Математический анализ 2.
Домашняя работа №3

Лев Хорошанский, 176 группа, 6 вариант

Задача №6.1

Вычислим значение выражения двумя способами:

1. Сначала посчитаем интеграл, после чего найдём предел:

$$\lim_{\alpha\to 1}\int\limits_0^1 xe^{\alpha x^2}dx = \begin{bmatrix} t=\alpha x^2 \\ dt = 2\alpha x\,dx \end{bmatrix} = \lim_{\alpha\to 1}\left[\frac{1}{2\alpha}\int\limits_0^1 e^t dt\right] = \lim_{\alpha\to 1}\left[\frac{1}{2\alpha}\cdot e^t\Bigg|_0^1\right] = \lim_{\alpha\to 1}\left[\frac{e-1}{2\alpha}\right] = \frac{e-1}{2}.$$

2. Теперь внесём предел под интеграл:

$$\lim_{\alpha\to 1}\int\limits_0^1 xe^{\alpha x^2}dx = \int\limits_0^1\left[\lim_{\alpha\to 1} xe^{\alpha x^2}\right]dx = \int\limits_0^1 xe^{x^2}dx = \begin{bmatrix} t=x^2 \\ dt = 2x\,dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^t dt = \frac{e-1}{2}.$$

Легко видеть, что полученные результаты совпадают. На семинарах мы выяснили, что в таких ситуациях можно сделать вывод, что данный предельный переход законен.
Ответ: $\frac{e-1}{2}$.

Задача №6.2

Нам дан интеграл, зависящий от параметра. Введём следующие обозначения:

$$f(x,\alpha)=\frac{\arctan(\alpha x)}{x\,(1+x^2)};\qquad I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx;\qquad I'(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx;\qquad K=[0;+\infty)\times(0;+\infty).$$

Почему мы рассматриваем только положительные значения α? Потому что при $\alpha=0$ задача является устной, а при $\alpha<0$ мы можем использовать нечётность arctan для выноса знака из-под интеграла.

Заметим, что $I(\alpha)$ равномерно сходится по признаку Дирихле: $\dfrac{1}{1+x^2}$ имеет ограниченную первообразную, а $\dfrac{\arctan(\alpha x)}{x}$ положительна, убывает и стремится к нулю.
Теперь воспользуемся стандартной схемой:

1. Посчитаем частную производную $f(x,\alpha)$ по α:
$$\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}=\frac{1}{(x^2+1)\,(\alpha^2x^2+1)}$$
Легко видеть, что частная производная является непрерывной по α.

2. Посчитаем интеграл $I'(\alpha)$:
$$\begin{aligned}I'(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)\,(\alpha^2x^2+1)}\,dx&=\int\limits_0^{+\infty}\left[\frac{\alpha^2}{(\alpha^2-1)(\alpha^2x^2+1)}+\frac{1}{(1-\alpha^2)(x^2+1)}\right]dx\\&=\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\alpha^2x^2+1}\,dx+\frac{1}{1-\alpha^2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}\,dx\\&=\begin{bmatrix}t=\alpha x\\dt=\alpha\,dx\end{bmatrix}\\&=\frac{\alpha}{\alpha^2-1}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}\,dt+\frac{1}{1-\alpha^2}\left[\arctan x\Big|_0^{+\infty}\right]\\&=\frac{\alpha}{\alpha^2-1}\left[\arctan(\alpha x)\Big|_0^{+\infty}\right]-\frac{\pi}{2\,(\alpha^2-1)}\\&=\frac{\pi\,(\alpha-1)}{2\,(\alpha^2-1)}\\&=\frac{\pi}{2\,(\alpha+1)}.\end{aligned}$$

3. Далее, проинтегрируем обратно по α:
$$I(\alpha)=\int I'(\alpha)\,d\alpha=\frac{\pi}{2}\int\frac{1}{\alpha+1}\,d\alpha=\frac{\pi\,\ln(\alpha+1)}{2}+C.$$

4. Найдём константу C:
$$I(0)=0\implies\frac{\pi\,\ln(0+1)}{2}+C=0\implies C=0.$$

Ответ: $I(\alpha)=\dfrac{\pi\ln(\alpha+1)}{2}$.

Задача №6.3

Введём следующие обозначения:

$$f(x,\alpha) = \frac{\ln^3 x}{x^2+\alpha^4}; \qquad F(x) = \frac{\ln^3 x}{x^2}; \qquad K = [1;+\infty)\times\mathbb{R}.$$

Заметим, что на множестве K справедливо неравенство $|f(x,\alpha)| \leqslant F(x)$.
Рассмотрим следующий интеграл:

$$\begin{aligned}
\int\limits_1^{+\infty} F(x)\,dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^3 x}{x^2} &= -\frac{\ln^3 x}{x}\bigg|_1^{+\infty} + 3\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx \\
&= -\frac{3\ln^2 x}{x}\bigg|_1^{+\infty} + 6\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\,dx \\
&= -\frac{6\ln x}{x}\bigg|_1^{+\infty} + 6\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx \\
&= -\frac{6}{x}\bigg|_1^{+\infty} \\
&= 6.
\end{aligned}$$

Легко видеть, что все условия равномерной сходимости по признаку Вейерштрасса выполнены, следовательно, исходный интеграл равномерно сходится.

Задача №6.4

Сделаем следующую замену:

$$\int\limits_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{bmatrix} x = \dfrac{1}{t}, t > 0 \\ dx = -\dfrac{1}{t^2}\,dt \\ 1 \leftrightarrow 1 \\ 0 \leftrightarrow +\infty \end{bmatrix} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-\alpha}}\,dt$$

Обобщим случай, приняв нижнюю границу интегрирования за параметр b:

$$\int\limits_b^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-\alpha}}\,dt = -\frac{\cos t}{t^{2-\alpha}}\bigg|_b^{+\infty} - (2-\alpha)\int\limits_b^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{3-\alpha}}\,dt$$

Заметим, что последний интеграл равномерно сходится по признаку Дирихле:

$$g(t,\alpha) = \frac{1}{t^{3-\alpha}}; \qquad \varphi(t,\alpha) = \cos t$$

1. $g(t,\alpha)$ монотонна по t для любого $\alpha \in \mathbb{E}$.
2. $g(t,\alpha)$ равномерно сходится к нулю.
3. $\int\limits_b^{+\infty} \varphi(t,\alpha)\,dt$ ограничен сверху $M = 2$.

Теперь рассмотрим первую часть выражения:

$$-\frac{\cos t}{t^{2-\alpha}}\bigg|_b^{+\infty} = \frac{\cos b}{b^{2-\alpha}}, \text{ так как } \alpha \in (0;2).$$

Положим $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$, $\;b = 2\pi k$, $\;k \in \mathbb{N}$ и возьём такую α, что $0 < 2-\alpha < \dfrac{\ln(\varepsilon^{-1})}{\ln(2\pi k)}$, тогда:

$$\left|\frac{\cos b}{b^{2-\alpha}}\right| = \frac{\cos(2\pi k)}{(2\pi k)^{2-\alpha}} > \frac{\cos(2\pi k)}{(2\pi k)^{\ln(\varepsilon^{-1})/\ln(2\pi k)}} = \frac{1}{e^{\ln\varepsilon^{-1}}} = \varepsilon = \frac{1}{4}$$

Иными словами, $\exists\varepsilon = \dfrac{1}{4}\colon\ \forall B > 1\ \exists b = 2\pi k > B \wedge \exists\alpha$:

$$\left|\int\limits_b^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^\alpha}\,dx\right| > \varepsilon$$

Таким образом, интеграл сходится неравномерно.
Ответ: сходится неравномерно.

Задача №6.5

Разобьём исходный интеграл на два:

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin((1-\alpha^2)x)}{x}\,dx = \int\limits_0^{1} \frac{\sin((1-\alpha^2)x)}{x}\,dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin((1-\alpha^2)x)}{x}\,dx = I_1(\alpha) + I_2(\alpha).$$

Рассмотрим каждый по отдельности:

I_1: пусть $|\alpha| \leqslant \alpha_0$, тогда

$$I_1'(\alpha) = -\int\limits_0^1 \cos(1-\alpha^2)\,2\alpha x\,dx \implies |\cos(1-\alpha^2)\,2\alpha x| \leqslant 2\alpha_0.$$

Следовательно, на любом отрезке $[-|\alpha|; |\alpha|]$ имеет место равномерная сходимость по признаку Вейерштрасса. Устремляя α_0 к бесконечности, получим равномерную сходимость на всей вещественной прямой. Таким образом, $I_1(\alpha)$ будет непрерывной функцией по теореме о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра.

I_2: заметим, что при $\alpha = \pm 1$ интеграл будет равен 0. Рассмотрим предел с одной из сторон:

$$\lim_{\alpha^2 \to 1-} \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin((1-\alpha^2)x)}{x}\,dx = \begin{bmatrix} 1-\alpha^2 = \beta \\ \beta \to 0+ \end{bmatrix} = \lim_{\beta \to 0+} \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(\beta x)}{x}\,dx = \lim_{\beta \to 0+} \frac{\pi|\beta|}{2\beta} - \mathrm{Si}(\beta) = \frac{\pi}{2}.$$

Видно, что функция не является непрерывной в точках ± 1.
Если же выколоть эти точки, то интеграл обладает равномерной сходимостью по признаку Дирихле, что даёт непрерывность на множестве $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Ответ: $I(\alpha)$ непрерывен везде, кроме точек $\alpha = \pm 1$.

Задача №6.6

Введём следующие обозначения:

$$f(x,\alpha,\beta) = \frac{e^{-\alpha x}\sin^2(\beta x)}{x}; \quad I(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} f(x,\alpha,\beta)\,dx; \quad I'_\beta(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial f(x,\alpha,\beta)}{\partial\beta}\,dx.$$

1. Продифференцируем по β:

$$I'_\beta(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin(2\beta x)\,dx$$

2. Посчитаем интеграл:

$$I'_\beta(\alpha,\beta) = [\text{несколько длинных интегрирований по частям и две подстановки спустя}] = \frac{2\beta}{\alpha^2+4\beta^2}$$

3. Интегрируем обратно по β:

$$I(\alpha,\beta) = \int \frac{2\beta}{\alpha^2+4\beta^2}\,d\beta = \frac{1}{4}\,\ln(\alpha^2+4\beta^2) + h(\alpha)$$

4. Осталось найти $h(\alpha)$:

$$I(\alpha,0) = \frac{1}{4}\,\ln(\alpha^2) + h(\alpha) = 0 \implies h(\alpha) = -\frac{1}{4}\,\ln(\alpha^2)$$

5. Итого:

$$I(\alpha,\beta) = \frac{1}{4}\,\ln\left(1+\frac{4\beta^2}{\alpha^2}\right)$$

Ответ: $I(\alpha,\beta) = \dfrac{1}{4}\,\ln\left(1+\dfrac{4\beta^2}{\alpha^2}\right)$.

Задача №6.7

Вычислим преобразование Фурье напрямую:

$$\mathrm{F}[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(-2e^{-|t|} \cdot |t|' + |t|e^{-|t|} \cdot |t|'\right) \cdot e^{-ity}\, dt$$

Воспользуемся тем, что $e^{-ity} = \cos(ty) - i\sin(ty)$, а также нечётностью sin и чётностью sin:

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}[f] &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} \left(-2e^{-|t|} \cdot |t|' + |t|e^{-|t|} \cdot |t|'\right) \cdot (-i\sin(ty))\, dt \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}(-i) \int\limits_{0}^{+\infty} (-2e^{-t} + te^{-t}) \sin(ty)\, dt \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot i \cdot \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t} \sin(ty)\, dt - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot i \cdot \int\limits_{0}^{+\infty} te^{-t} \sin(ty)\, dt \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot i \cdot J_1 - J_2
\end{aligned}$$

Левый интеграл является частным случаем разобранного на семинарах:

$$I_1(\alpha, \beta) = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin(\beta x)\, dx = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \implies J_1 = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t} \sin(ty)\, dt = I_1(1, y) = \frac{y}{1 + y^2}$$

В случае со вторым интегралом легко видеть, что

$$\begin{aligned}
J_2 = \mathrm{F}\left[xe^{-|x|}\right] &= -\frac{1}{i}\, \mathrm{F}\left[e^{-|x|}\right]'_y \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot i \cdot \left(\frac{1}{1 + y^2}\right)' \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot i \cdot \frac{2y}{(1 + y^2)^2}
\end{aligned}$$

(Выкладки выше основаны на свойствах преобразования Фурье при использовании дифференцирования, а также на рассуждениях и решениях задач, приведённых на семинарах.)
Складываем это всё в одну кучу:

$$\mathrm{F}[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot i \left(\frac{2y}{1 + y^2} - \frac{2y}{(1 + y^2)^2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot i \cdot \frac{2y^3}{(1 + y^2)^2}$$

Ответ: $\mathrm{F}[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot i \cdot \frac{2y^3}{(1 + y^2)^2}$

Задача №6.8

Внесём $x^{-\alpha}$ в числитель и вынесем $\dfrac{1}{x}$ из знаменателя:

$$
\begin{aligned}
I(\alpha) &= \int\limits_0^1 \frac{x^{1-\alpha}(1-x)^\alpha}{(x+1)^3}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{(x^{-1}-1)^\alpha}{(x^{-1}+1)^3}\frac{dx}{x^3} = \begin{bmatrix} x = t^{-1} \\ dx = -t^{-2}\,dt \\ 1 \leftrightarrow 1 \\ 0 \leftrightarrow +\infty \end{bmatrix} \\
&= \int\limits_1^{+\infty} \frac{(t-1)^\alpha}{(t+1)^3}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{(u+2)^3}\,du \\
&= 2^{\alpha-2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{s^\alpha}{(s+1)^3}\,ds = \begin{bmatrix} a-1=\alpha \\ a+b=3 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} a=\alpha+1 \\ b=2-\alpha \end{bmatrix} \\
&= 2^{\alpha-2}\,\mathrm{B}(\alpha+1;2-\alpha) = 2^{\alpha-2}\,\frac{\Gamma(\alpha+1)\ \Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(3)} \\
&= 2^{\alpha-3}\,(1-\alpha)\cdot\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(1-\alpha) \\
&= 2^{\alpha-3}\,(1-\alpha)\cdot\alpha\cdot\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha) \\
&= 2^{\alpha-3}\,(1-\alpha)\cdot\alpha\cdot\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}
\end{aligned}
$$

Ответ: $I(\alpha) = \dfrac{2^{\alpha-3}\cdot\pi\cdot\alpha\cdot(1-\alpha)}{\sin(\alpha\pi)}$.

Отдельную благодарность я хотел бы выразить следующим людям:

- нашему семинаристу, Мажуге Андрею Михайловичу,
- нашему лектору, Делицыну Андрею Леонидовичу,
- Карлу Теодору Вильгельму Вейерштрассу,
- Иоганну Петеру Густаву Лежёну Дирихле,
- Жан-Батисту Жозефу Фурье,
- Готфриду Вильгельму Лейбницу,
- Леонарду Эйлеру,
- Кудрявцеву Льву Дмитриевичу,
- Ляшко Ивану Ивановичу.