Математическая статистика.
Домашнее задание №3.

Lev Khoroshansky

Задача №15.

Аналогично задаче №13, найдём распределение нашей случайной величины $M_n = \max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$:

$$\begin{aligned} F_{M_n}(t) &= \mathbb{P}(M_n \leqslant t) = \mathbb{P}(\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \leqslant t) = \mathbb{P}(\xi_1 \leqslant t, \ldots, \xi_n \leqslant t) \\ &= \mathbb{P}(\xi_1 \leqslant t) \ldots \mathbb{P}(\xi_n \leqslant t) = (\mathbb{P}(\xi_k \leqslant t))^n = (F_{\xi_k}(t))^n \end{aligned}$$

Далее, от нас требуется доказать сходимость других случайных величин по распределению. Для начала рассмотрим их функцию распределения:

$$F_{\frac{M_n}{(bn)^{1/a}}}(t) = \mathbb{P}\left(\frac{M_n}{(bn)^{1/a}} \leqslant t\right) = \mathbb{P}\left(M_n \leqslant t \cdot (bn)^{1/a}\right) = F_{M_n}\left(t \cdot (bn)^{1/a}\right) = \left(F_{\xi_k}\left(t \cdot (bn)^{1/a}\right)\right)^n$$

Теперь перепишем условие про пределы в терминах o–малого:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} x^a(1 - F(x)) = b \quad &\Leftrightarrow \quad x^a(1 - F(x)) = b + o(1) \quad \Leftrightarrow \quad 1 - F(x) = \frac{b}{x^a} + o\left(\frac{1}{x^a}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad F(x) = 1 - \frac{b}{x^a} + o\left(\frac{1}{x^a}\right) \end{aligned}$$

$$F_{\frac{M_n}{(bn)^{1/a}}}(t) = \left(F_{\xi_k}\left(t \cdot (bn)^{1/a}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^{-a}}{n} + o(\ldots)\right)^n \to e^{-t^{-a}} = f(t) \quad \forall t > 0$$

Теперь рассмотрим неположительные t: заметим, что $F_{\xi_k}(0) < 1$ (от противного, пусть $F_{\xi_k}(0) = 1$, тогда в пределе $t^a(1 - F_{\xi_k}(t))$ будет давать 0, но $b > 0$ — противоречие). При возведении в степень n это число будет стремиться к 0. Далее, заметим, что $0 \leqslant F_{\xi_k}(t) \leqslant F_{\xi_k}(0) \quad \forall t < 0$. Тогда, по лемме о двух хранителях правопорядка, чиселко посередине будет стремиться к 0.

Таким образом, случайные величины сходятся по распределению.

Сходимости.

Необходимо доказать (приведя пример), что из одной сходимости не следует другая. Рассмотрим следующую последовательность случайных величин:

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} \sqrt{n}, & \omega \in \left[0; \frac{1}{n}\right], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В данном случае подразумевается, что $\Omega = [0; 1]$. Теперь перейдём к самим рассуждениям:

<u>a.s. $\nrightarrow L_2$:</u> покажем, что ξ_n сходятся к $\xi \equiv 0$ почти наверное:

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}\left(|\xi_n - \xi| > \delta\right) = 0 \quad \forall\, \delta \geqslant 0.$$

Немного помашем руками:

$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(|\xi_n - \xi| > \delta\right) \leqslant \mathbb{P}(\xi_n \neq \xi) = \mathbb{P}(\xi_n \neq 0) = \frac{1}{n} \to 0.$$

Следовательно, $\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \xi \equiv 0$.
Теперь надо рассмотреть, какой результат даёт L_2 сходимость:

$$\mathbb{E}(\xi_n - \xi)^2 = \mathbb{E}(\xi_n)^2 = \mathbb{P}\left(\xi_n = \sqrt{n}\right) \cdot (\sqrt{n})^2 = \frac{1}{n} \cdot n = 1 \not\to 0.$$

Легко видеть, что результаты получились разные.

<u>$L_1 \nrightarrow L_2$:</u> воспользуемся ранее описанной последовательностью случайных величин ξ_n и полученными результатами. Рассмотрим L_1 сходимость:

$$\mathbb{E}(\xi_n - \xi) = \mathbb{E}\xi_n = \mathbb{P}\left(\xi_n = \sqrt{n}\right) \cdot \sqrt{n} = \frac{1}{n} \cdot \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

Видно, что $\xi_n \xrightarrow{L_1} \xi \equiv 0$, что отличается от результатов проверки на L_2 сходимость.