Математический анализ 2.
Домашняя работа №4

Лев Хорошанский, 176 группа, 5 вариант

Задача №5.1

Воспользуемся формулой для площади поверхности, заданной явно в виде $z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\begin{aligned} A &= \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy \\ &= \iint\limits_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}\; dx\, dy \\ &= \sqrt{2} \iint\limits_D dx\, dy \end{aligned}$$

Поверхность z является конической, а её пересечение с цилиндром представляет собой круг:

$$x^2 + y^2 = 2x \;\;\rightarrow\;\; x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \;\;\rightarrow\;\; (x-1)^2 + y^2 = 1$$

Перейдём к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi; \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \rightarrow r = 2\cos\varphi, \\ |J| = r. \end{cases}$$

Возвращаемся к исходному интегралу:

$$A = \sqrt{2} \iint\limits_D dx\, dy = 2\sqrt{2} \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r\, dr = 4\sqrt{2} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi = \pi\sqrt{2}$$

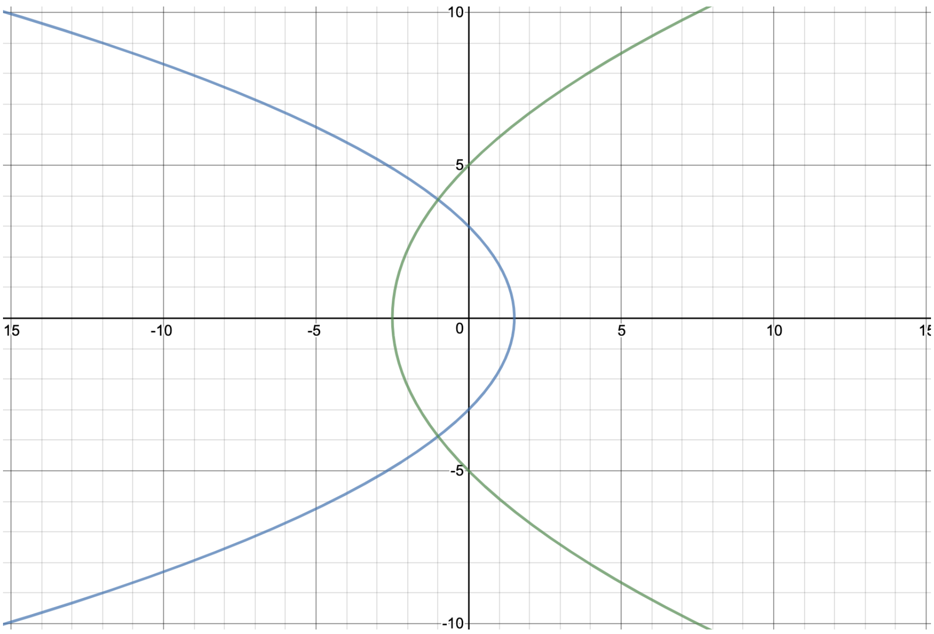
Ответ: $\pi\sqrt{2}$.

Задача №5.2

Площадь области находится с помощью интеграла

$$A = \iint\limits_D dx\, dy$$

Для начала поймём, по какой области происходит интегрирование:



Графики $y^2 = 10x + 25$ и $y^2 = 9 - 6x$. Точки пересечения: $(-1; -\sqrt{15})$ и $(-1; \sqrt{15})$.

Множество D является элементарным относительно оси Ox:

$$D = \left\{(x, y) \colon -\sqrt{15} \leq y \leq \sqrt{15}, \quad \frac{1}{10}(y^2 - 25) \leq x \leq \frac{1}{6}(9 - y^2)\right\}$$

Применим теорему об интегрируемой функции на множестве, элементарном относительно оси:

$$A = \iint\limits_D dx\, dy = \int\limits_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} dy \int\limits_{\frac{1}{10}(y^2-25)}^{\frac{1}{6}(9-y^2)} dx = \int\limits_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} \left(4 - \frac{4y^2}{15}\right) dy = 16\sqrt{\frac{5}{3}}$$

Ответ: $16\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Задача №5.3

Сначала найдём массу фигуры, используя цилиндрические координаты:

$$
\begin{aligned}
M &= \iiint\limits_G \rho(x;y;z)\,dx\,dy\,dz \\
&= \begin{bmatrix} x = r\cos(\varphi), \\ y = r\sin(\varphi), \\ z = z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 0 \le z \le x^2 - y^2 = r^2(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)) = r^2\cos(2\varphi), \\ 0 \le r \le 1, \\ 0 \le r^2\cos(2\varphi) \implies 0 \le \cos(2\varphi) \implies -\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}, \\ |J| = r \end{cases} \\
&= \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^1 r\,dr \int\limits_0^{r^2\cos(2\varphi)} \rho_0 z\,dz = \frac{\rho_0}{2} \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^1 r^5\cos^2(2\varphi)\,dr \\
&= \frac{\rho_0}{12} \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2(2\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi\,\rho_0}{48}
\end{aligned}
$$

Теперь разберёмся с каждой из координат по отдельности:

$$
\begin{aligned}
x_C &= \frac{1}{M} \iiint\limits_G x \cdot \rho(x;y;z)\,dx\,dy\,dz = \frac{\rho_0}{M} \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^1 r \cdot r\cos(\varphi)\,dr \int\limits_0^{r^2\cos(2\varphi)} z\,dz \\
&= \frac{\rho_0}{2M} \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^1 r^6\cos(\varphi)\cos^2(2\varphi)\,dr = \frac{\rho_0}{14M} \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(\varphi)\cos^2(2\varphi) d\varphi \\
&= \frac{4\sqrt{2}\,\rho_0}{105M} = \frac{64\sqrt{2}}{35\pi}
\end{aligned}
$$

Заметим, что относительно оси Ox тело симметрично, ввиду чего $y_C = 0$, тогда найдём z_C:

$$
\begin{aligned}
z_C &= \frac{1}{M} \iiint\limits_G z \cdot \rho(x;y;z)\,dx\,dy\,dz = \frac{\rho_0}{M} \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^1 r\,dr \int\limits_0^{r^2\cos(2\varphi)} z \cdot z\,dz \\
&= \frac{\rho_0}{3M} \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^1 r^7\cos^3(2\varphi)\,dr = \frac{\rho_0}{24M} \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^3(2\varphi) d\varphi \\
&= \frac{\rho_0}{36M} = \frac{4}{3\pi}
\end{aligned}
$$

Ответ: $\left(\dfrac{64\sqrt{2}}{35\pi},\ 0,\ \dfrac{4}{3\pi}\right)$.

Задача №5.4

У однородных тел плотность $\rho(x;y;z) = 1$. Момент инерции относительно Oz находится так:

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \iiint\limits_G d_z^2\, \rho(x;y;z)\, dx\, dy\, dz \\ &= \iiint\limits_G (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz \end{aligned}$$

Наша область интегрирования симметрична относительно оси Oz, причём достаточно рассмотреть лишь один координатный октант, умножив результат на 4 ($z \geq 0$). Воспользуемся цилиндрической заменой:

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \\ x + y \leq 1 \\ x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} 0 \leq z \leq r^2 \\ 0 \leq r \leq (\cos(\varphi) + \sin(\varphi))^{-1} \\ 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \\ |J| = r \end{cases}$$

Теперь посчитаем:

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \iiint\limits_G (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz = 4\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{(\cos(\varphi)+\sin(\varphi))^{-1}} r^2 \cdot r\, dr \int\limits_0^{r^2} dz \\ &= 4\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{(\cos(\varphi)+\sin(\varphi))^{-1}} r^5\, dr = \frac{4}{6}\int\limits_0^{\pi/2} (\cos(\varphi)+\sin(\varphi))^{-6}\, d\varphi = \frac{14}{45} \end{aligned}$$

Ответ: $\dfrac{14}{45}$.

Задача №5.5

Заметим, что нам дано параметрическое задание координат:

$$\begin{cases} x(t) = a(\cos(t) + t \cdot \sin(t)) \\ y(t) = a(\sin(t) - t \cdot \cos(t)) \end{cases}$$

В этом случае криволинейный интеграл первого рода считается так:

$$\int\limits_{\Gamma} (x^2 + y^2)\, ds = \int\limits_{0}^{2\pi} (x^2 + y^2) \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}\ dt$$

Выполним необходимые вычисления по отдельности:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2(\cos(t) + t \cdot \sin(t))^2 + a^2(\sin(t) - t \cdot \cos(t))^2 \\ &= a^2(\cos^2(t) + 2t \cdot \cos(t)\sin(t) + t^2 \cdot \sin^2(t) + \sin^2(t) - 2t \cdot \cos(t)\sin(t) + t^2\cos^2(t)) \\ &= a^2(t^2 + 1) \\ \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2} &= a \cdot \sqrt{(-\sin(t) + \sin(t) + t \cdot \cos(t))^2 + (\cos(t) - \cos(t) + t \cdot \sin(t))^2} = at \end{aligned}$$

Итого:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Gamma} (x^2 + y^2)\, ds &= \int\limits_{0}^{2\pi} (x^2 + y^2) \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}\ dt \\ &= \int\limits_{0}^{2\pi} a^2(t^2 + 1) \cdot at\, dt = a^3 \int\limits_{0}^{2\pi} (t^3 + t)\, dt \\ &= 2\pi^2 a^3(1 + 2\pi^2) \end{aligned}$$

Ответ: $2\pi^2 a^3(1 + 2\pi^2)$.

Задача №5.6

Параметризуем кривую, перейдя к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \end{cases} \to \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 = cz, \\ \dfrac{y}{x} = \tan(\varphi) = \tan\left(\dfrac{z}{c}\right) \end{cases} \to \begin{cases} z = c\varphi \\ r^2 = c^2\varphi \end{cases}$$

Так как $0 \le z \le z_0$, то $0 \le \varphi \le \dfrac{z_0}{c}$. Итоговый вид замены:

$$\begin{cases} x = c\sqrt{\varphi} \cdot \cos(\varphi) \\ y = c\sqrt{\varphi} \cdot \sin(\varphi) \\ z = c\varphi \end{cases}$$

Заметим, что длину можно вычислить с помощью интеграла

$$L = \int\limits_{\Gamma} 1 \cdot ds = \int\limits_0^{z_0/c} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}\ d\varphi$$

Вычислим подкоренное выражение:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 &= c^2 \cdot \left(\frac{\cos(\varphi)}{2\sqrt{\varphi}} - \sqrt{\varphi}\sin(\varphi)\right)^2 = c^2 \cdot \left(\frac{\cos^2(\varphi)}{4\varphi} - \cos(\varphi)\sin(\varphi) + \varphi \cdot \sin^2(\varphi)\right) \\ \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 &= c^2 \cdot \left(\frac{\sin(\varphi)}{2\sqrt{\varphi}} + \sqrt{\varphi}\cos(\varphi)\right)^2 = c^2 \cdot \left(\frac{\sin^2(\varphi)}{4\varphi} + \cos(\varphi)\sin(\varphi) + \varphi \cdot \cos^2(\varphi)\right) \\ \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 &= c^2 \end{aligned}$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} L &= \int\limits_0^{z_0/c} \sqrt{c^2 \cdot \left(\varphi + 1 + \frac{1}{4\varphi}\right)}\ d\varphi = c\int\limits_0^{z_0/c} \sqrt{\frac{4\varphi^2 + 4\varphi + 1}{4\varphi}}\ d\varphi \\ &= c\int\limits_0^{z_0/c} \left(\sqrt{\varphi} + \frac{1}{2\sqrt{\varphi}}\right) d\varphi = \frac{\sqrt{c\,z_0}}{3\,c}\,(3c + 2z_0) \end{aligned}$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{c\,z_0}}{3\,c}\,(3c + 2z_0)$.