Математическая статистика.
Домашнее задание №5

Lev Khoroshansky

Задача №12.

Рассмотрим один из гадреробов, так как ситуация симметрична. Мы хотим найти такую вместимость гардероба W, что будет верна следующая оценка:

$$\mathbb{P}(\Xi \leqslant W) \geqslant \frac{99}{100} = 0.99, \text{ где } \Xi = \sum_{k=1}^{1000} \xi_k \quad \text{и} \quad \xi_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k\text{-тый человек пришёл в гардероб}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Понятно, что ξ_k — независимые одинаково распределённые случайные величины. Также легко видеть, что $\xi_k \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{1}{2}\right) \implies \Xi \sim \text{B}\left(1000, \frac{1}{2}\right)$. Мы знаем, что при большом количестве ξ_k (по словам Зеленова, начиная с 20) такая случайная величина хорошо приближается нормальным распределением. Посчитаем всякие важные вещи:

$$\mathbb{E}\xi_k = \mu = \frac{1}{2} \implies \mathbb{E}\Xi = 1000 \cdot \frac{1}{2} = 500$$
$$\mathbb{D}\xi_k = \sigma^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \implies \mathbb{D}\Xi = 1000 \cdot \frac{1}{4} = 125$$

В таком случае, можно сделать следующие преобразования:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\Xi - 500}{\sqrt{250}} \leqslant \frac{W - 500}{\sqrt{250}}\right) \approx \Phi\left(\frac{W - 500}{\sqrt{250}}\right) \geqslant 0.99$$

Пользуясь волшебными программами в лице Wolfram|Alpha, получим ограничение $W \geqslant 537$.
Ответ: $W \geqslant 537$.

Задача №14.

Воспользуемся результатами задачи №13(б):

$$A = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{с вероятностью } \frac{1}{2}, \end{cases} \qquad U = \xi, \qquad V = -\xi.$$

Тогда рассмотрим ожидание $\eta = AU + (1 - A)V$:

$$\varphi_\eta(t) = \frac{1}{2}\,\varphi_\xi(t) + \frac{1}{2}\,\varphi_{-\xi}(t) = \frac{1}{2}\left(\varphi_\xi(t) + \varphi_\xi(-t)\right) = \frac{\mathbb{E}\cos(t\xi) + \mathbb{E}\cos(-t\xi)}{2} = \mathbb{E}\cos(t\xi)$$

Задача №15.

Воспользуемся разложением функции по Тейлору:

$$\varphi_{\xi_k}(t) = 1 + it \cdot \mathbb{E}\xi_k + o(t), \text{ где } t \to 0.$$

Теперь рассмотрим характеристическую функцию $\Xi = \dfrac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}$:

$$\varphi_\Xi(t) = \left[\varphi_{\xi_k}\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n = \left[1 + \frac{it \cdot \mathbb{E}\xi_k}{n} + o(t)\right]^n \to e^{it\cdot\mathbb{E}\xi_k} = \varphi_{\mathbb{E}\xi_k}(t)$$

Откуда можем заключить, что $\Xi \xrightarrow{d} \mathbb{E}\xi_k$. Вспоминая, что $\mathbb{E}\xi_k = \text{const}$, делаем вывод, что $\Xi \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}\xi_k$.

Дополнительная задача.

Рассмотрим характеристическую функцию Z:

$$\begin{aligned}
\varphi_Z(t) = \mathbb{E}e^{itZ} = \mathbb{E}e^{itXY} &= \frac{1}{2}\,\mathbb{E}e^{itX} + \frac{1}{2}\,\mathbb{E}e^{-itX} = \frac{1}{2}\left(\varphi_X(t) + \varphi_X(-t)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\exp\left(it\mathbb{E}X - \frac{t^2\mathbb{D}X}{2}\right) + \exp\left(-it\mathbb{E}X - \frac{(-t)^2\mathbb{D}X}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\exp\left(it\cdot 0 - \frac{t^2\cdot 1}{2}\right) + \exp\left(-it\cdot 0 - \frac{(-t)^2\cdot 1}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) + \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \\
&= \varphi_{N(0;1)}(t)
\end{aligned}$$

Найдём характеристическую функцию $X + Y$:

$$\begin{aligned}
\varphi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}e^{it(X+Y)} = \mathbb{E}e^{itX}\cdot\mathbb{E}e^{itY} &= \varphi_{N(0;1)}(t)\cdot\varphi_Y(t) \\
&= \varphi_{N(0;1)}\cdot\left(\frac{1}{2}\,e^{it} + \frac{1}{2}\,e^{-it}\right) \\
&= \varphi_{N(0;1)}\cdot\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right) \\
&= \varphi_{N(0;1)}\cdot\cos(t)
\end{aligned}$$

Заметим, что $\varphi_{N(\mu;\sigma^2)}(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Подставим $t = \dfrac{\pi}{2}$:

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_{N(0;1)}(t)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varphi_{N(0;1)}(t)\cdot 0 = 0$$

Следовательно, эта функция не может быть характеристической функцией случайной величины с нормальным распределением.