Математическая статистика.
Коллоквиум №3

Lev Khoroshansky

Содержание

Билет №1.

Вступление

Для начала вспомним, что такое неравенство Чебышёва.

Th. *Пусть дана неотрицательная случайная величина ξ с конечным ожиданием $\mathbb{E}\xi < \infty$. Тогда для любого $t > 0$ справедливо неравенство*

$$\mathbb{P}(\xi \geqslant t) \leqslant \frac{\mathbb{E}\xi}{t}.$$

Доказательство. Рассмотрим интересующее нас множество исходов $A = \{\omega \mid \xi(\omega) \geqslant t\}$. Тогда заметим, что $\xi(\omega) \geqslant t \cdot \mathrm{Ind}_A(\omega)$. Возьмём с обеих сторон ожидание: $\mathbb{E}\xi \geqslant t \cdot \mathbb{P}(A)$. **[:|||:]**

Из этого сразу следует усиленное неравенство Чебышёва.

Cor. *Пусть дана случайная величина ξ с конечным ожиданием $\mathbb{E}\xi < \infty$ и конечной дисперсией $\mathbb{D}\xi < \infty$. Тогда для любого $t > 0$ справедливо неравенство*

$$\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geqslant t) \leqslant \frac{\mathbb{D}\xi}{t^2}.$$

Доказательство. Достаточно возвести неравенство под вероятностной мерой в квадрат и воспользоваться обычным неравенством Чебышёва:

$$\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geqslant t) = \mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi|^2 \geqslant t^2) \leqslant \frac{\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2}{t^2} = \frac{\mathbb{D}\xi}{t^2}.$$

[:|||:]

Также нам понадобится сходимость по вероятности.

Def. *Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ сходится к случайной величине ξ по вероятности, если для всех $\delta > 0$ справедливо равенство* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\xi_n - \xi| \geqslant \delta) = 0$.

Закон больших чисел

Th. *Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых в совокупности и одинаково распределённых случайных величин с конечным ожиданием $\mu = \mathbb{E}\xi_n < \infty$ и конечной дисперсией $\sigma^2 = \mathbb{D}\xi_n < \infty$. Тогда для любого $\delta > 0$ справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\xi_1 + \ldots \xi_n}{n} - \mu\right| \geqslant \delta\right) = 0$$

Доказательство с помощью неравенства Чебышёва

Доказательство. Сразу воспользуемся усиленным неравенством Чебышёва и независимостью:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\xi_1 + \ldots \xi_n}{n} - \mu\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left(\frac{\xi_1 + \ldots \xi_n}{n} - \mu\right)^2}{\delta^2} = \frac{\mathbb{D}\left(\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n}\right)}{\delta^2} = \frac{n \cdot \mathbb{D}\xi_k}{n^2 \cdot \delta^2} = \frac{\sigma^2}{n\delta^2} \to 0.$$

[:|||:]

Вариация для схемы Бернулли

Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $\{\xi_n\}$ такую, что

$$\xi_n = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } p, \\ 0, & \text{с вероятностью } q = 1 - p. \end{cases}$$

Иными словами, это самая обычная схема Бернулли, в которой чаще всего интересным объектом выступает количество успехов $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Мы знаем, что $\mathbb{E}\xi = p$, а $\mathbb{D}\xi = pq$. Тогда, используя только что доказанный закон больших чисел, получаем, что для любого $\delta > 0$ справедливо неравенство

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{pq}{n\delta^2} \to 0.$$

Видно, что скорость стремления к нулю слишком маленькая — всего порядка $\dfrac{1}{n}$.
С более точной оценкой нам поможет неравенство Чернова.

Неравенство Чернова

Th. *Для схемы Бернулли существует следующая оценка сходимости по вероятности:*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \delta\right) \leqslant 2e^{-2n\delta^2}, \text{ где } \delta > 0.$$

Мы докажем только один из случаев раскрытия модуля — тот, при котором $\dfrac{S_n}{n} - p \geqslant \delta$.
Перед тем, как переходить к непосредственному доказательству, приведём план действий:

1. Преобразуем неравенство к виду $\mathbb{P}\left(e^{\lambda S_n} \geqslant e^{\lambda n(p+\delta)}\right) \leqslant (g(\lambda))^n$.
2. Найдём минимум функции $g(\lambda)$.
3. Оценим функцию с помощью разложения по Тейлору.

Всё готово, можем начинать.

Доказательство. Сначала домножим всё неравенство на n:

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} - p \geqslant \delta\right) = \mathbb{P}(S_n \geqslant n(p+\delta)).$$

Далее, возьмём $\lambda > 0$ и применим "хорошую" функцию (а именно — экспоненту) к каждой из частей неравенства:

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant n(p+\delta)) = \mathbb{P}\left(e^{\lambda S_n} \geqslant e^{\lambda n(p+\delta)}\right).$$

Так можно сделать ввиду того, что экспонента при $\lambda > 0$ является строго возрастающей монотонной функцией. Теперь применим неравенство Чебышёва:

$$\mathbb{P}\left(e^{\lambda S_n} \geqslant e^{\lambda n(p+\delta)}\right) \leqslant e^{-\lambda n(p+\delta)} \cdot \mathbb{E}e^{\lambda S_n}.$$

Теперь вспомним две полезных вещи: $\{\xi_k\}$ независимы и имеют одинаковое распределение. Воспользуемся этим:

$$e^{-\lambda n(p+\delta)} \cdot \mathbb{E}e^{\lambda S_n} = e^{-\lambda n(p+\delta)} \cdot \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}e^{\lambda \xi_k} = e^{-\lambda n(p+\delta)} \cdot \left(\mathbb{E}e^{\lambda \xi_k}\right)^n.$$

Посчитать подобное ожидание не составляет труда:

$$\mathbb{E}e^{\lambda \xi_k} = e^{\lambda \cdot 1} \cdot \mathbb{P}(\xi_k = 1) + e^{\lambda \cdot 0} \cdot \mathbb{P}(\xi_k = 0) = e^{\lambda} \cdot p + q.$$

Посмотрим на промежуточный результат:

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} - p \geqslant \delta\right) \leqslant \left(e^{-\lambda(p+\delta)} \cdot (e^{\lambda} \cdot p + q)\right)^n.$$

Теперь мы ищем такую λ, что это будет точкой минимума. Введём следующее обозначение:

$$g(\lambda) = e^{-\lambda(p+\delta)} \cdot (e^{\lambda} \cdot p + q).$$

Найдём производную и приравняем её к нулю:

$$\begin{aligned} g'(\lambda_{\min}) = -(p+\delta)e^{-\lambda_{\min}(p+\delta)} \cdot (e^{\lambda_{\min}} \cdot p + q) + e^{-\lambda_{\min}(p+\delta)} \cdot (e^{\lambda_{\min}} \cdot p) = 0, \\ -(p+\delta)(e^{\lambda_{\min}} \cdot p + q) + e^{\lambda_{\min}} \cdot p = 0. \end{aligned}$$

Выразим $e^{\lambda_{\min}}$:

$$e^{\lambda_{\min}} = \frac{q(p+\delta)}{p(q-\delta)} \implies \lambda_{\min} = \ln\left(\frac{q(p+\delta)}{p(q-\delta)}\right).$$

Нашли, можно подставлять. Только для начала разберёмся с правой скобкой:

$$(e^{\lambda_{\min}} \cdot p + q) = \frac{q(p+\delta)}{(q-\delta)} + q = q \cdot \frac{p+\delta+q-\delta}{q-\delta} = \frac{q}{q-\delta}.$$

Подставляем:

$$g(\lambda_{\min}) = e^{-\lambda_{\min}(p+\delta)} \cdot (e^{\lambda_{\min}} \cdot p + q) = e^{-(p+\delta)\cdot\ln\left(\frac{q(p+\delta)}{p(q-\delta)}\right)} \cdot \frac{q}{q-\delta} = e^{-(p+\delta)\cdot\ln\left(\frac{q(p+\delta)}{p(q-\delta)}\right) + \ln\left(\frac{q}{q-\delta}\right)}$$

Рассмотрим показатель как отдельную функцию и приведём подобные слагаемые:

$$H(x) = -(p+x)\ln\left(\frac{q(p+x)}{p(q-x)}\right) + \ln\left(\frac{q}{q-x}\right) = (p+x)\ln\frac{p}{p+x} + (q-x)\ln\frac{q}{q-x}.$$

Заметим, что $H(0) = p \cdot \ln 1 + q \cdot \ln 1 = 0$. Посмотрим на первую производную:

$$\begin{aligned} &H'(x) = \ln\frac{p}{p+x} + (p+x)\cdot\left(-\frac{1}{p+x}\right) - \ln\frac{q}{q-x} + (q-x)\cdot\left(\frac{1}{q-x}\right) = \ln\frac{p}{p+x} - \ln\frac{q}{q-x}, \\ &H'(0) = \ln 1 + \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

И на вторую производную:

$$H''(x) = -\frac{1}{p+x} - \frac{1}{q-x} = \frac{-1}{(p+x)(q-x)}.$$

Далее, необходимо решить такую задачу: $a+b=1$, $a \geqslant 0, b \geqslant 0$, какой константой можно ограничить произведение ab? Решение:

$$a+b=1 \implies b = 1-a \implies ab = -a^2+a \implies a_{\max} = \frac{1}{2} \implies b_{\max} = \frac{1}{2} \implies a_{\max}b_{\max} = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, $H''(x) \leqslant -4$. Теперь разложим функцию в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа в окрестности точки $x_0 = 0$:

$$H(x-0) = H(0) + H'(0)\cdot(x-0) + \frac{H''(c)\cdot(x-0)^2}{2} = 0 + 0 + \frac{H''(c)\cdot x^2}{2}.$$

Используя только что полученную оценку, получим, что

$$H(x-0) = H(x) = \frac{H''(c)\cdot x^2}{2} \leqslant \frac{1}{2}\cdot x^2 \cdot (-4) = -2x^2 \implies H(x) \leqslant -2x^2.$$

Таким образом,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} - p \geqslant \delta\right) \leqslant \left(e^{H(\delta)}\right)^n \leqslant e^{-2n\delta^2}.$$

[:|||:]

Комментарий

В момент нахождения $\lambda_{\min}$ мы делаем предположение, что $0 < \delta < q$. Следовательно, нам необходимо рассмотреть два случая:

$\delta > q$: $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} - p \geqslant \delta\right) = \mathbb{P}(S_n \geqslant n(p+\delta)) \leqslant \mathbb{P}(S_n > n) = 0$, так как $n(p+\delta) > n(p+q) = n$.

$\delta = q$: $\mathbb{P}(S_n \geqslant n(p+\delta)) = \mathbb{P}(S_n = n) = p^n \leqslant e^{-2nq^2}$ — необходимо это проверить:

$$\begin{aligned}\lim_{\delta \to q-} H(\delta) &= \lim_{\delta \to q-} \left[(p+\delta)\ln\left(\frac{p}{p+\delta}\right) + (q-\delta)\ln\left(\frac{q}{q-\delta}\right)\right] \\ &= 1 \cdot \ln p + \lim_{\delta \to q-} \left[(q-\delta)\ln q + (q-\delta)\ln(q-\delta)\right] \\ &= \ln p.\end{aligned}$$

Также мы знаем, что $H(x) \leqslant -2x^2$. Воспользуемся:

$$H(\delta) = \ln p \leqslant -2\delta^2 = -2q^2 \implies p \leqslant e^{-2q^2} \implies p^n \leqslant e^{-2nq^2}.$$

Билет №2.

Введение

Для начала вспомним определение сходимости почти наверное.

Def. *Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ сходится к случайной величине ξ почти наверное, если справедливо равенство*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty}\xi_n = \xi\right) = 1.$$

Теперь докажем вспомогательный факт.

Th. *Если последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ сходится по вероятности к случайным величинам ξ и η, то $\xi = \eta$ почти наверное.*

Доказательство. Для всех $\delta > 0$ рассмотрим следующее событие: $\{|\xi - \eta| \geqslant \delta\}$.
Заметим, что оно лежит в таком объединении:

$$\{|\xi - \eta| \geqslant \delta\} \subset \left\{|\xi_n - \xi| \geqslant \frac{\delta}{2}\right\} \cup \left\{|\xi_n - \eta| \geqslant \frac{\delta}{2}\right\}.$$

Действительно, если какой-либо исход не попадает ни в одно из этих множеств, то для него справедливы неравенства

$$|\xi_n - \xi| < \frac{\delta}{2} \quad \text{и} \quad |\xi_n - \eta| < \frac{\delta}{2} \implies |\xi - \eta| < \delta, \text{ в силу неравенства треугольника.}$$

Теперь сделаем следующую оценку:

$$0 \leqslant \mathbb{P}(|\xi - \eta| \geqslant \delta) \leqslant \mathbb{P}\left(|\xi_n - \xi| \geqslant \frac{\delta}{2}\right) + \mathbb{P}\left(|\xi_n - \eta| \geqslant \frac{\delta}{2}\right).$$

Важно понимать, что центральная часть неравенства является числом, в то время как элементы последовательности есть только в правой части. Применяя лемму о двух хранителях правопорядка, получим, что

$$\mathbb{P}(|\xi - \eta| \geqslant \delta) = 0, \text{ так как, по условию, } \mathbb{P}\left(|\xi_n - \xi| \geqslant \frac{\delta}{2}\right) \to 0 \quad \text{и} \quad \mathbb{P}\left(|\xi_n - \eta| \geqslant \frac{\delta}{2}\right) \to 0.$$

Заметим, что

$$\mathbb{P}(\xi \neq \eta) = \mathbb{P}\left(\bigcup_n \left\{|\xi - \eta| \geqslant \frac{1}{n}\right\}\right) = 0 \implies \mathbb{P}(\xi = \eta) = 1.$$

[:|||:]

Сохранение сходимости по вероятности при подстановке случайных величин в непрерывную функцию