# Математическая статистика.
# Домашнее задание №2.

Lev Khoroshansky

## Задача №13.

Разберёмся поподробнее со случайной величиной $m_n = \min(\xi_1, \dots, \xi_n)$ — найдём её распределение:

$$F_{m_n}(t) = \mathbb{P}(m_n \leqslant t) = \mathbb{P}(\min(\xi_1, \dots, \xi_n) \leqslant t).$$

Иными словами, хотя бы одна из $\xi_k$ должна быть меньше либо равна $t$. Найдём вероятность дополнения этого события:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi_1 > t, \dots, \xi_n > t) &= \mathbb{P}(\xi_1 > t) \dots \mathbb{P}(\xi_n > t) \text{ (ввиду независимости.)} \\
&= (1 - \mathbb{P}(\xi_1 \leqslant t)) \dots (1 - \mathbb{P}(\xi_n \leqslant t)) \\
&= (1 - F_{\xi_1}(t)) \dots (1 - F_{\xi_n}(t)) \\
&= (1 - F_{\xi_k}(t))^n \text{ (ввиду одинакового распределения.)}
\end{aligned}$$

Возвращаясь к исходной задаче:

$$F_{m_n}(t) = 1 - (1 - F_{\xi_k}(t))^n.$$

Теперь выпишем несколько членов последовательности, которую она образует:

- $m_1 = \min(\xi_1) = \xi_1$;
- $m_2 = \min(\xi_1, \xi_2) \leqslant \min(\xi_1) = m_1 \implies m_2 \leqslant m_1$;
- $m_3 = \min(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \leqslant \min(\xi_1, \xi_2) = m_2 \implies m_3 \leqslant m_2$;
- $\dots$
- $m_n = \min(\xi_1, \dots, \xi_n) \leqslant m_{n-1}$ — следует по индукции.

Таким образом, можно увидеть, что $\{m_n\}$ – (монотонно) невозрастающая последовательность. Также, важно не забыть, что $m_n \in [0; 1]$, то есть она ограниченна снизу 0. Откуда (зная курс математического анализа) можно утверждать, что эта последовательность имеет предел. От нас требуется доказать следующее:

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} m_n = 0\right) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} m_n > 0\right) = 0.$$

Как было разобрано на семинаре, второе событие можно представить следующим образом:

$$\bigcup \{\omega \colon m(\omega) \geqslant \varepsilon\}, \text{ для всех } \varepsilon > 0.$$

Но тут мы используем вещественные $\varepsilon$, что даёт несчётность объединения. Тогда воспользуемся последовательностью дробей вида $\dfrac{1}{k}$, где $k \in \mathbb{N}$:

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left\{\omega \colon m(\omega) \geqslant \frac{1}{k}\right\}$$

Заметим, что это событие эквивалентно тому, что для любого фиксированного $k \in \mathbb{N}$ каждая из $\xi_j$ попадает в отрезок $\left[\frac{1}{k}; 1\right]$. Из независимости можем заключить, что

$$\mathbb{P}\left(\xi_1 \geqslant \frac{1}{k}, \ldots, \xi_n \geqslant \frac{1}{k}\right) = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n \to 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(\xi_1 \geqslant \frac{1}{k}, \ldots, \xi_n \geqslant \frac{1}{k}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n \text{ сходится (как геометрическая прогрессия) для любого } k.$$

Откуда, используя задачу №7, получаем такой результат:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left\{\omega\colon m(\omega) \geqslant \frac{1}{k}\right\}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} m_n > 0\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} m_n = 0\right) = 1.$$

## Задача №14.

Воспользуемся следующим инструментарием:

- закон больших чисел, а в частности — его усиленная форма, которая была разобрана на семинаре, или же ЗБЧ в форме Колмогорова, который был на лекциях;
- борелевские функции от случайных величин — случайные величины;
- непрерывные функции — хорошие функции;
- логарифмы и их свойства;
- поиск математического ожидания функции от случайной величины с помощью интеграла.

Поехали:

$$\begin{gathered}
\eta_n = \sqrt[n]{\xi_1 \ldots \xi_n} \implies \\
\implies \ln \eta_n = \frac{1}{n} \ln(\xi_1 \ldots \xi_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln \xi_k \\
\mathbb{E} \ln \xi_k = \int_0^1 \ln x \, dx = x\,(\ln x - 1)\Big|_0^1 = -1 < \infty \implies \\
\implies \ln \eta_n \longrightarrow -1 \text{ (почти наверное)} \\
\eta_n = e^{\ln \eta_n} \longrightarrow e^{-1} \text{ (почти наверное)}
\end{gathered}$$

Доказательство очевидным образом следует из выкладок выше и упомянутой теории, а сам предел равен $e^{-1}$.