Дискретная математика - 2.
Домашнее задание №4.

Lev Khoroshansky

Задача №1.

Утверждение из условия выглядит следующим образом в терминах логики:

$$A \to B, \quad \text{где } A \text{ – “будет дождь”, а } B \text{ – “Петя чихнул”.}$$

Из этого не следует истинность формулы $B \to A$, что как раз и будет утверждением вида “Петя чихнул” $\to$ “будет дождь” (иными словами, Петя может чихать не только перед дождём, но и в других ситуациях).
Ответ: нет, неправильно.

Задача №2.

Построим таблицу истинности для нашей формулы и на её основании сконструируем ДНФ:

p	**q**	**r**	**F**
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Тогда итоговая формула будет выглядеть следующим образом:

$$F(p, q, r) = (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$$

Легко видеть, что формула истинна тогда и только тогда, когда ровно две из трёх переменных принимают значение, равное истине.

Задача №3.

Знаем, что $(A \to B) \equiv (\neg A \vee B)$, тогда:

$$((u \to v) \to (w \wedge u)) \equiv ((\neg u \vee v) \to (w \wedge u)) \equiv ((u \wedge \neg v) \vee (w \wedge u)) \equiv (u \wedge (\neg v \vee w))$$

Задача №4.

Ну что, славные граждане, понеслись в известном направлении?

$$
\begin{aligned}
a \vee b, \neg b \vee \neg c &\implies a \vee \neg c,\\
c \vee d, \neg d \vee \neg e &\implies c \vee \neg e,\\
a \vee \neg c, c \vee \neg e &\implies a \vee \neg e,\\
a \vee \neg e, a \vee e &\implies a;\\
b \vee c, \neg c \vee \neg d &\implies b \vee \neg d,\\
d \vee e, \neg e \vee \neg a &\implies d \vee \neg a,\\
b \vee \neg d, d \vee \neg a &\implies b \vee \neg a,\\
\neg a \vee b, \neg a \vee \neg b &\implies \neg a;\\
a \vee \neg a &\implies \perp.
\end{aligned}
$$

Из данного набора дизъюнктов удалось вывести $\perp$, что равносильно его невыполнимости по теореме №4 из конспектов.

Задача №5.

Рассмотрим следующий набор значений переменных:

$$
\begin{aligned}
[p] &= 1,\\
[q] &= 1,\\
[r] &= 0.
\end{aligned}
$$

Для него справедливо следующее:

$$
\begin{aligned}
[p] \vee [q] &= 1 \vee 1 = 1,\\
\neg[p] \vee [q] \vee [r] &= 0 \vee 1 \vee 0 = 1,\\
[p] \vee \neg[q] \vee [r] &= 1 \vee 0 \vee 0 = 1,\\
\neg[p] \vee \neg[r] &= 0 \vee 1 = 1,\\
[p] \vee \neg[q] \vee \neg[r] &= 1 \vee 0 \vee 1 = 1.
\end{aligned}
$$

Откуда следует, что данное множество дизъюнктов выполнимо. Следовательно, КНФ не является невыполнимой. Тогда вывести пустой дизъюнкт нельзя по теореме №3 из конспектов.

Задача №6.

Сначала составим формулу без подробного описания КНФ для каждой скобки:

$$((a \to b) \to \neg b) \wedge b \implies (t_1 \equiv a \to b) \wedge (t_2 \equiv t_1 \to \neg b) \wedge (t_3 \equiv t_2 \wedge b) \wedge t_3$$

Теперь разберёмся с каждой скобкой по отдельности:

$$\begin{aligned}
(t_1 \equiv a \to b) \quad &= (t_1 \equiv (\neg a \vee b)) = (\neg t_1 \vee (\neg a \vee b)) \wedge (t_1 \vee \neg(\neg a \vee b)) = \\
&= (\neg t_1 \vee \neg a \vee b) \wedge (t_1 \vee (a \wedge \neg b)) = (\neg t_1 \vee \neg a \vee b) \wedge (t_1 \vee a) \wedge (t_1 \vee \neg b); \\
(t_2 \equiv t_1 \to \neg b) \quad &= (\neg t_2 \vee \neg t_1 \vee \neg b) \wedge (t_2 \vee t_1) \wedge (t_2 \vee b) \text{ – аналогично формуле выше;} \\
(t_3 \equiv t_2 \wedge b) \quad &= (\neg t_3 \vee (t_2 \wedge b)) \wedge (t_3 \vee \neg(t_2 \wedge b)) = (\neg t_3 \vee t_2) \wedge (\neg t_3 \vee b) \wedge (t_3 \vee \neg t_2 \vee \neg b).
\end{aligned}$$

Подставим всё это дело в исходную формулу:

$$\begin{aligned}
&(\neg t_1 \vee \neg a \vee b) \wedge (t_1 \vee a) \wedge (t_1 \vee \neg b) \wedge (\neg t_2 \vee \neg t_1 \vee \neg b) \wedge \\
&\qquad \wedge (t_2 \vee t_1) \wedge (t_2 \vee b) \wedge (\neg t_3 \vee t_2) \wedge (\neg t_3 \vee b) \wedge (t_3 \vee \neg t_2 \vee \neg b) \wedge t_3
\end{aligned}$$

Поищем подходящие пары:

$$\begin{aligned}
&(\neg t_3 \vee b) \wedge t_3 && \implies b; \\
&(t_1 \vee \neg b) \wedge b && \implies t_1; \\
&(\neg t_2 \vee \neg t_1 \vee \neg b) \wedge b && \implies (\neg t_2 \vee \neg t_1); \\
&(\neg t_3 \vee t_2) \wedge t_3 && \implies t_2; \\
&(\neg t_2 \vee \neg t_1) \wedge t_2 && \implies \neg t_1; \\
&t_1 \wedge \neg t_1 && \implies \bot.
\end{aligned}$$

Следовательно, исходная формула не является выполнимой.

Задача №7.

Проделаем аналогичные шаги, заменив последний дизъюнкт на его отрицание:

$$\neg(((x \to y) \wedge \neg y) \to \neg x) = (t_1 \equiv x \to y) \wedge (t_2 \equiv t_1 \wedge \neg y) \wedge (t_3 \equiv t_2 \to \neg x) \wedge \neg t_3$$

Ревью скобочек на основании проделанного выше:

$$\begin{aligned}
(t_1 \equiv x \to y) \quad &= (\neg t_1 \vee \neg x \vee y) \wedge (t_1 \vee x) \wedge (t_1 \vee \neg y); \\
(t_2 \equiv t_1 \wedge \neg y) \quad &= (\neg t_2 \vee t_1) \wedge (\neg t_2 \vee \neg y) \wedge (t_2 \vee \neg t_1 \vee y); \\
(t_3 \equiv t_2 \to \neg x) \quad &= (\neg t_3 \vee \neg t_2 \vee \neg x) \wedge (t_3 \vee t_2) \wedge (t_3 \vee x).
\end{aligned}$$

Заменяем:

$$\begin{aligned}
&(\neg t_1 \vee \neg x \vee y) \wedge (t_1 \vee x) \wedge (t_1 \vee \neg y) \wedge (\neg t_2 \vee t_1) \wedge (\neg t_2 \vee \neg y) \wedge \\
&\qquad \wedge (t_2 \vee \neg t_1 \vee y) \wedge (\neg t_3 \vee \neg t_2 \vee \neg x) \wedge (t_3 \vee t_2) \wedge (t_3 \vee x) \wedge \neg t_3
\end{aligned}$$

Пользуемся правилом резолюций:

$$\begin{aligned}
&(t_3 \vee t_2) \wedge \neg t_3 && \implies t_2; \\
&(\neg t_2 \vee y) \wedge t_2 && \implies y; \\
&(\neg t_2 \vee \neg y) \wedge y && \implies \neg t_2; \\
&\neg t_2 \wedge t_2 && \implies \bot;
\end{aligned}$$

Таким образом, мы вывели пустой дизъюнкт из формулы, которая представляет собой отрицание исходной. Следовательно, это отрицание невыполнимо. Тогда исходная формула является тавтологией.

Задача №8.

Здесь будет полезно вспомнить, что набор является несовместным тогда и только тогда, когда из него можно вывести пустой дизъюнкт, используя правило резолюций. Рассмотрим два случая:

1) Исходный набор был совместен: добавление этого правила не изменит совместность набора. Если какой-то дизъюнкт A был истинен на каком-то означивании, то $A \vee B$ тоже будет истинным, так как $1 \vee x = 1$.

2) Исходный набор был несовместен: пусть S – исходный набор дизъюнктов, а S' – набор, полученный с использованием нового правила. Если исходный набор был несовместен, то из него можно было вывести пустой дизъюнкт. То есть из S выводим $\perp$. Очевидно, что $S \subseteq S'$, тогда возможность получить $\perp$ осталась на месте.