Математическая статистика.
Домашнее задание №1.

Lev Khoroshansky

Задача №2.

Флэшбэки с семинара:

1) $\xi = \sum\limits_{k=1}^{4} \tau_k$, где τ_k — время осмотра k-того человека;

2) $\tau_1, \ldots, \tau_4$ — <u>независимые</u> между собой случайные величины;

3) τ_k — равномерно распределена на $[1, 4]$;

4) $\rho_{\tau_k}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4-1}, & x \in [1,4], \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = \frac{1}{3}\operatorname{Ind}_{[1,4]}(x)$;

5) $\mathbb{E}\tau_k = \frac{4+1}{2} = 2{,}5$;

6) $\mathbb{D}\tau_k = \frac{(4-1)^2}{12} = \frac{3}{4}$;

7) $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\left(\sum\limits_{k=1}^{4} \tau_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{4} \mathbb{E}\tau_k = 4 \cdot \mathbb{E}\tau_k = 4 \cdot 2{,}5 = 10$;

8) $\mathbb{D}\xi = 4\mathbb{D}\tau_k = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$;

От нас требуется оценка $\mathbb{P}(\xi \geqslant 12)$ при помощи $\mathbb{E}\xi^2$. Для этого сначала найдём это мат. ожидание:

$$\mathbb{E}\xi^2 = \mathbb{E}(\tau_1 + \cdots + \tau_4)^2 = \sum_{k=1}^{4} \mathbb{E}\tau_k^2 + 2\sum_{i<j} \mathbb{E}(\tau_i \cdot \tau_j) = \sum_{k=1}^{4} \mathbb{E}\tau_k^2 + 2\sum_{i<j} \mathbb{E}\tau_i \cdot \mathbb{E}\tau_j$$

$$\mathbb{E}\tau_k^2 = \mathbb{D}\tau_k + (\mathbb{E}\tau_k)^2 = \frac{3}{4} + \frac{25}{4} = 7;$$

$$2\sum_{i<j} \mathbb{E}\tau_i \cdot \mathbb{E}\tau_j = 2 \cdot \binom{4}{2}(\mathbb{E}\tau_i \cdot \mathbb{E}\tau_j) = 3 \cdot 4 \cdot \frac{25}{4} = 75;$$

$$\mathbb{E}\xi^2 = 4 \cdot 7 + 75 = 28 + 75 = 103.$$

Тогда сделаем пару махинаций:

$$\mathbb{P}(\xi \geqslant 12) = \mathbb{P}(\xi^2 \geqslant 144) \leqslant \frac{\mathbb{E}\xi^2}{144} = \frac{103}{144} = 0{,}7152(7).$$

Ответ: $\mathbb{P}(\xi \geqslant 12) \leqslant \dfrac{103}{144} = 0{,}7152(7)$.

Задача №3.

Если у нас n коммерсантов, то предполагается, что у нас n кораблей. Тогда обозначим за ξ_k то, ограбили ли k-тый корабль или нет. Легко видеть, что общее количество ограбленных кораблей будет равно $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ (подразумевается, что эти величины независимы). Следовательно, количество вернувшихся кораблей равно $n - \xi$.

1. Пусть прибыль с вернувшегося корабля равна 100 у.е., тогда в фонд от этой суммы откладывают 6 у.е. Получается, что фонд является переменным, так как зависит от прибыли (которая существует только в том случае, когда корабль вернулся в порт). В данном случае, условие, что фонд не сможет возместить убытки, равнозначно тому, что убытки превышают собранный фонд, то есть:

$$\mathbb{P}(100 \cdot \xi > 100 \cdot (n - \xi) \cdot 6\%) = \mathbb{P}(100\xi > 6n - 6\xi) = \mathbb{P}(106\xi > 6n) = \mathbb{P}\left(\xi > \frac{6}{106}\, n\right).$$

   Также, нам известно, что в среднем один из двадцати кораблей грабят. Иными словами,

$$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{20}\, n \implies \mathbb{E}\xi_k = \frac{1}{20}.$$

   Ещё несложно посчитать дисперсию:

$$\mathbb{D}\xi_k = \mathbb{E}\xi_k^2 - (\mathbb{E}\xi_k)^2 = \frac{1}{20} - \frac{1}{400} = \frac{19}{400}.$$

   Тогда, используя одно из неравенств Чебышёва, получаем следующее:

$$\mathbb{P}\left(\xi > \frac{6}{106}\, n\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\xi \geqslant \frac{6}{106}\, n\right) = \mathbb{P}\left(\xi - \frac{1}{20}\, n \geqslant \frac{7}{1060}\, n\right) = \mathbb{P}\left(\xi - \mathbb{E}\xi \geqslant \frac{7}{1060}\, n\right)$$

$$\leqslant \frac{\mathbb{D}\xi}{(\frac{7}{1060}\, n)^2} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{D}\xi_k}{(\frac{7}{1060}\, n)^2} = \frac{\mathbb{D}\xi_k}{(\frac{7}{1060})^2\, n} = \frac{\frac{19}{400}}{(\frac{7}{1060})^2\, n} \leqslant 0{,}05 \text{ — при } n \geqslant 21785.$$

2. Проверим справедливость условия задачи для $n = 1$:

$$\mathbb{P}\left(\xi_1 > \frac{6}{106}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\xi_1 \geqslant \frac{6}{106}\right) = \mathbb{P}(\xi_1 = 1) = \frac{1}{20} = 0.05,$$

   что напрямую следует из $\mathrm{Range}(\xi_1) = \{0, 1\}$ и $\mathbb{E}\xi_1 = \dfrac{1}{20}$.

3. Подберём такое n, что $\mathbb{P}(\text{разорения}) \leqslant 0{,}04$:

$$\mathbb{P}\left(\xi > \frac{6}{106}\, n\right) \leqslant \frac{\frac{19}{400}}{(\frac{7}{1060})^2\, n} \leqslant 0{,}04 \text{ — при } n \geqslant 27231.$$

Ответ: 1) $n \geqslant 21785$;   3) $n \geqslant 27231$.

Задача №3 (с использованием задачи №4).

Зеленов в начале следующего семинара сказал, что эта задача не решается, что я могу подтвердить трёхчасовой попыткой её решить :(