Большое домашнее задание №1 по Математическому Анализу 2

Лев Хорошанский, 176 группа, 6 вариант

1. Ответ: а) $^{1222}/_{625}$, в) $^{13}/_{6}$, г) $N > 10$.

а) Честно сложим первые четыре элемента ряда:

$$S_4 = \sum_{n=1}^{4} \frac{2^n + 3^n}{5^n} = \frac{2+3}{5} + \frac{4+9}{25} + \frac{8+27}{125} + \frac{16+81}{625} = \frac{625+325+175+97}{625} = \frac{1222}{625}.$$

б) В данном случае все числа (и, как следствие, элементы ряда) положительные, поэтому можно обойтись без модуля:

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} S_N &= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{2^n + 3^n}{5^n} \right) = \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{2^n}{5^n} + \sum_{n=1}^{N} \frac{3^n}{5^n} \right) = \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{1 - {}^{2^N}/_{5^N}}{1 - {}^{2}/_{5}} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1 - {}^{3^N}/_{5^N}}{1 - {}^{3}/_{5}} \right) = \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{2^N}{5^N}\right) + \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \frac{3^N}{5^N}\right) \right) = \\
&= \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6}.
\end{aligned}$$

в) Сделано выше, ответ - $^{13}/_{6}$.

г) Пользуясь результатами предыдущих пунктов, получим, что:

$$\left| \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{2^N}{5^N}\right) + \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \frac{3^N}{5^N}\right) - \frac{13}{6} \right| < \frac{1}{10000}$$

$$\left| 4 - 4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^N + 9 - 9 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^N - 13 \right| < \frac{6}{10000}$$

$$\left| \frac{2^{N+2} + 3^{N+2}}{5^N} \right| < \frac{6}{10000}$$

Это верно для любых $N \geq 19$, так как производная функции слева меньше нуля для любого N, откуда следует, что функция убывает на всей области определения.

2. Ответ: ряд расходится.

Видно, что данный ряд является знакопостоянным финально, поэтому мы можем применить для него признак сравнения. Посмотрим на отношение данного ряда к гармоническому:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n-3\sqrt{n}}{n^2+6}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n^{3/2}}{n^2+6}=1=const.$$

Следовательно, данный ряд эквивалентен по сходимости гармоническому ряду, который, как мы знаем, расходится.

3. Ответ: сходится условно по Абелю.

$$\cos\frac{\pi n^2}{n+1}=\cos\left(\pi(n-1)+\frac{\pi}{n+1}\right)=(-1)^{n+1}\cos\frac{\pi}{n+1}$$

$$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}\text{ – подобный ряд сходится условно, как было разобрано на семинарах,}$$

$$b_n=\cos\frac{\pi}{n+1}\text{ – монотонно стремится к 1, что означает сходимость по Абелю.}$$

Теперь рассмотрим абсолютную сходимость:

$$\left|\frac{\cos\frac{\pi}{n+1}}{\ln^2 n}\right|\geq\frac{\cos^2\frac{\pi}{n+1}}{\ln^2 n}=\frac{1+\cos\frac{2\pi}{n+1}}{2\ln^2 n}=\frac{1}{2\ln^2 n}+\frac{\cos\frac{2\pi}{n+1}}{2\ln^2 n}=\frac{1}{2\ln^2 n}+\frac{1-\frac{2\pi^2}{(n+1)^2}+o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)}{2\ln^2 n}=$$

$$=\frac{1}{\ln^2 n}-\frac{\pi^2}{(n+1)^2\ln^2 n}+\frac{o((n+1)^{-2})}{2\ln^2 n}$$

Последние два ряда сходятся абсолютно, а первый расходится, откуда следует, что ряд, составленный из модулей, расходится.

4. Ответ: $\alpha>\frac{1}{2}$.

$$\ln n+\ln\sin\frac{1}{n}=\ln\left(n\sin\frac{1}{n}\right)=\ln\left(n\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)=$$

$$=\ln\left(1-\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=-\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\text{ – эквивалентен по сходимости }\frac{1}{n^2}.$$

$$\left|\frac{1}{n^2}\right|^\alpha=\frac{1}{n^{2\alpha}}\text{ – сходится при }2\alpha>1\implies\alpha>\frac{1}{2}.$$

5. Ответ: расходится.

Заметим, что ряд является знакопостоянным, а также, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\arctan\sqrt{2n-1}}{\frac{\pi}{2}}=1$.

Тогда, используя признак сравнения, получим, что нам необходимо определить сходимость ряда $\dfrac{\pi}{2n^{2/3}}$. А такой ряд уже эквивалентен по сходимости $\dfrac{1}{n^{2/3}}$, который расходится.

6. Ответ: расходится.
Вспомним про необходимое условие сходимости ряда и проверим его, к примеру, для нечетного n:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n^2}}{n!} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n^2}}{n^n} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n^2 \ln 3}}{e^{n \ln n}} = \lim_{n\to\infty} e^{n(n \ln 3 - \ln n)} \geq \lim_{n\to\infty} e^n = +\infty$$

Видно, что элементы ряда не имеют предела вне зависимости от четности номера. Следовательно, ряд расходится что абсолютно, что условно.

7. Ответ: расходится.
Если внимательно присмотреться, то становится понятно, что предел a_n равен $+\infty$. Но доказать этот факт, не используя формулу Стирлинга (которую на момент решения еще не рассказали), довольно затруднительно. Поэтому сделаем заранее неверное предположение, что этот ряд удовлетворяет необходимому условию сходимости, и исследуем его, используя признак д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n \cdot 5 \cdot n! \cdot n \cdot n^n}{(n+1)^n \cdot (n+1) \cdot 5^n \cdot n!} = \frac{5}{e} > 1.$$

Таким образом, ряд расходится.

8. Ответ: сходится условно по Дирихле.
Начнем с абсолютной сходимости:

$$\left|\frac{\sin n}{n^{1/5}}\right| \geq \frac{\sin^2 n}{n^{1/5}} = \frac{1}{2n^{1/5}} - \frac{\cos(2n)}{2n^{1/5}}$$

Последний ряд сходится по Дирихле (суммы $\cos(2n)$ ограничены, а $\dfrac{1}{n^{1/5}}$ монотонно стремится к нулю), а первый расходится. Следовательно, весь ряд расходится.
Теперь займемся исходным рядом:

$$\begin{aligned} a_n &= \sin n \\ AS_N &= \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}\right)\sin\left(\frac{N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)} \text{ -- ограничены, равно как и для } \cos(2n), \\ b_n &= \frac{1}{n^{1/5}} \text{ -- монотонно стремится к нулю.} \end{aligned}$$

Получаем сходимость по признаку Дирихле.

Отдельную благодарность я хотел бы выразить следующим людям:

- нашему семинаристу, Мажуге А.М.,
- нашему лектору, Делицыну А.Л.,
- Огюстену Луи Коши,
- Бруку Тейлору,
- Иоганну Петеру Густаву Лежёну Дирихле,
- Жану Лерону д'Аламберу,
- Нильсу Хенрику Абелю.