# Математическая статистика.
# Домашнее задание №7

Lev Khoroshansky

## Задача №1.

a) Применим метод ортогонализации Грама-Шмидта:

$$\begin{aligned}
&e_1' = \xi \\
&e_1 = \frac{1}{\sqrt{\mathbb{D}e_1'}} \cdot e_1' = \frac{\xi}{3} \\
&e_2' = \eta - \operatorname{cov}(\eta, e_1)e_1 = \eta - \frac{\operatorname{cov}(\eta, \xi)}{3}e_1 = \eta - 2e_1 \\
&e_2 = \frac{e_2'}{\sqrt{\mathbb{D}e_2'}} = \frac{e_2'}{\sqrt{\mathbb{D}\eta + \mathbb{D}(2e_1) + 2\operatorname{cov}(\eta, -2e_1)}} = \frac{e_2'}{\sqrt{5+4-8}} = e_2'
\end{aligned}$$

Тогда матрица перехода выглядит следующим образом:

$$C_{e\to\bar{\xi}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

b) Всё то же самое:

$$\begin{aligned}
e_1' &= \xi \\
e_1 &= \frac{1}{\sqrt{\mathbb{D}e_1'}} \cdot e_1' = \frac{\xi}{2} \\
e_2' &= \eta - \operatorname{cov}(\eta, e_1)e_1 = \eta - \frac{\operatorname{cov}(\eta, \xi)}{2}e_1 = \eta - 3e_1 \\
\mathbb{D}e_2' &= \mathbb{D}\eta + \mathbb{D}(3e_1) + 2\operatorname{cov}(\eta, -3e_1) = 9 + 9 - 18 = 0
\end{aligned}$$

Следовательно, $e_2' = 0 = \eta - 3e_1 \implies \eta = 3e_1$. Тогда матрица перехода выглядит так:

$$C_{e\to\bar{\xi}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

c) Поехали:

$$\begin{aligned}
&e_1' = \xi \\
&e_1 = \frac{1}{\sqrt{\mathbb{D}e_1'}} \cdot e_1' = \xi \\
&e_2' = \eta - \operatorname{cov}(\eta, e_1)e_1 = \eta - \operatorname{cov}(\eta, \xi)e_1 = \eta - e_1 \\
&e_2 = \frac{e_2'}{\sqrt{\mathbb{D}e_2'}} = \frac{e_2'}{\sqrt{\mathbb{D}\eta + \mathbb{D}e_1 + 2\operatorname{cov}(\eta, -e_1)}} = \frac{e_2'}{\sqrt{2+1-2}} = e_2' \\
&e_3' = \zeta - \operatorname{cov}(\zeta, e_1)e_1 - \operatorname{cov}(\zeta, e_2)e_2 = \zeta - e_1 + e_2 - 2e_2 = \zeta - e_1 - e_2 = \zeta - \eta \\
&e_3 = \frac{e_3'}{\sqrt{\mathbb{D}e_3'}} = \frac{e_3'}{\sqrt{\mathbb{D}\zeta + \mathbb{D}\eta + 2\operatorname{cov}(\zeta, -\eta)}} = \frac{e_3'}{\sqrt{3+2-4}} = e_3'
\end{aligned}$$

Матрица перехода:

$$C_{e\to\bar{\xi}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\\ e_3\end{pmatrix}$$

# Задача №2.

Ортогонализация:

$$\begin{aligned}
&e_1' = \xi\\
&e_1 = \frac{e_1'}{\sqrt{\mathbb{D}\xi}} = \xi\\
&e_2' = \eta - \operatorname{cov}(\eta, e_1)e_1 = \eta + 2e_1\\
&e_2 = \frac{e_2'}{\sqrt{\mathbb{D}e_2'}} = \frac{e_2'}{\sqrt{\mathbb{D}\eta + 4\mathbb{D}\xi + 4\operatorname{cov}(\eta,\xi)}} = \frac{e_2'}{\sqrt{5+4-8}} = e_2'
\end{aligned}$$

Матрица перехода:

$$C_{e\to\bar{\xi}} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\end{pmatrix}$$

Найдём $\mathbb{E}(\xi^2\eta)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi^2\eta) &= \mathbb{E}(e_1^2 \cdot (-2e_1 + e_2)) = -2\mathbb{E}e_1^3 + \mathbb{E}(e_1^2 \cdot e_2) = -2\mathbb{E}_1^3 + 0 \cdot \mathbb{E}e_1^2 = -2\mathbb{E}e_1^3\\
\mathbb{E}e_1^3 &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^3 \cdot \rho_{N(0;1)}\,dx = 0 \text{ в силу нечётности функции под интегралом.}\\
\mathbb{E}(\xi^2\eta) &= 0.
\end{aligned}$$

Теперь найдём $\mathbb{P}(\xi \geq 0, \eta \geq 0)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(e_1 \geq 0, e_2 - 2e_1 \geq 0) &= \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{2x}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right\rangle\right) dxdy\\
&= \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi\\ y = r\sin\varphi\\ |J| = r\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\arctan 2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) rdr\\
&= \frac{\pi - 2\arctan 2}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} e^u\,du\\
&= \frac{\pi - 2\arctan 2}{4\pi}.
\end{aligned}$$

# Задача №13 из листка №3.

Посчитаем с помощью перехода к полярным координатам:

$$
\begin{aligned}
F_{\xi/\eta}(t) &= \mathbb{P}\left(\frac{\xi}{\eta} \le t\right) = \mathbb{P}\left(\xi \le t\eta,\, \eta \ge 0\right) + \mathbb{P}\left(\xi \ge t\eta,\, \eta < 0\right) \\
&= \int\limits_{-\pi/2}^{\arctan t} d\varphi \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r\, dr + \int\limits_{\pi/2}^{\pi+\arctan t} d\varphi \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r\, dr \\
&= \frac{2\arctan t + \pi}{2\pi} + \frac{2\arctan t + \pi}{2\pi} \\
&= \frac{2\arctan t + \pi}{2\pi} \text{ (используя результаты предыдущей задачи.)} \\
F_{\xi/|\eta|}(t) &= \mathbb{P}\left(\frac{\xi}{|\eta|} \le t\right) = \mathbb{P}(\xi \le t|\eta|) \\
&= \int\limits_{-\pi-\arctan t}^{\arctan t} d\varphi \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r\, dr \\
&= \frac{2\arctan t + \pi}{2\pi}.
\end{aligned}
$$

# Задача №14 из листка №3.

Найдём матрицу ковариации и обратную к ней:

$$
R = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \implies R^{-1} = \begin{pmatrix} 4^{-1} & 0 \\ 0 & 4^{-1} \end{pmatrix}
$$

$$
\det R = 16 \implies \det R^{-1} = \frac{1}{16}.
$$

1. Перейдём к полярным координатам:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(4 \le \xi^2 + \eta^2 \le 9) &= 4 \int\limits_{0}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{2}^{3} \frac{1}{2\pi\sqrt{16}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\cdot 4}\right) r\, dr \\
&= \frac{1}{4} \int\limits_{2}^{3} \exp\left(-\frac{r^2}{8}\right) r\, dr \\
&= \exp\left(-\frac{r^2}{8}\right)\Bigg|_{2}^{3} \\
&= e^{-1/2} - e^{-9/8}.
\end{aligned}
$$

2. Повернём координатную плоскость на угол $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, используя ортогональное преобразование со следующей матрицей:

$$
U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \;\; U^T \cdot R \cdot U = R, \text{ так как матрица } R \text{ диагональна.}
$$

Изначально, стороны маленького и большого квадратов были равны $2\sqrt{2}$ и $3\sqrt{2}$, они останутся точно такими же при повороте. Также, поворот не влияет на независимость.

Теперь осталось понять, что же считать. К счастью, это несложно — достаточно из большого квадрата вычесть маленький:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(2 \le |\xi| + |\eta| \le 3) &= \mathbb{P}\left(|X| \le \frac{3\sqrt{2}}{2}, |Y| \le \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) - \mathbb{P}\left(|X| \le \sqrt{2}, |Y| \le \sqrt{2}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{|X|}{2} \le \frac{3\sqrt{2}}{4}\right) \cdot \mathbb{P}\left(\frac{|Y|}{2} \le \frac{3\sqrt{2}}{4}\right) - \mathbb{P}\left(\frac{|X|}{2} \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \mathbb{P}\left(\frac{|Y|}{2} \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&\simeq (\Phi(1{,}06) - (1 - \Phi(1{,}06)))^2 - (\Phi(0{,}71) - (1 - \Phi(0{,}71)))^2 \\
&\simeq (0{,}8554 - (1 - 0{,}8554))^2 - (0{,}7611 - (1 - 0{,}7611))^2 \\
&\simeq 0{,}2325
\end{aligned}
$$