Математическая статистика.
Домашнее задание №6

Lev Khoroshansky

Задача №12.

Сразу заметим, что даны независимые случайные величины, откуда следует, что их линейная комбинация будет нормальной. Следовательно,

$$\eta = 2\xi_1 - 3\xi_2 + \xi_3 - \xi_4 \sim \mathrm{N}(0, 4) + \mathrm{N}(3, 9) + \mathrm{N}(0, 4) + \mathrm{N}(-1, 4) \sim \mathrm{N}(2, 21) \implies \mu = 2, \sigma = \sqrt{21}.$$

Теперь посчитаем то, что спрашивают:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\eta| < 13) = \mathbb{P}(|\eta| \leqslant 13) = \mathbb{P}(-13 \leqslant \eta \leqslant 13) &= \Phi\left(\frac{13-2}{\sqrt{21}}\right) - \Phi\left(\frac{-13-2}{\sqrt{21}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{13-2}{\sqrt{21}}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{13+2}{\sqrt{21}}\right)\right) \simeq \Phi(2{,}4) + \Phi(3{,}27) - 1 \\ &\simeq 0{,}9918 + 1 - 1 = 0{,}9918 \end{aligned}$$

Ответ: 0,9918.

Дополнительные задачи.

1. С двумя пунктами.

Даны следующие случайные величины:

$$\eta\colon \mathbb{P}(\eta=-1)=\mathbb{P}(\eta=1)=\frac{1}{2}; \qquad \xi\sim \mathrm{N}(0,1); \qquad \zeta=\eta\cdot\xi,$$

причём η и ξ независимы.

а) Найдём функции распределения:

$$\begin{aligned}
\varphi_\xi(t)&=\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\sim \mathrm{N}(0,1);\\
\varphi_\zeta(t)&=\mathbb{E}e^{it\zeta}=\mathbb{E}e^{it\eta\cdot\xi}=\frac{1}{2}\,\mathbb{E}e^{it\xi}+\frac{1}{2}\,\mathbb{E}e^{-it\xi}=\frac{1}{2}\left(\varphi_\eta(t)+\varphi_\eta(-t)\right)=\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\sim \mathrm{N}(0,1);\\
\varphi_{(\xi,\zeta)}(t_1,t_2)&=\mathbb{E}e^{i\langle(\xi,\zeta),(t_1,t_2)\rangle}=\frac{1}{2}\left(\mathbb{E}e^{i\xi(t_1+t_2)}+\mathbb{E}e^{i\xi(t_1-t_2)}\right)=\frac{1}{2}\left(\varphi_\xi(t_1+t_2)+\varphi(t_1-t_2)\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\exp\left(-\frac{(t_1+t_2)^2}{2}\right)+\exp\left(-\frac{(t_1-t_2)^2}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Покажем, что этот вектор не является гауссовским. От противного, пусть он имеет нормальное распределение, тогда

$$R=\begin{pmatrix}\mathbb{D}\xi & \operatorname{cov}(\xi,\zeta)\\ \operatorname{cov}(\xi,\zeta) & \mathbb{D}\zeta\end{pmatrix}, \qquad \mu=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Теперь посчитаем $\operatorname{cov}(\xi,\zeta)$:

$$\operatorname{cov}(\xi,\zeta)=\mathbb{E}(\xi\cdot\zeta)-\mathbb{E}\xi\cdot\mathbb{E}\zeta=\mathbb{E}(\xi\cdot\xi\cdot\eta)-\mathbb{E}\xi\cdot\mathbb{E}(\xi\cdot\eta)=0,\ \text{так как они независимы.}$$

Итого:

$$R=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Таким образом,

$$\Phi_{(\xi,\zeta)}(t_1,t_2)=\exp\left(-\frac{t_1^2+t_2^2}{2}\right)$$

Подставив $t_1=t_2=1$, получим разные результаты для этих двух функций.

б) Ранее мы показали, что $\operatorname{cov}(\xi,\zeta)=0$. Теперь покажем их зависимость, опять же, от противного:

$$\begin{aligned}
\Phi_{(\xi,\zeta)}(t_1,t_2)=\Phi_\xi(t_1)\cdot\Phi_\zeta(t_2)=\exp\left(-\frac{t_1^2}{2}\right)\cdot\exp\left(-\frac{t_2^2}{2}\right)\neq\\
\neq\frac{1}{2}\left(\exp\left(-\frac{(t_1+t_2)^2}{2}\right)+\exp\left(-\frac{(t_1-t_2)^2}{2}\right)\right)=\varphi_{(\xi,\zeta)}(t_1,t_2)
\end{aligned}$$

Подставив $t_1=t_2=1$, получим разные результаты в левой и правой частях.

2. С матрицей ковариации.

Из условия видно, что $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\eta = 0$. Также мы знаем, что этот вектор распределён нормально, откуда используя одно из основных свойств нормально распределённого вектора, можем заключить, что любая линейная комбинация ξ и η будет нормальной случайной величиной.

а) Методом пристального взгляда на матрицу ковариаций R выясним, что $\mathbb{D}\xi = 4, \mathbb{D}\eta = 2$. Тогда:

$$\mu_\xi = 0,\ \sigma_\xi^2 = 4; \qquad \mu_\eta = 0,\ \sigma_\eta^2 = 2.$$

Выясним остальное:

$$\mu_{-2\eta} = 0,\ \sigma^2_{-2\eta} = 8; \qquad \mu_{\xi+\eta} = 0,\ \sigma^2_{\xi+\eta} = \mathbb{D}(\xi+\eta) = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta + 2\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 10.$$

б) Опять же, воспользуемся свойством:

$$\forall \alpha, \beta\colon \alpha(\xi+\eta) + \beta(-\eta) = \alpha\xi + (\alpha-\beta)\eta \text{ — линейная комбинация } \xi \text{ и } \eta.$$

Следовательно, вектор $(\xi+\eta, -\eta)$ нормально распределён. Найдём ковариации:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(\xi+\eta, \xi+\eta) &= \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta + 2\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 4 + 2 + 2\cdot 2 = 10\\
\operatorname{cov}(\xi+\eta, -\eta) &= -\operatorname{cov}(\xi,\eta) - \mathbb{D}\eta = -2 - 2 = -4\\
\operatorname{cov}(-\eta, -\eta) &= \mathbb{D}\eta = 2
\end{aligned}$$

Итого:

$$R' = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$