Математическая статистика.
Домашнее задание №13

Lev Khoroshansky

Задача №1 (b)

Пусть дана выборка $X_1, \ldots, X_n$:

$$X_k = \begin{cases} 1, & \theta \in (0;1) \\ 0, & 1-\theta \end{cases}$$

В качестве оценки θ возьмём выборочное среднее: $\widehat{\theta} = \overline{X}$, — тогда мы имеем асимптотическую нормальность, согласно ЦПТ (или же теореме Муавра-Лапласа):

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\theta\,(1-\theta)}}\,(\widehat{\theta}-\theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0;1), \qquad \text{где } \sqrt{\theta\,(1-\theta)} = \sigma(\theta)$$

Воспользуемся вторым методом стабилизации дисперсии:

$$\sigma(\theta)\,h'(\theta) = 1 \quad \longrightarrow \quad h(t) = \int \frac{dt}{\sqrt{t\,(1-t)}} = \arcsin(2t-1)$$

Получаем

$$\sqrt{n}\,(\arcsin(2\widehat{\theta}-1) - \arcsin(2\theta-1)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0;1)$$

Зажмём в интервал:

$$\mathbb{P}\left(-z_\alpha < \sqrt{n}\,(\arcsin(2\widehat{\theta}-1) - \arcsin(2\theta-1)) < z_\alpha\right) \quad \longrightarrow \quad \Phi(z_\alpha) - \Phi(-z_\alpha) = 1-\alpha$$

Итоговый интервал для θ:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sin\left(\arcsin(2\widehat{\theta}-1) - \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}}\right)+1}{2} < \theta < \frac{\sin\left(\arcsin(2\widehat{\theta}-1) + \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}}\right)+1}{2}\right) \to 1-\alpha$$

Задача №2 (c)

Мы знаем функцию распределения $X_{(n)}$:

$$F_{X_{(n)}}(t) = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n$$

Откуда получаем

$$\mathbb{P}(t_1 < X_{(n)} \leqslant t_2) = \left(\frac{t_2}{\theta}\right)^n - \left(\frac{t_1}{\theta}\right)^n$$

Для значимости α возьмём

$$t_1 = \theta \cdot \sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}}, \quad t_2 = \theta \cdot \sqrt[n]{1 - \frac{\alpha}{2}}$$

Тогда имеем

$$\mathbb{P}(t_1 < X_{(n)} \leqslant t_2) = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha$$

Итоговый интервал для θ:

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}}} < \theta \leqslant \frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{1 - \frac{\alpha}{2}}}\right) = 1 - \alpha$$

Задача №3

b. Из предыдущего пункта мы знаем, что для большей вероятности необходимо брать симметричный отрезок. Для начала поймём, как длина выражается через всё остальное:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - \frac{z_\alpha \cdot 1}{\sqrt{n}} < \theta \leqslant \overline{X} + \frac{z_\alpha \cdot 1}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \quad \longrightarrow \quad L = \frac{2\, z_\alpha}{\sqrt{n}}$$

Можем выразить z_α через L:

$$z_\alpha = \frac{\sqrt{n} \cdot L}{2}$$

Итоговый интервал для θ:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - \frac{L}{2} < \theta \leqslant \overline{X} + \frac{L}{2}\right) = 1 - \alpha$$

c. Воспользуемся концами распределения, то есть

$$1 - \Phi\left(z_\alpha\right) \leqslant \frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad \Phi(-z_\alpha) \leqslant \frac{\alpha}{2}$$

Преобразуем:

$$\Phi\left(z_\alpha\right) \geqslant 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Следовательно, используя предыдущий пункт,

$$\frac{\sqrt{n} \cdot L}{2} \geqslant z_\alpha \quad \longrightarrow \quad n \geqslant \left(\frac{2\, z_\alpha}{L}\right)^2$$

Откуда имеем

$$n = \left\lceil \left(\frac{2\, z_\alpha}{L}\right)^2 \right\rceil$$

Задача №12

Критическая область имеет следующий вид: $K = \{X_1 > 3\}$. Вычислим значимость:

$$\alpha = \mathbb{P}_{\lambda_0}\left(X_1 \in K\right) = \int\limits_3^{+\infty} \lambda_0 \, \exp\left(-\lambda_0\, t\right)\, dt = \int\limits_3^{+\infty} \exp\left(-t\right)\, dt = \exp(-3)$$

И мощность критерия:

$$1 - \beta = \mathbb{P}_{\lambda_1}(X_1 \in K) = \int\limits_3^{+\infty} \lambda_1 \, \exp\left(-\lambda_1\, t\right)\, dt = 3\int\limits_3^{+\infty} \exp\left(-3t\right)\, dt = 3^{-1}\, \exp(-9)$$