Дифференциальные уравнения.
Домашнее задание №3

Lev Khoroshansky

Задача 1. Матрица исходной системы: $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 6 \\ -15 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Обозначим $A = \begin{pmatrix} 13 & 6 \\ -15 & -5 \end{pmatrix}$.

a. Найдём все собственные значения:

$$\det \begin{pmatrix} 13 - x & 6 \\ -15 & -5 - x \end{pmatrix} = 0 \ \rightarrow \ x^2 - 8x + 25 = 0 \ \rightarrow \ \lambda_{1,2} = \frac{8 \pm 6i}{2} = 4 \pm 3i$$

Пусть $\lambda = 4 + 3i$, тогда $v = (-3 - i, 5)$.

b. Проверим, что $\overline{\lambda} = 4 - 3i$ является собственным значением для вектора $\overline{v} = (-3 + i, 5)$:

$$A\overline{v} = \begin{pmatrix} 13 & 6 \\ -15 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 + i \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 + 13i \\ 20 - 15i \end{pmatrix}$$
$$\overline{\lambda} \cdot \overline{v} = (4 - 3i) \begin{pmatrix} -3 + i \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 + 13i \\ 20 - 15i \end{pmatrix}$$

Видно, что результаты совпадают.

c. Составим матрицу C и выразим (x, y) через (ξ, η):

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \ \rightarrow \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix}.$$

Подставим в исходную систему:

$$C \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = AC \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \ \rightarrow \ \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = C^{-1}AC \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \ \rightarrow \ \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

d. Дифференцируем вещественную и мнимую части по отдельности:

$$\dot{z} = (q + i \cdot r)'_t = \dot{q} + i \cdot \dot{r}$$
$$\lambda z = \lambda \cdot q + i \cdot \lambda \cdot r = (4q - 3r) + i \cdot (3q + 4r)$$

Приравниваем:

$$\dot{z} = \lambda z \ \rightarrow \ \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}$$

e. Легко видеть, что матрицы целиком совпадают.

f. Решим в общем виде:

$$\dot{z} = \lambda z \;\;\to\;\; z(t) = C \cdot e^{\lambda t},\;\; C \in \mathbb{C}$$

Учтём начальное условие:

$$z(0) = C \cdot e^{\lambda \cdot 0} \;\;\to\;\; C = q_0 + i \cdot r_0 \;\;\to\;\; z(t) = (q_0 + i \cdot r_0) \cdot e^{\lambda t}$$

g. Подставим λ в явном виде:

$$\begin{aligned} z(t) &= (q_0 + i \cdot r_0) \cdot e^{4t + i\cdot(3t)} = (q_0 + i \cdot r_0) \cdot e^{4t} \cdot (\cos(3t) + i \cdot \sin(3t)) \\ &= e^{4t} \cdot (q_0 \cdot \cos(3t) - r_0 \cdot \sin(3t) + i \cdot (q_0 \cdot \sin(3t) + r_0 \cdot \cos(3t))) \end{aligned}$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} q(t) &= e^{4t} \cdot (q_0 \cdot \cos(3t) - r_0 \cdot \sin(3t)) \\ r(t) &= e^{4t} \cdot (q_0 \cdot \sin(3t) + r_0 \cdot \cos(3t)) \end{aligned}$$

Или же

$$\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} = e^{4t} \cdot \begin{pmatrix} \cos(3t) & -\sin(3t) \\ \sin(3t) & \cos(3t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$$

h. В силу того, что матрицы у систем из пунктов (c) и (d) совпадают, решения будут точно такие же, что и выше:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = e^{4t} \cdot \begin{pmatrix} \cos(3t) & -\sin(3t) \\ \sin(3t) & \cos(3t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}$$

i. Обозначим матрицу с тригонометрией выше за T. Немного линейной алгебры:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\;\; \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Подставим:

$$C^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{4t} \cdot T C^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \;\;\to\;\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{4t} \cdot C T C^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Перемножим:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{4t} \cdot \begin{pmatrix} 3\sin(3t) + \cos(3t) & 2\sin(3t) \\ -5\sin(3t) & \cos(3t) - 3\sin(3t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

j. Для начала вычислим $e^{\lambda t} v$:

$$e^{\lambda t} v = e^{4t} \cdot (\cos(3t) + i \cdot \sin(3t)) \begin{pmatrix} -3 - i \\ 5 \end{pmatrix} = e^{4t} \cdot \begin{pmatrix} \sin(3t) - 3\cos(3t) + i \cdot (-3\sin(3t) - \cos(3t)) \\ 5\cos(3t) + i \cdot 5\sin(3t) \end{pmatrix}$$

Откуда

$$\mathrm{Re}(e^{\lambda t} v) = e^{4t} \cdot \begin{pmatrix} \sin(3t) - 3\cos(3t) \\ 5\cos(3t) \end{pmatrix},\quad \mathrm{Im}(e^{\lambda t} v) = e^{4t} \cdot \begin{pmatrix} -3\sin(3t) - \cos(3t) \\ 5\sin(3t) \end{pmatrix}$$

Теперь достаточно показать, что существуют такие μ_1 и μ_2, что

$$\begin{pmatrix} 3\sin(3t)+\cos(3t) & 2\sin(3t) \\ -5\sin(3t) & \cos(3t)-3\sin(3t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \mu_1 \cdot \mathrm{Re}(e^{\lambda t}v) + \mu_2 \cdot \mathrm{Im}(e^{\lambda t}v)$$

Рассмотрим вторые компоненты векторов:

$$(-5x_0 - 3y_0)\cdot\sin(3t) + (y_0)\cdot\cos(3t) = (5\mu_2)\cdot\sin(3t) + (5\mu_1)\cdot\cos(3t)$$

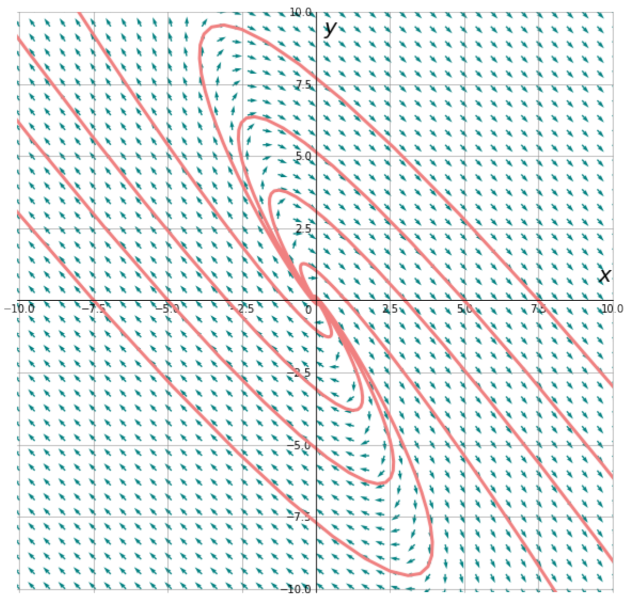
Составим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 5\mu_1 = y_0 \\ 5\mu_2 = -5x_0 - 3y_0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} \mu_1 = \dfrac{1}{5}\,y_0 \\ \mu_2 = -x_0 - \dfrac{3}{5}\,y_0 \end{cases}$$

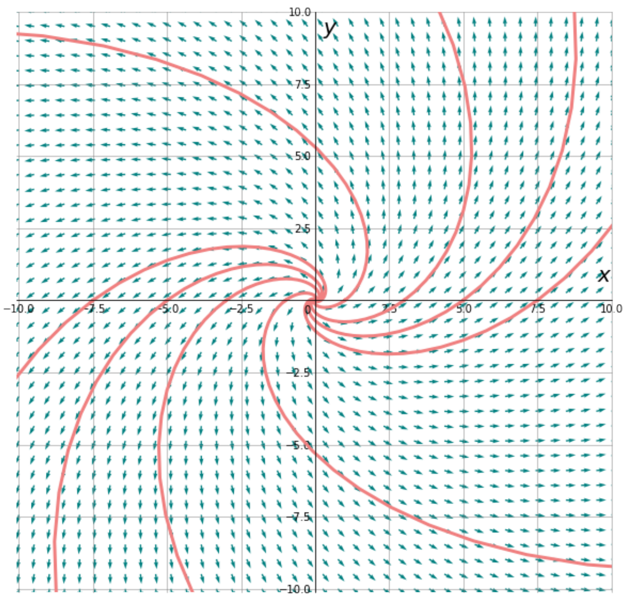
Видно, что исходя из начальных условий, можно подобрать коэффициенты для вещественной и мнимой частей вектора $e^{\lambda t}v$, откуда следует, что исходные решения можно записать в виде

$$C_1\,\mathrm{Re}(e^{\lambda t}v) + C_2\,\mathrm{Im}(e^{\lambda t}v),\ \text{ где } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

k. Рисуем фазовые портреты (векторное поле задаёт направление кривых):



Исходная система.



Система из пункта (c).

Задача 2.

a. Исходная система:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix}10 & -6\\ 15 & -8\end{pmatrix}$$

Собственные значения:

$$\det\begin{pmatrix}10-x & -6\\ 15 & -8-x\end{pmatrix} = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 2x + 10 = 0 \;\rightarrow\; \lambda_{1,2} = \frac{2\pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$$

Собственный вектор, соответствующий $\lambda_1 = 1 + 3i$:

$$v_1 = \begin{pmatrix}3+i\\ 5\end{pmatrix}$$

Матрица перехода:

$$C = \begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & 0\end{pmatrix}$$

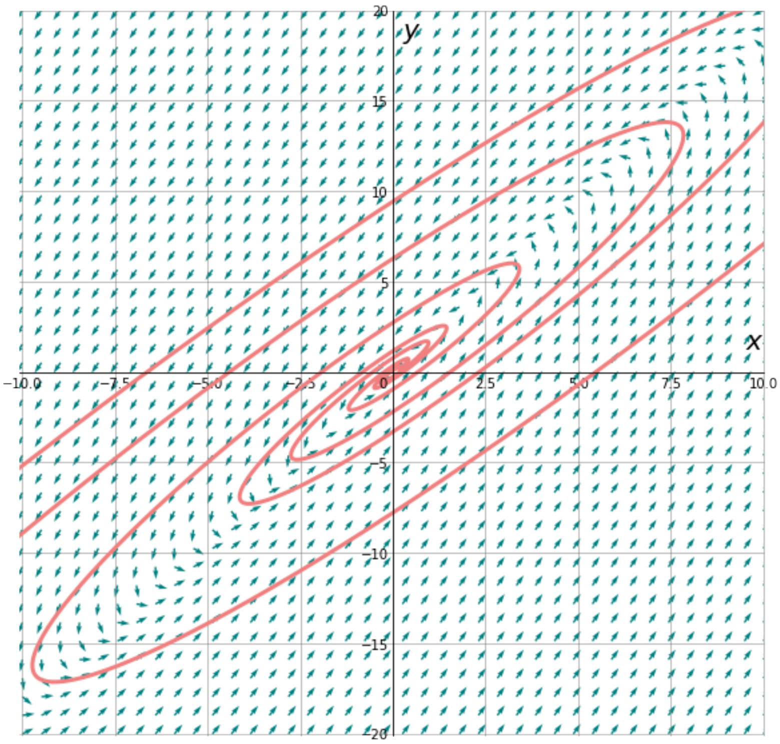
Тогда аналогично пункту (g) задачи 1:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = C\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = e^t \cdot T\begin{pmatrix}\xi_0\\ \eta_0\end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix}\cos(3t) & -\sin(3t)\\ \sin(3t) & \cos(3t)\end{pmatrix}$$

Откуда

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = e^t \cdot CTC^{-1}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = e^t \cdot \begin{pmatrix}\cos(3t) + 3\sin(3t) & -2\sin(3t)\\ 5\sin(3t) & \cos(3t) - 3\sin(3t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$$

Фазовый портрет в исходных координатах:



Тип: неустойчивый фокус.

b. Исходная система:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix}-16 & 16\\ -12 & 12\end{pmatrix}$$

Собственные значения:

$$\det\begin{pmatrix}-16-x & 16\\ -12 & 12-x\end{pmatrix} = 0 \ \to \ x^2+4x=0 \ \to \ \lambda_1=-4, \lambda_2=0$$

Собственные векторы и матрица перехода, составленная из них:

$$v_1 = \begin{pmatrix}4\\ 3\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \ \to \ C = \begin{pmatrix}4 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

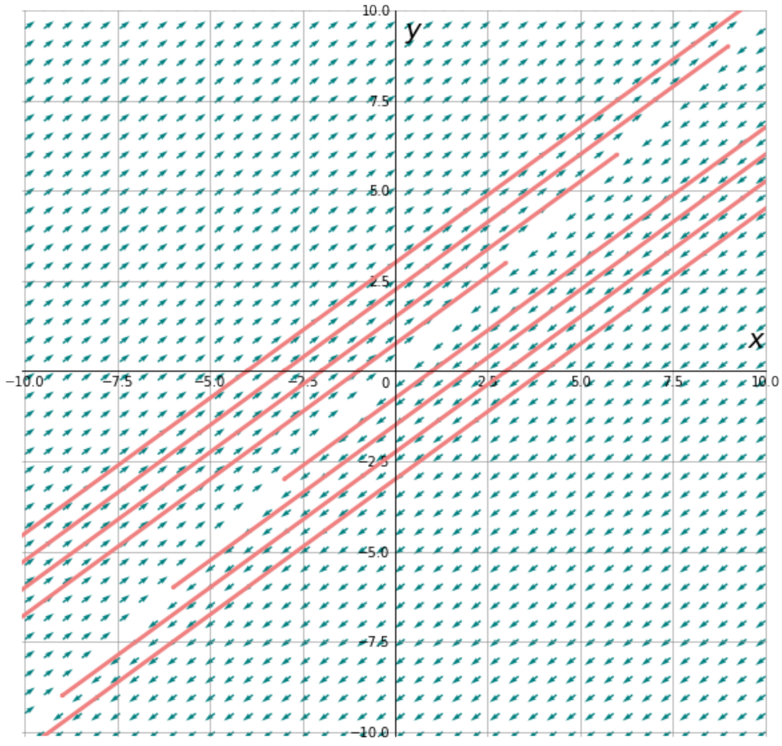
Система в базисе из собственных векторов:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = C\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\dot{\xi}\\ \dot{\eta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \ \to \ \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}\xi_0\\ \eta_0\end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix}e^{-4t} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Система в исходном базисе:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = CTC^{-1}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} \ \to \ \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4e^{-4t}-3 & 4-4e^{-4t}\\ 3e^{-4t}-3 & 4-3e^{-4t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$$

Фазовый портрет в исходных координатах:



Матрица вырождена, целая прямая особых точек.

c. Исходная система:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Собственные значения:

$$\det \begin{pmatrix} 8-x & -6 \\ 4 & -2-x \end{pmatrix} = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 6x + 8 = 0 \;\rightarrow\; \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$$

Собственные векторы и матрица перехода, составленная из них:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

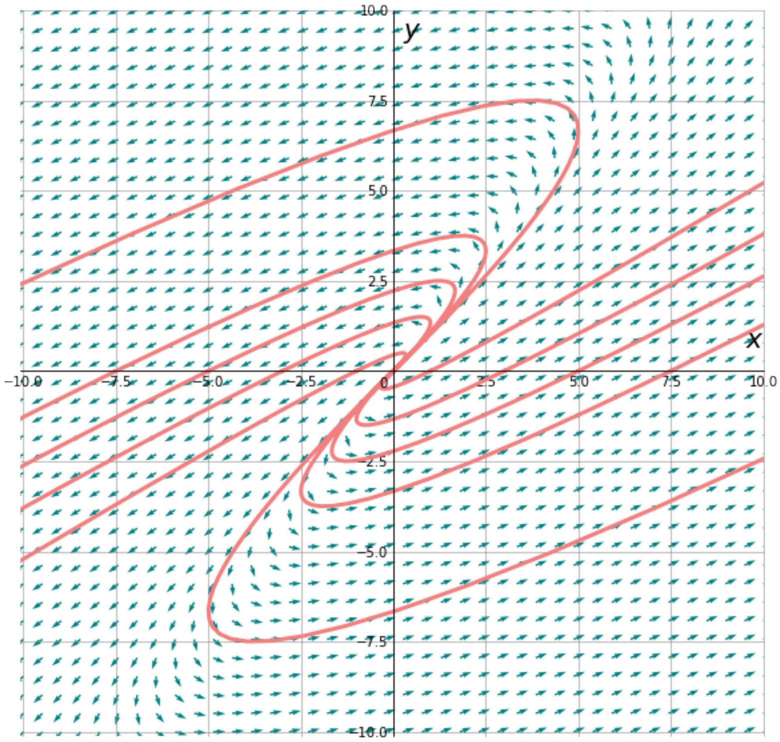
Система в базисе из собственных векторов:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Система в исходном базисе:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = CTC^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{2t} + 3e^{4t} & 3e^{2t} - 3e^{4t} \\ -2e^{2t} + 2e^{4t} & 3e^{2t} - 2e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Фазовый портрет в исходных координатах:



Тип: неустойчивый узел.

d. Исходная система:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -8 & 18 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

Собственные значения:

$$\det \begin{pmatrix} -8-x & 18 \\ -3 & 7-x \end{pmatrix} = 0 \;\rightarrow\; x^2 + x - 2 = 0 \;\rightarrow\; \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$$

Собственные векторы и матрица перехода, составленная из них:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

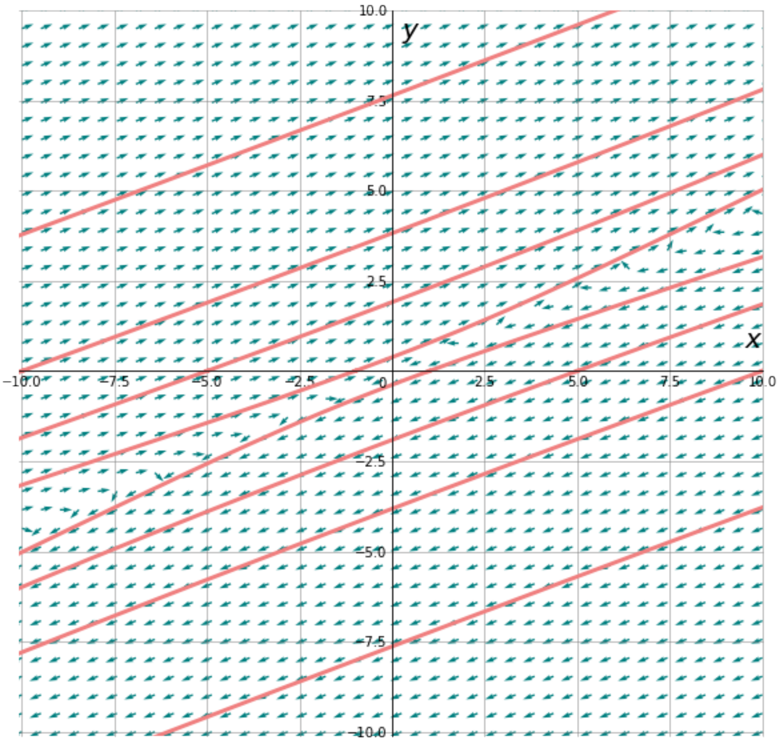
Система в базисе из собственных векторов:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Система в исходном базисе:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = CTC^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{-2t} - 2e^t & -6e^{-2t} + 6e^t \\ e^{-2t} - e^t & -2e^{-2t} + 3e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Фазовый портрет в исходных координатах:



Тип: седло (хотя по рисунку это сложно понять).

e. Исходная система:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Собственные значения:

$$\det \begin{pmatrix} -5 - x & -2 \\ 0 & -5 - x \end{pmatrix} = 0 \;\to\; (x+5)^2 = 0 \;\to\; \lambda_1 = \lambda_2 = -5$$

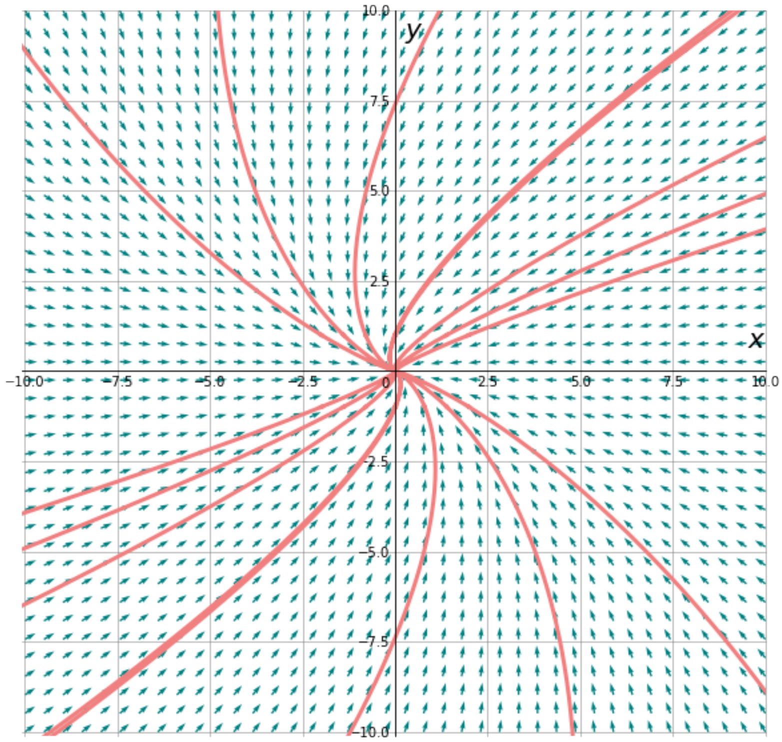
Решим при помощи матричной экспоненты:

$$z(t) = e^{At} \cdot z_0 = \exp\left(-5t \cdot E + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot t\right) \cdot z_0 = e^{-5t} \cdot \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot t\right) \cdot z_0$$
$$= e^{-5t} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot t\right] \cdot z_0 = e^{-5t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z_0$$

Тогда исходная система имеет следующее решение:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{-5t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Фазовый портрет в исходных координатах:



Тип: устойчивый вырожденный узел.

Задача 3.

a. Исходная система:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ s & -9 \end{pmatrix}$$

Начнём с определителя:

$$\det A = 6s - 45$$

Если $s = \dfrac{45}{6}$, то матрица будет вырожденной, следовательно, особая точка тоже будет <u>вырожденной</u>.
Всюду дальше $s \neq \dfrac{45}{6}$. Посмотрим на характеристический полином:

$$\det \begin{pmatrix} 5 - x & -6 \\ s & -9 - x \end{pmatrix} = 0 \;\; \to \;\; x^2 + 4x + (6s - 45) = 0 \;\; \to \;\; D = 4 \cdot (49 - 6s)$$

Обозначим $49 - 6s = B$, тогда $D = 2^2 \cdot B$. Собственные значения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-4 \pm 2 \cdot \sqrt{B}}{2} = -2 \pm \sqrt{B}$$

Рассмотрим несколько случаев B:

1. $B < 0 \;\; \to \;\; s > 49/6$.
   Два комплексных значения, где вещественная часть не равна нулю – <u>фокус</u>.

2. $B = 0 \;\; \to \;\; s = 49/6$.
   Два совпадающих вещественных значения. Посмотрим на ЖНФ:

   $$J = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   Жорданова клетка недиагональна – <u>вырожденный узел</u>.

3. $B > 0 \;\; \to \;\; s < 49/6$.
   Заметим, что в этом случае ни одно из собственных значений не равно нулю, или же $B \neq 4$ (иначе $s = 45/6$, а этот случай мы уже разобрали в самом начале).
   Посмотрим на знаки собственных значений:

   $$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = (-2 + \sqrt{B}) \cdot (-2 - \sqrt{B}) = 4 - B$$

   i. $4 - B < 0 \;\; \to \;\; B > 4 \;\; \to \;\; s < 45/6$.
      Два вещественных значения с разными знаками – <u>седло</u>.

   ii. $4 - B > 0 \;\; \to \;\; B < 4 \;\; \to \;\; s \in (45/6; 49/6)$.
      Два различных вещественных значения с одинаковыми знаками – <u>узел</u>.

По итогу:

1. $s < 45/6$ – седло.

2. $s = 45/6$ – вырожденная особая точка.

3. $s \in (45/6; 49/6)$ – узел.

4. $s = 49/6$ – вырожденный узел.

5. $s > 49/6$ – фокус.

b. Здесь мы будем пользоваться теоремой об устойчивости (где это возможно) без явного упоминания. Разберём все промежутки по отдельности:

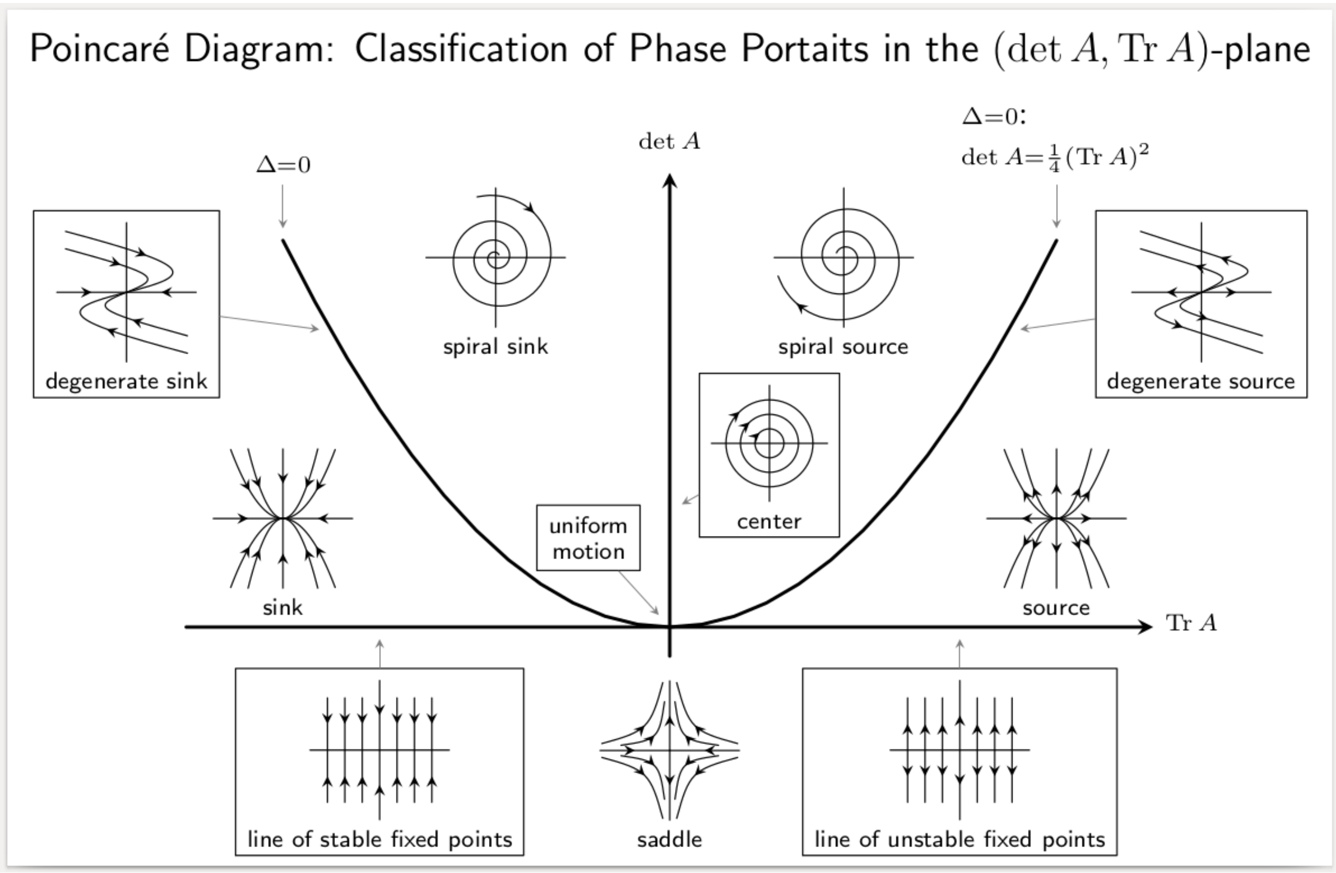
1. $s < 45/6$ – седло. Собственные значения: $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{B}$, где $\sqrt{B} > 2$.
   Есть собственное значение с положительной вещественной частью – точка не устойчива ни асимптотически, ни по Ляпунову.

2. $s = 45/6$ – вырожденная особая точка.
   В данном случае мы имеем целую прямую из подобных точек, соответственно, $(0,0)$ будет устойчивой по Ляпунову (но не асимптотически – любое решение вне $(0,0)$ утыкается в прямую чуть ниже или же выше), этот случай был разобран на семинарах.

3. $s \in (45/6; 49/6)$ – узел. Собственные значения: $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{B}$, где $\sqrt{B} < 2$.
   Все собственные значения имеют отрицательную вещественную часть – точка устойчива асимптотически (что включает устойчивость по Ляпунову).

4. $s = 49/6$ – вырожденный узел. Собственные значения: $\lambda_{1,2} = -2$.
   Аналогично предыдущему пункту, асимптотически устойчива.

5. $s > 49/6$ – фокус. Собственные значения: $\lambda_{1,2} = -2 \pm i \cdot \sqrt{|B|}$, где $B < 0$.
   Два комплексных собственных значения с отрицательными вещественными частями – асимптотическая устойчивость (и по Ляпунову тоже).

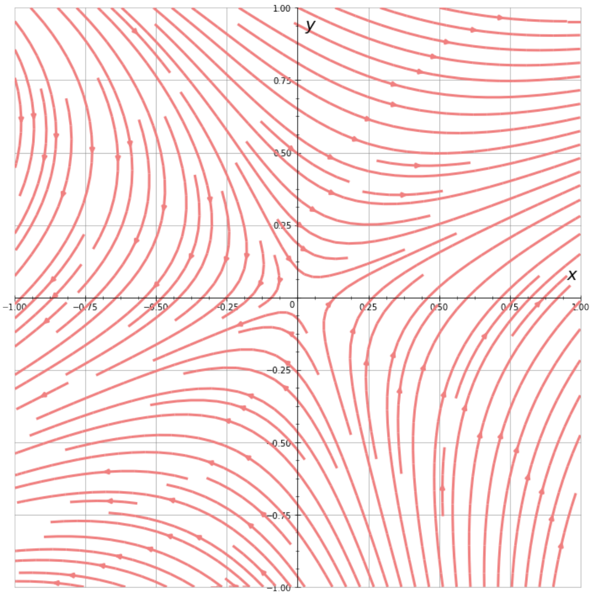


Диаграма Пуанкаре.

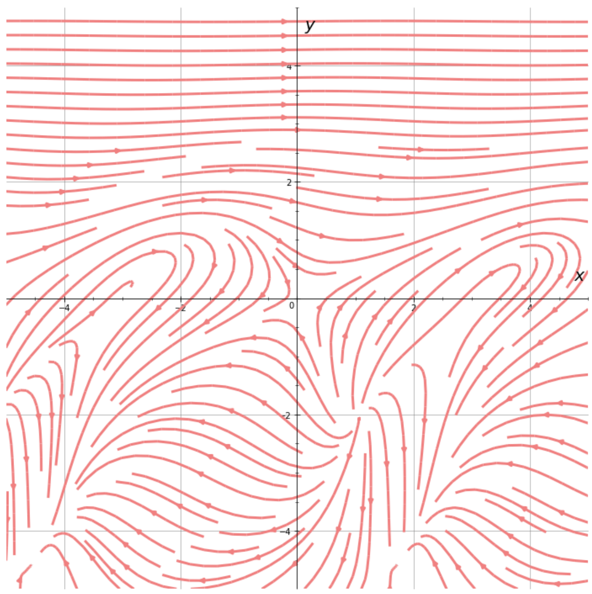
c. В приложении находятся две записи: длинная ($s \in [-20; 20]$) и короткая ($s \in [5; 10]$).

Задача 4.

a. Фазовые портреты системы:



Область $[-1; 1] \times [-1; 1]$.



Область $[-5; 5] \times [-5; 5]$.

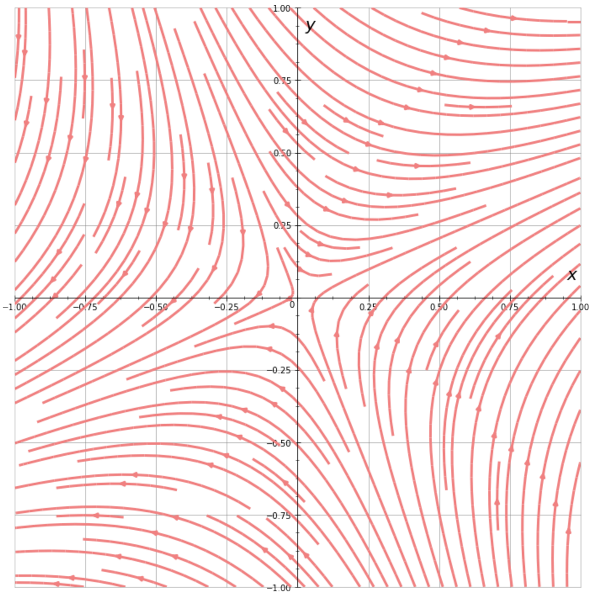
b. Найдём якобиан в точке $(0, 0)$:

$$J(x, y)|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \cos x & e^y \\ \cos(x-y) & -\cos(x-y) \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

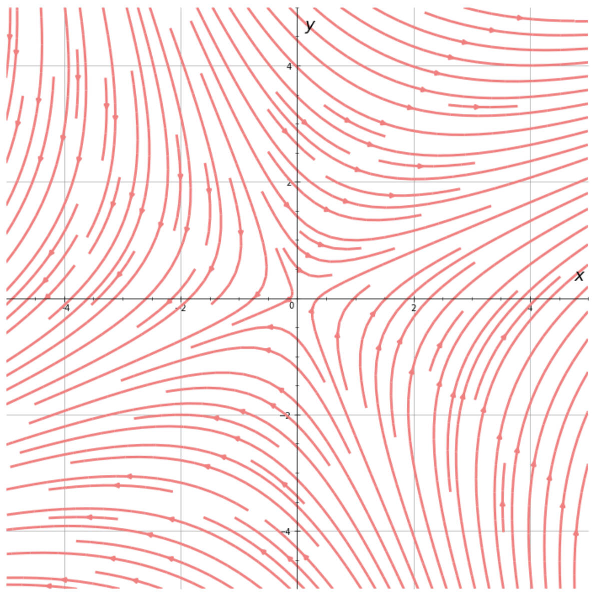
Тогда линеаризация системы в этой точке выглядит так:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

c. Фазовые портреты линеаризации системы:



Область $[-1; 1] \times [-1; 1]$.



Область $[-5; 5] \times [-5; 5]$.

Видно, что на небольшой области линеаризация хорошо приближает исходную систему, тогда как при заметном увеличении рассматриваемой области системы сильно разнятся.

d. Приближённое значение точки на прямой $x_0 = 5$: $y_0 \simeq 1{,}6251$. Нарисуем его:

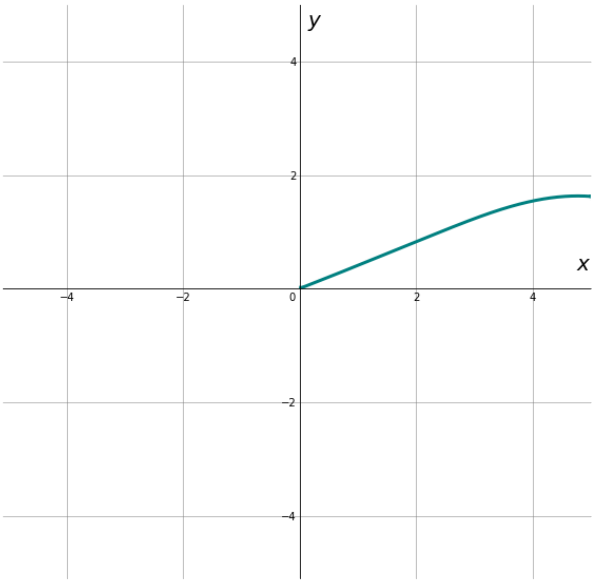


График решения, проходящего через точку (x_0, y_0).

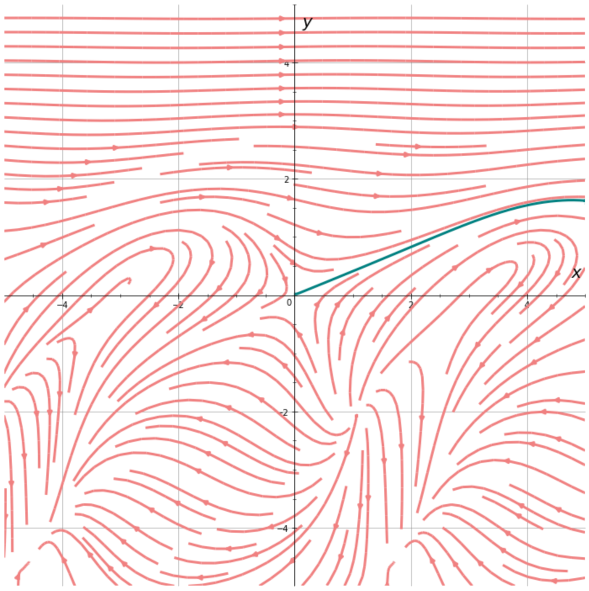
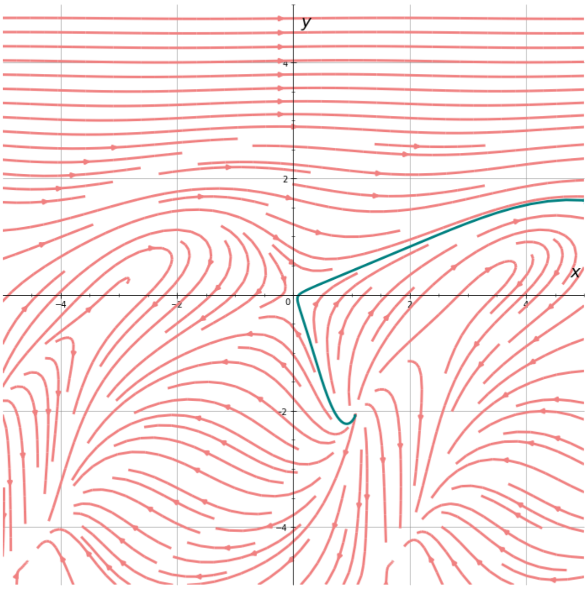


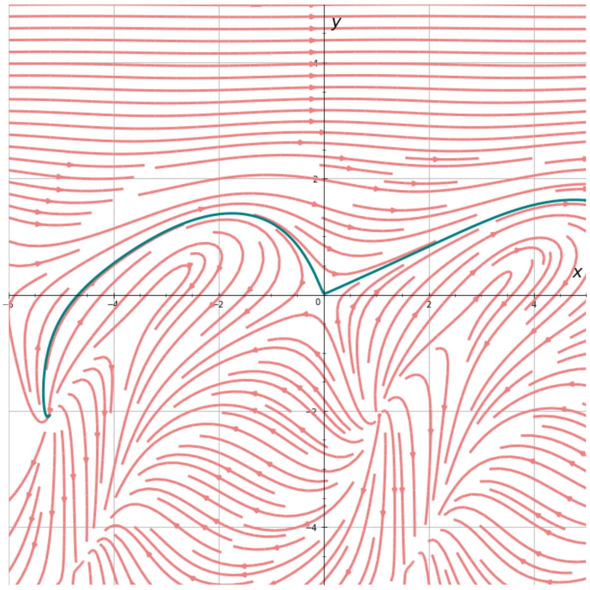
График вместе с фазовым портретом.

e. 1. При движении из точки $(5; 1{,}6250)$ решение стремится в точку $(1{,}0648; -2{,}0768)$.

2. При движении из точки $(5; 1{,}6252)$ решение стремится в точку $(-5{,}2184; -2{,}0768)$.



Случай точки, что чуть ниже сепаратрисы.



Случай точки, что чуть выше сепаратрисы.