Домашняя работа №2 по Дискретной Математике - 2

Lev Khoroshansky

Задача №1.

Сразу перепишем неравенства в удобном виде для переменной z и исключим её:

$$P = \begin{cases} z \geq -x + 2y - 6, \\ z \geq -3y - 3, \\ z \leq \frac{1}{2} \cdot (y+4), \\ z \leq -x - y + 7, \\ x \geq y; \end{cases} \sim P'_z = \begin{cases} -x + 2y - 6 \leq -x - y + 7, \\ -x + 2y - 6 \leq \frac{1}{2}(y+4), \\ -3y - 3 \leq -x - y + 7, \\ -3y - 3 \leq \frac{1}{2}(y+4), \\ x \geq y; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P'_z = \begin{cases} y \geq \frac{1}{2}(x - 10), \\ y \geq -\frac{10}{7}, \\ y \leq \frac{2}{3}(x+8), \\ y \leq \frac{13}{3}, \\ y \leq x \end{cases} \quad \text{– проекция полиэдра } P \text{ вдоль оси } z.$$

Задача №2.

Домножим неравенства на α, β и γ соответственно, сложим и получим следующую систему:

$$\begin{cases} 2x - y \leq 6, & (\alpha \geq 0), \\ x + y \leq -5, & (\beta \geq 0), \\ 2y - x \leq -3, & (\gamma \geq 0); \end{cases} \sim \begin{cases} 2\alpha + \beta - \gamma = 1, \\ -\alpha + \beta + 2\gamma = 2, \\ 6\alpha - 5\beta - 3\gamma = -7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = {}^1/_{12} \geq 0, \\ \beta = {}^5/_4 \geq 0, \\ \gamma = {}^5/_{12} \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y \leq 6, & (\alpha \geq 0), \\ x + y \leq -5, & (\beta \geq 0), \\ 2y - x \leq -3, & (\gamma \geq 0); \end{cases} \sim \begin{cases} 2\alpha + \beta - \gamma = 1, \\ -\alpha + \beta + 2\gamma = 2, \\ 6\alpha - 5\beta - 3\gamma = -8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = {}^{-1}/_{24} < 0, \\ \beta = {}^{11}/_8 \geq 0, \\ \gamma = {}^7/_{24} \geq 0. \end{cases}$$

Ответ: только первое неравенство является синтаксическим следствием исходной системы.

Задача №3.

Аналогично предыдущей задаче, домножим на α, β, γ и δ и сложим:

$$\begin{cases} 5\alpha + 3\beta + \gamma - 3\delta = 0, \\ 3\alpha - 2\beta + \gamma = 0, \\ -2\alpha - 2\gamma + \delta = 0, \\ 2\alpha + \gamma - \delta = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1, \\ \beta = 2, \\ \gamma = 1, \\ \delta = 4. \end{cases}$$

Следовательно, исходная система несовместна.

Задача №4.

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6z \leq 5, & (\alpha \geq 0), \\ -x + y - 4z \leq 1, & (\beta \geq 0), \\ x \leq 0, & (\gamma_x \geq 0), \\ -y \leq 0, & (\gamma_y \geq 0), \\ x - 4y + z \to \max; \end{cases} \implies \begin{cases} 2\alpha - \beta + \gamma_x = 1, \\ 3\alpha + \beta - \gamma_y = -4, \\ -6\alpha - 4\beta = 1, \\ \alpha, \beta, \gamma_x, \gamma_y \geq 0, \\ 5\alpha + \beta \to \min; \end{cases} \sim \begin{cases} 2\alpha - \beta \leq 1, \\ 3\alpha + \beta \geq -4, \\ -6\alpha - 4\beta = 1, \\ \alpha, \beta \geq 0, \\ 5\alpha + \beta \to \min. \end{cases}$$

Задача №5.

$$\begin{cases} -2x + 3y - z \geq -7, & (\alpha \geq 0), \\ 3x + y - z \geq 2, & (\beta \geq 0), \\ z \geq 0, & (\gamma_z \geq 0), \\ x - y + 4z \to \min; \end{cases} \implies \begin{cases} -2\alpha + 3\beta = 1, \\ 3\alpha + \beta = -1, \\ -\alpha - \beta + \gamma_z = 4, \\ \alpha, \beta, \gamma_z \geq 0, \\ -7\alpha + 2\beta \to \max; \end{cases} \sim \begin{cases} -2\alpha + 3\beta = 1, \\ 3\alpha + \beta = -1, \\ -\alpha - \beta \leq 4, \\ \alpha, \beta \geq 0, \\ -7\alpha + 2\beta \to \max. \end{cases}$$

Задача №6.

Сначала составим линейную ‘программу’ и найдем к ней такое решение, что общие затраты будут равны 45, а потом составим двойственную задачу и докажем оптимальность:

$$\begin{cases} AC + BC \geq 3, & (\alpha) \\ AD + BD \geq 4, & (\beta) \\ AE + BE \geq 5, & (\gamma) \\ AC + AD + AE \leq 9, & (-\lambda) \\ BC + BD + BE \leq 5, & (-\mu) \\ AC, AD, AE, BC, BD, BE \geq 0, & (\varepsilon_{IJ}) \\ 7AC + 3AD + 5AE + 4BC + 2BD + 3BE \to \min . \end{cases}$$

С помощью перебора и жадного алгоритма найдем следующее решение:

$$\begin{cases} AC = 0, AD = 4, AE = 3, \\ BC = 3, BD = 0, BE = 2. \end{cases}$$

Проверим его на корректность:

$$\begin{cases} 0 + 3 = 3 \geq 3, & \text{(насыщено)} \\ 4 + 0 = 4 \geq 4 & \text{(насыщено)} \\ 3 + 2 = 5 \geq 5, & \text{(насыщено)} \\ 0 + 4 + 3 = 7 \leq 9, & \text{(не насыщено)} \\ 3 + 0 + 2 = 5 \leq 5, & \text{(насыщено)} \\ 7 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 12 + 15 + 12 + 6 = 45. \end{cases}$$

Теперь составим двойственную задачу:

$$\begin{cases} \alpha - \lambda + \varepsilon_{AC} = 7, \\ \beta - \lambda + \varepsilon_{AD} = 3, \\ \gamma - \lambda + \varepsilon_{AE} = 5, \\ \alpha - \mu + \varepsilon_{BC} = 4, \\ \beta - \mu + \varepsilon_{BD} = 2, \\ \gamma - \mu + \varepsilon_{BE} = 3, \\ \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \varepsilon_{IJ} \geq 0, \\ 3\alpha + 4\beta + 5\gamma - 9\lambda - 5\mu \to \max; \end{cases} \sim \begin{cases} \alpha - \lambda \leq 7, \\ \beta - \lambda \leq 3, \\ \gamma - \lambda \leq 5, \\ \alpha - \mu \leq 4, \\ \beta - \mu \leq 2, \\ \gamma - \mu \leq 3, \\ \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu \geq 0, \\ f \to \max . \end{cases}$$

Аналогично исходной задаче, найдем решение к двойственной. Например, такое:

$$\begin{cases} \alpha = 6, \beta = 3, \gamma = 5, \\ \lambda = 0, \mu = 2. \end{cases}$$

Проверка на корректность:

$$\begin{cases} 6-0=6\le 7, & \text{(не насыщено)}\\ 3-0=3\le 3, & \text{(насыщено)}\\ 5-0=5\le 5, & \text{(насыщено)}\\ 6-2=4\le 4, & \text{(насыщено)}\\ 3-2=1\le 2, & \text{(не насыщено)}\\ 5-2=3\le 3, & \text{(насыщено)}\\ 3\cdot 6+4\cdot 3+5\cdot 5-9\cdot 0-5\cdot 2=18+12+25-10=45. \end{cases}$$

Видно, что минимальное значение целевой функции исходной задачи совпадает с максимальным значением целевой функции двойственной задачи, причём выполняется критерий нежёсткости (ненасыщенные неравенства обнуляют соответствующие переменные), откуда можно сделать вывод, что данные решения являются оптимальными.

Задача №7.

$$\begin{cases} -3x+2y-z\le -5, & (\alpha\ge 0),\\ x+2y-2z\le 2, & (\beta\ge 0),\\ -x-y+3z\le 1, & (\gamma\ge 0),\\ -3x+4y+z\to\max; \end{cases} \implies \begin{cases} -3\alpha+\beta-\gamma=-3,\\ 2\alpha+2\beta-\gamma=4,\\ -\alpha-2\beta+3\gamma=1,\\ -5\alpha+2\beta+\gamma\to\min; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1\ge 0,\\ \beta=2\ge 0,\\ \gamma=2\ge 0,\\ -5+4+2=1. \end{cases}$$

Все переменные двойственной задачи принимают ненулевые значения, будучи оптимальным решением. Следовательно, все неравенства исходной задачи насыщены, тогда:

$$\begin{cases} -3x+2y-z=-5,\\ x+2y-2z=2,\\ -x-y+3z=1,\\ -3x+4y+z=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x={}^{32}/_{15}\\ y={}^{22}/_{15},\\ z={}^{23}/_{15},\\ \frac{1}{15}\left(-3\cdot 32+4\cdot 22+23\right)=\frac{15}{15}=1. \end{cases}$$

Задача №8.

$$\begin{cases} -2x+y-z\le -5, & (\alpha\ge 0),\\ x+2y-z\le 2, & (\beta\ge 0),\\ -2x-2y+z\le 1, & (\gamma\ge 0),\\ x-y+z\to\max; \end{cases} \implies \begin{cases} -2\alpha+\beta-2\gamma=1,\\ \alpha+2\beta-2\gamma=-1,\\ -\alpha-\beta+\gamma=1,\\ -5\alpha+2\beta+\gamma\to\min; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-1<0,\\ \beta=1\ge 0,\\ \gamma=1\ge 0. \end{cases}$$

Система двойственной задачи имеет единственное решение, которое противоречит условию неотрицательности коэффициентов. Следовательно, целевая функция исходной задачи неограничена.

Доказать это можно от противного: пусть целевая функция исходной задачи не ограничена, но двойственная задача имеет хотя бы одно решение, т. е. $\exists y : b^T\cdot y=d\ge c\cdot x$ - явное противоречие первой части утверждения.