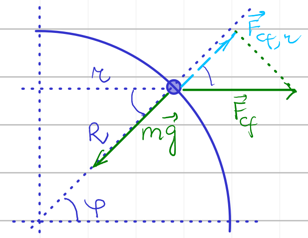
Neinerciālās atskaites sistēmas

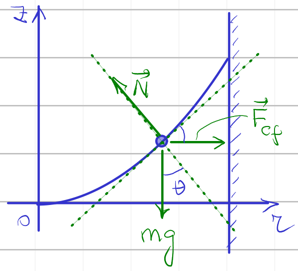
1



Ja akmens atraujas no virsmas, $\vec N = \vec 0$ un centrbēdzes spēka radiālai komponentei ir jākompensē smaguma spēks, t.i. $mg = m\omega^2 r \cos\varphi = m\omega^2 R\cos^2\varphi$

$$\omega = \frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{\frac{g}{R}} \qquad \underline{\underline{T = 2\pi\cos\varphi\sqrt{\frac{R}{g}} = 2{,}5\times10^3\ \mathrm{s}}}$$

2

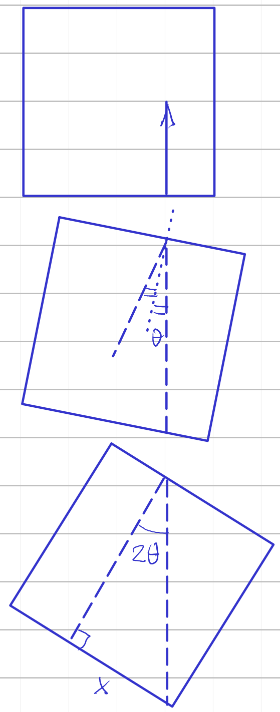


$$\vec N + m\vec g + \vec F_{cf} = \vec 0$$

$$\tan\theta = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{dz}{dr} \rightarrow dz = \frac{\omega^2}{g} r\,dr$$

$$\underline{\underline{z = \frac{\omega^2}{2g} r^2}}$$

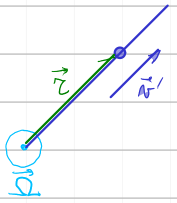
3



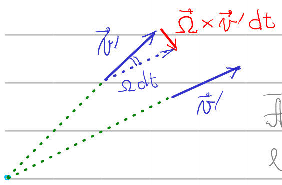
Ņemot vērā, ka rotācija ir lēna, var tuvināti pieņemt, ka laiks līdz otrai malai ir $t = l/v$. Pa šo laiku karuselis pagriezīsies pa leņķi $\theta = \omega l/v$, kas arī būs vienāds ar krišanas leņķi. Atstarošanās no otras malas notiek leņķī $2\theta = 2\omega l/v$ attiecībā pret sākotnējo virzienu. Kamēr ripa slīdēs atpakaļ, karusēlis pagriezīsies vēl pa $\omega l/v$, tātad ripa nonāks līdz pirmai malai perpendikulāri tai.

$$\underline{\underline{x = l\sin 2\theta \doteq l\cdot 2\theta = \frac{2\omega l^2}{v}}}$$

Koriolisa paātrinājums

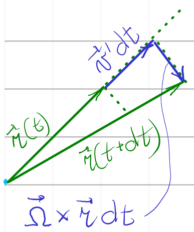


Apskatīsim mazu lodīti, kas kustas gar stieni ar nemainīgu ātrumu $\vec{v}'$ (stieņa A.S.). Stienis rotē ap savu galu ar leņķisko ātrumu $\vec{\Omega}$. Izteiksim lodītes paātrinājumu L sistēmā.



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{v}' + \vec{\Omega}\times\vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \vec{\Omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}.$$

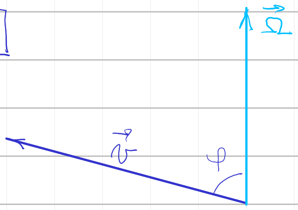
Ātrums $\vec{v}'$ mainās tikai pēc virziena, un tā izmaiņa laikā dt ir $\vec{\Omega}\times\vec{v}'dt$. Tātad, $d\vec{v}'/dt = \vec{\Omega}\times\vec{v}'$.



Lodītes rādiusvektors mainās divu faktoru ietekmē: (1) lodīte pārvietojas ar ātrumu $\vec{v}'$ gar stieni un (2) lodīte kopā ar stieni griežas ar ātrumu $\vec{\Omega}\times\vec{r}$. Līdz ar to $d\vec{r}/dt = \vec{v}' + \vec{\Omega}\times\vec{r}$. Apvienojot, iegūst

$$\vec{a} = \vec{\Omega}\times\vec{v}' + \vec{\Omega}\times\vec{v}' + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}) = \underbrace{2\vec{\Omega}\times\vec{v}'}_{\text{Koriolisa paātrinājums}} + \underbrace{\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})}_{\text{Centrtieces paātrinājums}}$$

4



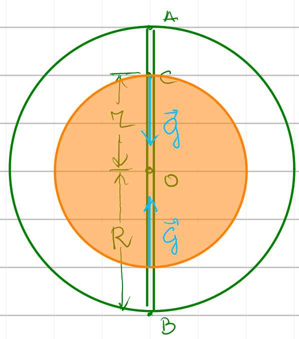
Spēks, kas darbojas uz sliedēm ir Koriolisa spēks, kas parādās tikai neinerciālajās A.S. $\vec{F}_C = -m\vec{a}_C = -2m\vec{\Omega}\times\vec{v}$.

$$F_C = 2m\Omega v\sin\varphi = \frac{4\pi m}{T}v\sin\varphi = 0{,}19\ \text{kN}$$

Virzienu Koriolisa spēkam nosaka pēc labās rokas. Sanāk, ka $\vec{F}_C$ ir vērsts austrumu virzienā.

Kustība gravitācijas laukā

5

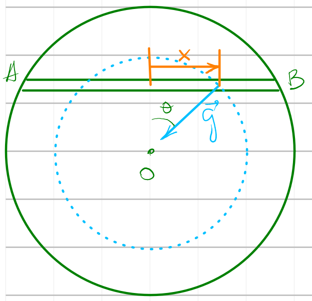


Sākumā apskatīsim tuneli, kas iet caur Zemes centru. Lai aprēķinātu brīvās krišanas paātrinājumu patvaļīgi izvēlētā punktā C, izmantosim Gausa teorēmu. Iedomāsimies sfērisko virsmu, kas iet caur punktu C. Pēc Gausa teorēmas laukam uz šīs virsmas ietekmē tikai tā lodes daļa, kuru tā ietvez. Šīs daļas masa ir $M = M_0\, r^3/R^3$, un tā radītais brīvās krišanas paātrinājums

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{G}{r^2}\frac{r^3}{R^3} = \frac{G}{R^3}\, r.$$

Tātad, spēks, kas darbojas uz ķermeni ar masu m, kas krīt caur šādu tuneli ir $F = mg = \frac{Gm}{R^3}\, r$.
Pēdējā izteiksme ir identiska atsperes svārstību kustības vienādojumam $F = kx$. No šejienes uzreiz seko, ka krišanas laiks

$$\tau = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \pi\sqrt{\frac{R^3}{g}}.$$

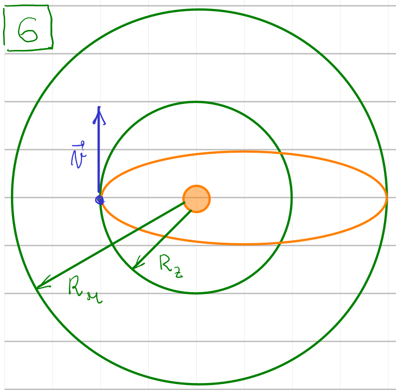


Gadījumā, ja tunelis neiet caur Zemes centru, mūs interesē tikai tā daļa no paātrinājuma, kas ir vērsta gar tuneli, t. i. $g\sin\theta$. No citas puses, nobīde no tuneļa centra $x = r\sin\theta$. II NL projekcijā uz tuneli sanāk

$$F = mg\sin\theta = m\frac{G}{R^3}\, r\sin\theta = m\frac{G}{R^3}\, x \quad \text{un} \quad F \sim x.$$

Tātad arī vispārīgā gadījumā $\underline{\underline{\tau = \pi\sqrt{R^3/g}}}$.

$\boxed{6}$

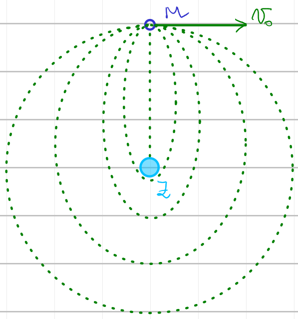


Pārejas trajektorija ir elipse ar pericentra attālumu R_Z un apocentra attālumu R_M. Tās lielā pusass $a = \frac{1}{2}(R_Z + R_M)$. Pēc III KL,

$$\frac{T^2}{T_Z^2} = \frac{a^3}{R_Z^3}$$

$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{T_Z}{2}\left(\frac{R_Z + R_M}{2R_Z}\right)^{3/2} = \frac{T_Z}{4\sqrt{2}}\left(1 + \frac{R_M}{R_Z}\right)^{3/2} = 0{,}707\,a$$

7 Attālums līdz Mēnesim ir daudz lielāks par Zemes rādiusu, tāpēc novērtējumam varam pieņemt abus ķermeņus par punktveida daļiņām.

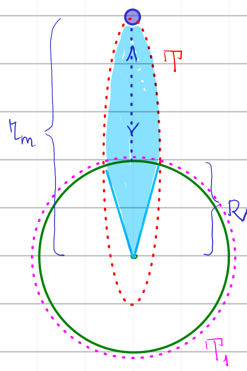


Samazinot orbitālo ātrumu, Mēness orbīta kļūs eliptiska, un, jo mazāks paliks ātrums, jo izstieptāka būs elipse un jo tuvāk Zeme atradīsies pericentram. Robežgadījumā kad $v_0 \to 0$, elipse paliks par nogriezni ar garumu d, kas ir deģenerēta elipse ar lielo pusasi $d/2$.

Pēc III KL sanāk, ka

$$t_\downarrow = \frac{T}{2} = \frac{T_0}{2}\left(\frac{d/2}{d}\right)^{3/2} = \frac{T_0}{4\sqrt{2}} = 4{,}8\,d.$$

8



No enerģijas nezūdamības

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{GmM}{R} = -\frac{GmM}{r_m} \quad \text{un} \quad \frac{mGM}{2R} - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{r_m}$$

un $r_m = 2R \not\gg R$. Tātad šajā gadījumā mēs nevaram uzskatīt Zemi par punktveida daļiņu. Kustība notiek gar vienu taisni, bet, lai mēs varētu pielietot Keplera likumus, uzskatīsim, ka taisnes nogriežņa vietā mums ir ļoti izstiepta elipse. Tā kā kustība pa augšējo puselipsi notiek lēnāk, bet pa apakšējo — ātrāk, mēs nevaram teikt, ka lidojuma laiks ir $T/2$: jālieto II KL.

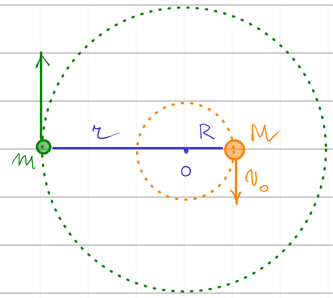
Kustības laiks ir proporcionāls rādiusvektora noklātajam laukumam. Tātad, ņemot vērā, ka $a \to R$,

$$\frac{t_{\uparrow\downarrow}}{T} = \frac{\frac{1}{2}\pi ab + ab}{\pi ab} = \frac{\pi + 2}{2\pi}$$

$$\frac{T^2}{T_1^2} = \frac{R^3}{R^3} \Rightarrow T = \frac{2\pi R}{v_I} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

$$t_{\uparrow\downarrow} = (\pi + 2)\sqrt{\frac{R^3}{GM}} = 69\ \text{min}$$

9



Gravitācijas spēks spēlē centrtieces spēka lomu, tāpēc

$$\frac{Gm\cancel{M}}{(r+R)^2} = \frac{\cancel{M} v_0^2}{R}.$$

Attālumi līdz masas centram ir saistīti savā starpā: $mr = MR$, tātad

$$Gm\cancel{R} = v_0^2 R^{\cancel{2}} \left(\frac{M}{m}+1\right)^2 = \left[M \gg m\right] = v_0^2 R \left(\frac{M}{m}\right)^2$$

No ātruma un perioda varam noteikt attālumu no zvaigznes līdz masas centram: $R = v_0 T/(2\pi)$. Tad

$$G = \frac{v_0^2 R}{M}\left(\frac{M}{m}\right)^3 = \frac{v_0^3 T}{2\pi M}\left(\frac{M}{m}\right)^3 \rightsquigarrow \underline{\underline{\frac{m}{M} = v_0\left(\frac{T}{2\pi G M}\right)^{1/3}}}$$

Pieņemot, ka $M = M_\odot$, skaitliski sanāk, ka $\frac{m}{M} \cong 4{,}2\times10^{-4}$.

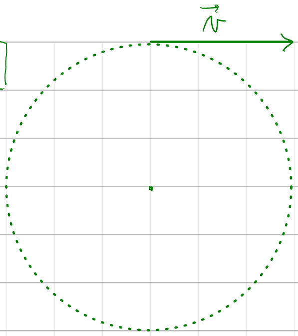
Temperatūru var novērtēt no Stefana–Bolcmana likuma. Zvaigzne staro jaudu $P = 4\pi\rho_z^2\sigma\theta_z^4$, kas sadalās pa sfēru ar rādiusu $(R+r)$. Planēta ir termodinamiskajā līdzsvarā, tātad tā staro ārā tik pat daudz siltuma, kā saņem no zvaigznes.

$$\cancel{\sigma}\theta_p^4 = \cancel{\sigma}\theta_z^4 \frac{\rho_z^2}{(R+r)^2} \rightsquigarrow \theta_p^2 = \theta_z^2 \frac{\rho_z}{\underbrace{R+r}_{=d}}$$

Tātad vienas zvaigznes planētām $\theta^2 d = \mathrm{const}$. Paceļot kubā un pielietojot III KL, sanāk ka $\theta^3 T = \mathrm{const}$. Izmantojot Zemi kā atskaites planētu,

$$\underline{\underline{\theta_p = \theta_z\left(\frac{T_z}{T_p}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 300\times\left(\frac{365}{4{,}23}\right)^{\frac{1}{3}} = 1{,}3\ \mathrm{kK}}}$$

10



Pavadoņa pilnā enerģija ir

$$W = -\frac{GmM}{2a}.$$

No enerģijas nezūdamības likuma,

$$-\frac{GmM}{2(R+dr)} + \frac{GmM}{2R} = -Cv^3\cdot ds$$

$$\frac{GmM}{2R}\left(\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{dr}{R}\right) = -Cv^3\cdot v\,dt \rightsquigarrow \frac{dr}{dt} = -\frac{2CR^2v^4}{GmM}$$

$$\tau = \frac{GmM\Delta h}{2CR^2v_1^4} = \frac{m\Delta h}{2CGM} = 23\,h$$

Kinētiskā enerģija riņķveida orbītā $W_k = -W$, tātad

$$\Delta W_k = -\Delta W = -\frac{G\cancel{m}M}{\cancel{2}R^2}dr = \frac{\cancel{m}v_1\,dv}{\cancel{2}}$$

$$\Delta v = \Delta h\sqrt{\frac{GM}{R^3}} = +0{,}12\ \frac{m}{s}$$