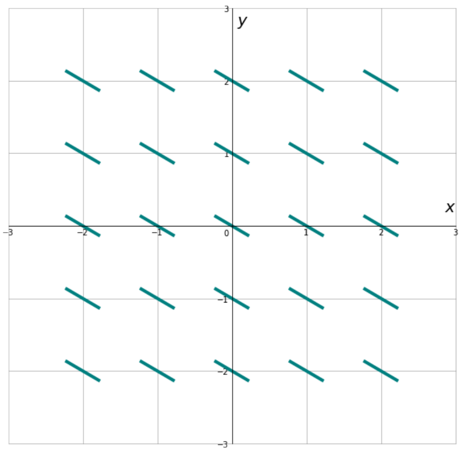
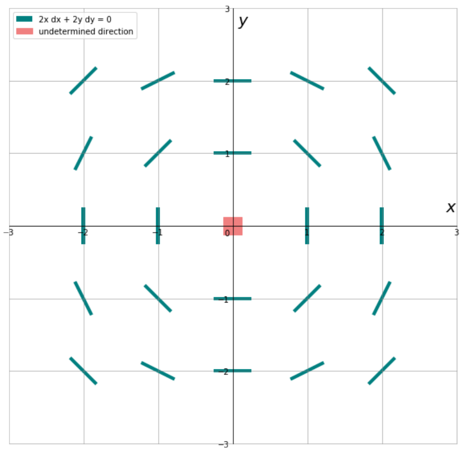
# Дифференциальные уравнения.
# Домашнее задание №2

Lev Khoroshansky

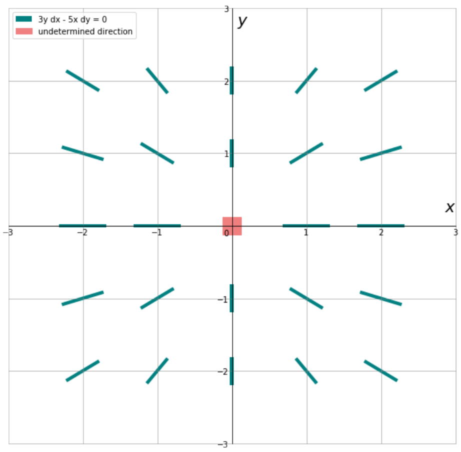
**Задача 1.** В каждом пункте, за исключением а), в точке $O = (0, 0)$ ядро совпадает с касательной плоскостью, ввиду чего в этой точке не задано направление.



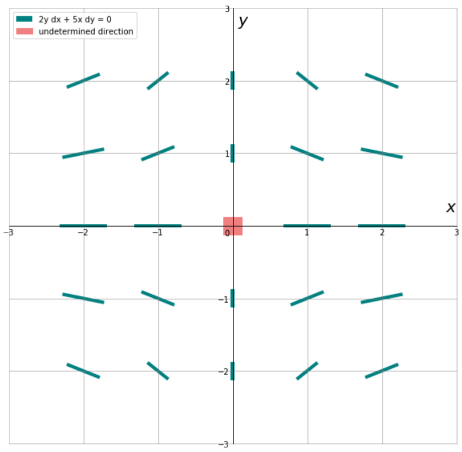

a.




b.

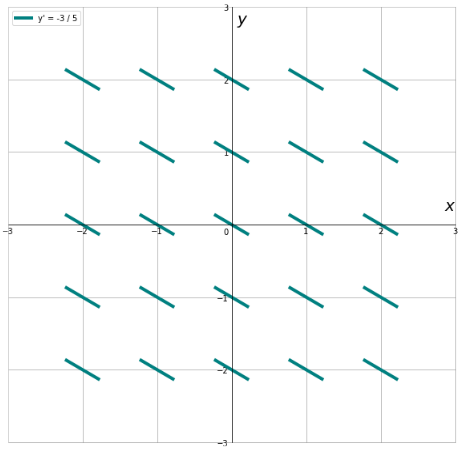



c.

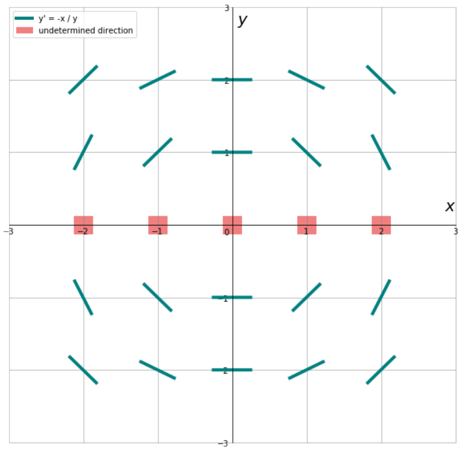



d.

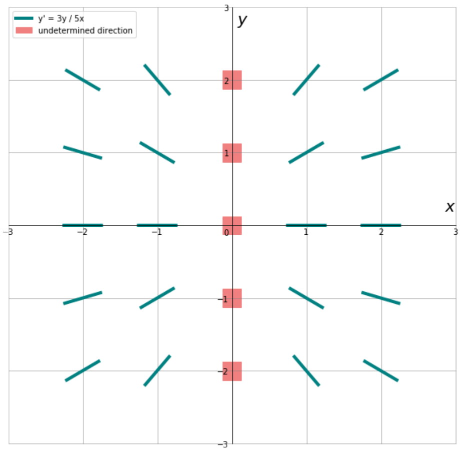
**Задача 2.** В каждом пункте коралловым цветом отмечены точки, в которых не задано направление. Нарисуем поле направлений для всех решений исходных уравнений, не выделяя полуплоскости отдельно.



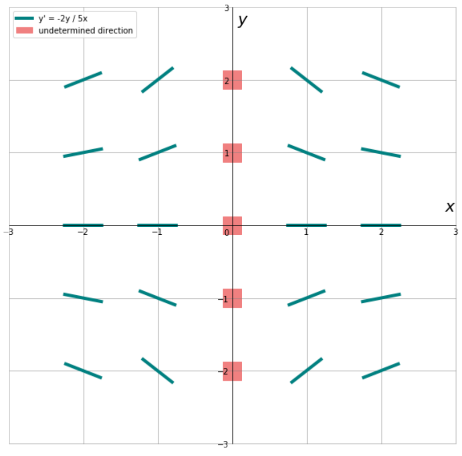

a.




b.




c.




d.

Несложно видеть, что данные дифференциальные уравнения отличаются от дифференциальных форм из предыдущего задания: здесь мы не можем нарисовать направления не только лишь для одной точки, но и для целых прямых ($y = 0$ в пункте b) или же $x = 0$ в пунктах c) и d)).

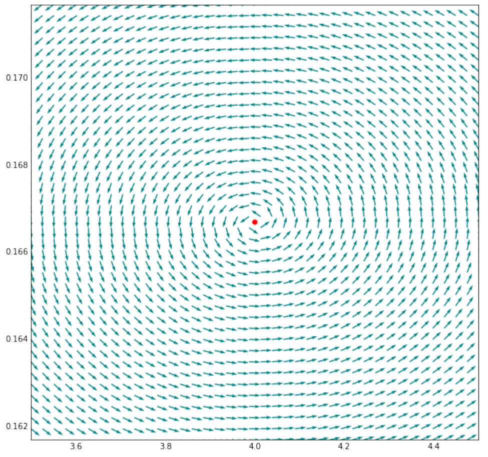
**Задача 3.** Сразу подставим значения параметров:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2}\,x - 3xy, \\ \dot{y} = -2y + \frac{1}{2}\,xy. \end{cases}$$

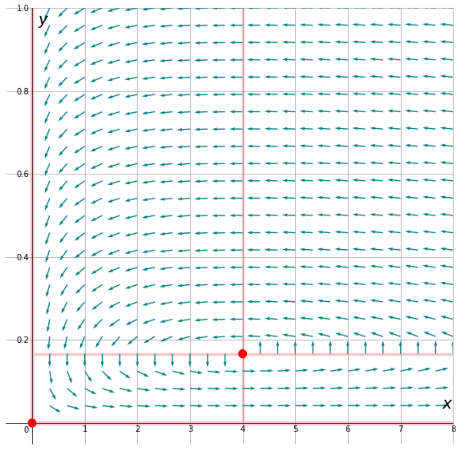
**a.** Приравняем правую часть системы к нулю и решим её:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\,x - 3xy = 0, \\ -2y + \frac{1}{2}\,xy = 0; \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x \cdot (1 - 6y) = 0, \\ y \cdot (x - 4) = 0; \end{cases} \quad \to \quad \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4, \\ y = \frac{1}{6}. \end{cases} \end{array} \right.$$

**b.** Для вертикального/горизонтального направления векторов необходимо, чтобы $\dot{x} = 0$ или $\dot{y} = 0$. Эти условия достигаются на 4 прямых: $x = 0, y = 0, x = 4, y = \dfrac{1}{6}$.



Векторное поле с выделенной точкой $\left(4, \frac{1}{6}\right)$.

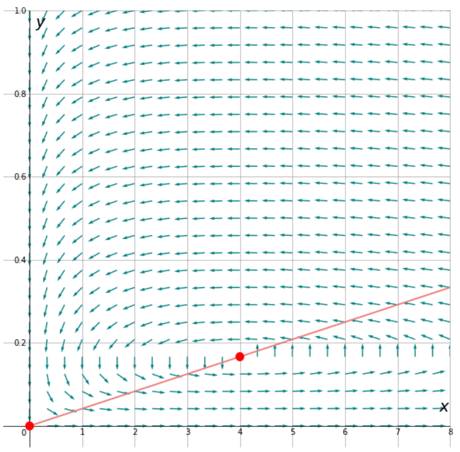


Четыре изоклины.

**c.** Пусть изоклина имеет наклон $k$ и сдвиг $b$, а векторы, расположенные на ней, направлены с наклоном $\alpha$, тогда, используя результат пункта d), получаем, что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \cdot (x - 4)}{x \cdot (1 - 6y)} = \alpha \quad \to \quad y = \frac{\alpha x}{6\alpha x + x - 4} = kx + b$$

Рассмотрим решение $k = \dfrac{1}{24}, b = 0, \alpha = -\dfrac{1}{6}$:



Наклонная изоклина $y = \dfrac{x}{24}$.

**d.** Поделим $\frac{dy}{dt}$ на $\frac{dx}{dt}$:

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx} = \frac{-2y + \frac{1}{2}\,xy}{\frac{1}{2}\,x - 3xy} = \frac{y\cdot(x-4)}{x\cdot(1-6y)} = \frac{y}{1-6y}\cdot\frac{x-4}{x}$$

**e.** Применим метод разделения переменных:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1-6y}\cdot\frac{x-4}{x} \quad\to\quad \int\frac{(1-6y)\,dy}{y} = \int\frac{(x-4)\,dx}{x} \quad\to\quad \ln|y| - 6y = x - 4\ln|x| + C$$

**f.** Перенесём в одну часть всё, кроме константы (по условию, $x\geq 0, y\geq 0$):

$$\begin{aligned} H(x,y) &= 6y - \ln y + x - 4\ln x \\ F(x) &= x - 4\ln x \\ G(y) &= 6y - \ln y \end{aligned}$$

Посмотрим на частные производные:

$$\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} = 1 - \frac{4}{x} \qquad \frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x\,\partial y} = \left(-\frac{4}{x}+1\right)'_y = 0$$

$$\frac{\partial H(x,y)}{\partial y} = 6 - \frac{1}{y} \qquad \frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial y\,\partial x} = \left(-\frac{1}{y}+6\right)'_x = 0$$

Видно, что функция удовлетворяет необходимому и достаточному условию для того, чтобы $H(x,y)$ была первым интегралом, для которого известно, что для любой пары-решения $(x(t), y(t))$ интеграл равен константе.

**g.** Найдём стационарные точки:

$$\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} = 1 - \frac{4}{x} = 0 \;\to\; x = 4,$$

$$\frac{\partial H(x,y)}{\partial y} = 6 - \frac{1}{y} = 0 \;\to\; y = \frac{1}{6}.$$

Покажем, что точка $\left(4, \frac{1}{6}\right)$ является точкой минимума. Для этого необходимо посчитать частные производные в этой точке:

$$\frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x^2} = \frac{4}{x^2} = A \implies A\Big|_{\left(4;\frac{1}{6}\right)} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial y^2} = \frac{1}{y^2} = B \implies B\Big|_{\left(4;\frac{1}{6}\right)} = 36$$

$$\frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial y\,\partial x} = 0$$

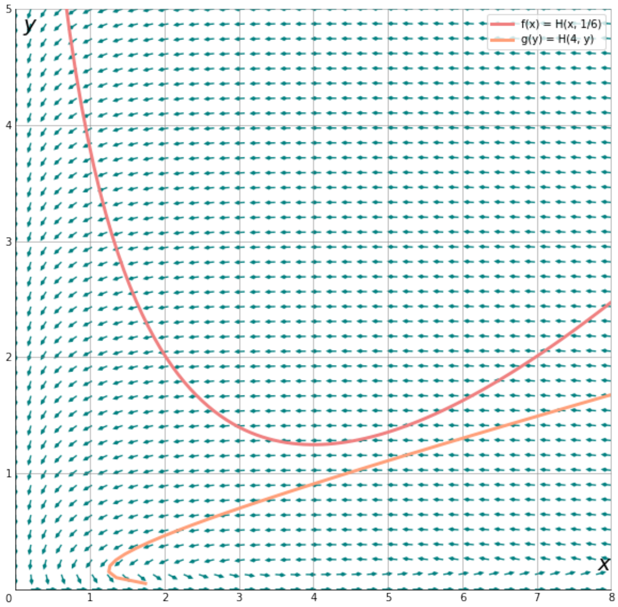
$$A\cdot B - 0 = 9 > 0$$

Следовательно, достаточное условие выполнено (теорема из курса матанализа-1). Мы знаем, что это единственная стационарная точка, откуда следует, что мы нашли все точки минимумов.

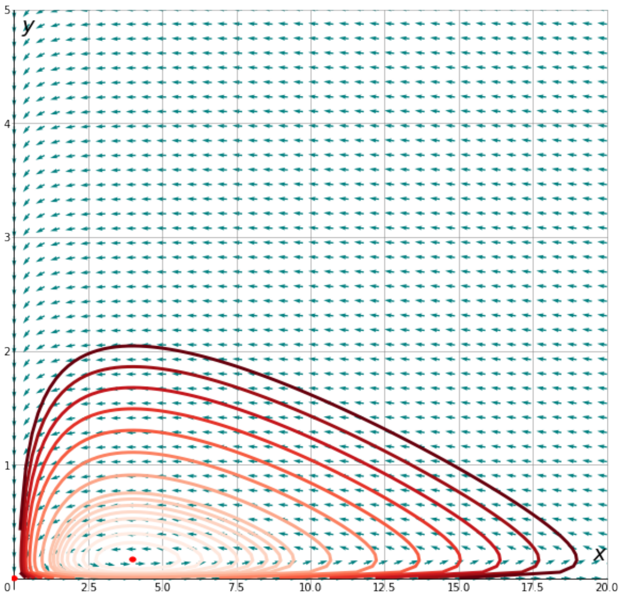
**h.** Подставим точки $x_0 = 4$ и $y_0 = \dfrac{1}{6}$:

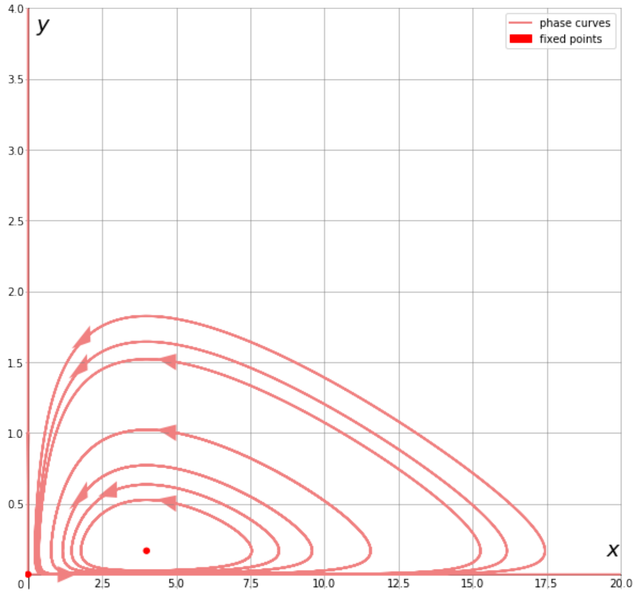
$$f(x) = H(x, y_0) = H\left(x, \frac{1}{6}\right) = 1 + \ln 6 + x - 4\ln x$$
$$g(y) = H(x_0, y) = H(4, y) = 6y - \ln y + 4 - 4\ln 4$$

Тогда их график выглядит так:




**i.** Фазовые кривые, для которых одна из координат остаётся постоянной, а другая меняется со временем, совпадают с лучами $x = 0$ и $y = 0$:




**j.** Очевидно, что существуют. Они изображены на фазовом портрете выше.

**k.** Да, существуют. Они идут вдоль ординаты или абсциссы.

**l.** Да, существуют. Примером служит предыдущий пункт.

**Задача 4.**

**a.** Уравнение $y' = y\cdot(-20x^3+\cos x) + (-8x^3+\sin x)\cdot e^{-5x^4+\sin x}$ является неоднородным линейным уравнением, где $a(x) = -20x^3+\cos x$, и $b(x) = (-8x^3+\sin x)\cdot e^{-5x^4+\sin x}$, для которого существует алгоритм решения. Для начала решим соответствующее однородное уравнение:

$$y' = a(x)\cdot y \;\to\; \frac{dy}{y} = a(x)\,dx \;\to\; y = C\cdot e^{\int a(x)\,dx}$$

$$\int(-20x^3+\cos x)\,dx = -5x^4+\sin x \;\to\; y = C\cdot e^{-5x^4+\sin x}$$

Теперь найдём константу:

$$C' = \frac{(-8x^3+\sin x)\cdot e^{-5x^4+\sin x}}{e^{-5x^4+\sin x}} = -8x^3+\sin x \;\to\; C = -2x^4-\cos x+\hat{C}$$

Итого:

$$y = (-2x^4-\cos x+\hat{C})\cdot e^{-5x^4+\sin x}$$

**b.** Выразим $y' = dy/dx$:

$$\begin{aligned}\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx} &= \frac{x^3+3x^2y-8xy^2-15y^3}{3x^3-8x^2y-15xy^2}\\ &= \frac{x^3+y\cdot(3x^2-8xy-15y^2)}{x\cdot(3x^2-8xy-15y^2)}\\ &= \frac{x^2}{3x^2-8xy-15y^2}+\frac{y}{x}\\ &= \begin{bmatrix}\frac{y}{x}=z\\ y = x\cdot z\\ y' = z + x\cdot z'\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$z + x\cdot z' = \frac{1}{3-8z-15z^2}+z \;\to\; \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x\cdot(3-8z-15z^2)} \;\to\; \int(3-8z-15z^2)\,dz = \int\frac{dx}{x}$$

$$-5z^3-4z^2+3z = \ln|x|+C \;\to\; \frac{-5y^3}{x^3}-\frac{4y^2}{x^2}+\frac{3y}{x}-\ln|x| = C$$

**c.** Аналогично предыдущему пункту:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2\sin(x^3)\cos(y^5)}{-5y^4\sin(y^5)\cos(x^3)} \;\to\; \int\tan(y^5)\,d(y^5) = -\int\tan(x^3)\,d(x^3)$$

$$\to\; \ln|\cos(y^5)|+\ln|\cos(x^3)| = C$$

**d.** Воспользуемся заменой из пункта b):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3-y\cdot(2x^2-6xy+12y^2)}{-x\cdot(2x^2-6xy+12y^2)} = -\frac{x^2}{2x^2-6xy+12y^2}+\frac{y}{x}$$

$$z + x\cdot z' = -\frac{1}{2-6z+12z^2}+z \;\to\; \int(2-6z+12z^2)\,dz = -\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{4y^3}{x^3}-\frac{3y^2}{x^2}+\frac{2y}{x}+\ln|x| = C$$

**e.** Приведём уравнение к виду из пункта c):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2\sin(x^3)\cos(y^2)}{2y\cos(x^3)\sin(y^2)} \;\to\; \int\tan(y^2)\,d(y^2) = \int\tan(x^3)\,d(x^3)$$

$$\to\; \ln|\cos(y^2)|-\ln|\cos(x^3)| = C$$

**Задача 5.** Целиком представлена в приложенном Jupyter Notebook.

**Задача 6.**

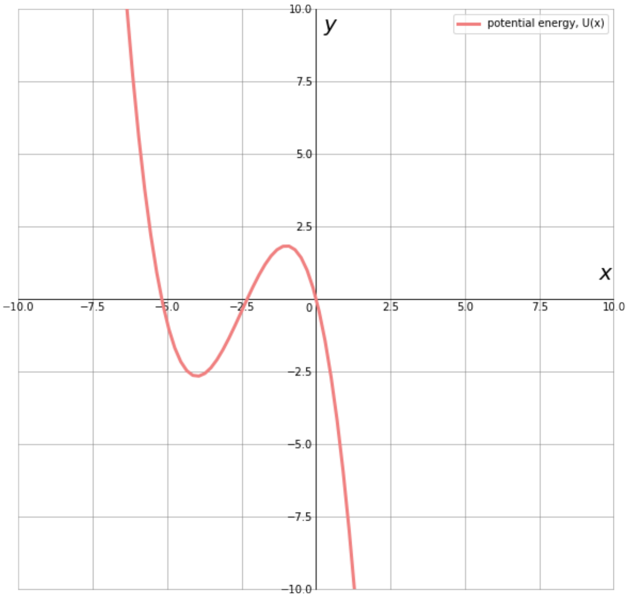
**a.** Найдём функцию потенциальной энергии (график нарисуем в пункте c)):

$$U(x) = -\int (x^2 + 5x + 4)\,dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 4x + C$$

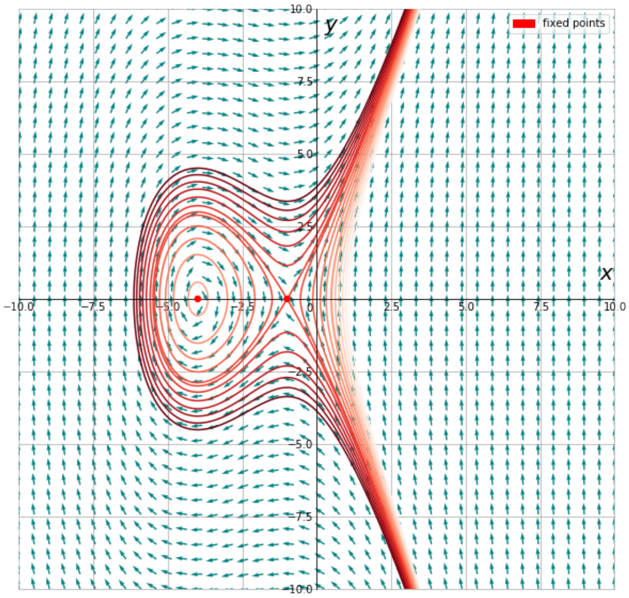
**b.** Используя обозначения кинетической энергии $V(y) = \dfrac{y^2}{2}$ с лекций ($\dot{x} = y, \dot{y} = x^2 + 5x + 4$), найдём функцию полной энергии:

$$H(x, y) = U(x) + V(y) = -\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 4x + \frac{y^2}{2} + C$$

**c.** Рисуем графики:




Потенциальная энергия.




Фазовый портрет.

Особые точки $(-4, 0)$ и $(-1, 0)$ соответствуют точкам минимума и максимума для потенциальной энергии, в них сила и скорость равны нулю. Первая является положением устойчивого равновесия, в то время как вторая — неустойчивым.

**d.** Разделим все решения на две группы: те, что определены правее точки $x = -1$, и те, что определены только левее. Руководствуясь изображением векторного поля, логикой, графиками и всем условием, что нам дано, мы можем понять, что первая группа не является периодической.

В каждой точке вектор направления будет равен $(y, x^2 + 5x + 4)$, причём координата $y$ всё время растёт по модулю ввиду положительности квадратного трёхчлена, откуда следует рост координаты $x$ (также по модулю). Для периодического решения свойственно возвращение в какую-либо ранее посещённую точку неограниченное число раз, тогда как здесь мы подобного не достигнем, так как нахождение правее точки $x = -1$ означает либо удаление от неё при положительных $y$, либо приближение к ней при отрицательных.

Тогда рассмотрим вторую группу. Для начала, явно выпишем решение для $y$:

$$y = \pm\sqrt{\frac{2x^3}{3} + 5x^2 + 8x + 2C}$$

Заметим, что мы хотим неопределённости решения в точке $x = -1$, иначе (если оно не является точкой равновесия) оно принадлежит первой группе. Тогда ограничим подкоренное уравнение сверху нулём:

$$\frac{2 \cdot (-1)^3}{3} + 5 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) + 2C < 0 \;\; \rightarrow \;\; C < \frac{11}{6}$$

Тем не менее, мы хотим, чтобы существовало хотя бы одно решение для $x < -1$, откуда получаем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{2x^3}{3} + 5x^2 + 8x + 2C \geq 0 \\ x < -1 \end{cases} \qquad \rightarrow \;\; C \geq \frac{4}{3}$$

Видно, что решения, образующие замкнутую кривую вокруг левой точки равновесия, являются периодическими. Для них мы имеем следующие ограничения:

$$\begin{cases} \dfrac{4}{3} \leq C < \dfrac{11}{6} \\ x < -1 \end{cases}$$

Помимо них нам подходят точки равновесия. Остальные решения попадают в первую группу.

**e.** Заметим, что у непостоянных периодических решений не существует предела, равно как и у тех, что уходят на бесконечность (те, что правее $x = -1$). Единственные кандидаты на конечный предел — точки равновесия.

**f.** Решения, уходящие на бесконечность (опять же, те, что правее $x = -1$), неограничены. Остаются лишь те, что левее $x = -1$ (и, конечно же, сама точка равновесия). Ограничения на все начальные условия были найдены выше, все подходящие решения являются периодическими.