Математический анализ 2.
Домашняя работа №2.

Лев Хорошанский, 176 группа, 6 вариант.

Задача №6.1

Найдём, к чему стремится последовательность:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left(x^{1/n}-1\right) &= \lim_{n\to\infty} n(e^{\frac{1}{n}\ln x}-1)\\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(1+\frac{\ln x}{n}+\frac{\ln^2 x}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-1\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \ln x+\frac{\ln^2 x}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\\ &= \ln x\end{aligned}$$

Далее, определим наличие равномерной сходимости, используя "lim sup" критерий:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E}|r_n(x)| = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E}\left|n(x^{1/n}-1)-\ln x\right|$$

Для того, чтобы найти супремум, рассмотрим производную $r_n(x)$:

$$\begin{aligned}(r_n(x))' &= (n(x^{1/n}-1)-\ln x)'\\ &= x^{\frac{1}{n}-1}-\frac{1}{x}\\ &= \frac{\sqrt[n]{x}-1}{x}\end{aligned}$$

Очевидно, что на множестве $E=[1;3]$ есть единственный корень – $x_0=1$, тогда как в остальных случаях производная будет положительной. Следовательно, максимум функции приходится на точку $x_{max}=3$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E}|r_n(x)| &= \lim_{n\to\infty} n(3^{1/n}-1)-\ln 3\\ &= \lim_{n\to\infty} \ln 3+\frac{\ln^2 3}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-\ln 3\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2 3}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ответ: равномерная сходимость к $\ln x$.

Задача №6.2

Попробуем оценить нашу последовательность сверху:

$$\frac{\ln nx}{nx^2} \le \frac{\ln nx}{n} = \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln x}{n}$$

Очевидно, что предел правой части равен нулю для любого $x \in E$. Тогда исследуем на равномерную сходимость, используя тот же самый критерий:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |r_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} \frac{|\ln nx|}{nx^2}$$

Опять же, воспользуемся производной:

$$(r_n(x))' = \left(\frac{\ln nx}{nx^2}\right)' = \frac{1 - 2\ln(nx)}{nx^3}$$

Корни имеют следующий вид: $x_r = \frac{\sqrt{e}}{n}$. Видно, что в E находится единственный корень $x_0 = \sqrt{e}$ при $n = 1$. Таким образом, при достаточно больших n, производная не будет иметь корней и будет отрицательной. Тогда наибольшое значение исходной функции принимается в окрестности наименьших значений переменной, а именно – при $x = 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |r_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

Ответ: равномерная сходимость к 0.

Задача №6.3

Воспользуемся теоремой Коши-Адамара:

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3^{\sqrt{n}}\sqrt{n^2+1}}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{\frac{\sqrt{n}}{n}}(n^2+1)^{\frac{1}{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{\frac{1}{\sqrt{n}}} e^{\frac{1}{2n}\ln(n^2+1)}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{n}\ln n}} = 1.\end{aligned}$$

Откуда следует, что $R = 1$. Тогда интервал сходимости выглядит так: $I_0 = (-1; 1)$.
Рассмотрим граничные точки. Начнём с $x_0 = 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^n}{3^{\sqrt{n}}\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}}\, n} \text{ – такой ряд сходится, так как } 3^{\sqrt{n}} > n^2 \text{ финально.}$$

Очевидно, что при $x_1 = -1$ ряд сходится абсолютно (так как он будет равен ряду с $x_0 = 1$). Следовательно, ряд сходится в граничных точках.
Ответ: $R = 1$; $I = (-1; 1)$; сходится в граничных точках.

Задача №6.4

(По поводу этой задачи я говорил с лектором: по итогу было решено, что суммирование в условии надо рассматривать с $n = 1000$ и далее, а не с 1).
Для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}$ дробь $\frac{|x|}{n} < 1$ финально, тогда:

$$\left(\frac{n}{3}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)^n = \left(\frac{n}{3}\left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \frac{x^3}{3n^3} - \frac{x^4}{4n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)^n$$
$$= \left(\frac{x}{3} - \frac{x^2}{6n} + \frac{x^3}{9n^2} - \frac{x^4}{12n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^n$$

Теперь исследуем ряд с помощью признака Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x}{3} - \frac{x^2}{6n} + \frac{x^3}{9n^2} - \frac{x^4}{12n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x}{3} - 0 + 0 - 0 + 0\right|$$
$$= \frac{|x|}{3}$$

Тогда ряд сходится при $|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$.
Рассматривая случаи, при которых $x = -3$ или $x = 3$, можно увидеть, что не выполняется необходимое условие сходимости ряда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n(3) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3}\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)\right)^n = e^{-3/2}$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n(-3) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3}\ln\left(1-\frac{3}{n}\right)\right)^n$$
$$= \lim_{n\to\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$
$$= e^{3/2+c},\ \text{где } c \in \mathbb{C}.$$

Ряд, составленный из модулей, отличается от исходного только при $x < 0$ своим знаком, который даёт логарифм. Но даже в этом случае он будет сходиться по рассуждениям выше. Таким образом, область сходимости совпадает с областью абсолютной сходимости.
Ответ: $I = (-3, 3)$.

Задача №6.5

Сначала рассмотрим ряд на множестве $E' = [1; +\infty)$, пользуясь неравенством треугольника:

$$\left|\frac{\sqrt{x}\cos nx}{n(2nx^2+1)}\right| \leqslant \left|\frac{\sqrt{x}\cos nx}{2n^{3/2}x} \cdot \frac{2n^{3/2}x}{2n^2x^2+n}\right| \leqslant \left|\frac{\cos nx}{2n^{3/2}\sqrt{x}}\right| \leqslant \frac{1}{2n^{3/2}\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}$$

Получили равномерную сходимость по признаку Вейерштрасса.
Далее, исследуем множество $E'' = (0; 1)$ с помощью производной:

$$\left|\frac{\sqrt{x}\cos nx}{n(2nx^2+1)}\right| \leqslant \frac{\sqrt{x}}{n(2nx^2+1)}$$

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{n(2nx^2+1)}\right)' = \frac{1-6nx^2}{2n\sqrt{x}(2nx^2+1)^2}$$

Корнями будут дроби вида $1/\sqrt{6n}$, тогда наибольшее значение члена для каждого фиксированного n будет приниматься именно в этих точках:

$$\left|\frac{\sqrt{x}\cos nx}{n(2nx^2+1)}\right| \leqslant \frac{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{6n}}}}{n\left(2n\left(\frac{1}{\sqrt{6n}}\right)^2+1\right)} = \frac{3^{3/4}}{4\cdot 2^{1/4}\cdot n^{5/4}} \text{ – такой ряд сходится, так как } 5/4 > 1.$$

Следовательно, ряд сходится на множестве $E'' = (0; 1)$ равномерно по признаку Вейерштрасса.
Ответ: равномерная сходимость.

Задача №6.6

Заметим, что наша функция имеет период $\tau = 2\pi$ и что на множестве $(-\pi; \pi)$ она нечётная, откуда следует, что все $a_k = 0$ для $k > 0$. Начнём с вычисления a_0:

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^7 x \cos^4 x \, dx = 0 \text{ – ввиду нечётности.}$$

Далее, будем последовательно понижать степени и применять формулы для произведения:

$$\begin{aligned}
\sin^7 x \cos^4 x &= (2\sin x\cos x)^4 \cdot 2^{-4} \cdot \sin^3 x = \frac{1}{16}\sin^4 2x \sin^3 x \\
&= \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{8}(-4\cos 4x + \cos 8x + 3)\cdot\frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x) \\
&= \frac{1}{512}(-12\cos 4x\sin x + 4\cos 4x\sin 3x + 3\cos 8x\sin x - \cos 8x\sin 3x + 9\sin x - 3\sin 3x) \\
&= \frac{1}{512}\left(3\sin 3x - 6\sin 5x + 2\sin 7x + 7\sin x + \frac{3}{2}\sin 9x - \frac{3}{2}\sin 7x + \frac{1}{2}\sin 5x - \frac{1}{2}\sin 11x\right) \\
&= \frac{1}{1024}(14\sin x + 6\sin 3x - 11\sin 5x + \sin 7x + 3\sin 9x - \sin 11x)
\end{aligned}$$

Получили конечную сумму, чем и будет являться ряд Фурье для данной функции, так как все слагаемые удовлетворяют необходимому виду, который единственен.

Задача №6.7

Очевидно, что данная функция является чётной с периодом $\tau = \pi$, откуда следует, что $b_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Найдём a_0:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\cos x| \, dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} |\cos x| \, dx = \frac{4}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi/2} |\cos x| \, dx = \frac{4}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi/2} \cos x \, dx = \frac{4}{\pi}.$$

Теперь займёмся a_k:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\cos x| \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} |\cos x| \cos kx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi/2} |\cos x| \cos kx \, dx + \frac{2}{\pi} \int\limits_{\pi/2}^{\pi} |\cos x| \cos kx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi/2} \cos x \cos kx \, dx - \frac{2}{\pi} \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \cos x \cos kx \, dx. \end{aligned}$$

Используя формулы для произведения косинусов, получим, что

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{4}{\pi \left(1 - 4k^2\right)} \cos\left(\frac{2k\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi \left(1 - 4k^2\right)} (-1)^k \\ a_{2k+1} &= \frac{4}{\pi (1 - 4 \cdot (2k+1)^2)} \cos\left(\frac{\pi \cdot (2k+1)}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, разложение $|\cos x|$ в ряд Фурье выглядит следующим образом:

$$|\cos x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1 - 4k^2} \cos 2kx$$

Задача №6.8

Логично, что для вычисления этой суммы понадобятся ряды Фурье. Заметим, что

$$\left|(-1)^n \frac{\sin nx}{n(n^2+a^2)}\right| \leqslant \frac{1}{n^3} \text{ – ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса.}$$

Обозначим наш ряд как $f(x)$. Так как ряд равномерно сходится, можем продифференцировать:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2+a^2} \\
f''(x) &= (-1)^{n+1} \frac{n \sin nx}{n^2+a^2} \\
a^2 f(x) - f''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} \\
f_{id}(x) = x &= \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \sin nx, \text{ так как это нечётная функция.} \\
b'_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right) \Bigg|_0^{\pi} = (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \\
f_{id}(x) = x &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} \implies a^2 f(x) - f''(x) = -\frac{1}{2} x \\
f''(x) - a^2 f(x) &= \frac{x}{2} \text{ – решим это дифференциальное уравнение и найдём константы:} \\
f(x) &= -\frac{x}{2a^2} + c'_1 e^{ax} + c'_2 e^{-ax} = -\frac{x}{2a^2} + c_1 \cosh ax + c_2 \sinh ax \\
f(0) &= 0 = c_1 \implies c_1 = 0 \\
f(-\pi) = -f(\pi) = f(\pi) &= 0 = -\frac{\pi}{2a^2} + c_2 \sinh a\pi \implies c_2 = \frac{\pi}{2a^2 \sinh a\pi} \\
f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n(n^2+a^2)} = -\frac{x}{2a^2} + \frac{\pi \sinh ax}{2a^2 \sinh a\pi} \text{ – \textbf{ответ.}}
\end{aligned}$$

Отдельную благодарность я хотел бы выразить следующим людям:

- нашему семинаристу, Мажуге Андрею Михайловичу,
- нашему лектору, Делицыну Андрею Леонидовичу,
- Карлу Теодору Вильгельму Вейерштрассу,
- Огюстену Луи Коши,
- Жаку Адамару,
- Бруку Тейлору,
- Иоганну Петеру Густаву Лежёну Дирихле,
- Жану Лерону д'Аламберу,
- Нильсу Хенрику Абелю.