Continuous Optimization
Homework 1

Lev Khoroshansky

Задача 1. Пусть существуют такие векторы $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ и $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)$ из множества $Q = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n_+ \,\middle|\, \prod\limits_{i=1}^n \mathbf{z}_i \geqslant 1 \right\}$, и скаляр $\theta \in [0;1]$, что $\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{y} \notin Q$. Покажем, что это не так:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^n [\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{y}]_i = \prod_{i=1}^n [\theta\mathbf{x}_i + (1-\theta)\mathbf{y}_i] &\geqslant \prod_{i=1}^n \left[(\mathbf{x}_i)^\theta \cdot (\mathbf{y}_i)^{(1-\theta)}\right] \text{ (в силу неравенства из условия)} \\
&= \prod_{i=1}^n (\mathbf{x}_i)^\theta \cdot \prod_{i=1}^n (\mathbf{y}_i)^{(1-\theta)} = \left(\prod_{i=1}^n \mathbf{x}_i\right)^\theta \cdot \left(\prod_{i=1}^n \mathbf{y}_i\right)^{(1-\theta)} \\
&\geqslant 1^\theta \cdot 1^{(1-\theta)} = 1
\end{aligned}$$

Таким образом, $\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{y} \in Q$, а, следовательно, Q является выпуклым множеством.

Задача 2. Рассмотрим каждый пункт отдельно.

a. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \alpha \leqslant \mathbf{a}^T\mathbf{z} \leqslant \beta \right\}$ и $\theta \in [0;1]$, причём $\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{y} \notin Q$, тогда:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}^T[\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{y}] = \theta(\mathbf{a}^T\mathbf{x}) + (1-\theta)(\mathbf{a}^T\mathbf{y}) \geqslant \theta\alpha + (1-\theta)\alpha = \alpha \\
\mathbf{a}^T[\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{y}] = \theta(\mathbf{a}^T\mathbf{x}) + (1-\theta)(\mathbf{a}^T\mathbf{y}) \leqslant \theta\beta + (1-\theta)\beta = \beta
\end{aligned}$$

Следовательно, множество Q, именуемое полосой, является выпуклым.

b. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q = \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \leqslant \mathbf{z}_i \leqslant \beta_i, \ \forall i = 1, \ldots, n \}$ и $\theta \in [0;1]$, причём $\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{y} \notin Q$, тогда для каждой координаты справедливо следующее:

$$\begin{aligned}
\theta\mathbf{x}_i + (1-\theta)\mathbf{y}_i \geqslant \theta\alpha_i + (1-\theta)\alpha_i = \alpha_i \\
\theta\mathbf{x}_i + (1-\theta)\mathbf{y}_i \leqslant \theta\beta_i + (1-\theta)\beta_i = \beta_i
\end{aligned}$$

Видно, что множество Q выпукло.

c. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_1^T\mathbf{z} \leqslant \mathbf{b}_1, \ \mathbf{a}_2^T\mathbf{z} \leqslant \mathbf{b}_2 \right\}$ и $\theta \in [0;1]$, причём $\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{y} \notin Q$, тогда для каждой пары ограничений $(\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j)$ выполнено:

$$\mathbf{a}_j^T\left[\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{y}\right] = \theta(\mathbf{a}_j^T\mathbf{x}) + (1-\theta)(\mathbf{a}_j^T\mathbf{y}) \leqslant \theta\mathbf{b}_j + (1-\theta)\mathbf{b}_j = \mathbf{b}_j$$

Таким образом, множество Q, или же клин, является выпуклым.

d. Перепишем данное множество по-другому:

$$Q(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2 \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \, \forall y \in S \subseteq \mathbb{R}^n\}$$
$$= \bigcap_{y \in S} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2 \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2\}$$

Покажем, что множество $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2 \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2\}$ является полупространством:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2 \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 &\iff \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2 \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 \ \text{ (в силу неотрицательности нормы)} \\
&\iff (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \leqslant (\mathbf{x} - \mathbf{b})^T(\mathbf{x} - \mathbf{b}) \ \text{ (по определению)} \\
&\iff \mathbf{x}^T\mathbf{x} - 2\mathbf{a}^T\mathbf{x} + \mathbf{a}^T\mathbf{a} \leqslant \mathbf{x}^T\mathbf{x} - 2\mathbf{b}^T\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{b} \\
&\iff 2(\mathbf{b} - \mathbf{a})^T\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}^T\mathbf{b} - \mathbf{a}^T\mathbf{a}
\end{aligned}$$

Положим $\mathbf{c} = 2(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ и $d = (\mathbf{b}^T\mathbf{b} - \mathbf{a}^T\mathbf{a})$, откуда получаем неравенство $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leqslant d$, что является равносильным определением полупространства.

Таким образом, множество $Q(\mathbf{x}_0)$ является пересечением полупространств (которые являются выпуклыми), а операция "пересечение" сохраняет выпуклость.

e. Понятно, что $\theta \in [0; 1]$ (иначе при $\theta < 0$ получается пустое множество). Также нам неинтересен случай, в котором $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ (иначе $\theta = 1$ и получается тривиальное множество). Рассмотрим данное в условии множество подробнее:

$$\begin{aligned}
Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \theta) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2 \leqslant \theta \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2\} \\
&= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2 \leqslant \theta^2 \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2\} \\
&= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2 - \theta^2 \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 \leqslant 0\} \\
&= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T(\mathbf{x} - \mathbf{a}) - \theta^2(\mathbf{x} - \mathbf{b})^T(\mathbf{x} - \mathbf{b}) \leqslant 0\} \\
&= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_2^2 - 2\mathbf{a}^T\mathbf{x} + \|\mathbf{a}\|_2^2 - \theta^2 \cdot \|\mathbf{x}\|_2^2 + 2\theta^2 \cdot \mathbf{b}^T\mathbf{x} - \theta^2 \cdot \|\mathbf{b}\|_2^2 \leqslant 0\} \\
&= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (1 - \theta^2) \cdot \|\mathbf{x}\|_2^2 - 2\left[\mathbf{a} - \theta^2\mathbf{b}\right]^T \mathbf{x} \leqslant \theta^2 \|\mathbf{b}\|_2^2 - \|\mathbf{a}\|_2^2\}
\end{aligned}$$

В случае $\theta = 1$ мы имеем полупространство (показано в предыдущем пункте), а оно является выпуклым. Всюду дальше $\theta \in [0; 1)$:

$$\begin{aligned}
Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \theta) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (1 - \theta^2) \cdot \|\mathbf{x}\|_2^2 - 2\left[\mathbf{a} - \theta^2\mathbf{b}\right]^T \mathbf{x} \leqslant \theta^2 \|\mathbf{b}\|_2^2 - \|\mathbf{a}\|_2^2\} \\
&= \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|\mathbf{x}\|_2^2 - 2\,\frac{\left[\mathbf{a} - \theta^2\mathbf{b}\right]^T}{1 - \theta^2}\,\mathbf{x} \leqslant \frac{\theta^2 \|\mathbf{b}\|_2^2 - \|\mathbf{a}\|_2^2}{1 - \theta^2}\right\}
\end{aligned}$$

Положим $\mathbf{x}_0 = \dfrac{\mathbf{a} - \theta^2\mathbf{b}}{1 - \theta^2}$, тогда:

$$\begin{aligned}
Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \theta) &= \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|\mathbf{x}\|_2^2 - 2\,\frac{\left[\mathbf{a} - \theta^2\mathbf{b}\right]^T}{1 - \theta^2}\,\mathbf{x} \leqslant \frac{\theta^2 \|\mathbf{b}\|_2^2 - \|\mathbf{a}\|_2^2}{1 - \theta^2}\right\} \\
&= \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|\mathbf{x}\|_2^2 - 2\mathbf{x}_0^T\mathbf{x} \leqslant \frac{\theta^2 \|\mathbf{b}\|_2^2 - \|\mathbf{a}\|_2^2}{1 - \theta^2}\right\}
\end{aligned}$$

Добавим с каждой стороны неравенства $\|\mathbf{x}_0\|_2^2$:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{a},\mathbf{b},\theta) &= \left\{ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \|\mathbf{x}\|_2^2 - 2\mathbf{x}_0^T\mathbf{x} \leqslant \frac{\theta^2\|\mathbf{b}\|_2^2 - \|\mathbf{a}\|_2^2}{1-\theta^2} \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \|\mathbf{x}\|_2^2 - 2\mathbf{x}_0^T\mathbf{x} + \|\mathbf{x}_0\|_2^2 \leqslant \frac{\theta^2\|\mathbf{b}\|_2^2 - \|\mathbf{a}\|_2^2}{1-\theta^2} + \|\mathbf{x}_0\|_2^2 \right\} \end{aligned}$$

Положим $R^2 = \left[\dfrac{\theta^2\|\mathbf{b}\|_2^2 - \|\mathbf{a}\|_2^2}{1-\theta^2} + \|\mathbf{x}_0\|_2^2\right]$, тогда:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{a},\mathbf{b},\theta) &= \left\{ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \|\mathbf{x}\|_2^2 - 2\mathbf{x}_0^T\mathbf{x} + \|\mathbf{x}_0\|_2^2 \leqslant \frac{\theta^2\|\mathbf{b}\|_2^2 - \|\mathbf{a}\|_2^2}{1-\theta^2} + \|\mathbf{x}_0\|_2^2 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_2^2 - 2\mathbf{x}_0^T\mathbf{x} + \|\mathbf{x}_0\|_2^2 \leqslant R^2 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \mid (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \leqslant R^2 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|_2^2 \leqslant R^2 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| \leqslant R \right\} \end{aligned}$$

Таким образом, $Q(\mathbf{a},\mathbf{b},\theta)$ при $\theta\in[0;1)$ является шаром, что представляет из себя выпуклое множество. Осталось лишь показать, что $R^2 \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} &0 \leqslant R^2 \\ &0 \leqslant \frac{\theta^2\|\mathbf{b}\|_2^2 - \|\mathbf{a}\|_2^2}{1-\theta^2} + \|\mathbf{x}_0\|_2^2 \\ &0 \leqslant (1-\theta^2)[\theta^2\cdot\mathbf{b}^T\mathbf{b} - \mathbf{a}^T\mathbf{a}] + \mathbf{a}^T\mathbf{a} - 2\theta^2\cdot\mathbf{a}^T\mathbf{b} + \theta^4\cdot\mathbf{b}^T\mathbf{b} \\ &0 \leqslant \theta^2\cdot\mathbf{b}^T\mathbf{b} - \mathbf{a}^T\mathbf{a} - \theta^4\cdot\mathbf{b}^T\mathbf{b} + \theta^2\mathbf{a}^T\mathbf{a} + \mathbf{a}^T\mathbf{a} - 2\theta^2\cdot\mathbf{a}^T\mathbf{b} + \theta^4\cdot\mathbf{b}^T\mathbf{b} \\ &0 \leqslant \mathbf{b}^T\mathbf{b} - 2\mathbf{a}^T\mathbf{b} + \leqslant \mathbf{a}^T\mathbf{a} \\ &0 \leqslant \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|_2^2 \end{aligned}$$

Ответ: все приведённые в условии множества являются выпуклыми.

Задача 3. Для начала покажем, что для двух произвольных непустых множеств $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ справедливо равенство $\mathbf{conv}(S_1+S_2) = \mathbf{conv}(S_1) + \mathbf{conv}(S_2)$. По определению, $S_1+S_2 = \{\mathbf{x}+\mathbf{y} \mid \mathbf{x}\in S_1,\ \mathbf{y}\in S_2\}$, тогда для $\mathbf{z}\in\mathbf{conv}(S_1+S_2)$ выполняется следующее:

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \lambda_1(\mathbf{x_1}+\mathbf{y_1}) + \cdots + \lambda_n(\mathbf{x_n}+\mathbf{y_n}) \\ &= \lambda_1\mathbf{x_1} + \cdots + \lambda_n\mathbf{x_n} + \lambda_1\mathbf{y_1} + \cdots + \lambda_n\mathbf{y_n} \\ &= \mathbf{x}+\mathbf{y},\ \text{ где } \mathbf{x}\in\mathbf{conv}(S_1),\ \mathbf{y}\in\mathbf{conv}(S_2) \end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что $\mathbf{conv}(S_1+S_2) \subseteq \mathbf{conv}(S_1)+\mathbf{conv}(S_2)$. Теперь в обратную сторону, для $\mathbf{x} = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i\mathbf{x}_i \in \mathbf{conv}(S_1)$, $\mathbf{y} = \sum\limits_{j=1}^k \mu_j\mathbf{y}_j \in \mathbf{conv}(S_2)$ заметим, что

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i\mathbf{x}_i + \mathbf{y}_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathbf{x}_i+\mathbf{y}_j),\ \text{ так как} \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

Таким образом, $\mathbf{x}+\mathbf{y}_j \in \mathbf{conv}(S_1+S_2)$. Теперь рассмотрим $\mathbf{x}+\mathbf{y}$:

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{k} \mu_j \mathbf{y}_j + \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{k} \mu_j (\mathbf{y}_j + \mathbf{x}), \text{ так как} \sum_{j=1}^{k} \mu_j = 1.$$

Следовательно, $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in \mathbf{conv}(\mathbf{conv}(S_1+S_2))$. Но так как $\mathbf{conv}(S_1+S_2)$ – выпуклое множество, то $\mathbf{conv}(\mathbf{conv}(S_1+S_2)) = \mathbf{conv}(S_1+S_2)$, откуда имеем $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in \mathbf{conv}(S_1+S_2)$. Мы показали вложение множеств в обе стороны, откуда следует, что множества равны.

Возвращаясь к исходной задаче, докажем требуемое утверждение по индукции:

$\underline{k=1}$: $\mathbf{conv}(S_1) = \mathbf{conv}(S_1)$ – очевидно.

$\vdots$

$\underline{k=n}$: пусть верно, как предположение индукции.

$\underline{k=n+1}$: нужно доказать, что $\mathbf{conv}\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1} S_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \mathbf{conv}(S_i)$.

Заметим, что для $\widehat{S} = \sum\limits_{i=1}^{n} S_i$ справедливо $\mathbf{conv}(\widehat{S}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{conv}(S_i)$, откуда получается, что нужно доказать равенство $\mathbf{conv}\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1} S_i\right) = \mathbf{conv}\left(\widehat{S} + S_{n+1}\right) = \mathbf{conv}(\widehat{S}) + \mathbf{conv}(S_{n+1})$, а подобное было проделано в начале.

Следовательно, для произвольных непустых множеств $\{S_1, \ldots, S_k\}$ справедливо равенство

$$\mathbf{conv}\left(\sum_{i=1}^{k} S_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{conv}(S_i).$$

Задача 4. Рассмотрим каждый пункт отдельно.

a. Заметим, что для векторов из множества $Q = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{z}_0 \geqslant \sqrt{\mathbf{z}_1^2 + \cdots + \mathbf{z}_{n-1}^2}, \mathbf{z}_1 \geqslant 0\}$ справедливо неравенство $\mathbf{z}_0 \geqslant 0$, так как квадратный корень – функция неотрицательная. Также заметим, что для этих первых координат справедливо

$$\|\theta \mathbf{z}_0 + (1-\theta)\mathbf{v}_0\|_2 = \theta \|\mathbf{z}_0\|_2 + (1-\theta)\|\mathbf{v}_0\|_2, \quad \text{где } \theta \in [0;1], \text{так как это неотрицательные числа.}$$

Рассмотрим два вектора $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$ и скаляр $\theta \in [0;1]$:

$$\begin{aligned}
\left\|\theta \mathbf{x}_{1\ldots[n-1]} + (1-\theta)\mathbf{y}_{1\ldots[n-1]}\right\|_2 &\leqslant \theta \left\|\mathbf{x}_{1\ldots[n-1]}\right\|_2 + (1-\theta)\left\|\mathbf{y}_{1\ldots[n-1]}\right\|_2 && \text{(так как норма выпукла)} \\
&\leqslant \theta \|\mathbf{x}_0\|_2 + (1-\theta)\|\mathbf{y}_0\|_2 && \text{(условие)} \\
&= \|\theta \mathbf{x}_0 + (1-\theta)\mathbf{y}_0\|_2 && \text{(показано ранее)}
\end{aligned}$$

Таким образом, Q является выпуклым множеством.

b. Заметим, что неравенство $x^4 + y^4 + z^4 \leqslant 1$ равносильно $\sqrt[4]{x^4 + y^4 + z^4} \leqslant \sqrt[4]{1} = 1$. Перепишем данное в условии множество $Q = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{z}_1^4 + \mathbf{z}_2^4 + \mathbf{z}_3^4 \leqslant 1,\, \mathbf{z}_1 \geqslant 0\}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} Q &= \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{z}_1^4 + \mathbf{z}_2^4 + \mathbf{z}_3^4 \leqslant 1,\, \mathbf{z}_1 \geqslant 0\} \\ &= \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{z}\|_4^4 \leqslant \|1\|_4^4,\, \mathbf{z}_1 \geqslant 0\} \\ &= \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{z}\|_4 \leqslant 1,\, \mathbf{z}_1 \geqslant 0\} \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим два вектора $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$ и скаляр $\theta \in [0; 1]$:

$$\begin{aligned} \|\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{y}\|_4 &\leqslant \theta\|\mathbf{x}\|_4 + (1-\theta)\|\mathbf{y}\|_4 && \text{(выпуклость нормы)} \\ &\leqslant \theta + (1-\theta) && \text{(ограничение } \|\mathbf{z}\|_4 \leqslant 1\text{)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Следовательно, для вектора $\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{y}$ справедливо первое ограничение. Теперь заметим, что множество Q является пересечением двух выпуклых множеств (выпклость первого мы показали явно, а второе ограничение задаёт полупространство), откуда можем сделать вывод, что Q выпукло.

c. Множество из условия выглядит так: $Q = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \mid \exp(\mathbf{z}_1) \leqslant \mathbf{z}_2,\, \mathbf{z}_2 \leqslant 3\mathbf{z}_1\}$. Исследуем первое ограничение: $\exp(\mathbf{z}_1) \leqslant \mathbf{z}_2$, – рассмотрим два вектора $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$ и скаляр $\theta \in [0; 1]$:

$$\begin{aligned} \exp(\theta\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{y}_1) &= [\exp(\mathbf{x}_1)]^\theta \cdot [\exp(\mathbf{y}_1)]^{1-\theta} \\ &\leqslant \mathbf{x}_2^\theta \cdot \mathbf{y}_2^{1-\theta} && \text{(ограничение)} \\ &\leqslant \theta\mathbf{x}_2 + (1-\theta)\mathbf{y}_2 && \text{(вспомогательное неравенство из задачи } \mathbf{1.}\text{)} \end{aligned}$$

Видно, что первое ограничение задаёт выпуклое множество. Аналогичная ситуация со вторым, которое задаёт полупространство ($\mathbf{c} = (3, -1),\ \ \mathbf{c}^T\mathbf{z} \geqslant 0$). Следовательно, множество Q является выпуклым как пересечение двух выпуклых.

d. Для множества $Q(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b} > 0\}$, где $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m_+$ рассмотрим отдельную строку $\mathbf{a}_i$ матрицы $\mathbf{A}$, вектор $\mathbf{x} \in Q$ и координату $\mathbf{b}_i$ вектора $\mathbf{b}$:

$$[\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}]_i = \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} + \mathbf{b}_i > 0$$

Видно, что каждая строка матрицы и соответствующая координата свободного вектора задаёт ограничение на полупространство, которое является выпуклым. Следовательно, исходное неравнство является требованием на неравенства по каждой строке. Таким образом, множество Q является выпуклым, так как оно – пересечением полупространств.

e. Покажем, что функция $f(x) = x^2$ является выпуклой ($x, y \in \mathbb{R}, \theta \in [0; 1]$):

$$\begin{aligned} f(\theta x + (1-\theta)y) &= (\theta x + (1-\theta)y)^2 \\ &= \theta^2x^2 + 2\theta(1-\theta)xy + (1-\theta)^2y^2 \\ \theta f(x) + (1-\theta)f(y) &= \theta x^2 + (1-\theta)y^2 \end{aligned}$$

Сведём к одному неравенству ($\theta \neq 0$ и $\theta \neq 1$, эти случаи очевидны):

$$\begin{aligned} \theta^2x^2 + 2\theta(1-\theta)xy + (1-\theta)^2y^2 &\leqslant \theta x^2 + (1-\theta)y^2 \\ 2\theta(1-\theta)xy &\leqslant \theta(1-\theta)x^2 + (1-1+\theta)(1-\theta)y^2 \\ 2xy &\leqslant x^2 + y^2 \\ 0 &\leqslant (x-y)^2 \end{aligned}$$

Теперь покажем, что функция $g(x) = x^4$ тоже является выпуклой:

$$\begin{aligned} g(\theta x + (1-\theta)y) &= (\theta x + (1-\theta)y)^4 = \left((\theta x + (1-\theta)y)^2\right)^2 \\ &\leqslant \left(\theta x^2 + (1-\theta)y^2\right)^2 && \text{(так как } f(x) = x^2 \text{ выпукла)} \\ &\leqslant \theta x^4 + (1-\theta)y^4 && \text{(так как } f(x) = x^2 \text{ выпукла)} \end{aligned}$$

Таким образом, первое ограничение множества $Q = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{z}_1^4 \leqslant \mathbf{z}_2,\ \mathbf{z}_2 \leqslant 1\}$ задаёт выпуклое множество, равно как и второе (полупространство). Следовательно, Q является выпуклым как пересечение двух выпуклых множеств.

f. Данное в условии множество $Q = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{z}_2 \geqslant \mathbf{z}_1^4 - 2\mathbf{z}_1^2 + 1\}$ не является выпуклым, приведём контрпример. Пусть $\mathbf{x} = (0, 1)$, $\mathbf{y} = (1, 0) \in Q$, $\theta = \frac{1}{2}$, тогда

$$\frac{1}{2}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2} \ngeqslant \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \quad \longrightarrow \quad 0 \ngeqslant \frac{1}{16}$$

Видно, что точка $\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{y} \notin Q$.

Ответ: множества из всех пунктов выпуклые, не считая пункта **f**.

Задача 5. Воспользуемся условием выпуклости второго порядка:

$$\nabla_{\mathbf{x}_i} f(x) = 4\,\mathbf{x}_i^3 \quad \longrightarrow \quad \nabla^2_{\mathbf{x}_i} f(x) = 12\,\mathbf{x}_i^2$$

Очевидно, что $\dfrac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_i\,\partial \mathbf{x}_j} f(x) = 0$, тогда гессиан выглядит следующим образом:

$$12\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{x}_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{x}_n^2 \end{pmatrix} = 12\,\mathrm{diag}(\mathbf{x}_1^2, \dots, \mathbf{x}_n^2)$$

Несложно видеть, что определитель гессиана неотрицательный, откуда следует, что функция $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i^4$ является выпуклой.

Задача 6. Рассмотрим каждый пункт отдельно.

a. Докажем по определению: для $x, y \in \mathbb{R}$ и $\theta \in [0; 1]$ проверим следующее неравенство

$$\begin{gathered} \exp\left(\theta x + (1-\theta)y\right) \leqslant \theta(\exp(x) - 1) + (1-\theta)(\exp(y) - 1) \\ (\exp(x))^\theta \cdot (\exp(y))^{1-\theta} - 1 \leqslant \theta\exp(x) + (1-\theta)\exp(y) - \theta + \theta - 1 \\ (\exp(x))^\theta \cdot (\exp(y))^{1-\theta} \leqslant \theta\exp(x) + (1-\theta)\exp(y) \end{gathered}$$

Последнее неравенство равносильно вспомогательному неравенству из задачи **1**, откуда мы можем сделать вывод, что функция выпукла.

b. Приведём контрпример, чтобы показать, что функция не является выпуклой.
Положим $\mathbf{x} = (1, 3), \mathbf{y} = (3, 1), \theta = \dfrac{1}{2}$, тогда

$$\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{y} = (2, 2) \quad \longrightarrow \quad f(2, 2) = 4 \neq 3 = \frac{1}{2}3 + \frac{1}{2}3 = \theta f(\mathbf{x}) + (1-\theta)f(\mathbf{y})$$

c. Воспользуемся условием выпуклости второго порядка:

$$\nabla^2 f(x) = \det \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\mathbf{x}_1^3\,\mathbf{x}_2} & \dfrac{1}{\mathbf{x}_1^2\,\mathbf{x}_2^2} \\ \dfrac{1}{\mathbf{x}_1^2\,\mathbf{x}_2^2} & \dfrac{2}{\mathbf{x}_1\,\mathbf{x}_2^3} \end{pmatrix} = \frac{3}{\mathbf{x}_1^4\,\mathbf{x}_2^4} > 0$$

Видно, что, в силу положительности гессиана, функция $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \dfrac{1}{\mathbf{x}_1\,\mathbf{x}_2}$ выпукла.

Ответ: функции из всех пунктов выпуклые, не считая пункта **b**.

Задача 7. Воспользуемся условием выпуклости первого порядка. Нам нужно показать, что для векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{z}_2 > 0\}$ и функции $f(\mathbf{z}) = \dfrac{\mathbf{z}_1^2}{\mathbf{z}_2}$ справедливо неравенство

$$f(\mathbf{y}) \geqslant f(\mathbf{x}) + \langle \nabla f(\mathbf{x}),\, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle$$

Подставим:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{y}_1^2}{\mathbf{y}_2} &\geqslant \frac{\mathbf{x}_1^2}{\mathbf{x}_2} + \left\langle \left(\frac{2\,\mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_2}, \frac{-\mathbf{x}_1^2}{\mathbf{x}_2^2} \right), (\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_2) \right\rangle \\ &\geqslant \frac{\mathbf{x}_1^2}{\mathbf{x}_2} + \frac{2\,\mathbf{x_1}(\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_1)}{\mathbf{x}_2} - \frac{\mathbf{x}_1^2(\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_2)}{\mathbf{x}_2^2} \end{aligned}$$

Домножим на $\mathbf{x}_2^2\,\mathbf{y}_2$ (каждая из этих двух координат больше нуля по условию):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2^2\,\mathbf{y}_1^2 &\geqslant \mathbf{x}_1^2\,\mathbf{x}_2 + 2\,\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2 - 2\,\mathbf{x}_1^2\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1^2\mathbf{y}_2^2 + \mathbf{x}_1^2\mathbf{x}_2 \\ &\geqslant 2\,\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_1^2\mathbf{y}_2^2 \end{aligned}$$

Перенесём в одну сторону:

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \mathbf{x}_2^2\mathbf{y}_1^2 - 2\,\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2 + \mathbf{x}_1^2\mathbf{y}_2^2 \\ &\leqslant (\mathbf{x}_1\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_2\mathbf{y}_1)^2 \end{aligned}$$

Ответ: функция $f(\mathbf{z})$ является выпуклой на заданном множестве.

Задача 8. Рассмотрим гессиан функции $f(\mathbf{p}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i \log \mathbf{p}_i$:

$$\nabla^2 f(\mathbf{p}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{p}_2^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{p}_n^{-1} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i^{-1} > 0, \text{ так как } \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}.$$

Следовательно, функция $f(\mathbf{p})$ является строго выпуклой. Из этого следует две вещи:

1. $D(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ представляет из себя условие выпуклости первого порядка для функции $f(\mathbf{p})$, а выпуклость функции уже доказана, следовательно, $D(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \geqslant 0$.

2. Мы показали, что $f(\mathbf{p})$ строго выпукла, откуда следует, что $D(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$, только если $\mathbf{p} = \mathbf{q}$.