Математическая статистика.
Домашнее задание №4

Lev Khoroshansky

Блок задач №1.

№1 (a). Дана случайная величина $\xi \sim \mathrm{B}(n, p)$. Посчитаем её характеристическую функцию:

$$\begin{aligned}
\varphi_\xi(x) = \mathbb{E}e^{ix\xi} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{ixk} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} (p \cdot e^{ix})^k \\
&= (p \cdot e^{ix} + (1-p))^n, \text{ как бином Ньютона.}
\end{aligned}$$

№1 (b). Дана случайная величина $\xi \sim \mathrm{Gf}(p)$. Посчитаем её характеристическую функцию:

$$\begin{aligned}
\varphi_\xi(x) = \mathbb{E}e^{ix\xi} &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{ixk} (1-p)^k p = p \sum_{k=0}^{\infty} ((1-p) \cdot e^{ix})^k \\
&= \frac{p}{1 - (1-p) \cdot e^{ix}}, \text{ как сумма геометрической прогрессии.}
\end{aligned}$$

Такая штука сходится при $|1-p| < e^{\operatorname{Im} x}$.

№2 (a). Дана случайная величина $\xi \sim \mathrm{U}[0; 1]$. Посчитаем её характеристическую функцию:

$$\varphi_\xi(x) = \mathbb{E}e^{ix\xi} = \int_0^1 e^{ixy} dy = \frac{1}{ix} \left(e^{ix} - 1 \right)$$

№3 (равномерное распределение). Зная A и B, выразим $\varphi_{A\xi+B}$ через φ_ξ:

$$\varphi_{A\xi+B}(x) = \mathbb{E}e^{ix(A\xi+B)} = e^{ixB} \cdot \mathbb{E}e^{ixA\xi} = e^{ixB} \varphi_\xi(Ax)$$

Посчитаем характеристическую функцию $\xi \sim \mathrm{U}[a; b]$:

$$\varphi_\xi(x) = \mathbb{E}e^{ix\xi} = \int_a^b e^{ixy} dy = \frac{1}{ix} \frac{e^{ixb} - e^{ixa}}{b-a}$$

Блок задач №2.

a) Дана случайная величина $\xi \sim \mathrm{U}[0;1]$. Требуется показать, что $\zeta = (b-a)\xi + a \sim \mathrm{U}[a;b]$. Мы знаем, что $F_\xi(t) = t\,\mathrm{Ind}(t)_{[0;1]} + \mathrm{Ind}(t)_{(1;+\infty)}$. В то же время, для случайной величины $\eta \sim \mathrm{U}[a;b]$ получается, что $F_\eta(t) = \dfrac{t-a}{b-a}\,\mathrm{Ind}(t)_{[a;b]} + \mathrm{Ind}(t)_{(b;+\infty)}$. Рассмотрим $F_\zeta(t)$:

$$\begin{aligned} F_\zeta(t) = F_\xi\left(\frac{t-a}{b-a}\right) &= \frac{t-a}{b-a}\,\mathrm{Ind}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)_{[0;1]} + \mathrm{Ind}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)_{(1;+\infty)} \\ &= \frac{t-a}{b-a}\,\mathrm{Ind}(t)_{[a;b]} + \mathrm{Ind}(t)_{(b;+\infty)} = F_\eta(t), \text{ что и требовалось.} \end{aligned}$$

b) Дана случайная величина $\xi \sim N(0;1)$. Пусть $\eta = \sigma \cdot \xi + \mu$, тогда:

$$F_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \rho_\xi(x)\,dx$$

$$F_\eta(t) = \mathbb{P}(\eta \leqslant t) = \mathbb{P}\left(\xi \leqslant \frac{t-\mu}{\sigma}\right) = F_\xi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\begin{aligned} \rho_\eta(t) = F'_\eta(t) = \frac{d}{dt}F_\xi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{\frac{t-\mu}{\sigma}} \rho_\xi(x)\,dx = \begin{bmatrix} \dfrac{t-\mu}{\sigma} = y \\ dt = \sigma dy \end{bmatrix} = \frac{d}{\sigma dy}\int\limits_{-\infty}^{y} \rho_\xi(x)\,dx \\ = \frac{1}{\sigma}\,\rho_\xi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ — плотность случайной величины } N(\mu;\sigma). \end{aligned}$$

Блок задач №3.

№13. a) Дана случайная величина η, для которой известна плотность. Найдём её характеристическую функцию:

$$
\begin{aligned}
\varphi_\eta(x) = \mathbb{E}e^{i\eta x} &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iyx}\,\mathrm{Ind}(y)_{[-1;1]}(1-|y|)\,dy = \int\limits_{-1}^{1} e^{iyx}(1-|y|)\,dy \\
&= \int\limits_{-1}^{0} e^{iyx}(1+y)\,dy + \int_0^1 e^{iyx}(1-y)\,dy \\
&= \int\limits_{-1}^{0} e^{iyx}\,dy + \int\limits_{-1}^{0} e^{iyx}y\,dy + \int_0^1 e^{iyx}\,dy - \int_0^1 e^{iyx}y\,dy \\
&= -\frac{i\cdot e^{iyx}}{x}\Bigg|_{-1}^{1} + \frac{e^{iyx}(1-iyx)}{x^2}\Bigg|_{-1}^{0} - \frac{e^{iyx}(1-iyx)}{x^2}\Bigg|_{0}^{1} \\
&= \frac{2\sin x}{x} + \frac{1+e^{-ix}(-1-ix)}{x^2} - \frac{-1+e^{ix}(1-ix)}{x^2} \\
&= \frac{e^{-ix}(1-e^{ix})^2}{x^2} = \frac{2\cdot(1-\cos x)}{x^2}
\end{aligned}
$$

№13. b) Обозначим $1-p$ за q, тогда, используя знание о математическом ожидании функции от случайных величин, одна из которых дискретна (в данном случае, A), можем получить, что

$$
\begin{aligned}
\varphi_\eta(x) = \mathbb{E}e^{i\eta x} &= \sum_{k=0}^{1} \mathbb{E}e^{i\cdot(k\cdot U+(1-k)\cdot V)\cdot x}\cdot\mathbb{P}(A=k) \\
&= (1-p)\mathbb{E}e^{iVx} + p\cdot\mathbb{E}e^{iUx} \\
&= q\cdot\varphi_V(x) + p\cdot\varphi_U(x)
\end{aligned}
$$

Контрпримеры. Сходимость почти наверное

Рассмотрим последовательность случайных величин

$$\xi_n = \begin{cases} \sqrt{n}, & \omega \in \left[0; \dfrac{1}{n}\right], \\ 0, & \omega \in \left(\dfrac{1}{n}; 1\right] \end{cases} = \sqrt{n} \cdot \mathrm{Ind}(\omega)_{[0;\,1/n]}$$

Покажем, что она сходится к $\xi \equiv 0$ почти наверное.
Мы знаем, что сходимость почти наверное является аналогом поточечной сходимости из математического анализа. Таким образом, достаточно показать, что для любого исхода ω последовательность $\{\xi_n\}$ стремится к нулю.
Понятно, что для любого $\omega \neq 0$ можно выбрать такую точку левее от ω, что она выражается через дробь вида $\dfrac{1}{N}$, где $N \in \mathbb{N}$, тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \colon \forall n > N \implies |\xi_n(\omega)| < \varepsilon$, потому что все ξ_n будут принимать ненулевые значения только на отрезке $\left[0; \frac{1}{n}\right]$, причём $\omega \in \left(\frac{1}{n}; 1\right]$, так как $\frac{1}{n} < \frac{1}{N}$.
А вероятность выбрать исход $\omega_0 = 0$ можно задать равной нулю.