

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

**Um Problema Inverso para a Obtenção da
Distribuição de Temperatura**

São Paulo, 04 de Maio de 2020

Geraldo Marques de Sousa Junior - N°USP 10771480

Tulio Navarro Tutui - N°USP 10290208

1 Introdução

Neste Exercício Programa resolvemos um problema ligado a equação de calor, em que a primeira parte consiste em um problema direto e a segunda parte em métodos implícitos.

De maneira simplificada, o problema direto visa determinar o efeito gerado por uma causa e eles são via de regra bem postos. Isso significa que existe pelo menos uma solução, a qual é única e depende continuamente dos dados. Para esses casos, conhecendo condições iniciais e de fronteira, além de eventuais fontes, podemos calcular a solução do problema.

Já o problema inverso é frequentemente mal-posto, uma vez que ele não satisfaz pelo menos uma das seguintes hipóteses: (i) possuir pelo menos uma solução; (ii) ter solução única (caso exista); e/ou (iii) dependência contínua dos dados do problema para a solução. Normalmente, a causa para esse fato é não termos informações suficientes para identificar a causa do efeito estudado.

Neste EP foi analisado a evolução da distribuição de temperatura em uma barra sujeita a fontes de calor, a partir de uma distribuição dada.

2 Descrição do Problema Direto e Equação do Calor

A evolução da distribuição de temperatura em uma barra é dada pelas equações abaixo:

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) + f(t, x), \text{ em } [0, T] \times [0, 1], \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \text{ em } [0, 1] \quad (2)$$

$$u(t, 0) = g_1(t) \text{ em } [0, T] \quad (3)$$

$$u(t, 1) = g_2(t) \text{ em } [0, T] \quad (4)$$

Utilizamos aqui a variável temporal t e a variável espacial x . Além disso o comprimento da barra está normalizado para 1 e integramos a equação num intervalo de tempo de 0 a T .

A variável $u(t, x)$ caracteriza a temperatura no instante t e na posição x , e $u_0(x)$ é a distribuição inicial dada. Já as condições de fronteira, dadas pelas equações (3) e (4) representam as temperaturas nos extremos da barra. Por fim, a função $f(t, x)$ descreve as fontes de calor ao longo do tempo.

Nos itens das tarefas propostas, faremos a comparação no tempo final $T = 1$ quando houver solução exata.

2.1 Discretização da Equação do Calor

Almejando aproximar numericamente a solução de (1)-(4) (a qual será denominada $u(t, x)$ - equação exata), aproximamos por diferenças finitas as derivadas parciais. Dessa forma, para a discretização da equação do calor introduzimos uma malha espacial dada por pontos $x_i = i \cdot \Delta x$, $i = 0, \dots, N$, em que $\Delta x = 1/N$. Para a discretização temporal, temos $\Delta t = T/M$ e calculamos aproximações nos instantes $t_k = k \cdot \Delta t$, $k = 1, \dots, M$.

A aproximação para a solução nos pontos de malha $u(t_k, x_i)$ será representada por u_i^k .

Dessa forma, a condição inicial será dada por:

$$u_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, \dots, N \quad (5)$$

e ao longo da evolução temporal as condições de fronteira são dadas por:

$$u_i^k = g_1(t_k) \quad (6)$$

e

$$u_N^k = g_2 \quad (7)$$

$$k = 1, \dots, M$$

Para os pontos interiores a evolução é aproximada pela fórmula das diferenças finitas, dada por:

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \Delta t \left(\frac{u_{i-1}^k - 2 \cdot u_i^k + u_{i+1}^k}{\Delta x^2} + f(x_i, t_k) \right), \quad (8)$$

$$i = 1, \dots, N-1 \quad \text{e} \quad k = 0, \dots, M-1$$

Assim, conhecendo os valores iniciais de temperatura e também as condições de fronteira ao longo do tempo, a expressão (8) permite determinar a solução aproximada em todos os instantes.

Nesse sentido, nossa intenção é que a solução aproximada nos pontos de malha converja para a solução exata da equação do calor. Inicialmente, o erro entre a solução aproximada e a exata é dado por:

$$e_i^k = u(t_k, x_i) - u_i^k \quad (9)$$

E o erro de truncamento é dado por

$$\|e^k\| = \max_i |e_i^k| \quad (10)$$

Se adotarmos a hipótese de que

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (11)$$

o erro também vai a zero e portanto a aproximação calculada converge para a solução exata da equação.

Verificamos (e detalharemos em seções seguintes) que o método fica instável quando essa condição é violada, amplificando enormemente o erro. Por isso, este método é condicionalmente convergente.

3 Primeira Tarefa

A Primeira Tarefa consiste na implementação do método (8), deixando o valor de N (e consequentemente o de M) como variáveis a serem definidas em tempo de execução, sendo N um dos inteiros: 10, 20, 40, 80, 160, 320. Dessa maneira, faremos cálculos para cada N , com $\lambda = 0.25$, $\lambda = 0.50$ e $\lambda = 0.51$.

Considerando que estamos usando o método de Euler explícito, temos o erro estimado por $\|E\| \leq C \cdot (\Delta t + (\Delta x)^2)$ e da equação (11) temos $\Delta t = \lambda \cdot (\Delta x)^2$. Portanto:

$$\|E\| \leq C \cdot (\lambda + 1) \cdot (\Delta x)^2 \quad (12)$$

Como sabemos que $\Delta x = \frac{1}{N}$, ao dobrarmos N , $(\Delta x)^2$ irá reduzir em $1/4$. Assim, teremos que ao dobrá-lo, o módulo do erro de truncamento esperado deve reduzir em $1/4$, levando em conta a desigualdade (12).

3.1 Item a

Utilizando $T = 1$, fonte $f(t, x) = 10 \cdot \cos(10 \cdot t) \cdot (x^2) \cdot (1-x)^2 - (1+\sin(10 \cdot t)) \cdot (12 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 2)$ que corresponde à solução exata $u(t, x) = (1+\sin(10 \cdot t)) \cdot x^2 \cdot (1-x^2)$, com valor inicial $u_0(x) = x^2 \cdot (1-x)^2$ e condições nulas na fronteira (ou seja, $g_1(t) = 0$ e $g_2(t) = 0$) e $\lambda = 0.25$, $\lambda = 0.50$ e $\lambda = 0.51$.

3.1.1 Resultados item a

A seguir são apresentados os resultados obtidos para cada N no item a:

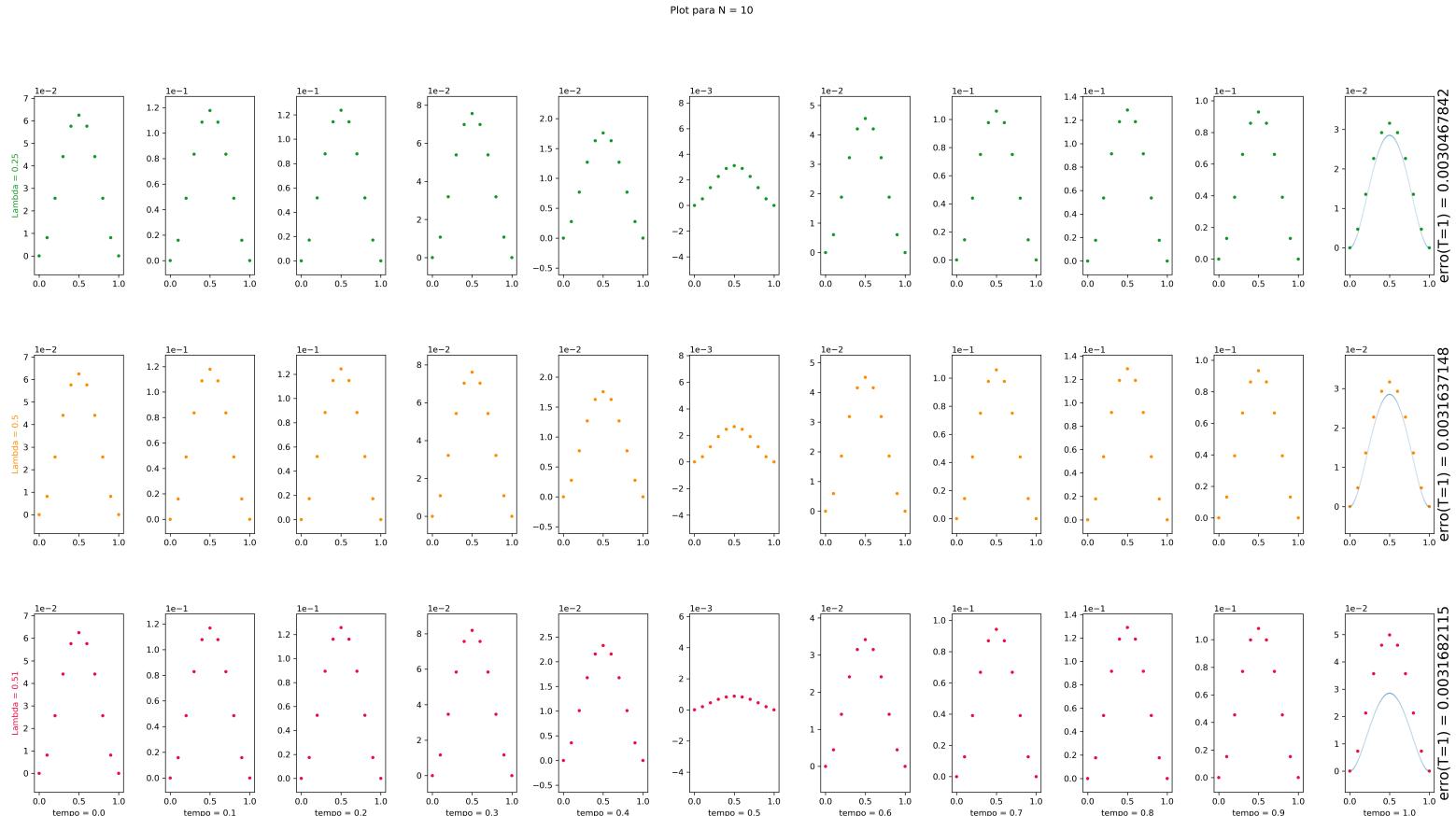


Figura 1: Gráfico da tarefa 1 letra a para $N = 10$

Plot para N = 20

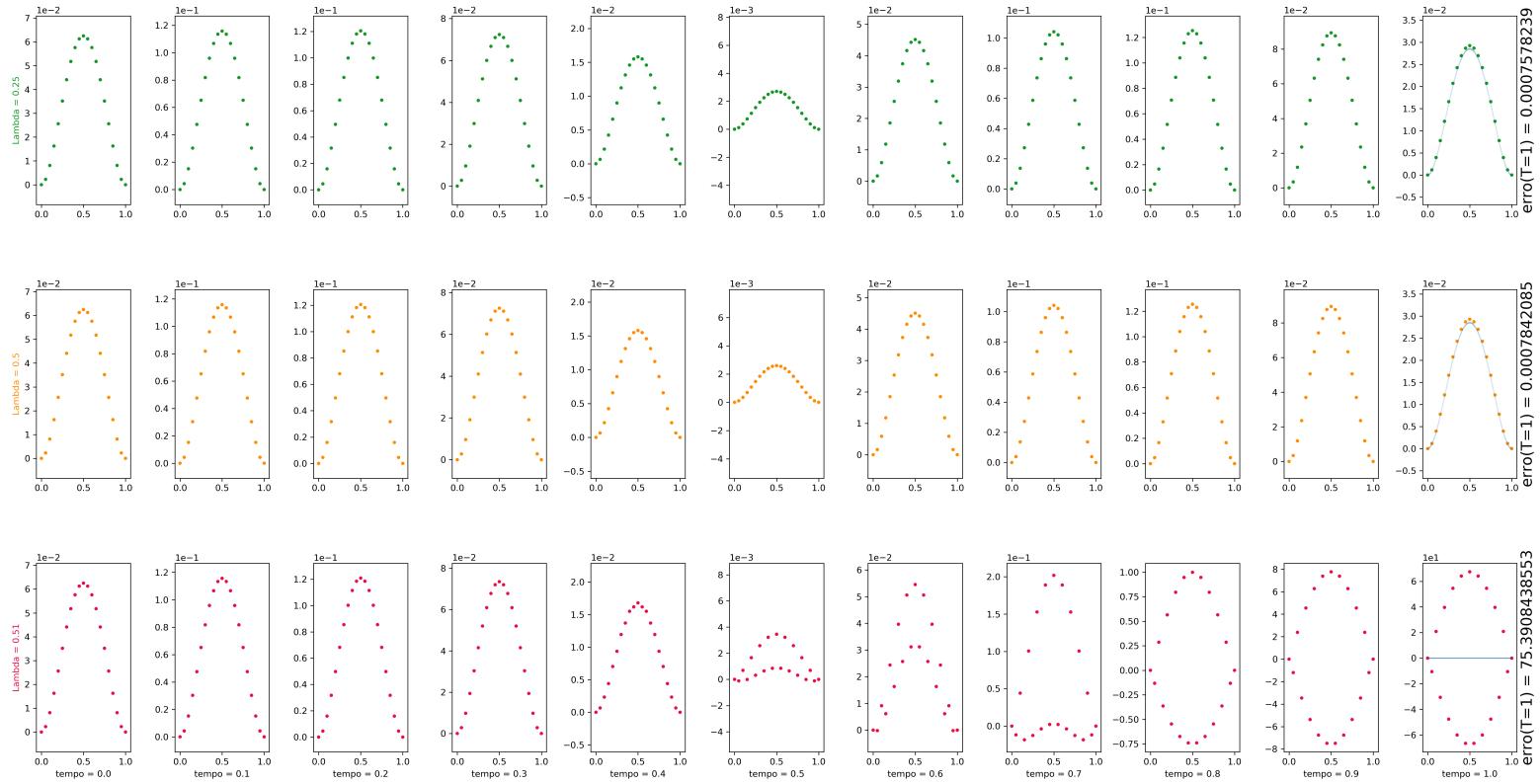


Figura 2: Gráfico da tarefa 1 letra a para N = 20

Plot para N = 40

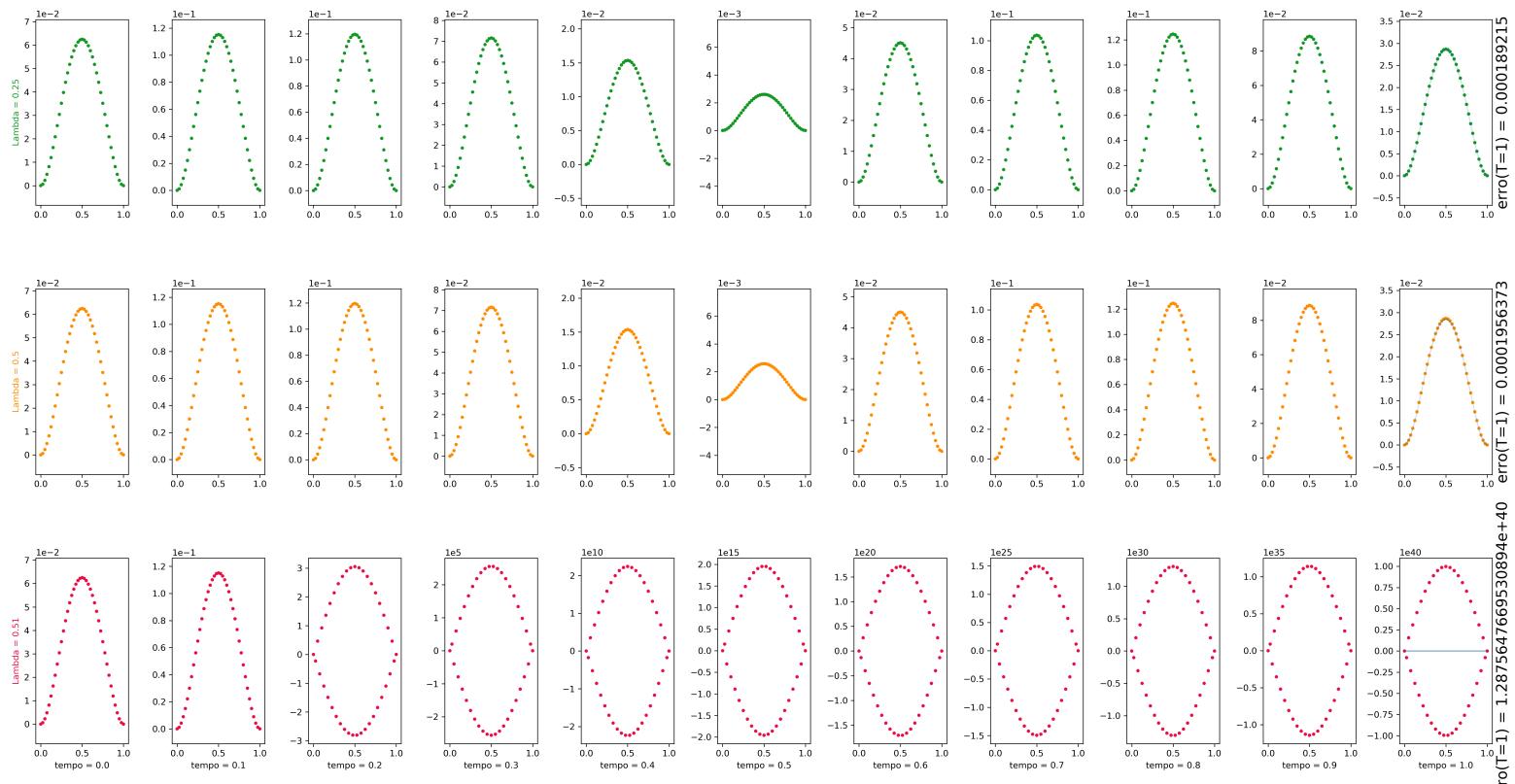


Figura 3: Gráfico da tarefa 1 letra a para N = 40

Plot para N = 80

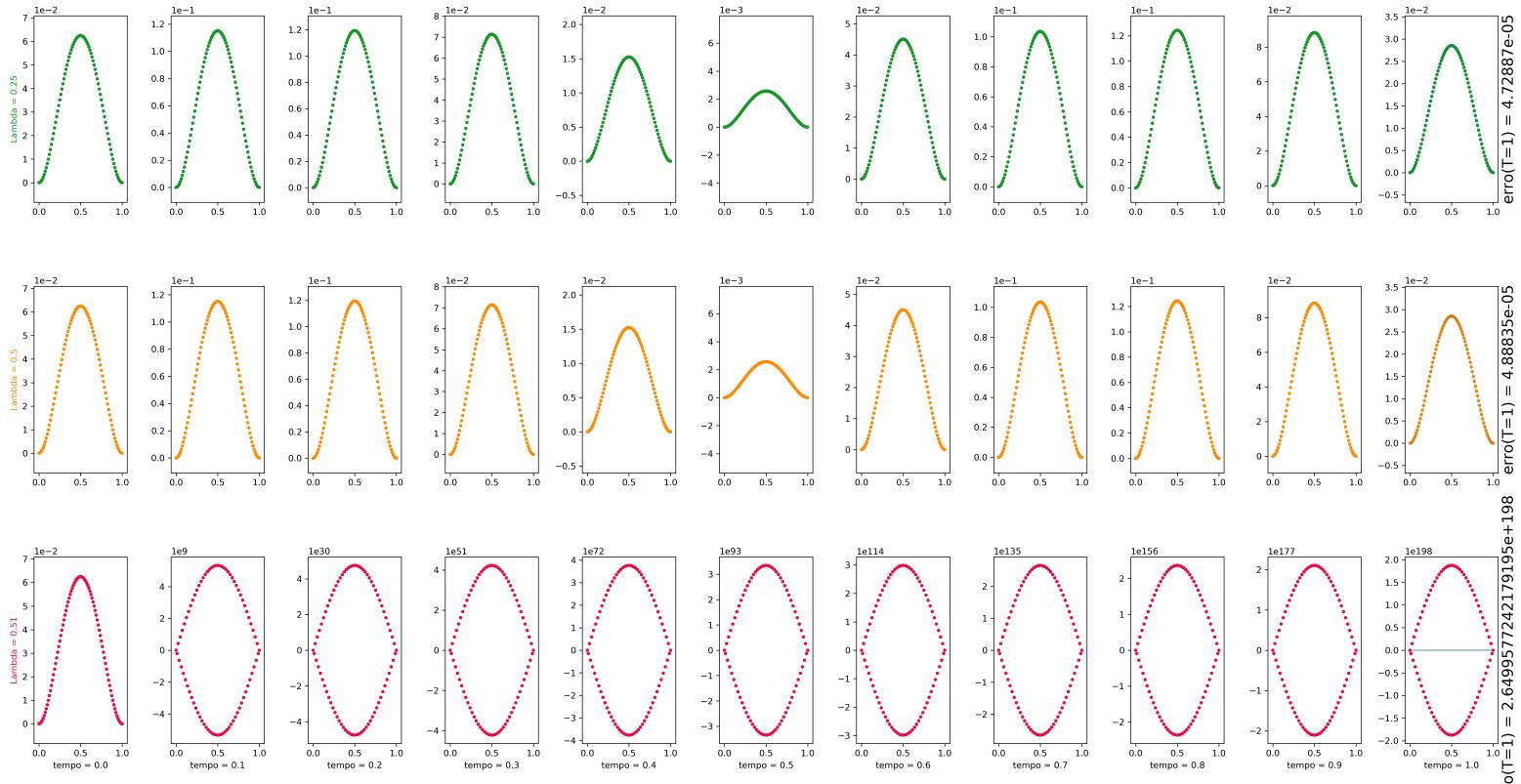


Figura 4: Gráfico da tarefa 1 letra a para N = 80

Plot para N = 160

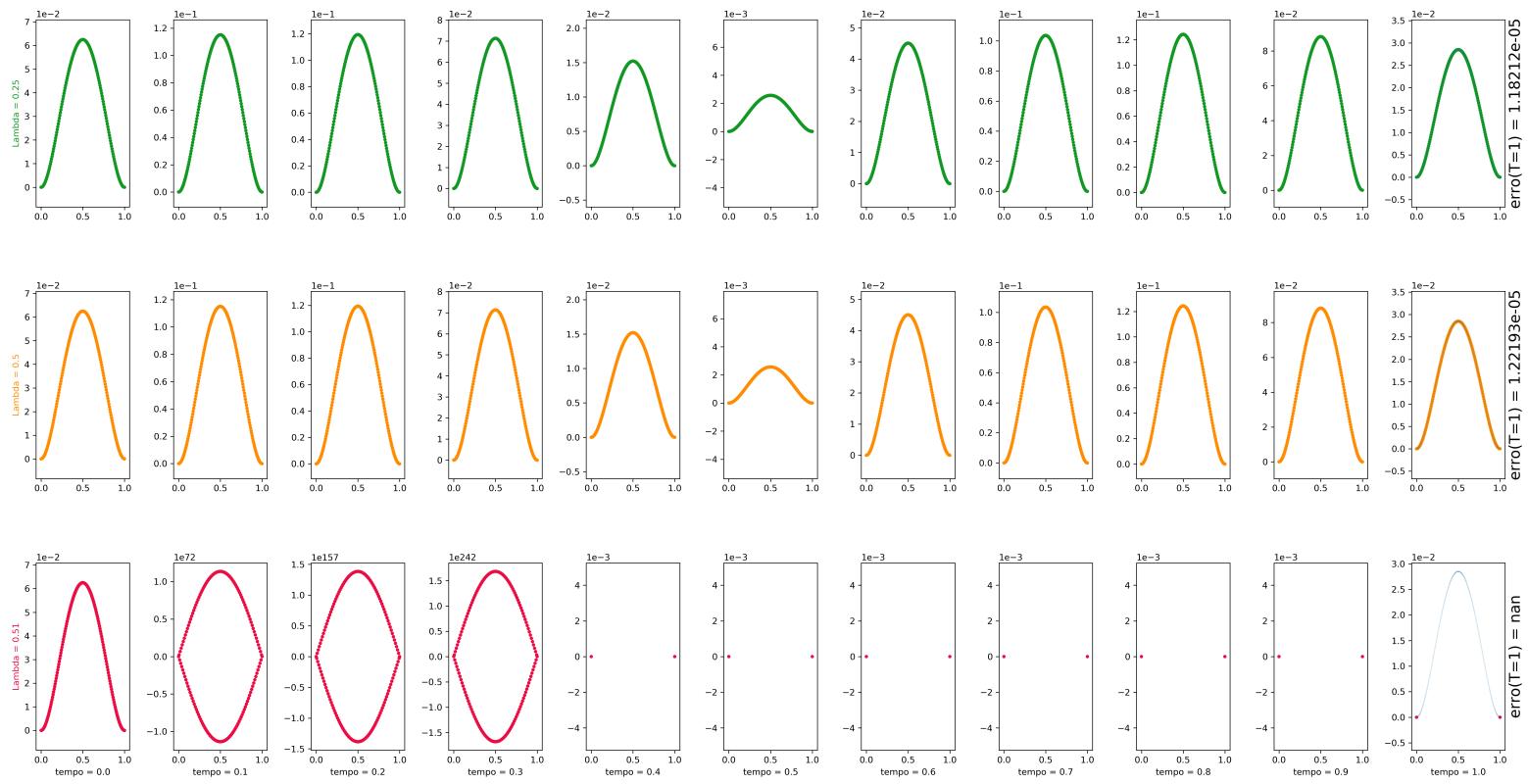


Figura 5: Gráfico da tarefa 1 letra a para N = 160

Plot para $N = 320$

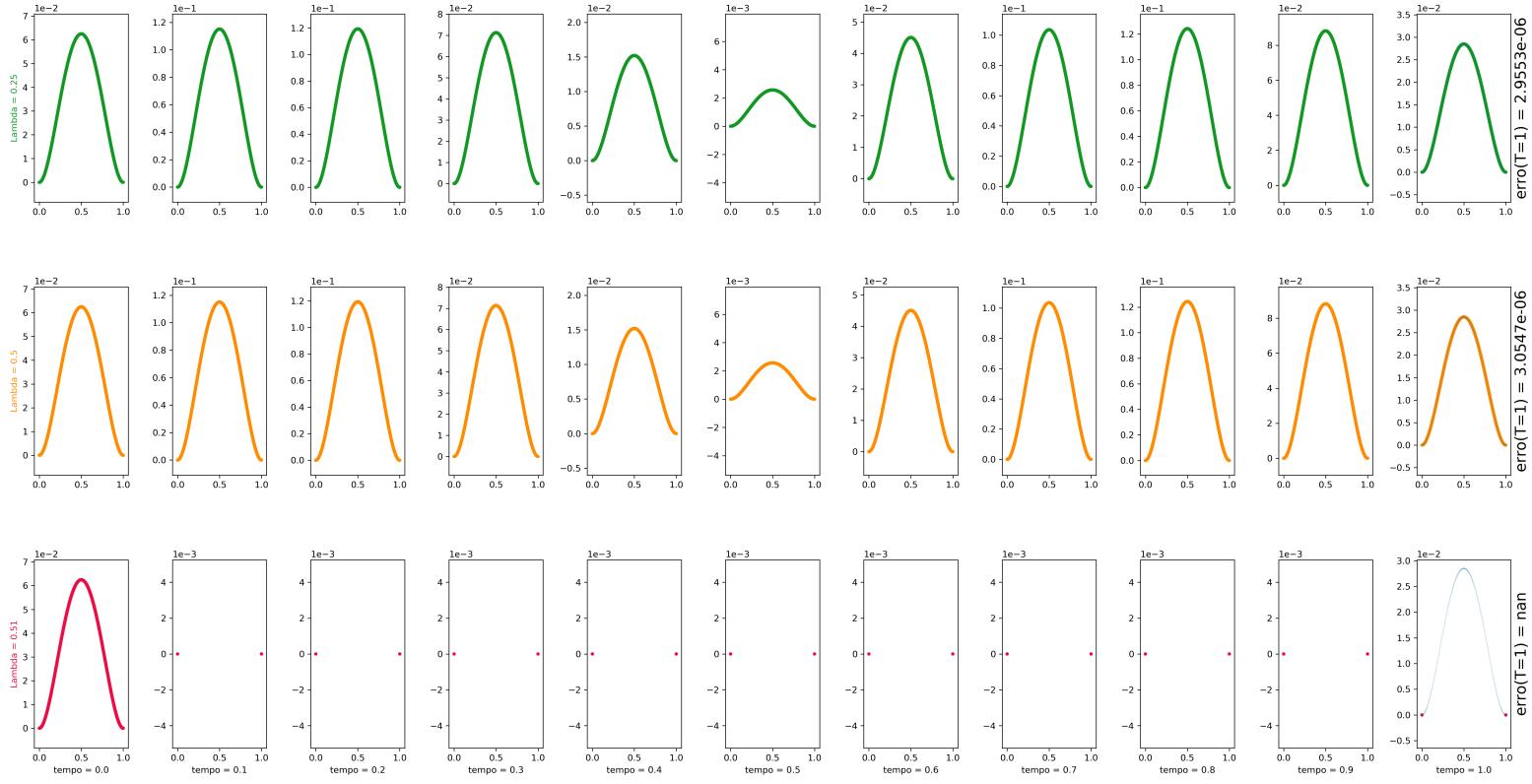


Figura 6: Gráfico da tarefa 1 letra a para $N = 320$

Verificação do Comportamento do Erro e Análise do Fator de Redução

Conforme aumentamos o valor de N , para $\lambda = 0.25$ e $\lambda = 0.50$, o valor do erro (calculado em $T = 1$, através da expressão (10)) diminui, se aproximando da solução exata, conforme plotado no tempo $t = 1$.

Por outro lado, para $\lambda = 0.51$, o erro aumenta gradativamente, divergindo da solução exata $u(t, x)$ e explode para infinito em um valor de N entre 80 e 160.

Nas tabelas abaixo temos uma análise do valor do erro de truncamento e do fator de redução em função do valor de λ e N .

N	λ	Erro de truncamento	Fator de Redução %
10	0.25	$3.05 \cdot 10^{-3}$	-
20	0.25	$7.58 \cdot 10^{-4}$	24.85
40	0.25	$1.89 \cdot 10^{-4}$	24.93
80	0.25	$4.73 \cdot 10^{-5}$	25.03
160	0.25	$1.18 \cdot 10^{-5}$	24.95
320	0.25	$2.96 \cdot 10^{-6}$	25.08

Tabela 1: Análise do Erro de Truncamento e do Fator de Redução em função do valor de N para $\lambda = 0.25$

N	λ	Erro de truncamento	Fator de Redução %
10	0.50	$3.16 \cdot 10^{-3}$	-
20	0.50	$7.84 \cdot 10^{-4}$	24.81
40	0.50	$1.96 \cdot 10^{-4}$	25.00
80	0.50	$4.89 \cdot 10^{-5}$	24.95
160	0.50	$1.22 \cdot 10^{-5}$	24.95
320	0.50	$3.05 \cdot 10^{-6}$	25.00

Tabela 2: Análise do Erro de Truncamento e do Fator de Redução em função do valor de N para $\lambda = 0.50$

N	λ	Erro de truncamento
10	0.51	$3.17 \cdot 10^{-3}$
20	0.51	$7.53 \cdot 10^1$
40	0.51	$1.29 \cdot 10^{40}$
80	0.51	$2.65 \cdot 10^{198}$
160	0.51	∞
320	0.51	∞

Tabela 3: Análise do Erro de Truncamento e do Fator de Redução em função do valor de N para $\lambda = 0.51$

Como observado na Tabela (3), o valor do erro para $\lambda = 0.51$ explode para infinito conforme aumentamos o valor de N .

Além disso, apesar de alguns valores observados serem ligeiramente menor que o proposta pela equação (12), possivelmente causado por erros de arredondamento, o valor do fator de redução se aproxima de $\frac{1}{4}$.

Número de passos para $N = 640$ e para $N = 1080$

O número de passos (NP) é calculado pela seguinte expressão:

$$NP = N \cdot M \quad (13)$$

em que M é dado pela equação:

$$M = \frac{T \cdot N^2}{\lambda}, \text{ com } T = 1 \quad (14)$$

Portanto, a equação (13) fica:

$$NP = \frac{N^3}{\lambda} \quad (15)$$

E o número de passos pode ser analisado na Tabela (4) abaixo:

N	λ	Número de Passos
640	0.25	$1.05 \cdot 10^9$
640	0.50	$5.24 \cdot 10^8$
640	0.51	$5.14 \cdot 10^8$
1080	0.25	$5.04 \cdot 10^9$
1080	0.50	$2.52 \cdot 10^9$
1080	0.51	$2.47 \cdot 10^9$

Tabela 4: Análise do Número de Passos para $N = 640$ e para $N = 1080$

3.2 Item b

Utilizando $T = 1$, primeiramente, deve-se descobrir $g1(t), g2(t), u_0(x)$ e $f(t, x)$ dada a solução exata $u(t, x) = \exp t - x \cdot \cos(5 \cdot t \cdot x)$.

Utilizando as equações (1), (2), (3) e (4) respectivamente chegamos em: fonte $f(t, x) = e^{t-x} \cdot (5 \cdot t^2 \cdot \cos(5 \cdot t \cdot x) - (x + 2 \cdot t) \cdot \sin(5 \cdot t \cdot x))$, valor inicial $u_0(x) = e^{-x}$ e condições de fronteira espacial $g_1(t) = e^t$ e $g_2(t) = e^{t-1} \cdot \cos(5 \cdot t)$

Dessa forma, como no item anterior, será definida N em tempo de execução como um dos inteiros: 10, 20, 40, 80, 160, 320, e faremos o cálculo da aproximação em cada N para $\lambda = 0.25$, $\lambda = 0.50$ e $\lambda = 0.51$.

3.2.1 Resultados item b

A seguir são apresentados os resultados obtidos para cada N no item b:

Plot para N = 10

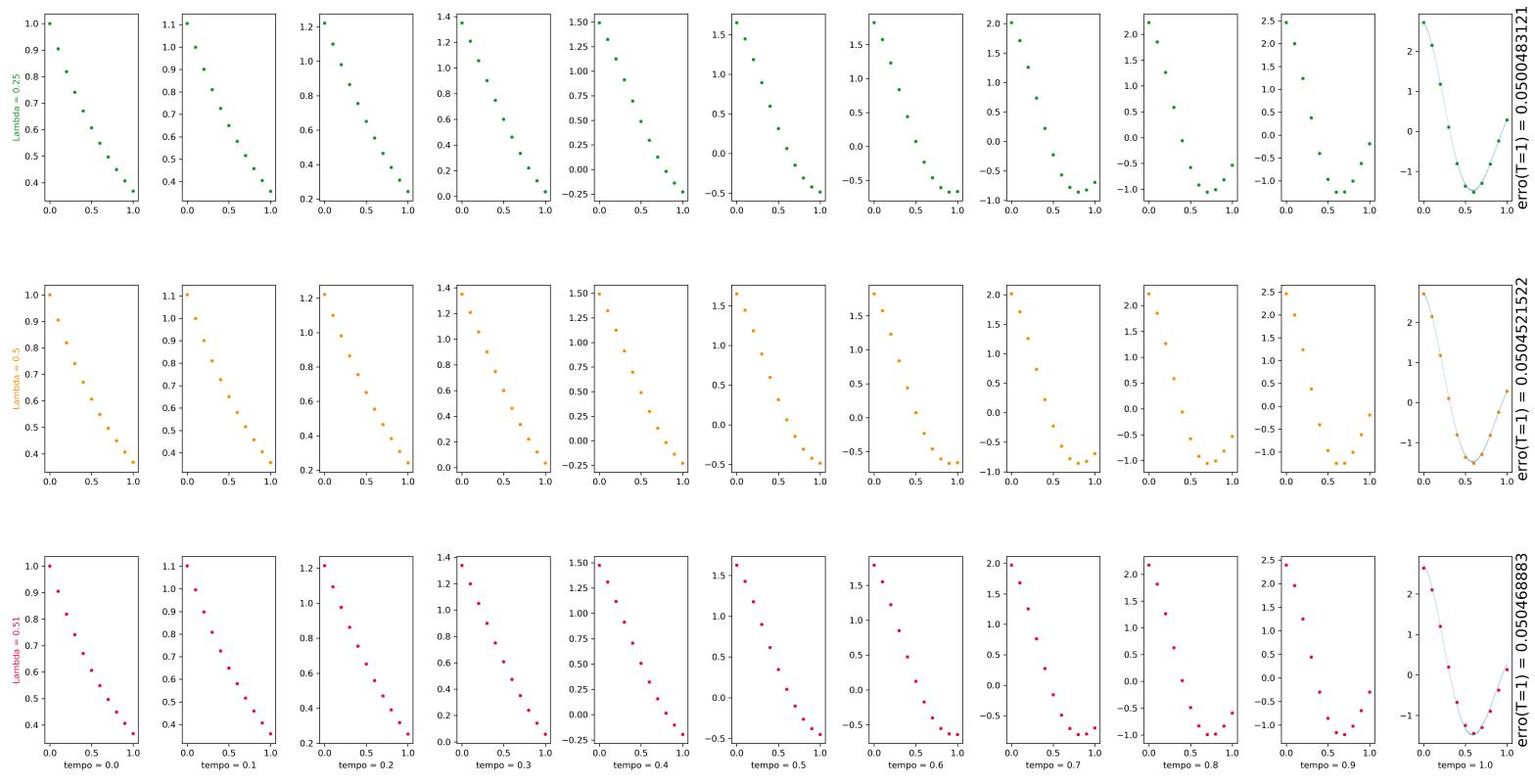


Figura 7: Gráfico da tarefa 1 letra b para $N = 10$

Plot para N = 20

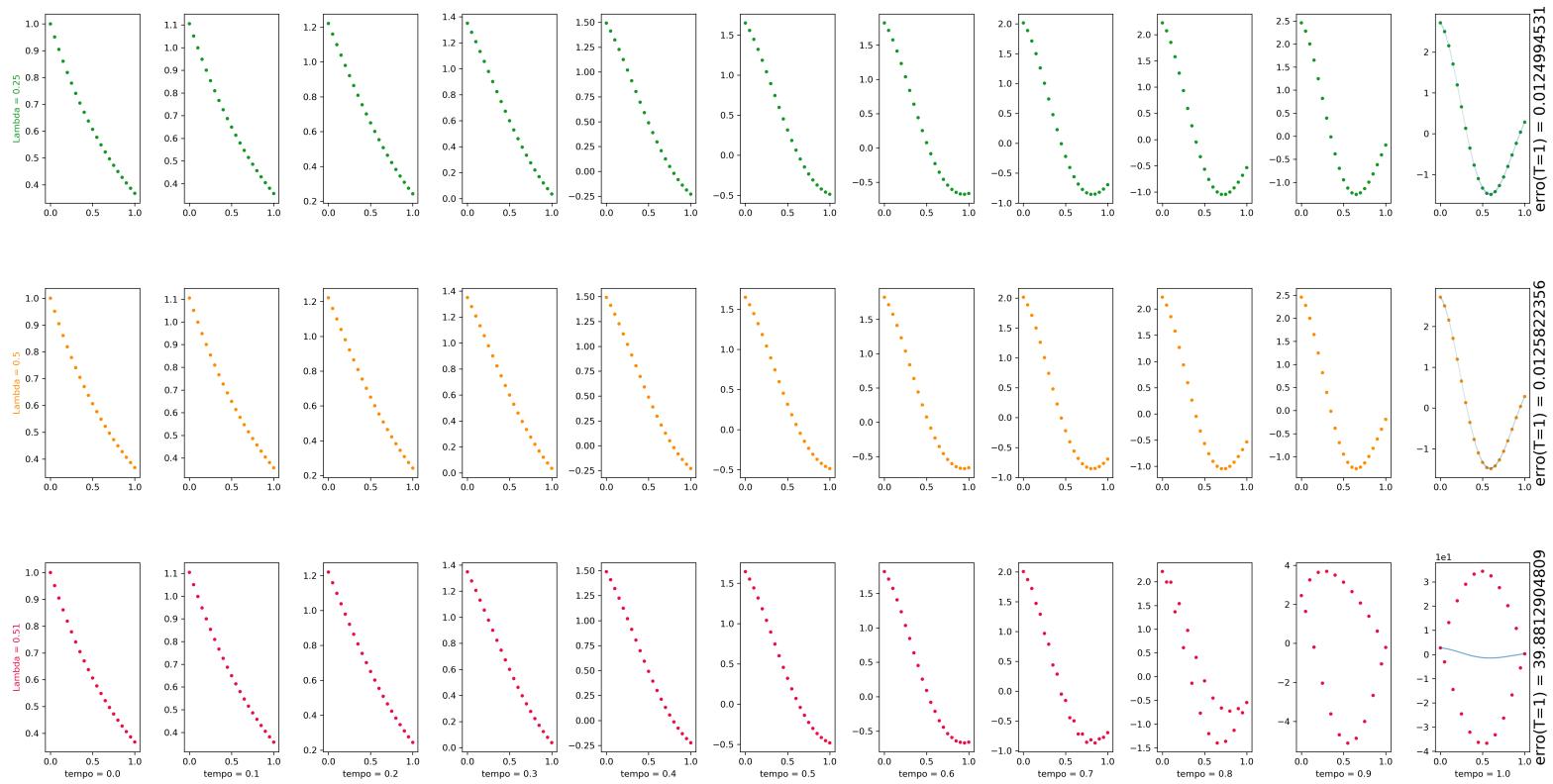


Figura 8: Gráfico da tarefa 1 letra b para N = 20

Plot para N = 40

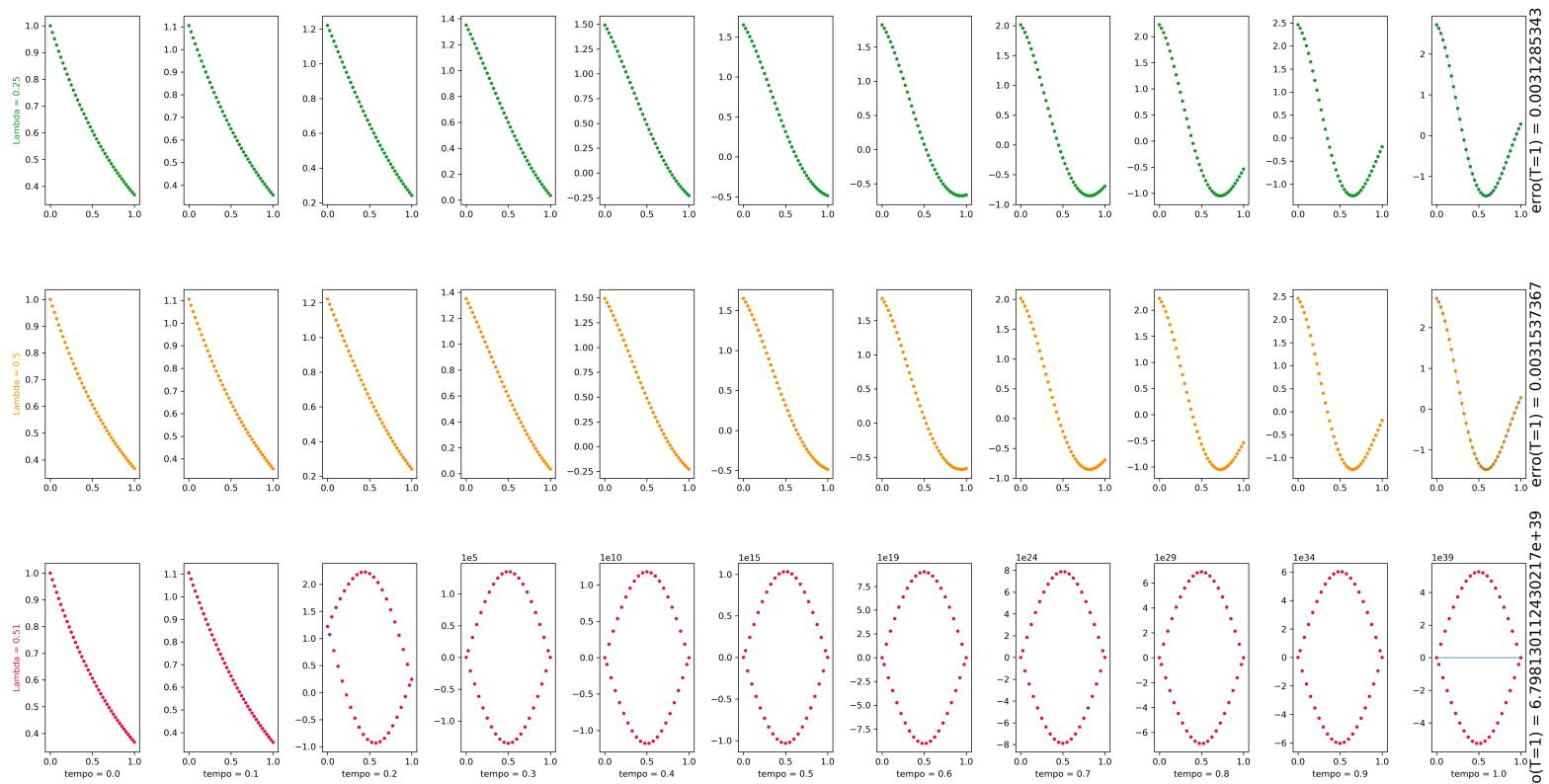


Figura 9: Gráfico da tarefa 1 letra b para N = 40

Plot para N = 80

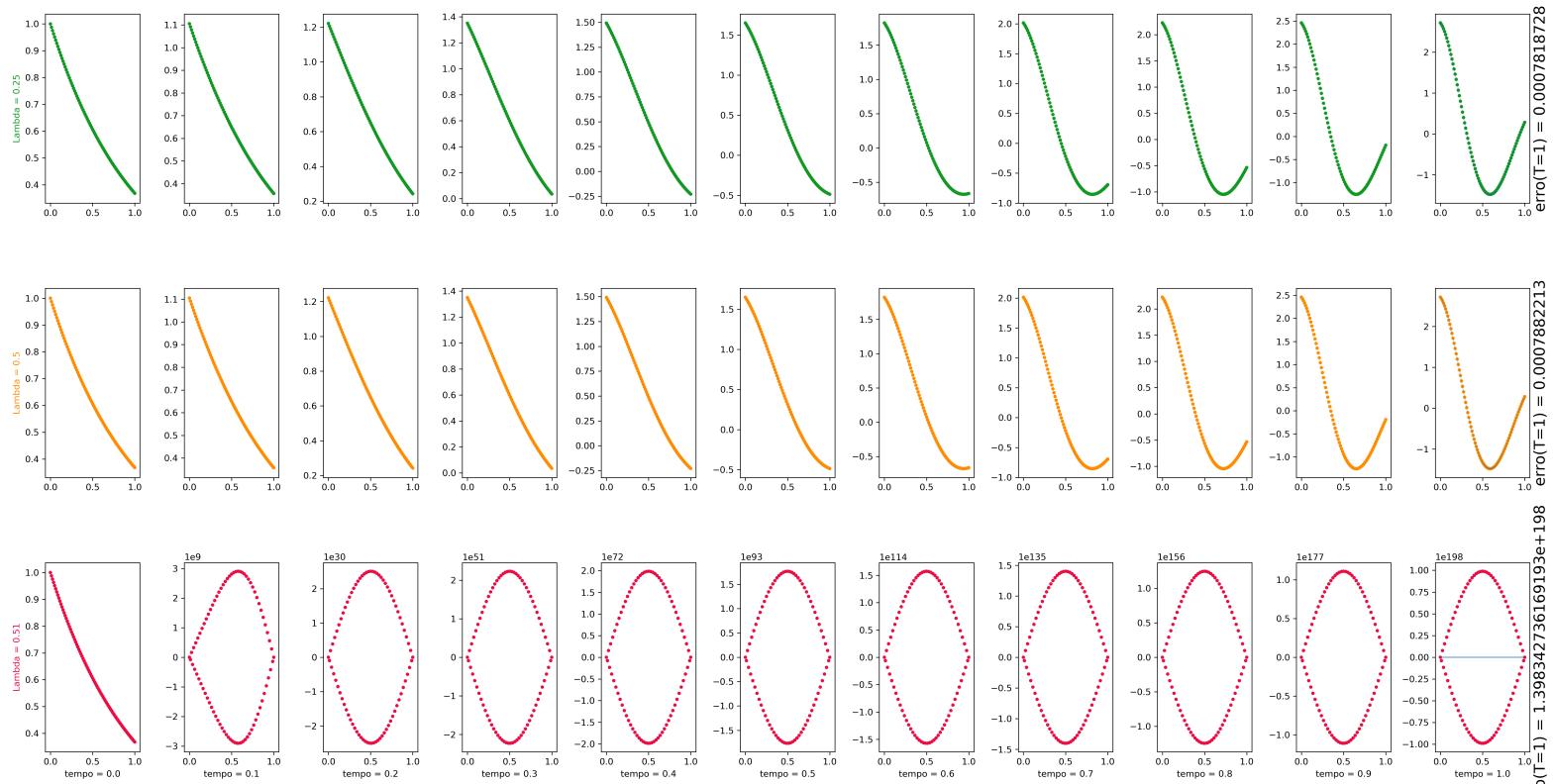


Figura 10: Gráfico da tarefa 1 letra b para N = 80

Plot para N = 160

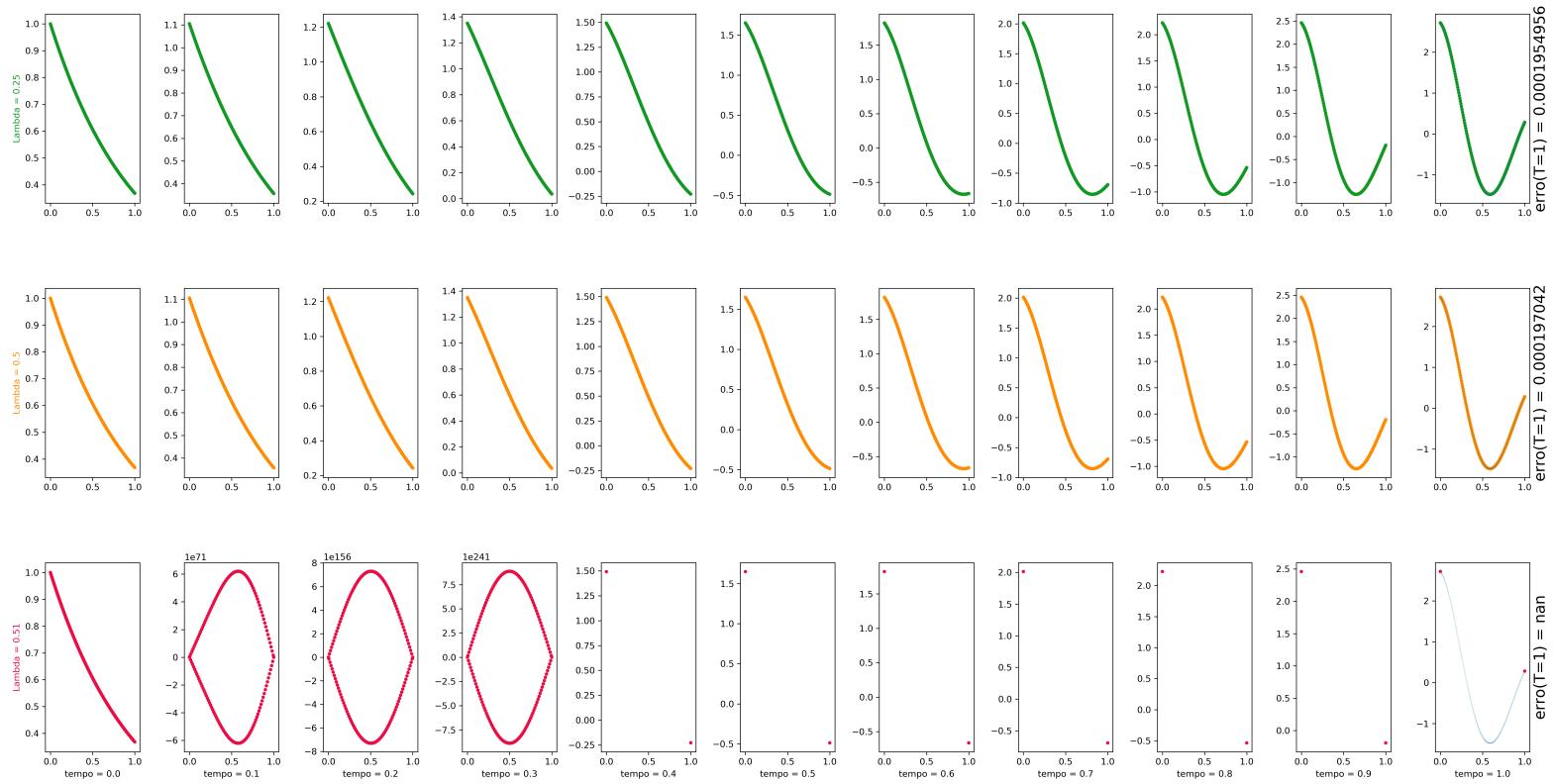


Figura 11: Gráfico da tarefa 1 letra b para N = 160

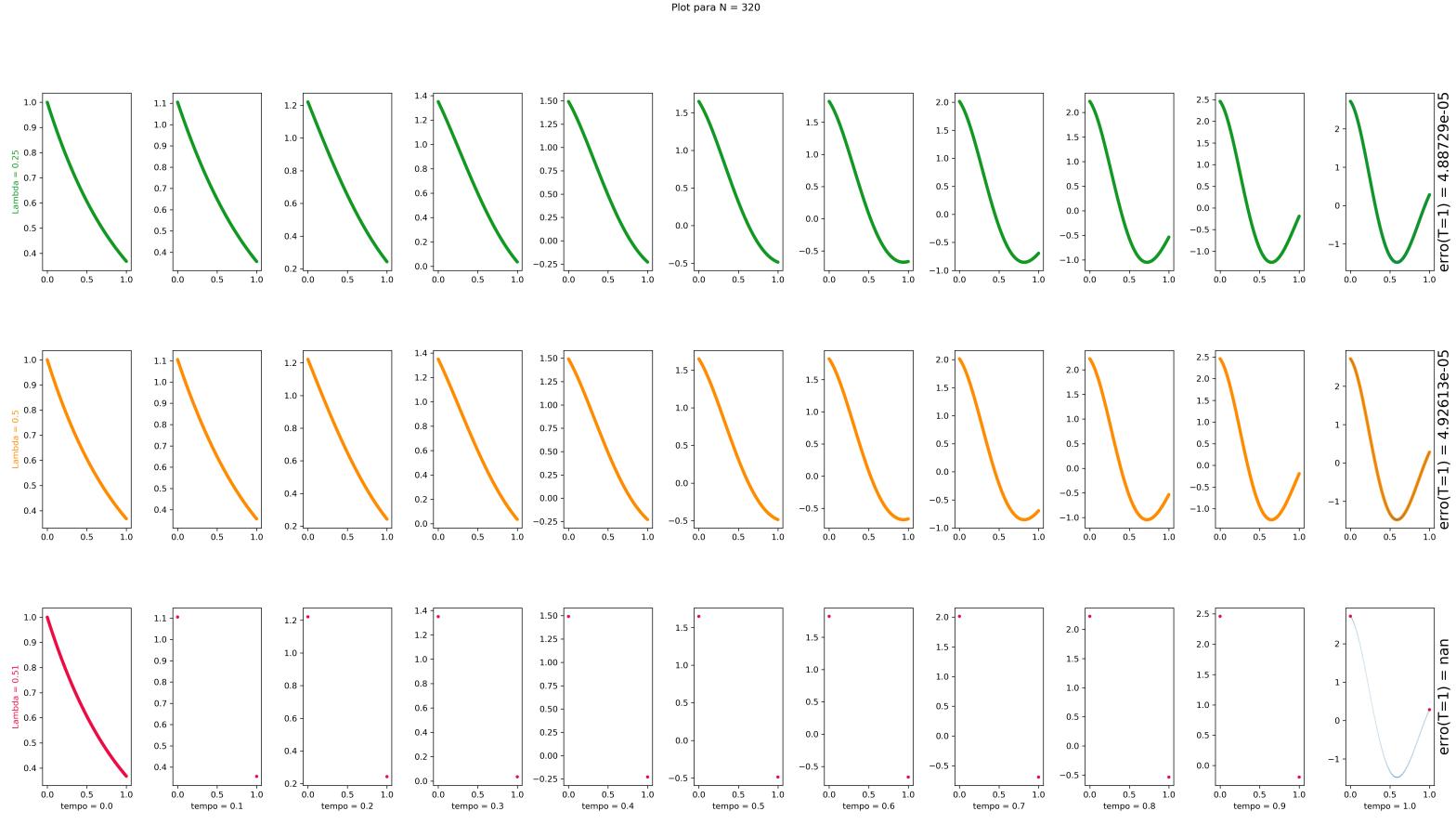


Figura 12: Gráfico da tarefa 1 letra b para N = 320

3.2.2 Verificação do Comportamento do Erro e Análise do Fator de Redução

Novamente, conforme aumentamos o valor de N , para $\lambda = 0.25$ e $\lambda = 0.50$, o valor do erro (calculado em $T = 1$, através da expressão (10)) diminui, se aproximando da solução exata, conforme plotado no tempo $t = 1$.

Por outro lado, para $\lambda = 0.51$, o erro aumenta gradativamente, divergindo da solução exata $u(t, x)$ e explode para infinito em um valor de N entre 80 e

160.

Nas tabelas abaixo temos uma análise do valor do erro de truncamento e do fator de redução em função do valor de λ e N .

N	λ	Erro de truncamento	Fator de Redução %
10	0.25	$5.00 \cdot 10^{-2}$	-
20	0.25	$1.25 \cdot 10^{-2}$	25.00
40	0.25	$3.13 \cdot 10^{-3}$	25.04
80	0.25	$7.82 \cdot 10^{-4}$	24.98
160	0.25	$1.95 \cdot 10^{-4}$	24.94
320	0.25	$4.89 \cdot 10^{-5}$	25.07

Tabela 5: Análise do Erro de Truncamento e do Fator de Redução em função do valor de N para $\lambda = 0.25$

N	λ	Erro de truncamento	Fator de Redução %
10	0.50	$5.05 \cdot 10^{-2}$	-
20	0.50	$1.25 \cdot 10^{-2}$	24.75
40	0.50	$3.15 \cdot 10^{-3}$	25.20
80	0.50	$7.88 \cdot 10^{-4}$	25.02
160	0.50	$1.97 \cdot 10^{-4}$	0.25
320	0.50	$4.93 \cdot 10^{-5}$	25.03

Tabela 6: Análise do Erro de Truncamento e do Fator de Redução em função do valor de N para $\lambda = 0.50$

N	λ	Erro de truncamento
10	0.51	$5.05 \cdot 10^{-2}$
20	0.51	$3.99 \cdot 10^1$
40	0.51	$6.80 \cdot 10^{39}$
80	0.51	$1.40 \cdot 10^{198}$
160	0.51	∞
320	0.51	∞

Tabela 7: Análise do Erro de Truncamento em função do valor de N para $\lambda = 0.51$

Como observado na Tabela (7), o valor do erro para $\lambda = 0.51$ explode para infinito conforme aumentamos o valor de N .

Além disso, apesar de alguns valores observados serem ligeiramente menor que o proposta pela equação (12), possivelmente causado por erros de arredondamento, o valor do fator de redução se aproxima de $\frac{1}{4}$.

Número de passos para $N = 640$ e para $N = 1080$

Utilizando a equação (15) para calcular o Número de Passos do item anterior, chegamos nos mesmos resultados:

N	λ	Número de Passos
640	0.25	$1.05 \cdot 10^9$
640	0.50	$5.24 \cdot 10^8$
640	0.51	$5.14 \cdot 10^8$
1080	0.25	$5.04 \cdot 10^9$
1080	0.50	$2.52 \cdot 10^9$
1080	0.51	$2.47 \cdot 10^9$

Tabela 8: Análise do Número de Passos para $N = 640$ e para $N = 1080$

3.3 Item c

Neste item utilizaremos $T = 1$, com condição inicial nula (ou seja $u_0(x) = 0$) e, como condições na fronteira $g_1(t) = g_2(t) = 0$.

Além disso, há uma fonte pontual localizada em um ponto p do domínio, cuja intensidade varia ao longo do tempo segundo a equação:

$$r(t) = 10000 \cdot (1 - 2t^2) \quad (16)$$

Assumimos $g_h(x)$ poderia assumir o valor $1/h$ em p e variar linearmente de 0 a $1/h$ no intervalo $[p - h, p]$ e de $1/h$ a 0 no intervalo $[p, p + h]$, sendo nula no restante do domínio. Dessa maneira, temos:

$$g_h(x) = \begin{cases} \frac{h}{2}(x + \Delta x - p), & \text{se } p - h \leq x \leq p \\ \frac{h}{2}(-x + \Delta x + p), & \text{se } p \leq x \leq p + h \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (17)$$

Logo, definindo a fonte pontual $f(t, x) = r(t)g_h(x)$ temos:

$$f(t, x) = \begin{cases} 1 \cdot 10^4 \cdot (1 - 2t^2) \cdot \frac{h}{2}(x + \Delta x - p), & \text{se } p - h \leq x \leq p \\ 1 \cdot 10^4 \cdot (1 - 2t^2) \cdot \frac{h}{2}(-x + \Delta x + p), & \text{se } p \leq x \leq p + h \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (18)$$

Para este item, consideremos $p = 0.25$ e vamos determinar numericamente a função exata.

3.3.1 Resultados item c

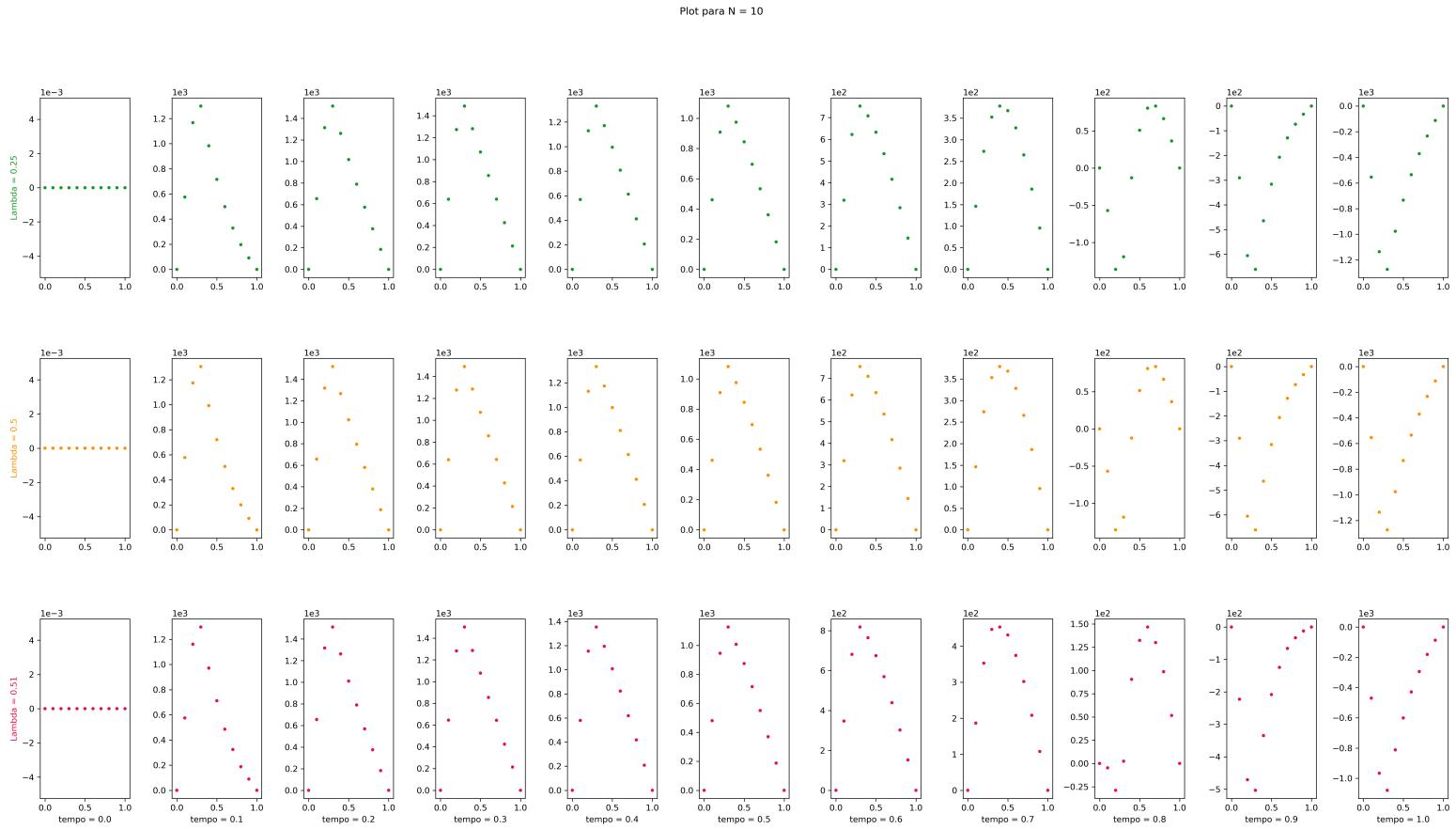


Figura 13: Gráfico da tarefa 1 letra c para $N = 10$

Plot para N = 20

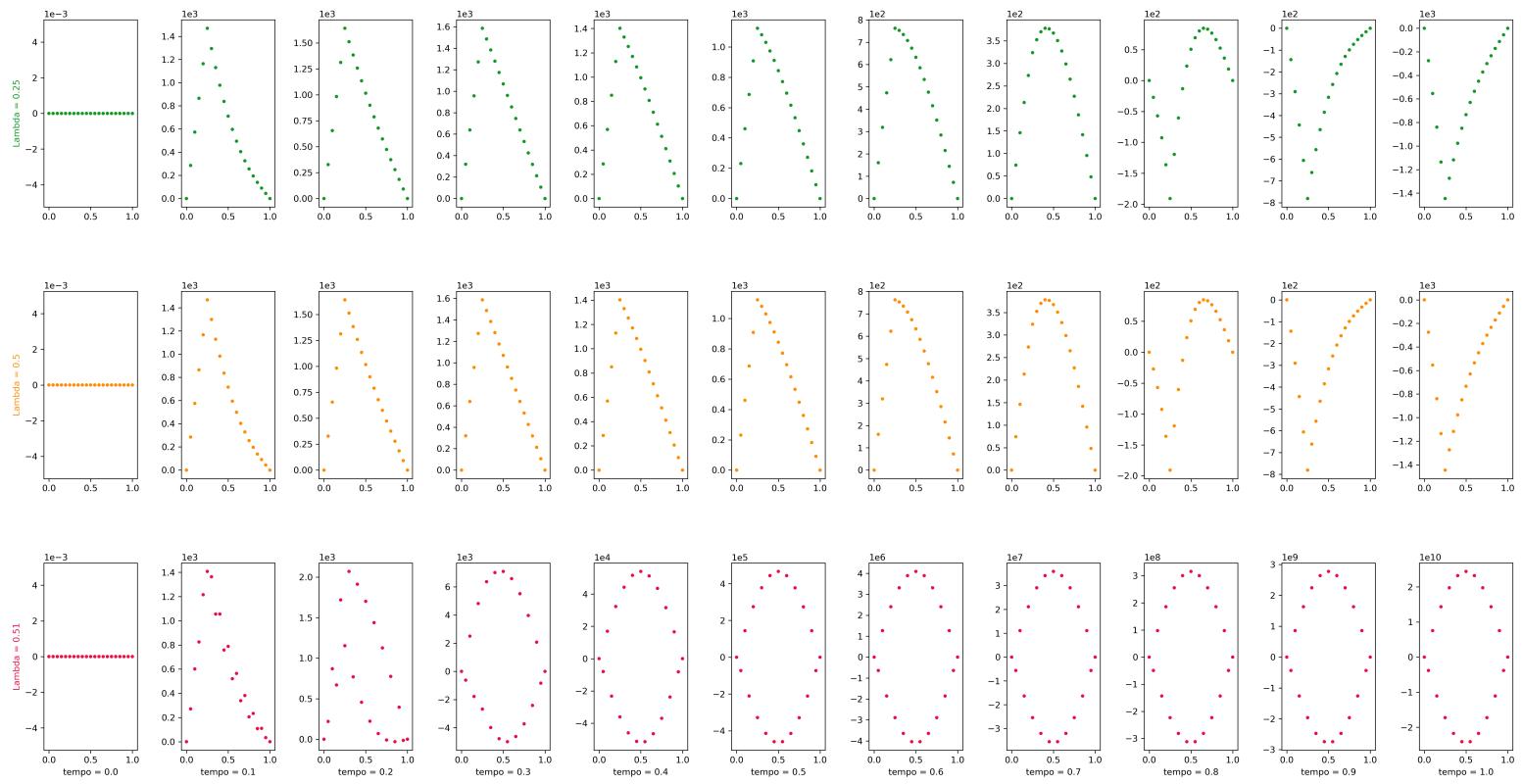


Figura 14: Gráfico da tarefa 1 letra c para N = 20

Plot para N = 40

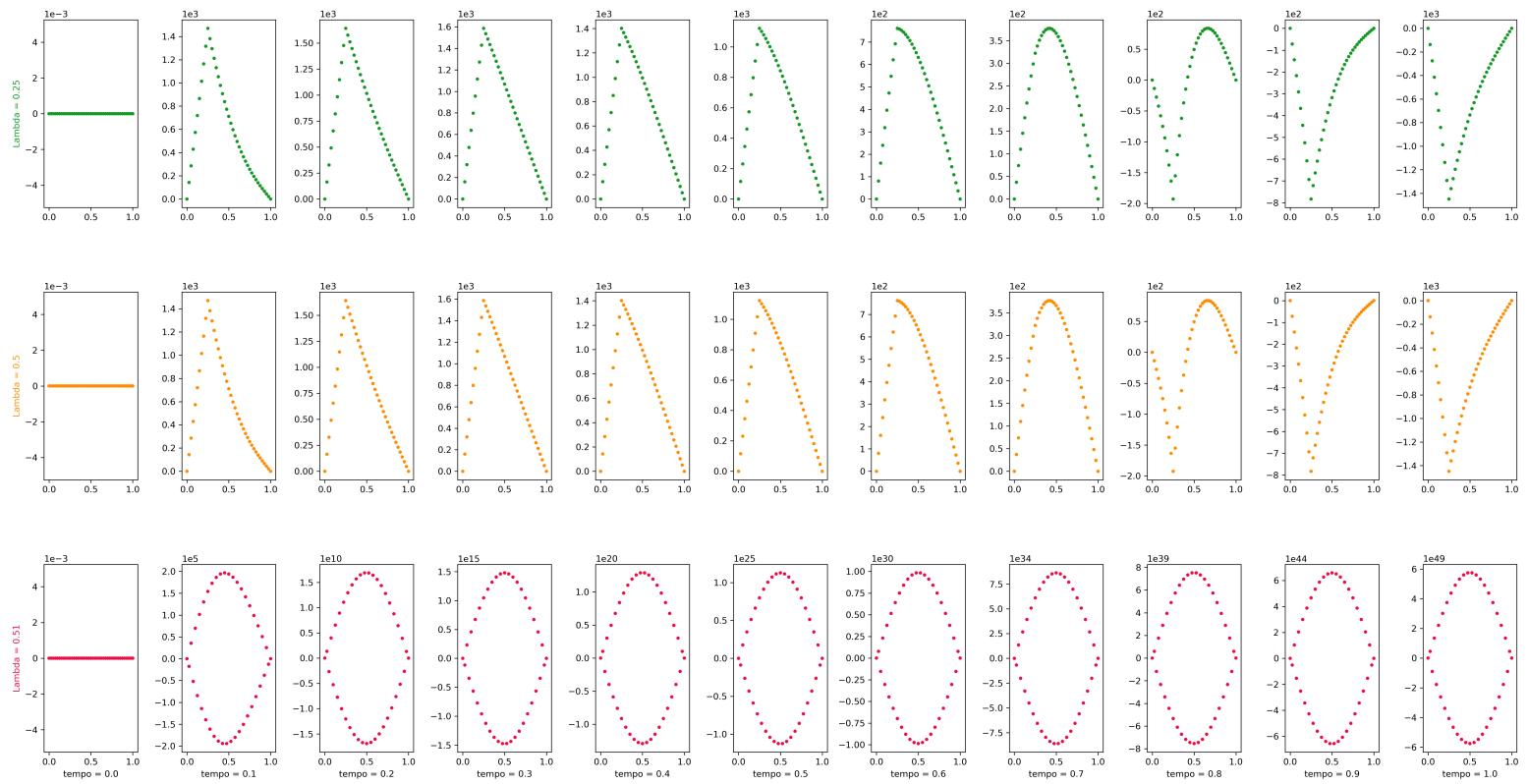


Figura 15: Gráfico da tarefa 1 letra c para N = 40

Plot para N = 80

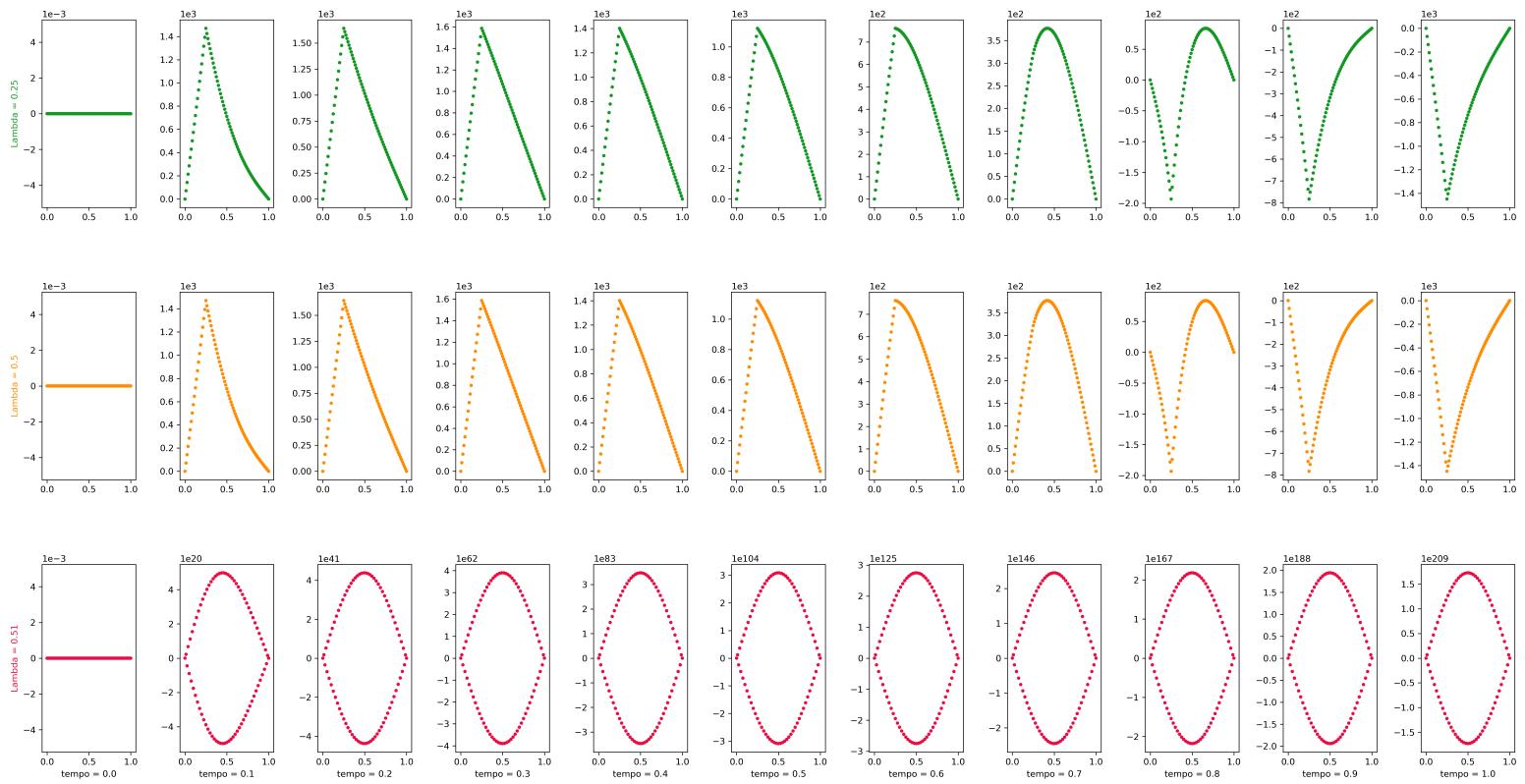


Figura 16: Gráfico da tarefa 1 letra c para N = 80

Plot para N = 160

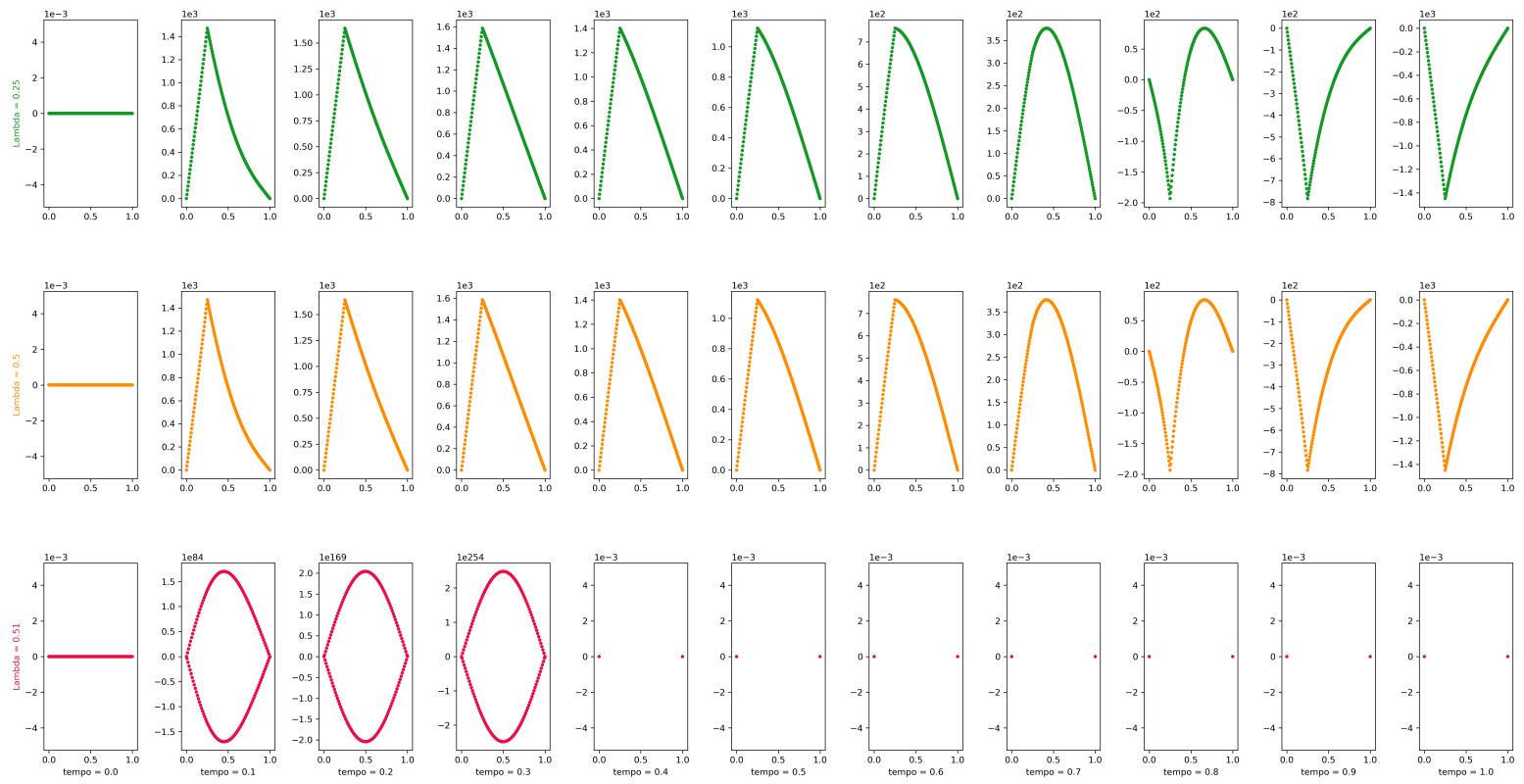


Figura 17: Gráfico da tarefa 1 letra c para N = 160

Plot para $N = 320$

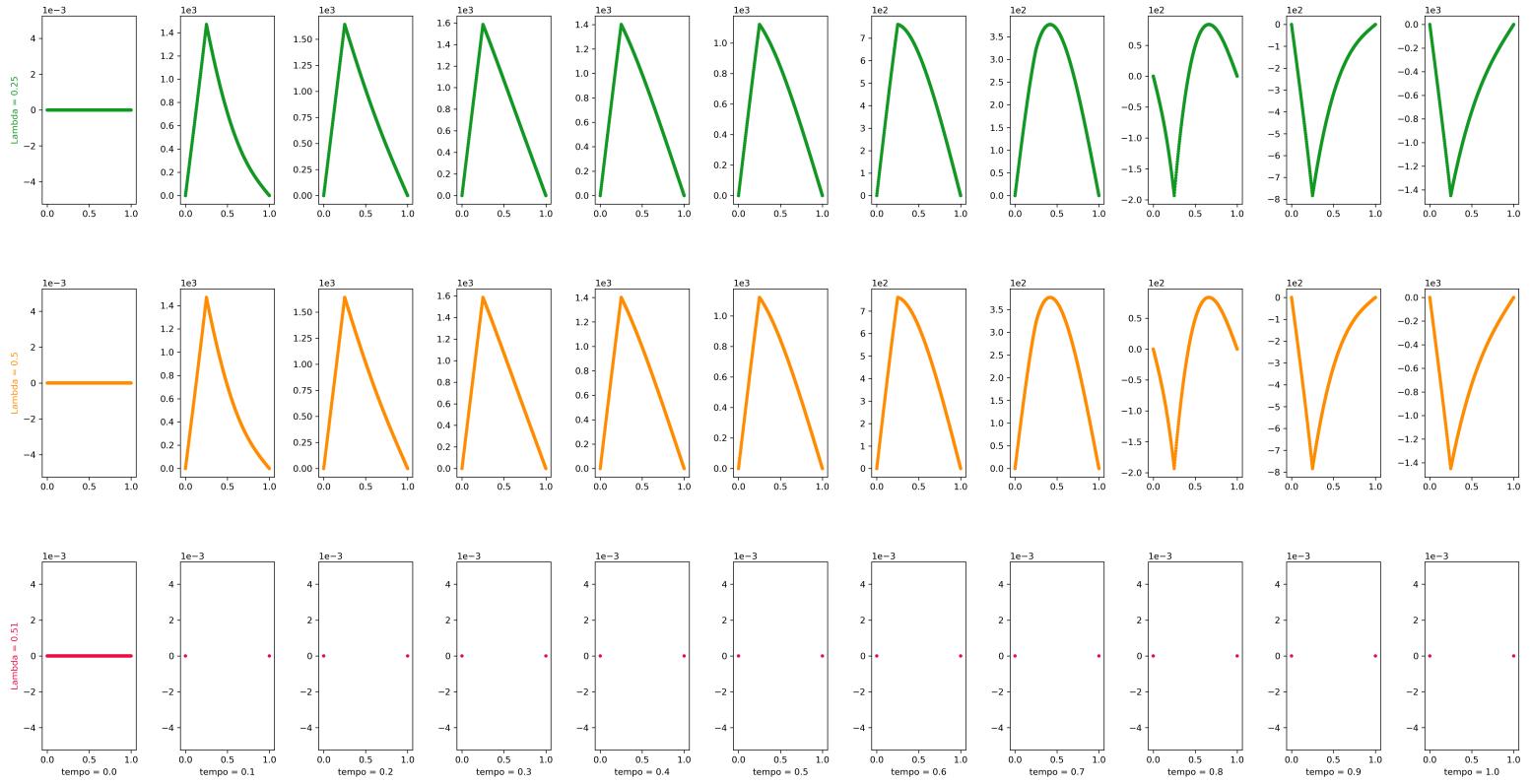


Figura 18: Gráfico da tarefa 1 letra c para $N = 320$

4 Segunda Tarefa

A Segunda Tarefa consiste na implementação de métodos implícitos, ainda deixando o valor de N (e consequentemente o de M) como variáveis a serem definidas em tempo de execução.

Em malhas mais finas (quando aumentamos N), a quantidade de passos no tempo para fazer as integrações aumenta consideravelmente, como podemos ver

nas Tabela (4) e na Tabela (8).

Os métodos implícitos consistem em, ao invés de se fazer um *loop* para o espaço (de tamanho $N+1$) dentro de um *loop* do tempo (tamanho $M+1$) calculando a equação de calor em cada iteração, fazer somente um *loop* para o espaço, e neste calcular um produto de matrizes em cada iteração. Usando esse método, esperamos ter tempos de execução muito menores, pois diminuímos o número de iterações.

4.1 Item a

Para tal, teremos $A \cdot x = b$, sendo x um vetor coluna composto por u_1^{k+1} até u_{N-1}^{k+1} , b um vetor coluna que depende da equação de calor e A uma matriz que satisfaz: $A = L \cdot D \cdot L^t$.

$$x = \begin{bmatrix} u_1^{k+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{k+1} \end{bmatrix}_{N-1 \times 1}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & l_{N-2} & 1 \end{bmatrix}_{N-1 \times N-1}$$

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{N-1} \end{bmatrix}_{N-1 \times N-1}$$

$$L^t = \begin{bmatrix} 1 & l_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & l_{N-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{N-1 \times N-1}$$

A partir da composição de L , L^t e D , temos que A pode ser escrita como:

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & l_1 d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_1 d_1 & l_1^2 d_1 + d_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & l_{N-2} d_{N-2} \\ 0 & \cdots & 0 & l_{N-2} d_{N-2} & l_{N-2}^2 d_{N-2} + d_{N-1} \end{bmatrix}_{N-1 \times N-1}$$

Assim, podemos decompor $A \cdot x = b$ em $L \cdot y = b$, $D \cdot z = y$ e $L^t \cdot x = z$, simplificando o sistema que deve ser resolvido.

Este desenvolvimento será usado para o item b e o item c desta mesma tarefa.

4.2 Item b

Tanto nesse experimento quanto para o experimento seguinte, teremos:

$$\Delta t = \Delta x \quad (19)$$

Assim, a partir de (11), concluímos que não vamos mais testar valores de lambda independentes, já que lambda agora depende de Δx e, consequentemente, de N.

4.2.1 Fator de redução esperado

Considerando que estamos usando o método de Euler implícito, temos o erro estimado por (12). Combinando-o com a equação (19) obtemos:

$$\|E\| \leq C \cdot (\Delta x + (\Delta x)^2) \quad (20)$$

Como sabemos que $\Delta x = \frac{1}{N}$, sendo N um inteiro maior ou igual a 10, temos que $\Delta x \ll 1$, da mesma forma, $(\Delta x)^2 \ll \Delta x$. Logo, podemos desprezar $(\Delta x)^2$ na equação (20). Então, ao dobrarmos N, Δx irá reduzir em 1/2. Assim, teremos que ao dobrar N, o módulo do erro de truncamento esperado deve reduzir em 1/2, levando em conta a desigualdade (20).

4.2.2 Euler implícito

Para este item, usaremos o método de Euler implícito, ou seja, construiremos a matriz A e a matriz b a partir da equação (8):

$$A = \begin{bmatrix} 1 - 2\lambda & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda & 1 - 2\lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1 - 2\lambda \end{bmatrix}_{N-N-1 \times 1}$$

$$b = \begin{bmatrix} u_1^k + \Delta t f_1^{k+1} + \lambda g_1(t^{k+1}) \\ u_2^k + \Delta t f_2^{k+1} \\ \vdots \\ u_{N-2}^k + \Delta t f_{N-2}^{k+1} \\ u_{N-1}^k + \Delta t f_{N-1}^{k+1} + \lambda g_2(t^{k+1}) \end{bmatrix}_{N-1 \times 1}$$

Com isso, podemos efetuar os cálculos para N como um dos inteiros: 10, 20, 40, 80, 160, 320, para os itens a, b e c da tarefa anterior:

4.2.3 Parte A

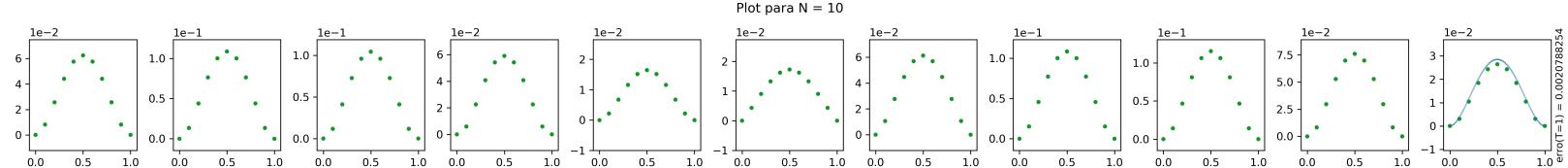


Figura 19: Gráfico da tarefa 2 letra b para $N = 10$ da parte a

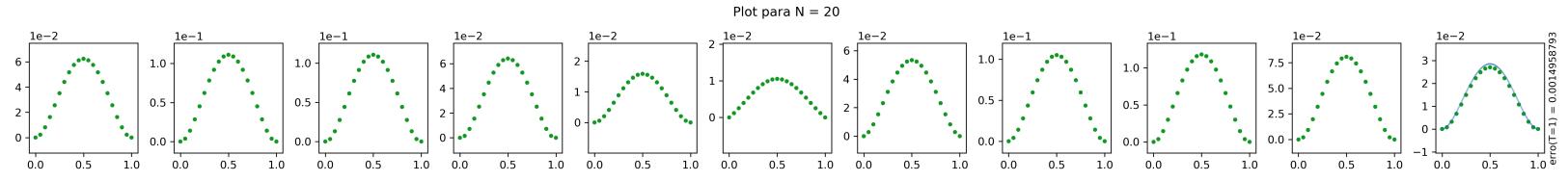


Figura 20: Gráfico da tarefa 2 letra b para N = 20 da parte a

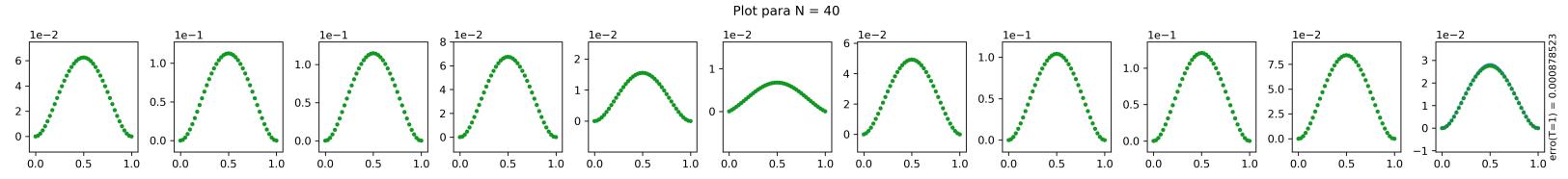


Figura 21: Gráfico da tarefa 2 letra b para N = 40 da parte a

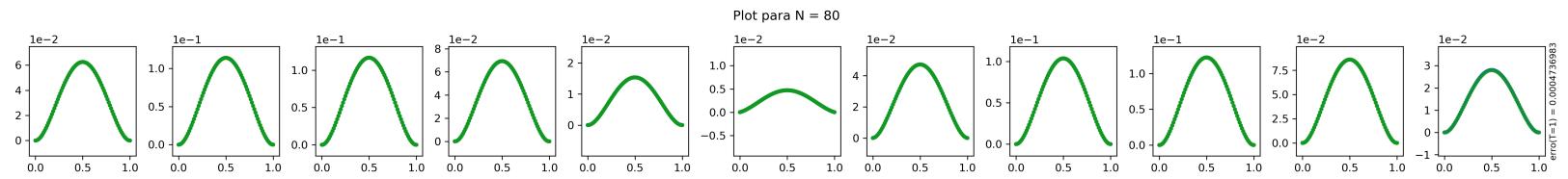


Figura 22: Gráfico da tarefa 2 letra b para N = 80 da parte a

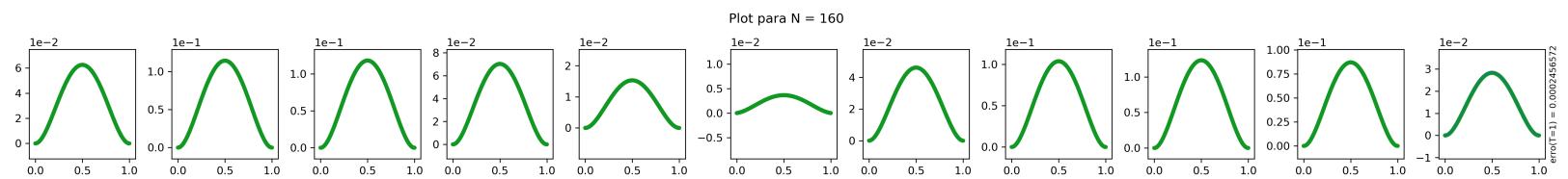


Figura 23: Gráfico da tarefa 2 letra b para N = 160 da parte a

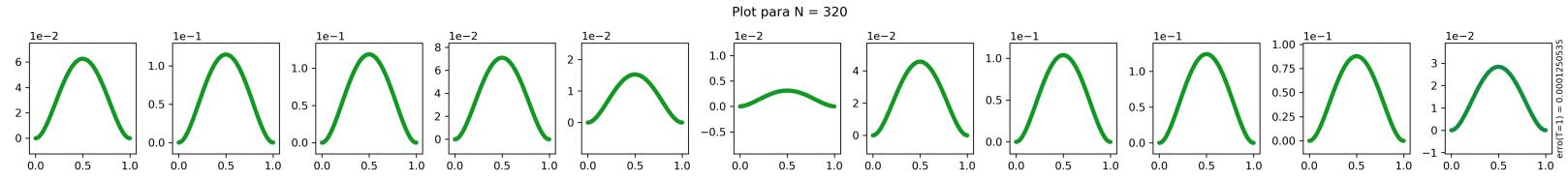


Figura 24: Gráfico da tarefa 2 letra b para $N = 320$ da parte a

N	Erro de truncamento	Fator de Redução %
10	$2.08 \cdot 10^{-3}$	-
20	$1.50 \cdot 10^{-3}$	72.12
40	$8.79 \cdot 10^{-4}$	58.60
80	$4.74 \cdot 10^{-4}$	53.92
160	$2.46 \cdot 10^{-4}$	51.90
320	$1.25 \cdot 10^{-4}$	50.81

Tabela 9: Análise do Erro de Truncamento e do Fator de Redução em função do valor de N para parte A

Assim, podemos notar que conforme aumentamos o valor de N , o fator de redução tende a $\frac{1}{2}$.

4.2.4 Parte B

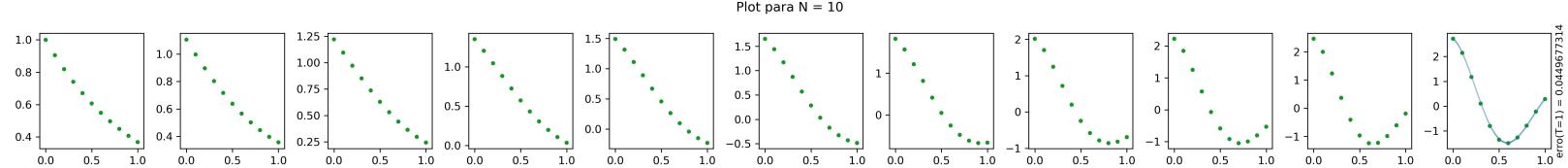


Figura 25: Gráfico da tarefa 2 letra b para $N = 10$ da parte b

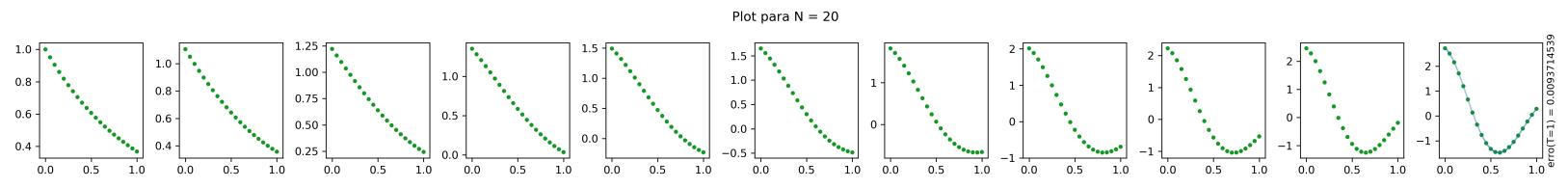


Figura 26: Gráfico da tarefa 2 letra b para $N = 20$ da parte b

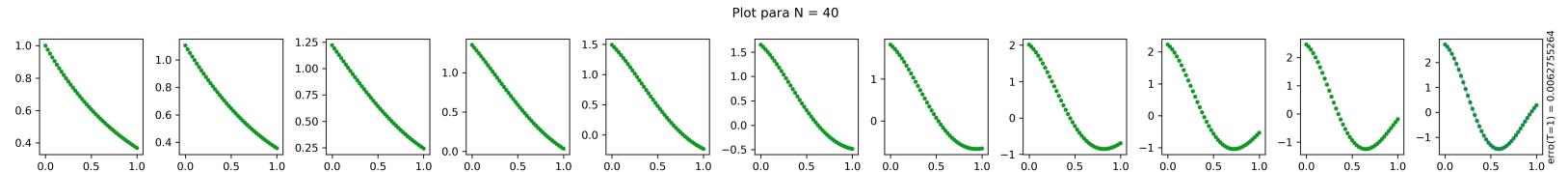


Figura 27: Gráfico da tarefa 2 letra b para $N = 40$ da parte b

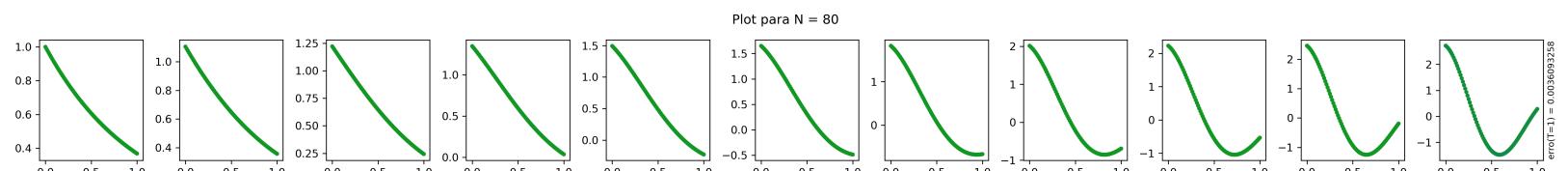


Figura 28: Gráfico da tarefa 2 letra b para $N = 80$ da parte b

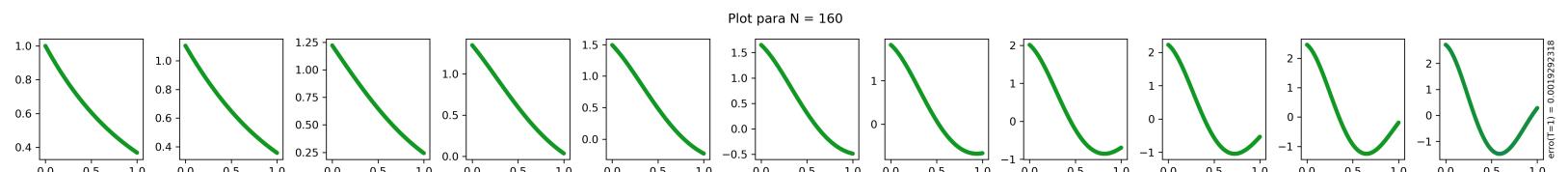


Figura 29: Gráfico da tarefa 2 letra b para $N = 160$ da parte b

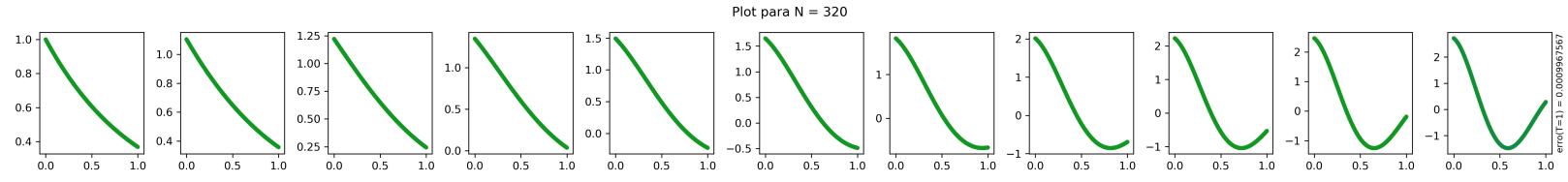


Figura 30: Gráfico da tarefa 2 letra b para $N = 320$ da parte b

N	Erro de truncamento	Fator de Redução %
10	$4.50 \cdot 10^{-2}$	-
20	$9.37 \cdot 10^{-3}$	20.82
40	$6.27 \cdot 10^{-3}$	66.92
80	$3.61 \cdot 10^{-3}$	57.57
160	$1.93 \cdot 10^{-3}$	53.46
320	$9.97 \cdot 10^{-4}$	51.66

Tabela 10: Análise do Erro de Truncamento e do Fator de Redução em função do valor de N para parte B

Novamente, podemos notar que conforme aumentamos N , o fator de redução tende a $\frac{1}{2}$.

4.2.5 Parte C

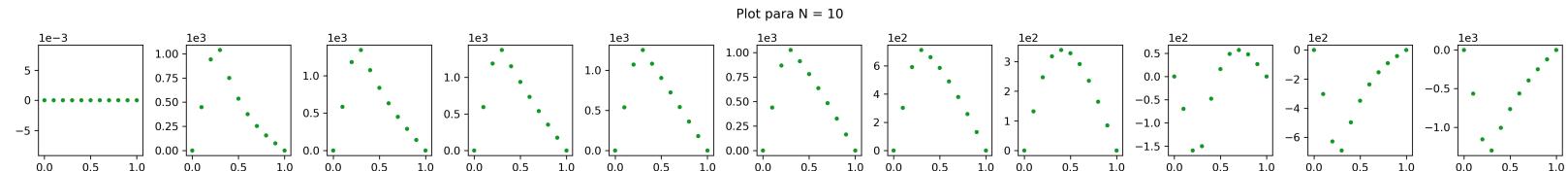


Figura 31: Gráfico da tarefa 2 letra b para $N = 10$ da parte c

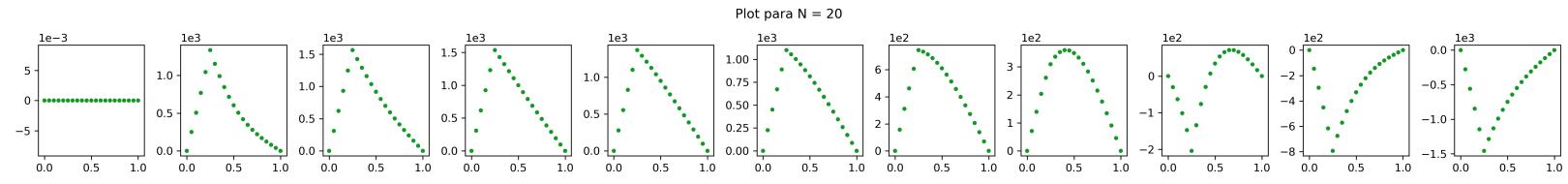


Figura 32: Gráfico da tarefa 2 letra b para $N = 20$ da parte c

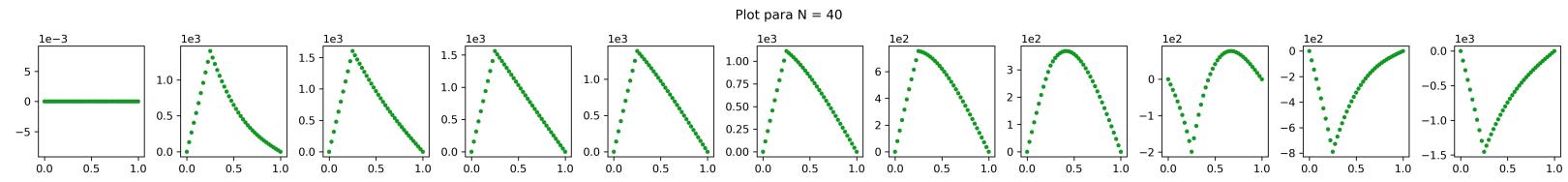


Figura 33: Gráfico da tarefa 2 letra b para $N = 40$ da parte c

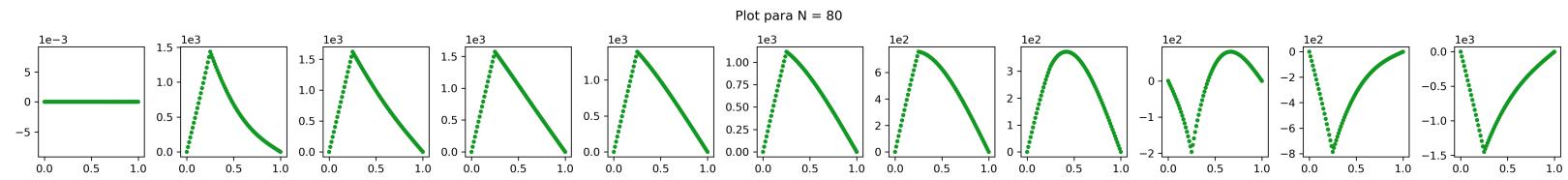


Figura 34: Gráfico da tarefa 2 letra b para $N = 80$ da parte c

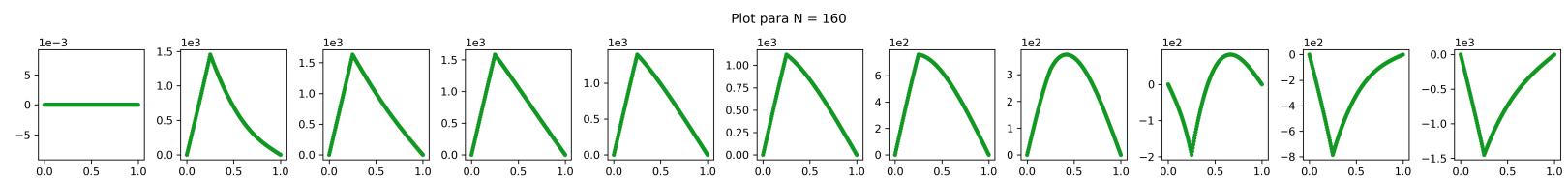


Figura 35: Gráfico da tarefa 2 letra b para $N = 160$ da parte c

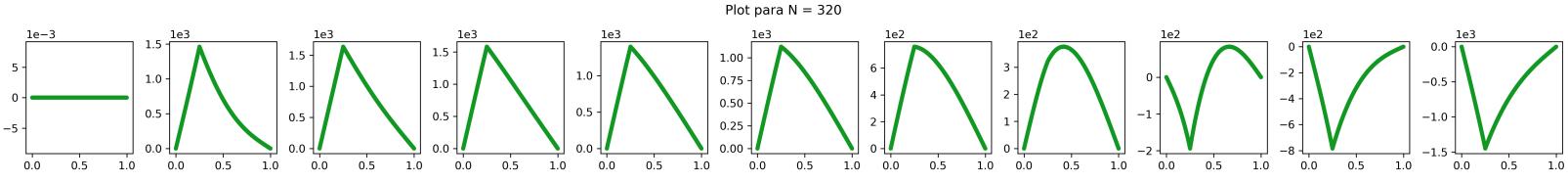


Figura 36: Gráfico da tarefa 2 letra b para $N = 320$ da parte c

4.3 Item c

Este item seguirá a mesma ideia por trás do item anterior, só que usaremos um método diferente, o de Crank-Nicolson. Na prática, o que muda é a aproximação da equação de calor exata, agora dada por:

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \frac{\lambda}{2}((u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1}) + (u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k)) + \frac{\Delta t}{2}(f(x_i, t^k) + f(x_i, t^{k+1})) \quad (21)$$

4.3.1 Fator de redução esperado

Considerando que estamos usando o método Crank-Nicolson implícito, temos o erro estimado por:

$$\|E\| \leq C((Deltat)^2 + (Deltax)^2) \quad (22)$$

Similarmente ao que fizemos no item anterior, combinamos (22) com (19) para obter:

$$\|E\| \leq C \cdot 2 \cdot (Deltax)^2 \quad (23)$$

Sabemos que $\Delta x = \frac{1}{N}$, sendo N um inteiro maior ou igual a 10 então, ao dobrarmos N , $(\Delta x)^2$ irá reduzir em $1/4$. Assim, teremos que ao dobrar N , o módulo do erro de truncamento esperado deve reduzir em $1/4$, levando em conta a desigualdade (23).

4.3.2 Crank-Nicolson implícito

Para esse item, usaremos o método Crank-Nicolson, ou seja, construiremos a matriz A e a matriz b a partir da equação (21), com A e b da forma:

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -\lambda/2 & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda/2 & 1 - \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\lambda/2 \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda/2 & 1 - \lambda \end{bmatrix}_{N-N-1 \times 1}$$

$$b = \begin{bmatrix} u_1^k + \frac{\lambda}{2}(g_1^{k+1} + (u_0^k - 2u_1^k + u_2^k)) + \frac{\Delta t}{2}(f(x_1, t^k) + f(x_1, t^{k+1})) \\ u_2^k + \frac{\lambda}{2}(u_1^k - 2u_2^k + u_3^k) + \frac{\Delta t}{2}(f(x_2, t^k) + f(x_2, t^{k+1})) \\ \vdots \\ u_{N-2}^k + \frac{\lambda}{2}(u_{N-3}^k - 2u_{N-2}^k + u_{N-1}^k) + \frac{\Delta t}{2} \cdot (f(x_{N-2}, t^k) + f(x_{N-2}, t^{k+1})) \\ u_{N-1}^k + \frac{\lambda}{2}(g_2^{k+1} + (u_{N-2}^k - 2u_{N-1}^k + u_{N-2}^k)) + \frac{\Delta t}{2}(f(x_{N-1}, t^k) + f(x_{N-1}, t^{k+1})) \end{bmatrix}_{N-1 \times 1}$$

A partir disso, podemos efetuar os cálculos para N como um dos inteiros: 10, 20, 40, 80, 160, 320, para os itens a, b e c da tarefa anterior.

4.3.3 Parte A

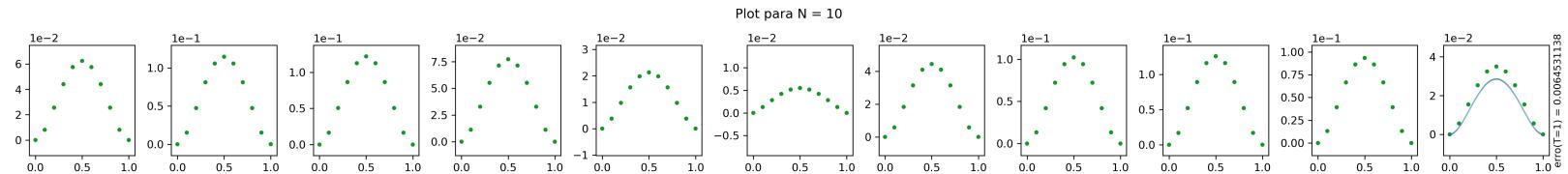


Figura 37: Gráfico da tarefa 2 letra c pra $N = 10$ da parte a

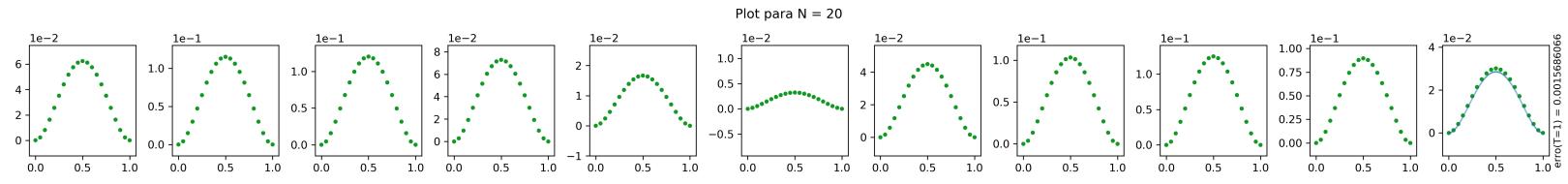


Figura 38: Gráfico da tarefa 2 letra c pra $N = 20$ da parte a

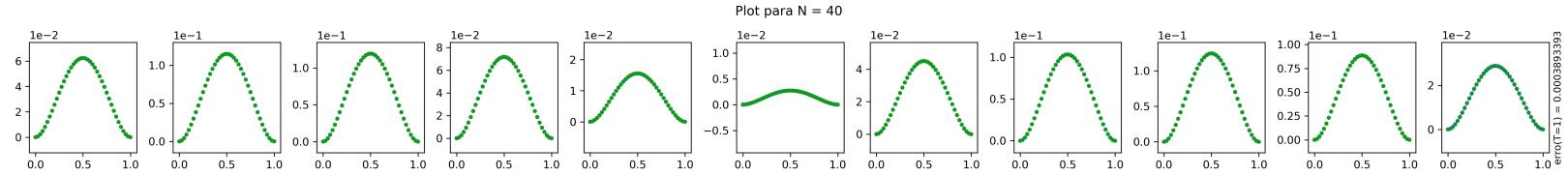


Figura 39: Gráfico da tarefa 2 letra c pra $N = 40$ da parte a

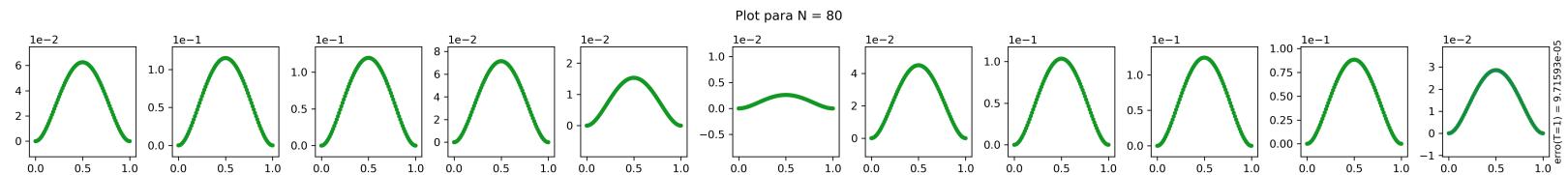


Figura 40: Gráfico da tarefa 2 letra c pra $N = 80$ da parte a

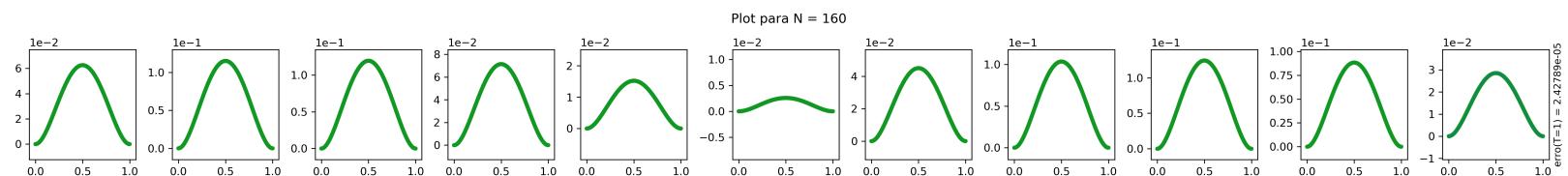


Figura 41: Gráfico da tarefa 2 letra c pra $N = 160$ da parte a

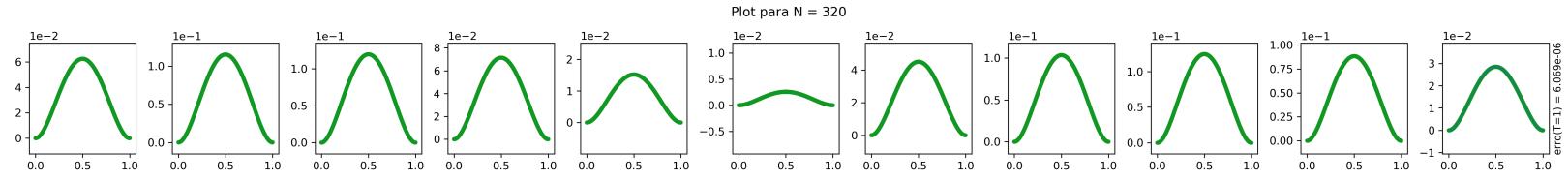


Figura 42: Gráfico da tarefa 2 letra c pra N = 320 da parte a

N	Erro de truncamento	Fator de Redução %
10	$6.45 \cdot 10^{-3}$	-
20	$1.57 \cdot 10^{-3}$	24.34
40	$3.89 \cdot 10^{-4}$	24.78
80	$9.72 \cdot 10^{-5}$	24.99
160	$2.43 \cdot 10^{-5}$	25.00
320	$6.07 \cdot 10^{-6}$	24.98

Tabela 11: Análise do Erro de Truncamento e do Fator de Redução em função do valor de N para parte B

4.3.4 Parte B

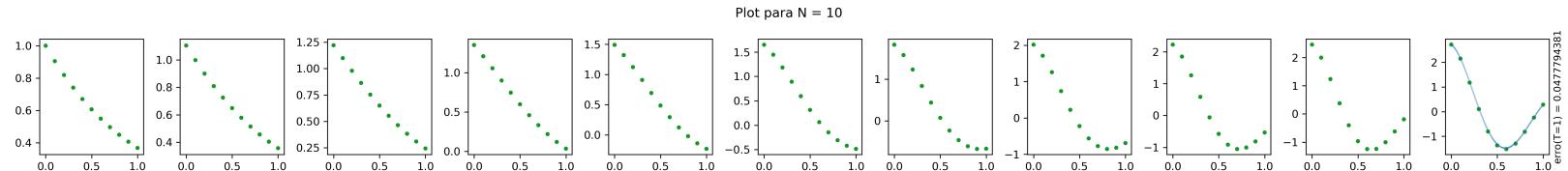


Figura 43: Gráfico da tarefa 2 letra c pra N = 10 da parte b

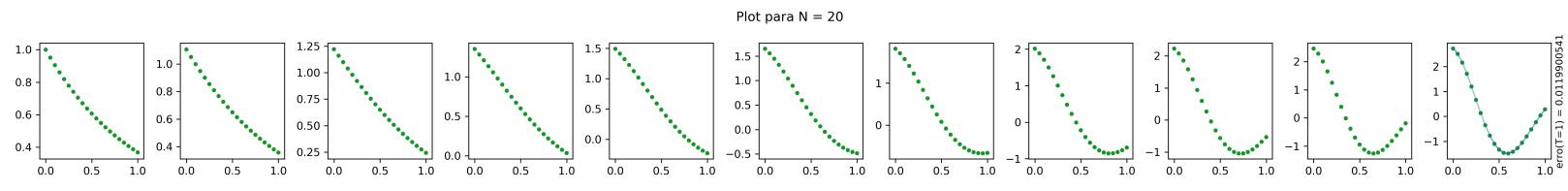


Figura 44: Gráfico da tarefa 2 letra c pra N = 20 da parte b

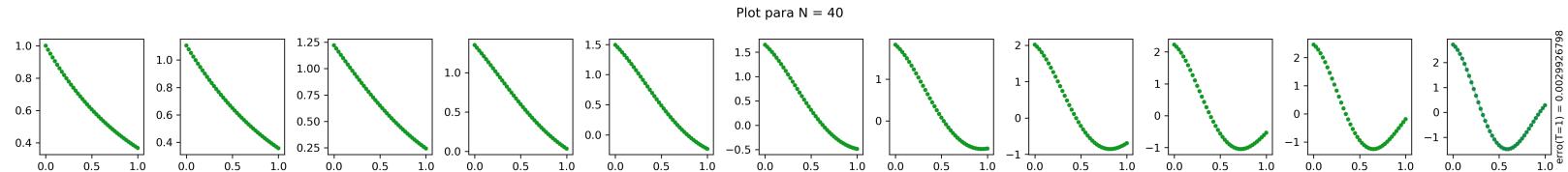


Figura 45: Gráfico da tarefa 2 letra c pra N = 40 da parte b

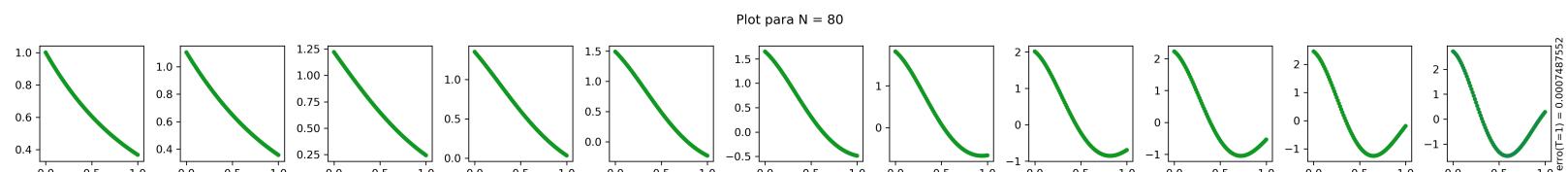


Figura 46: Gráfico da tarefa 2 letra c pra N = 80 da parte b

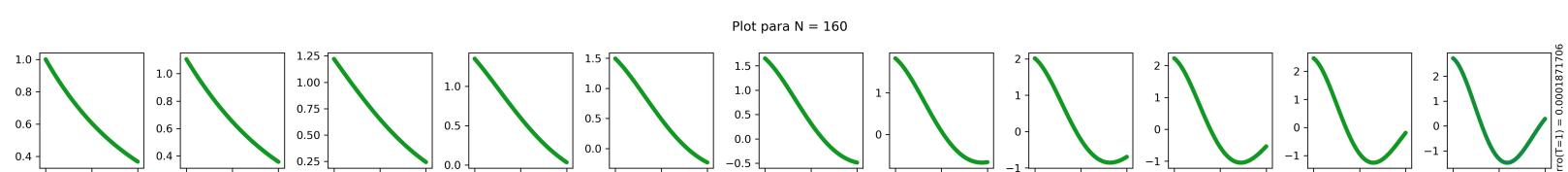


Figura 47: Gráfico da tarefa 2 letra c pra N = 160 da parte b

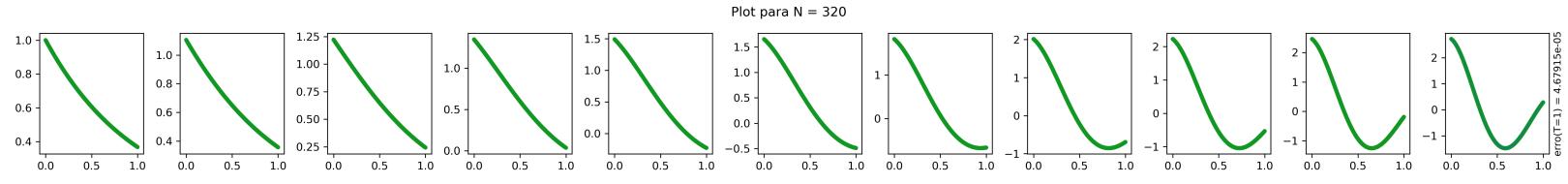


Figura 48: Gráfico da tarefa 2 letra c pra $N = 320$ da parte b

N	Erro de truncamento	Fator de Redução %
10	$6 \cdot 10^{-3}$	-
20	$1 \cdot 10^{-3}$	0.34
40	$3 \cdot 10^{-4}$	0.78
80	$9 \cdot 10^{-5}$	0.99
160	$3 \cdot 10^{-5}$	5.00
320	$7 \cdot 10^{-6}$	4.98

Tabela 12: Análise do Erro de Truncamento e do Fator de Redução em função do valor de N para parte A

4.3.5 Parte C

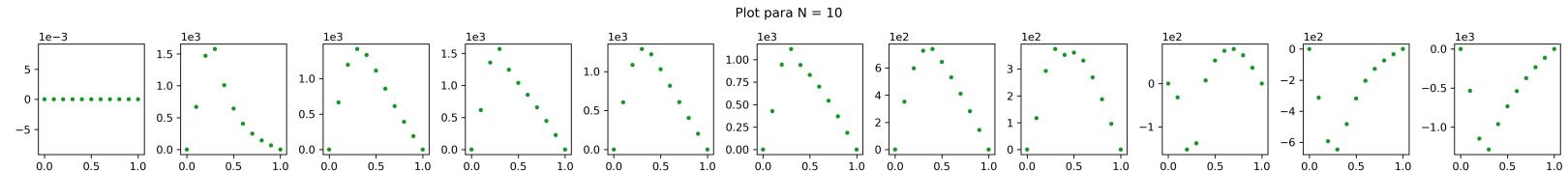


Figura 49: Gráfico da tarefa 2 letra c pra $N = 10$ da parte c

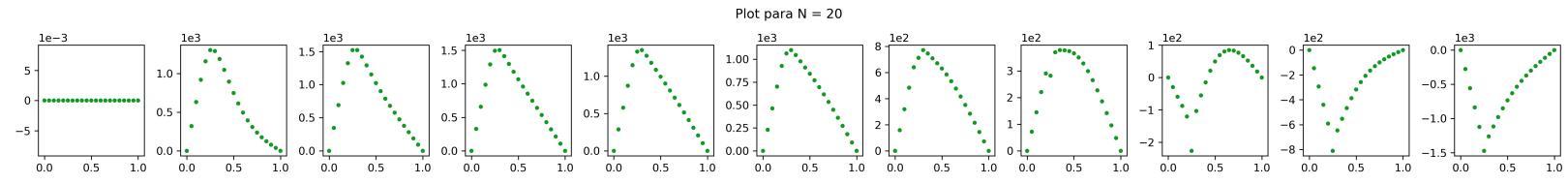


Figura 50: Gráfico da tarefa 2 letra c pra $N = 20$ da parte c

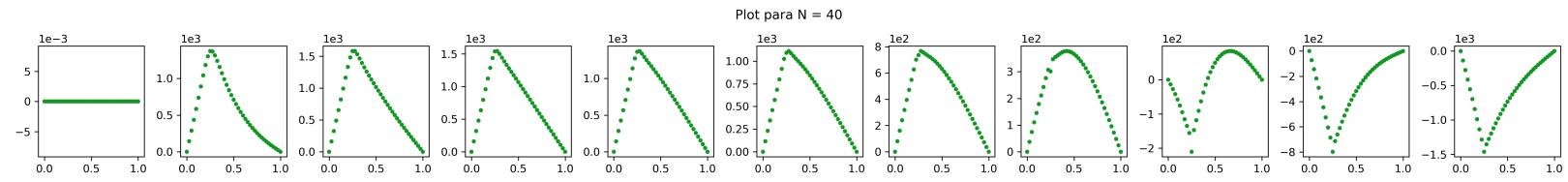


Figura 51: Gráfico da tarefa 2 letra c pra $N = 40$ da parte c

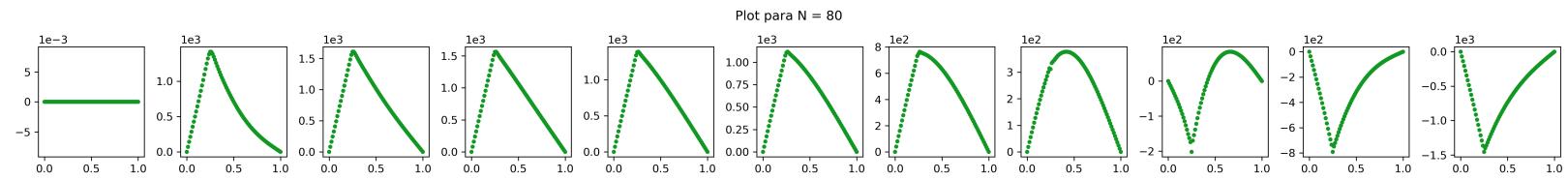


Figura 52: Gráfico da tarefa 2 letra c pra $N = 80$ da parte c

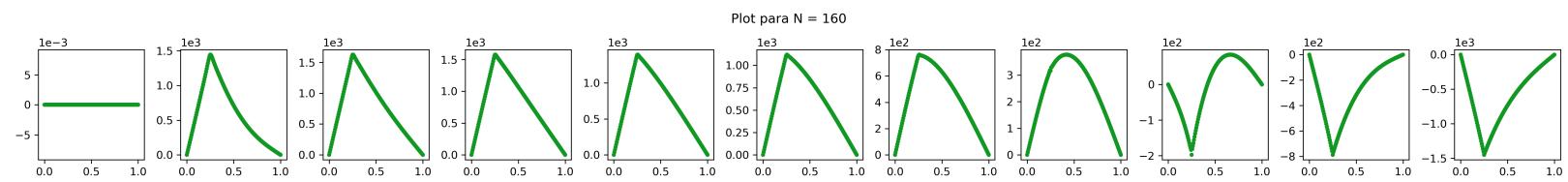


Figura 53: Gráfico da tarefa 2 letra c pra $N = 160$ da parte c

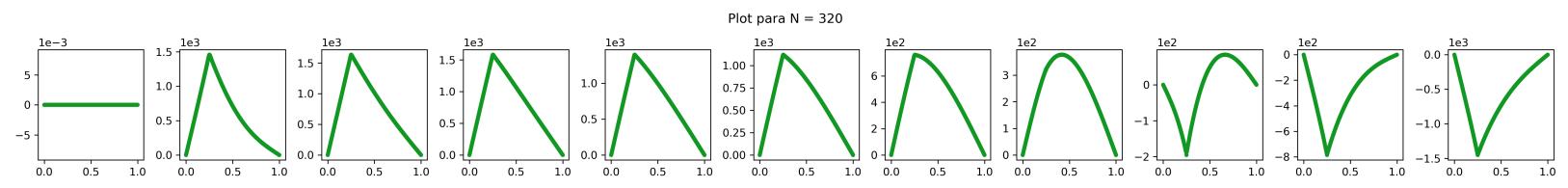


Figura 54: Gráfico da tarefa 2 letra c pra N = 320 da parte c