Линал ДЗ - 8 Панфилов Борис БПМИ-216 Волшебное число - 4

№1.1

Над полем $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + y + 4z = 4 \end{cases}$$

Запишем в расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[III \to III - I]{II \to II - 2 \cdot I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{II \to II \cdot 3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{III \to III - 4 \cdot II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{III \to III \cdot 4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{II \to II - III} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{I \to I - 2II - III}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

№1.2

Над полем $\mathbb{Z}_{17}$

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z = 1 \\ 2x + 5y + 3z = 1 \\ 5x + 3y + 2z = 4 \end{cases}$$

Запишем в расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{I \to I - II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 14 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[III \to III - 5 \cdot I]{II \to II - 2 \cdot I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 14 & 2 & 0 \\ 0 & 11 & 16 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{II \leftrightarrow III} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 14 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 11 & 16 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{III \to III - 11 \cdot II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 14 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{III \to 9 \cdot III} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 14 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{II \to II - 9 \cdot III} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 14 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{I \to I - 14 \cdot II - 2 \cdot III}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x = 15 \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 15 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

CamScanner

№1.3

20.1е) $\frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2} = \frac{8-i+24i+3}{4+4i-1} = \frac{11+23i}{3+4i} = \frac{(11+23i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} =$

$= \frac{33-44i+69i+92}{9-12i+12i+16} = \frac{125+25i}{25} = 5+i$

Ответ: $5+i$

20.1к) $(3+i)^3-(3-i)^3 = (3+i-3+i)\left((3+i)^2+2(3+i)(3-i)+(3-i)^2\right) =$

$= 2i\left(9+\cancel{6i}-1+20+3-\cancel{6i}-1\right) = 2i\cdot 30 = 60i$

Ответ: $60i$.

№1.4

20.4а) $\begin{cases} (1)\ (1+i)z_1+(1-i)z_2=1+i \\ (2)\ (1-i)z_1+(1+i)z_2=1+3i \end{cases}$

$(1)+(2)$: $z_1+z_2=1+4i$

$z_1=1+4i-z_2$

Подставляем в (1)

$(1+i)(1+4i-z_2)+(1-i)z_2=1+i$

$\cancel{1}+4i-\cancel{z_2}+\cancel{i}-4-iz_2+\cancel{z_2}-iz_2=\cancel{1}+\cancel{i}$

$4i-4=iz_2$

$z_2=\frac{4i-4}{i}=+4i+4=4+4i$

$z_1=1+4i-4-4i=-3$

Ответ: $\begin{pmatrix} -3 \\ 4+4i \end{pmatrix}$.

№ 1.5

20.5 б) $(3+2i)x + (1+3i)y = 4-9i$

$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2ix + 3iy = -9i \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x + 3y = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1)\ 9x + 3y = 12 \\ (2)\ 2x + 3y = -9 \end{cases}$$

$(1)-(2)$: $7x = 21$

$x = 3$

Подставим в (1)

$27 + 3y = 12$

$3y = -15$

$y = -5$

Ответ: $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

№ 1.6

20.11 е) $z^2 + (2i-7)z + 13 - i = 0$

$D = (2i-7)^2 - 4\cdot(13-i) = -4 - 28i + 49 - 52 + 4i = -7 - 24i$

$z = \dfrac{7-2i \pm \sqrt{-7-24i}}{2} \Rightarrow z = \dfrac{7-2i \pm (3-4i)}{2}$

$z_1 = \dfrac{7-2i+3-4i}{2} = 5-3i$

$z_2 = \dfrac{7-2i-3+4i}{2} = 2+i$

$(x+iy)^2 = -7-24i$

$x^2 + 2xiy - y^2 = -7-24i$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -7 \\ 2xiy = -24i \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -7 \quad (1) \\ xy = -12 \end{cases} \quad x = -\frac{12}{y}$$

Подставляем в (1)

$\dfrac{144}{y^2} - y^2 = -7$

$144 - y^4 = -7y^2$

$y^4 - 7y^2 - 144 = 0$

$D = 49 + 576 = 625$

$y^2 = \dfrac{7 \pm 25}{2}$ $\quad y_1^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4 \Rightarrow x = \mp 3$

$y_2^2 = -9$ невозможно

Ответ: $5-3i$, $2+i$.

№ 2.1 (300)

$A = Mat_{n\times n}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot \det A_{n-1\times n-1} - 2\cdot 1\cdot \det A_{n-2\times n-2}$$

Получим рекуррентное соотношение $p_n = 3p_{n-1} - 2p_{n-2}$,
где $p_n = \det A_{n\times n}$. При этом $p_1 = \det A_{1\times 1} = 3$ и $p_2 = 9 - 2 = 7$

Попробуем найти тут 2 неколлинеарные последовательности.
Например геом. прогрессии

$t^n = 3t^{n-1} - 2t^{n-2} \quad : t^{n-2}$

$t^2 = 3t - 2$

$t^2 - 3t + 2 = 0$

$D = 9 - 8 = 1$

$t = \frac{3\pm 1}{2} \qquad \begin{matrix} t_1 = 2 \\ t_2 = 1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} l_1 = 2^n \\ l_2 = 1^n \end{matrix}$

$p_n = \lambda\cdot 2^n + \beta\cdot 1^n$

$\begin{cases} p_1 = \lambda\cdot 2 + \beta = 3 \\ p_2 = \lambda\cdot 4 + \beta = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2\lambda = 4 \\ \lambda = 2 \\ \beta = -1 \end{matrix}$

$\Rightarrow p_n = 2\cdot 2^n - 1\cdot 1^n = 2^{n+1} - 1$

Ответ: $2^{n+1} - 1$

№303

$A = Mat_{n\times n}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 3 & 4 & 3 & & & & \vdots \\ 0 & 2 & 5 & 3 & & 0 & \\ \vdots & & 2 & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & 5 & 3 & 0 \\ & 0 & & & 2 & 5 & 3 \\ 0 & \cdots & & & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot \det A_{n-1\times n-1} - 2\cdot 3 \cdot \det A_{n-2\times n-2}$$

Получим рекуррентное соотношение $p_n = 5p_{n-1} - 6p_{n-2}$,

где $p_n = \det A_{n\times n}$. При этом $p_1 = 1$ и $p_2 = 4-6 = -2$

Попробуем найти тут 2 неколлинеарные посл-ти. Например геом. прогрессии.

$t^n = 5t^{n-1} - 6t^{n-2} \quad : t^{n-2}$

$t^2 = 5t - 6$

$t^2 - 5t + 6 = 0$

$D = 25 - 24 = 1$

$t = \frac{5\pm 1}{2} \quad t_1 = 3, \quad t_2 = 2 \Rightarrow \quad l_1 = 3^n, \quad l_2 = 2^n$

$p_n = \lambda \cdot 3^n + \beta \cdot 2^n$

$$\begin{cases} p_1 = \lambda\cdot 3 + \beta\cdot 2 = 1 \\ p_2 = \lambda\cdot 9 + \beta\cdot 4 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda\cdot 6 + \beta\cdot 4 = 2 \\ \lambda\cdot 9 + \beta\cdot 4 = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 9\lambda + 6\beta = 3 \\ 9\lambda + 4\beta = -2 \end{cases}$$

$3\lambda = -4 \qquad 2\beta = 5$

$\lambda = -\frac{4}{3} \qquad \beta = \frac{5}{2}$

$p_n = -\frac{4}{3}\cdot 3^n + \frac{5}{2}\cdot 2^n = -4\cdot 3^{n-1} + 5\cdot 2^{n-1}$

Ответ: $5\cdot 2^{n-1} - 4\cdot 3^{n-1}$.

№2.3

Нет, не является, т.к. нет обратного элемента.

Доказательство:

Предположим противное. Пусть обратный элемент существует. Тогда в частности (при $a=0$, $b=1$) у числа $\sqrt[3]{2}$ должен быть обратный, принадлежащий нашему множеству.

$$\sqrt[3]{2}\cdot(a+\sqrt[3]{2}\,b)=1$$

$$a+\sqrt[3]{2}\,b=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$a+2^{\frac{1}{3}}b=2^{-\frac{1}{3}}$$

$$b=\frac{2^{-\frac{1}{3}}-a}{2^{\frac{1}{3}}}=2^{-\frac{2}{3}}-\frac{a}{2^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow b\notin\mathbb{Q} \text{ противоречие.}$$

Значит наше множество не является полем.

№2.4.

a) $\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ ny & x \end{pmatrix} \middle| x,y\in\mathbb{Q}\right\}$, где n – фиксированное целое число

Чтобы множество было полем, в нем должно выполняться свойство коммутативности.

$$\begin{pmatrix} x & y \\ ny & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ nb & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ nb & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ ny & x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ax+nby & bx+ya \\ nya+nxb & nby+xa \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+nby & ay+bx \\ nbx+any & nby+ax \end{pmatrix}$$

Все элементы равны $\Rightarrow$ поле коммутативно по умножению

Нулевой элемент: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Противоположный элемент: $\begin{pmatrix} -x & -y \\ -ny & -x \end{pmatrix}$

Единичный элемент: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Чтобы $\exists$ обратный элемент, $\det A$ должен быть неравен 0.

$$\det A = \begin{vmatrix} x & y \\ ny & x \end{vmatrix} = x^2 - ny^2 \neq 0$$

$$(x - \sqrt{n}y)(x + \sqrt{n}y) \neq 0$$

$$\begin{cases} x \neq \sqrt{n}y \\ \cancel{x} \neq -\sqrt{n}y \end{cases}$$

Т.к. мы рассматриваем $x, y \in \mathbb{Q}$, чтобы эти равенства не выполнялись не должен извлекаться целый корень из n $\Rightarrow$ $n \neq a^2$, где $a \in \mathbb{N}$

Ответ: $n \neq a^2$, где $a \in \mathbb{N}$

б) Проводим аналогичные рассуждение и получаем $x \neq \pm\sqrt{n}y$

Т.к. мы рассматриваем $x, y \in \mathbb{R}$, чтобы эти равенства не выполнялись корень из n вообще не должен извлекаться $\Rightarrow$ $n < 0$.

Ответ $n < 0$.

№ 2.5 (20.3)

б) Формула $(1+i)^{4n} = (-1)\,2^{2n}$ неверна, т.к. при $n=2$ получаем $16 = -16$

Поэтому докажем формулу $(1+i)^{4n} = (-1)^n \cdot 2^{2n}$

Доказывать будем по индукции:

База: при $n=1$ $(1+i)^4 = -1 \cdot 2^2$

$(2i)^2 = -4$

$-4 = -4$

верно

Шаг $(1+i)^{4n+4} = (-1)^{n+1} \cdot 2^{2n+2}$

$(1+i)^{4n} \cdot (1+1)^4 = (-1)^n \cdot 2^{2n} \cdot -1 \cdot 2^2$

$(1+i)^4 = -1 \cdot 4$

$(2i)^2 = -4$

$-4 = -4$

■

№2.6 (20.7)

б) Рассмотрим сумму:

$a+bi+c+di=a+c+i(b+d)$

Чтобы число было вещественным, его мнимая часть должна равняться 0

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=-d \quad (1) \\ b=d=0 \quad (2) \end{array}\right.$

Рассмотрим произведение

$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci-bd=ac-bd+i(ad+bc)$

Опять же получаем $ad=-bc$

1 случай: $b=-d$
Получаем
$a=c \Rightarrow$ сопряженные

2 случай: $b=d=0$
Получаем
$ad=-bc=0 \Rightarrow$ Оба числа вещественные

№2.7 (20.8)

а) $(a+ib)^2=a-ib$

$a^2+2iab-b^2=a-ib$

$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}\begin{cases} a^2-b^2=a \\ 2iab=-ib \end{cases}$

Из 2: $2a=-1$

$a=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{4}-b^2=-\frac{1}{2}$

$b^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

$b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

№2.8(20.10)

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1i & a_1-b_1i & a \\ a_2+b_2i & a_2-b_2i & b \\ a_3+b_3i & a_3-b_3i & c \end{vmatrix} \underset{\text{1 столбец}}{\overset{\substack{\text{2 столбец}\\ \downarrow \\ \text{2 столбец} \\ +}}{=}} \begin{vmatrix} a_1+b_1i & 2a_1 & a \\ a_2+b_2i & 2a_2 & b \\ a_3+b_3i & 2a_3 & c \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{2 столбец} \\ \downarrow \\ \frac{1}{2}\cdot\text{2 столбец} \\ \text{1 столбец} \to \text{1 столбец} - \text{2 столбец}}}{=}$$

$$= 2\begin{vmatrix} b_1i & a_1 & a \\ b_2i & a_2 & b \\ b_3i & a_3 & c \end{vmatrix}$$

Заметим, что каждое слагаемое определителя будет чисто мнимым числом, т.к. i будет входить в каждое слагаемое в 1 степени (ведь множители с i есть только в 1 столбце, а мы можем взять только 1 множитель от туда, обязательно должны взять ровно 1.)

А значит и весь определитель будет чисто мнимым числом.

■