Дискретная математика - 2.
Домашнее задание №3.

Lev Khoroshansky

Задача №1.

Рассмотрим полиэдр $P = \Big\{ x \geqslant 0$ и точку $v = (0, 0, 0)$ этого полиэдра.
Исследуем её опорную грань:

$$I_v = \{1\} \implies F_v = \{(0, b, c) \mid b, c \in \mathbb{R}\}, \quad \dim F_v = 2.$$

Понятно, что это единственная двумерная грань этого полиэдра, так как сам полиэдр выглядит как множество $\{(a, b, c) \mid a \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\},\ b, c \in \mathbb{R}\}$, а единственное неравенство, которое может насытиться, – $x \geqslant 0$. Точки, у которых $x > 0$, будут иметь трёхмерную опорную грань, равную всему полиэдру.
Ответ: да, может.

Задача №2.

Заметим, что третье неравенство не накладывает дополнительных ограничений, так как сумма первых двух с коэффициентами $\frac{1}{2}$ даёт более сильное условие:

$$\frac{1}{2}(3y - x) + \frac{1}{2}(3x - y) = x + y$$
$$\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$
$$x + y \geqslant 0 > -1$$

Тогда полиэдр выглядит так:

$$P = \begin{cases} x - 3y \leqslant 0, \\ -3x + y \leqslant 0, \\ -z \leqslant 0, \\ -t \leqslant 0. \end{cases} \quad \text{В терминах матриц: } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

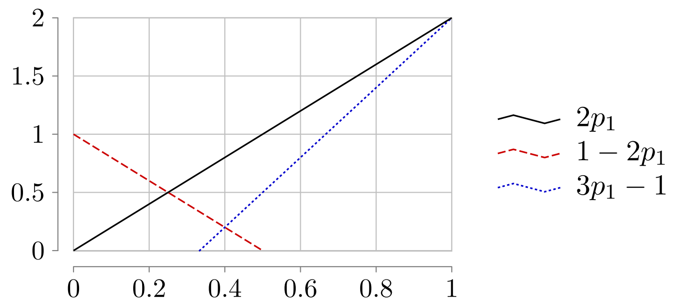
Из условия, что грань должна быть трёхмерной, следует, что у грани лишь одно насыщенное неравенство, i.e. $\dim F_v = n - \dim\langle a_i \mid i \in I_v\rangle \implies \dim\langle a_i \mid i \in I_v\rangle = 4 - 3 = 1$, тогда $I_v \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$. В каждом из этих случаев действительно насыщается лишь одно неравенство из четырёх.

Ответ: 4.

Задача №3.

Составим задачу линейной оптимизации:

$$\begin{cases} 2p_1 \geqslant w, \\ -p_1 + p_2 \geqslant w, \\ 2p_1 - p_2 \geqslant w, \\ p_1 + p_2 = 1, \\ 1 \geqslant p_1 \geqslant 0, \\ 1 \geqslant p_2 \geqslant 0, \\ w \to \max; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p_1 \geqslant w, \\ 1 - 2p_1 \geqslant w, \\ 3p_1 - 1 \geqslant w, \\ p_2 = 1 - p_1, \\ 1 \geqslant p_1 \geqslant 0, \\ 1 \geqslant p_2 \geqslant 0, \\ w \to \max. \end{cases} \Longrightarrow$$

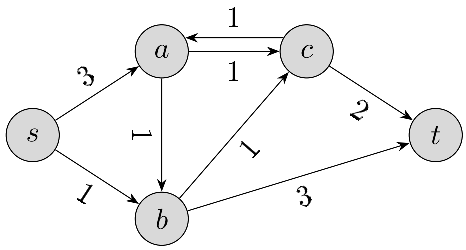


Решение явно видно на графике: $p_1 = \frac{2}{5}$; $p_2 = \frac{3}{5}$; $w = \frac{1}{5}$.
Для того, чтобы найти набор вероятностей для второго игрока, необходимо составить двойственную задачу и подставить вместо ограничения найденное нами оптимальное значение целевой функции:

$$\begin{cases} 2q_1 - q_2 + 2q_3 = \frac{1}{5}, \\ q_2 - q_3 = \frac{1}{5}, \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1, \\ 1 \geqslant q_1 \geqslant 0, \\ 1 \geqslant q_2 \geqslant 0, \\ 1 \geqslant q_3 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1 = 0, \\ q_2 = \frac{3}{5}, \\ q_3 = \frac{2}{5}. \end{cases}$$

Ответ: $w = \frac{1}{5}$; $p_1 = \frac{2}{5}$, $p_2 = \frac{3}{5}$; $q_1 = 0$, $q_2 = \frac{3}{5}$, $q_3 = \frac{2}{5}$.

Задача №4.



Составим ограничения на поток и двойственную задачу:

$$
\begin{cases}
sb + ab - bc - bt = 0, & (\alpha) \\
sa + ca - ab - ac = 0, & (\beta) \\
ac + bc - ca - ct = 0, & (\gamma) \\
3 \geqslant sa \geqslant 0, 1 \geqslant sb \geqslant 0, & (\lambda_{ij}) \\
1 \geqslant ab \geqslant 0, 1 \geqslant ac \geqslant 0, & (\lambda_{ij}) \\
1 \geqslant bc \geqslant 0, 3 \geqslant bt \geqslant 0, & (\lambda_{ij}) \\
1 \geqslant ca \geqslant 0, 2 \geqslant ct \geqslant 0, & (\lambda_{ij}) \\
sa + sb \to \max;
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\beta + \lambda_{sa} \geqslant 1, \\
\alpha + \lambda_{sb} \geqslant 1, \\
\alpha - \beta + \lambda_{ab} \geqslant 0, \\
-\beta + \gamma + \lambda_{ac} \geqslant 0, \\
-\alpha + \gamma + \lambda_{bc} \geqslant 0, \\
-\alpha + \lambda_{bt} \geqslant 0, \\
\beta - \gamma + \lambda_{ca} \geqslant 0, \\
-\gamma + \lambda_{ct} \geqslant 0, \\
\alpha, \beta, \gamma, \lambda_{ij} \geqslant 0, \\
3\lambda_{sa} + \lambda_{sb} + \lambda_{ab} + \lambda_{ac} + \lambda_{bc} + \\
+ 3\lambda_{bt} + \lambda_{ca} + 2\lambda_{ct} \to \min.
\end{cases}
$$

Рассмотрим следующие решения задач:

$$
\begin{cases}
sa = 2, \\
sb = 1, \\
ab = 1, \\
ac = 1, \\
bc = 0, \\
bt = 2, \\
ca = 0, \\
ct = 1;
\end{cases}
\Longrightarrow
\begin{cases}
1 + 1 - 0 - 2 = 0, \\
2 + 0 - 1 - 1 = 0, \\
1 + 0 - 0 - 1 = 0, \\
3 \geqslant 2 \geqslant 0, 1 \geqslant 1 \geqslant 0, \\
1 \geqslant 1 \geqslant 0, 1 \geqslant 1 \geqslant 0, \\
1 \geqslant 0 \geqslant 0, 3 \geqslant 2 \geqslant 0, \\
1 \geqslant 0 \geqslant 0, 2 \geqslant 1 \geqslant 0, \\
2 + 1 = 3.
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\lambda_{sa} = 0, \\
\lambda_{sb} = 1, \\
\lambda_{ab} = 1, \\
\lambda_{ac} = 1, \\
\lambda_{bc} = 0, \\
\lambda_{bt} = 0, \\
\lambda_{ca} = 0, \\
\lambda_{ct} = 0, \\
\alpha = 0, \\
\beta = 1, \\
\gamma = 0;
\end{cases}
\Longrightarrow
\begin{cases}
1 + 0 \geqslant 1, \\
0 + 1 \geqslant 1, \\
0 - 1 + 1 \geqslant 0, \\
-1 + 0 + 1 \geqslant 0, \\
-0 + 0 + 0 \geqslant 0, \\
-0 + 0 \geqslant 0, \\
1 - 0 + 0 \geqslant 0, \\
-0 + 0 \geqslant 0, \\
3 \cdot 0 + 1 + 1 + 1 + 0 + \\
+ 3 \cdot 0 + 0 + 2 \cdot 0 = 3.
\end{cases}
$$

Легко видеть, что данные решения допустимы и удовлетворяют соотношению дополняющей нежёсткости, а, следовательно, они являются оптимальными.

Задача №5.

$$\begin{cases} x - y + z \leqslant 1, & (\alpha) \\ x + 2y - z \leqslant 2, & (\beta) \\ -2x + y + 3x \leqslant 3, & (\gamma) \\ x + 2y + 25z \to \max. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta - 2\gamma = 1, \\ -\alpha + 2\beta + \gamma = 2, \\ \alpha - \beta + 3\gamma = 25, \\ \alpha, \beta, \gamma \geqslant 0, \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma \to \min. \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = 10, \\ \beta = 3, \\ \gamma = 6, \\ 10 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 34. \end{cases}$$

Ответ: 34.

Задача №6.

Перепишем наши ограничения в виде векторов:

$$\begin{aligned} c &= (2,-1,-1) \\ a_1 &= (1,-2,-1), \quad && b_1 = 0 \\ a_2 &= (1,3,0), && b_2 = 10 \\ a_3 &= (-1,1,5), && b_3 = 35 \\ a_4 &= (2,-1,1), && b_4 = 18 \end{aligned}$$

$\underline{v_0 = (0,0,0)}$: 1) $I_{v_0} = \{1\}$.

2) $c \notin \langle a_i \mid i \in I_{v_0} \rangle$.

3) Пусть $u = (2,1,0)$: $cu = 3 > 0$, $a_1 u = 0$.

4) $a_2 u = 5 > 0$; $2 \notin I_{v_0}$.

5) Найдем t_{max}:

$$\begin{cases} a_2(v_0 + tu) = 5t \leqslant 10, \\ a_3(v_0 + tu) = -t \leqslant 35, \\ a_4(v_0 + tu) = 3t \leqslant 18. \end{cases} \implies t_{max} = 2.$$

6) $v_1 = v_0 + t_{max} u = (0,0,0) + 2 \cdot (2,1,0) = (4,2,0)$.

$\underline{v_1 = (4,2,0)}$: 1) $I_{v_1} = \{1,2\}$.

2) $c \notin \langle a_i \mid i \in I_{v_1} \rangle$.

3) Пусть $u = (3,-1,5)$: $cu = 2 > 0, a_1 u = 0, a_2 u = 0$.

4) $a_3 u = 21 > 0$; $3 \notin I_{v_1}$.

5) Найдем t_{max}:

$$\begin{cases} a_3(v_1 + tu) = 21t - 2 \leqslant 35, \\ a_4(v_1 + tu) = 12t + 6 \leqslant 18. \end{cases} \implies t_{max} = 1.$$

6) $v_2 = v_1 + t_{max} u = (4,2,0) + (3,-1,5) = (7,1,5)$.

$\underline{v_2 = (7,1,5)}$: 1) $I_{v_2} = \{1,2,4\}$.

2) $c \in \langle a_i \mid i \in I_{v_2} \rangle : c = \frac{7}{6} a_1 + \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{6} a_4, \forall \lambda_i \geqslant 0$, следовательно, $v_2 - \max$ по леммам 6 и 7 конспектов.

Ответ: $v_{max} = (7,1,5)$, $cv_{max} = 8$.

Задача №7.

Перепишем наши ограничения в виде векторов:

$$\begin{aligned} c &= (-3, 2, 0) \\ a_1 &= (3, -1, 2), \qquad b_1 = 0 \\ a_2 &= (8, -1, 3), \qquad b_2 = 10 \\ a_3 &= (-1, 3, -1), \quad b_3 = 33 \\ a_4 &= (-5, 0, -1), \quad b_4 = 7. \end{aligned}$$

$v_0 = (0, 0, 0)$:

1) $I_{v_0} = \{1\}$.
2) $c \notin \langle a_i \mid i \in I_{v_0} \rangle$.
3) Пусть $u = (0, 2, 1)$: $cu = 4 > 0$, $a_1 u = 0$.
4) $a_3 u = 5 > 0$; $3 \notin I_{v_0}$.
5) Найдем t_{max}:

$$\begin{cases} a_2(v_0 + tu) = t \leqslant 10, \\ a_3(v_0 + tu) = 5t \leqslant 33, \\ a_4(v_0 + tu) = -t \leqslant 7. \end{cases} \implies t_{max} = {}^{33}\!/_5.$$

6) $v_1 = v_0 + t_{max} u = (0, 0, 0) + {}^{33}\!/_5 \cdot (0, 2, 1) = (0, {}^{66}\!/_5, {}^{33}\!/_5)$.

$v_1 = (0, {}^{66}\!/_5, {}^{33}\!/_5)$:

1) $I_{v_1} = \{1, 3\}$.
2) $c \notin \langle a_i \mid i \in I_{v_0} \rangle$.
3) Пусть $u = (-5, 1, 8)$: $cu = 17 > 0$, $a_1 u = 0, a_3 u = 0$.
4) $a_4 u = 17 > 0$; $4 \notin I_{v_0}$.
5) Найдем t_{max}:

$$\begin{cases} a_2(v_0 + tu) = {}^{33}\!/_5 - 17t \leqslant 10, \\ a_4(v_0 + tu) = 17t - {}^{33}\!/_5 \leqslant 7. \end{cases} \implies t_{max} = {}^{4}\!/_5.$$

6) $v_2 = v_1 + t_{max} u = (0, {}^{66}\!/_5, {}^{33}\!/_5) + {}^{4}\!/_5 \cdot (-5, 1, 8) = (-4, 14, 13)$.

$v_2 = (-4, 14, 13)$:

1) $I_{v_2} = \{1, 3, 4\}$.
2) $c \in \langle a_i \mid i \in I_{v_0} \rangle : c = a_1 + a_3 + a_4, \forall \lambda_i \geqslant 0$, следовательно, v_2 – max по леммам 6 и 7 конспектов.

Ответ: $v_{max} = (-4, 14, 13)$, $cv_{max} = 40$.

Задача №8.

Составим задачу линейной оптимизации:

$$\begin{cases} p_1+3p_2-4p_3 \geqslant w, \\ -2p_1+7p_2-11p_3 \geqslant w, \\ 2p_1-p_2+5p_3 \geqslant w, \\ p_1+p_2+p_3=1, \\ 1 \geqslant p_i \geqslant 0, \\ w \to \max; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2p_2-5p_3 \geqslant w, \\ -2+9p_2-9p_3 \geqslant w, \\ 2-3p_2+3p_3 \geqslant w, \\ p_1=1-p_2-p_3, \\ 1 \geqslant p_i \geqslant 0, \\ w \to \max; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18p_2 \geqslant 9w+45p_3-9, \\ 18p_2 \geqslant 2w+18p_3+4, \\ 18p_2 \geqslant 0, \\ 18p_2 \leqslant 18p_3-6w+12, \\ 18p_2 \leqslant 18, \\ 1 \geqslant p_i \geqslant 0, \\ w \to \max; \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 9p_3+5w-7 \leqslant 0, \\ w \leqslant 1, \\ -3p_3+w-2 \leqslant 0, \\ 5p_3+w-3 \leqslant 0, \\ 9p_3+w-7 \leqslant 0, \\ p_1=1-p_2-p_3, \\ 1 \geqslant p_i \geqslant 0, \\ w \to \max; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 45p_3 \leqslant 35-25w, \\ 45p_3 \leqslant 27-9w, \\ 45p_3 \leqslant 35-5w, \\ 45p_3 \leqslant 45, \\ 45p_3 \geqslant 15w-30, \\ 45p_3 \geqslant 0, \\ w \leqslant 1, \\ w \to \max; \end{cases} \sim \begin{cases} w \leqslant \frac{13}{8}, \\ w \leqslant \frac{19}{8}, \\ w \leqslant \frac{13}{4}, \\ w \leqslant 3, \\ w \leqslant \frac{7}{5}, \\ w \leqslant 1, \\ w \to \max; \end{cases}$$

Следовательно, $w=1$. Тогда найдем p_1, p_2, p_3:

$$\begin{cases} 9p_3 \leqslant 2, \\ -3p_3 \leqslant 1, \\ 5p_3 \leqslant 2, \\ 9p_3 \leqslant 6, \\ p_1=1-p_2-p_3, \\ 1 \geqslant p_i \geqslant 0. \end{cases} \quad \text{Пусть } p_3=\tfrac{2}{9}\text{:} \begin{cases} 1+2p_2-\frac{10}{9} \geqslant 1, \\ -2+9p_2-2 \geqslant 1, \\ 2-3p_2+\frac{2}{3} \geqslant 1, \\ p_1=1-p_2-p_3, \\ p_3=\frac{2}{9}, \\ 1 \geqslant p_i \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_2 \geqslant \frac{5}{9}, \\ p_2 \leqslant \frac{5}{9}, \\ p_1=1-p_2-p_3, \\ p_3=\frac{2}{9}, \\ 1 \geqslant p_i \geqslant 0; \end{cases}$$

Тогда наш набор вероятностей следующий: $p_1=\frac{2}{9}, p_2=\frac{5}{9}, p_3=\frac{2}{9}$, – а цена игры w равна 1.
Далее, найдем вероятности для второго игрока, подставив во все неравенства найденную нами цену игры:

$$\begin{cases} q_1-2q_2+2q_3=1, \\ 3q_1+7q_2-q_3=1, \\ -4q_1-11q_2+5q_3=11, \\ q_1+q_2+q_3=1, \\ 1 \geqslant q_i \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1=0, \\ q_2=\frac{1}{4}, \\ q_3=\frac{3}{4}. \end{cases}$$

Соотношения дополняющей нежёсткости выполняются, а значит, эти решения оптимальные.
Ответ: $w=1$; $p_1=\frac{2}{9}$, $p_2=\frac{5}{9}$, $p_3=\frac{2}{9}$; $q_1=0$, $q_2=\frac{1}{4}$, $q_3=\frac{3}{4}$.