Дифференциальные уравнения.
Дополнительное домашнее задание

Lev Khoroshansky

Задача 1. Начнём с вычисления собственных значений:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 12 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \;\to\; (\lambda^2 + 36)(\lambda - \alpha) = 0 \;\to\; \begin{cases} \lambda_1 = 6i \\ \lambda_2 = -6i \\ \lambda_3 = \alpha \end{cases}$$

Заметим, что у λ_1 и λ_2 вещественные части равны нулю, в то время как у λ_3 отсутствует мнимая часть, а вещественная в точности равна α. Также, мы можем отметить, что x и y не зависят от z.

Далее мы будем пользоваться теоремой об устойчивости по первому приближению без явного на то указания:

$\underline{\alpha > 0}$: имеем собственное значение с положительной вещественной частью — точка не является устойчивой по Ляпунову (и, как следствие, асимптотически устойчивой).

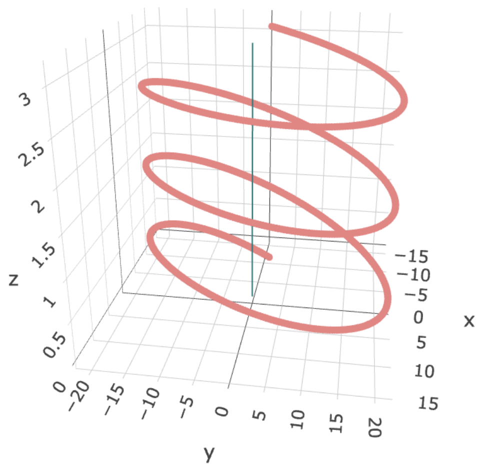
$\underline{\alpha < 0}$: решим уравнение относительно z:

$$\dot{z} = \alpha z \;\;\to\;\; z(t) = C_z\, e^{\alpha\, t}$$

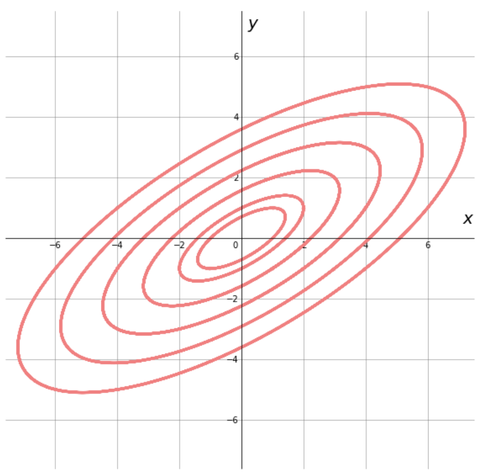
Видно, что $z \to 0$ при $t \to +\infty$ в силу того, что $\alpha < 0$, а оставшиеся две переменные образуют эллипсы. Таким образом, при $t \to +\infty$ мы имеем пружину, которая бесконечно долго стремится к плоскости $z = 0$.

В данном случае, особая точка является устойчивой по Ляпунову, но не является устойчивой асимптотически (так как x и y лежат на подобии эллипса и не имеют предела), что было доказано на лекциях.

$\underline{\alpha = 0}$: здесь всё аналогично предыдущему случаю, только центр целиком спроецирован на плоскость $z = 0$, то есть имеет место устойчивость по Ляпунову без устойчивости асимптотически.



Фазовый портрет системы при $\alpha < 0$.



Фазовый портрет системы при $\alpha = 0$.

Ответ: a. таких значений нет.

b. $\alpha \leqslant 0$.

Задача 2. Найдём характеристический полином:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\to\; \lambda^2 - ab = 0$$

Рассмотрим по отдельности все возможные значения ab:

$\underline{ab = 0}$: $\underline{a = 0, b = 0}$: Решим систему:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\to\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

В данном случае, x и y постоянны на всём фазовом пространстве, откуда можем сделать вывод, что решения будут ограниченными.

$\underline{a = 0, b \neq 0}$: Найдём решения:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\to\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ (bc)\, t + d \end{pmatrix}$$

Если $c \neq 0$, то y представляет из себя прямую, ограничить которую нельзя. Следовательно, ограниченность имеет место только при $c = 0$, потому что решения будут постоянными.

$\underline{a \neq 0, b = 0}$: Данный случай аналогичен предыдущему — ограниченность при $d = 0$.

$\underline{ab < 0}$: Имеем два комплексных собственных значения с нулевой вещественной частью:

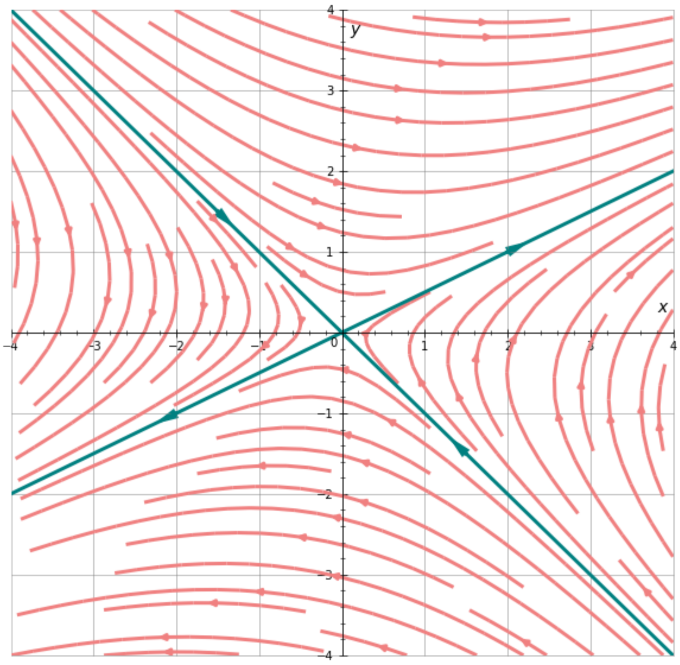
$$\begin{cases} \lambda_1 = i\sqrt{ab} \\ \lambda_2 = -i\sqrt{ab} \end{cases}$$

Тип особой точки — центр, как в задаче 1. Подобные эллипсы являются ограниченными при любых начальных условиях, так как не покидают траекторию.

$\underline{ab > 0}$: В данном случае, собственные значения являются вещественными:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \sqrt{ab} \\ \lambda_2 = -\sqrt{ab} \end{cases}$$

Следовательно, особая точка имеет тип седло. Гиперболические решения не ограничены, ввиду чего необходимо рассмотреть сепаратрисы.



Фазовый портрет системы вместе с сепаратрисами.

Перейдём к собственному базису, для чего найдём собственные векторы и составим матрицу перехода (обозначим $s = \sqrt{ab}$ для удобства в промежуточных вычислениях):

$$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} s \\ -b \end{pmatrix} \ \to \ C = \begin{pmatrix} a & s \\ s & -b \end{pmatrix}$$

Система в базисе из собственных векторов:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & -s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \ \to \ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} e^{s\cdot t} & 0 \\ 0 & e^{-s\cdot t} \end{pmatrix}$$

Система в исходном базисе:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = CTC^{-1} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \ \to \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{e^{-s\cdot t}}{2} \begin{pmatrix} 1 + e^{2s\cdot t} & \frac{s}{b}\,(e^{2s\cdot t} - 1) \\ \frac{s}{a}\,(e^{2s\cdot t} - 1) & 1 + e^{2s\cdot t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Итоговое решение:

$$\begin{aligned} 2x &= e^{\sqrt{ab}\cdot t} \left(c + \frac{\sqrt{ab}\,\cdot\, d}{b} \right) + e^{-\sqrt{ab}\cdot t} \left(c - \frac{\sqrt{ab}\,\cdot\, d}{b} \right) \\ 2y &= e^{\sqrt{ab}\cdot t} \left(d + \frac{\sqrt{ab}\,\cdot\, c}{a} \right) + e^{-\sqrt{ab}\cdot t} \left(d - \frac{\sqrt{ab}\,\cdot\, c}{a} \right) \end{aligned}$$

Таким образом, становится видно, что при $t \to -\infty$ правые слагаемые стремятся к бесконечности и левые не в силах на это повлиять. Следовательно, их нужно занулить, откуда получаем ограничение

$$c = \frac{\sqrt{ab}\,\cdot\, d}{b} \quad \Longleftrightarrow \quad d = \frac{\sqrt{ab}\,\cdot\, c}{a}$$

Левые же слагаемые стремятся к нулю при $t \to -\infty$, что удовлетворяет условию.

Ответ:
1. $a = 0, b = 0 \ \to \ c, d \in \mathbb{R}$.
2. $a = 0, b \neq 0 \ \to \ c = 0, d \in \mathbb{R}$.
3. $a \neq 0, b = 0 \ \to \ c \in \mathbb{R}, d = 0$.
2. $ab < 0 \ \to \ c, d \in \mathbb{R}$.
3. $ab > 0 \ \to \ c \in \mathbb{R}, \ d = \dfrac{\sqrt{ab}\,\cdot\, c}{a}$.

Задача 3. Вынесем общий множитель для удобства:

$$\dot{x} = (x-9)\left(-(x-9)^2+\epsilon-4\right) = (x-9)\left(-x^2+18x+\epsilon-85\right)$$

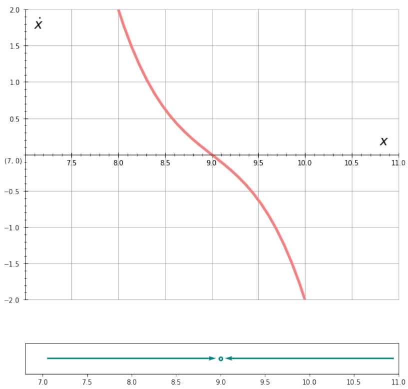
a. Найдём особые точки и производную:

$$\dot{x}=0 \quad \to \quad \begin{cases} x_1 = 9 \\ \begin{cases} \epsilon \geqslant 4 \\ x_2 = 9+\sqrt{\epsilon-4} \\ x_3 = 9-\sqrt{\epsilon-4} \end{cases} \end{cases} \qquad\qquad p(x) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = -3(x-9)^2+\epsilon-4$$

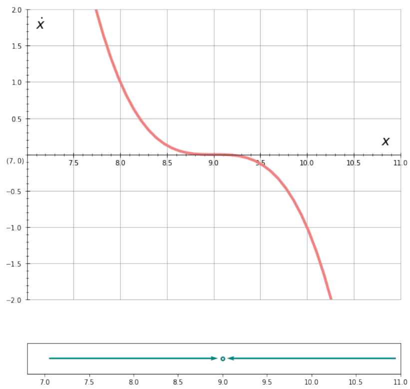
Подставим особые точки в производную:

$$\begin{cases} p(x_1) = \epsilon-4 \\ p(x_2) = -2\left(\epsilon-4\right) \\ p(x_3) = -2\left(\epsilon-4\right) \end{cases}$$

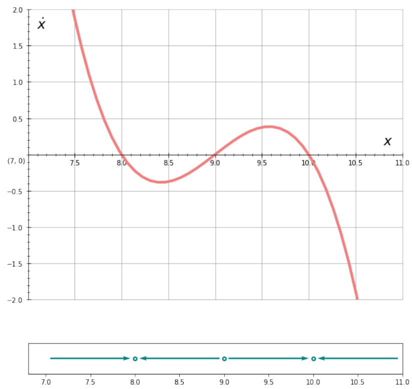
Согласно критерию структурной устойчивости на прямой, производные в особых точках должны не равняться нулю. Следовательно, бифуркация происходит только при $\epsilon = 4$.



Фазовый портрет при $\epsilon < 4$.



Фазовый портрет при $\epsilon = 4$.



Фазовый портрет при $\epsilon > 4$.

b. По фазовым портретам несложно видеть, что для точки $x = 9$:

1. при $\epsilon \leqslant 4$ имеет место асимптотическая устойчивость (и устойчивость по Ляпунову).
2. при $\epsilon > 4$ нет ни того, ни другого.

c. Количество различных фазовых кривых

1. при $\epsilon \leqslant 4$ равно трём (одна точка и два промежутка).
2. при $\epsilon > 4$ равно семи (три точки и четыре промежутка).

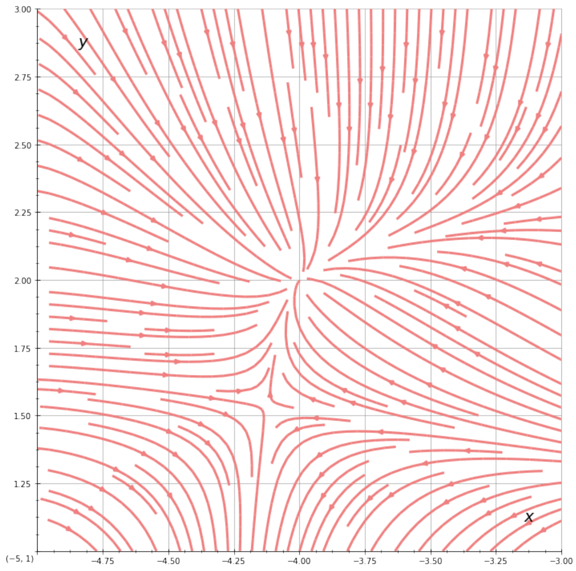
Ответ: a. $\epsilon = 4$.

b. асимптотическая устойчивость при $\epsilon \leqslant 4$, иначе ни одной.

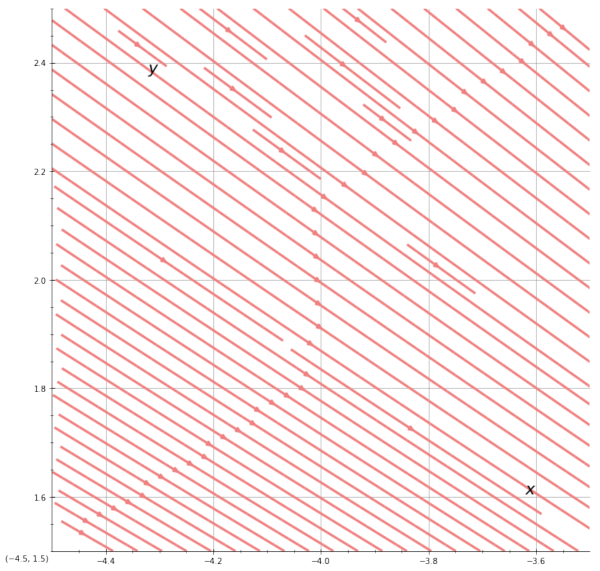
c. 3 при $\epsilon \leqslant 4$, иначе 7.

Задача 4.

a. Фазовый портрет исходной системы (слева) и её линеаризации (справа):



Область $[-5; -3] \times [1; 3]$.



Область $[-4.5; -3.5] \times [1.5; 2.5]$.

b. Найдём якобиан в точке $(-4, 2)$:

$$J(x,y)|_{(-4,2)} = \begin{pmatrix} -7\,(x+5)^{-1} & 2 \\ 2 & -28y+49 \end{pmatrix}\Bigg|_{(-4,2)} = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$$

Следовательно, линеаризация системы в этой точке выглядит так:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Найдём собственные значения:

$$\det \begin{pmatrix} -7-\lambda & 2 \\ 2 & -7-\lambda \end{pmatrix} = 0 \;\;\rightarrow\;\; (\lambda+7)^2 - 4 = 0 \;\;\rightarrow\;\; \begin{cases} \lambda_1 = -5 \\ \lambda_2 = -9 \end{cases}$$

Все собственные значения имеют отрицательную вещественную часть и не имеют комплексной, откуда можем сделать вывод, что точка является асимптотически устойчивой (и устойчивой по Ляпунову, как следствие).

Ответ: b. точка является асимптотически устойчивой.

Задача 5. Исходная система:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix}7 & 9\\ s & 7\end{pmatrix}$$

Начнём с определителя:

$$\det A = 49 - 9s$$

Если $s = 49/9$, то матрица вырождена, следовательно, все решения стремятся по прямой либо к, либо от другой прямой вида $ax + by = c$. В данном случае мы можем сразу предъявить требуемый интеграл: $H(x, y) = ax + by$. Найдём прямую, перейдя к собственному базису:

$$v_1 = \begin{pmatrix}9\\ 7\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}9\\ -7\end{pmatrix} \ \to \ C = \begin{pmatrix}9 & 9\\ 7 & -7\end{pmatrix}$$

Система в базисе из собственных векторов:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = C\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\dot{\xi}\\ \dot{\eta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \ \to \ \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}\xi_0\\ \eta_0\end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix}e^{14t} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Положим $\widetilde{H}(\xi, \eta) = \eta$ (так как $\eta = \eta_0 = \mathrm{const}$). Вернёмся к исходному базису и выразим η:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\xi + 9\eta\\ 7\xi - 7\eta\end{pmatrix} \ \to \ \eta = \frac{x}{18} - \frac{y}{14}$$

Можем домножить на константу:

$$H(x, y) = 7x - 9y$$

Убедимся, что этот интеграл подходит:

$$\frac{dH(x,y)}{dt} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = 7\cdot(7x + 9y) - 9\cdot\left(\frac{49}{9}x + 7y\right) = 0$$

Всюду дальше $s \neq 49/9$. Посмотрим на характеристический полином:

$$\det\begin{pmatrix}7-\lambda & 9\\ s & 7-\lambda\end{pmatrix} = 0 \ \to \ (\lambda - 7)^2 - 9s = 0 \ \to \ D = 36s$$

Собственные значения:

$$\lambda_{1,2} = 7 \pm 3\sqrt{s}$$

Рассмотрим все возможные случаи:

1. $s < 0$
   Два комплексных собственных значения с ненулевой вещественной частью дают особой точке тип фокус, который исключает возможность существования требуемого первого интеграла в силу того, что все траектории стремятся к одной и той же точке, откуда следует, что он равен константе на всём фазовом пространстве (данный факт был множество раз доказан на семинарах и лекциях).

2 $s = 0$
   Собственные значения являются вещественными и совпадают. Посмотрим на ЖНФ:

$$J = \begin{pmatrix}7 & 1\\ 0 & 7\end{pmatrix}$$

   Жорданова клетка недиагональна, что даёт вырожденный узел. Подобный тип особой точки также не имеет требуемого интеграла (рассуждения аналогичны предыдущему случаю).

3. $s \in (0; 49/9)$

   Собственные значения вещественные и имеют одинаковые знаки. Тип особой точки — узел, интеграла также не существует.

4. $s > 49/9$
   Два вещественных собственных значения с разными знаками — седло.
   Перейдём к собственному базису:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

   Так как $\lambda_1 = 7 + 3\sqrt{s} \neq 0$, равно как и $\lambda_2 = 7 - 3\sqrt{s} \neq 0$, то в качестве интеграла можем взять

$$H(\xi, \eta) = \xi^{\lambda_2} \cdot \eta^{-\lambda_1} = \xi_0 \, e^{\lambda_1 \lambda_2 t} \cdot \eta_0 \, e^{-\lambda_1 \lambda_2 t} = \xi_0 \cdot \eta_0 = \text{const}$$

   Существование интеграла не зависит от выбранного базиса, поэтому предъявлять его в явном виде для исходного базиса мы не будем.

Ответ: $s \geqslant \dfrac{49}{9}$.

Задача 6. Положим $y = \dot{x}$, откуда

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -6x - \alpha y \end{cases} \quad \to \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Найдём характеристический полином:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -\alpha \end{pmatrix} = 0 \quad \to \quad \lambda^2 + \alpha\lambda + 6 = 0$$

Собственные значения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 24}}{2}$$

Рассмотрим все возможные случаи:

$\underline{\alpha^2 > 24}$: Имеем различные вещественные собственные значения одного знака, что даёт тип узел.

$\underline{\alpha^2 = 24}$: Два совпадающих вещественных собственных значения — вырожденный узел.

$\underline{\alpha^2 < 24}$: Два комплексных собственных значения с ненулевой вещественной частью, это фокус.

Мы знаем, что узлы пересекают ось Oy в лучшем случае один раз, в то время как фокус бесконечно стремится к особой точке, образуя спираль и постоянно пересекая Oy. Среди всех случаев условию удовлетворяет лишь последний.

Ответ: $0 < \alpha < 2\sqrt{6}$.

Задача 7.

a. Покажем, что это не так. Рассмотрим систему, которая, очевидно, устойчива по Ляпунову:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

И функцию, задающую малое возмущение:

$$h(z) = \epsilon\, z$$

Иными словами, возмущённая система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \epsilon\, x \\ \dot{y} = -x + \epsilon\, y \end{cases}$$

Найдём характеристический полином:

$$\det \begin{pmatrix} \epsilon - \lambda & 1 \\ -1 & \epsilon - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad (\lambda - \epsilon)^2 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^2 - 2\epsilon\lambda + \epsilon^2 + 1 = 0$$

Вычислим собственные значения:

$$D = 4\epsilon^2 - 4\epsilon^2 - 4 = -4 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \epsilon \pm i$$

Видно, что при $\epsilon > 0$ имеется собственное значение с положительной вещественной частью, следовательно, особая точка будет неустойчивой.

b. Снова покажем, что это не так. Воспользуемся бифуркацией Андронова-Хопфа: имея асимптотически устойчивую точку, мы можем создать малые возмущения, которые заставят траектории, находящиеся около устойчивой точки, начать движение к притягивающему предельному циклу, а области из определения устойчивости по Ляпунову, которые по размеру меньше радиуса предельного цикла, будут содержать решения, выходящие за эту область к самому циклу.