Математическая статистика. Домашнее задание №8 (+№9)

Lev Khoroshansky

Задача №9.

Найдём ожидание, используя условную плотность:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi \mid \eta = y) &= \int\limits_0^1 x \cdot \frac{\rho(x, y)}{\int\limits_0^1 \rho(x, y)\, dx}\, dx \\
&= \int\limits_0^1 \frac{x(x+y)}{y + \frac{1}{2}}\, dx \\
&= \frac{1}{y + \frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{2}\right) \\
\mathbb{E}(\xi \mid \eta) &= \frac{1}{\eta + \frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\eta}{2} + \frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

Задача №14.

Одна из величин является дискретной, ввиду чего интеграл меняется на конечную сумму:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X \mid p = y) &= \sum_{k=0}^{3} k \cdot \mathbb{P}(X = k \mid p = y) \\
&= 1 \cdot \binom{3}{1} \cdot y \cdot (1-y)^2 + 2 \cdot \binom{3}{2} \cdot y^2 \cdot (1-y) + 3 \cdot \binom{3}{3} \cdot y^3 \\
&= 3y \cdot (1 - 2y + y^2) + 6y^2 \cdot (1-y) + 3y^3 \\
&= 3y \\
\mathbb{E}(X \mid p) &= 3p \\
\mathbb{P}(X \geq 2 | p = y) &= \mathbb{P}(X = 2 \mid p = y) + \mathbb{P}(X = 3 \mid p = y) \\
&= \binom{3}{2} \cdot y^2 \cdot (1-y) + \binom{3}{3} \cdot y^3 \\
&= 3y^2 \cdot (1-y) + y^3 \\
&= 3y^2 - 2y^3 \\
\mathbb{P}(X \geq 2 \mid p) &= 3p^2 - 2p^3
\end{aligned}$$

Теперь немного посложнее:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(p < 1/3 \mid X = 3\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(p < 1/3; X = 3\right)}{\mathbb{P}(X = 3)}, \text{ так как } \mathbb{P}(X = 3) > 0. \\
\mathbb{P}\left(p < 1/3; X = 3\right) &= \mathbb{E}\left[\mathrm{Ind}_{p<1/3} \cdot \mathrm{Ind}_{X=3}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\mathrm{Ind}_{p<1/3} \cdot \mathrm{Ind}_{X=3} \mid p\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathrm{Ind}_{p<1/3} \cdot \mathbb{E}\left(\mathrm{Ind}_{X=3} \mid p\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathrm{Ind}_{p<1/3} \cdot \mathbb{P}(X = 3 \mid p)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathrm{Ind}_{p<1/3} \cdot p^3\right] \\
&= \int\limits_0^{1/3} x^3 dx \\
&= \frac{1}{4 \cdot 3^4} \\
\mathbb{P}(X = 3) &= \mathbb{E}\left[\mathrm{Ind}_{X=3}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\mathrm{Ind}_{X=3} \mid p\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}(X = 3 \mid p)\right] \\
&= \mathbb{E}p^3 \\
&= \frac{1}{4} \\
\mathbb{P}\left(p < 1/3 \mid X = 3\right) &= \frac{4}{4 \cdot 3^4} = \frac{1}{3^4}
\end{aligned}
$$

Здесь мы использовали определение математического ожидания, его свойства и формулу полной вероятности.

Задача №15.

(a) Попробуем найти функцию распределения:

$$
\mathrm{F}_{X+Y|X=a}(t) = \mathbb{P}(X + Y \le t \mid X = a) = \int\limits_{-\infty}^{t} \rho_{X+Y|X}(x, a)\, dx
$$

С другой стороны,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}_{X+Y|X=a}(t) &= \mathbb{P}(X + Y \le t \mid X = a) \\
&= \mathbb{P}(Y \le t - a \mid X = a) \\
&= \mathbb{P}(Y \le t - a) \text{ (в силу независимости)} \\
&= \int\limits_{-\infty}^{t-a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{(x - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right) dx \\
&= \begin{bmatrix} x = v - a \\ dx = dv \\ t - a \leftrightarrow t \\ -\infty \leftrightarrow -\infty \end{bmatrix} \\
&= \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{(v - a - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right) dv
\end{aligned}
$$

Откуда следует равенство

$$\rho_{X+Y|X}(v,a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{(v-a-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

(b) Заметим, что прийти к ответу аналогично предыдущему пункту не получится в силу того, что и X, и Y зависят от суммы (раньше при условии $X = a$ можно было явно подставить и использовать независимость).

Мы знаем,что независимые нормальные случайные величины образуют нормальный вектор, поэтому независимость его компонент эквивалентна равенства нулю их ковариации.
Пусть $\eta = X + Y, \xi = X + \lambda Y$, тогда

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta) = \mathrm{cov}(X+\lambda Y, X+Y) = \sigma_1^2 + \lambda\cdot\sigma_2^2 + (1+\lambda)\cdot\mathrm{cov}(X,Y) = \sigma_1^2 + \lambda\cdot\sigma_2^2 = 0$$

Откуда следует, что $\lambda = -\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$. Выразим X и Y через ξ и η:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \eta \\ 1 & \lambda & \xi \end{array}\right) \to \begin{cases} X = \dfrac{\lambda\cdot\eta - \xi}{\lambda - 1} \\ Y = \dfrac{\xi - \eta}{\lambda - 1} \end{cases}$$

Нам понадобятся ожидание и дисперсия:

$$\mu_\xi = \mu_1 + \lambda\cdot\mu_2$$
$$\sigma_\xi = \sigma_1^2 + \frac{\sigma_1^4}{\sigma_2^2}$$

Возвращаемся к исходной задаче:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \le t \mid X+Y=b) &= \mathbb{P}\left(\xi \le t\cdot(1-\lambda) + \lambda\cdot\eta \mid \eta = b\right),\ (\text{так как } \lambda - 1 < 0) \\
&= \mathbb{P}\left(\xi \le t\cdot(1-\lambda) + \lambda\cdot b\right) \\
&= \big[t\cdot(1-\lambda) + \lambda\cdot b = f(t)\big] \\
&= \int\limits_{-\infty}^{f(t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \exp\left(-\frac{(x-\mu_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2}\right) dx \\
&= \begin{bmatrix} v = \dfrac{x - \alpha\cdot b}{1-\lambda} \\ dv = \dfrac{dx}{1-\lambda} \end{bmatrix} \\
&= \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{1-\lambda}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \exp\left(-\frac{((1-\lambda)\cdot v + \lambda\cdot b - \mu_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2}\right) dv
\end{aligned}$$

Итого:

$$\rho_{X|X+Y}(v,b) = \frac{1-\lambda}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \exp\left(-\frac{((1-\lambda)\cdot v + \lambda\cdot b - \mu_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2}\right)$$

Задача №10.

На семинаре, при решении задачи №2, мы доказали, что $X_{(1)} \xrightarrow{d} a$, $X_{(n)} \xrightarrow{d} b$. Так как это константы, то сходимость по распределению эквивалентна сходимости по вероятности:

$$X_{(1)} \xrightarrow{d} a, X_{(n)} \xrightarrow{d} b \implies \widetilde{\Theta} = X_{(n)} - X_{(1)} \xrightarrow{\mathbb{P}} b - a$$

Таким образом, состоятельность $\widetilde{\Theta}$ следует из семинара (могу целиком всё расписать, если понадобится, просто совсем никакого желания одно и то же два раза писать).

Также мы вывели их функции распределения и плотности:

$$\mathrm{F}_{X_{(1)}}(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1 - \left(\dfrac{b-t}{b-a}\right)^n, & t \in [a;b] \\ 1, & t > b \end{cases} \qquad \to \qquad \rho_{X_{(1)}}(t) = \frac{n}{b-a}\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-1} \cdot \mathrm{Ind}_{t\in[a;b]}$$

$$\mathrm{F}_{X_{(n)}}(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ \left(\dfrac{t-a}{b-a}\right)^n, & t \in [a;b] \\ 1, & t > b \end{cases} \qquad \to \qquad \rho_{X_{(n)}}(t) = \frac{n}{b-a}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^{n-1} \cdot \mathrm{Ind}_{t\in[a;b]}$$

Посчитаем ожидания:

$$\mathbb{E}X_{(1)} = \mathbb{E}\left[X_{(1)} - b\right] + b = b + \frac{n}{(b-a)^n}\int\limits_a^b -(b-t)^n dt = b - \frac{n}{n+1}\cdot(b-a)$$

$$\mathbb{E}X_{(n)} = \mathbb{E}\left[X_{(n)} - a\right] + a = a + \frac{n}{(b-a)^n}\int\limits_a^b (t-a)^n dt = a + \frac{n}{n+1}\cdot(b-a)$$

$$\mathbb{E}X_{(n)} - \mathbb{E}X_{(1)} = \mathbb{E}\widetilde{\Theta} = b - a + \frac{2n}{n+1}\cdot(b-1) = (b-a)\cdot\frac{n-1}{n+1}$$

Оценка $\widetilde{\Theta}$ является смещённой, поэтому просто домножим её: $\widehat{\Theta} = \dfrac{n+1}{n-1}\cdot(X_{(n)} - X_{(1)})$.

Заметим, что $\dfrac{n+1}{n-1} \to 1$, откуда следует, что $\widehat{\Theta} \xrightarrow{\mathbb{P}} b - a$.

Таким образом, $\widehat{\Theta}$ — несмещённая и состоятельная оценка.