Математическая статистика. Домашнее задание №12

Lev Khoroshansky

Задача №10.

Целиком сделана в предыдущем ДЗ.

Задача №9.

По условию, мы имеем распределение B(1/2), откуда получаем

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X) &= \binom{\theta}{X} \cdot \frac{1}{2^\theta} \\
L(\theta) &= \ln\left[\frac{\theta!}{X!\,(\theta - X)!} \cdot \frac{1}{2^\theta}\right] = \ln\left[\frac{(\theta - X + 1)\dots\theta}{X!}\right] - \theta\ln 2 = \sum_{k=0}^{X-1} \ln[\theta - k] - \theta \ln 2 \\
\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta} &= \sum_{k=0}^{X-1} \frac{1}{\theta - k} - \ln 2
\end{aligned}$$

Что не очень то и помогает. Рассмотрим два ближайших значения θ:

$$\begin{aligned}
\binom{\theta+1}{X} \cdot \frac{1}{2^{\theta+1}} \quad &\vee \quad \binom{\theta}{X} \cdot \frac{1}{2^\theta} \\
\frac{(\theta+1)!}{X!(\theta+1-X)!} \quad &\vee \quad \frac{2\theta!}{X!(\theta - X)!} \\
\theta + 1 \quad &\vee \quad 2\theta + 2 - 2X \\
2X - 1 \quad &\vee \quad \theta
\end{aligned}$$

$\theta < 2X - 1$: везде будет стоять знак $>$, то есть имеет смысл увеличивать θ, чтобы получить результат больше.

$\theta > 2X - 1$: везде будет стоять знак $<$, то есть дальнейшее увеличение θ будет только уменьшать результат.

Получаем ответ: $\widehat{\theta} = 2X - 1$.
(Кажется, что ещё подходит $\widehat{\theta} = 2X$, но максимумов может быть несколько, поэтому всё хорошо.)