Дискретная математика - 2.
Домашнее задание №5.

Lev Khoroshansky

Задача №1.

Начнём с "x - брат y" в предположении, что требуются два общих родителя разных полов, которые состоят в браке:

$$x \,\mathrm{B}\, y = M(x) \wedge \exists f, m \colon M(f) \wedge F(m) \wedge C(f,m) \wedge P(f,x) \wedge P(m,x) \wedge P(f,y) \wedge P(m,y) \wedge \neg(x=y)$$

Сразу запишем отношение "x - сестра y", так как это пригодится дальше:

$$x \,\mathrm{S}\, y = F(x) \wedge \exists f, m \colon M(f) \wedge F(m) \wedge C(f,m) \wedge P(f,x) \wedge P(m,x) \wedge P(f,y) \wedge P(m,y) \wedge \neg(x=y)$$

Теперь "x - тёща y" (mother-in-law):

$$x \,\mathrm{MIL}\, y = F(x) \wedge M(y) \wedge \exists d \colon F(d) \wedge P(x,d) \wedge C(d,y)$$

Далее, "x - племянник y" (nephew):

$$x \,\mathrm{NW}\, y = \exists s \colon (y \,\mathrm{B}\, s \vee y \,\mathrm{S}\, s) \wedge P(s,x)$$

И последнее, "x - внук y" (grandson):

$$x \,\mathrm{GS}\, y = M(x) \wedge \exists z \colon P(y,z) \wedge P(z,x)$$

Задача №2.

Просто запишем то, что требуется:

$$(\forall x \;\; \exists y \colon C(x,y)) \wedge (\forall x \;\; \exists y \colon C(y,x)) \wedge \nexists y \colon C(y,x) \;\; \forall x$$

Задача №3.

Коэффициент перед третьей степенью должен быть ненулевым, иначе полином не будет удовлетворять условию:

$$\forall c_0, c_1, c_2, c_3 \;\; ((0 < c_3) \vee (c_3 < 0)) \to (\exists x_0 \, (c_3 \cdot x_0 \cdot x_0 \cdot x_0 + c_2 \cdot x_0 \cdot x_0 + c_1 \cdot x_0 + c_0 = 0))$$

Задача №4.

Сначала нужно показать, что x – общий делитель (common divider, CD), а после – что он является наибольшим:

$$x = \mathrm{CD}(y,z) \equiv \exists y_x, z_x \colon y_x \cdot x = y \wedge z_x \cdot x = z$$
$$x = \mathrm{GCD}(y,z) \equiv x = \mathrm{CD}(y,z) \wedge \nexists c \colon (x + c) = \mathrm{CD}(y,z)$$

Задача №5.

Чтобы существовал изоморфизм, необходимо совпадение множеств по мощности (по крайней мере, у конечных множеств). Каждый предикат делит множество элементов на два класса: один, где $P_i(x) = 1$, и второй, где $P_i(x) = 0$. Так как нам даны два таких предиката, то множество разбивается на четыре класса. Следовательно, чтобы модели были неизоморфны, необходимо, чтобы мощности их классов не совпадали. Тогда нам надо посчитать количество способов разбить конечное множество на четыре подмножества. Иными словами, посчитать количество способов расставить 4 перегородки среди n шариков с повторениями.
Ответ: $\binom{n+4-1}{n} = \binom{n+3}{n} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$.

Задача №6.

В данной формуле присутствует одна “глобальная” импликация, начнём рассмотрение с неё. Понятно, что если посылка ложна, то следствие не влияет на результат - будет истина. Тогда предположим, что посылка истинна.

Далее, на конечный результат влияет импликация, содержащаяся в следствии. Тогда единственный интересный случай является точно таким же: посылка истинна, а следствие ложно. Попробуем прийти к противоречию.

Пусть $\exists x\colon P(x)$. Отсюда и из истинности первой посылки следует, что $Q(f(x))$ - истина. Обозначим $f(x)$ за y, тогда $y = f(y)$. Следовательно, для $\forall y\ Q(y) \to P(f(y))$ (опять же, из истинности первой посылки). Переименуем и получим, что $Q(f(x))$ и $P(f(x))$ истинны на одном и том же элементе. Тогда крайняя импликация обращается в истину, получаем противоречие.

Заметим, что, переименовав $P(x)$ в $Q(x)$, а $Q(x)$ в $P(x)$, ничего не изменится, то есть формула симметрична относительно расположения этих двух предикатов. Тогда случай, когда $\exists x\colon Q(x)$, полностью симметричен.
Ответ: формула является общезначимой.

Задача №7.

Рассмотрим следующую интерпретацию:

- пусть даны два множества $A = \{a\}$ и $B = \{c, d\}$;
- пусть функция $f\colon A \to B$ задана так: $f(a) = c$;
- пусть функция $g\colon B \to A$ задана так: $g(c) = a$.

Видно, что для любого $x \in A$ справедливо равенство $g(f(x)) = x$.
Также видно, что $\exists y\colon \forall x \in A\, f(x) \neq y$. Этим y будет элемент d.
Ответ: формула является выполнимой.

Задача №8.

а) вторая формула говорит о том, что существует такой элемент t, что $P(x,t)$ – истина для $\forall x$. Первая же даёт понять, что существует l, для которого $P(l,y)$ – ложь для $\forall y$. Исходя из такой логики, можно утверждать, что $P(l,t)$ должен быть одновременно и истиной, и ложью. Следовательно, данная теория противоречива.

б) первая формула заявляет об антирефлексивности, а вторая – о транзитивности. Тогда, используя третью формулу, можем заключить, что, раз $\exists x\,\exists y\colon P(x,y)\wedge P(y,x)$, то по транзитивности $P(x,x)$, тогда как антирефлексивность это запрещает. Теория противоречива.

в) нам даны рефлексивность и транзитивность. Третью формулу можно опустить, полагая $x = y$. Четвёртая говорит о том, что существуют два таких элемента, что предикат ложен вне зависимости от порядка подстановки.

Рассмотрим модель (на множестве $\mathbb{Z}$), где этот предикат понимается как чётность разности двух элементов. Тогда $P(x,x) = (x-x) = 0 \mod 2$ – истина; если $P(x,y)$ – истина, то x и y имеют одинаковую чётность. Следовательно, y и z тоже. Тогда x и z также будут одинаково чётны. Транзитивность присутствует. Пример двух элементов, для которых предикат даёт ложь – 1 и 2.

Теория имеет модель, а значит, является совместной.

Ответ: а) нет; б) нет; в) да.