Математическая статистика.
Домашнее задание №10

Lev Khoroshansky

Задача №11.

Пусть $g(X) = X$, тогда:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}g(X_k) &= \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\rho(x)\,dx \\
&= \int\limits_{a}^{+\infty} x\,e^{-(x-a)}\,dx \\
&= e^a \int\limits_{a}^{+\infty} x\,e^{-x}\,dx \\
&= e^a(a+1)e^{-a} \\
&= a+1
\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\mathbb{E}g(X_k) = \frac{g(X_1) + \cdots + g(X_n)}{n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \overline{X}$$

Откуда следует, что

$$a = \overline{X} - 1$$

Задача №12.

Введём следующие случайные величины:

$$Y_k = \begin{cases} 1, & X_k \in (a; b] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что $\dfrac{m(X)}{n} = \dfrac{1}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k = \overline{Y}$, тогда попробуем решить в одну строчку:

$$\mathbb{E}\left[\frac{m(X)}{n}\right] = \frac{1}{n} \cdot \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} Y_k\right] = \mathbb{E}Y_k \implies \frac{m(X)}{n} = \overline{Y} \xrightarrow[\text{ЗБЧ}]{\mathbb{P}} \mathbb{E}Y_k = \mathbb{P}(X_k \in (a; b]) = F(b) - F(a)$$

Задача №7 (при $k = 1$).

Имеем $g(X) = X$, тогда

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}g(X_k) &= \int\limits_{\mathbb{R}} x\rho(x)\,dx \\
&= \int\limits_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,dx \\
&= \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} d(\lambda x) \\
&= \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{+\infty} u e^{-u}\,du \\
&= \frac{1}{\lambda}\cdot\Gamma(2) \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

Откуда $\dfrac{1}{\lambda} = \overline{X}$, в то время как $\lambda = \dfrac{1}{\overline{X}}$.