rk\,D = 1$

что и требовалось.

Ответ: $B = \begin{pmatrix} -5&-7&-7&-23&1\\ -15&-21&-21&-69&3\\ -35&-49&-49&-161&7\\ -35&-49&-49&-161&7\\ 50&70&70&230&-10 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&440&80\\ 0&0&0&902&164\\ 0&0&0&770&140\\ 0&0&0&-1210&-220 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&27&27&-351&-81\\ 0&56&56&-728&-168\\ 0&47&47&-611&-141\\ 0&-75&-75&975&225 \end{pmatrix}$.

№2

$\mathfrak{e} = (e_1, e_2, e_3) \qquad \mathfrak{e}' = (e_1', e_2', e_3')$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e_1' = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix} \quad e_2' = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3' = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

а) Чтобы показать, что эти наборы векторов являются базисами $\mathbb{R}^3$, докажем их линейную независимость

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{УСВ}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e_1, e_2, e_3 \text{ лин. независимы}$$

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim(\langle e_1, e_2, e_3 \rangle) = 3 \Rightarrow \mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -3 & -6 & -4 \\ -7 & 0 & -8 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{УСВ}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e_1', e_2', e_3' \text{ лин независимы}$$

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim(\langle e_1', e_2', e_3' \rangle) = 3 \Rightarrow \mathbb{R}^3 = \langle e_1', e_2', e_3' \rangle$$

б) Чтобы найти матрицу перехода, найдем коэф-ты в лин. комбинациях векторов базиса $\mathfrak{e}$, равным векторам $\mathfrak{e}'$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -7 \end{array}\right) \longrightarrow \text{УСВ}: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{37}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{12}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{16}{11} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \text{УСВ}: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{30}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{34}{11} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & -8 \end{array}\right) \longrightarrow \text{УСВ}: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{42}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{16}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{14}{11} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \text{Матрица перехода } C \text{ равна } \begin{pmatrix} -\frac{37}{11} & -\frac{30}{11} & -\frac{42}{11} \\ \frac{12}{11} & \frac{2}{11} & \frac{16}{11} \\ -\frac{16}{11} & \frac{34}{11} & -\frac{14}{11} \end{pmatrix}$$

4

в) $V=(2,5,-1)$

Чтобы найти коор-ты V решим СЛУ:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 4 & -2 & 2 \\ -3 & -6 & -4 & 5 \\ -7 & 0 & -8 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \text{УСВ}: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{71}{11} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{16}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{127}{22} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow V = -\frac{71}{11} e_1' - \frac{16}{11} e_2' + \frac{127}{22} e_3'$$

искомые координаты

№3

$$L_1 = \left\langle \underset{a_1}{\begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ 5 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}}, \underset{a_2}{\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}, \underset{a_3}{\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}, \underset{a_4}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

$$L_2 = \left\langle \underset{b_1}{\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}, \underset{b_2}{\begin{pmatrix} -12 \\ 7 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}, \underset{b_3}{\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{b_4}{\begin{pmatrix} -17 \\ -11 \\ 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Для начала найдем базисы L_1 и L_2, для этого выделим лин независимые векторы среди векторов, образующих ~~лн~~ лин оболочку.

Для L_1:

$$\begin{pmatrix} 10 & -5 & -2 & 2 \\ 13 & 3 & -5 & -1 \\ 5 & -2 & -3 & -2 \\ -6 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{УСВ}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1, a_2, a_3 \text{ лин. нез.}$$

$\Rightarrow \{a_1, a_2, a_3\}$ - базис L_1

$\dim L_1 = 3$

Для L_2:

$$\begin{pmatrix} 6 & -12 & -5 & -17 \\ 3 & 7 & -5 & -11 \\ -1 & -2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{УСВ}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b_1, b_2, b_3 \text{ лин нез.}$$

$\Rightarrow \{b_1, b_2, b_3\}$ - базис L_2

$\dim L_2 = 3$

Чтобы найти базис L_1+L_2, найдем базис $\langle a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\rangle$

$$\begin{pmatrix} 10 & -5 & -2 & 6 & -12 & -5 \\ 13 & 3 & -5 & 3 & 7 & -5 \\ 5 & -2 & -3 & -1 & -2 & 3 \\ -6 & 0 & 2 & -2 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{УСВ}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \{a_1, a_2, a_3, b_3\}$ - базис L_1+L_2

$\dim(L_1+L_2)=4$

Для того, чтобы найти базис $L_1 \cap L_2$ зададим L_1 и L_2 при помощи ОСЛУ:

Для L_1:

$$\begin{pmatrix} 10 & 13 & 5 & -6 & -2 \\ -5 & 3 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{УСВ}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{16}{89} & \frac{8}{89} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{28}{89} & \frac{14}{89} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{89} & -\frac{88}{89} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ФСР}: \begin{pmatrix} 16 \\ 28 \\ 2 \\ 89 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ -14 \\ 88 \\ 0 \\ 89 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L_1: \begin{cases} 16x_1 + 28x_2 + 2x_3 + 89x_4 = 0 \\ -8x_1 - 14x_2 + 88x_3 + 89x_5 = 0 \end{cases}$$

Для L_2:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ -12 & 7 & -2 & 0 & 2 \\ -5 & -5 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{УСВ}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{25}{109} & \frac{15}{109} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{164}{109} & \frac{142}{109} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{424}{109} & \frac{288}{109} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ФСР}: \begin{pmatrix} 25 \\ 164 \\ 424 \\ 109 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -15 \\ -142 \\ -288 \\ 0 \\ 109 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L_2: \begin{cases} 25x_1 + 164x_2 + 424x_3 + 109x_4 = 0 \\ -15x_1 - 142x_2 - 288x_3 + 109x_5 = 0 \end{cases}$$

Далее, чтобы найти базис „соединим" эти 2 системы и найдем ФСР полученной.

$$\begin{pmatrix} 16 & 28 & 2 & 89 & 0 \\ -8 & -14 & 88 & 0 & 89 \\ 25 & 164 & 424 & 109 & 0 \\ -15 & -142 & -288 & 0 & 109 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{УСВ}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ФСР}: \underset{v_1}{\begin{pmatrix} -18 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{v_2}{\begin{pmatrix} -12 \\ 7 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow \{v_1, v_2\}$ - базис $L_1 \cap L_2$

$\dim(L_1 \cap L_2) = 2$

№4

Для начала зададим U при помощи линейной оболочки базиса.
Для этого найдем линейно независимые векторы среди v_1, v_2, v_3, v_4.

$$\begin{pmatrix} 13 & 14 & -8 & 14 & -1 \\ 11 & -2 & 5 & -2 & 0 \\ -12 & -10 & 8 & 13 & -13 \\ -27 & -40 & 23 & -17 & -11 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{УСВ}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{69}{31} & \frac{368}{279} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{453}{62} & -\frac{2137}{558} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{230}{31} & -\frac{1237}{279} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ - базис U

Чтобы выполнялось $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$, вектора базиса W должны дополнять вектора базиса U до ~~[illegible]~~ базиса $\mathbb{R}^5$

$\Rightarrow$ Найдем вектора дополняющие v_1, v_2, v_3 до базиса $\mathbb{R}^5$

$$\begin{pmatrix} 13 & 11 & -12 \\ 14 & -2 & -10 \\ -8 & 5 & 8 \\ 14 & -2 & 13 \\ -1 & 0 & -13 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{~~Нижне~~ треугольный вид}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{69}{31} & \frac{453}{62} & \frac{230}{31} \\ \frac{368}{279} & -\frac{2137}{558} & -\frac{1237}{279} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ можем дополнить до базиса векторами $\underset{w_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{w_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

Пусть $W = \langle w_1, w_2 \rangle$, тогда получаем

1) $\dim \mathbb{R}^5 = \dim U + \dim W = 3 + 2 = 5$

2) v_1, v_2, v_3, w_1, w_2 - лин независимы

$\Rightarrow$ условие $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$ выполняется

Касаемо второго условие нетрудно заметить, что $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$
Но тем не менее его нельзя представить в виде лин. комбинации 2-х векторов стандартного базиса. (Именно 2-х, т.к. $\dim W = 2$)

$\Rightarrow$ 2-е условие тоже выполняется.

Ответ: $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

№5

$$V_1 = \begin{pmatrix} 12 & 13 \\ -8 & 13 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad V_3 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -13 & -11 \end{pmatrix} \qquad V_4 = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -14 & 14 \end{pmatrix}$$

Вытянем V_1, V_2, V_3, V_4 в векторы $w_1; w_2, w_3, w_4$ соответственно, т.к. с векторами удобнее работать

а) В таком случае требуется доказать $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$

1) Проверим линейную независимость w_1, w_2, w_3, w_4

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 12 & -2 & -3 & 7 \\ -8 & -3 & -13 & -14 \\ 13 & 10 & -1 & 12 \\ 13 & 4 & -11 & 14 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{matrix} \end{array} \longrightarrow УСВ: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \{w_1, w_2, w_3, w_4\} \text{ - базис } \mathbb{R}^4$$

2) Как мы уже поняли w_1, w_2 лин нез $\Rightarrow$ они - базис U
w_3, w_4 —— " —— - базис W

$\Rightarrow \dim U + \dim W = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$

Из 1) и 2) $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$

б) Вытянем $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}'$. И найдем $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, т.что

$$\alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2 + \alpha_3 W_3 + \alpha_4 W_4 = \mathcal{E}'$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 12 & -2 & -3 & 7 & 13 \\ -8 & -3 & -13 & -14 & -27 \\ 13 & 10 & -1 & 12 & 2 \\ 13 & 4 & -11 & 14 & -14 \end{array}\right) \longrightarrow \text{УСВ}: \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}' = 2W_1 - W_2 + 2W_3 - W_4$$

Тогда проекция $\mathcal{E}'$ на W вдоль U равна $2W_3 - W_4 =$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -13 \\ -1 \\ -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -14 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -12 \\ -14 \\ -36 \end{pmatrix}$$

Тогда возвращаясь к матрицам, ~~$\mathcal{E}$~~ проекция $\mathcal{E}$ на W вдоль U равна $\begin{pmatrix} -13 & -14 \\ -12 & -36 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix} -13 & -14 \\ -12 & -36 \end{pmatrix}$