Матрицы ДЗ 1 Панфилов Борис

№ 1

1) Эрмитовой

Т.е $A^* = A$

$$A^* = (I - \alpha u u^*)^* = I - \bar{\alpha} u u^* \qquad I - \bar{\alpha} u u^* = I - \alpha u u^*$$
$$A = I - \alpha u u^* \qquad \Rightarrow \quad (\alpha - \bar{\alpha}) u u^* = 0$$

Т.к. $\|u\|_2 = 1$ в ней есть хотя бы 1 ненулевой элемент. Пусть $u_i \neq 0$, тогда если $B = uu^*$, то $b_{ii} \neq 0$

Но т.к. в уравнении справа нулевая матрица, получаем

$(\alpha - \bar{\alpha}) b_{ii} = 0 \Rightarrow \alpha - \bar{\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha = \bar{\alpha} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$

Ответ: $\alpha \in \mathbb{R}$.

2) косоэрмитовой

Т.е. $A^* = -A$

$$A^* = I - \bar{\alpha} u u^* \qquad \Rightarrow \quad I - \bar{\alpha} u u^* = -I + \alpha u u^*$$
$$-A = -I + \alpha u u^*$$

$$2I = (\alpha + \bar{\alpha}) u u^*$$

$$I = \left(\frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}\right) u u^*$$

Т.к. равенство должно выполняться $\forall u \in \mathbb{C}^n$, т.что $\|u\|_2 = 1$

возьмем $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Получаем, что

$$I = \left(\frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

— очевидно не выполняется ни при каких $\alpha \Rightarrow \alpha \in \varnothing$.

Ответ: $\alpha \in \varnothing$.

CamScanner

3) Унитарной

т.е $A^* = A^{-1}$

~~$A^* = I - \bar{\alpha}uu^*$~~ Должно выполнятся $A^*A = AA^* = I$

$A^*A = (I - \bar{\alpha}uu^*)(I - \alpha uu^*) = I - \alpha I uu^* - \bar{\alpha} uu^* I + \alpha\bar{\alpha} u \underbrace{u^* u}_{1} u^* =$

должно вып.

$= I - \alpha uu^* - \bar{\alpha} uu^* + \alpha\bar{\alpha} uu^* = I$

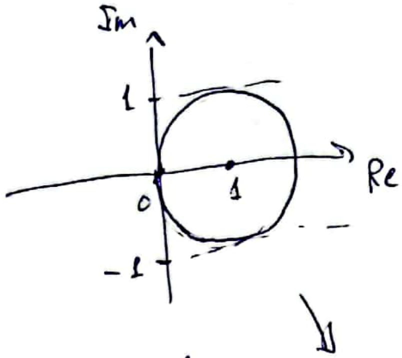
$(\alpha + \bar{\alpha} - \alpha\bar{\alpha}) uu^* = 0 \Rightarrow \alpha + \bar{\alpha} - \alpha\bar{\alpha} = 0$

Пусть $\alpha = a + bi$

$a + bi + a - bi - a^2 - b^2 = 0$

$a^2 - 2a + 1 + b^2 = 1$

$(a-1)^2 + b^2 = 1$



$\Downarrow$

Ответ:

4) Нормальной

т.е $A^*A = A^*A$

$A^*A = I - \alpha uu^* - \bar{\alpha} uu^* + \alpha\bar{\alpha} uu^*$

$A^*A = I - \alpha uu^* - \bar{\alpha} uu^* + \bar{\alpha}\alpha uu^*$

равны всегда, т.к. перемножение скаляров коммутативно

Ответ: $\alpha \in \mathbb{C}$ любые.

№2

$e = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$A = ee_1^T \Rightarrow$ найти $\|A\|_{2023}$

$$A = ee_1^T = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(1\,0\,0) = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$Ax = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_1\\x_1\end{pmatrix}$$

$$\|A\|_{2023} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p = \sup_{\|x\|_p=1} \sqrt[2023]{3} \cdot x_1$$

Пусть $x_1 > 1$, т.е $x_1 = 1 + a$, где $a > 0$

Тогда $\|x\|_p = \sqrt[p]{(1+a)^p + \ldots} > 1$

$\Rightarrow x_1 \leq 1$

Пример: $x = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \|x\|_p = 1 \Rightarrow \|A\|_{2023} = \sqrt[2023]{3}$.

Ответ: $3^{\frac{1}{2023}}$.

№3

а) Д-ть, что $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$

Перепишем нер-ва раскрыв смысл норм:

$$\sqrt[2]{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2} \leq |x_1| + \ldots + |x_n| \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt[2]{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$$

все части двойного нер-ва положительные $\Rightarrow$ мы можем возвести все в квадрат:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + 2\sum_{i<j} |x_i|\cdot|x_j| \leq n \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

очев, т.к. справа добавляется $\frac{n(n-1)}{2}$ ~~[illegible]~~ неотр. слагаемых.

$\Updownarrow$

$$2\sum_{i<j} |x_i|\cdot|x_j| \leq (n-1)\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

$$0 \leq \sum_{i<j} (|x_i| - |x_j|)^2$$

сумма квадратов больше нуля $\Rightarrow$ и предыдущ. нер-ва верны.

■

В первом нер-ве получаем равенство, если

$$\sum_{i<j} |x_i| \cdot |x_j| = 0 \iff$$ векторы у которых все эл-ты, кроме 1 равны 0.

В втором нер-ве получаем равенство, если

$$\sum_{i<j} (|x_i| - |x_j|)^2 = 0 \iff |x_1| = \ldots = |x_n|$$

вот такие векторы подходят.

б) Д-ть, что $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_2 \le \|A\|_1 \le \sqrt{m}\|A\|_2 \quad \forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}$

$$\|A\|_2 = \sup_{x\neq 0}\frac{\overbrace{\|Ax\|_2}^{\le \|Ax\|_1}}{\underbrace{\|x\|_2}_{\ge \frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1}} \le \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}\cdot\sqrt{n} = \|A\|_1\cdot\sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_2 \le \|A\|_1$$

$$\|A\|_2 = \sup_{x\neq 0}\frac{\overbrace{\|Ax\|_2}^{\ge \frac{1}{\sqrt{m}}\|Ax\|_1}}{\underbrace{\|x\|_2}_{\le \|x\|_1}} \ge \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{m}} = \frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1$$

$$\Rightarrow \|A\|_1 \le \sqrt{m}\|A\|_2.$$

$\blacksquare$

№4

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{n} & 0 \end{pmatrix}, \; n \in \mathbb{N}$

а) Рассмотрим Чебышевскую норму

$\|A_n - A\|_c = \left|\frac{1}{n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$, т.к. мы знаем, что сх-ть по разным нормам эквив. А значит по любой мы получим верный предел.

в) Найти собственное разложение $A_n = S_n \Lambda_n S_n^{-1}$

$\det(A_n - tE) = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ \frac{1}{n} & -t \end{vmatrix} = t^2 - \frac{1}{n}$. корни: $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{n}}$

V_1:

$A_n - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{n}} & 1 \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ ФСР: $\begin{pmatrix} \sqrt{n} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow S_n = \begin{pmatrix} \sqrt{n} & \sqrt{n} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

V_2

$A_n - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & 1 \\ \frac{1}{n} & +\frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ ФСР: $\begin{pmatrix} \sqrt{n} \\ -1 \end{pmatrix}$

Найдем S_n^{-1}

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \sqrt{n} & \sqrt{n} & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{n}} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{n}} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2\sqrt{n}} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

CamScanner

$$\begin{pmatrix} \sqrt{n} & \sqrt{n} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{n}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{n}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{n} & 0 \end{pmatrix}$$ - Self check

$$\left\| \begin{pmatrix} \sqrt{n} & \sqrt{n} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\|_C = \sqrt{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$ $\Rightarrow$ не у всех из этих матриц существует предел

Это так же можно заметить из того, что у матрицы A нет собственного разложения.

c) Найти разложение Шуре $A_n = U_n T_n U_n^{-1}$

Как мы уже знаем у A_n есть с.з $\frac{1}{\sqrt{n}}$ с собств. подпр. порожд. вектором $\begin{pmatrix} \sqrt{n} \\ 1 \end{pmatrix}$

Дополним $\underbrace{}_{\text{и отнормируем}}$ вектор до ортогональной. матрицы:

$$V = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \begin{pmatrix} \sqrt{n} & -1 \\ 1 & \sqrt{n} \end{pmatrix}$$

$$V^* A_n V = \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} \sqrt{n} & 1 \\ -1 & \sqrt{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{n} & -1 \\ 1 & \sqrt{n} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \sqrt{n} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{n} & -1 \\ 1 & \sqrt{n} \end{pmatrix} = \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n} & n - \frac{1}{n} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{n-1}{n} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \cdot 1 \Rightarrow U_1 = (1) \quad T_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

т.е. $V^* A_n V = I \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{n-1}{n} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} \cdot I^*$

$$\Rightarrow U = V = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \begin{pmatrix} \sqrt{n} & -1 \\ 1 & \sqrt{n} \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{n-1}{n} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}$$

// //

CamScanner

и 3-го

1 Нетрудно заметить, что нормы Чебышева и для U_n, T_n и для U_n^{-1} равны 1, т.к. $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \to 1$ и $\frac{n-1}{n} \to 1$ соответственно. $\Rightarrow$ У каждой матрицы есть предел.

№5

A - нормальная.

Доказать, что

$A^* = ~~AA~~\ A^{-1} \Leftrightarrow$ все собств. значения по модулю равны 1.

A норм $\Rightarrow$ A - унитарно диагонализуема

т.е. $\exists U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, т.что $A = U \Lambda U^*$, где Λ - диаг. с с.з. на диагонали.

$(\Rightarrow)$ $I = A^* A = U \Lambda^* U^* U \Lambda U^* = U \Lambda^* \Lambda U^*$

$\Rightarrow \Lambda^* \Lambda = I$, а это и означает, что все с.з по модулю равны 1, т.к. Λ - диаг с с.з. на диаг.

$(\Leftarrow)$ $A^* A = U \Lambda^* \Lambda U^* = U U^* = I \Rightarrow A^* = A^{-1}$

// т.к. $\Lambda^* \Lambda = I$ //

∎

№6

$a_{ij} = ij + j = (i+1)j = u_i v_j$, $u_i \in \mathbb{R}$ $v_j \in \mathbb{R}$

То есть по сути наша матрица является произведением

$A = uv^T$ столбца на строку.

$\Rightarrow rk A \leq 1$

Очевидно, что любой не единичный минор ненулевой $\Rightarrow rk A = 1$

Значит в SVD будет всего 1 ненулевое значение.

Отсюда немедленно можно понять, что компактным SVD будет например

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1+1}{b} \\ \frac{2+1}{b} \\ \vdots \\ \frac{m+1}{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} bc \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & \frac{2}{c} & \dots & \frac{n}{c} \end{pmatrix}$$

где $b = \sqrt{(1+1)^2 + (2+1)^2 + \dots + (m+1)^2} = \sqrt{\frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6} - 1}$ - нормирующие коэффициенты для u и v

$c = \sqrt{1^2 + 2^2 + \dots + n^2} = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

По компактному можем выписать и полное:

$$A = \underset{m\times m}{\begin{pmatrix} \frac{1+1}{b} & & \\ \frac{2+1}{b} & & \\ \vdots & u_2 \dots u_m & \\ \frac{m+1}{b} & & \end{pmatrix}} \underset{m\times n}{\begin{pmatrix} bc & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}} \cdot \underset{n\times n}{\begin{pmatrix} \frac{1}{c} & \frac{2}{c} & \dots & \frac{n}{c} \\ & v_2^* & & \\ & \vdots & & \\ & v_n^* & & \end{pmatrix}}.$$

№7

а) $\|A\|_2 \le \|A\|_F \le \sqrt{n}\|A\|_2$

$$\|\Sigma\|_2 \le \|\Sigma\|_F \le \sqrt{n}\|\Sigma\|_2$$

$$\sigma_1 \le \sqrt{\sigma_1^2+\ldots+\sigma_n^2} \le \sqrt{n}\,\sigma_1$$

$$\sigma_1^2 \le \sigma_1^2+\ldots+\sigma_n^2 \le \underbrace{\sigma_1^2+\ldots+\sigma_1^2}_{n}$$

Очевидно, что нер-ва выполняются, т.к. $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \ldots \ge \sigma_n \ge 0$

б) Как описано выше

$\|A\|_F = \sqrt{n}\|A\|_2 \iff \sigma_1^2+\ldots+\sigma_n^2 = \sigma_1^2+\ldots+\sigma_1^2 \iff \sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_n$

Другими словами матрица Σ из SVD разложения имеет на диагонали ~~одинаковые~~ одинаковые числа.
Значит она является унитарной, умноженной на константу.

Т.к. произведение унитарных матриц $U\Sigma V^*$ будет унитарной матрицей, получаем, что A - унитарная умноженная на константу (ту же, что и Σ)

№8

а) A - нормальная $\Rightarrow$ В разложении Шура $A = U\Lambda U^*$, Λ - диагональная с с.з. на диагонали.
То есть ~~ед~~ отличие от SVD разложения сейчас заключается в том, что в матрице Λ диагональные элементы не упорядочены по абсолютному значению и к тому же могут быть отрицательны. Поправим это.
Вспомним с курса линала об элементарных преобразованиях 2-го и 3-го рода. Как мы помним любое эл. преобразование строк есть домножение на какую-то матрицу слева.

Причем в случае преобразований только 2-го и 3-го рода матрица эл. преобр. будет унитарной, в случае когда ~~[illegible]~~ в преобр. 3-го рода мы делаем лишь умножение на -1.

Пусть B - матрица эл преобр приводящая Λ к виду, в которой все ~~[illegible]~~ числа на диагонали матриц и упорядочены.

Тогда $A = UB^{-1}B\Lambda U^*$ будет SVD разложением A

// UB^{-1} ортог, т.к. B^{-1} ортог и произведение ортог матриц - ортог матр. //

в) Напрямую следует из рассуждений выше.

Ведь мы как раз таки взяли модули всех с.з и расставили их в порядке убывания на диагонали.

с) Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Проверим, что она не яв-ся нормальной:

$$A^*A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{не норм.}$$

$$AA^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Теперь найдем ее наибольшие по модулю собств. зн. и синг. число:

$$\det\begin{pmatrix} 2-t & 1 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} = (2-t)(1-t) = t^2 - 3t + 2$$

$\Rightarrow$ ст. с знач ~~[illegible]~~ $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$$\det\begin{pmatrix} 5-t & 1 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix} = (5-t)(1-t) - 1 = t^2 - 6t + 4$$

$\Rightarrow$ ст синг. знач $\sigma_1^2 = \frac{6+\sqrt{20}}{2} = 3+\sqrt{5}$

$\frac{3+\sqrt{5}}{2} \vee \sqrt{3+\sqrt{5}}$

$14 + 6\sqrt{5} \vee 12 + 4\sqrt{5}$

$2\sqrt{5} \vee -2$ очевидно они не равны.

CamScanner