Termodinamika I

Atrisinājumi

1° Sākumā noteiksim ideālās gāzes molārās siltumietilpības pie konstanta tilpuma C_V un pie konstanta spiediena C_p. No I termodinamikas likuma $\mathrm{d}'Q = p\mathrm{d}V + \mathrm{d}U$ un molārās siltumietilpības definīcijas izriet, ka

$$C_V = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\mathrm{d}'Q}{\mathrm{d}T}\right)_V = \frac{1}{\nu}\left(p\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} + \frac{i}{2}\nu R\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}T}\right)_V = \frac{i}{2}R,$$

$$C_p = \frac{1}{\nu}\frac{\nu RT}{V}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}\right)_p + \frac{i}{2}R = R + \frac{i}{2}R = \frac{i+2}{2}R.$$

Ņemot vērā, ka īpatnējā siltumietilpība $c = C/\mu$, un atņemot iepriekšējos divus vienādojumus, iegūst

$$c_p - c_V = \frac{R}{\mu} \quad \rightsquigarrow \quad \mu = \frac{R}{c_p - c_V} = \frac{8{,}314}{912 - 649} = 32\,\mathrm{g\,mol^{-1}}.$$

Lai precīzāk noteiktu gāzi, noteiksim arī brīvības pakāpju skaitu

$$i = \frac{2c_V\mu}{R} = \frac{2c_V}{c_p - c_V} = 5.$$

Divatomu gāze ($i = 5$) ar molmasu $32\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$ ir, visdrīzāk, skābeklis O_2.

2° Izmantojot doto politropa procesa definīciju un iepriekšēja uzdevuma izvedumus, iegūst, ka

$$C = \frac{1}{\nu}\frac{\mathrm{d}'Q}{\mathrm{d}T} = \frac{p}{\nu}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} + \frac{i}{2}R = R\frac{T}{\mathrm{d}T}\frac{\mathrm{d}V}{V} + \frac{i}{2}R.$$

Sadalot mainīgos un atrisinot iegūto diferenciālvienādojumu, sanāk, ka

$$\left(\frac{C}{R} - \frac{i}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}T}{T} = \int\frac{\mathrm{d}V}{V}, \qquad \left(\frac{C}{R} - \frac{i}{2}\right)\ln T = \ln V + \ln\mathrm{const},$$

$$T^{\frac{C}{R}-\frac{i}{2}}V^{-1} = \mathrm{const} \quad\Rightarrow\quad TV^{n-1} = \mathrm{const} \quad \text{jeb} \quad pV^n = \mathrm{const},$$

kur $n = 2R/(iR - 2C) = (C_p - C)/(C_V - C)$ ir politropas rādītājs. Labi pazīstāmi izohoriskais, izobāriskais, izotermiskais un adiabātiskais procesi ir politropa procesa īpašgadījumi.

3° Izmantosim nosācījumā doto saikni starp $\mathrm{d}'A = p\mathrm{d}V$ un $\mathrm{d}U = (3/2)R\mathrm{d}T$.

$$K = \frac{2}{3}\frac{p\mathrm{d}V}{R\mathrm{d}T} = \frac{2}{3}\frac{T}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} \quad\rightsquigarrow\quad \frac{\mathrm{d}T}{T} - \frac{2}{3K}\frac{\mathrm{d}V}{V} = 0 \quad\rightsquigarrow\quad TV^{-\frac{2}{3K}} = \mathrm{const}.$$

Tiekot vaļā no temperatūras (izmantojot to, ka $T \sim pV$) un pārejot uz spiedieniem un tilpumiem, iegūst, ka

$$pV^{1-\frac{2}{3K}} = \text{const}, \qquad \frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{1-\frac{2}{3K}}, \qquad \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-\frac{4}{3K}}, \qquad K = \frac{4}{3}.$$

Kopējais procesā veiktais darbs

$$A = K\Delta U = K \cdot \frac{3}{2}\Delta(pV) = 2\left(p_1V_1 - p_0V_0\right) = 2 \cdot 10^5\,\text{J}.$$

4° No siltumietilpības definīcijas, ņemot vērā, ka vielas daudzums ir 1 mol un ka $C = KT$, izriet, ka pievadītais siltuma daudzums procesa laikā mainās kā

$$Q(T) = \int_{0\to} \mathrm{d}'Q = \int_{T_0}^{T} K\tilde{T}\mathrm{d}\tilde{T} = \frac{K(T^2 - T_0^2)}{2}.$$

No I termodinamikas likuma izriet, ka

$$A(T) = Q(T) - \Delta U(T) = \frac{K}{2}(T^2 - T_0^2) - \frac{3}{2}R(T - T_0).$$

Pēc nosācījuma $A(T_1) = 0$, tātad

$$\frac{K}{2}(T_1^2 - T_0^2) = \frac{3}{2}R(T_1 - T_0) \quad \rightsquigarrow \quad T_1 = \frac{3R}{K} - T_0. \tag{4.1}$$

Sākumā $p \sim V$ un temperatūra samazinās, tātad gāze saspiežas un veic negatīvo darbu. Pēc temperatūras T_* sasniegšanas gāze sāks izplēsties, veicot pozitīvo darbu. Pie temperatūras T_*

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}T} = KT - \frac{3R}{2} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad T_* = \frac{3R}{2K}.$$

Darbs A_-, ko gāze veic, atdziestot līdz T_* ir vienāds pēc moduļa ar prasīto darbu A_+, tātad

$$A_+ = -A(T_*) = \frac{3}{2}R\left(\frac{3R}{2K} - T_0\right) - \frac{K}{2}\left(\frac{9R^2}{4K^2} - T_0^2\right). \tag{4.2}$$

Lai noteiktu K, izmantosim doto sākumnosācījumu, kuru var pierakstīt kā $\mathrm{d}p/\mathrm{d}V = p/V$, no kurienes izriet, ka $p\mathrm{d}V = V\mathrm{d}p$. Siltumietilpība sākumpunktā

$$\begin{aligned} C = KT_0 &= \frac{1}{\mathrm{d}T}\left[p\mathrm{d}V + \frac{3}{2}\mathrm{d}(pV)\right] = \frac{1}{\mathrm{d}T}\left[\frac{p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{d}(pV)\right] \\ &= \frac{2\mathrm{d}(pV)}{\mathrm{d}T} = \frac{2R\mathrm{d}T}{\mathrm{d}T} = 2R, \end{aligned}$$

no kurienes $K = 2R/T_0$. Ieliekot šo vērtību (4.1) un (4.2), iegūst

$$A_+ = \frac{3R}{2}\left(\frac{3R}{2}\frac{T_0}{2R} - T_0\right) - \frac{R}{T_0}\left(\frac{9R^2}{4}\frac{T_0^2}{4R^2} - T_0^2\right) = \frac{RT_0}{16},$$
$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{3R}{KT_0} - 1 = \frac{3R}{T_0}\frac{T_0}{2R} - 1 = \frac{1}{2}.$$

5° Apskatīsim gaisa paketi augstumā z. Tā ka pakete ir mehāniskajā līdzvarā, spiediena spēku starpība, kas darbojas uz tās augšējo un apakšējo malu kompensē tās smaguma spēku, t. i. $\mathrm{d}p = -\rho g \mathrm{d}z$. Tā ka pakete neapmainās ar siltumu ar apkārtējo gaisu, tās spiediens, blīvums un temperatūra ir atšķirīgi dažādos augstumos, pie tā $pV^\gamma = \text{const}$. Apvienojot šīs atziņas ar stāvokļa vienādojumu, iegūst

$$pV^\gamma = \text{const} \quad \rightsquigarrow \quad pT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \text{const} \quad \rightsquigarrow \quad T^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\mathrm{d}p + \frac{\gamma}{1-\gamma}pT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}-1}\mathrm{d}T = 0,$$
$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{\mathrm{d}T}{T} = -\frac{\mu g}{RT}\mathrm{d}z \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{d}T = -\frac{2}{i+2}\frac{\mu g}{R}\mathrm{d}z,$$
$$T(z) = T_0 - \frac{2}{i+2}\frac{\mu g}{R}z.$$

Atmosfēra beidzas augstumā, kurā $T = 0$, tātad

$$T_0 = \frac{2}{i+2}\frac{\mu g}{R}H \quad \rightsquigarrow \quad H = \frac{i+2}{2}\frac{RT_0}{\mu g} = 31\,\text{km}.$$

Ūdens tvaika spiediens pie Zemes virsmas $p_\mathrm{v}(T_0) = \varphi p_\mathrm{sat}(T_0) = 21{,}44\,\text{mmHg}$, lineāri interpolējot tabulas datus intervālā $[26; 28]\,°\text{C}$. Spiediena atkarību no temperatūras var iegūt no adiabātas vienādojuma

$$pT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \text{const} \quad \rightsquigarrow \quad p(T) = p_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 21{,}44\left(\frac{T}{300}\right)^{3{,}5}.$$

Tvaiks kondensējas, kad $p_\mathrm{v} = p_\mathrm{sat}$. Attēlojot piesātinātā tvaika spiediena $p_\mathrm{sat}(T)$ un izmērītā tvaika spiediena $p_\mathrm{v}(T)$ atkarību no temperatūras vienā koordinātu plaknē, var nolasīt temperatūru, pie kuras notiks kondensācija. To pašu rezultātu var iegūt arī skaitliski, piemēram, ar tālāk aprakstīto dihotomijas metodi.

Mēs zinām, ka $p_\mathrm{v} < p_\mathrm{sat}$ pie 300 K. Paņemsim minimālo temperatūru tabulā un aprēķināsim tvaika spiedienu pie tās:

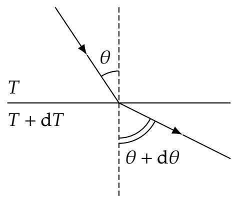
$$p_\mathrm{v}(12\,°\text{C}) = 21{,}44\left(\frac{285}{300}\right)^{3{,}5} = 17{,}9\,\text{mmHg} > p_\mathrm{sat},$$

tātad piesātinājums notiks pie temperatūras no [12; 27] °C. Paņemsim šī intervāla aptuveno viduspunktu (20 °C) un atkārtosim aprēķinus, rezultātā iegūstot $p_v = 19{,}7\,\mathrm{mmHg} > p_{sat}$. Tātad piesātinājums notiks intervālā [20; 27] °C. Šādā veidā sašaurinot intervālu, iegūst

$$\begin{aligned}
&[20;27]\,^\circ\mathrm{C} \to (24\,^\circ\mathrm{C}, p_v = 20{,}7\,\mathrm{mmHg} < p_{sat})\\
&[20;24]\,^\circ\mathrm{C} \to (22\,^\circ\mathrm{C}, p_v = 20{,}2\,\mathrm{mmHg} > p_{sat})\\
&[22;24]\,^\circ\mathrm{C} \to (23\,^\circ\mathrm{C}, p_v = 20{,}5\,\mathrm{mmHg} < p_{sat})\\
&[22;23]\,^\circ\mathrm{C} \to 22{,}5\,^\circ\mathrm{C}.
\end{aligned}$$

Tālāk turpināt nav lielas jēgas, jo ir sasniegta adekvāta precizitāte. Tātad, piesātinājums notiks pie temperatūras ap 22,5 °C. Šī temperatūra atbilst mākoņu robežai

$$h_0 = \frac{i+2}{2}\frac{R(T_0 - T)}{\mu g} = 460\,\mathrm{m}.$$



6° Kā mēs jau noteicām iepriekšējā uzdevumā, atmosfēras temperatūra samazinās ar augstumu, un līdz ar to samazinās arī skaņas ātrums tajā. Var pierādīt, ka skaņas ātrums $c \sim \sqrt{T}$. Tas nozīmē, ka augšējie atmosfēras slāņi ir „akustiski blīvāki" par apakšējiem. Ir zināms, ka, viļņiem pārejot no blīvākas vides uz mazāk blīvu, var notikt pilnīgā iekšējā atstarošanās. Mūsu gadījumā tas nozīmēs, ka skaņa vairs nespēs izplatīties uz leju. Ja tas notiks augstumā $z > 0$, mēs šo skaņu nevarēsim dzirdēt. Kritiskajā gadījumā pilnīgā iekšējā atstarošanās notiks tieši pie Zemes virsmas.

Apskatīsim skaņas pāreju no slāņa ar temperatūru T uz slāni ar temperatūru $T + \mathrm{d}T$. Pēc Sneliusa likuma, ņemot vērā, ka pie Zemes virsmas $\theta = \pi/2$,

$$\frac{\sin(\theta + \mathrm{d}\theta)}{\sin\theta} = \frac{c + \mathrm{d}c}{c} = \sqrt{\frac{T + \mathrm{d}T}{T}} \rightsquigarrow 1 + \frac{\cos\theta\mathrm{d}\theta}{\sin\theta} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}T}{T}$$

$$2\cot\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}T}{T} \rightsquigarrow \frac{1}{\sin^2\theta_0} = \frac{T_0}{T} = \left(1 - \frac{\alpha z}{T_0}\right)^{-1}.$$

Tā kā mums ir jāsasaista raksturīgie attālumi horizontālajā un vertikālajā virzienā, ir ērti izmantot pieskares ģeometrisko interpretāciju (funkcijas atvasinājums ir vienāds ar pieskares slīpuma koeficientu). Šajā gadījumā

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\cot\theta = -\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha z}{T_0}\right)^{-1} - 1} \doteq -\sqrt{\frac{\alpha z}{T_0}} \rightsquigarrow \int_0^H \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}} = L\sqrt{\frac{\alpha}{T_0}}$$

Šeit mēs tuvināti pieņemām, ka $\alpha z/T_0 \ll 1$: pie lielākā apskatāmā augstuma $\alpha z/T_0 = 0{,}13$, ko priekš novērtējuma varētu uzskatīt par mazu lielumu. Izsakot maksimālo attālumu, iegūst

$$L = 2\sqrt{\frac{HT_0}{\alpha}} = 22\,\mathrm{km}.$$