Дискретная математика - 2.
Домашнее задание №6.

Lev Khoroshansky

Задача №1.

Для проверки того, что формула является следствием из теории, необходимо предположить, что все формулы теории истинны:

a) $\forall x\ Q(x)$, то формула $\forall x\ Q(x) \to P(x)$ принимает вид $\forall x\ 1 \to P(x)$. Она истинна, поэтому $P(x) = 1\ \forall x$, следовательно, формула является следствием.

b) если $\exists x\ Q(x)$, то пусть один из таких элементов обозначен за t, тогда из второй формулы следует, что $Q(t) \to P(t)$ – истина. Тогда $P(t)$ – тоже. Следовательно, такой элемент существует, и формула является следствием.

c) на всех y, для которых $Q(y)$ – ложь, $P(y)$ тоже должен давать ложь (чтобы была истинна импликация). На том элементе t, на котором истинна $Q(t)$, посылка импликации может принимать любое значение, откуда не следует, что обязательно $\exists x\ P(x)$. Формула не является следствием.

d) из истинности $Q(x)$ для любого x следует истинность импликации вне зависимости от значение посылки, поэтому $P(x)$ вполне может быть ложью на каком-то x. Формула не является следствием.

Ответ: a) да; b) да; c) нет; d) нет.

Задача №2.

По теореме Верещагина и Шеня знаем, что любой предикат, выразимый в данной интерпретации, устойчив относительно её автоморфизмов.

a) Рассмотрим следующий автоморфизм: $\varphi\colon x \longmapsto -x$. Очевидно, что если предикат $P(x, y)$ был истинным (то есть $x < y$), что тот же самый предикат будет ложным на образах автоморфизма $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$.

b) Любой сдвиг на положительное число нарушит выполнимость предиката суммы. Рассмотрим следующий автоморфизм: $\varphi\colon x \longmapsto x+k, k > 0$. Пусть $x+y = z$, тогда $\varphi(x)+\varphi(y) = x+k+y+k = x + y + 2k = z + k + k = \varphi(z) + k \neq \varphi(z)$.

c) Рассмотрим автоморфизм, отображающий чётные элементы в самих себя, а нечётные увеличивает на 2. Тогда пусть $x = 2k$ и $y = 2k+1$. Тогда $|\varphi(x)-\varphi(y)| = |x-y-2| = |2k-2k-1-2| = 3 \neq 1$. Видно, что предикат не является устойчивым относительно этого автоморфизма.

d) Если нам дана делимость в натуральных числах, то она напрямую связана с простыми числами и с разложением на них. Тогда построим такой автоморфизм: все числа, не содержащие 59 и 179 как множители в своём разложении, отображаются в себя, а остальные – следующим образом: пусть $n = 59^a \cdot 179^b \cdot \ldots$, тогда $\varphi(n) = 59^b \cdot 179^a \cdot \ldots$ При таком биективном отображении отношение делимости, очевидно, сохраняется.
Тогда истинность предиката $59^2 + 179^1 = 3481 + 179 = 3660$ обратится в ложь для предиката $59^1 + 179^2 = 59 + 32041 = 32100$, так как $\varphi(3660) = 3660 \neq 32100$.

Ответ: a) нет; b) нет; c) нет.

Задача №3.

a) Множество целых чисел с операцией сложения образуют абелеву группу, где 1 (или же -1) является её порождающим элементом. Тогда задав её образ, мы однозначно определяем образ каждого другого элемента. Ввиду того, что наше отображение является автоморфизмом, образ порождающего должен являться порождающим образа. Тогда возможны два варианта: либо $\varphi(1) = 1$ (то есть $x \longmapsto x$), либо $\varphi(1) = -1$ (то есть $x \longmapsto -x$).

b) При любом автоморфизме истинность предиката должна сохраняться. Тогда если $x - y = 2$, то их образы тоже должны давать разность, равную 2. Понятно, что в этом случае x и y имеют одинаковую чётность. Тогда каждое число можно представить в виде $n = 2k$ или же в виде $m = 2k+1$. Заметим, что $\varphi(n) = \varphi(2k) = \varphi(2k-2) + \varphi(2) = \varphi(2l) + \varphi(2)$ и $\varphi(m) = \varphi(2k+1) = \varphi(2k) + \varphi(1)$. Тогда нам достаточно выбрать образы для 1 и 2. В таком случае, нам подходит любая пара чисел разной чётность.

c) Рассмотрим образы соседних элементов: если $|x - y| = 1$, то $|\varphi(x) - \varphi(y)| = 1$. Перепишем по-другому, $|x - y| = 1 \Leftrightarrow |(k+1) - k| = 1$, где $k \in \mathbb{Z}$. Тогда рассмотрим двух конкретных соседей: 1 и 2. Пусть $\varphi(1) = m$, тогда для двойки возможны два варианта:

$\varphi(2) = m+1$: в этом случае, тройка должна оказаться рядом с двойкой. Место слева от неё уже занято, поэтому остаётся единственным вариант – $\varphi(3) = m+2$, и так далее для оставшихся элементов.

$\varphi(2) = m-1$: аналогично, для тройки единственный вариант – $\varphi(3) = m - 2$.

Тогда можно обобщить: 1) $x \longmapsto x + k$; 2) $x \longmapsto -x + k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

d) Этот пункт можно решить, используя все предыдущие: в этом автоморфизме сохраняется чётность разности двух элементов и расстояние между элементами одинаковой чётности. Также, здесь справедливы симметричные отображения положительных в отрицательные и наоборот. В таком случае, достаточно определить образы для двух элементов разной чётности: пусть $k = 2m$, а $l = 2n+1$, тогда $\varphi(x) = \pm x + k$ и $\varphi(y) = \pm y + l$, где x и y – числа разной чётности.

Задача №4.

a) В множестве целых чисел с помощью равенства и произведения можно выразить свойство "быть нулём": $\exists n \, \forall m \;\; n \cdot m = n$. В множестве же натуральных чисел нуля нет, поэтому предикат, отражающий данное свойство, не будет выразим. Получили, что модели не являются элементарно эквивалентными, следовательно, изоморфизма не существует.

b) Рассмотрим отображение $\varphi(k) = 3k$. Легко видеть, что это биекция, так как 3 и 5 взаимно просты. Тогда рассмотрем два таких элемента x и y, что $x - y = 2$:
$\varphi(x) - \varphi(y) = 3x - 3y = 3(x - y) = 3 \cdot 2 = 1$. Таким образом, изоморфизм существует.

c) Рассмотрим транзитивность данного отношения: для таких $x, y, z \in \mathbb{Z}_6$, что $x-y = 2$ и $y-z = 2$ справедливо $z - x = 2$. Но для них же из истинности $x - y = 1$ и $y - z = 1$ следует равенство $z - x = 4$, что не равно 1. Тогда предикат, отражающий данное отношение, способен отличить две модели. То есть они не являются элементарно эквивалентными, а, значит, изоморфизма нет.

Ответ: a) нет; b) да; c) нет.

Задача №5.

a) Пусть Новатор объявляет количество ходов, равное 5, а также всё время выбирает элементы второй модели, среди которых нет двух одинаковых. Тогда на пятом шаге Консерватору придётся выбрать элемент из первой модели, который будет совпадать с одним из ранее выбранных, в то время как у Новатора все элементы различны.

b) Знаем, что Новатор имеет выигрышную стратегию тогда и только тогда, когда две модели не являются элементарно эквивалентными. Тогда достаточно найти такой предикат, который сможет их отличить. Обозначим $|x-y| = 1$ за $P(x, y)$. Легко видеть, что в этом случае $P(x, y) = P(y, x)$. Но это уже не будет верно в случае, когда мы рассматриваем разность без модуля – тогда этот предикат различает две модели.

c) Модель с предикатом, отражающим отношение $x - y = 2$, разбивает множество целых чисел на две "галактики": чётные и нечётные. Для каждого элемента x существует единственный элемент y такой, что для них будут справедливы равенства $x - y = 1$ или же $x - y = 2$. Если Новатор выбрал такой элемент $x \in M_i$, что для него нет "пары" в M_i, то возможны два случая:

$x \in M_1$: Консерватор должен сопоставить ему элемент, стоящий намного дальше, чтобы у Новатора не было возможности добраться до выбранного Консерватором элемента, т.е. подойдёт число из окрестности $x + 2^{2^n}$, где n – число оставшихся ходов.

$x \in M_2$: здесь всё довольно очевидно, так как особых ограничений на выбор элемента нет.

Если же Новатор выбрал элемент, для которого существует пара в M_i, то сопоставляемый ему элемент определён однозначно.

Ответ: a) Новатор; b) Новатор; c) Консерватор.