Математический анализ 2.
Домашняя работа №5

Лев Хорошанский, 176 группа, 5 вариант

Задача №5.1

Так как $R = \text{const}$, то мы можем воспользоваться сферической заменой координат:

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\sin\theta, \\ y = R\sin\varphi\sin\theta, \\ z = R\cos\theta, \\ |J| = R^2\sin\theta; \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} |J| = R^2\sin\theta, \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \end{cases}$$

Далее, найдём ранг полу-якобиана:

$$\widehat{J} = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\sin\theta & R\cos\varphi\sin\theta & 0 \\ R\cos\varphi\cos\theta & R\sin\varphi\cos\theta & -R\sin\theta \end{pmatrix}$$

Матрица имеет ступенчатый вид, следовательно, $\operatorname{rk}\widehat{J} = 2$.
Найдём первую координату, чтобы определить знак нормали:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -R\sin\varphi\sin\theta & R\cos\varphi\sin\theta & 0 \\ R\cos\varphi\cos\theta & R\sin\varphi\cos\theta & -R\sin\theta \end{pmatrix} \to \quad v_{\mathbf{i}} = -R^2\cos\varphi\sin^2\theta < 0$$

Следовательно, нужно учесть знак минус:

$$\iint\limits_S y\,dzdx = -\iint\limits_D \det\begin{pmatrix} 0 & R\sin\varphi\sin\theta & 0 \\ -R\sin\varphi\sin\theta & R\cos\varphi\sin\theta & 0 \\ R\cos\varphi\cos\theta & R\sin\varphi\cos\theta & -R\sin\theta \end{pmatrix} d\varphi\,d\theta$$

$$= R^3 \iint\limits_D \sin^2\varphi\sin^3\theta\,d\varphi\,d\theta = R^3\int\limits_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi = R^3\cdot\frac{4\pi}{3}$$

Ответ: $\dfrac{4\pi R^3}{3}$.

Задача №5.2

Поверхность задана явно: $x(y,z) = \sqrt{y^2+z^2}$.
В этом случае поверхностный интеграл можно вычислить следующим образом:

$$\iint\limits_S (2x^2+y^2+z^2)\,dy\,dz = \pm\iint\limits_D \left(2\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^2 + y^2+z^2\right)\,dy\,dz,$$

где множество D — проекция исходной области интегрирования на плоскость $x=0$.
Нормаль внешней стороны боковой поверхности конуса, очевидно, образует тупой угол с осью Ox, ввиду чего выбираем знак минус:

$$\iint\limits_S (2x^2+y^2+z^2)\,dy\,dz = -3\iint\limits_D \left(y^2+z^2\right)\,dy\,dz$$

Воспользуемся полярной заменой координат:

$$\begin{cases} y = r\cos\varphi, \\ z = r\sin\varphi; \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} |J| = r, \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ 0 \leqslant r \leqslant H. \end{cases}$$

Тогда имеем

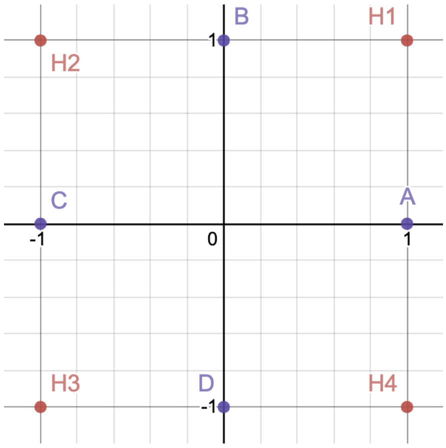
$$\iint\limits_S (2x^2+y^2+z^2)\,dy\,dz = -3\iint\limits_D \left(y^2+z^2\right)\,dy\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^H r^2\cdot r\,dr$$

$$= -3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{H^4}{4} = \frac{-3\pi H^4}{2}$$

Ответ: $\dfrac{-3\pi H^4}{2}$.

Задача №5.5

Введём четыре вспомогательные точки: $H_1(1;1), H_2(-1;1), H_3(-1;-1)$ и $H_4(1,-1)$, —



Область интегрирования.

и разобьём исходный интеграл на четыре (по одному на каждую сторону квадрата):

$$\oint\limits_{ABCDA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = \int\limits_{A-H_1-B} (\dots) + \int\limits_{B-H_2-C} (\dots) + \int\limits_{C-H_3-D} (\dots) + \int\limits_{D-H_4-A} (\dots)$$

Рассмотрим эти интегралы по отдельности:

$\underline{A-H_1-B}$: Заметим, что x меняется от 1 до 0, а y – от 0 до 1. Введём параметризацию:

$$\begin{cases} x(t) = 1-t \\ y(t) = t \end{cases} \quad \rightarrow \quad \int\limits_{A-H_1-B} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = \int\limits_{A}^{H_1} \frac{dy}{|x|+|y|} + \int\limits_{H_1}^{B} \frac{dx}{|x|+|y|}$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{dt}{|1-t|+|t|} - \int\limits_0^1 \frac{dt}{|1-t|+|t|} = 0$$

$\underline{C-H_3-D}$: Данный случай аналогичен предыдущему, результаты совпадают.

$\underline{B-H_2-C}$: Опять-таки, воспользуемся параметризацией:

$$\begin{cases} x(t) = -t \\ y(t) = -t+1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \int\limits_{B-H_2-C} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = \int\limits_{B}^{H_2} \frac{dx}{|x|+|y|} + \int\limits_{H_2}^{C} \frac{dy}{|x|+|y|}$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{-dt}{|1-t|+|t|} - \int\limits_0^1 \frac{dt}{|1-t|+|t|} = -2$$

$\underline{D-H_4-A}$: Данный случай аналогичен предыдущему, результаты отличаются знаком.

По итогу:

$$\oint\limits_{ABCDA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = \int\limits_{A-H_1-B} (\dots) + \int\limits_{B-H_2-C} (\dots) + \int\limits_{C-H_3-D} (\dots) + \int\limits_{D-H_4-A} (\dots) = 0-2+0+2 = 0$$

Ответ: 0.

Задача №5.6

Применим теорему Гаусса-Остроградского:

$$\iint\limits_S (1+2x)\,dy\,dz + (2x+3y)\,dz\,dx + (3y+4z)\,dx\,dy = \iiint\limits_G (2+3+4)\;dx\,dy\,dz = 9\iiint\limits_G dx\,dy\,dz$$

Далее, определим область интегрирования для повторного интеграла:

$$\begin{cases} x \in [0; a] \\ y \in \left[0; b\left(1-\frac{x}{a}\right)\right] \\ z \in \left[0; c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\right] \end{cases}$$

Теперь посчитаем:

$$9\iiint\limits_G dx\,dy\,dz = 9\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dy \int\limits_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} dz = 9c\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} \left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\,dy$$
$$= \frac{9bc}{2a^2}\int\limits_0^a (a-x)^2 dx = \frac{9bc}{2a^2}\cdot\frac{a^3}{3} = \frac{3abc}{2}$$

Ответ: $\dfrac{3abc}{2}$.

Задача №5.7

Применим теорему Стокса к исходному интегралу с учётом направления и знака:

$$\int\limits_L (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz = -\iint\limits_S (-1-(1))\ dy\,dz + (-1-(1))\ dz\,dx + (-1-(1))\ dx\,dy$$
$$= 2\iint\limits_S dy\,dz + dz\,dx + dx\,dy$$

Из уравнения плоскости можно выразить z: $z(x,y) = c\left(1-\dfrac{x}{a}\right)$.
Найдём частные производные и область интегрирования:

$$\frac{\partial z}{\partial z} = -\frac{c}{a}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial z} = 1, \qquad D = \left\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\right\}$$

Пусть $x \in [-1;1]$, тогда $y \in \left[-\sqrt{1-x^2}; \sqrt{1-x^2}\right]$.
По итогу:

$$2\iint\limits_S dy\,dz + dz\,dx + dx\,dy = 2\iint\limits_D \det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & \frac{-c}{a}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\ dx\,dy = -2\iint\limits_D \det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & \frac{-c}{a}\end{pmatrix}\ dx\,dy$$
$$= 2\iint\limits_D \left(\frac{c}{a}+1\right)\ dx\,dy = 2\left(\frac{c}{a}+1\right)\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy$$
$$= 4\left(\frac{c}{a}+1\right)\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = 4\left(\frac{c}{a}+1\right)\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi(a+c)}{a}$$

Ответ: $\dfrac{2\pi(a+c)}{a}$.